МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Математичка такмичења средњошколаца

1999/2000.

Београд – Панчево 2000.

МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Хемијско-прехрамбена и грађевинска школа – Панчево

23. мај

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 1999-2000.

Редакција и обрада:
мр Раде Тодоровић

Београд – Панчево 2000.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА
за такмичења из математике за ученике средњих школа школске 1999/2000.

1. Анић мр Иван, Математички факултет у Београду
2. Арсеновић др Милош, Математички факултет у Београду
3. Балтић Владимир
4. Блажић др Новица, Математички факултет у Београду
5. Гајић мр Борислав, Математички институт САНУ
6. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
7. Достанић др Милутин, Математички факултет у Београду
8. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ
9. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет у Београду
10. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
11. Кнежевић Миљан, Математички факултет у Београду
12. Кртинић Ђорђе, Математички факултет у Београду
13. Лазовић Небојша, Министарство просвете Србије
14. Лаудановић Младен, Математички факултет у Београду
15. Милићевић Ђорђе
16. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
17. Огњановић мр Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
18. Павловић Иван, професор гимназије "Вук Караџић", Лозница
19. Петровић др Војислав, Природно-математички факултет у Новом Саду
20. Поповић др Бранислав, Природно-математички факултет у Крагујевцу
21. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ
22. Стевановић мр Драган, Филозофски факултет у Нишу
23. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
24. Тодоровић мр Раде, Математички факултет у Београду – **председник**
25. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
26. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
27. Црвенковић др Синиша, Природно-математички факултет у Новом Саду
28. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет у Београду

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
42. Републичког такмичења из математике

1. Александар Станисављевић, проф., школски надзорник Министарства просвете РС – **председник**
2. Зоран Томић, председник ИО СО Панчево
3. Драган Буквић, потпредседник Регионалне привредне коморе Панчево
4. Станимир Вуковић, руководилац службе за маркетинг ЈП Дирекција за изградњу и уређење Панчева
5. Петар Недељковић, проф., директор Хемијско-прехрамбене и грађевинске школе "23. мај", Панчево
6. Зоран Јовановић, проф., директор Машинске школе "Панчево" Панчево
7. Ранко Цвијан, председник Републичког одбора синдиката енергетике
8. Веселин Грковић, директор Службе за запошљавање Панчево
9. Борка Салануpa, руководилац Регионалног центра за таленте Панчево
10. Мр. Саво Ћебић, председник Подружнице ДМС Панчево
11. Др. Мирко Дејић, Панчево

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 05.02.2000.

А категорија

Први разред:

1. Ако се троугао може разложити на два међусобно подударна троугла, онда је он једнакокраки. Доказати.
2. У декадном запису датог броја n појављују се само цифре 1, 3, 7, и 9 (свака бар једном). Доказати да је пермутовањем цифара овог броја могуће добити број дељив са 7.
3. На колико начина се из скупа $\{1, 2,..., 1999\}$ може изабрати 1000 бројева, тако да међу њима не постоје два чији збир је једнак 1999 или 2000 ?
4. Да ли постоји троугао површине 1 чије странице b, c задовољавају: $c \leq b$, $b = 1{,}4$?
5. Дате су две операције F и G, које преводе дату уређену тројку реалних бројева у другу тројку по следећим правилима:

   F преводи тројку (a, b, c) у тројку $(a + 1, b + c, c + 1)$,

   G преводи тројку (a, b, c) у тројку $(a, b - 1, c + 1)$.

   Да ли је могуће, примењујући коначно много пута операције F и G, превести тројку $(3, 4, 1)$ у тројку $(6, 5, 8)$?

Други разред:

1. Нека је O центар уписаног круга, а O_1 центар споља уписаног круга код странице BC троугла ABC. Доказати да важи: $AO \cdot AO_1 = AB \cdot AC$.
2. Дате су квадратне једначине $x^2 - x + m = 0$ и $x^2 - x + 3m = 0$ $(m \neq 0)$. Одредити вредност m тако да једно решење друге једначине буде једнако двострукој вредности једног решења прве једначине.
3. Дато је 20 различитих природних бројева не већих од 70. Доказати да међу разликама тих бројева има бар четири једнаке (посматра се увек позитивна разлика).
4. За $a,b > 0$ доказати неједнакост: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^8 \geq 64ab(a+b)^2$.
5. У кружни исечак од 90° (четвртина круга) полупречника 25 уписан је правоугаоник чији је однос дужина страница 6:1, тако да му два темена припадају луку исечка, а остала два леже на полупречницима исечка. Одредити странице правоугаоника.

Трећи разред:

1. Колико има функција $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$ за које важи $f(1) \leq f(2) \leq ... \leq f(n)$?
2. Решити једначину: $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.
3. Дат је полиедар површине S у који се може уписати сфера и око кога се може описати сфера. Сфера уписана у овај полиедар има полупречник r, а сфера описана око полиедра полупречник R. Доказати да важи: $R > \sqrt[3]{\dfrac{rS}{4\pi}}$.

4. Нека је O центар описаног круга датог оштроуглог троугла ABC. Ако су A_1, B_1 и C_1, редом, средишта страница BC, AC и AB овог троугла, доказати да је $OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$, где је R полупречник описаног круга око троугла ABC, а r је полупречник уписаног круга у исти троугао.

5. Доказати да је, за сваки природан број n, број $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ цео.

Четврти разред:

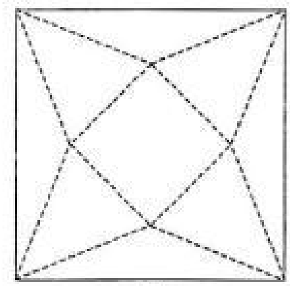
1. Доказати да за реалне бројеве a, b, n, p, такве да је $a > b > 0$ и $p > n$ важи неједнакост: $\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

2. Шта је веће:

   а) e^{π} или π^{e} ?

   б) $\pi^{e^{\pi}}$ или $e^{\pi^{e}}$?

3. Из квадратног парчета картона странице a изрезана је мрежа праве правилне четворостране пирамиде (као на слици), тако да се, при састављању, темена квадрата састају у врху пирамиде. Колика треба да буде основна ивица пирамиде да би њена запремина била максимална?



a

4. За какве природне бројеве n постоји природан број m тако да n дели све бројеве $m+1$, $m^m + 1$, $m^{m^m} + 1, \ldots, m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}} + 1, \ldots$?

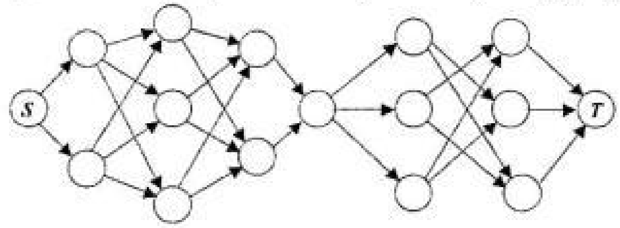
5. На траци од папира написан је низ од 360 цифара: $\underbrace{123123\ldots123}_{360\text{ цифара}}$. Који је највећи број делова на које се трака може расећи тако да сви бројеви на добијеним деловима буду међусобно различити?

Б категорија

Први разред:

1. Нека је A троцифрен број са међусобно различитим цифрама. Пермутовањем цифара броја A добијено је још пет троцифрених бројева. Збир свих шест бројева је три пута већи од троцифреног броја коме су све три цифре једнаке цифри стотина броја A. Одредити број A.

2. На следећој шеми дозвољено је кретати се путевима у смеру стрелица:



На колико начина се може стићи од чвора S до чвора T?

3. Одредити све парове целих бројева x, y тако да је $xy + 3x - 5y - 5 = 0$.

4. Решити једначину: $\left||x| - a\right| + \left||x| + a\right| = 2a$, где је a дати реалан број.

5. На колико начина се на доњој слици може прочитати реч *СРБИЈА* ? Притом, дозвољено је при читању прећи са неког слова на њему суседно слово с десне стране или на слово *испод* тог суседног (а не и на слово изнад суседног).

С
С Р
С Р Б
С Р Б И
С Р Б И Ј
С Р Б И Ј А

Други разред:

1. Доказати да је $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$
2. Дате су квадратне једначине $x \quad - x + m = 0$ и $x^2 - x + 3m = 0$ $(m \neq 0)$. Одредити вредност m тако да једно решење друге једначине буде једнако двострукој вредности једног решења прве једначине.
3. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$, редом, дате су тачке M и K, тако да важи: $\angle BAM = \angle MAK$. Доказати да је $AK = BM + KD$.
4. Одредити све парове x,y реалних бројева за које важи:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x < \sqrt{y - \frac{5}{16}}$$

5. Наћи све комплексне бројеве z за које важи: $-z(z + 2) = |z + 1| + 1$.

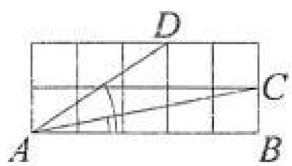
Трећи разред:

1. Решити неједначину: $\ln\left(3 + 2x - x^2 + e^2\right) < 2$.

2. Доказати да за углове α, β, γ произвољног троугла важи неједнакост:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} .$$

3. Доказати да је збир углова BAC и BAD у квадратној мрежи 5×2 (на слици) једнак 45°.



4. Дата је права правилна тространа пирамида висине H. Ако је s дужина бочне ивице ове пирамиде и h висина бочне стране која одговара основној ивици, доказати неједнакост $sH^3 \leq h^4$

5. Решити систем једначина:

$$xyz = 16$$
$$\frac{xz^2}{y} = 4$$
$$xyz^4 = 2$$

Четврти разред:

1. За какве природне бројеве n је број $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + n\cdot(n+1)$ дељив са $1 + 2 + ... + n$?
2. Решити неједначину: $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)(\log_5 x - 1) + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \le 0$.
3. Решити систем једначина:
$$x + y + z = 4$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 10$$
4. Дато је пресликавање $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ (z је комплексан број различит од $-i$). Ако је H подскуп комплексне равни задат са $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, одредити скуп свих слика елемената из H при пресликавању f.
5. Ако за низ $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ненегативних реалних бројева постоји реалан број Δ такав да за сваки природан број n важи:
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{\Delta},$$
доказати да је тај низ аритметички.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 19.02.2000.

А категорија

Први разред:

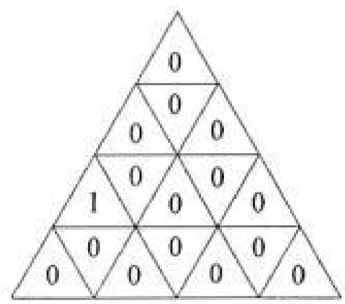
1. Да ли се раван може поплочати (потпуно покрити без преклапања) квадратима од којих највише два могу имати једнаке странице?
2. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја 200, али тако да број који изаберу не дели ни један од већ претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже број 200. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена?
3. Ако у троуглу ABC важи $\angle A = 60^\circ$, тада површина овог троугла износи $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-(b-c)^2\right)$ (a, b, c су дужине страница BC, CA, AB, редом). Доказати.
4. Наћи збир свих седмоцифрених бројева записаних цифрама 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4.

5. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи:

$$\begin{aligned} abc+ab+bc+ca+a+b+c &= 2 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d &= 5 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a &= 7 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b &= 11 \end{aligned}$$

Други разред:

1. У целим бројевима решити једначину: $7a+14b=5a^2+5ab+5b^2$.
2. Решити једначину: $\cos^5 x-\sin^5 x=1$.
3. Нека су M и N средишта страница AD и BC правоугаоника $ABCD$, редом. Ако је P тачка на продужетку странице CD иза тачке D, и Q је пресек правих PM и AC, доказати да је $\angle QNM \cong \angle MNP$.
4. Нека су a, b и c странице троугла ABC. Доказати да важи неједнакост: $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le 2Rr\sqrt{3}$, где су R и r, редом, полупречници описаног и уписаног круга овог троугла.
5. Једнакостранични троугао странице 4 подељен је на 16 малих једнакостраничних троуглова странице 1 и у сваки је уписан по један број као што је приказано на слици. Дозвољено је истовремено додати 1 или одузети 1 вредностима уписаним у троуглове који су у "траци" између две "суседне" праве паралелне некој од страница полазног троугла (тиме се мења вредност у 1, 3, 5 или 7 малих троуглова). Да ли се применом коначно много оваквих операција може постићи да у свим малим троугловима буде уписан исти број?



Трећи разред:

1. У биолошкој лабораторији посматра се утицај једне врсте вируса на неке бактерије. Познато је да се сваке секунде дешава следећи процес: вируси нападају сваки по једну бактерију и усмрћују је, при чему од сваког вируса настају два, док се свака ненападнута бактерија подели на две нове бактерије. Ако је у посуду са 2000 бактерија тачно у подне додат један вирус, одредити тренутак када ће све бактерије изумрети.
2. Доказати да је запремина правилне пирамиде мања од куба њене бочне ивице.
3. Коју највећу, а коју најмању вредност може да има производ $\cos x \cdot \cos y$, ако је познато да је $\sin x \cdot \sin y = b$, где је b дати реалан број, $|b| \le 1$?

4. Познато је да је $3^3+4^3+5^3=6^3$ и да је $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3$. Доказати да за сваки природан број $n \geq 3$ постоје природни бројеви $a_1, a_2,..., a_n, b$ тако да важи: $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=b^3$.
5. Ако се у оштроуглом троуглу ABC бисектриса унутрашњег угла код темена A, тежишна дуж из темена B и висина из темена C секу у једној тачки, доказати да важи: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\beta}$ (α, β и γ су унутрашњи углови код темена A, B и C, редом).

Четврти разред:

1. Сфера S полупречника r садржи центар O сфере Σ полупречника R, при чему је $R > 2r$. Тетива EF сфере Σ је уједно тангента сфере S у тачки T. Доказати неједнакост: $ET^2+TF^2 \leq 2R^2+r^2$.
2. Ако су m и n природни бројеви, доказати неједнакост: $\dfrac{1}{\sqrt[m]{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geq 1$.
3. Нека су $a_1, a_2,..., a_n > 0$ дати реални бројеви ($n \geq 2$). Доказати да једначина $x^n+a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-a_3x^{n-3}-\ldots-a_n=0$ има тачно једно позитивно реално решење.
4. Познато је да је $10001 = 137\cdot 73$ – сложен број. Проверити да ли су и сви бројеви 100010001, 1000100010001, 10001000100010001,... сложени.
5. Ако за реалан број a различит од 0, 1, –1 и целе бројеве m, n, p, q важи $a^m+a^n=a^p+a^q$ и $a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q}$, тада је $m = p$, $n = q$ или $m = q$, $n = p$. Доказати.

Б категорија

Први разред:

1. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја 1000, али тако да број који изаберу не дели ни један од већ претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже број 1000. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена?
2. Колико има парова (m, n) целих бројева за које важи: $m^3+6m^2+5m=8n^3+36n^2+40n+8$?
3. На страницама AB, BC, CA једнакокраког правоуглог троугла ABC ($\angle C=90^\circ$) дате су, редом, тачке R, S, T тако да важи: $AR : RB = BS : SC = CT : TA = 1 : 2$. Доказати да је троугао RST једнакокрак.
4. У равни је дато n тачака. Из сваке тачке полази по 2000 вектора до осталих тачака и у свакој тачки завршава 2000 вектора из осталих тачака. Доказати да је збир свих ових вектора једнак нули.
5. Доказати да не постоје реални бројеви $x_1, x_2,..., x_{18}$ тако да је $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{18} \leq 2000$ и да никоја три узастопна броја нису дужине страница неког троугла.

Други разред:

1. У целим бројевима решити једначину: $7a+14b=5a^2+5ab+5b^2$.
2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^{1999}+y^{1999} &= 1 \\ x^{2000}+y^{2000} &= 1 \end{aligned}$$

3. Права паралелна страници AB троугла ABC одсеца од њега троугао KMC. Нека је L произвољна тачка странице AB. Израчунати површину четвороугла $KLMC$ ако је S површина троугла ABC и Q површина троугла KMC.
4. Доказати да за $x \geq 0$ важи неједнакост: $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2^{\sqrt[6]{x}+1}$.
5. Доказати једнакост: $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2000}-\underbrace{222\ldots2}_{1000}}=\underbrace{333\ldots3}_{1000}$.

Трећи разред:

1. Решити неједначину: $(\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+2)(\sin^4 x+\cos^4 x) \leq \dfrac{3}{4}$.
2. У четвороуглу $ABCD$ страница AB је паралелна страници CD и важи: $AB=AC=AD=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{3}$. Наћи дужину дијагонале BD.
3. Доказати да за свака два рационална броја p, q важи: $\left|\dfrac{\sin p-\sin q}{1-\sin p\sin q}\right|<1$.
4. Доказати да је запремина праве купе мања од куба њене изводнице.
5. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} \log_2(y-x)-\log_8(3y-5x)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{aligned}$$

Четврти разред:

1. Нека су на полукругу полупречника 1 редом распоређене тачке A, B, C, D, E, при чему су A и E крајеви пречника. Доказати да важи:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+AB\cdot BC\cdot CD+BC\cdot CD\cdot DE<4$$

2. Наћи све целе бројеве x, y тако да важи: $\sin^3\dfrac{(x^2+y^2)\pi}{2}+1=0$.
3. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи:

$$\begin{aligned} abc+ab+bc+ca+a+b+c &= 2 \\ bcd+bc+cd+db+b+c+d &= 5 \\ cda+cd+da+ac+c+d+a &= 7 \\ dab+da+ab+bd+d+a+b &= 11 \end{aligned}$$

4. За какве реалне бројеве x и α је задовољена неједнакост: $\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \le 0$?

5. Доказати да за сваки природан број $n > 2$ важи: $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 18.03.2000.

А категорија

Први разред:

1. Нека је $ABCD$ паралелограм. Ако је E тачка у равни таква да је $EA \perp AB$ и $EC \perp CB$, доказати да су углови AED и CEB подударни.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Конструисати (лењиром и шестаром) унутар овог троугла тачку P такву да пресеци полуправих AP, BP и CP са описаним кругом око троугла ABC буду темена једнакостраничног троугла.

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви чији збир је 1. Ако је:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1^2}{2a_1} + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_1a_n}{a_1+a_n} \\ &+ \frac{a_2a_1}{a_2+a_1} + \frac{a_2^2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_2a_n}{a_2+a_n} \\ &+ \qquad\cdots \\ &+ \frac{a_na_1}{a_n+a_1} + \frac{a_na_2}{a_n+a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{2a_n} \end{aligned}$$

(S је збир свих израза облика $\dfrac{a_ia_j}{a_i+a_j}$ за $1 \le i, j \le n$), доказати да је $S \le \dfrac{n}{2}$.

4. На острву има 45 камелеона: 17 жутих, 15 сивих и 13 плавих. Они лутају острвом сусрећући се повремено. При сваком сусрету присутна су само два камелеона. Ако се сретну два камелеона исте боје, њихова боја остане непромењена. Ако се сретну два камелеона различите боје, оба мењају боју у трећу (нпр. ако се сретни жути и сиви камелеон, оба мењају боју у плаво). Може ли се десити да од једног момента (па надаље) сви камелеони на острву имају исту боју?

5. Нека су a, b, c, d, x, y позитивни реални бројеви за које је $a+2ay+y = b+2bx+x$ и $x+2xd+d = y+2yc+c$. Доказати да важи $a+2ad+d = b+2bc+c$.

Други разред:

1. Дат је троугао ABC. Тачка D се налази на полуправој BA тако да је $BD=BA+AC$, док тачке K и M припадају страницама BA и BC, редом, тако да троуглови BDM и BCK имају једнаке површине. Ако је $\angle BAC = \alpha$, одредити $\angle BKM$.

2. Доказати да за позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 важи неједнакост:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}\geq\frac{4}{3}$$

и да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. Ако су a и b дати реални бројеви, наћи све парове (x, y) реалних бројева који задовољавају следећи систем једначина:

$$x^3y+xy^3=ax+by$$
$$2x^2y^2=bx+ay$$

4. Колико има пермутација $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да за свако $j\in\{1,2,\ldots, n\}$ важи $f(j) \leq j + 1$?

5. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B. Трисектрисе угла (полуправе које га деле на три подударна угла) код темена A деле наспрамну катету BC на три дужи, од којих је најдужа двоструко дужа од најкраће. Одредити углове троугла ABC.

Трећи разред:

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $0 < r \leq n$. Доказати да $r!$ дели број $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})$.

2. За какве $a, b \in \mathbf{R}$ систем једначина:

$$\cos x+\cos y=a$$
$$\sin x+\sin y=b$$

има решења?

3. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Израчунати угао између равни AB_1C_1 и A_1B_1C.

4. Нека је k природан број већи од 1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ задат је са: $x_1=1$, $x_2=k$, $x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}$ $(n > 2)$. Доказати да за свако $n\in\mathbf{N}$ постоји $m > n$ тако да су $x_m - 1$ и x_n узајамно прости.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

Четврти разред:

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $0 < r \leq n$. Доказати да $r!$ дели број $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})$.

2. За какве $a, b \in \mathbf{R}$ систем једначина:

$$\cos x+\cos y=a$$
$$\sin x+\sin y=b$$

има решења?

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост: $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$ (са $\{\alpha\}$ је означен разломљени део броја α, тј. $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, где је $[\alpha]$ највећи цео број који није већи од α).
4. Под *одстојањем тачке M од фигуре* Φ подразумева се најмање од растојања MN где $N \in \Phi$. Ако је дат троугао ABC, доказати да је скуп тачака равни које су ближе тачки A него затвореној дужи BC, у односу на горе дефинисано одстојање, конвексан.
5. Описати све непразне, коначне подскупове S интервала $[0, +\infty)$ такве да за свака два (не обавезно различита) елемента $x, y \in S$ важи $x + y \in S$ или $|x - y| \in S$.

Б категорија

Први разред:

1. Одредити све функције $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такве да је $f(1)=1$ и $f(f(n) + n) = f(n)$ за свако $n \in \mathbf{N}$.
2. Наћи све тројке целих бројева (x, y, z) које задовољавају следеће две једначине:
$$x + y + z = 0$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = -18$$
3. Дат је четвороугао $ABCD$. Средишта страница AD и BC означена су са M и N, редом. Ако права BD полови дуж MN, доказати да полови и дијагоналу AC овог четвороугла.
4. Наћи сва целобројна решења једначине: $x^{2000} + px^{1999} + q = 0$, где су p и q непарни цели бројеви.
5. Ако се у датом троуглу саберу по две висине, три тако добијена збира су у односу 27:32:35. Одредити највећи угао овог троугла.

Други разред:

1. Решити систем једначина:
$$\begin{aligned} 2x_1^4 &= x_2^2(1 + x_1^4) \\ 2x_2^4 &= x_3^2(1 + x_2^4) \\ &\vdots \\ 2x_n^4 &= x_1^2(1 + x_n^4) \end{aligned}$$
($x_1, \ldots, x_n$ су реални бројеви).
2. Решити једначину: $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$, где је са $[x]$ означен највећи цео број који није већи од x.
3. На вертикалном торњу висине H налази се антена висине h ($h > H$). Колико далеко од подножја торња мора да стане посматрач да би торањ и антену видео под једнаким угловима?

4. Ако је n природан број већи од 1 и $x=\frac{1+n^2}{2n}$, доказати да је вредност израза $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ цео број.

5. Доказати једнакост: $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{5}}+\sqrt[5]{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{8}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Трећи разред:

1. Да ли постоје четири тачке A, B, C, D у простору тако да важи: $AB=CD=BD=4$, $AC=3$, $BC=AD=5$?
2. У троуглу ABC са оштрим углом код темена C, над средњом линијом DE паралелном AB као пречником конструисан је круг који сече странице AC и BC, редом, у тачкама M и N. Изразити дужину дужи MN преко $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$.
3. Доказати да растојања произвољне тачке круга описаног око квадрата до четири темена тог квадрата не могу сва бити рационални бројеви.
4. Ако су x, y, z позитивни реални бројеви различити од 3 и ако је $y=3^{\frac{1}{1-\log_3 x}}$ и $z=3^{\frac{1}{1-\log_3 y}}$, доказати да је $x=3^{\frac{1}{1-\log_3 z}}$.
5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1,-1\}$.

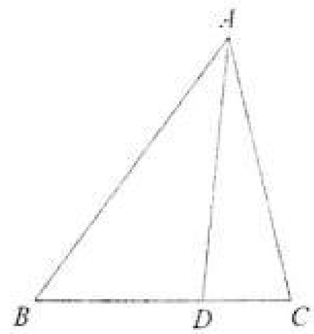
Четврти разред:

1. Дата је функција f која свакој тачки неке равни додељује по један реалан број. Познато је да је збир вредности ове функције у теменима ма ког правилног многоугла те равни једнак нули. Доказати да функција f има вредност 0 у свакој тачки.
2. Наћи све природне бројеве x и y за које важи $x^3-y^3=xy+25$.
3. Дате су функције: $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$ и $g(x)=\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)-\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)$ $(x\in\mathbf{R})$. Доказати да је разлика ових функција константа и одредити ту константу.
4. У квадратној таблици $n\times n$ уписани су бројеви $1, 2, \ldots, n^2$, редом (у првом реду, редом: $1, 2, \ldots, n$; у другом: $n+1, n+2, \ldots, 2n$; ... у последњем: $n^2-n+1, n^2-n+2, \ldots, n^2$). Изабрано је n од ових бројева тако да никоја два нису у истом реду или у истој колони таблице. Доказати да сума изабраних бројева не зависи од њиховог избора и одредити ту суму.
5. У равни су дате две различите тачке A и B. Одредити геометријско место тачака M у тој равни за које важи: $AM\cdot BM\cdot\cos\angle AMB=\frac{3}{4}AB^2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

А категорија

Први разред:



1. Троугао се може разложити на два троугла само тако што ће се повући дуж која спаја једно теме са тачком на наспрамној страници. Ако је ABC троугао и D тачка на страници BC, доказаћемо да из услова да су троуглови ABD и ACD међусобно подударни следи да је $AB = AC$. Ако су троуглови ABD и ACD подударни, тада је угао BDA подударан неком од углова троугла ACD. То не може бити ни један од углова DAC или DCA, будући да су они, као унутрашњи несуседни, мањи од (спољашњег) угла BDA. Стога морају бити подударни $\angle BDA$ и $\angle CDA$. Но, у подударним троугловима наспрам подударних углова леже подударне странице, па је тако и $AB = AC$.
2. Прво пермутујмо цифре датог броја док се не добије број m који у декадном запису завршава цифрама 1,3,7,9, редом. Он је, дакле, облика $m = a + 1379$, где је a број који завршава са четири нуле. Даље, приметимо да, при дељењу са 7, бројеви: 1379, 1793, 3719, 1739, 1397, 1937 и 1973 дају, редом, остатке 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. У зависности од тога какав остатак при дељењу са 7 даје са̂м број a, увек можемо пермутовати последње четири цифре броја m тако да се добије број дељив са 7 (ако је a дељив са 7, онда је то и $m = a + 1379$, а ако a даје остатак r, $1 \leq r \leq 6$, онда треба пермутовати последње четири цифре броја m тако да се добије онај од наведених бројева који даје остатак $7-r$).
3. Уочимо низ: 1999, 1, 1998, 2, 1997, 3,..., 1002, 998, 1001, 999, 1000. Ако је A скуп бројева који задовољавају услове задатка, то он не може садржати два суседна члана овог низа (будући да је збир суседних чланова 2000 или 1999). Дакле, скуп A садржи 1000 чланова овог низа тако да између свака два постоји бар још један члан "размака". Ово је могуће само ако скуп A сачињавају управо први, трећи, пети, ..., 1999. члан горњег низа, тј. $A = \{1999, 1998,..., 1001, 1000\}$. Дакле, постоји *јединствен* начин да се изаберу бројеви како је тражено у задатку.
4. Обзиром да је у троуглу задовољено: $h_b \leq c$, где је h_b дужина висине која одговара страници b, то би за површину троугла који би задовољавао услове задатка важило: $1 = \frac{bh_b}{2} < \frac{b^2}{2} = 0{,}98 < 1$, што је немогуће. Стога такав троугао не постоји.
5. Претпоставимо да је тројка (3, 4, 1) преведена у тројку (6, 5, 8) коришћењем операција F и G (коначно много пута).
   Како обе ове операције увећавају трећу компоненту за 1, а та компонента је увећана са 1 на 8, то је извршено укупно 7 операција.
   Обзиром да операција F увећава прву компоненту за 1, G је не мења, а прва компонента је увећана са 3 на 6, то значи да је операција F извршена тачно 3 пута, а операција G тачно 4 пута.
   Најзад, операција F увећава другу компоненту за вредност треће, а G је смањује за 1. Како је трећа компонента, редом, имала вредности 1, 2, ..., 7 у тренутку примене

операција F и G, то се применом операције F друга компонента увећала за најмање 1+2+3, а применом операције G (4 пута) се смањила за 4, тако да се укупно увећала за најмање $6 - 4 = 2$, што није могуће, будући да је на почетку имала вредност 4, а на крају вредност 5.
Према томе, немогуће је превести тројку (3, 4, 1) у тројку (6, 5, 8) како је тражено у задатку.

Други разред:

1. Ако углове код темена A, B и C троугла ABC означимо са α, β и γ, редом, тада је $\angle ABO_1 = \beta + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. С друге стране је $\angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \gamma) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Дакле, троуглови AOC и ABO_1 имају по два подударна угла ($\angle AOC = \angle ABO_1$, $\angle OAC = \angle BAO_1 = \frac{\alpha}{2}$), па су слични, одакле је $\frac{AB}{AO_1} = \frac{AO}{AC}$, тј. $AO \cdot AO_1 = AB \cdot AC$.

2. Нека су a и b решења прве, односно $2a$ и c решења друге једначине. На основу Вијетових формула, тада, важи: $a+b = 1$, $ab = m$, $2a+c = 1$ и $2ac = 3m$. Из првих двеју једначина се, онда, добија: $a(1-a) = m$, а из других двеју: $2a(1-2a)=3m$. Обзиром да је $m \neq 0$, а тиме и a, $1-a \neq 0$, дељењем друге од новодобијених једначина првом добија се $\frac{2(1-2a)}{1-a} = 3$, што има као једино решење $a = -1$, одакле је и $m = -2$.

3. Нека су $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ дати бројеви. Посматрајмо разлике: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots$, $a_2 \ - a_9$. Збир ових разлика је $S = a_2 \ - a < 70$. Претпоставимо да се ни једна од ових разлика не јавља више од три пута. Будући да је најмања могућа разлика 1, следећа бар 2 итд., важиће: $S \geq 3\cdot1 + 3\cdot2 + 3\cdot3 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 3\cdot6 + 7 = 70$, што је у контрадикцији са претходним. Дакле, међу овим разликама се бар једна појављује бар 4 пута. Приметимо да смо доказали и више него што се у задатку тврдило, наиме, да ће се бар једна од разлика међу разликама *узастопних* бројева (кад се поређају по величини) појавити најмање 4 пута.

4. Познату неједнакост: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (која важи за $x,y>0$) применићемо на бројеве $x = \frac{a+b}{2}$ и $y = \sqrt{ab}$:

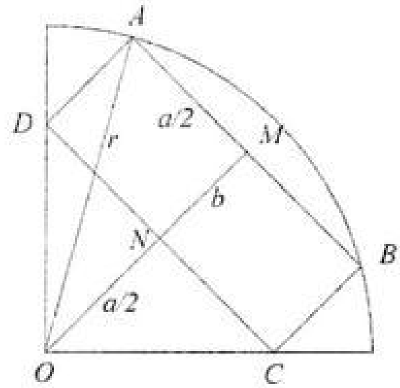
$$\frac{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}}\,,$$

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{ab(a+b)^2}{4}}\,,$$

2.2. Еквивалентан проблем: одредити m да једначине $x^2-x+m=0$, $(2x)^2-2x+3m=0$ имају заједничко решење. Заједничко решење ових једначина је решење једначине $(2x)^2-2x+3m-4(x^2-x+m)=0$. То је $x=m/2$. Из $m^2-m+3m=0$ следи $m=0$, $m=-2$.

одакле се, множењем са 4 и рачуном 4. степена добија тражена неједнакост.

5. Нека су A и B темена правоугаоника која леже на луку, а C и D – темена која леже на полупречницима кружног исечка и нека су M и N, редом, средишта страница AB, односно CD. Ако је O центар лука, тада тачка O лежи на симетрали дужи AB, дакле на MN, па је, дакле, и на симетрали дужи CD, тј. троугао CDO је једнакокрако-правоугли и подељен је дужи NO на два једнакокрако-правоугла троугла. Ако су a и b дужине страница правоугаоника, а r полупречник кружног исечка, имамо да је $OM = a/2 + b$, $OA = r$ и $AM = a/2$, па је, према Питагориној теореми за троугао AOM испуњено: $\left(\frac{a}{2}+b\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=r^2$. Како је $r = 25$ и како је познато да однос страница правоугаоника износи 6:1, то имамо два случаја:



а) $b = a/6$. У том случају се претходна једнакост своди на: $\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=25^2$,

одакле се лако добија $a = 30$ и, затим, $b = 5$.

б) $b=6a$. У том случају се претходна једнакост своди на: $\left(\frac{13}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=25^2$,

одакле се лако добија: $a=\frac{50}{\sqrt{170}}$ и, затим, $b=\frac{300}{\sqrt{170}}$.

Трећи разред:

1. Свакој функцији која задовољава тражени услов једнозначно се може придружити низ следећег облика: $\underbrace{111\ldots1}_{x_1}0\underbrace{111\ldots1}_{x_2}0\cdots0\underbrace{111\ldots1}_{x_n}$, где је x_1 – број елемената скупа $\{1,2,...,n\}$ за које функција узима вредност 1, x_2 је број елемената истог скупа за које функција узима вредност 2 итд. Неки од x_i-ова могу имати и вредност 0, у ком случају одговарајућег подниза јединица у низу неће бити, тј на одговарајућем месту ће бити узастопне нуле. Укупан број нула је $n - 1$, а укупан број јединица је $x_1 + x_2 +...+ x_n = n$. Стога је број функција које задовољавају тражени услов једнак броју низова од n–1 нула и n јединица, тј. једнак је броју начина да се од $2n$–1 места изабере n места (за јединице) или n–1 места (за нуле), што износи $\binom{2n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n}$.

2. Приметимо да за свака три реална броја a, b, c важи:

$$(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Стога је дата једначина еквивалентна са:

$$3(\sin x+\sin 2x)(\sin 2x+\sin 3x)(\sin 3x+\sin x)=0,$$

тј. (превођењем збира у производ) са:

$$24\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{5x}{2}\sin 2x\cos^2\frac{x}{2}\cos x=0$$

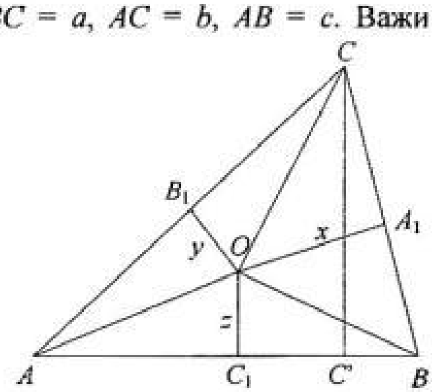
и решења су сва решења једначина $\sin\frac{3x}{2}=0$, $\sin\frac{5x}{2}=0$, $\sin 2x=0$, $\cos\frac{x}{2}=0$ и $\cos x=0$. Скуп решења је: $\left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2k\pi}{5} \mid k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. Ако се полиедар разбије на пирамиде чије су основе стране полиедра, а врхови у центру уписане сфере, онда су висине тих пирамида једнаке r, па је запремина полиедра:

$$V=\frac{1}{3}rS_1+\frac{1}{3}rS_2+\ldots+\frac{1}{3}rS_n=\frac{1}{3}rS \text{ } (S_i \text{ – површина стране полиедра}).$$

Како је запремина полиедра мања од запремине описане сфере, биће $\frac{1}{3}rS<\frac{4}{3}R^3\pi$, одакле непосредно следи тражена неједнакост.

4. Означимо са $x = OA_1$, $y = OB_1$ и $z = OC_1$, као и: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Важи једнакост: $xb + ya = Rc$. Она се може добити, на пример, Птолемејевом теоремом примењеном на (тетивни) четвороугао OA_1CB_1 или на неки други начин (на пример, ако је C' подножје висине из C на AB, онда се лако, рачуном углова, покаже да су слични троуглови OA_1C и $AC'C$, односно OB_1C и $BC'C$, па је, због пропорционалности страница, $c=AC'+C'B=\frac{xb}{R}+\frac{ya}{R}$). Слично се доказују и једнакости: $xc + za = Rb$ и $yc + zb = Ra$. Најзад, једнакост: $xa+yb+zc=2S=r(a+b+c)$ (S је површина троугла ABC) добија се изражавајући површину троугла ABC као збир површина троуглова ABO, BCO и CAO. Сабирајући све четири једнакости, добија се:



$$(x+y+z)(a+b+c)=R(a+b+c)+r(a+b+c)$$

одакле скраћивањем са $a + b + c$ следи тражена једнакост.

5. Означимо са $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Задатак се своди на то да се докаже да је $a^n+\frac{1}{a^n}$ цео број за сваки природан број n. Тврђење доказујемо индукцијом по n:

- За $n = 1$ је $a+\frac{1}{a}=3$ – цео број,

- За $n=2$ је $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2$ – цео број,

- $a^{n+1}+\dfrac{1}{a^{n+1}}=\left(a^n+\dfrac{1}{a^n}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a^{n-1}+\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)=3\left(a^n+\dfrac{1}{a^n}\right)-\left(a^{n-1}+\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)$, што је цео број ако су $\left(a^n+\dfrac{1}{a^n}\right)$ и $\left(a^{n-1}+\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)$ цели.

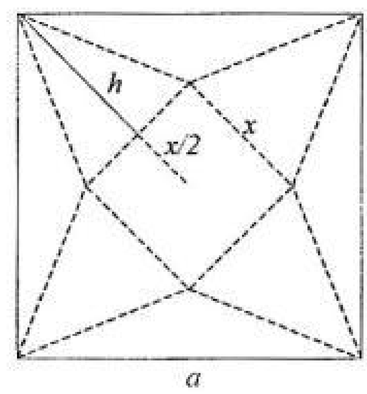
Четврти разред:

1. Уочимо функцију: $f(t)=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^t-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^t+1}$. Она је, за $t\in(0,+\infty)$, растућа функција. Наиме, $f(t)=1-\dfrac{2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^t+1}$. Како је $\dfrac{a}{b}>1$, то, када се t увећава, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^t$, а тиме и $\left(\dfrac{a}{b}\right)^t+1$ расте, $\dfrac{2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^t+1}$ опада и $f(t)$ расте. Зато за $n<p$ важи и $f(n)<f(p)$, што је еквивалентно тврђењу задатка.

2. а) Упоредићемо бројеве π и $e\cdot\ln\pi$ испитивањем функције $f(x)=x-e\cdot\ln x$. Имамо да је $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$, па је $f'(x)>0$ за $x>e$ и $f'(x)<0$ за $0<x<e$. Стога функција $f(x)$ има минимум за $x=e$ у коме јој је вредност 0. Отуда је $f(x)\geq 0$ за све $x>0$, и, приде, $f(x)>0$ за $x\neq e$. Но то значи и да је $\pi>e\cdot\ln\pi$, па је и $e^\pi>\pi^e$.

   б) Како је $e^\pi>\pi^e$ и $\pi>e$, то је и $\pi^{e^\pi}>e^{\pi^e}$.

3. Очигледно је $h+\dfrac{x}{2}=a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, где је h апотема (висина бочне стране пирамиде која одговара основној ивици). Ако са H означимо висину пирамиде, онда из Питагорине теореме непосредно добијамо: $H=\sqrt{h^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}}$, те запремина пирамиде износи:



$$V(x)=\frac{1}{3\sqrt{2}}x^2\sqrt{a^2-ax\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{a^2x^4-ax^5\sqrt{2}}$$

Запремина ће бити максимална ако је израз под кореном максималан. Први извод овог израза је $4a^2x^3-5ax^4\sqrt{2}$ и анулира се за $x=\frac{2}{5}a\sqrt{2}$. Непосредном провером се установљује да је, за ову вредност x, други извод израза негативан, те се заиста достиже максимум. Дакле, максимална запремина ће се добити ако је основна ивица пирамиде једнака $\frac{2}{5}$ дијагонале квадрата и та запремина износи $\frac{4\sqrt{10}a}{375}$.

4. Доказаћемо да услове задатка задовољава *ма који* природан број n. Наиме, узмимо $m=2n-1$. Тада је за свако $k\geq 1$ експонент $p=m^{\cdot^{\cdot^{m}}\,k-1\,\text{пута}}$ непаран, а $m\equiv -1(\operatorname{mod} n)$, па је и $m^{\cdot^{\cdot^{m}}\,k\,\text{пута}}+1=m^p+1\equiv(-1)^p+1=0(\operatorname{mod} n)$, тј. број $m^{\cdot^{\cdot^{m}}\,k\,\text{пута}}+1$ је дељив са n.

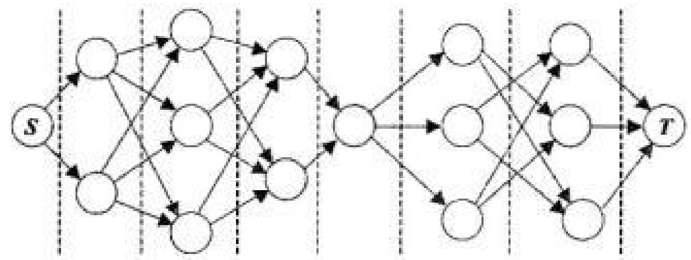
5. Претпоставимо да је трака расечена на описани начин. Приметимо да међу комадима који се добијају расецањем, највише по три комада могу бити исте "дужине" (тј. садржати исти број узастопних цифара), будући да почетна цифра (1, 2 или 3) и дужина једнозначно одређују број записан на комаду. Ако би комада било барем 46, то би укупна дужина свих комада била, дакле, барем: $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+...+3\cdot 15+16>360$. Покажимо сада да се може добити 45 комада. Уочимо прво да је $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+...+3\cdot 15=360$. Показаћемо, дакле, да се може исећи по 3 комада дужина, редом, 1, 2, 3,..., 15. У ту сврху, исецимо по један комад дужине 2, 3,..., 15, редом (укупне дужине $2+3+...+15=119$). Затим исецимо, истим редоследом, још по један комад дужина 2, 3,..., 15 и учинимо ово и по трећи пут. Најзад, од преосталог комада исецимо три појединачне цифре (дужине 1). Три последње цифре су, јасно, различите, а и на претходно исеченим комадима истих дужина биће различити бројеви. Наиме, почетак комада дужине k ($2\leq k\leq 15$) који је прво исечен је померен у односу на комад исте дужине сечен по други пут за 119 цифара, а у односу на трећи – за $2\cdot 119$, док су други и трећи размакнути за 119 цифара. Како 119 није дељиво са 3, то они почињу различитим цифрама.

Б категорија

Први разред:

1. Нека је $A=100c+10b+a$, где су a, b, c цифре броја A. Свака од цифара броја A се у датих шест бројева појављује двапут на месту цифре јединица, двапут на месту цифре десетица и двапут на месту цифре стотина, па је збир ових шест бројева $222(c+b+a)$. Из услова задатка се добија једначина: $222(c+b+a)=3c\cdot 111$, односно $c=2(b+a)$. Како су цифре различите, мора бити $c=6$ или $c=8$, а број A је један од бројева: 612, 621, 813, 831.

2. Поделимо вертикалним линијама дату шему на "области":



Очигледно се при сваком проласку једним од путева у смеру стрелице прелази у следећу област. Приметимо, даље, да, у оквиру сваке области, из сваког од кругова полази једнак број стрелица у следећу област (редом, ови бројеви су: 2, 3, 2, 1, 3, 2, 1). То значи да, без обзира до ког круга у некој области се стигло, број начина да се путовање настави је исти, па је укупан број путева од S до T једнак $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$.

3. Дата једначина се може трансформисати у облик: $(x-5)(y+3)=-10$. Решења добијамо из услова да су $x-5$ и $y+3$ фактори броја -10 који у производу дају -10, према следећој табели:

$x-5$	$y+3$	x	y
1	–10	6	–13
2	–5	7	–8
5	–2	10	–5
10	–1	15	–4
–1	10	4	7
–2	5	3	2
–5	2	0	–1
–10	1	–5	–2

Укупно постоји, дакле, 8 решења.

4. Обзиром да је израз са леве стране знака једнакости увек ненегативан, то једначина нема решења за $a < 0$. У наставку, решавамо ову једначину за $a \geq 0$.

Ако је $|x| > a$, онда је, поготово, $|x| > -a$, па израз с леве стране знака једнакости има вредност $2|x| > 2a$, тј. једнакост не може бити задовољена.

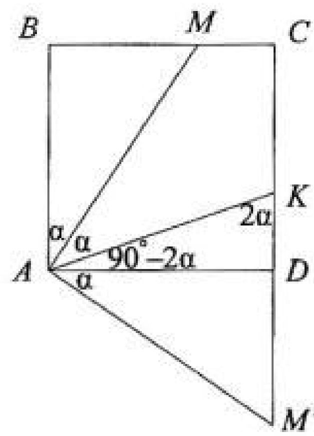
Ако је $-a \leq 0 \leq |x| \leq a$, онда израз с леве стране знака једнакости има вредност $2a$ и једнакост је задовољена.

Другим речима, решења су сви они бројеви x (и само они) који задовољавају $|x| \leq a$. Скуп решења је интервал $[-a, a]$ за $a > 0$, односно једночлан скуп $\{0\}$ за $a = 0$.

5. Приметимо да сваком читању речи СРБИЈА према задатим правилима одговара тачно једно читање "уназад", почев од крајњег слова А, при чему се са сваког слова прелази или на суседно слово с леве стране или на слово непосредно изнад тог суседног. При таквом читању, за свако слово постоје *тачно* два следећа слова, тако да је укупан број начина да се "уназад" (а тиме и "унапред") прочита реч СРБИЈА једнак $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Други разред:

1. Уочимо да је $\left(2+\sqrt{2}\right)^3=20+14\sqrt{2}$ и, слично, $\left(2-\sqrt{2}\right)^3=20-14\sqrt{2}$. Стога је $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$, па је и $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ $=$ $\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)$ $=$ 4.
2. Видети решења задатака за 2. разред, категорија А
3. Нека је M' тачка на полуправој CD тако да је D између C и M' и $DM' = BM$. Тада се лако доказује да су троуглови ADM' и ABM подударни. Ако се са α означи угао BAM, тада је $\angle MAK = \alpha$, $\angle KAD = 90^\circ - 2\alpha$ и $\angle DAM' = \alpha$. Но, онда је $\angle AKD = 2\alpha$, $\angle KAM' = 90^\circ - \alpha = \angle AM'K$, па је троугао AKM' једнакокрак и важи: $AK = KM' = KD + DM' = BM + KD$.



4. Услови су дефинисани за $y \geq \dfrac{5}{16}$, а такође за свако решење важи и $y \leq 1$ због $x^2 + y^2 = 1$. Даље задатак решавамо под претпоставком: $y \in \left[\dfrac{5}{16},1\right]$.

   За $x < 0$ не може бити $y = 1$ (јер би иначе било $x = 0$), а за свако $y \in \left[\dfrac{5}{16},1\right)$ је јединствено решење $x=-\sqrt{1-y^2}$.

   За $x \geq 0$ неједнакост из задатка је еквивалентна са: $x^2 < y-\dfrac{5}{16}$, што има решења ако и само ако је $1-y^2 < y-\dfrac{5}{16}$. Решавајући по y, добија се да $y \in \left(-\infty,-\dfrac{7}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

   Но горњу претпоставку овде задовољава само $y \in \left(\dfrac{3}{4},1\right]$. Јединствено решење по x је овде $x=\sqrt{1-y^2}$.

   Скуп свих решења је, дакле:
   $$\left\{\left(-\sqrt{1-y^2},y\right) \mid \frac{5}{16} \leq y < 1\right\} \cup \left\{\left(\sqrt{1-y^2},y\right) \mid \frac{3}{4} < y \leq 1\right\}.$$

5. Дата једначина се може трансформисати у: $(z+1)^2+|z+1|=0$, тј. $|z+1|=-(z+1)^2$. Упоређујући модуле леве и десне стране, за $r=|z+1|$ имамо једначину $r^2 = r$, одакле је или $r = 0$, а тиме и $z + 1 = 0$, тј. $z = -1$, или $r = 1$, одакле је и $-(z+1)^2=1$, па је или $z = -1 - i$ или $z = -1 + i$. Дакле, скуп решења једначине је: $\{-1, -1 - i, -1 + i\}$.

Трећи разред:

1. Уз услов $3+2x-x^2+e^2>0$, неједначина је еквивалентна са: $3+2x-x^2+e^2<e^2$, тј. са $(x+1)(x-3)>0$, тј. са $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$. Услов $3+2x-x^2+e^2>0$ је испуњен ако и само ако $x\in\left(1-\sqrt{4+e^2},1+\sqrt{4+e^2}\right)$. Једноставним одређивањем положаја ових интервала на бројној правој добија се да је скуп решења: $\left(1-\sqrt{4+e^2},-1\right)\cup\left(3,1+\sqrt{4+e^2}\right)$.

2. Нека су углови троугла означени са α, β и γ, при чему нека је γ највећи угао. Тада је:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\leq 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(због $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\geq 0$ и $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 1$)

$$= 2\sin\varphi+\sin 2\varphi\text{, где је } \varphi=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Како је γ највећи угао, то је $\varphi\leq 60^\circ$. Неједнакост из задатка се своди на:

$$2\sin\varphi+\sin 2\varphi\leq 2\sin 60^\circ+\sin 120^\circ\text{, тј. на:}$$

$$2(\sin 60^\circ-\sin\varphi)\geq\sin 2\varphi-\sin 120^\circ,$$

$$2\sin\frac{60^\circ-\varphi}{2}\cos\frac{60^\circ+\varphi}{2}\geq-\sin(60^\circ-\varphi)\cos(60^\circ+\varphi),$$

$$2\sin\frac{60^\circ-\varphi}{2}\cos\frac{60^\circ+\varphi}{2}\geq-2\sin\frac{60^\circ-\varphi}{2}\cos\frac{60^\circ-\varphi}{2}\cos(60^\circ+\varphi)$$

Ако је $\varphi = 60^\circ$, обе стране неједнакости се анулирају и неједнакост важи, а ако је $\varphi<60^\circ$, последња неједнакост се своди на:

$$\cos\frac{60^\circ+\varphi}{2}\geq-\cos\frac{60^\circ-\varphi}{2}\cos(60^\circ+\varphi)$$

и неједнакост важи зато што $\frac{60^\circ+\varphi}{2}\in(30^\circ,60^\circ)$, па је лева страна већа од $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, а $60^\circ+\varphi\in(60^\circ,120^\circ)$, те је $\left|\cos(60^\circ+\varphi)\right|<\frac{1}{2}$, док је $\left|\cos\frac{60^\circ-\varphi}{2}\right|\leq 1$, те је десна страна по апсолутној вредности мања од $\frac{1}{2}$.

3. Ако је $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BAD = \beta$, онда је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$, па је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1/5+2/3}{1-(1/5)(2/3)} = 1$, па како је $\alpha + \beta < 90^\circ$ ($\alpha, \beta < 45^\circ$) то је $\alpha + \beta = 45^\circ$.

4. Нека је са a означена основна ивица пирамиде. Тада се (Питагорином теоремом) лако добија да је $h^2 = H^2 + \frac{a^2}{12}$ и $s^2 = H^2 + \frac{a^2}{3}$. Стога је $s^2 + 3H^2 = 4h^2$. Примењујући два пута неједнакост $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ добија се прво: $\frac{s^2+H^2}{2} \geq sH$, а затим: $\frac{s^2+3H^2}{4} = \frac{\frac{s^2+H^2}{2}+H^2}{2} \geq \frac{sH+H^2}{2} \geq \sqrt{sH^3}$, тј. $h^2 \geq \sqrt{sH^3}$, одакле квадрирањем следи тражена једнакост.

5. Очигледно ни један од бројева x, y, z није једнак нули, због друге (или треће) једнакости су x и y истог знака, а због прве је z позитиван. Сем тога, $|x|$, $|y|$ и $|z|$ задовољавају исти систем једначина. Логаритмовањем по основи 2, уз смену: $a = \log_2|x|$, $b = \log_2|y|$, $c = \log_2|z|$ добија се да a, b и c задовољавају следећи систем једначина:

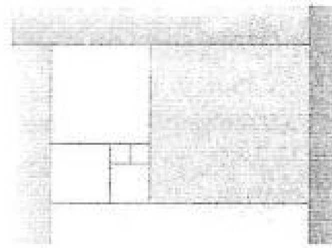
$$\begin{aligned} a+b+c&=4\\ a-b+2c&=2\\ a+b+4c&=1 \end{aligned}$$

Решавањем овог система једначина добија се: $a = \frac{9}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -1$, тј. $|x| = 2^{9/2}, |y| = 2^{1/2}, |z| = \frac{1}{2}$. Због уочених услова које задовољава знак бројева x, y, z, решења су: $x = 2^{9/2}, y = 2^{1/2}, z = \frac{1}{2}$ и $x = -2^{9/2}, y = -2^{1/2}, z = \frac{1}{2}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА

А категорија

Први разред:



1. Може: нека два квадрата странице 1 имају заједничку страницу, уз њих се дода квадрат странице 2, затим квадрати странице 3, 5, 8,... као на слици. Странице квадрата чине Фибоначијев низ.

2. Приметимо да је игра еквивалентна следећој игри: на табли 3×4 два играча бирају (заузимају) по једно поље, али тако да се избором неког поља заузимају и сва поља у правоугаонику који захвата поља "лево" и "горе" у односу на изабрано поље (прецизније: сва поља у правоугаонику чија су наспрамна темена – лево горње теме табле и десно доње теме одабраног поља). Игру губи онај играч који мора да заузме последње (десно доње поље). Наиме, ако на овој табли редовима доделимо степене 5^0, 5^1, 5^2, а колонама степене 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, заузимањем поља се бира и један делилац броја $200 = 2^3 \cdot 5^2$, а његови делиоци (који се даље не смеју бирати) су управо на "додатним" заузетим пољима.

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

Миљан треба да у првом потезу одабере поље (број) 10. Тиме заузима и сва осенчена поља на слици. Уочимо сада парове бројева: 25/20, 25/8, 50/4 и 100/40. Ако Младен изабере један од бројева из неког пара, Миљан у следећем потезу бира други (ако је бирао 25, Миљан може да бира било 20 или 8) и добија се једна од следеће четири позиције:

a) 25/20:

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

b) 25/8:

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

c) 50/4:

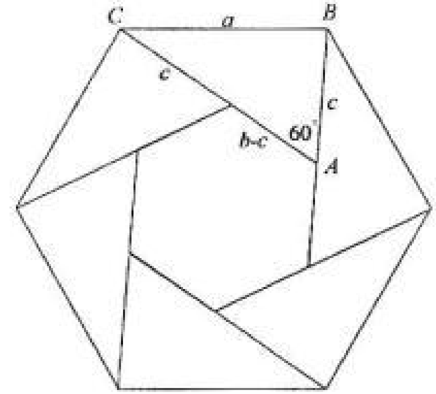
	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

d) 100/40:

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

За сваку од ових позиција, Миљан добија на сличан начин – можемо уочити одговарајуће парове. За позицију (a), то су: 50/8, 100/40, за позицију (b) су: 50/20, 100/40, за позицију (c) су: 20/8, 100/40, док у позицији (d) Младен одмах губи партију.

3. Приметимо да је површина правилног шестоугла са страницом a једнака $6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ако троугао ABC има $\angle A = 60^\circ$, онда се шест таквих троуглова може сложити као на слици. Површина $6P$ шест оваквих троуглова је разлика површина унутрашњег и спољашњег шестоугла, тј. $6P = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6\frac{(b-c)^2\sqrt{3}}{4}$, одакле лако следи тражена једнакост.



4. Ако привремено "разликујемо" две цифре 3 и три цифре 4, од ових цифара можемо направити 7! "различитих" бројева. У тим бројевима, свака цифра се на сваком месту нађе 6! пута (за све пермутације преосталих цифара на преосталим местима), па је збир свих *цифара* на свакој позицији једнак $6!(1+2+3+3+4+4+4) = 21\cdot 6!$. Укупан збир свих ових бројева је, дакле, $1111111\cdot 21\cdot 6!$. Но, приметимо да ови сви бројеви нису и стварно различити, односно да је међу њима тачно по $2!\cdot 3!$ једнаких (за разне пермутације тројки и четворки), тако да је укупан збир толико пута мањи и износи $\frac{1111111\cdot 21\cdot 6!}{2!\cdot 3!}$ (што је једнако 1399999860).

5. Када се на обе стране свих једначина дода 1 и леве стране напишу као производи фактора, добијају се једначине: $(a+1)(b+1)(c+1) = 3$, $(b+1)(c+1)(d+1) = 6$, $(c+1)(d+1)(a+1) = 8$ и $(d+1)(a+1)(b+1) = 12$. Множењем ових једначина се добија: $[(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)]^3 = 3\cdot 6\cdot 8\cdot 12 = 12^3$, те је $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 12$, односно (дељењем ове једначине претходним једначинама): $a + 1 = 2$, $b + 1 = 3/2$, $c + 1 = 1$ и $d + 1 = 4$, тј. $a = 1$, $b = 1/2$, $c = 0$, $d = 3$.

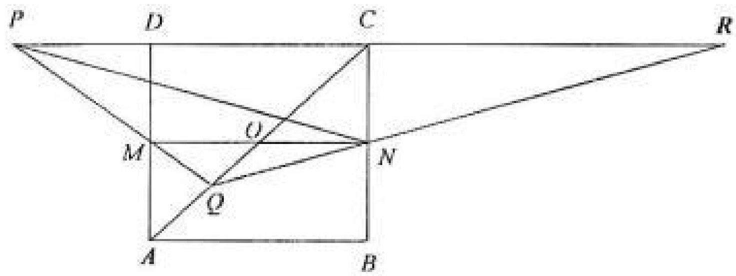
Други разред:

1. Ако се дата једначина напише као квадратна по b, добија се: $5b^2 + (5a-14)b + (5a^2-7a) = 0$. Њена дискриминанта износи $196 - 75a^2$, што повлачи да једначина има решења само за $a^2 \le \frac{196}{75} = 2{,}613\ldots$, тј. у целим бројевима само за

$a = -1, 0, 1$. За $a = -1$ добија се решење $b = 3$ (и нецелобројно $b = 4/5$), за $a = 0$ добија се решење $b = 0$ (и нецелобројно $b = 14/5$) и за $a = 1$ добија се решење $b = 2$ (и нецелобројно $b = -1/5$). Према томе, решења су: $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$.

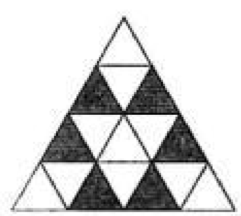
2. Приметимо да је $\left|\cos^5 x - \sin^5 x\right| \le \left|\cos^5 x\right| + \left|\sin^5 x\right| < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ кад год је $0 < \left|\cos x\right| < 1$ или $0 < \left|\sin x\right| < 1$, тј. за свако реално x које није облика $x = \frac{k\pi}{2}$ (k целобројно). Према томе, довољно је испитати само бројеве тог облика. За $x = 2k\pi$ и $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (k целобројно) добија се да је једначина задовољена, док за преостале вредности ($x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x = \pi + 2k\pi$) није задовољена.

3. Нека је R пресек праве QN са правом CD и нека је O центар правоугаоника. Будући да је $MO = ON$, то користећи Талесову теорему лако следи и да је $CP = CR$. Но, у троуглу PRN је дуж NC висина која пада у средиште наспрамне ивице, те је овај троугао једнакокрак. Сада је $\angle QNM = \angle QRP$ (сагласни) $= \angle NPR$ (углови на основици једнакокраког троугла) $= \angle MNP$ (наизменични).



4. Знајући да је $abc = 4PR = 4rsR$ (P – површина троугла), као и да је $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \ge \frac{a+b+c}{3}$ (неједнакост квадратне и аритметичке средине), тј. $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{2\sqrt{3}}{3}s$, добија се: $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le \frac{4rs\sqrt{3}R}{2s} = 2Rr\sqrt{3}$, што је и требало доказати.

5. Ако уочимо шест осенчених троуглова (као на слици), може се видети да се допуштеним операцијама увећава или смањује уписана вредност у 0 или 2 осенчена троугла. Стога ће при свакој операцији укупан збир вредности у осенченим троугловима сачувати парност. Обзиром да је на почетку укупан збир непаран, а да у случају да је у свим троугловима уписана иста вредност m укупан збир износи $6m$ и паран је, то је немогуће дозвољеним операцијама постићи да иста вредност буде уписана у свим троугловима.



Трећи разред:

1. Ако је b_n број бактерија после n секунди и v_n број вируса, имамо $b_0 = 2000$, $v_0 = 1$ и $v_{n+1} = 2v_n$, $b_{n+1} = 2(b_n - v_n)$ (формуле важе све док има бактерија). Отуда имамо: $\frac{b_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{2(b_n - v_n)}{2v_n} = \frac{b_n}{v_n} - 1$. Стога, пошто је $\frac{b_0}{v_0} = 2000$ и количник $\frac{b_n}{v_n}$ опада за 1 када

се n увећа за 1, то ће бити $\frac{b_{2000}}{v_{2000}}=0$, тј. бактерије ће изумрети после 2000 секунди (33 минута и 20 секунди).

2. Нека је α нагибни угао бочне ивице у односу на раван основе. Ако је дужина бочне ивице l, висина пирамиде H и полупречник описаног круга око основе R, тада је $H=l\sin\alpha$, $R=l\cos\alpha$. Запремина пирамиде је мања од запремине праве купе којој је врх – врх пирамиде а основа – круг описан око основе пирамиде. Дакле, запремина пирамиде је мања од: $\frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{\pi}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha = \frac{\pi}{6}l^3\cos\alpha\sin 2\alpha \le \frac{\pi}{6}l^3 \le l^3$, јер је $\frac{\pi}{6}<1$.

3. Ставимо $\cos x\cdot\cos y=a$. Имамо: $\cos(x+y)=a-b$, $\cos(x-y)=a+b$. То доводи до услова: $|a-b|\le 1$, $|a+b|\le 1$. Обрнуто, ако је a број који задовољава ова два услова, тада се могу наћи углови α, β тако да је $\cos\alpha = a-b$, $\cos\beta = a+b$ и стављајући $x=(\alpha+\beta)/2$, $y=(\alpha-\beta)/2$ добијамо углове x и y такве да је $\cos(x+y)=a-b$ и $\cos(x-y)=a+b$, тј. $\cos x\cdot\cos y=a$, $\sin x\cdot\sin y=b$. Горњи услови се могу преписати у облику: $-1+b,-1-b\le a\le 1-b,1+b$, што је еквивалентно са: $-1+|b|\le a\le 1-|b|$, тј. са: $|a|\le 1-|b|$. Одговарајући скуп вредности за a је непразан ако и само ако је $|b|\le 1$.

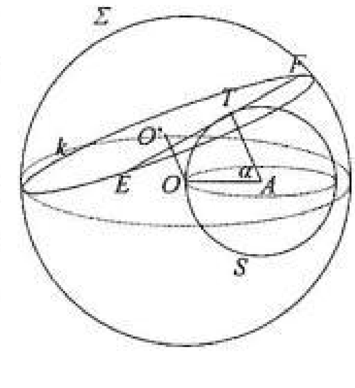
4. Показаћемо да се, за $n\ge 5$, може, чак, постићи да буде $a_1 = 3$. Доказ изводимо индукцијом са n на $n+2$, при чему базу индукције чине $n=3$ и $n=4$. Индуктивни корак: ако је $3^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=b^3$, онда је (множењем са 2^3): $6^3+(2a_2)^3+\ldots+(2a_n)^3=(2b)^3$, тј. $3^3+4^3+5^3+(2a_2)^3+\ldots+(2a_n)^3=(2b)^3$, где имамо $n+2$ сабирака. За $n=3$ "појачано" тврђење важи на основу датог примера $3^3+4^3+5^3=6^3$, а за $n=4$ добија се множењем дате једнакости $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3$ са 3^3: $3^3+15^3+21^3+36^3=39^3$.

5. Означимо дужине страница BC, CA и AB са a, b, c, редом. Ако је D пресек бисектрисе код темена A са страницом BC, E средиште странице CA и F подножје висине из темена C, по Чеваовој теореми биће: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$. Знајући да је $CE=EA$, и да је $BD:DC=c:b=\sin\gamma:\sin\beta$ (синусна теорема), а да је $AF=FC\operatorname{cotg}\alpha$, $BF=FC\operatorname{cotg}\beta$, добија се да важи: $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\beta}=1$, одакле сређивањем следи тврђење задатка.

Четврти разред:

1. Нека је A центар сфере S и нека је $\angle OAT=\alpha$. Раван π која у тачки T додирује сферу S сече сферу Σ по кругу полупречника ρ чија тетива је дуж EF. Центар тог круга је подножје O' нормале из центра O сфере Σ на раван π. Лако се добија да је

$OO' = r(1-\cos\alpha)$ и $TO' = r\sin\alpha$. Стога је и $\rho^2 = R^2 - r^2(1-\cos\alpha)^2$. Сада имамо да је: $ET^2 + TF^2$ = $(ET+TF)^2 - 2ET\cdot TF$, па како је $ET+TF = EF \le 2\rho$ и $ET\cdot TF$ = $\rho^2 - (TO')^2$ = $\rho^2 - r^2\sin^2\alpha$, то је $ET^2 + TF^2 \le$ $4\rho^2 - 2\rho^2 + 2r^2\sin^2\alpha$ = $2R^2 - 2r^2(1-\cos\alpha)^2 + 2r^2\sin^2\alpha$ = $2R^2 + 4r^2(\cos\alpha - \cos^2\alpha)$. Имајући у виду да је $\cos\alpha - \cos^2\alpha \le \frac{1}{4}$, добија се тражена неједнакост.



Једнакост важи ако и само ако је $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ (тј. $\alpha = 60^\circ$) и EF је пречник круга k.

2. Пођимо од неједнакости: $1+n \le \left(1+\frac{n}{m}\right)^m$ која важи за природне бројеве m и n (и која се може доказати, на пример, уочавањем биномног развоја десне стране и одбацивањем свих степена $\frac{n}{m}$ већих од 1). Отуда следи (кореновањем): $\sqrt[m]{1+n} \le \frac{m+n}{m}$, тј. $\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}} \ge \frac{m}{m+n}$. Симетрично је и: $\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}} \ge \frac{n}{m+n}$, те се сабирањем последњих двеју неједнакости добија тражена неједнакост.

3. Дељењем са x^{n-1} (и пребацивањем појединих чланова на другу страну), једначина постаје: $x + a_1 = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^{n-1}}$. Будући да је за позитивне вредности x лева страна строго расте, а десна строго опада, то ова једначина може имати *највише* једно позитивно решење. С друге стране, у полазној једначини $x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} - \ldots - a_n = 0$, за $x = 0$ је лева страна строго негативна, а обзиром да је леву страну могуће записати и као: $x^{n-1}\left(x + a_1 - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{x^2} - \ldots - \frac{a_n}{x^{n-1}}\right)$, израз у загради је за $x > 1$ већи од $x + a_1 - a_2 - \ldots - a_n > 0$ за $x > a_2 + \ldots + a_n$. Стога, за ненегативне вредности x лева страна једначине узима и позитивне и негативне вредности. Због непрекидности она мора за неку позитивну вредност x имати и вредност 0, те тако полазна једначина има и *најмање* једно позитивно решење.

4. Број 100010001...10001 (k јединица, $k > 2$) може се написати као $1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k-4}$ = $\frac{10^{4k}-1}{10^4-1}$ = $\frac{10^{2k}+1}{10^2+1}\cdot\frac{10^{2k}-1}{10^2-1}$ = $\frac{1}{101}\left(10^{2k}+1\right)\left(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k-2}\right)$. Уочимо да је 101 прост број. За $k > 2$ су оба броја $10^{2k} + 1$ и $1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k-2}$ већа од 101, бар један од њих је дељив са 101

(са количником при дељењу већим од јединице), те ће полазни број бити производ два фактора већа од јединице, дакле сложен број.

5. Кубирањем прве једнакости и одузимањем треће добија се: $3a^m a^n\left(a^m+a^n\right)=3a^p a^q\left(a^p+a^q\right)$. Уочимо да a^m+a^n није једнако нули (иначе би било или $a=0$ или $\frac{a^m}{a^n}=-1$, тј. $a=-1$, што се противи условима задатка). Дакле, можемо обе стране поделити са $3(a^m+a^n)=3(a^p+a^q)$ и добити: $a^m a^n=a^p a^q$. Ако означимо $a^m+a^n=a^p+a^q=-u$, $a^m a^n=a^p a^q=v$, користећи Вијетова правила закључујемо да су како a^m и a^n, тако и a^p и a^q корени исте квадратне једначине $x^2+ux+v=0$. Стога је или $a^m=a^p$ и $a^n=a^q$, или је $a^m=a^q$ и $a^n=a^p$. Како је a различито од 0, 1 и –1, то одавде добијамо да је или $m=p$ и $n=q$, или је $m=q$ и $n=p$.

Б категорија

Први разред:

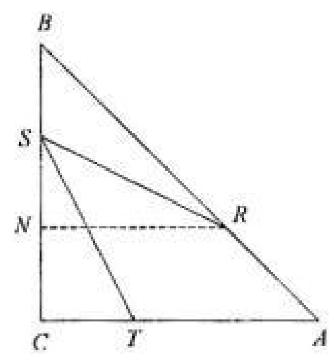
1. Приметимо да је игра еквивалентна следећој игри: на табли 4×4 два играча бирају (заузимају) по једно поље, али тако да се избором неког поља заузимају и сва поља у правоугаонику који захвата поља "лево" и "горе" у односу на изабрано поље (прецизније: сва поља у правоугаонику чија су наспрамна темена – лево горње теме табле и десно доње теме одабраног поља). Игру губи онај играч који мора да заузме последње (десно доње поље). Наиме, ако на овој табли редовима доделимо степене 5^0, 5^1, 5^2, 5^3 а колонама степене 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, заузимањем поља се бира и један делилац броја $1000=2^3\cdot5^3$, а његови делиоци (који се даље не смеју бирати) су управо на "додатним" заузетим пољима.

	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200
5^3	125	250	500	1000

Миљан треба да у првом потезу одабере поље (број) 100. Тиме заузима и сва осенчена поља на слици. Уочимо сада парове бројева: 125/8, 250/40 и 500/200. Ако Младен изабере један од бројева из неког пара, Миљан у следећем потезу бира други и тако присиљава Младена да после највише три потеза изабере број 1000 (и изгуби).

2. Оваквих парова нема. Наиме, лева страна једнакости се може написати као $m(m+1)(m+5)$, а десна као: $(2n+1)(2n+2)(2n+6)-4$, па је лева страна увек дељива са 3, а десна није.

3. Нека је N подножје нормале из R на правој BC. Како је RN паралелна AC и $BR=2/3BA$, то је $BN=2/3BC$, $NR=2/3CA$, па је $SN=1/3BC=1/3AC=CT$ и $NR=SC$. Стога су троуглови RSN и STC подударни, па је и $RS=ST$.



4. Нека су $A_1, A_2, ..., A_n$ дате тачке и O произвољна тачка равни. Напишимо сваки од датих вектора $\overrightarrow{A_iA_j}$ као разлику $\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$. Ако сада сумирамо све ове разлике, сваки вектор $\overrightarrow{OA_i}$ ће се појавити 2000 пута са знаком "плус" и 2000 пута са знаком "минус", те се сви сабирци поништавају и резултат је нула-вектор.

5. Претпоставимо да никоја три узастопна броја нису странице троугла. Тада је $x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 1 + 1 = 2$, $x_4 \geq x_2 + x_3 \geq 1 + 2 = 3$ и, слично: $x_5 \geq 2 + 3 = 5$, $x_6 \geq 3 + 5 = 8$, $x_7 \geq 5 + 8 = 13$, $x_8 \geq 8 + 13 = 21$, $x_9 \geq 21 + 13 = 34$, $x_{10} \geq 34 + 21 = 55$, $x_{11} \geq 55 + 34 = 89$, $x_{12} \geq 89 + 55 = 144$, $x_{13} \geq 144 + 89 = 233$, $x_{14} \geq 233 + 144 = 377$, $x_{15} \geq 377 + 233 = 610$, $x_{16} \geq 610 + 377 = 987$, $x_{17} \geq 987 + 610 = 1597$ и $x_{18} \geq 1597 + 987 = 2584 > 2000$, што је контрадикција.

Други разред:

1. Ако се дата једначина напише као квадратна по b, добија се: $5b^2 + (5a-14)b + (5a^2 - 7a) = 0$. Њена дискриминанта износи $196 - 75a^2$, што повлачи да једначина има решења само за $a^2 \leq \frac{196}{75} = 2{,}613...$, тј. у целим бројевима само за $a = -1, 0, 1$. За $a = -1$ добија се решење $b = 3$ (и нецелобројно $b = 4/5$), за $a = 0$ добија се решење $b = 0$ (и нецелобројно $b = 14/5$) и за $a = 1$ добија се решење $b = 2$ (и нецелобројно $b = -1/5$). Према томе, решења су: $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$.

2. Из друге једначине следи да је $|x|, |y| \leq 1$. Ако би било $x < 0$, онда би због прве једначине морало бити $y^{1999} > 1$, па и $y > 1$, што је контрадикција. Слично, не може бити ни $y < 0$. Дакле, важи: $0 \leq x, y \leq 1$. Ако је $0 < x < 1$, онда је $x^{2000} < x^{1999}$, што уз $y^{2000} \leq y^{1999}$ даје $1 = x^{2000} + y^{2000} < x^{1999} + y^{1999} = 1$, што је немогуће. Остају још могућности: $x = 0$ ($y = 1$) и $x = 1$ ($y = 0$), што и јесу решења датог система.

3. Нека је $KM = x \cdot AB$. Тада је, за висине h и h_1 из темена C троуглова ABC и KMC испуњено: $h_1 = xh$. Како је $S = \frac{1}{2}AB \cdot h$ и $Q = \frac{1}{2}KM \cdot h_1 = \frac{1}{2}x^2 AB \cdot h = x^2 S$, то је $x = \sqrt{\frac{Q}{S}}$. Како висина троугла KLM износи $h - h_1$, то тражена површина износи:
$$P_{KLMC} = P_{\Delta KMC} + P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}KM \cdot h_1 + \frac{1}{2}KM(h - h_1) = \frac{1}{2}x \cdot AB \cdot h = xS = \sqrt{SQ}.$$

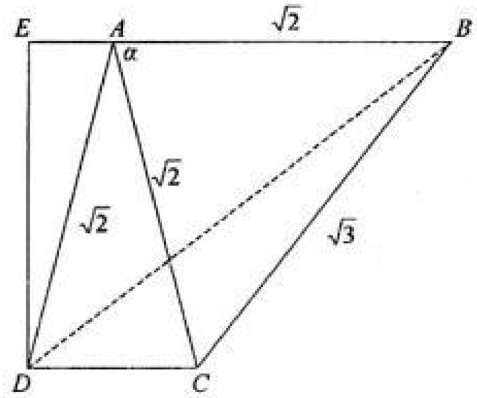
4. Користићемо познату неједнакост $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ која важи за $a, b \geq 0$. Имамо:
$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2\sqrt{2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt{\sqrt[12]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}} = 2^{\sqrt[6]{x} + 1}.$$

5. Имамо: $\underbrace{11\ldots1}_{2000}-\underbrace{22\ldots2}_{1000} = \frac{1}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{2000}-2\cdot\underbrace{99\ldots9}_{1000}\right) = \frac{1}{9}\left(10^{2000}-1-2\left(10^{1000}-1\right)\right) =$ $\frac{1}{3^2}\left(10^{2000}-2\cdot10^{1000}+1\right) = \left[\frac{1}{3}\left(10^{1000}-1\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{1000}\right)^2 = \underbrace{33\ldots3}_{1000}{}^2$, одакле кореновањем следи тражена једнакост.

Трећи разред:

1. С једне стране је $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \geq \frac{1}{2}$. С друге стране је $t^2-\sqrt{2}t+2\geq\frac{3}{2}$ за свако реално t, при чему се једнакост достиже само за $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Стога неједнакост може бити задовољена само када оба фактора с леве стране узму своје најмање вредности, тј. када је $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin 2x=\pm1$. Прву једнакост задовољавају вредности $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ и $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ (k целобројно), а провером се установљује да задовољавају и другу, па су то и решења неједначине.

2. Нека је E подножје висине из D на праву AB. Израчунајмо висину h трапеза $ABCD$: то је уједно и висина из темена C троугла ABC. Стога она износи $h=\sqrt{2}\sin\alpha$, при чему је α угао код темена A једнакокраког троугла ABC и познато је да је $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Отуда је $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$ и, најзад, $h=\frac{\sqrt{30}}{4}$. Сада се из Питагорине теореме (примењене на троугао ADE) добија $AE=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, а затим из Питагорине теореме примењене на троугао BDE: $BD=\sqrt{5}$.



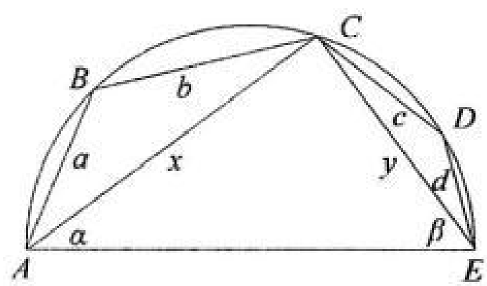
3. Познато је да је $|\sin x|=1$ за $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ (k целобројно), што није рационалан број ни за једно k. Стога, ако су p и q рационални, имамо да је $|\sin p|,|\sin q|<1$. Пре свега, то повлачи да је израз $1-\sin p\sin q$ строго позитиван; посебно не може бити једнак нули, па је израз $\left|\frac{\sin p-\sin q}{1-\sin p\sin q}\right|$ задат у задатку дефинисан, а затим, проширивањем са

$1-\sin p\sin q$ неједнакост се своди на: $|\sin p-\sin q|<1-\sin p\sin q$, тј. на две неједнакости: $\sin p\sin q-1 < \sin p-\sin q < 1-\sin p\sin q$, које су еквивалентне са: $(1+\sin p)(1-\sin q)>0$ и $(1-\sin p)(1+\sin q)>0$. Како је $|\sin p|,|\sin q|<1$, то су обе ове неједнакости задовољене.

4. Нека је α нагибни угао изводнице купе у односу на раван основе. Ако је дужина изводнице l, висина купе H и полупречник основе R, тада је $H=l\sin\alpha$, $R=l\cos\alpha$. Стога, запремина купе износи: $\frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{\pi}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha = \frac{\pi}{6}l^3\cos\alpha\sin 2\alpha \le \frac{\pi}{6}l^3 \le$ l^3, јер је $\frac{\pi}{6}<1$.

5. Услови за дефинисаност једначина су: $y > x$, $3y > 5x$. Под овим претпоставкама, ослобађањем од логаритма по основи 2 у првој једначини добија се еквивалентан систем: $(y-x)^3-(3y-5x)=0$, $x^2+y^2-5=0$. Даље, множећи другу једначину са $3y - 5x$ и одузимањем од прве множене са 5 добија се еквивалентан систем: $2y^2-10y^2x+12yx^2=0$, $x^2+y^2-5=0$. при чему се прва једначина може раставити као: $2y(y-2x)(y-3x)=0$. Имамо три случаја:
   - $y = 0$: тада из друге једначине добијамо $x=\pm\sqrt{5}$, при чему само решење $x=-\sqrt{5}$ задовољава и полазне услове.
   - $y = 2x$: у том случају, друга једначина је еквивалентна са: $5x^2=5$, тј. са $x=\pm 1$, при чему је онда и $y=\pm 2$. Од ова два решења, полазне услове задовољава само решење $x = 1$, $y = 2$.
   - $y = 3x$: у том случају, друга једначина је еквивалентна са: $10x^2=5$, тј. са $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, при чему је онда и $y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Од ова два решења, полазне услове задовољава само решење $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Четврти разред:



1. Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $AC = x$, $CE = y$, $\angle CAE = \alpha$, $\angle CEA = \beta$. Имамо да је $AE =$ 2 (пречник), па како је $\angle ACE$ прав, то је $x^2+y^2=4$. Из косинусне теореме за троугао ABC имамо да је $x^2 = a^2+b^2 - 2ab\cos\angle ABC = a^2+b^2 + 2ab\cos\beta$. Слично је и $y^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$. Сабирањем ових једнакости се добија: $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab\cos\beta+2cd\cos\alpha$. Сем тога је: $b < x = 2\cos\alpha$, $c < y = 2\cos\beta$, па је и $4 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + cdb$, што је и требало доказати.

2. Из $\sin^3\frac{(x^2+y^2)\pi}{2}+1=0$ следи $\sin^3\frac{(x^2+y^2)\pi}{2}=-1$, тј. $\sin\frac{(x^2+y^2)\pi}{2}=-1$, тј. $\frac{(x^2+y^2)\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, тј. $x^2+y^2=4k+3$ за неки цео број k. Но, то је немогуће, будући да квадрат целог броја даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4, а збир два квадрата може давати само остатке 0, 1 или 2. Дакле парова (x, y) целих бројева са траженим особинама нема.

3. Види решење 3. задатка за 1. разред, категорија А

4. Неједнакост је дефинисана за $x > 0$, $x \neq 1$ и све α. Означимо $y=\log_2 x$. Неједнакост се своди на: $y+\frac{1}{y}+2\cos\alpha \leq 0$. Разликујемо два случаја:

   a) $y < 0$, односно $0 < x < 1$. Тада је $y+\frac{1}{y}\leq -2$ и неједнакост је задовољена независно од вредности α.

   b) $y > 0$, односно $x > 1$. Тада је $y+\frac{1}{y}\geq 2$, при чему једнакост важи ако и само ако је $y = 1$. У овом случају, неједнакост ће бити задовољена ако и само ако је $y+\frac{1}{y}=2$ и $\cos\alpha=-1$, тј. ако и само ако је $x = 2$ и $\alpha=\pi+2k\pi$ за целобројно k.

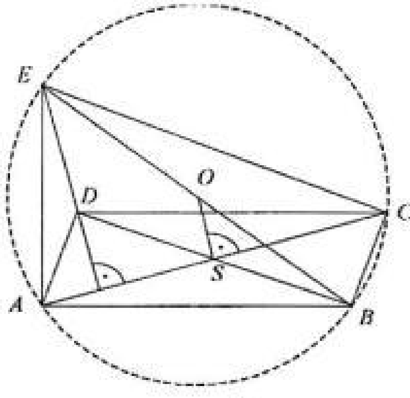
   Према томе, неједнакост је задовољена за $0 < x < 1$ и свако α, као и за $x = 2$ и $\alpha=\pi+2k\pi$ (k – цео).

5. Дата неједнакост је еквивалентна са: $(n!)^2 > n^n$. Уочимо да за свако k, $1 < k < n$, важи: $k(n + 1 - k) > n$ (наиме, квадратна функција по k: $-k^2 + k(n + 1) - n$ има нуле управо за $k = 1$ и $k = n$). Стога је: $1\cdot n = n$, $2(n-1) > n$, $3(n-2) > n$,..., $n\cdot 1 = n$. Множењем свих ових неједнакости (међу којима је бар једна строга за $n > 2$) добија се горња неједнакост.

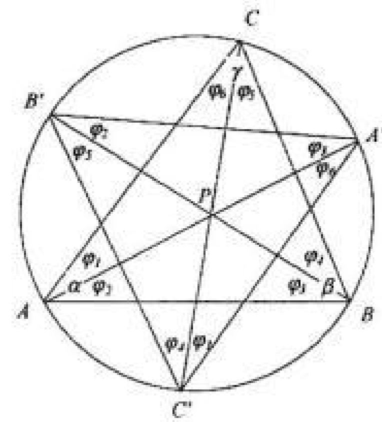
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

А категорија

Први разред:



1. Очигледно је, према условима задатка, четвороугао $ABCE$ тетиван са центром описаног круга O у средишту BE. Нека је S пресек дијагонала паралелограма. Обзиром да је S средиште AC, то је права OS уједно медијатриса дужи AC, па је $OS \perp AC$. Но, како је S средиште и BD, то је OS средња линија троугла EDB, па је паралелна са ED, што значи да је и $ED \perp AC$. Сада је: $\angle AED \cong \angle BAC$ (углови са нормалним крацима) $\cong \angle BEC$ (периферијски над тетивом BC).



2. Нека је P тачка унутар троугла ABC и нека су A', B' и C' пресеци полуправих AP, BP и CP са описаним кругом. Нека су, даље, углови означени као на слици. **Анализа**: Ако је троугао $A'B'C'$ једнакостраничан, тада је: $\varphi_2+\varphi_3 = (\varphi_2+\varphi_1) - (\varphi_1+\varphi_4)+(\varphi_4+\varphi_3) = \alpha - 60^\circ+\beta$, па је $\angle APB = \gamma+60^\circ$. Слично је и $\angle BPC = \alpha+60^\circ$ и $\angle CPA = \beta+60^\circ$. **Конструкција**: Задатак се своди на то да се нађе тачка P унутар троугла из које се странице троугла виде под угловима $\alpha+60^\circ$, $\beta+60^\circ$ и $\gamma+60^\circ$, што је једноставно: P је у пресеку геометријских места тачака под којима се се странице AB и AC виде под угловима, редом, $\gamma+60^\circ$ и $\beta+60^\circ$, тј. у пресеку два кружна лука над AB и AC са периферијским угловима $\gamma+60^\circ$ и $\beta+60^\circ$. **Доказ**: Обрнуто, ако се странице AC, AB троугла ABC из унутрашње тачке P виде под угловима $\beta+60^\circ$ и $\gamma+60^\circ$, редом, тада се и AB види под углом $360-(\beta+60^\circ)-(\gamma+60^\circ) = \alpha+60^\circ$. Тада је: $\angle B'C'A' = \varphi_1+\varphi_4 = (\varphi_1+\varphi_2) - (\varphi_2+\varphi_3)+(\varphi_3+\varphi_4) = \alpha-(180^\circ-\angle APB)+\beta = \alpha-(180^\circ-(\gamma+60^\circ))+\beta = 60^\circ$ и, слично, $\angle C'A'B' = 60^\circ$ и $\angle A'B'C' = 60^\circ$. **Дискусија**: Два конструисана лука се секу у тачно једној тачки (сем тачке A), будући да тангента на први од њих у тачки A заклапа угао $180° - (\gamma+60^\circ) = 120^\circ-\gamma$ са страницом AB, а на други – угао $120^\circ-\beta$ са страницом AC, при чему је збир ова два угла једнак $\alpha+60^\circ > \alpha$. Стога задатак има јединствено решење.

3. Приметимо да за свако $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ важи: $\dfrac{a_i a_j}{a_i+a_j} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_j}} \le \dfrac{a_i+a_j}{4}$ (неједнакост аритметичке и хармонијске средине). Сабирајући све ове неједнакости добијамо: $S \le \dfrac{1}{4}\sum\limits_{1\le i,j\le n}(a_i+a_j)$. Притом, у збиру с десне стране

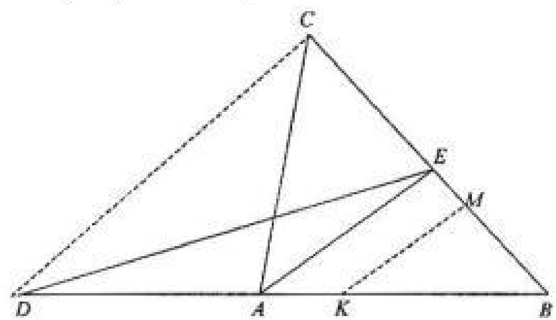
сваки од бројева учествује n пута као први сабирак и n пута као други, па је збир с десне стране једнак $\frac{1}{4}\cdot 2n(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\frac{n}{2}$.

4. Нека је Ж број жутих и С број сивих камелеона. Доказаћемо да разлика Ж – С увек даје исти остатак при дељењу са 3. Наиме, овај остатак се не може променити ни при каквом сусрету два камелеона:

Сусрет	Нови број жутих	Нови број сивих	Нова разлика жути–сиви
жути-сиви	Ж – 1	С – 1	Ж – С
жути-плави	Ж – 1	С + 2	Ж – С – 3
сиви-плави	Ж + 2	С – 1	Ж – С + 3
исте боје	Ж	С	Ж – С

будући да се ова разлика увек мења за број дељив са 3. Како ова разлика на почетку износи 2, то она никада не може узети вредности 0, 45 или –45 до чега би дошло ако би у неком тренутку сви камелеони били, редом: плави, жути, односно сиви.

5. За позитивне бројеве a, b, x, y једнакост $a+2ay+y=b+2bx+x$ еквивалентна је са: $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, тј. са $\frac{a+1/2}{b+1/2}=\frac{x+1/2}{y+1/2}$. Слично, једнакост $x+2xd+d=y+2yc+c$ еквивалентна је са $\frac{x+1/2}{y+1/2}=\frac{c+1/2}{d+1/2}$. Стога је и $\frac{a+1/2}{b+1/2}=\frac{c+1/2}{d+1/2}$, одакле добијамо: $a+2ad+d=b+2bc+c$.



Други разред:

1. Нека је AE бисектриса $\angle CAB$ (E лежи на страници BC). Тада је AE паралелно са CD (троугао CDA је једнакокрак, па је $\angle DCA=\frac{\alpha}{2}=\angle CAE$). Стога троуглови AEC и AED имају једнаке површине, па то важи и за троуглове BCA и BDE (настају допуном претходних троуглова троуглом ABE). Ако ову површину означимо са S, а са S_1 заједничку површину троуглова BDM и BCK, онда је $S_1{:}S=S_{BDM}{:}S_{BDE}=BM{:}BE$ и $S_1{:}S=S_{BCK}{:}S_{BCA}=BK{:}BA$ (висина је заједничка, па се површине односе као основице). Стога је $BM{:}BE=BK{:}BA$, па је KM паралелна AE и $\angle BKM\cong\angle BAE=\frac{\alpha}{2}$.

2. Означимо:

$$S=\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3},$$

$$S_2 = \frac{a_2}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_3}{a_3+a_4+a_1} + \frac{a_4}{a_4+a_1+a_2} + \frac{a_1}{a_1+a_2+a_3},$$

$$S_3 = \frac{a_3}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_4}{a_3+a_4+a_1} + \frac{a_1}{a_4+a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_2+a_3},$$

$$S_4 = \frac{a_4}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_1}{a_3+a_4+a_1} + \frac{a_2}{a_4+a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_1+a_2+a_3}$$

Очигледно је $S_2 + S_3 + S_4 = 4$. Сабирањем добијамо:

$$S + S_2 + S_3 + S_4 =$$

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)\left(\frac{1}{a_2+a_3+a_4} + \frac{1}{a_3+a_4+a_1} + \frac{1}{a_4+a_1+a_2} + \frac{1}{a_1+a_2+a_3}\right)$$

одакле, коришћењем неједнакости аритметичке и хармонијске средине добијамо:

$$S + 4 \geq (a_1+a_2+a_3+a_4)\frac{16}{3(a_1+a_2+a_3+a_4)} = \frac{16}{3}$$

Одатле је $S \geq \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$. Једнакост важи ако и само ако је $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_1 = a_4 + a_1 + a_2$, тј. ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. Дати систем се може решити као систем по a и b: збир и разлика ових једначина имају облик:

$$(x+y)(a+b) = xy(x+y)^2$$
$$(x-y)(a-b) = xy(x-y)^2$$

па ако је $y \neq \pm x$ можемо скратити са $x + y$ у првој и $x - y$ у другој једначини и добити систем:

$$a + b = xy(x+y)$$
$$a - b = xy(x-y)$$

одакле је $a = x^2y$ и $b = xy^2$. Стога решења полазног система одвојено тражимо за $y = x$, $y = -x$ и $y \neq \pm x$:

а) За $y = x$, полазни систем своди се на једначину $x(a + b) = 2x^4$, чија су решења $y = x = 0$ и $y = x = \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$.

б) За $y = -x$, полазни систем своди се на једначину $x(a - b) = -2x^4$, чија су решења $y = x = 0$ и $x = \sqrt[3]{\frac{b-a}{2}}$, $y = -x$.

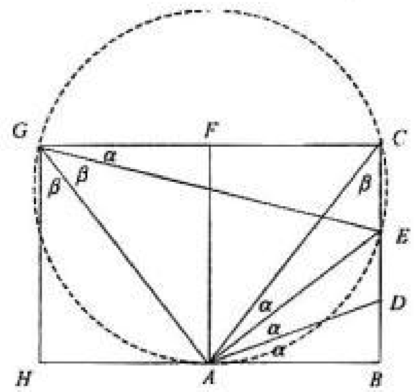
в) За $y \neq \pm x$, полазни систем је, према малопре реченом, еквивалентан са: $a = x^2y$, $b = xy^2$. Даље, решавамо овај нови систем: ако су $a,b \neq 0$, онда је $ab = (xy)^3$, тј. $xy = \sqrt[3]{ab}$ и решења су: $x = \frac{a}{\sqrt[3]{ab}}$ и $y = \frac{b}{\sqrt[3]{ab}}$ (провером се установи да су ово заиста решења). То значи да су то и решења полазног система под претпоставком $y \neq \pm x$, тј. $b \neq \pm a$. Ако је један од бројева a, b једнак нули, то повлачи да је један од бројева x, y једнак нули, а онда систем има решења само ако је и други од бројева a, b једнак нули. Дакле, 2.4. $\{j \mid f(j)=j+1\} \subseteq \{1,2,\ldots,n-1\}$ једнозначно одређује f.

решења у овом случају постоје само за $a = b = 0$ и то су: $x = 0, y \neq 0$ и $x \neq 0, y = 0$.

Све скупа, решења система су: $(x, y) = (0, 0)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}, \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{b-a}{2}}, \sqrt[3]{\frac{a-b}{2}}\right)$ и, за $a, b \neq 0$, $b \neq \pm a$, решење је и $(x,y) = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{ab}}, \frac{b}{\sqrt[3]{ab}}\right)$, а за $a = b = 0$ решења су и: $(x,0)$ (за произвољно $x \neq 0$) и $(0, y)$ (за произвољно $y \neq 0$).

4. Нека је x_n тражени број. Ако пермутација има дато својство, тада је или $n = f(n)$ или $n = f(n-1)$. Очигледно је број пермутација које имају дато својство и за које важи $n = f(n)$ једнак x_{n-1}. Лако се види да је и број пермутација које имају дато својство и за које важи $n = f(n-1)$ такође једнак x_{n-1}, наиме: оне сликају скуп $\{1, 2, \ldots, n-2, n\}$ у скуп $\{1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ и ако у првом скупу "заменимо" n са $n-1$, добијамо управо пермутације скупа $\{1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ са датим својством. Према томе, за $n > 1$ важи једнакост $x_n = 2x_{n-1}$. Како је $x_1 = 1$, то добијамо $x_n = 2^{n-1}$.

5. Нека су D и E тачке пресека трисектриса угла BAC са катетом BC, при чему је распоред $B - D - E - C$. Лако је видети да је $BD < DE < EC$. На пример, $DE < EC$ можемо видети из $DE : EC = DA : AC < 1$ и слично за $BD < DE$. Претпоставимо у складу с тиме да је $CE = 2BD$ и конструишимо, као на слици, подударне правоугаонике $ABCF$ и $HAFG$. Јасно је да је $\Delta ABD \sim \Delta GCE$, па следи да је $\angle CGE \cong \angle BAD \cong \angle CAE = \alpha$. Отуда је четвороугао $AECG$ тетиван па је, дакле, $\angle AGE \cong \angle ACE \cong \angle ACB \cong \angle AGH = \beta$. Остаје још да из система $3\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ једноставно нађемо да је $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 36^\circ$, дакле и $\angle A = 54^\circ$, $\angle C = 36^\circ$.



Трећи разред:

1. Нека је p произвољан прост број. Тврђење ће бити доказано ако се докаже да је највећи степен N броја p који дели $r!$ мањи или једнак од највећег степена M броја p који дели $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})$. Познато је да је $N = \left[\frac{r}{p}\right] + \left[\frac{r}{p^2}\right] + \left[\frac{r}{p^3}\right] + \cdots$, тако да у наставку процењујемо само M. Имамо два случаја:

   а) q је дељиво са p: обзиром да је $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1}) = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)\cdot q^{1+2+\ldots+(r-1)}$,

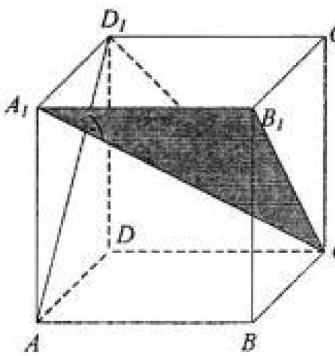
   овај број је дељив са $q^{1+2+\ldots+(r-1)} = q^{\frac{r(r-1)}{2}}$, дакле и са $p^{\frac{r(r-1)}{2}}$, па је $M \geq \frac{r(r-1)}{2} \geq \frac{r}{p-1} = \frac{r}{p} + \frac{r}{p^2} + \frac{r}{p^3} + \ldots \geq N$ (користимо да је $[x] \leq x$;

неједнакост $\frac{r(r-1)}{2} \geq \frac{r}{p-1}$ је еквивалентна са $(r-1)(p-1) \geq 2$ и није задовољена једино у тривијалним случајевима $r = 1$ и $r = 2$, $p = 2$, који се непосредно проверавају).

б) q није дељиво са p: према Ојлеровој теореми је $p^k \mid q^{\varphi(p^k)} - 1$, те је и: $p^k \mid q^{np^{k-1}(p-1)} - 1$ за свако $n, k \in \mathbf{N}$. То значи да међу бројевима: $q^n - 1$, $q^{n-1} - 1, \ldots, q^{n-r+1} - 1$ сваки $p-1$-ви је дељив са p, сваки $p(p-1)$-ви са p^2, сваки $p^2(p-1)$-ви са p^3,... Зато, у производу $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1}) = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)\cdot q^{1+2+\ldots+(r-1)}$ међу првих r фактора има бар $\left[\frac{r}{p-1}\right]$ дељивих са p, бар $\left[\frac{r}{p(p-1)}\right]$ – са p^2 итд., те је $M \geq \left[\frac{r}{p-1}\right] + \left[\frac{r}{p(p-1)}\right] + \left[\frac{r}{p^2(p-1)}\right] + \ldots \geq \left[\frac{r}{p}\right] + \left[\frac{r}{p^2}\right] + \left[\frac{r}{p^3}\right] + \cdots = N$.

Тиме је доказ завршен.

2. Ако је $z_1 = \cos x + i\sin x$ и $z_2 = \cos y + i\sin y$, $w = a + ib$, то се систем једначина своди на: $w = z_1 + z_2$, при чему су z_1 и z_2 тачке на јединичном кругу. Он ће имати решења ако и само ако је $|w| \leq 2$ (потребан услов: јер је $|w| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1+1 = 2$; довољан услов: ако је $|w| \leq 2$, онда се јединични кругови са центрима у O и w секу у две тачке z_1 и z_2 или додирују у тачки $z_1 = z_2$). Овај услов је, пак, еквивалентан са: $a^2 + b^2 \leq 4$.



3. Приметимо да је права CD_1 нормална на раван AB_1C_1, јер је $CD_1 \perp AB_1$ и $CD_1 \perp B_1C_1$. Слично је права AD_1 нормална на раван A_1B_1C. Стога је угао између равни AB_1C_1 и A_1B_1C једнак углу између правих CD_1 и AD_1, који износи 60° (троугао ACD_1 је једнакостраничан).

4. Доказаћемо да важи $x_n \mid x_{2n}$ (и тиме: $\text{NZD}(x_n, x_{2n} - 1) = 1$, тако да се може узети $m = 2n$). Пре свега, ако низ допунимо са $x_0 = 0$, формула $x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}$ важи и за све $n > 1$. Ако је $x_{n+1} = a$, имамо да је $x_n \equiv 0 = 0 \cdot a = x_0 \cdot a \pmod{x_n}$ и $x_{n+1} \equiv a = 1 \cdot a = x_1 \cdot a \pmod{x_n}$. Сада се индукцијом лако покаже да је и $x_{n+p} \equiv ax_p \pmod{x_n}$ за $p \geq 0$ (јер: $x_{n+p+1} = kx_{n+p} - x_{n+p-1} \equiv kax_p - ax_{p-1} = ax_{p+1} \pmod{x_n}$). Стога је $x_{2n} \equiv ax_n \pmod{x_n}$, тј. $x_n \mid x_{2n}$.

5. Пермутовањем врста/колона и променом знака врста/колона у којима нису елементи са вредношћу 4 свака детерминанта датог облика се може свести на једну од детерминанти: $\begin{vmatrix} 4 & a & 4 \\ b & c & d \\ e & f & g \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} 4 & a & b \\ c & 4 & d \\ e & f & g \end{vmatrix}$, где су елементи a, b, c, d, e, f, g из скупа $\{-1, 1\}$, чија вредност је једнака полазној детерминанти, па треба само проценити максималну могућу вредност ових детерминанти:

а) Прва детерминанта има вредност $4(cg - df) + a(de - bg) + 4(bf - ce) \leq 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 4\cdot 2 = 18$.

3.4. $x_{m+n} = x_{m+1}x_n - x_m x_{n-1}$

$x_{2n} = x_n(x_{n+1} - x_{n-1})$

б) Друга детерминанта износи: $16g + ade + bcf - 4(df + be) - acg$. Ово је непаран цео број који износи највише $16+1+1+4\cdot 2+1 = 27$. Ако би он износио 27, то би морало бити $g = 1$, $ade = 1$, $bcf = 1$, $df + be = -2$ (дакле $df = -1$, $be = -1$) и $acg = -1$. Из ових услова је лако извести контрадикцију: $a = -c$, $d = -f$, $e = -b$, па би било $ade = -bcf$. Стога детерминанта може имати највише вредност 25, што се достиже, рецимо, за $a = c = d = e = g = 1$, $b = f = -1$. Дакле, максимална вредност детерминанте је 25.

Четврти разред:

1. Видети решење 1. задатка за трећи разред, категорија А
2. Видети решење 2. задатка за трећи разред, категорија А
3. Означимо са $k = [n\sqrt{2}]$ највећи цео број који не прелази $n\sqrt{2}$. Имамо: $\{n\sqrt{2}\} = n\sqrt{2} - k = \dfrac{2n^2 - k^2}{n\sqrt{2} + k} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$, будући да је $2n^2 > k^2$, тј. $2n^2 - k^2 \geq 1$ и да је $k < n\sqrt{2}$, тј. $n\sqrt{2} + k < 2n\sqrt{2}$.
4. Нека је Φ задати скуп тачака. Ако $X \in \Phi$, тада је за сваку тачку P на затвореној дужи BC испуњено $XA < XP$, тј. тачка X је у полуравни π чији руб је медијатриса дужи AP и којој припада тачка A. Ако је и $Y \in \Phi$, тада, за исту тачку P, Y такође припада полуравни π. Но тада и свака тачка дужи XY припада полуравни π, будући да је полураван конвексан скуп. Дакле, и свака тачка Z дужи XY је ближа тачки A него тачки P. Како ово важи за сваку тачку P на дужи BC, то и $Z \in \Phi$. Стога је и Φ конвексан скуп.
5. Уочимо прво да $0 \in S$. Наиме, нека је M највећи елемент скупа S. Ако је $M = 0$, тврђење је доказано, а иначе $M + M \notin S$, па $0 = M - M \in S$. Нека је $S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, при чему је $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = M$. Приметимо да за свако i, $1 \leq i \leq n-1$, важи: $a_i + a_n > M$, па је $a_n - a_i \in S$. Како су ови бројеви сви различити, припадају S и нису 0 нити M, то мора бити: $a_n - a_i = a_{n-i}$ за свако i, $1 \leq i \leq n-1$. Јасно је да иста једнакост важи и за $i = 0$ и за $i = n$. У наставку разликујемо следеће случајеве:
   а) $n = 0$: $S = \{0\}$
   б) $n = 1$: $S = \{0, M\}$ за неко $M > 0$.
   в) $n = 2$: $S = \{0, a_1, M\}$, при чему је $M - a_1 = a_1$, тј. $M = 2a_1$, дакле $S = \{0, a_1, 2a_1\}$ за неко $a_1 > 0$
   г) $n = 3$: $S = \{0, a_1, a_2, M\}$, при чему је $M - a_1 = a_2$, тј. $M = a_1 + a_2$, дакле $S = \{0, a_1, a_2, a_1 + a_2\}$ за неке $a_2 > a_1 > 0$.
   д) $n > 3$: Приметимо да је за свако i, $2 \leq i \leq n-2$, испуњено: $a_{n-1} + a_i > a_{n-1} + a_1 = a_n = M$, па $a_{n-1} - a_i \in S$. Специјално је $a_{n-1} - a_{n-2} \in S$ и $a_{n-1} - a_{n-2} = (a_n - a_1) - (a_n - a_2) = a_2 - a_1 < a_2$, па је $a_{n-1} - a_{n-2} = a_1$ и, стога, $a_{n-1} - a_1 = a_{n-2}$. За $2 \leq i \leq n-3$, бројеви $a_{n-1} - a_i$ су у S и леже између $a_{n-1} - a_{n-2} = a_1$ и $a_{n-1} - a_1 = a_{n-2}$. Стога ови бројеви морају бити управо $a_{n-3}, a_{n-4}, \ldots, a_2$, тј. за свако i, $0 \leq i \leq n-1$ важи и $a_{n-1} - a_i = a_{n-1-i}$. Сада, приметимо да за свако i, $1 \leq i \leq n-1$, важи: $a_i - a_{i-1} = (a_{n-1} - a_{n-1-i}) - (a_{n-1} - a_{n-i}) = a_{n-i} - a_{n-i-1} = (a_n - a_i) - (a_n - a_{i+1}) = a_{i+1} - a_i$, тј. разлике узастопних a_i-ова су константне, па је $S = \{0, a_1, 2a_1, 3a_1, \ldots, na_1\}$.

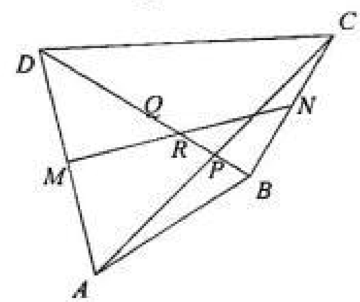
Провером се непосредно установљује да горе наведени скупови S задовољавају услове задатка.

Б категорија

Први разред:

1. Имамо: $f(2) = f(f(1) + 1) = f(1) = 1$; $f(3) = f(f(2) + 2) = f(2) = 1, \ldots$ уопште, ако је доказано да је $f(n) = 1$, онда је и $f(n + 1) = f(f(n) + n) = f(n) = 1$. Стога, једина функција са траженим особинама је $f(n) = 1$ за свако $n \in \mathbf{N}$.
2. Заменимо $z = -x-y$: $x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -18$, тј. $-3xy(x + y) = -18$, одакле, заменом $x + y = -z$, добијамо $xyz = -6$. Ради одређености, нека је $|x| \le |y| \le |z|$. Мора бити $|x| = 1$ (иначе би било $|xyz| \ge 8$). Апсолутне вредности преостала два броја су 1 и 6 или 2 и 3. Сада се непосредно, разматрањем случајева, установљује да је $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$, а сва решења су пермутације тројке $(1, 2, -3)$, дакле укупно има 6 решења.
3. Нека је P средиште дијагонале AC, Q средиште дијагонале BD и R средиште дужи MN. Важи: $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}\right) + \left(\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC}\right)$.

   Слично је $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NB}\right)$, одакле је $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ} = \vec{0}$.

   Дакле, или је R средиште дужи PQ (ако је $P \neq Q$) или се све три тачке P, Q, R поклапају. У оба случаја, тачке Q и R леже на BD, па на BD лежи и тачка P.
4. Једначина нема решења, будући да је $x^{2000} + px^{1999} + q$, за непарне p и q, непаран број.
5. Нека је $h_b + h_c = 27x$, $h_c + h_a = 32x$ и $h_a + h_b = 35x$. Решавањем се добија да је $h_a = 20x$, $h_b = 15x$ и $h_c = 12x$. Ако је P површина овог троугла, онда је $a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2P}{20x} = 3 \cdot \frac{2P}{60x}$ и, слично: $b = \frac{2P}{15x} = 4 \cdot \frac{2P}{60x}$ и $c = \frac{2P}{12x} = 5 \cdot \frac{2P}{60x}$. Дакле, $a : b : c = 3 : 4 : 5$, па је дати троугао правоугли (највећи угао је прав).

Други разред:

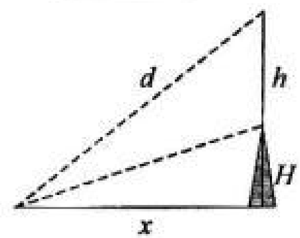
1. Ако неки од бројева $x_1, \ldots, x_n$ има вредност 0, онда и сви остали морају имати ту вредност. Претпоставимо сада да су сви бројеви различити од нуле. Множењем ових једнакости добија се: $x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 = \frac{1 + x_1^4}{2} \frac{1 + x_2^4}{2} \cdots \frac{1 + x_n^4}{2}$.

   Како је $x^2 \le \frac{1 + x^4}{2}$ за свако реално x (због $1 + x^4 - 2x^2 = (1 - x^2)^2 \ge 0$), при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2 = 1$, то горња једнакост може да важи само ако важе све једнакости $x_1^2 = 1, \ldots, x_n^2 = 1$, тј. $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$. Провером се установљује да су све то заиста решења. Дакле, решења система су: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ и још 2^n решења у којима $x_1, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$.

2. Како је $[x] \le x < [x] + 1$, то је $x - 1 < [x] \le x$. Заменом у једначину, добијамо неједнакости: $4x^2 - 40(x - 1) + 51 > 0$ и $4x^2 - 40x + 51 \le 0$. Прва је задовољена за $x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, +\infty\right)$, а друга за $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$. Стога, важи: $x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$. Тиме је одређено да је $[x] \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. За сваку од ових вредности $[x]$, решавањем одговарајуће квадратне једначине, налазимо:

[x]	Интервал за x	Једначина	Решења
1	[1,2)	$4x^2 + 11 = 0$	нема
2	[2,3)	$4x^2 - 29 = 0$	$x = \pm\sqrt{29}/2$
3	[3,4)	$4x^2 - 69 = 0$	$x = \pm\sqrt{69}/2$
6	[6,7)	$4x^2 - 189 = 0$	$x = \pm\sqrt{189}/2$
7	[7,8)	$4x^2 - 229 = 0$	$x = \pm\sqrt{229}/2$
8	[8,9)	$4x^2 - 269 = 0$	$x = \pm\sqrt{269}/2$

Провером се показује да решења $\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2}$ леже у датом интервалу, па су то и сва решења полазне једначине.



3. Ако посматрач стоји на растојању x и види торањ и антену под једнаким угловима, онда је $x : d = H : h$, где је $d = \sqrt{x^2 + (H-h)^2}$. Решавајући по x, налазимо: $x = H\sqrt{\frac{h+H}{h-H}}$.

4. Имамо: $\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{(n-1)^2}{2n}} = \frac{n-1}{\sqrt{2n}}$ (јер је $n > 1$) и $\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{2n}} = \frac{n+1}{\sqrt{2n}}$.

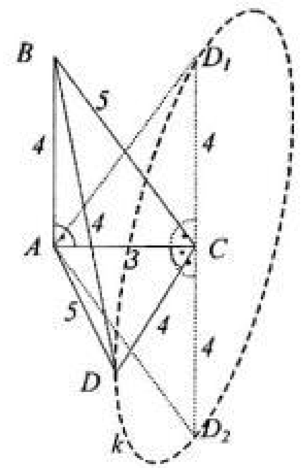
Стога, вредност полазног израза износи: $\dfrac{\frac{\sqrt{2n}}{n-1} + \frac{\sqrt{2n}}{n+1}}{\frac{\sqrt{2n}}{n-1} - \frac{\sqrt{2n}}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{2}{n^2+1}}$

$= n$, што је цео број.

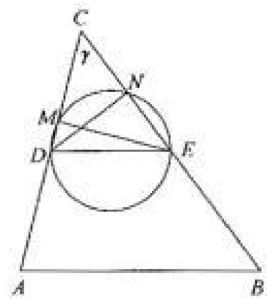
5. Означимо $\sqrt[5]{2} = a$, $\sqrt[5]{5} = b$. Дата једнакост постаје: $\left(\frac{1}{b} + \frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + a + a^3)^{\frac{1}{5}}$,

тј. $\left(\frac{1+a^2}{b}\right)^5 = (1 + a + a^3)^2$, односно $(1+a^2)^5 = 5(1+a+a^3)^2$. Последња једнакост се непосредно проверава, водећи рачуна о томе да је $a^5 = 2$.

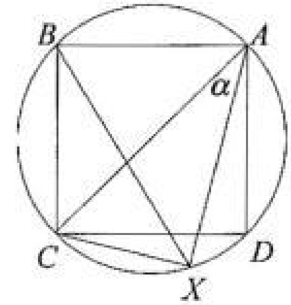
Трећи разред:



1. Приметимо да су троуглови ABC и ACD са страницама 3, 4, 5, дакле правоугли, са правим угловима код темена A, односно C, редом. Ако је троугао ABC фиксиран, тачка D се налази на кругу k (у равни која је у тачки C нормална на AC), полупречника 4, са центром у C. Нека су ΔACD_1 и ΔACD_2 троуглови у равни ABC, са страницама 3, 4, 5 као на слици (тачке D_1 и D_2 леже на кругу k). Лако се израчунава $BD_1 = 3 < 4$, $BD_2 = \sqrt{73} > 4$. Дакле, ако уочимо сферу са центром у B полупречника 4, тачка D_1 лежи унутар сфере, а тачка D_2 ван, па круг k сече ову сферу. Било коју од тачака пресека означимо са D и тачке A, B, C, D ће задовољавати услове задатка.



2. Очигледно су DN и EM висине троугла DEC. Како је $CN = CD\cos\gamma = AC\dfrac{\cos\gamma}{2}$ и $CM = CE\cos\gamma = BC\dfrac{\cos\gamma}{2}$, то је $CM : CN = AC : BC$, па су троуглови ABC и NMC слични са коефицијентом сличности $\dfrac{\cos\gamma}{2}$. Дакле, $MN = AB\dfrac{\cos\gamma}{2}$.
Ако се из косинусне теореме изрази $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,
добија се $MN = c\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4ab}$.



3. Нека су темена квадрата означена као на слици (тачка X припада оном од полукругова над пречником AC на коме није тачка B). Ако је $\angle CAX = \alpha$, онда је $\angle ACX = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BAX = 45^\circ + \alpha$. Стога је, по синусној теореми: $XA = 2R\sin\angle ACX = 2R\cos\alpha$, $XC = 2R\sin\angle CAX = 2R\sin\alpha$ и $XB = 2R\sin\angle BAX = 2R\sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}R(\sin\alpha + \cos\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(XA + XC)$. Стога, ако би XA и XC и биле рационалне дужине, XB не може бити рационална.

4. Из датих једнакости имамо: $\log_3 y = \dfrac{1}{1-\log_3 z}$ и $\log_3 z = \dfrac{1}{1-\log_3 x}$. Тада је

$$\frac{1}{1-\log_3 y} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\log_3 z}} = \frac{\log_3 z - 1}{\log_3 z} = \frac{\dfrac{1}{1-\log_3 x}-1}{\dfrac{1}{1-\log_3 x}} = \frac{\dfrac{\log_3 x}{1-\log_3 x}}{\dfrac{1}{1-\log_3 x}} = \log_3 x.$$

5. Видети решење 5. задатка за категорију А

Четврти разред:

1. Нека је O произвољна тачка равни и $ABCDEF$ правилан шестоугао са центром у O. Важи: $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + f(E) + f(F) = 0$. Троуглови ABO, CDO и EFO су правилни. Стога је $f(A) + f(B) + f(O) = 0$, $f(C) + f(D) + f(O) = 0$ и $f(E) + f(F) + f(O) = 0$. Сабирајући последње три једнакости и одузимајући од њих прву, добија се $3f(O) = 0$, дакле и $f(O) = 0$. Како је тачка O произвољна, то функција f има вредност 0 у свакој тачки.

2. Очигледно је $x > y$, па се може увести смена $x = y + a$, где је $a \in \mathbf{N}$. Добија се: $y^2(3a-1) + y(3a^2 - a) + (a^3 - 25) = 0$. За $a \geq 3$, коефицијенти ове једначине су позитивни, па она не може имати и позитивно решење (лева страна једначине је позитивна). За $a = 1$ добијају се решења $y = 3$, $x = 4$. За $a = 2$ нема целобројног решења за y. Стога, једино решење једначине је $y = 3$, $x = 4$.

3. Израчунавањем извода, добија се да је $f'(x) = g'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$. Стога је извод функције $f - g$ једнак нули, тј. $f - g$ је константа. Како је $f(0) = arctg(0) = 0$ и $g(0) = arctg(-1) - arctg(1) = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$, то је и $f(x) - g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ за свако реално x.

4. Сваки од бројева у таблици можемо разбити на два сабирка: у првом реду $0+1$, $0+2$, …, $0+n$, у другом реду: $n+1$, $n+2$,…, $n+n$,... у последњем реду: $n(n-1)+1$, $n(n-1)+2$,…, $n(n-1)+n$. Први сабирак је исти за све бројеве у датом реду таблице, а други број – за све бројеве у датој колони. Стога, како год да су изабрани бројеви у таблици, међу њиховим првим сабирцима се морају наћи $0, n, 2n,…, (n-1)n$, а међу другим сабирцима: $1, 2,…, n$. Збир изабраних бројева је једнак збиру свих првих сабирака и свих других сабирака, што износи: $n(0+1+2+…+n-1) + (1+2+…+n) = n\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^3+n}{2}$.

5. Поставимо координатни систем тако да тачка A има координате $(-1,0)$, а тачка B – координате $(1,0)$, при чему је $AB = 2$. Ако је M тачка са координатама (x, y), тада је вредност израза $AM \cdot BM \cdot \cos\angle AMB$ једнака скаларном производу вектора $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$. Вектор $\overrightarrow{MA}$ има координате $(-1 - x, -y)$, $\overrightarrow{MB}$ има координате $(1 - x, -y)$, њихов скаларни производ износи $(-1 - x)(1 - x) + (-y)^2 = x^2 + y^2 - 1$ и услов из задатка своди се на $x^2 + y^2 - 1 = 3$, тј. $x^2 + y^2 = 2^2$. Тражено геометријско место тачака је, дакле, круг са центром у $(0,0)$ (средишту дужи AB) са полупречником $2 = AB$.

Календар такмичења из математике за школску 2000/2001. годину

Општинско такмичење .... 03.02.2001.
Окружно такмичење .... 24.02.2001.
Републичко такмичење .... 24.03.2001.
Савезно такмичење .... 21.04.2001.

ИЗДАЊА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
за ученике средњих школа

А. РЕДОВНА НАСТАВА

1. *З. Каделбург, С. Крстић, П. Младеновић*: МАТЕМАТИКА 1, збирка решених задатака за I разред гимназија и техничких школа, друго издање.

Б. ДОДАТНА НАСТАВА

2. *В. Јанковић, З. Каделбург, П. Младеновић*: МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ 1984–1995, Материјали за младе математичаре, св. 32.
3. *В. Мићић, З. Каделбург*: УВОД У ТЕОРИЈУ БРОЈЕВА, Материјали за младе математичаре, св. 15, друго допуњено издање.
4. *В. Драговић, П. Младеновић, С. Огњановић*: ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА (са решењима), Материјали за младе математичаре, св. 17, треће допуњено издање.
5. *П. Младеновић*: КОМБИНАТОРИКА, Материјали за младе математичаре, св. 22.
6. *З. Каделбург, П. Младеновић*: САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Материјали за младе математичаре, св. 23.
7. *П. Младеновић*: ЕЛЕМЕНТАРАН УВОД У ВЕРОВАТНОЋУ И СТАТИСТИКУ, Материјали за младе математичаре, св. 24.
8. *И. Томић, В. Андрић*: МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА У ЈУГОСЛАВИЈИ 1991. ГОДИНЕ, Материјали за младе математичаре, св. 30.
9. *М. Арсеновић, В. Драговић*: ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Материјали за младе математичаре, св. 35.
10. *М. Вугделија*: ДИНАМИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ, Задаци за припреме такмичара средњих школа из информатике.

В. ЧАСОПИСИ

11. ТАНГЕНТА, Часопис за математику и рачунарство.

САДРЖАЈ