Ристо Малчески, Скопје
Здравко Цветковски, Скопје

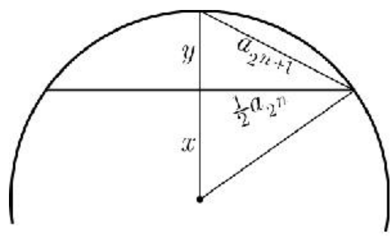
МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА II

Во претходниот број се запознавме со методот на математичка индукција и разгледавме некои негови примени во алгебрата. Во натамошните разгледувања ќе покажеме како математичката индукција може да се примени во геометријата. Притоа, ќе видиме како овој метод може да се искористи во геометриските задачи за пресметување. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 5. Пресметај ја страната a_{2^n} на правилен 2^n – аголник, впишан во кружница со радиус R.

Решение. За $n=2$ правилниот 2^n – аголник е квадрат, па затоа неговата страна е $a_4 = R\sqrt{2}$. Понатаму, ако го искористиме цртеж 1) наоѓаме:

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}} &= \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4} + y^2} = \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4} + (R-x)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4} + \Big(R - \sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}\Big)^2} \qquad (1) \\ &= \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}}. \end{aligned}$$



црт. 1

Од претходно изнесеното следува дека страната на правилниот осумаголник впишан во кружница со радиус R е

$$a_8 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{2R^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Аналогно се покажува дека страните на правилниот шеснаесетаголник и правилниот 32-аголник впишан во кружница со радиус R се:

$$a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ \text{ и } \ a_{32} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ ,$$

соодветно. Затоа природно е да претпоставиме, дека за секој $n \geq 2$ страната a_{2^n} на правилниот 2^n – аголник, впишан во кружница со радиус R е дадена со формулата

$$a_{2^n} = R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ kor en}}\ . \qquad (2)$$

Користејќи го принципот на математичка индукција ќе докажеме дека формулата (2) е точна за секој $n \geq 2$.

а) Јасно, формулата (2) важи за $n = 2$.

б) Нека претпоставиме дека (2) важи за некој природен број $n \geq 2$. Сега, од (1) следува

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2^n}^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ kor en}})^2}}$$

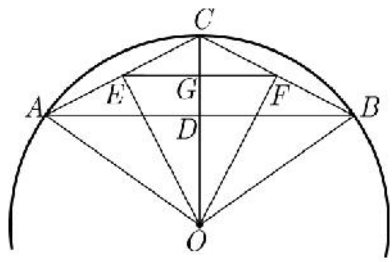
$$= R\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}(2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ kor eni}})}} = R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ kor eni}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за секој природен број $n \geq 2$. ♦

Забелешка 1. Ако земеме предвид дека должината на кружницата со радиус R е $L = 2® R$ и дека кога $n \to \infty$ истата е граница на периметрите на впишаните 2^n – аголници добиваме дека

$$2® R = \lim_{n\to\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^n R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ kor en}}$$



црт. 2

т.е.

$$® = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ kor en}}. ♦$$

Пример 6. Најди правило за пресметување на радиусите r_n и R_n на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^n – аголник со даден периметар p.

Решение. а) Лесно се пресметува дека $r_2 = \frac{p}{8}$ и $R_2 = \frac{p\sqrt{2}}{8}$.

б) Нека се дадени радиусите r_n и R_n на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^n – аголник со даден периметар p. Ќе ги пресметаме радиусите r_{n+1} и R_{n+1} на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^{n+1} – аголник со истиот периметар. Нека AB е страната на правилниот 2^n – аголник со периметар p, O е неговиот центар, C е средината на лакот AB и D е средината на тетивата AB (црт. 2). Понатаму, нека EF е средната линија на триаголникот ABC паралелна на страната AB и G е средината на отсечката EF. Од

$$\measuredangle EOF = \measuredangle EOC + \measuredangle FOC = \frac{1}{2}\measuredangle AOC + \frac{1}{2}\measuredangle BOC = \frac{1}{2}\measuredangle AOB$$

следува дека отсечката EF е еднаква на страната на правилниот 2^{n+1} – аголник впишан во кружница со радиус OE, при што периметарот на овој 2^{n+1} – аголник е еднаков на

$$2^{n+1}\overline{EF} = 2^{n+1}\frac{\overline{AB}}{2} = 2^n\overline{AB} = p.$$

Според тоа,

$$r_{n+1} = \overline{OG} \text{ и } R_{n+1} = \overline{OE}.$$

Понатаму е јасно дека

$$\overline{OC} - \overline{OG} = \overline{OG} - \overline{OD}, \text{ т.е. } R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n,$$

од каде наоѓаме $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$. Конечно, од правоаголниот триаголник OEC имаме

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}\bullet\overline{OG}, \text{ т.е. } R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$$

па затоа

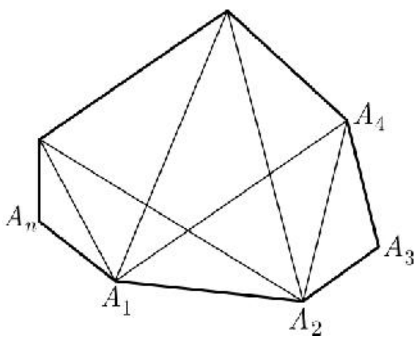
$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}.$$

Конечно

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2} \text{ и } R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}. \ ♦$$

Пример 7. Најди правило за пресметување на бројот $P(n)$ на начините, со кои конвексен n – аголник може да биде поделен на триаголници со негови дијаго-нали кои не се сечат.

Решение. За триаголник овој број очигледно е еднаков на еден, т.е. $P(3) = 1$.



Нека претпоставиме дека сме ги определиле броевите $P(k)$, $k < n$. За да го определиме бројот $P(n)$ ќе го разгледаме конвексниот n – аголник $A_1A_2...A_n$. При секоја негова поделба на триаголници страната A_1A_2 ќе биде страна на еден од добиените триаголници, чие трето теме може да се совпадне со секоја од точките $A_3, A_4, ..., A_n$. Притоа, бројот на начи-ните на поделба на n – аголникот, при кои третото теме на триаголникот ќе се совпадне со точката A_3 е еднаков на бројот на начините на поделбата на $(n-1)$ –

аголникот $A_1A_3A_4...A_n$, т.е. тој е еднаков на $P(n-1)$. Бројот на начините на поделба, при кои третото теме ќе се совпадне со точката A_4 е еднаков на бројот на начините $P(n-2)$ на поделба на $(n-2)-$аголникот $A_1A_4...A_n$ помножен со бројот на поделба $P(3)$ на триаголникот $A_2A_3A_4$ (зошто?). Бројот на начините на поделба, при кои третото теме се совпаѓа со точката A_5 е еднаков на $P(n-3)P(4)$, бидејќи секоја поделба на $(n-3)-$аголникот $A_1A_5...A_n$ се комбинира со секоја поделба на четириаголникот $A_2A_3A_4A_5$. Продолжувајќи ја постапката ја наоѓаме релацијата:

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+...+P(4)P(n-3)+P(3)P(n-2)+P(n-1) \quad (3)$$

Ако ја искористиме релацијата (3) последователно наоѓаме:

$$P(4)=P(3)+P(3)=2,$$
$$P(5)=P(4)+P(3)P(3)+P(4)=5,$$
$$P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14,$$
$$P(7)=P(6)+P(5)P(3)+P(4)P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42,$$
$$P(8)=P(7)+P(6)P(3)+P(5)P(4)+P(4)P(5)+P(3)P(6)+P(7)=132 \quad \text{i t n.}$$

Забелешка. Користејќи ја формулата (3) може да се докаже, дека за секој $n\geq 3$ важи

$$P(n)=\frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}.$$

Последната формула нема да ја докажуваме, бидејќи истата излегува надвор од рамките на нашите разгледувања. ♦

Во геометријата принципот на математичка индукција може да се искористи и за пресметувања според димензијата во која се рзгледува задачата, т.е. задачата последователно да се разгледува на права, во рамнина и во простор.

Пример 8. а) На колку делови n точки ја делат правата.

б) На колку делови ја делата рамнината n прави такви, што секои две од нив се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба)

в) На колку делови го делат просторот n рамнини такви, што секои три размнини се сечат и никои четири рамнини немаат заедничка точка (рамнини во општа положба).

Решение. а) Ако со $F_1(n)$ го означиме бараниот број, тогаш очигледно $F_1(n)=n+1$.

б) Една права ја дели рамнината на два дела.

Нека претпоставиме,дека е познат бројот $F_2(n)$ на деловите, на кои n прави во општа положба ја делат рамнината и нека се дадени $n+1$ права во општа положба. Првите n прави ја делат рамнината на $F_2(n)$ делови, а според условот $(n+1)-$та права p ги сече останатите n прави во n различни точки. Според задачата под а) овие n точки ја делат правата p на $F_1(n)=n+1$ делови. Според тоа, правата p сече $F_1(n)=n+1$ од веќе добиените делови на кои првите n прави ја делат рамнината и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_2(n)$ додава нови $F_1(n)=n+1$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n+1$ права во општа положба ја делат рамнината важи

$$F_2(n+1)=F_2(n)+F_1(n)=F_2(n)+(n+1)\,. \qquad (4)$$

Ако во равенството (4), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$ добиваме

$$\begin{aligned} F_2(n) &= F_2(n-1)+n,\\ F_2(n-1) &= F_2(n-2)+n-1,\\ F_2(n-2) &= F_2(n-3)+n-2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_2(3) &= F_2(2)+3,\\ F_2(2) &= F_2(1)+2. \end{aligned}$$

Ако ги собереме последните равенства и земеме предвид дека $F_2(1)=2$ наоѓаме

$$F_2(n)=F_2(1)+[n+(n-1)+...+3+2]=1+[n+(n-1)+(n-2)+...+2+1]=1+\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

в) Една рамнина го дели просторот на на два дела.

Нека претпоставиме,дека е познат бројот $F_3(n)$ на деловите, на кои n рамнини во општа положба го делат просторот и нека се дадени $n+1$ рамнини во општа положба. Првите n рамнини го делат просторот на $F_3(n)$ делови, а според условот $(n+1)-$та рамнина ® ги сече останатите n рамнини во n различни прави, кои се наоѓаат во општа положба (зошто?). Според задачата под б) овие n прави ја делат рамнината ® на $F_2(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$ делови. Според тоа, рамнината ® сече $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ од веќе добиените делови на кои првите n рамнини го делат просторот и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_3(n)$ додава нови $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n+1$ рамнина во општа положба го делат просторот важи

$$F_3(n+1)=F_3(n)+F_2(n)=F_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2}\,. \qquad (5)$$

Ако во равенството (5), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$ добиваме

$$F_3(n)=F_3(n-1)+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2},$$

$$F_3(n-1)=F_3(n-2)+\frac{(n-2)^2+(n-2)+2}{2},$$

....

$$F_3(3)=F_3(2)+\frac{2^2+2+2}{2}$$

$$F_3(2)=F_3(1)+\frac{1^2+1+2}{2}.$$

Ако ги собереме последните равенства иземеме предвид дека $F_3(1)=2$ наоѓаме

$$F_3(n)=F_3(1)+\tfrac{1}{2}[(n-1)^2+...+2^2+1^2]+\tfrac{1}{2}[(n-1)+(n-2)+...+2+1]+\tfrac{1}{2}[\underbrace{2+2+...+2+2}_{(n-1)-\text{na dvojka}}]$$

$$=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1),$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$F_3(n)=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.\ \blacklozenge$$

Пример 9. Најди го бројот на деловите на кои е поделена рамнината од n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе.

Решение. Нека е даден бројот $\Phi_2(n)$ на делови на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Бидејќи n кружници ја сечат $(n+1)-$та кружница во n парови точки и тие истата ја делат на $\Phi_1(n)=2n$ (задача 6), добиваме дека $(n+1)-$та кружница сече $\Phi_1(n)=2n$ од $\Phi_2(n)$ деловите на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Оттука го добиваме равенството

$$\Phi_2(n+1)=\Phi_2(n)+\Phi_1(n)=\Phi_2(n)+2n. \qquad (6)$$

Ако во равенството (6), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$ со аналогна постапка како во пример 8 наоѓаме $\Phi_2(n)=n^2-n+2$. ♦

Пример 10. На колку делови го делат просторот n сфери такви, што секои две се сечат меѓу себе.

Решение. Бидејќи n сфери ја сечат $(n+1)-$та сфера во n кружници и како тие нејзината површина ја делат на $\Phi_2(n)=n^2-n+2$ делови (задача 7), добиваме дека ако n сфери од кои секои две се сечат меѓу себе го делат просторот на $\Phi_2(n)$ делови, тогаш $n+1$ сфера просторот го делат на

$$\Phi_3(n+1)=\Phi_3(n)+\Phi_2(n)=\Phi_3(n)+(n^2-n+2)$$

делови. Сега постапувајќи аналогно како во решението на пример 8 наоѓаме

$$\Phi_3(n+1)=\frac{n(n^2-3n+8)}{3}. \ ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Да се најде збирот на внатрешните агли на $n-$ аголник (не задолжително конвексен).
2. На колку триаголници е поделен $n-$ аголник (не задолжително конвексен) со неговите дијагонали.
3. Определи го бројот N на дијагоналите кои не се сечат и кои го делат $n-$ аголникот на триаголници.
4. На колку начини со своите дијагонали може да се подели конвексен $n-$ аголник, ако ниедни три дијагонали не се сечат во една точка.

   Упатство. Конвексниот $(n+1)-$ аголник $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ со дијагоналата A_1A_n е поделен на $n-$ аголникот $A_1A_2...A_n$ и триаголникот $A_1A_nA_{n+1}$. Ако го знаеме бројот $F(n)$ на деловите, на кои е поделен од своите дијагонали $n-$ аголникот $A_1A_2...A_n$, треба да преброиме колку делови ќе се добијат со додавање на темето A_{n+1}. Лесно се докажува дека во случајов важи формулата

   $$F(n+1)=F(n)+(n-1)+1\bullet(n-2)+2\bullet(n-3)+...+(n-3)\bullet2+(n-2)\bullet1.$$

   Понатаму, последната формула можеме да ја запишеме во видот

   $$F(n+1)=F(n)+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=F(n)+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}-1.$$

   Ако последната формула ја искористиме за изразување на вредностите за $F(n),F(n-1),...,F(3)$ и ги собереме добиените изрази после средувањето добиваме

   $$F(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}. \ ♦$$

5. На колку делови ја делат правата n парови точки, кои лежат на таа права?

   Одговор. $2n$ точки ја делат правата на $2n+1$ делови.
6. Да се најде бројот $\Phi_1(n)$ на деловите, на кои е поделена кружница со n парови точки кои се наоѓаат на таа кружница!

   Одговор. $\Phi_1(n)=2n$.
7. На колку делови ја делат сферата n кружници кои лежат на сферата и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе?

   Одговор. Бараниот број е $\Phi_2(n)=n^2-n+2$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија