Регионален натпревар 2013

I година

1 АБ. Ако $a,b,c\in\mathbb{R}$, $abc\neq 0$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, тогаш $\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$. Докажи!

Решение: Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\Rightarrow\frac{bc+ac+ab}{abc}=0\Rightarrow bc+ac+ab=0\Rightarrow bc=-ac-ab$. Оттука добиваме

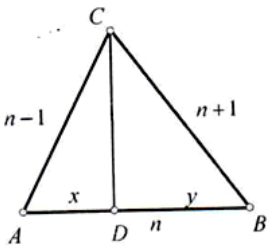
$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{-ac-ab}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=-\frac{ac}{a^2}-\frac{ab}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=$$

$$=ab\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+ac\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=ab\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+ac\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=ab\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)+ac\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{c}\right)=-a\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)-a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=-a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+2=$$

$$=-a\left(-\frac{1}{a}\right)+2=3.$$

2А. Нека должините на страните на еден триаголник се последователни природни броеви не помали од 3. Подножјето на висината на триаголникот спуштена врз страната со средна должина ја дели таа страна на два дела кои се разликуваат за 4 . Докажи!



Решение. Нека ABC е триаголник во кој должината на неговите страни се $\overline{AB}=n$, $\overline{BC}=n+1$ и $\overline{CA}=n-1$, каде n е некој природен број. Нека $D\in AB$ е поднжожје на висината спуштена од темето C и $\overline{CD}=h$. Ако $\overline{AD}=x$ и $\overline{DB}=y$, тогаш од условот на задачата $x+y=n$. Од правоаголните триаголници ADC и DBC , според теоремата на Питагора имаме

$$(n-1)^2-x^2=h^2$$
$$(n+1)^2-y^2=h^2$$

Ќе направиме алгебарски трансформации на равенството

$$(n-1)^2-x^2=(n+1)^2-y^2$$
$$y^2-x^2=(n+1)^2-(n-1)^2$$
$$(y-x)(y+x)=4n$$
$$n(y-x)=4n\,.$$

Значи, $y-x=4$ што требаше да се докаже.

2Б. Во понеделник, три банани чинеле колку лимон и портокал заедно. Во вторник сите овошја се намалиле за иста сума на пари, два портокали чинеле колку три банани и еден лимон, и цената на половина лимон била 5 денари.

Колку била цената на еден портокал во понеделник?

Решение. Нека x, y и z се цените на една банана, еден лимон и еден портокал, соодветно, во понеделник. Нека намалувањето на цената во втроник била за r денари. Тогаш од условите на задачата имаме

$$\begin{cases} 3x = y + z \\ 2(z-r)=3(x-r)+y-r \\ \frac{1}{2}(y-r)= 5 \end{cases}.$$

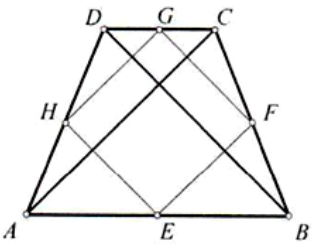
Ако втората равенка алгебарски ја трансформираме, добиваме

$$2z-2r=3x-3r+y-r$$
$$2z=3x-2r+y\,.$$

Ако од првата равенка замениме $3x$, добиваме $2z=y+z-2r+y$, па според тоа $z=2y-2r=2(y-r)$. Но $y-r=10$, од каде што добиваме $z=2\cdot 10=20$ денари.

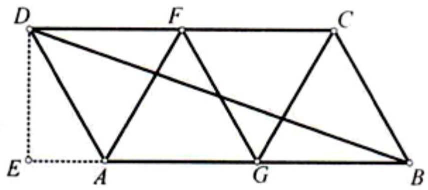
Значи, цената на еден портокал во понеделникот била 20 денари.

3А. Даден е рамнокрак трапез во кој дијагоналите се заемно нормални. Докажи дека плоштината на трапезот е еднаква на квадратот од должината на висината.



Решение: Ги поврзуваме средините на страните на трапезот(како на цртежот). Тогаш, $\overline{GF}=\overline{HE}=\frac{\overline{DB}}{2}$ и $\overline{GF}\|\overline{HE}\|\overline{DB}$ бидејќи $\overline{GF}$ е средна линија за триаголникот BCD, а $\overline{HE}$ е средна линија за триаголникот ABD. Аналогно се добива дека $\overline{EF}=\overline{GH}=\frac{\overline{AC}}{2}$ и $\overline{EF}\|\overline{HG}\|\overline{AC}$. Од друга страна, трапезот е рамнокрак односно дијагоналите имаат иста должина, односно $\overline{AC}=\overline{BD}$, од каде $\overline{GF}=\overline{GH}$.

Јасно е дека $\angle FGH$ е еднаков со аголот меѓу дијагоналите (агли со паралелни краци). Тогаш четириаголникот $EFGH$ е крадрат. Да забележиме дека $\overline{AB}+\overline{CD}=2\overline{HF}=2h$, бидејќи $\overline{HF}=\overline{GE}$ како дијагонали во квадрат. Од друга страна $P_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h=h^2$.



3Б. Паралелограмот $ABCD$ со точките $G\in AB$ и $F\in CD$ може да се подели на четири рамнострани триаголници со страна $2cm$. Колкава е должината на поголемата дијагонала на паралелограмот?

Решение: Страната BA ја продолжуваме до точката E така што триаголникот ADE е половина од рамностраните триаголници. Затоа $\angle DAE=60^\circ$, $\overline{AD}=2, \overline{DE}=\sqrt{3}, \overline{AE}=1$. Од Питагоровата теорема имаме дека

$$\overline{BD}^2=\overline{DE}^2+\overline{EA}^2=5^2+(\sqrt{3})^2=28 \Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{28}$$

4А. Дадени се тврдењата:

а) Бројот $x+1$ е делив со y,

б) $x=2y+5$,

в) Бројот $x+y$ е делив со 3,

г) $x+7y$ е прост број.

Определи ги сите парови природни броеви (x,y) за кои точно три од дадените тврдења се точни, а едно е неточно.

Решение: За било кои природни броеви x и y бројот $x+7y$ можеме да го претставиме во облик $x+7y=(x+y)+6y$. Според тоа, не може во исто време да се точни тврдењата под в) и г). Значи точни се тврдењата а) и б) и едно од тврдењата в) или г). Од точноста на б) следува дека за природните броеви x и y исполнето е $x+y=3y+5$. Бидејќи 3 не е делител на $x+y$, значи тврдењето в) е лажно. Ова значи дека треба да ги определиме сите природни броеви за кои се точни тврдењата а), б) и г). Од а) имаме $x+1=ky, k\in\mathbb{N}$, а од б) $x=2y+5$, т.е. $ky=2y+6$. Добиваме $y=\frac{6}{k-2}$, $y\in\mathbb{N} \Rightarrow k-2\in\{1,2,3,6\} \Rightarrow y\in\{1,2,3,6\}$, па ги добиваме паровите: $(x,y)\in\{(17,6),(11,3),(9,2),(7,1)\}$, а од нив тврдењето г) го задоволуваат само паровите $(17,6)$ и $(9,2)$.

II година

1 АБ. Нека a, b и $c\neq 0$ се различни реални броеви. Ако равенките $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имаат точно еден заеднички корен, тогаш вторите корени на истите равенки, се корени на равенката $x^2+cx+ab=0$. Докажи!

Решение. Нека x_0 е заедничкиот корен на равенките $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$. Нека x_1 е вториот корен на равенката $x^2+ax+bc=0$, а x_2 на $x^2+bx+ca=0$. Имаме,

$$x_0^2+ax_0+bc=0 \text{ и } x_0^2+bx_0+ca=0$$

од каде следува $(a-b)x_0-(a-b)c=0$, односно $(a-b)(x_0-c)=0$. Затоа што $a\neq b$, следува дека $x_0=c$. Од Виетовите формули за $x^2+ax+bc=0$, следува $x_0x_1=bc$, т.е. $cx_1=bc$. Бидејќи $c\neq 0$ имаме $x_1=b$. Слично, $x_2=a$.

Од Виетовите формули за $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ добиваме

$$a+b=(-x_0-x_1)+(-x_0-x_2)=-2c-b-a$$

па следува $a+b=-c$. Затоа, $x_1+x_2=b+a=-c$ и $x_1x_2=ba$, односно x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+cx+ab=0$.

2А. Нека a,b,c и d се рационални броеви различни од нула. Кој услов треба да го исполнуваат броевите a,b,c и d за бројот $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ да е рационален?

Решение. Бидејќи c и d се рационални, следува дека $c\sqrt{2}-d$ е ирационален, т.е. $c\sqrt{2}-d\neq 0$, па изразот $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=\frac{(a\sqrt{2}+b)(c\sqrt{2}-d)}{(c\sqrt{2}+d)(c\sqrt{2}-d)}=\frac{2ac-bd+(bc-ad)\sqrt{2}}{2c^2-d^2}.$$

Сега е јасно, заради рационалноста на a,b,c и d, дека $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ е рационален ако и само ако $bc-ad=0$, т.е. $bc=ad$.

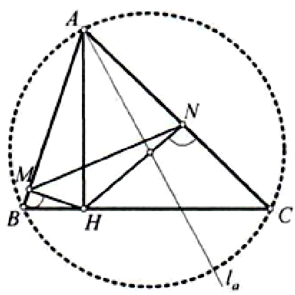
2Б. Определи ги сите решенија (x,y) на равенката $\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}$, во множеството реални броеви.

Решение. Јасно е дека $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Сега, ако равенката ја помножиме со xy таа го добива обликот $x^2+6x+13=4y-y^2$, која пак е еквивалентна со равенката $x^2+6x+y^2-4y+13=0$.

Левата страна на последната равенка може да се запише како збир на два квадрати: $(x+3)^2+(y-2)^2=0$. Збирот на квадратите на два броја е нула, ако секој од броевите е нула. Според тоа, $x+3=0$ и $y-2=0$, т.е. $x=-3$ и $y=2$.

Значи, равенката има единствено решение $(x,y)=(-3,2)$.

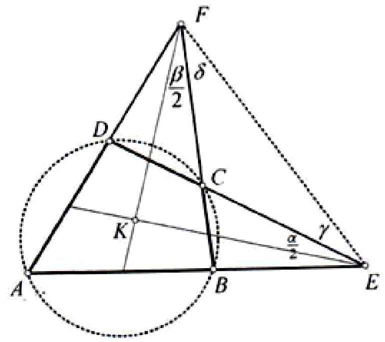
3А. Нека триаголникот ABC е остроаголен и точката H е подножјето на висината спуштена од темето A. Точките $M\in AB$ и $N\in AC$ се такви што $HM\perp AB$ и $HN\perp AC$. Нека l_A е правата низ A, нормална на MN. Аналогно на претходната конструкција, ги конструираме и правите l_B и l_C. Докажи дека правите l_A, l_B и l_C се сечат во иста точка.



Решение. Нека l_A ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC во точка E. Бидејќи $\angle AMH=\angle ANH=90^\circ$, четириаголникот $AMHN$ е тетивен.

Затоа, $\angle MAH = \angle MNH$ (периферисни агли над иста тетива). Натаму, $\angle MNH = \angle EAN$ (агли со нормални краци) и $\angle EAN = \angle EBC$ (периферисни агли над иста тетива). Значи, $\angle MAH = \angle CBE$. Тогаш, $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle MAH = 90^\circ$, па AE е дијаметар на опишаната кружница, односно правата l_A минува низ центарот на опишаната кружница. Слично, l_B и l_C минуваат низ центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и со тоа тврдењето е докажано.

3 Б. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во круг. Продолженијата на страните AB и CD, и на страните AD и BC се сечат во во точките E и F, соодветно. Докажи дека симетралите на аглите AED и AFB се заемно нормални.



Решение. Нека $\angle AED = \alpha$, $\angle AFB = \beta$, $\angle DEF = \gamma$ и $\angle BFE = \delta$ и симетралите на на аглите $\angle AED$ и $\angle AFB$ се сечат во точката K. Од триаголникот KEF имаме

$$\angle EKF = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma + \delta + \frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 180^0 - (\gamma + \delta) - \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \angle BCD - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Од триаголниците AED и ABF ги изразуваме

$$\alpha = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ADC)$$

и

$$\beta = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABC),$$

од каде, имајќи предвид дека збирот $\angle ADC + \angle ABC = 180^0$, добиваме

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \frac{2\angle BAD + \angle ADC + \angle ABC}{2} = 90^\circ - \angle BAD.$$

Следува дека

$$\angle EKF = \angle BCD - 90^\circ + \angle BAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

4АБ. Определи ги сите решенија на равенката

$$(1+x)^4 - 2(1-x)^4 = (1-x^2)^2,$$

во множеството реални броеви.

Решение. Ќе воведеме смени $a = 1+x$ и $b = 1-x$. Тогаш $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = ab$, а равенката го добива обликот $a^4 - 2b^4 = a^2b^2$ односно
$a^4 - a^2b^2 - 2b^4 = 0$. Со елементарни алгебарски трансформации истата може да се запише во облик $(a^2+b^2)(a^2-2b^2) = 0$. Според тоа, $a^2+b^2 = 0$ или $a^2 - 2b^2 = 0$.

Случај 1. Ако $a^2+b^2 = 0$, следува $a = b = 0$. Но тогаш $0 = 1+x$ и $0 = 1-x$, од каде добиваме $x = -1$ и $x = 1$, што не е можно.

Случај 2. Ако $a^2 - 2b^2 = 0$, следува $a = \pm\sqrt{2}b$. Тогаш $1 + x = \pm\sqrt{2}(1-x)$, од каде добиваме

$x_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$.

Се проверува дека x_1 и x_2 се решенија на равенката.

III година

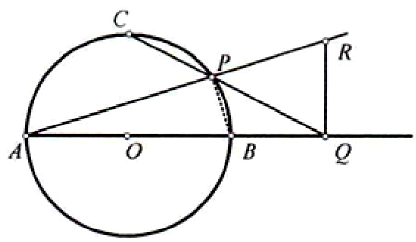
1А. 2Б. Збирот на четирите корени на квадратните триноми f и g, со еднакви коефициенти пред највисоките степени, е нула. Квадратниот трином $f+g$ има два корени. Докажи дека збирот на тие два корени е еднаков на нула.

Решение. Ако $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=ax^2+dx+e$, тогаш $f(x)+g(x)=2ax^2+(b+d)x+c+e$. Според Виетовите правила збирот на корените на f е $-\frac{b}{a}$, а збирот на корените на g е $-\frac{d}{a}$. Од условот на задачата, збирот на корените на f и g е нула, па според тоа $0=-\frac{b}{a}-\frac{d}{a}=-\frac{b+d}{a}$. Од друга страна, збирот на корените на $f+g$ е $-\frac{b+d}{2a}$ па следува тврдењето.

2А. Докажи дека збирот $\cos20^\circ+\cos40^\circ+...+\cos160^\circ+\cos180^\circ$ е цел број.

Решение. Јасно дека $\cos x+\cos(\pi-x)=0$, за секој x. Од ова следува дека $\cos20^0+\cos160^0=0$; $\cos40^0+\cos140^0=0$; $\cos60^0+\cos120^0=0$ и $\cos80^0+\cos100^0=0$. Добиваме дека бараниот збир изнесува $\cos180^\circ=-1$, па е цел број.

3А. Нека AB е дијаметар на полукружница со центар во O и нека C е точка од полукружницата така што OC е нормална на AB. Нека P е произволна точка од лакот BC. Правите CP и AB се сечат во точката Q. Точката R е избрана на AP така што QR е нормална на AB. Докажи дека $\overline{BQ}=\overline{QR}$.



Решение. Ќе ја повлечеме отсечката PB. Бидејќи AB е дијаметар на полукружницата имаме дека $\angle APB=90^\circ$, па според тоа и $\angle RPB=90^\circ$. Збирот на спротивните агли $\angle RPB,\angle RQB$ во четириаголникот $BQRP$ е 180^0, па според тоа тој е тетивен. За било која точка од лакот BC, па и за точката P, имаме $\angle APC=45^0$ (половина од централниот агол $\angle AOC=90^0$). Од тука $\angle RPQ=45^0$. Како агли над ист кружен лак имаме $\angle RBQ=\angle RPQ=45^0$. Во триаголникот BQR едниот остар агол има 45^0. Според тоа, тој е рамнокрак правоаголен со хипотенуза BR. Јасно, $\overline{BQ}=\overline{QR}$, што требаше и да се докаже.

4А. Дадени се a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 позитивни реални броеви. За нив важи $b_1^2\le4a_1c_1$ и $b_2^2\le4a_2c_2$. Докажи дека

$$4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2)>(b_1+b_2+1)^2.$$

Решение. Од $b_1^2\le4a_1c_1$ добиваме дека дискриминантата на квадратната равенка $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ е $D_1\le0$, односно равенката има најмногу еден реален (двоен) корен. Бидејќи $a_1>0$ ќе следува и дека

$$a_1x^2+b_1x+c_1\ge0 \qquad (1),$$

за секој x.

Сосема аналогно расудуваме и за равенката $a_2x^2+b_2x+c_2=0$, од каде и

$$a_2x^2+b_2x+c_2\ge0 \qquad (2)$$

за секој x.

Од друга страна важи и

$$7x^2+x+2>0\,(D<0) \qquad (3)$$

за секој x. Собирајќи ги неравенствата (1), (2) и (3) добиваме

$(a_1+a_2+7)x^2+(b_1+b_2+1)x+(c_1+c_2+2)>0$ за секој реален број x.

Тогаш дискриминантата на квадратниот трином е негативна, односно

$$(b_1+b_2+1)^2-4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2)<0,$$

што требаше и да се докаже.

1Б. Реши ја неравенката $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$, во множеството реални броеви.

Решение. Неравенката се запишува во еквивалентниот облик $2^{\frac{1}{x}-1} < 2^{\frac{1}{2x}-1} + 1$ и со множење на последната неравенка со 2 се добива еквивалентната неравенка $2^{\frac{1}{x}} < 2^{\frac{1}{2x}} + 2$. Во последниот израз заменуваме $2^{\frac{1}{2x}} = y$ и се добива неравенката $y^2 < y+2$, односно $y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-2) < 0$. Нејзиното решение е интервалот $-1 < y < 2$, односно $-1 < 2^{\frac{1}{2x}} < 2$ што е еквивалентно со $0 < 2^{\frac{1}{2x}} < 2$. Од последното добиваме дека решението на неравенката се совпаѓа со решението на неравенката

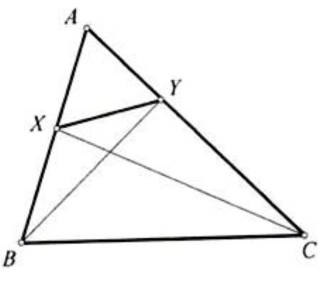
$$\frac{1}{2x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{2x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

3Б. За реалните броеви $x, y \in (0, \pi)$ е исполнето равенството

$$\cos 2x \cos y - \cos 2y \cos x = \cos y - \cos x .$$

Докажи дека $x = y$.

Решение. Даденото равенство може да се запише во обликот $\cos y(1-\cos 2x) - \cos x(1-\cos 2y) = 0$. Заради равенствата $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ и $1-\cos 2y = 2\sin^2 y$, последното равенство го добива обликот $\cos y \sin^2 x - \cos x \sin^2 y = 0$, а заради основната тригонометриска релација обликот $\cos y \cos^2 x - \cos x \cos^2 y = \cos y - \cos x$, односно обликот $\cos y \cos x(\cos x - \cos y) = \cos y - \cos x$. Конечно, тоа може да се запише како $(\cos y - \cos x)(\cos x \cos y + 1) = 0$. Но, $x, y \in (0, \pi)$, па $\cos x \cos y + 1 > 0$. Според тоа $\cos y - \cos x = 0$, односно $\cos y = \cos x$. Функцијата $f(t) = \cos t,\ t \in (0, \pi)$ е монотоно опаѓачка, равенството $\cos y = \cos x$ е можно само ако $x = y$.



4Б. Даден е триаголникот ABC што $\overline{AB} = 20$ и $\overline{AC} = \frac{45}{2}$. На страните AB и AC се избрани точки X и Y така што $\overline{AX} = \overline{AY}$ и плоштината на ΔABC е два пати поголема од плоштината на ΔAXY . Најди го односот на плоштините на триаголниците BXY и CXY .

Решение. Да го означиме аголот во темето A со α . Имаме $P_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin\alpha}{2} = 225 \sin\alpha$.

Па, $225 \sin\alpha = 2P_{AXY} = \overline{AX}^2 \sin\alpha$. Од тука добиваме дека $\overline{AX} = \overline{AY} = 15$. Сега следува дека $\overline{XB} = 5$ и $\overline{YC} = \frac{15}{2}$. Бидејќи триаголниците AXY и BXY имаат заедничка висина од темето Y имаме $\frac{P_{AXY}}{P_{BXY}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 3$. Слично за триаголниците CYX и AYX добиваме $\frac{P_{AYX}}{P_{CYX}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}} = 2$. Од ова имаме $\frac{P_{BXY}}{P_{CXY}} = \frac{2}{3}$.

IV година

1А. Најди ги сите природни броеви n , за кои важи $n^3 - n = n!$.

Решение. Равенката $n^3 - n = n!$ може да ја запишеме како $n(n-1)(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Бидејќи $n=1$ не е решение на равенката , двете страни ќе ги поделиме со $n(n-1)$. Се добива $n+1 = (n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Со директна проверка почнувајќи од $n=2$ добиваме дека $n=5$ е решение. За $n>5$, $n+1<2n-4=2(n-2)$, односно $n+1<2(n-2)<(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$. Тоа значи дека $n=5$ е единствено решение.

1Б. 2А. Определи го полиномот Q со реални коефициенти, таков што секој негов корен е квадрат на корен на полиномот $P(x)=x^3+9x^2+9x+9$.

Решение. Нека u, v, w се нули (реални или комплексни) на полиномот $P(x)$. Според теоремата на Виет, имаме

$$\begin{aligned} u+v+w&=-9\\ uv+vw+wu&=9\\ uvw&=-9 \end{aligned}.$$

Сега полиномот можеме да го определиме на два начини.

1. $u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+vw+wu)=81-2\cdot9=81-18=63$

$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=(uv+vw+wu)^2-2uvw(u+v+w)=(-9)^2-2(-9)(-9)=-81$

$u^2v^2w^2=(uvw)^2=(-9)^2=81$. Сега бараниот полином е

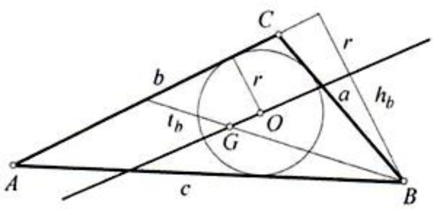
$Q(x)=(x-u^2)(x-v^2)(x-w^2)=x^3-63x^2-81x-81$.

2. За полиномот $Q(x)=(x-u^2)(x-v^2)(x-w^2)$ имаме

$$\begin{aligned} Q(x^2)&=(x^2-u^2)(x^2-v^2)(x^2-w^2)=(x-u)(x-v)(x-w)(x+u)(x+v)(x+w)=\\ &=[(x-u)(x-v)(x-w)][-(-x-u)(-x-v)(-x-w)]=P(x)[-P(-x)]=\\ &=(x^3+9x^2+9x+9)[-(-x^3+9x^2-9x+9)]=\\ &=[(x^3+9x)+(9x^2+9x)][(x^3+9x)-(9x^2+9)]=\\ &=(x^3+9x)^2-81(x^2+1)^2=x^6-63x^4-81x^2-81=\\ &=(x^2)^3-63(x^2)^2-81x^2-81. \end{aligned}$$

Сега е јасно дека $Q(x)=x^3-63x^2-81x-81$.

3А. 2Б. Должините на страните на триаголникот се три последователни членови на аритметичка прогресија. Тогаш, правата која минува низ тежиштето и центарот на впишаната кружница е паралелна со една страна на триаголникот. Докажи!



Решение. Нека во ΔABC страните ги исполнуваат неравенствата $a<b<c$. Тогаш од условот на задачата $a+c=2b$ (должините на страните се последователни членови на аритметичка прогресија). Со O ќе го означиме центарот на впишаната кружница, а со r нејзиниот радиус. Од равенствата $P_{\Delta ABC}=\frac{a+b+c}{2}r$ и $P_{\Delta ABC}=\frac{bh_b}{2}$ добиваме $\frac{r}{h_b}=\frac{b}{a+b+c}=\frac{b}{2b+b}=\frac{b}{3b}=\frac{1}{3}$, односно $r=\frac{1}{3}h_b$ **(13)**. Значи O се наоѓа на растојание $\frac{1}{3}$ од страната AC. Од друга страна, тежиштето G ја дели тежишната линија во однос 1:2, т.е. се наоѓа на $\frac{1}{3}$ од растојанието од B до AC.

4А. Нека низата (a_n) е зададена со $a_0=3$ и $a_n=2+a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$ за секој $n\geq1$. Најди го членот a_{2013}.

Решение. Условот можеме да го запишеме како $a_n-2=a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$. Оттука, $a_{n-1}-2=a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-2}$. Па, имаме $a_{n-1}(a_{n-1}-2)=a_n-2$ од каде $a_{n-1}{}^2-2a_{n-1}=a_n-2$. Последново е еквивалентно со $(a_{n-1}-1)^2=a_n-1$. Па,

$a_n-1=(a_{n-1}-1)^2=(a_{n-2}-1)^4=\ldots=(a_{n-k}-1)^{2^k}=(a_0-1)^{2^n}=2^{2^n}$.

Конечно добиваме $a_{2013}=2^{2^{2013}}+1$.

3Б. Дадена е аритметичка прогресија со разлика природен број. Избрани се седум последователни членови од таа аритметичка прогресија од кои четвртиот е парен број. Докажи дека збирот од квадратите на избраните членови е делив со 28.

Решение. Нека $a-3d, a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ и $a+3d$ се седумте избрани последователни членови на аритметичката прогресија. Притоа $a=2k, k\in\mathbb{N}$ и $d\in\mathbb{N}$. Имаме:

$$(a-3d)^2+(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2=7a^2+28d^2=28(k^2+d^2).$$

Оттука следува дека бараниот збир е делив со 28.

4Б. Дали може множеството природни броеви од 1 до 100 да се подели на три дисјунктни множества, така што збирот на броевите во едното множество е делив со 102, во другото множество збирот на броевите е делив со 304 и во третото множество збирот е делив со 405?

Решение. Не може. Да претпоставиме дека множеството од природни броеви од 1 до 100 може да се запише како во условот на задачата и нека сумите на елементите од тие множества се A, B, C, соодветно. Сумата на броевите од 1 до 100 е $101\cdot 50$. Од условот на задачата следува дека постојат природни броеви x,y,z такви што $A=102x$, $B=304y$, $C=405z$. Заради $101\cdot 50=A+B+C=102x+304y+405z=101(x+3y+4z)+(x+y+z)$, мора $x+y+z$ да биде делив со 101, а бидејќи $x+y+z\neq 0$, мора $x+y+z\geq 101$. Уште $x+3y+4z\geq x+y+z\geq 101$, односно $101(x+3y+4z)\geq 101\cdot 101>101\cdot 50$, што е контрадикција со $101(x+3y+4z)=101\cdot 50-(x+y+z)<101\cdot 50$.