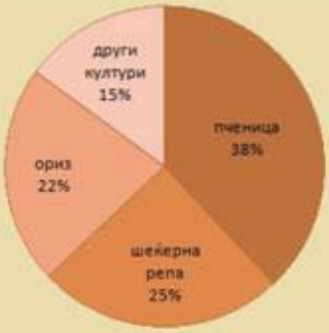
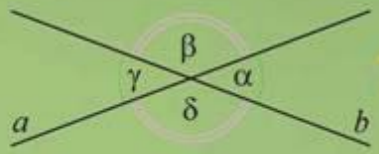
Костадин Тренчевски
Јованка Тренчева Смилески

МАТЕМАТИКА



НЗД (10,15)=5

$1^\circ = 60' = 3600''$



7/8=0,875

за **6** *одделение*

во деветгодишно основно образование

ВОВЕД

Содржината на учебникот по математика за 6 одделение е поделена во 4 теми. Во првата тема ќе треба да се утврди знаењето од природните броеви како и стекнување на нови знаења од таа област. Во втората тема ќе се запознаете со основите на рамнинската геометрија. Третата тема има за цел да ве оспособи за работа со дропките и децималните броеви, а четвртата тема има за цел подетално да се запознаете со мерењата, мерните единици и работа со нив. Во учебникот се дадени мал број на содржини, на пример, „Римски броеви“ кои не се предвидени со програмата, а се дадени за оние ученици кои сакаат да ги прошират своите знаења. Овие содржини се означени со фуснота.

На крајот од секоја тема се дадени задачи за повторување како и задачи за самоконтрола. Задачите за повторување ќе ти користат за повторување и продлабочување на стекнатите знаења од соодветната тема, како и поширока примена во секојдневниот живот. Со задачите за самоконтрола можеш сам да провериш колку си го усвоил материјалот од соодветната тема. Секоја од задачите за самоконтрола носи по 6 бодови, кои можат да бидат поделени на еднакви делови, ако задачата е поделена на подзадачи (под а, б, в, ...), а скалата за самооценување е следната: 0-22 недоволен, 23-35 оценка 2, 36-50 оценка 3, 51-62 оценка 4 и 63-72 оценка 5. На крајот од учебникот се дадени одговорите на задачите, со што можеш да провериш дали точно си ги решил(а) задачите.

Авторите ви посакуваат успех во усвојувањето на новите содржини, а тоа секако се постигнува со труд и редовно учење.

Авторите

ТЕМА I

ПРИРОДНИ БРОЕВИ

I.1. МНОЖЕСТВО

I.1.1 ПОИМ ЗА МНОЖЕСТВО

Поимот за *множество* е еден од основните (најважни) поими во математиката. Тој поим обично се зема за појдовен и како таков не се дефинира со помош на други поими. Неговата смисла и содржина ја разјаснуваме преку наведување на низа примери. Така, на пример, велиме дека множество образуваат: сите ученици во еден клас, сите жители на градот Скопје, сите риби во Преспанското Езеро, сите дрвја во една шума, сите точки од една права итн.

Постојат и одделни зборови кои со своето значење кај нас создаваат претстава за множество објекти, како на пример, зборовите: *собир* (множество луѓе), *јато* (множество птици), *стадо* (множество овци), *рој* (множество пчели), *семејство*, *фамилија*, *ансамбл*, *колекција* итн.

Од наведениве примери гледаме дека секое множество се состои од одредени објекти, што се обединети во една целина според некое нивно заедничко карактеристично својство.

Дефиниција 1

Објектите од кои се состои множеството се викаат елементи на множеството.

Петпоставуваме дека:

Сите елементи на едно множество се разликуваат еден од друг. Множествата ги означуваме со големите печатни букви: A, B, C, ... , M, N, ... , а елементите на секое множество со малите ракописни букви: a, b, c, ... , m, n, ... од латинската азбука.

Ако некое множество M е составено од елементите: a, b, c, d, e и f, тоа симболички го запишуваме вака:

$$M = \{a, b, c, d, e, f\},$$

а го читаме: *M е множество од елементите a, b, c, d, e и f.*

Разбирливо е што множествата кои најчесто ќе ги користиме, да ги означуваме секогаш со едни исти букви. Така, на пример, применo е да се означува множеството на сите природни броеви со **N**, т.е.

$$\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

За елементите од кои е составено множеството, велиме дека му припаѓаат на тоа

множество. Реченицата „Елементот a му припаѓа на множеството M“ или „a е елемент на множеството M“, симболички ја запишуваме:

$$a \in M.$$

Пример: $1 \in \mathbf{N}$; $2 \in \mathbf{N}$.

Ако пак, елементот a не му припаѓа на множеството M или *a не е елемент* на M, тогаш пишуваме:

$$a \notin M.$$

Пример: $0 \notin \mathbf{N}$.

Елементите на множествата можат да бидат објекти од најразлична природа. На пример, тие можат да бидат: луѓе, букви, точки, прави, броеви, итн.

Математиката, поаѓајќи од одделните примери на множества со најразлични елементи, ги проучува оние својства што се заеднички на многуте „конкретни множества“. Заклучоците и сознанијата, до кои доаѓаме при тоа проучување, еднакво се однесуваат (важат) како за броевите така и за точките на геометриската фигура, а исто така и за множествата букви или за било кои други множества.

Со тоа се објаснува и широката примена на *Теоријата на множествата* и математиката во различните области на науката (физиката, хемијата, биологијата, итн.).

Често се случува да разгледуваме некое множество, чии пак елементи претставуваат множества. На пример, паралелките во училиштето можат да се разгледуваат како елементи на множеството од сите паралелки во училиштето; иако секоја паралелка сама за себе претставува множество од ученици.

За математиката од посебна важност се множествата кои се составени од „математички објекти“ - броеви, точки, равенки, итн.

Дефиниција 2

Множествата, чии елементи се броеви, се викаат бројни множества.

Пример за бројно множество е множеството {2, 5, 15}, множеството на парни броеви итн.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Набројте некои множества на одредени видови животни? Како се вика множеството волци?
2. Како се викаат објектите од кои се состои множеството?
3. Со кои симболи можеме да напишеме дека некој елемент припаѓа, односно не припаѓа на некое множество?

4 Дали бројот 1452 е елемент на природните броеви?

5 Како се викаат множествата чии елементи се броеви?

6 Дадено е множеството $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Дали a е елемент на множеството M ?

7 Напиши го симболички множеството M составено од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

8 Набroj неколку области каде што се применува теоријата на множествата.

9 Дали е возможно множество да не содржи ниту еден елемент?

I.1.2. ПРАЗНО МНОЖЕСТВО

Потребно е да истакнеме дека поимот „множество“ во математиката не е синоним на зборот „многу“ од секојдневниот живот. Во математиката се покажало многу корисно и погодно разгледувањето и на множества кои содржат само три или два елемента, па дури и само еден единствен елемент (*единечно множество*). Исто така, се разгледуваат и множества „кои не содржат ниту еден елемент“.

Дефиниција 3

Множеството кое не содржи ниту еден елемент го викаме празно множество и го означуваме со симболот $\emptyset$.

На пример: Секој ден (па дури и секој час) дежурниот ученик го утврдува множеството на отсутните ученици од наставата. Однапред не знаеме дали тоа множество ќе биде празно или не. Велиме дека множеството на отсутните ученици е празно, само во случај кога нема отсутни ученици од наставата, а во секој друг случај тоа множество не е празно.

Други примери:

а) Множеството на тристагодишни старци на нашата планета е празно множество;

б) Множеството триаголници кои имаат по два прави агли е празно множество;

в) Множеството постојани жители на Месечината (барем засега) е празно множество.

Бидејќи празното множество е без елементи, тоа значи дека сите празни множества се исти. Тој факт го искажуваме уште и со следната дефиниција.

Дефиниција 4

Празното множество е единствено, т.е. нема две различни празни множества.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што преставува празно множество и како се обележува?
2. Дали множеството од риби што можат да летаат е празно множество?
3. Дали постојат две различни празни множества?

I.1.3. НАЧИНИ НА ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВАТА

Дефиниција 5

За едно множество велиме дека е зададено (добро дефинирано) кога за секој објект со сигурност може да се каже дали тој е елемент на тоа множество или не.

Наједноставен начин на задавање на множеството е преку непосредното, поединечно набројување на сите елементи што влегуваат во неговиот состав (аналитички начин). Потоа, точниот целосен список со називите на сите елементи на множеството го ставаме во големи загради. На пример, да го разгледаме множество M на сите едноцифрени природни броеви. Јасно е дека елементи на множеството M се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и освен нив, множеството M нема други елементи. Тоа го запишуваме:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Со заградите се истакнува дека објектите што се издвоени во нив образуваат една целина. Освен тоа, тие играат улога и на класификатор, бидејќи објектите се класифицираат на оние што се елементи на M и оние кои не се елементи на M. На пример: $2 \in M$; $0 \notin M$; $15 \notin M$.

Кога множеството е зададено преку составување на списокот на сите негови елементи (аналитички), поредокот на набројувањето на елементите не е важен. На пример: множеството составено од елементите: ♠, ♣, ♦ може да биде запишано на кој и да е од следниве начини:

$\{♠, ♣, ♦\}$ или $\{♣, ♠, ♦\}$ или $\{♦, ♠, ♣\}$ или $\{♦, ♣, ♠\}$ или $\{♣, ♦, ♠\}$ или $\{♠, ♦, ♣\}$.

Кога веќе зборуваме за симболичките записи, да го напоменеме уште и ова: симболите a, $\{a\}$ и $\{\{a\}\}$ треба јасно да се разликуваат еден од друг. Тие означуваат три различни објекти. Симболот a означува елемент, симболот $\{a\}$ означува множество, кое содржи

единствен елемент a, а симболот $\{\{a\}\}$ означува множество кое содржи единствен елемент - множеството $\{a\}$.

Слично на ова, треба да се прави разлика и меѓу симболите $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$.

Објасни што означува едниот, а што другиот симбол!

Не секое множество може да биде зададено со набројување на сите негови елементи. На пример: нека M е множество на сите непарни броеви. Елементи на множеството M се: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... , но да се набројат сите непарни природни броеви е невозможно. Затоа, по бројот 11 ставаме неколку точки, со кои истакнуваме дека во множеството има уште елементи, а списокот е прекинат бидејќи сите елементи не можеме да ги наведеме. Во таков случај пишуваме:

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}.$$

Освен горниот начин на задавање на множество, постои и друг, универзален начин, со укажување на карактеристичното својство на елементите на множеството.

Множеството, согласно дефиницијата 5, ќе биде зададено ако е утврдено и наведено заедничкото својство што го имаат сите елементи, што припаѓаат на множеството, а го нема ниту еден елемент што не припаѓа на тоа множество. Тоа својство се вика *карактеристично својство* на множеството.

Нека P е некое карактеристично својство на објектите и нека формулата $P(x)$ означува објектот x што го има (поседува) својството P; тогаш множеството M, зададено со карактеристичното својство P, симболички го запишуваме вака:

$$M = \{x \mid P(x)\},$$

а го читаме: „M е множество од сите објекти x, кои го имаат својството P“. Карактеристичното својство на множеството може да биде формулирано најразлично. Ќе го покажеме тоа со неколку примери:

Пример 1. Множеството $M = \{5, 6, 7\}$ зададено со набројување на неговите елементи, како може да биде зададено со помош на некое карактеристично својство?

а) Карактеристичното својство на множеството M може да биде својството P: да се биде во списокот што е наведен во заградите. Тогаш $P(x)$ ќе означува: $x = 5$ или $x = 6$ или $x = 7$, а множеството M го запишуваме вака:

$$M = \{x \mid (x = 5 \text{ или } x = 6 \text{ или } x = 7)\}.$$

Карактеристично својство на множеството многу често ќе го изразуваме со помош на некоја равенка или неравенка.

б) За карактеристично својство на множеството M може да се земе и ова својство: да се биде природен број што се наоѓа помеѓу броевите 4 и 8. Тогаш множеството M ќе го запишеме:

$$M = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 4 < x < 8\},$$

а го читаме: множество M од сите x, кои имаат својство: x е природен број и го задоволува условот $4 < x < 8$.

Пример 2. M е множество на сите точки x од права p. Тоа множество го означуваме вака:

$$M = \{x \mid x \in p\}.$$

Пример 3. S е множеството на сите ученици на кои роденденот им е на секои четири

години. Ова може да го напишеме на следниот начин:

$$S = \{ x \mid x \text{ е ученик роден на 29-ти февруари} \}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кога велиме дека едно множество е добро дефинирано ?
2. Дали на множеството $M = \{f, p, r, \{ m \}, e\}$ припаѓа елементот m ?
3. Дали бројот 4 е член на множеството $R = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 4 < x < 6\}$? Кои броеви се членови на множеството R ?
4. Од колку членови се состои множеството на сите кружници кои поминуваат низ 3 зададени точки ?
5. Како може да се претстави множеството P, ако тоа претставува множеството на:
   а) полнолетни граѓани;
   б) двоцифрени природни броеви;
   в) симболите на коцка за играње „Не лути се човече“;
   г) парни природни броеви ?

I.2. ЕДНАКВИ МНОЖЕСТВА И ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

I.2.1. НЕКОИ РЕЛАЦИИ (СООДНОСИ) МЕЃУ МНОЖЕСТВАТА

Познато е дека секои два броја се наоѓаат во некоја *релација* или *сооднос*. Тие релации ги искажуваме со зборовите: „поголем“, „помал“ или „еднаков“. Две прави можат да се наоѓаат во релација да се „паралелни“, да се „нормални“ и др. Исто така и меѓу луѓето постојат разни релации (соодноси). На пример, тие можат да бидат добри пријатели, соседи, врсници, браќа, соучесници, сограѓани итн. Тука ќе се задржиме само на две релации меѓу множествата: *инклузија* (*вклучување*) и *еднаквост* (*идентичност*).

I.2.2. ПОДМНОЖЕСТВО

Нека се дадени множествата:

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ и } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

A е множество на сите парни едноцифрени броеви, а B е множество на сите едноцифрени природни броеви.

Забележуваме дека сите елементи на множеството A претставуваат и елементи на множеството B. Во тој случај велиме дека множеството A е *вклучено* (е содржано) во множеството B или дека множеството A е *множество* (или *дел*) на множеството B и симболички го означуваме:

$A \subseteq B$.

Симболот $\subseteq$ се вика симбол за инклузија (вклучување) или симбол за подмножество.

Тоа е одредена релација меѓу множествата A и B, која во општ вид ја дефинираме вака:

Дефиниција 1

Множеството A е подмножество (или дел) на множеството B, ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B.

Тоа симболички го запишуваме:

$A \subseteq B$.

Примери:

1. Множество на парни броеви е вклучено во множеството на природни броеви;

2. Множеството на ученичките во класот е подмножество на множеството на сите ученици во класот итн. ;

3. Множеството на ученици повисоки од 160 cm е подмножество на множеството на ученици повисоки од 150 cm;

4. Множеството на кучиња од раса пекинезер е подмножество на множеството на сите кучиња.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали множеството на фламенга е подмножество на множеството птици?
2. Дали множеството фоки е подмножество на множеството риби?
3. Нека множеството A е подмножество на множеството B. Како симболички го означуваме овој исказ?
4. Ако A е множество на парни броеви, дали е точен исказот: $\mathbf{N} \subseteq A$?
5. Дали множеството $A = \{1, 4\}$ е подмножество на множеството $B = \{3, 5, 1, 7, 9, 1, 4\}$?
6. Дали празното множество е подмножество на множеството $A = \{1, 3\}$? Напиши ги сите подмножества на множеството A ?
7. Дали се точни исказите за следните множества: $A = \{@, ©, \$\}$ и $B = \{\$, ®, \&, @, €, 5\}$:

   а) $A \subseteq B$

   б) $B \subseteq A$?

I.2.3. УНИВЕРЗАЛНО МНОЖЕСТВО. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

Јасно е дека во различни области на науката се разгледуваат и различни множества на објекти. Така, на пример, елементите на множествата и нивните подмножества што ги проучуваме во аритметиката се броеви, во геометријата - точки итн.

Во многу проучувања, разгледуваните множества претставуваат секогаш подмножества на некое множество U. Во таков случај множеството U во нашето проучување, велиме дека има универзално значење, па затоа ќе го викаме *универзално множество* и ќе го означиме со U.

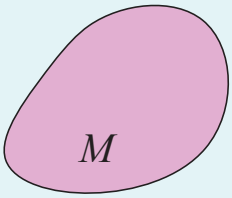
Дефиниција 2

Множеството од сите елементи, што се предмет на проучување во дадена област на науката, се вика универзално множество за таа област.

Како што се гледа, тој поим е многу релативен и варира од еден до друг проблем. Со цел да се олеснат расудувањата и заклучувањата при разгледувањето на различните множества и нивните релации, се служиме со разни графички цртежи - наречени *Венови дијаграми.*

Универзалното множество, независно од природата на неговите елементи, обично, графички го претставуваме со еден правоаголник или, поточно речено, со множеството точки од тој правоаголник.

Секое друго множество M, како подмножество на U, го претставуваме со дел од правоаголникот заграден со произволна затворена крива линија (цртеж 1).



Цртеж 1

При тоа, означените точки, а понекогаш и сите точки од кривата и заградениот дел од рамнината со неа, ги сметаме како елементи на множеството M. Треба да се има предвид дека тоа се само скици кои ни овозможуваат релациите меѓу различните множества графички да ги претставиме како релации меѓу множествата од точки во рамнината на цртежот.

При комплицирани цртежи, правоаголникот со кој го означуваме универзалното множество U, замислуваме дека е целиот лист хартија, па затоа не го цртаме.

Бројните множества и нивните различни подмножества, освен со Венови дијаграми, често графички ги претставуваме и со точки на бројната оска.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е универзално множество?
2. Што претставуваат Венови дијаграми?
3. Нацртај Венов дијаграм на множеството $A = \{3, 2, 7, 4\}$.
4. Запиши го со Венов дијаграм множеството на сите природни броеви што го задоволуваат условот: а) $x < 3$, б) $x \leq 5$, в) $3 \leq x < 8$.

I.2.4. ЕДНАКВОСТ НА МНОЖЕСТВА

Нека A е множество на триаголници со сите еднакви страни, а B е множество на триаголници со сите еднакви агли.

Познато ни е дека секој триаголник со еднакви страни (рамностран триаголник) има 3 агли кои се еднакви на 60°, односно имаме $A \subseteq B$. Да го разгледаме обратниот случај. Дали секој триаголник со еднакви агли е рамностран триаголник? Одговорот е ДА, бидејќи постои само еден тип на триаголници со сите еднакви агли, а тоа се рамностраните триаголници. Тоа значи дека $B \subseteq A$.

Нека се дадени множествата $A = \{m, r, v, 2\}$ и $B = \{v, r, 2, m\}$. Можеме да воочиме дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Во таков случај

, кога $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, всушност множествата A и B се состојат од едни исти елементи, па велиме дека тие *се совпаѓаат* или дека се *еднакви* (*идентични*) и запишуваме:

$$A = B.$$

Тоа е исто една релација (врска) меѓу множествата A и B, која во општ вид ја дефинираме:

Дефиниција 3

Множествата A и B се совпаѓаат (или се еднакви), ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B и ако секој елемент на B е елемент и на A т.е. $A = B$ означува дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Примери:

1. $\{3, 4, 5\} = \{5, 3, 4\}$.
2. $\{3, 5, 5, 5, 7, 7, 8\} = \{3, 5, 7, 8\}$.

Тоа е затоа што и двете множества се состојат од едни исти елементи - броевите 3, 5, 7, 8. Тоа покажува дека *секој елемент на множеството треба да се смета само по еднаш*, кое нешто е во полна согласност и со поимот за множество како *целина на различни елементи.*

Релацијата еднаквост на множествата ги има следниве својства, кои непосредно следуваат од самата дефиниција.

1. *За секое множество* A, *важи* $A = A$.
2. *За секои две множества*: *ако* $A = B$ *тогаш* $B = A$.
3. *За секои три множества* A, B, C *важи*:

Ако ($A = B$ и $B = C$), тогаш $A = C$.

Да испитаме какви уште случаи можат да настанат меѓу две дадени множества A и B.

Од разгледаните две релации видовме дека:

1. Сите елементи на A припаѓаат во B т.е. ако $A \subseteq B$, тогаш можни се два случаи: или сите елементи на B припаѓаат на A, т.е. и $B \subseteq A$; или не сите елементи на B припаѓаат на A, т. е. и $B \nsubseteq A$.

Во првиот случај кога $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, како што видовме A и B постои релацијата еднаквост и пишуваме $A = B$.

Во вториот случај кога $A \subseteq B$ и $B \nsubseteq A$, т.е. ако постои макар еден елемент од B, што не припаѓа на A, тогаш велиме дека множеството A е *строго вклучено* во B или A е *вистинско подмножество* (или *прав дел*) на множеството B.

Ако сакаме овој случај да го разграничиме од општиот случај $A \subseteq B$ тогаш пишуваме: $A \subset B$. Значи, $A \subset B$ означува дека $A \subseteq B$ и $B \neq A$.

2. Ако за две множества A и B важи: $A \nsubseteq B$ и $B \nsubseteq A$, т.е. кога ниту A е подмножество на B, ниту B е подмножество на A, а независно од тоа дали тие имаат или немаат заеднички елементи, велиме дека множествата A и B се *неспоредливи*.

Примери:

1. $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$, бидејќи $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$ и $\{a, b, c\} \neq \{a, b, c, d\}$;
2. Множествата $\{1, 6, 5\}$ и $\{1, 5, 7\}$ се неспоредливи, бидејќи

$$\{1, 6, 5\} \nsubseteq \{1, 5, 7\} \text{ и } \{1, 5, 7\} \nsubseteq \{1, 6, 5\}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кога две множества се совпаѓаат?
2. Дали множествата $A = \{@, ©, \$\}$ и $B = \{©, @, \$, ©\}$ се совпаѓаат?

3 Дадени со множествата $A = \{1, 4, 5, 3\}$ и $B = \{3, 5, 1, 4\}$. Кои од следниве искази се точни:

а) $A \subseteq B$; б) $A \subset B$; в) $B \subseteq A$; г) $B \subset A$ и д) $A = B$?

4 Дали множеството A е вистинско подмножество на $B = \{а, б, в, г, д\}$ ако:

а) $A = \{б, г, а\}$; б) $A = \varnothing$; в) $A = \{в, г, а, д, б\}$ и г) $A = \{б, в, г, и\}$?

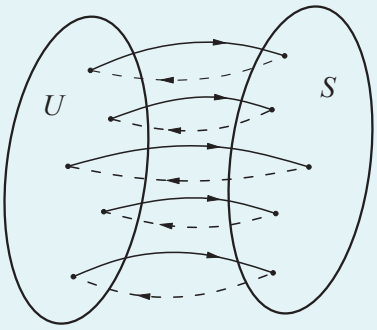
5 Дали множествата $A = \{\lozenge, \square, ☼, ☺\}$ и $B = \{☺, \lozenge, ○, \square, ♫\}$ се неспоредливи?

I.2.5. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

Учениците претставени на цртеж 2 образуваат едно множество, а нивните санки образуваат друго множество. Бидејќи секоја санка си има свој сопственик, а секој ученик своја санка, затоа на секој ученик (елемент на првото множество) може да му се придружи само по една санка - неговата, а секоја санка елемент од второто множество може да се придружи само кон еден ученик - нејзиниот сопственик.

Ова соодветство меѓу елементите на множеството ученици (U) и множеството санки (S), што го гледаме на цртеж 2, графички може да се прикаже со помош на Веновите дијаграми како на цртеж 3.

Цртеж 2



Цртеж 3

Од сликата гледаме дека од секој елемент на множеството U поаѓа по една и само една стрелка (кон елементот што му соодветствува од множеството S) и обратно, од секој елемент на множеството S се враќа по една и само една стрелка (кон нему соодветниот елемент од множеството U), бидејќи секоја санка има само еден сопственик.

Поради ова својство на соодветствување ученик $\leftrightarrow$ санка, природно е да очекуваме бројот на ученици да биде еднаков со бројот на санки. Навистина, бројот на ученици е 5, а

исто така и бројот на санки е 5.

Нека A е конечно множество. Тогаш со $\delta(A)$ го означуваме бројот на елементи на A. Забележуваме дека $\delta(U)=\delta(S)=5$, но сепак множествата U и S се различни, т.е. $U \neq S$. Фактот дека $\delta(U)=\delta(S)$ искажува дека множествата U и S се еквивалентни.

Дефиниција 4

Две конечни множества A и B се викаат еквивалентни множества ако $\delta(A)=\delta(B)$, а тоа го означуваме:

$$A \sim B,$$

а го читаме: A е еквивалентно на B.

Пример: Множествата $A=\{a, b, c, d\}$ и $B=\{k, l, m, n\}$ се еквивалентни. За да се увериме во тоа, на секој елемент од A му придружуваме по еден елемент од B на следниот шематски начин:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ k & l & m & n \end{array}$$

Множеството ученици и множеството санки на цртеж 2 се исто така, еквивалентни множества.

Од дефиницијата за еквивалентност на множествата следуваат следниве својства на релацијата „ ~ “.

1. $A \sim A$, т. е. секое множество е еквивалетно на себеси.
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,
3. $(A \sim B$ и $B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Кои множества се еквивалентни? Како се означува релацијата еквивалентност? Запиши: множеството V е еквивалентно со множеството R.

2 Дали од $A = B$ следува $A \sim B$?

3 Дали од $A \sim B$ следува $A = B$?

4 Дали е точен следниот исказ: $A \sim B$ и $C \sim B \Rightarrow A \sim C$?

I.3. КОНЕЧНИ И БЕСКОНЕЧНИ МНОЖЕСТВА

Познато ни е дека множествата се составени од одреден број елементи. Но колкав може да биде тој број на елементи? Дали едно множество може да биде составено од бесконечно многу елементи? Затоа е потребно да се направи класификација на множествата при што ќе ни послужи следната дефиниција.

Дефиниција 1

Множеството кое е составено од конечен број на елементи се вика конечно множество.

Бидејќи празното множество ја исполнува дефиницијата следува дека и тоа спаѓа во групата на конечни множества. Всушност празното множество има број на членови еднаков на 0 што значи дека има конечен број на членови.

Бројот на елементи на секое конечно множество е некој природен број или 0.

Дефиниција 2

За едно множество велиме дека е бесконечно, ако тоа множество не е конечно.

За појасно да се објасни поимот за конечно множество ќе ни послужат следните примери:

1. Дали множеството на дрвја во една шума е конечно множество?

Одговорот е ДА, бидејќи не може во една шума да има бесконечно многу дрвја (колку и да е голем тој број, тој е сепак некој природен број).

2. Дали множеството на природни броеви е конечно множество?

Одговорот е НЕ, бидејќи имаме бесконечно многу природни броеви. Затоа тоа е бесконечно множество.

3. Дали множеството на парни броеви е конечно множество?

Одговорот е НЕ, бидејќи имаме бесконечно многу парни броеви.

4. Дали множеството на природни броеви од 7 до 700 000 е конечно множество?

Одговорот е ДА, бидејќи има конечен број на елементи (броеви) во ова множество.

5. Дали множеството на точки од една права е бесконечно множество?

Одговорот е ДА. Имено, ако избереме некој природен број на точки на една права секојпат ќе можеме да најдеме нова точка различна од избраните. Затоа тоа множество не е конечно, па мора да е бесконечно.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. За кои множества велиме дека се конечни множества?
2. Дали множеството на непарни природни броеви е конечно?
3. Дали множеството на реки во Р. Македонија е конечно?
4. Набroj 3 множества од одредени предмети во твојата околина кои имаат конечен број елементи и напиши колку елементи има секое од нив!

I.4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАТА

I.4.1. ПРЕСЕК НА МНОЖЕСТВАТА

Нека се дадени множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Гледаме дека тие имаат некои заеднички елементи. Тоа се броевите 3, 4 и 5. Од нив може да се образува ново множество P, за кое велиме да е добиено како резултат на некоја операција извршена над множествата A и B. Така добиеното ново множество P, како и операцијата со чија помош е добиено тоа, се вика пресек на множествата A и B и се означува со симболот:

$$P = A \cap B.$$

Оваа операција *над две дадени множества во општ вид ја дефинираме*:

Дефиниција 1

Пресек (или општ дел) на множествата A и B се вика множеството $A \cap B$ кое е составено од оние елементи кои припаѓаат истовремено и на множеството A и на множеството B, т.е.

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}.$$

Притоа да напоменеме дека $x \in A$ и $x \in B$ е некое тврдење и тоа е вистинито само ако $x \in A$ е вистинито и $x \in B$ е вистинито. Во секој друг случај ($x \notin A$, $x \in B$; $x \in A$, $x \notin B$; $x \notin A$, $x \notin B$) тоа тврдење е невистинито. Ова значење на сврзникот „и“ е во сила и во случај кога $x \in A$ и $x \in B$ се заменат со било кои реченици со кои нешто се тврди.

На дијаграмот на цртеж 4 пресекот $A \cap B$ е обоен со боја која се добива со мешање на боите на множеството A и множеството B.

Примери:

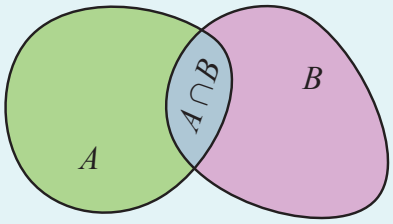
1. Нека R е множество на сите рамнокраки триаголници, а P е множество на сите правоаголни триаголници. Пресекот $R \cap P$ е множество на сите рамнокраки правоаголни

триаголници;

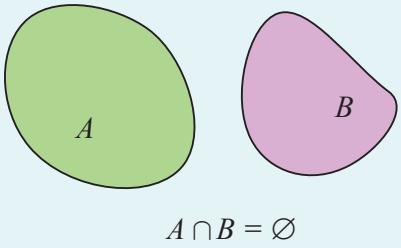
2. $\{2, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 9, 15\} = \{3, 9\}$;

3. Ако A е множеството од сите непарни броеви, а B е множеството од едноцифрени броеви, тогаш $A \cap B$ е множеството од едноцифрени непарни броеви и тоа множество е $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ако множествата A и B немаат заеднички елементи (цртеж 5), тогаш нивниот пресек е празно множество $\varnothing$.



Цртеж 4



Цртеж 5

Тука може да се види (осети) што се добива со воведувањето на поимот празно множество. Имено, доколку не го воведеме тој поим, пресекот на две произволни множества немаше секогаш да биде пак множество.

Дефиниција 2

Две множества, чиј пресек е празно множество, се викаат дисјунктни множества.

Примери:

1. Нека A е множество на сите градови во Р. Македонија, а B множество на сите градови во Словенија. Тие две множества се дисјуктни, бидејќи $A \cap B = \varnothing$ (Зошто?);

2. $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што преставува пресек на две множества? Како се запишува тоа?

2 Најди го пресекот на множествата:

а) $A = \{\sharp, \$, \&, €, 3\}$ и $B = \{☺, ₴, \$, £, \&\}$;

б) $C = \{а, б, в, г\}$ и $E = \{а, б, в, г\}$;

в) $M = \{1, 3, 5, 2, 8, 11, 14, 15\}$ и $K = \{ x \mid x$ *е непарен едноцифрен природен број*$\}$;

г) $T = \{ x \mid x \in \mathbf{N}$ и $5 \leq x < 10\}$ и $P = \{ x \mid x \in \mathbf{N}$ и $10 \leq x < 15\}$;

д) $A = \{\sharp, 1, з, д, а, j\}$, $B = \{\smile, з, а, л, j\}$ и $C = \{з, а, б, j, в\}$.

3 Кои две множества се нарекуваат дисјунктни множества?

4 Дали множествата $A = \{\sharp, \$, \&, €, 3\}$ и $B = \{\smile, ₴, \$, £\}$ се дисјунктни множества? Ако одговорот е не, зошто е тоа така?

5 Дали множествата A на сите русокоси момчиња во твоето одделение и B на сите момчиња во твоето одделение со сини очи се дисјунктни множества?

6 Дали множествата A на сите девојчиња во твоето одделение кои имаат црни очи и B на сите девојчиња во твоето одделение кои носат очила се дисјунктни множества?

7 Какво е множеството $A \cap \varnothing$?

I.4.2. УНИЈА НА МНОЖЕСТВА

Нека се дадени множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 5, 6, 8\}$. Ако ги здружиме (соединиме) тие две множества во едно ќе го добиеме множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Гледаме дека елементите 3 и 5 влегуваат и во множеството A и во множеството B, но во здруженото множество S земени се само по еднаш (Зошто?).

Така образуваното ново множество S го викаме *унија* на множествата A и B и симболички го означуваме: $S = A \cup B$ (читај: A унија B). Унија ја викаме уште и операцијата што е извршена над множествата A и B, како резултат на која е добиено множеството S. Унијата на две дадени множества во општ вид ја дефинираме:

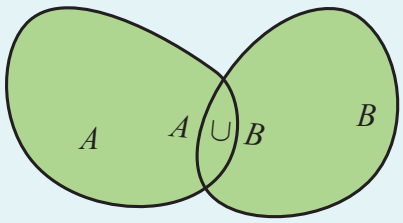
Дефиниција 3

Унија на множествата A и B се вика множеството A и B кое е составено од сите оние елементи кои припаѓаат барем на едно од овие множества, т.е.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}.$$

Притоа да напоменеме дека $x \in A$ или $x \in B$ е некое тврдење и тоа е вистинито ако барем едно од тврдењата $x \in A$ и $x \in B$ е точно ($x \in A, x \in B$; $x \notin A, x \in B$; $x \in A, x \notin B$), а е невистинито ако не се вистинити тврдењата $x \in A$ и $x \in B$, т.е. ако $x \notin A$ и $x \notin B$. Ова значење на сврзникот „или“ е во сила и во случај кога $x \in A$ и $x \in B$ се заменат со било кои реченици со кои нешто се тврди.

На цртеж 6 унијата на множествата A и B е обоена со една боја.



Цртеж 6

Примери:

1. $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$;

2. Нека A е множество на сите непарни природни броеви, а B множество на сите парни природни броеви. Тогаш $A \cup B = \mathbf{N}$ е множеството на сите природни броеви;

3. Дадени се множествата:

$A = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 5 \leq x < 10\}$ и

$B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 7 < x < 15\}$, тогаш:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 5 \leq x < 15\};$$

4. $\{a, b, c\} \cup \{x, y, u, v\} = \{a, b, c, x, y, u, v\}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што преставува унијата на две множества? Како се бележи?

2 Ако се дадени три множества $A = \{4, 5, \square, n\}$, $B = \{4, p, 7, \Diamond\}$ и $C = \{\circ, n, 7\}$ да се најдат следните множества:

а) $A \cup B$; в) $A \cup B \cup C$;

б) $B \cup C$; г) $(A \cap B) \cup C$.

3 Ако A е празно множество, што ќе се добие со унија со множеството B кое не е празно множество?

4 Што ќе се добие како унија на множеството на природните броеви и множеството на непарни броеви?

5 Кое множество се добива со унијата $A \cup \varnothing$?

6 Ако A и B се конечни множества, какво е множеството $A \cup B$?

7 Ако A и B се бесконечни множества, какво е множеството $A \cup B$?

I.4.3. РАЗЛИКА НА ДВЕ МНОЖЕСТВА

Нека $A = \{a, b, c, d, e, h\}$ е множество на учениците од шаховската секција во класот, а $B = \{a, c, m, n, p, r, s\}$ множество на учениците од фото-секцијата во класот. Од тие две множества може да се формираат и следниве две множества $\{b, d, e, h\}$ и $\{m, n, p, r, s\}$.

Првото од нив претставува множество на учениците само од шаховската секција, а кои не се членови и на фото-секцијата. Тоа множество го викаме *разлика* на множеството A со множеството B, симболички го означуваме $A \setminus B$.

Аналогно, второто множество претставува множество на учениците од фото-секцијата, а кои не се членови и во шаховската секција. Тоа множество е исто разлика, но на множеството B со множеството A. Симболички го означуваме $B \setminus A$, а го читаме: „B без A“ или „B минус A“.

Како што гледаме множествата $A \setminus B$ и $B \setminus A$ во општ случај не се совпаѓаат, т.е.

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

Во општ вид разликата ја дефинираме:

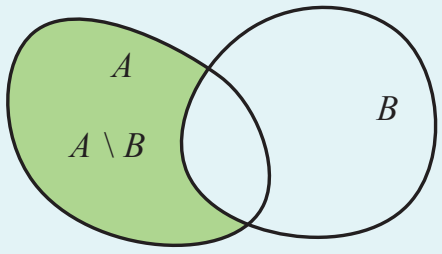
Дефиниција 4

Разлика помеѓу множеството A и множеството B се вика множеството $A \setminus B$ кое е составено од оние елементи на множеството A, кои не припаѓаат на множеството B т.е.

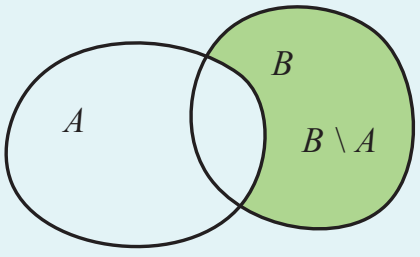
$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}.$$

Аналогно: $B \setminus A = \{ x \mid x \in B \text{ и } x \notin A \}$.

Разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ се претставени поединечно со дијаграми на слики 7 и 8.



Цртеж 7



Цртеж 8

Примери:

1. $\{2, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$;

2. Нека A е множество на ученици во едно одделение кои се повисоки од 1,50cm, а B множество на ученици од истото одделение кои имаат наполнето 11 години. Тогаш разликата $A \setminus B$ ќе се состои од оние ученици кои се повисоки од 150 cm и немаат 11 години.

Нека се дадени множествата: $A = \{3, 6, 9\}$ и $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

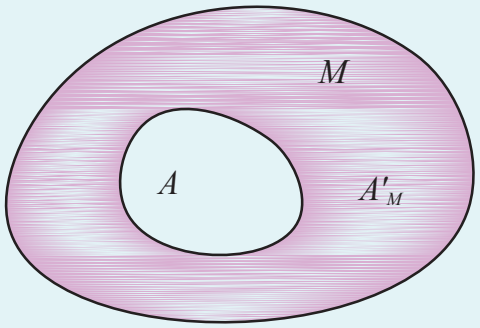
Како што може да се забележи $A \subset M$. Ако ја формираме разликата $M \setminus A$, ќе добиеме:

$$M \setminus A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}.$$

Во случајов кога $A \subset M$, разликата $M \setminus A$ се вика уште и **комплемент** (или дополнение) на множеството A во однос на множеството M, а се означува симболички на еден од следниве начини:

$$C_M(A),\ C(A),\ A'_M \text{ или само } A'.$$

Ние ќе ги користиме последните два симбола.



Цртеж 9

Всушност, комплементот A'_M претставува разлика на две множества при одреден услов.

Дефиниција 5

Комплемент на множеството A во однос на множеството M, ја викаме разликата $M \setminus A$, под услов да е $A \subseteq M$, т.е.

$$A'_M = M \setminus A, \text{ ако } A \subseteq M.$$

Сосема е очигледно дека (на тоа упатува и дијаграмот на цртеж 9) комплементот ги има следниве својства:

$$A \cup A'_M = M \text{ и } A \cap A'_M = \varnothing,$$

по кои се одликува и издвојува од разликата $M \setminus A$ во општ случај.

Множеството M, во кое е вклучено даденото множество A, може да биде некое познато множество и како такво да претставува универзално множество. Во таков случај, ако M е некое познато универзално множество, т.е. ако $M = U$, тогаш наместо симболот A'_M кратко пишуваме A' и говориме само за комплемент на множеството A.

Примери:

1. Множеството на сите триаголници нека е универзално множество, а множеството A – множество на сите правоаголни триаголници. Комплемент на множеството A, т.е. A' ќе биде множеството на сите остроаголни и тапоаголни триаголници;

2. Нека S е множеството на сите согласки во нашата азбука. Тогаш S' ќе преставува множество на сите согласки.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што преставува разлика на две множества? Како ја запишуваме?
2. Ако се дадени множествата: $A = \{e, r, 4, d, 2\}$ и $B = \{1, 4, r, e, a\}$. Да се најде:
   а) $A \setminus B$
   б) $B \setminus A$
   в) $A \setminus (A \setminus B)$
3. Кое множество се добива како разлика на множеството на природните броеви и множеството на непарни броеви?
4. Дали разликата на множеството на парни и множеството на непарни броеви е празно множество?
5. Ако A и B се конечни множества, какво е множеството $A \setminus B$?
6. На што е еднакво множеството $\varnothing \setminus A$?

I.5. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА МНОЖЕСТВА

I.5.1. ПОДРЕДЕН ПАР

При разгледувањето на некои множества од два или повеќе елементи: понекогаш од огромно значење е и нивниот редослед. На пример, секој од нас прави разлика помеѓу левиот и десниот чевел, помеѓу левата и десната ракавица итн.

Да ги разгледаме дропките $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$. Тие иако се запишани со едни исти природни броеви 4 и 5, се разликуваат по редоследот на нивното запишување, читање и вредност. Во првата

дропка бројот 4 е на прво место (во броителот, над дробната црта), а бројот 5 е на второ место (во именителот, под дробната црта). Во втората дропка пак бројот 4 е на второ место, а бројот 5 на прво место. Велиме дека тие дропки, а во општ случај и секоја обична дропка претставува по еден *подреден пар* природни броеви.

Да го свртиме нашето внимание на двоцифрените броеви 27 и 72.

Тие, иако се запишани со едни исти цифри 2 и 7, се разликуваат по редоследот на запишувањето и читањето. Цифрата 2 во бројот 27 е на прво место и означува десетки, а во број 72 таа е на второ место и означува единици. Затоа велиме дека цифрите со кои се запишани двоцифрените броеви образуваат подредени парови од цифри, бидејќи при нивното запишување од посебно значење е тоа: која цифра е на прво место, а која на второ место.

Дефиниција 1

За парот елементи *a*, *b*, ако елементот *a* е прогласен за прв, а елементот *b* за втор елемент велиме дека претставува подреден пар и симболички го означуваме со (*a*, *b*).

Два подредени парови (a, b) и (c, d) по дефиниција сметаме дека се еднакви (се совпаѓаат) и пишуваме $(a, b) = (c, d)$, ако и само ако $a = c$ и $b = d$ т.е.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ и } b = d.$$

Елементите на подредениот пар можат да бидат и еднакви (a, a), само што тогаш бесмислено е да се говори за редослед на елементите.

Врз основа на дефиницијата за еднаквост на два подредени пара имаме: ако $a \neq b$, тогаш $(a, b) \neq (b, a)$.

Елементот a на подредениот пар (a, b) се вика прва компонента (прва проекција или прва координата); а b се вика втора компонента (втора проекција, односно втора координата) на (a, b).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. За кој пар елементи велиме дека е подреден пар?
2. Дали подредените парови $(1, 3)$ и $(3, 1)$ се еднакви?
3. На подредениот пар (b, a) која е прва, а која втора координата? Зошто?
4. Ако $a = c$ и $b = d$ дали подредените парови (a, b) и (d, c) се еднакви?

I.5.2. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА ДВЕ МНОЖЕСТВА

Ќе се запознаеме со уште една операција над множествата.

Нека се дадени множествата: $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{x, y\}$.

Да ги формираме сите подредени парови чии први компоненти се елементи на множеството A, а втори компоненти се елементи на множеството B. Тоа се подредените парови:

$$(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y),$$

кои од своја страна дефинираат ново множество, кое симболички го запишуваме:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\},$$

а го викаме *Декартов* или *директен производ на множеството A над множеството B.*

Оваа операција над две множества во општ случај ја дефинираме:

Дефиниција 2

Декартов (или директен) производ на множеството A над множеството B се вика множеството $A \times B$ (читај A по B), кое се состои од оние подредени парови (x, y), на кои првите елементи му припаѓаат на A, а вторите на B, т.е.

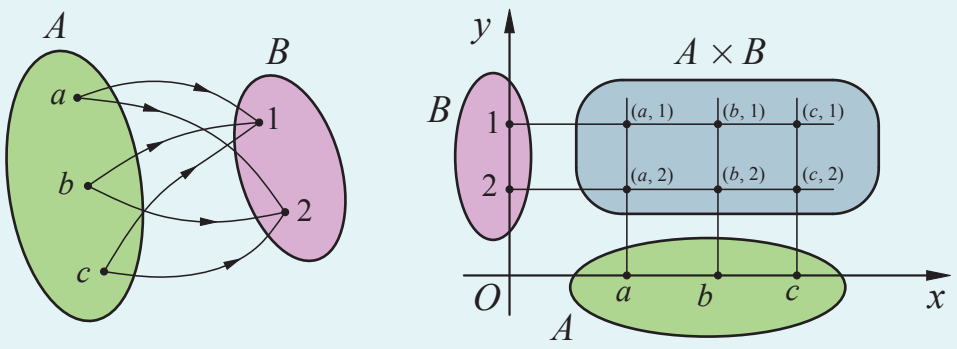
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ако барем едно од множествата A и B е празно множество, тогаш по дефиниција земаме дека и Декартовиот производ е празно множество, т.е. $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times B = \varnothing$, $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$.

Пример: Ако е $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$, тогаш:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, а

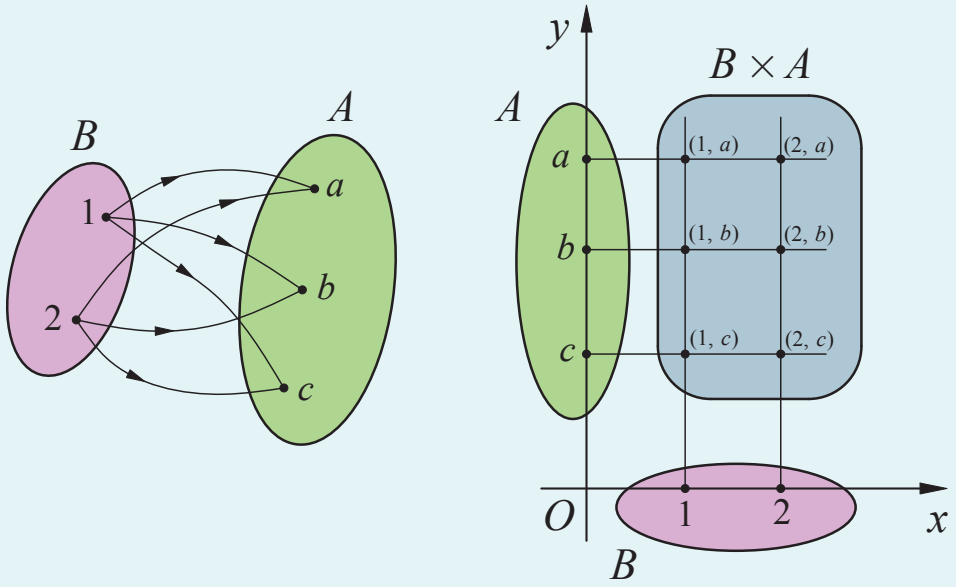
$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.



Цртеж 10

Ако елементите на множествата A и B се броеви, тогаш елементите на нивниот Декартов производ се подредени парови од броеви. Меѓутоа, подредените парови (a, b) можат да се разгледуваат и како координати на точки во координатната рамнина xOy (со апсциса a и ордината b). На секој таков пар броеви соодветствува точно една точка од координатната рамнина. Затоа во математиката подредените парови на броеви често ги викаме „точки на рамнината“ или само „точки“.

На цртежите 10 и 11 дадена е шематска и геометриска илустрација на множествата $A\times B$ и $B\times A$.



Цртеж 11

Како што гледаме $A\times B\neq B\times A$.

Според тоа: *операцијата Декартов производ е некомутативна.*

Ако $B = A$, тогаш наместо $A\times A$ често пишуваме A^2, а го викаме *Декартов квадрат* на множеството A.

Воопшто: A^2 - *тоа е множество на сите можни подредени парови образувани од елементите на множеството* A, т.е.

$$A^2 = A\times A=\{(x, y) \mid x\in A \text{ и } y\in A\}.$$

Подмножеството D на множеството A^2 (симболички $D(A^2)$), кое се состои само од елементите од видот (x, x), $(x\in A)$ се вика *дијагонала* на множеството A^2. Значи:

$$D(A^2) =\{(x, x) \mid x\in A\}.$$

Пример: Нека $A = \{a, b, c\}$, тогаш:

$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,

$D(A^2) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е Декартов производ? Како го запишуваме?
2. За следните множества $A = \{a, 2, c\}$ и $B = \{4, c\}$ да се најде:
   а) $A \times B$;
   б) $B \times A$.
3. Ако $A \times B = B \times A$, што можеш да заклучиш за множествата A и B?
4. Ако е дадено множеството $B = \{2, €, e\}$ најди ги B^2 и $D(B^2)$.
5. Ако $A \times B = \{(a, x), (a, c), (x, x), (x, c)\}$, најди ги множествата A и B.

I.6. МНОЖЕСТВО НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Поимот *број* е еден од основните математички поими. До него е дојдено во историскиот развиток на човештвото преку споредувањето на различните множества. Во текот на развојот на математиката, главно, поради потребите на практиката и теоријата, тој постојано еволуирал сè додека не ја добил денешната содржина.

Овде накратко ќе го изложиме развојот на поимот број, почнувајќи од множеството на природните броеви.

На секое конечно множество знаеме дека можеме да му придружиме некој број. И притоа ако $A \sim B$ на множествата A и B им придружуваме ист број $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Бројот n го нарекуваме број на елементи на A. Тој број уште се нарекува и *кардинален број*.

Кардиналните броеви на конечните непразни множества се природни броеви.

Така, на пример: На сите множества, еквивалентни на множеството $\{a\}$, им одговара природен број што го означуваме со симболот 1; на множествата еквивалентни на множеството $\{a, b\}$ им одговара природниот број 2; на множествата еквивалентни на множеството $\{a, b, c\}$ им одговара природниот број 3 итн. Така ја добиваме низата од природните броеви:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

во која природниот број n ни го дава бројот на елементите на некое дадено конечно множество. Постапката на добивањето на природниот број n се вика *броење* на елементите на тоа множество.

Резултатот од броењето на елементите на еквивалентните множества не зависи од видот на нивните елементи, ниту пак од редот по кој го вршиме броењето на елементите.

Бидејќи, колку и да е голем природниот број n, секогаш постои и природен број $n + 1$, што е поголем од n, за тоа велиме дека:

Низата на природните броеви $1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots$ е бесконечна.

Сите природни броеви го образуваат множеството на природни броеви кое го означуваме

со буквата **N**, т.е.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Бројот 1 како елемент на множеството **N** се вика уште и *единица*.

Во множеството на природните броеви ги воведуваме релациите на нееднаквост: „ > “ - поголем од и „ < “ - помал од. Нив ги воведуваме со следната дефиниција:

Дефиниција 1

Ако некој број *a* во низата на природните броеви следува по друг природен број *b*, тогаш велиме дека *a* е поголем од *b* и пишуваме *a* > *b*; а за бројот *b* велиме дека е помал од а и пишуваме *b* < *a*.

Релацијата за еднаквост „ = “ во множеството на природните броеви ги има следните својства, кои произлегуваат од соодветните својства на еквивалентните множества:

1. $a = a$, т.е. *секој природен број е еднаков на себеси*;
2. $a = b \Rightarrow b = a$;
3. $(a = b \text{ и } b = c) \Rightarrow a = c$.

Релациите пак за нееднаквост („ > “ и „ < “) во множеството на природните броеви го имаат само својството:

4. $(a > b \text{ и } b > c) \Rightarrow a > c$.

а) За кои и да е два природни броја a и b постои една само една од следните релации:

$$\text{или } a < b \text{ или } a = b \text{ или } a > b.$$

б) За секои три различни природни броеви a, b и c ако е $a < b$ и $b < c$; тогаш ќе биде и $a < c$.

Или симболички запишано:

$$(a \in \mathbf{N} \text{ и } b \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\text{или } a < b \text{ или } a = b \text{ или } a > b)$$

$$(a < b \text{ и } b < c) \Rightarrow a < c.$$

Природните броеви ги делиме на *парни*: 2, 4, 6, ..., и *непарни:* 1, 3, 5, ... Парните броеви ги обележуваме со $2k$, а непарните со $2k + 1$ (или $2k - 1$), каде што k е кој и да било природен број.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Преброј ги клупите во училницата!
2. Како го вршиме броењето на предметите?
3. Кои броеви ги викаме природни броеви? Набroј неколку!
4. Кој број е следбеник на бројот 3?

5 Дали бројот 1 е претходник на некој број?

6 Дали множеството на природни броеви е конечно?

7 Набројги својствата на релацијата за еднаквост „=“ во множеството на природните броеви и напиши пример за секое од нив. Кои од овие својства се среќава како својство на релациите за нееднаквост („ > “ и „ < “) во множеството на природните броеви?

8 Дали постои својството симетричност (аналогно на својството 2 за еднаквост на природните бореви) на релациите за нееднаквост („ > “ и „ < “) во множеството на природните броеви? Зошто? Покажи со пример!

9 Вметни знак („ = “, „ > “ или „ < “) во празното место за да се добијат точни искази.

а) 5 ○ 7 в) 100 ○ 100

б) 37 ○ 29 г) 1 ○ 10

10 Кои броеви се парни и како ги обележуваме истите?

11 Кои броеви се непарни? Како се обележуваат?

12 Напиши 3 броеви кои се парни а се помали од бројот 31!

I.6.1 ПРОШИРУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВОТО **N** СО НУЛАТА

Множеството на природните броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење. Тоа значи дека збирот, односно производот на два природни броја е пак точно определен природен број. Но, таков не е случајот и со операциите одземање и делење. Во множеството на природните броеви одземањето може да се изврши само ако намаленикот е поголем од намалителот, а делењето - ако деленикот е делив со делителот.

За да можат и овие операции да се извршуваат без ограничување, потребно е да се изврши проширување на множеството на природните броеви со нови броеви.

Првото проширување на поимот за број е извршено со присоединувањето на нулата кон множеството на природните броеви.

Со природните броеви обично утврдуваме колку елементи содржи дадено конечно множество, а со бројот нула (0) означуваме дека множеството е празно, т.е. дека тоа не содржи ниту еден елемент.

Операциите помеѓу природните броеви и бројот нула се дефинирани така што и во проширеното множество да важат законите на операциите само со природните броеви. На пример:

Дефиниција 1

Под збир на природен број и нула или на нула и природен број го подразбираме самиот број, т.е.

$$a + 0 = a \text{ и } 0 + a = a.$$

Од оваа дефиниција следува дека во проширеното множество важи комутативниот закон на збирот, т.е.

$$a + 0 = 0 + a.$$

Дефиницијата за производ на бројот 0 и некој природен број a останува иста како и за производ на два природни броја, т.е.

$$0 \cdot a = \underbrace{0+0+0+.....+0}_{a \text{ собироци}} = 0.$$

Но по оваа дефиниција се забележува дека производот $a \cdot 0$ нема смисла. Меѓутоа за да може да важи комутативниот закон и за ваков производ, по дефиниција земаме дека $a \cdot 0 = 0$, т.е.

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Дефиниција 2

Производот на кој и да било природен број и бројот нула е еднаков на нула.

Операциите одземање и делење се дефинираат, како и кај природните броеви, како обратни на собирањето и множењето.

Пример:

$a - 0 = a$, бидејќи $a + 0 = a$;

$a - a = 0$, бидејќи $0 + a = a$. Оттука следува следната дефиниција.

Дефиниција 3

Разликата на два еднакви природни броја е еднаква на нула.

Ова често го земаме и како дефиниција на бројот нула.

Дефиниција 4

Количникот од бројот 0 и кој и да било природен број a еднаков е на нула, т.е.
$0 : a = 0$, бидејќи $a \cdot 0 = 0$.

Но обратно: *Делењето на природен број со нула во математиката не се дефинира, бидејќи е невозможно.*

Ако допуштиме дека е тоа можно, т.е. дека е $a : 0 = b$, тогаш при $a \neq 0$ ќе дојдеме до следново противречно равенство $b \cdot 0 = a$. (Зошто)?

Ако $a = 0$, тогаш *количникот* $0 : 0$ *е неедноznачно определен*, бидејќи производот на секој број, и нула е еднаков на нула.

Пример: $0 : 0 = 8$, бидејќи $8 \cdot 0 = 0$; $0 : 0 = 17$, бидејќи $17 \cdot 0 = 0$ итн.

Затоа, кога имаме да делиме со број означен со буква, претходно треба да се договориме дека тој број не е нула.

Дефиниција 5

Унијата од множеството N на природните броеви и бројот нула се вика проширено множество на природните броеви и се означува со: N_0, т.е.

$$N_0 = N \cup \{0\}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Најди го природниот број x, за равенствата да бидат точни!

а) $a + 0 = x$ д) $x - a = 0$

б) $k - k = x$ ѓ) $a - x = a$

в) $5 - 0 = x$ е) $0 : x = 0$

г) $0 \cdot p = x$ ж) $a \cdot 0 = x$

2 Како се вика и означува *унијата* од множеството **N** на природните броеви и бројот нула?

3 Што се добива ако некој природен број го помножиме со нулата?

4 Дали бројот ќе се промени ако на него додадеме нула?

I.7. ПОДРЕДУВАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

Ако природните броеви, тргнувајќи од еден (единицата), ги подредиме така што да растат по големина за по еден, добиваме низа од броеви: еден, два, три, четири, пет, шест, седум, осум, девет, десет, единаесет, дванаесет, тринаесет итн.

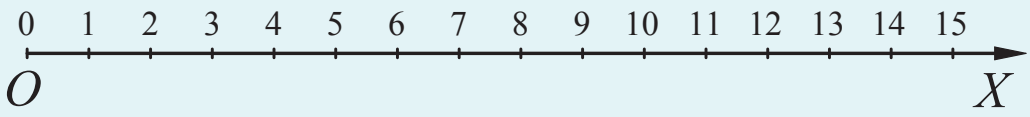
Таа низа ја нарековме низа на природните броеви.

Бројот еден е најмал број во низата, а исто така и почетен член на таа низа. Најголем број или краен член во низата на природните броеви не постои, зашто ако и кон најголемиот број што можеме да го замислиме, додадеме уште една единица, ќе добиеме уште поголем број. Билионот на пример не е најголем број, зашто ако му додадеме еден добиваме билион и еден. Од тука заклучуваме дека:

Низата на природните броеви има почеток (единицата), но нема крај. Затоа велиме:

Низата на природните броеви е бесконечна.

Броевите од низата на природните броеви често пати ги претставуваме со низа точки, што ги распоредуваме на една полуправа OX (цртеж 12). Точките ги распоредуваме на еднакво растојание почнувајќи од почетокот на полуправата. Точката од почетокот на полуправата ја означуваме со бројот О, следната со бројот 1, следната со бројот 2 итн.



Цртеж 12

Полуправата на која е наредена низата на природните броеви ја викаме бројна линија или бројна оска.

Од така наредената низа на природните броеви на бројната линија, забележуваме дека:

1. Низата на природните броеви е бесконечна, како што е неограничена и полуправата;

2. На секој број од низата му одговара точно одредено место во неа, т.е. на бројната линија;

3. По секој број следи друг точно одреден број, што е за една единица поголем од него;

4. Секој број од низата е поголем од броевите пред него, а е помал од сите броеви што следат по него.

Ако сакаме да запишеме дека два броја се еднакви, го употребуваме знакот = („еднакво“), на пример, $7 = 7$, кое го читаме: седум е еднакво на седум.

Ако сакаме да ја означиме нееднаквоста на два броја, тогаш го употребуваме знакот $\neq$ („нееднакво“). На пример, $3 \neq 8$, кое го читаме: три не е еднакво на осум.

За два нееднакви броја можеме да кажеме дека еден од нив е поголем или помал од другиот. Тоа математички го запишуваме со знаците $>$ („поголемо од“) и $<$ („помало од“), на

пример, $9 > 4$, кое го читаме: девет е поголемо од четири; $2 < 5$, кое го читаме: два е помало од пет; $3 < 7 < 8$, кое го читаме: седум е поголемо од три, а помало од осум.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали множеството на природни броеви е подредено?
2. За колку е поголем следбеникот на даден природен број од самиот тој број?
3. Дали множеството на природни броеви може да се претстави на бројна линија?
4. Претстави ги броевите од 1 до 10 на бројна оска!
5. Како се читаат следниве изрази:
   а) $5 \neq 9$;
   б) $10 > 7 > 6$?

I.8. ПИШУВАЊЕ И ЧИТАЊЕ НА БРОЕВИТЕ ПО КЛАСИ

Броевите од еден до девет ги пишуваме со по една цифра и затоа се викаат едноцифрени броеви. Бројот десет го пишуваме вака: 10, затоа што десетката е единица од втор ред и ја пишуваме на второ место почнувајќи од десната страна. Нулата ни покажува дека нема единици од прв ред. Бројот сто го пишуваме вака: 100, затоа што стотката е единица од трет ред и ја пишуваме на трето место почнувајќи од десно. Првата нула од десно ни покажува дека нема прости единици, а втората нула ни покажува дека нема десетки.

Броевите од десет до сто (освен сто) содржат десетки и прости единици, па затоа ги пишуваме со две цифри и се викаат двоцифрени броеви. Првата цифра од десно ни покажува колку прости единици има тој број, а втората цифра колку десетки. На пример, бројот 74 има четири единици и седум десетки.

Броевите од сто до илјада (освен илјада) содржат стотки, десетки и прости единици; според тоа нив ги пишуваме со три цифри и се викаат троцифрени броеви. На пример, бројот седумстотини четириесет и осум го пишуваме вака: 748, затоа што има 7 стотки, 4 десетки и 8 единици; бројот триста и девет го пишуваме вака: 309, затоа што има 3 стотки, 0 (нема) десетки и 9 единици.

Според тоа: трицифрените броеви ги пишуваме така, што по ред ги пишуваме цифрите на стотките, десетките па единиците. На местото каде што нема десетки или единици пишуваме 0.

Бројот илјада го пишуваме вака: 1000. Трите нули ни означуваат дека нема стотки, десетки единици.

Сега е јасно дека бројот десет илјади се пишува 10 000 (зошто?), 100 илјади се пишува: 100 000 (зошто?); милион или 1 000 илјади се пишува: 1 000 000, т.е. 1 и шест нули од

десната страна. 10 милиони се пишува: 10 000 000 ; 100 милиони се пишува: 100 000 000 ; милијардата или 1 000 милиони се пишува: 1 000 000 000 , т.е. со 1 и девет нули од десно. Десет милијарди се пишува: 10 000 000 000 ; 100 милијарди се пишува: 100 000 000 000. Билионот или 1 000 милијарди или милион милиони се пишува вака: 1 000 000 000 000, т.е., со 1 и дванаесет нули итн.

Познато ни е дека во декадниот броен систем постојат редови на простата и повисоките декадни единици и тоа:

- ред на прости единици - први ред;
- ред на десетки единици - втори ред;
- ред на стотки единици - трети ред;
- ред на единици илјади - четврти ред;
- ред на десетки илјади - петти ред;
- ред на стотки илјади - шести ред;
- ред на единици милиони - седми ред;
- ред на десетки милиони - осми ред итн.

За полесно пишување и читање на броевите, нивните редови ги делиме во класи (групи) од по три реда, почнувајќи од редот на простите единици, т.е. од десно на лево.

Таа поделба на броевите на класи прегледно може да се види од приложенава таблица:

Класи	V класа билиони			IV класа милијарди			III класа милиони			II класа илјади			I класа единици		
Ред	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Назив	Стотки билиони	Десетки билиони	Единици билиони	Стотки милијарди	Десетки милијарди	Единици милијарди	Стотки милиони	Десетки милиони	Единици милиони	Стотки илјади	Десетки илјади	Единици илјадаи	Стотки	Десетки	Единици
Број					6	9	2	0	7	0	0	0	0	5	4

Ако бројот има повисоки класи, тогаш го пишуваме вака: најнапред се пишува највисоката класа, што ја содржи бројот, а потоа се пишуваат по ред сите пониски класи до класата на единиците. При тоа треба да внимаваме:

1. Дека за секоја класа се потребни три места, освен за највисоката, која може да има и помалку од три места.

2. Ако бројот не содржи некои декадни единици од одредени редови, тогаш на нивните места се пишуваат нули.

3. Ако бројот не содржи некоја цела класа, тогаш сите три места од таа класа се пополнуваат со нули.

4. Класите да бидат една од друга малку разделени и да не се пишува меѓу нив никаков знак (запирка или точка).

На пример, бројот шеесет и девет милијарди двеста и седум милиони педесет и четири, го пишуваме вака: 69 207 000 054, зашто во него ја нема класата илјади, ги нема декадните единици: десет милиони и стотки, според тоа на нивните места се поставени нули.

Запишаните броеви лесно ги читаме, ако прво ги поделиме во класи од по три цифри, почнувајќи од десно на лево; потоа го утврдуваме името на највиоката класа.

Читањето практично станува вака: почнувајќи од највиоката класа, ја читаме по ред секоја класа како одделен троцифрен број, по чие што прочитување го изговараме и името на класата. На пример, да се прочита бројот: 47 600 408 000 060; разделен во класи гледаме дека тој има пет класи, т.е. највиоката класа му е класата на билионите. Читањето го вршиме по класи и тоа: 47 билиони 600 милијарди 408 милиони и шеесет.

Како што гледаме при читањето на броевите името на класата на единиците не се изговара, исто не се изговараат ни имињата на празните класи, т.е. класи при кои сите три места се исполнети со нули.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали бројот 2 315 е петцифрен број?
2. Напиши го бројот триесет и еден милион петсто и две илјади педесет и осум!
3. Колку единици од петти ред содржи бројот 32 104 509?
4. Запиши го со зборови бројот 793 462 301!

I.9. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ НА ДЕСЕТКИ, СТОТКИ И ИЛЈАДИ

При образувањето на броевите во декадниот броен систем видавме дека десет прости единици образуваат една повисока единица, т.е. единица од *повисок* ред, којашто ја викаме десетка. Десет десетки образуваат уште *повисока* единица, што се вика стотка или сто, десет *стотки* образуваат илјада единици итн.

Десетката, стотката, илјадата итн., *исто* така се викаат единици, но велиме дека тоа се единици од *повисок* ред или декадни единици.

Ако простата единица (еден) ја наречеме единица од прв ред тогаш декадните единици се:

- десетката (десет) е единица од втори ред;
- стотката (сто) е единица од трети ред;
- илјадата (илјада) е единица од четврти ред;
- десет илјади е единица од петти ред;
- сто илјади е единица од шести ред;

- милионот е единица од седми ред;
- десет милиони е единица од осми ред;
- сто милиони е единица од деветти ред;
- милијардата е единица од десетти ред;
- десет милијарди е единица од единаесетти ред;
- сто милијарди е единица од дванаесетти ред;
- билионот е единица од тринаесетти ред итн.

Секоја од приведените декадни единици е образувана од десет декадни единици од пониСкиот ред. Според тоа секоја повисока декадна единица е десет пати поголема од претходната декадна единица. Десетката пак е декадна единица, што содржи десет прости (основни) единици.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Од кој ред е единицата 100 милиони?
2. Која единица е од повисок ред: сто милиони или десет милијарди?
3. Дали бројот со единици од повисок ред е поголем или помал во однос на број со единици од понизок ред?
4. Бројот 346 колку единици има од четврти ред, колку од трети, втори и први ред?

I.10. ДЕКАДЕН БРОЕН СИСТЕМ

При непрекинато броење ќе добиеме сè поголеми и поголеми броеви. Велиме дека броењето не завршува, т.е. нема крај. Во почетокот на броењето, на броевите им даваме различни имиња. Но бидејќи броеви имаме неограничено многу, тогаш веднаш станува јасно дека за секој нов број не можеме да имаме и нов збор. Кога за секој број би давале произволно име, тогаш би добиле толку многу различни зборови, што никој не би бил во состојба да ги запамети, ниту пак да ги разликува еден од друг.

Таа непрактичност е избегната со создавањето на таканаречениот броен систем. Бројниот систем му овозможува на човекот со помалку зборови да ги искажува сите броеви.

При броењето, уште од рани времиња, човекот ги собирал предметите во помали купчиња, а овие пак во поголеми купчиња итн.

Човекот при броењето се ползувал и со прстите од рацете, затоа и се мисли дека во тие помали купчиња, тој ставал толку предмети (единици) колку што има прсти на двете раце.

Така се мисли дека е создаден и нашиот броен систем, во кој бројот десет има особено значење, а кој денес скоро сите народи во светот го употребуваат.

Тој систем на броење се вика десетичен броен систем или декаден броен систем (по

грчкиот збор: дека, што значи десет).

Во декадниот броен систем, броевите ги образуваме на овој начин:

- купчето (множеството) од десет единици се зема за повисока единица таканаречена десетка. Кога ќе се насоберат десет такви купчиња (десетки), од нив се образува ново поголемо купче наречено сто или стотка единици. Кога пак се насоберат десет купчиња (стотки), од нив се образува нова поголема единица на која ѝ е дадено посебно име илјада.

Според тоа броевите од еден до илјада се образувани од имињата на првите десет броја: еден, два, три, четири, пет, шест, седум, осум, девет, десет и имињата на двете повисоки единици: сто и илјада. На пример, бројот седумстотини педесет и осум е образуван од седум стотки (од по десет десетки), пет десетки и осум единици.

Броевите поголеми од илјада се образуваат на истиот начин.

Десет илјади единици образуваат нова повисока единица што е наречена десетка илјади или само десет илјади. Десет десетки илјади образуваат една стотка илјади или сто илјади.

А од десет стотки илјади образувана е уште повисока единица, на која ѝ е дадено посебно име милион. Зборот милион има италијанско потекло и означува број што е еднаков на илјада илјади единици.

Десет милиони единици образуваат една десетка милиони или десет милиони.

Десет десетки милиони образуваат една стотка милиони или сто милиони. А од десет стотки милиони образувана е уште повисока единица на која пак и е дадено одделно име милијарда. Зборот милијарда има француско потекло и означува број што е еднаков на илјада милиони единици.

Од милијардите, исто како и од илјадите и милионите се образуваат нови повисоки единици и тоа: десет милијарди, сто милијарди, а од десет стотки милијарди или илјада милијарди е образувана нова повисока единица, што е наречена билион. Зборот билион означува број што е еднаков на илјада милијарди или милион милиони единици.

Во практичниот живот доаѓаат во употреба броевите до милијарда или билион. Во науката пак се употребуваат и поголеми броеви и тоа:

- билјарда, т.е. илјада билиони (= 10^{15}); [1]
- трилион, т.е. милион билиони (= 10^{18});
- трилјарда, т.е. илјада трилиони (= 10^{21});
- квадрилион, т.е. милион трилиони (= 10^{24});
- квадрилјарда (= 10^{27}) итн.

Од сето дотука речено, заклучуваме дека во декадниот броен систем сите броеви ги образуваме само со четиринаесет различни зборови и тоа од имињата на првите десет броја и имињата на повисоките единици: сто, илјада, милион и милијарда.

Постојат и други бројни системи: такви се, на пример, бројните системи при основа два, пет, шест, дванаесет итн. Нив нема да ги изучуваме. Денешните сметачи работат во бинарен систем (основа 2).

Дури и кај нас до скоро предметите се поредуваа во групи (купчиња) по дванаесет и тие групи имаа име дузина или туце. Па и сега лажиците, виљушките и ножевите во сервисните

[1] Со 10^n е означен природниот број кој се пишува со една единица и n нули после тоа. На пример, $10^5 = 100000$.

кутии се наоѓаат по дванаесет и претставуваат една дузина итн.

Но декадниот броен систем, врз чија што основа со векови се создавани правилата на сите основни и повисоки математички операции, стана единствен во употребата како во практичниот живот на луѓето, така и во науката.

Забелешка: *Читањето на големите броеви што претходно ги изнесовме се користат во поголем број европски држави (Германија, Италија, Франција итн.). Меѓутоа во светот постојат држави (Велика Британија, САД, Австралија и др.) во кои зборовите милијарда, билјарда, трилјарда итн. не постојат. Во овие земји билион означува* 10^9*, трилион* 10^{12}*, квадрилион* 10^{15} *итн.*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали постои бинарен броен систем и кој број е основа на овој систем?
2. Какво потекло има зборот милион и што значи?
3. Зошто бројниот систем со кој се служиме се вика декаден?
4. Од колку милиони се состои квадрилионот?
5. Какво потекло има зборот милијарда и што значи?

I.10.1. ЦИФРИ. НУЛАТА КАКО БРОЈ

Цифрите се писмени знаци, со кои ги запишуваме броевите. Цифрите со кои денес ги запишуваме сите броеви се викаат арапски цифри. Арапските цифри ги примиле Арапите од Индијците и ги пренесле во Европа во десеттиот век од нашата ера, а дури во петнаесеттиот век тие ја добиле денешната форма.

Имаме десет цифри и тие се:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Десеттиот знак (цифра) го викаме нула. Најмалиот од природните броеви е еден. Бројот еден означува дека *множеството* се *состои* само од еден елемент. Велиме дека во чинијата има едно јаболко, во училницата има само еден ученик, во џебот еден денар итн.

Ако во чинијата нема ни едно јаболко, во училницата ни еден ученик, а во џебот ни еден денар, тогаш велиме дека чинијата, училницата и џебот се празни. За такви множества, *кои* немаат ниту еден елемент, ги нарековме празни множества.

Бројот што ни покажува дека *множеството* е празно се вика нула. Затоа можеме да речеме дека во чинијата има нула јаболки, во училницата нула ученици, а во џебот нула денари.

Видовме дека со нулата можеме да сметаме како и со другите броеви. Значи и нулата е број.

Историски гледано нулата не била од секогаш рамноправна со другите цифри. Порано се оставал празен простор за нулата. Но подоцна се согледало дека е корисно да постои посебен симбол за нула.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кој тип на цифри најчесто се користат денес?
2. Дали нулата е број?
3. Кои десет цифри се користат во декадниот броен систем?
4. Кој е најмал природен број?

I.10.2. ЗАКОН НА ПОЗИЦИЈАТА НА ЦИФРИТЕ ВО ДЕКАДНИОТ БРОЕН СИСТЕМ

Нека се напишани овие три броја: 43 605, 64 350 и 35 444.

Цифрата 5 се сретнува во сите три броја. Во првиот број таа ни покажува дека има 5 единици, во вториот дека има 5 десетки, а во третиот дека има 5 илјади. Според тоа, цифрата 5 во тие броеви има различна вредност. Цифрата 3 исто ја сретнуваме во трите броја. Во првиот број цифрата 3 ни го покажува бројот на илјадите, во вториот - бројот на стотките, а во третиот број ни го покажува бројот на десетките илјади.

Да ја погледнеме цифрата 4, што се наоѓа во трите броја, а во третиот број таа се наоѓа на три различни места. Во првиот број цифрата 4 ни ги покажува десетките илјади, во вториот број ни ги покажува илјадите, додека во третиот број цифрата 4 на првото место од десно на лево ни ги покажува простите единици, на второто место десетките, а на третото место стотките во тој број. Според тоа, цифрата 4 во тие броеви, а посебно и само во третиот број, има различна вредност. Различната вредност на една иста цифра што може да ја има во неколку или во еден ист број, доаѓа од нејзината местоположба во тие броеви, т.е. од тоа на кое место се наоѓа во бројот. Затоа нашиот систем покрај тоа што е декаден тој е и позиционен.

Вредноста на цифрата, што таа ја има со својата местоположба во бројот, се вика нејзина **месна вредност**.

Но секоја цифра земена сама за себе ни означува едноцифрен број. Вредноста на цифрата, што ја има кога таа ни означува едноцифрен број, се вика нејзина цифрена или бројна вредност.

Цифрената вредност на секоја цифра е постојана, но месната вредност е онолку пати поголема од цифрената вредност, колку што изнесува декадната единица на чие што место се наоѓа.

Тоа е таканаречениот закон на местоположбата на цифрите.

На пример, во бројот 85705 месната вредност на цифрата 5, кога ни ги покажува илјадите

е илјада пати поголема од нејзината цифрена вредност, т.е. од вредноста кога ни ги покажува простите единици и стои на првото место.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Во бројот 2341 што ни покажува цифрата 3?
2. Што претставува месна вредност на една цифра?
3. Покажи ја месната вредност на цифрите што се повторуваат во броевите: 3083, 4225, 212, 555!
4. Што преставува бројна вредност на една цифра?

I.10.3. РИМСКИ СИСТЕМ НА БРОЕВИТЕ[2]

Римскиот систем на пишување на броевите го употребувале уште старите Римјани, а неговата употреба се задржала и до денес.

За пишувањето на броевите Римјаните употребувале 7 цифри, што ги викаме римски цифри. Тие се:

1 = I, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

При пишувањето на броевите со римски цифри и читањето на запишаните броеви со римски цифри, треба да се придржуваме на следните правила:

1. Цифрите: I, X, C и M можат да стојат една до друга т.е. да се повторуваат најмногу три пати во бројот. Во таков случај вредностите на цифрите се собираат. На пример:

II = 2, III = 3, XX = 20, XXX = 30, CC = 200, CCC = 300, MM = 2000.

Цифрите пак: V, L и D не смеат да се повторуваат, т.е. не можат да се пишуваат една кај друга, а по тоа да се собираат.

2. Ако цифрата со помала вредност стои десно од цифрата со поголема вредност, тогаш вредностите им се собираат. При помалата цифра може да се повтори најмногу три пати. На пример:

VI = 6, VII = 7, VIII = 8, XI = 11, XII = 12,
XIII = 13, XV = 15, XVII = 17, LX = 60, LXXX = 80,
CXX = 120, CL =150, MCCC = 1300.

3. Цифрите: I, X и C можат да се пишуваат пред поголема по вредност цифра само еднаш и при тоа нивната вредност се одзема од вредноста на цифрата пред која се наоѓаат.

[2] За тие што сакаат да знаат повеќе.

На пример:

$$IV = 4,\ IX = 9,\ XL = 40,\ CD = 400,\ XC = 90,\ CM = 900.$$

При тоа треба да се знае дека цифрата I не се пишува пред цифрите: L, C, D и M, туку се пишува само пред цифрите V и X.

Цифрата X не се пишува пред цифрите D и M, туку само пред цифрите L и C. На пример: 99 не се пишува IC, туку се пишува XCIX; 499 не се пишува ID, туку CDXCIX; 950 не се пишува LM, туку CML.

Од неколкуте горни примери можеме да заклучиме дека, ако една цифра се најде помеѓу две цифри со поголеми вредности, тогаш таа при читањето на бројот треба да се поврзе со цифрата што доаѓа по неа.

Така на пример: DXC се чита 590, MXL се чита 1040. Ако ги споредиме римскиот систем на пишување на броевите со декадниот броен систем, ќе забележиме дека:

а) Римските цифри имаат секогаш иста вредност, па било на кое место да се наоѓаат во бројот, тие немаат месна вредност, како што е случај со цифрите во декадниот броен систем.

б) римскиот систем на пишувањето на броевите е доста обемен, особено за поголемите броеви.

в) Со римските броеви се многу тешки писмените сметковни операции, затоа со нив и не вршиме пресметувања.

Ете зошто декадниот систем за пишување, читање и сметање со броевите е многу полесен, по едноставен и поусовршен отколку римскиот систем.

Денес римските цифри ги употребуваме најчесто:

а) при јубилејни датуми;

б) при именувањата на разните конгреси, конференции, собранија и состаноци;

в) при запишувањето на месеците во датумот;

г) при именувањето на одделенијата и класовите во училиштата;

д) при нумерирањето на некои страници, глави и делови во книгите итн.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Напиши ги со римски цифри броевите: 25, 39, 49, 88, 100, 101, 480, 208, 999!
2. Прочитај ги и напиши ги со арапски цифри броевите: DCCCI, CMIX, CCXCI, DLI!
3. Напиши го датумот на твоето раѓање со римски цифри!
4. Датумот на започнување на Илиденското востание е 2 Август 1903 година. Напиши го тој датум со римски цифри!
5. Кои римски цифри не смеат да се повторуваат?

1.11 ОПЕРАЦИИ СО ПРИРОДНИ БРОЕВИ

I.11.1. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

Нека се A и B две конечни множества без заеднички елементи, чиј број на елементи е даден соодветно со природните броеви a и b.

Дефиниција 1

Збирот на природните броеви a и b го викаме природниот број s што го карактеризира бројот на елементите на множеството S - унија на дадените множества A и B и пишуваме:

$$a + b = s.$$

Броевите a и b се викаат *собироци*, а извршената *операција - собирање*.

Бидејќи за кои и да било две конечни множества секогаш постои трето множество - нивна унија, тогаш ќе важи теоремата:

Теорема 1

Збирот на кои и да било два природни броја секогаш е пак природен број, т.е.

$$(a \in \mathbf{N} \text{ и } b \in \mathbf{N}) \Rightarrow (a+b) \in \mathbf{N}.$$

Оваа теорема ја искажуваме уште и вака: *Множеството на природните броеви е затворено во однос на операцијата собирање.*

Забелешка: Збирот на три природни броја a, b и c го дефинираме како збир од збирот на првите два броја и третиот број c, т.е.

$$a + b + c = (a + b) + c.$$

За собирањето на природните броеви важат следниве закони (теореми):

1. Закон за комутативност: *Збирот не зависи од промената на редот на собироците*, т.е.

$$a + b = b + a.$$

Нека се A и B две конечни множества со соодветно a и b елементи за кои претпоставуваме дека немаат заеднички елементи. Тогаш униите $A \cup B$ и $B \cup A$ ќе претпоставуваат две множества, чиј број на елементи соодветно е $a + b$ и $b + a$.

Бидејќи $A \cup B \sim B \cup A$ (дури тие две множества се и идентични $A \cup B = B \cup A$ Зошто?) затоа е и:

$$a + b = b + a.$$

2. Закон за асоцијативност: *Збир се додава кон даден број, кога кон тој број се додаде последователно секој собирок*, т.е. ако a, b и c се три кои и да било природни броеви, секогаш ќе биде:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Доказот на овој закон е сличен на првиот. Предлагаме сами да го изведете.

3. Закон за монотоност: *Ако кон два еднакви (односно нееднакви) природни броја a и b додадеме по еден исти произволен природен број m, ќе добиеме пак еднакви (односно нееднакви) природни броеви*, т.е.

1. $a = b \Rightarrow a + m = b + m$;
2. $a > b \Rightarrow a + m > b + m$;
3. $a < b \Rightarrow a + m < b + m$.

Ќе го докажеме само својството 2. Бидејќи е $a > b$, јасно е дека во низата на природните броеви a следува по бројот b, тогаш можеме да напишеме дека $a = b + k$, каде што k е некој природен број. Тогаш ќе имаме:

$$a + m = (b + k) + m,$$

а со примената на законот за асоцијативност и комутативност, добиваме:

$$a + m = b + (k + m) = (b + m) + k.$$

Одовде следува дека:

$$a + m > b + m.$$

Забелешка: Врз основа на горните закони можат да се докажат и следниве својства:

1. $(a = b \text{ и } c = d) \Rightarrow a + c = b + d$;
2. $(a > b \text{ и } c > d) \Rightarrow a + c > b + d$;
3. $(a < b \text{ и } c < d) \Rightarrow a + c < b + d$.

Врз основа на законот за монотоност имаме $a + c = b + c$; $c + b = d + b$, а од нив, согласно својството за комутативност, следува:

$$a + c = b + c = c + b = b + d, \text{ односно } a + c = b + d.$$

Својствата 2 и 3 покажете ги сами!

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е збир на два природни броеви?
2. Како гласи законот за комутативност?
3. Како гласи законот за асоцијативност?
4. Како гласи законот за монотоност?

I.11.2. ОДЗЕМАЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Операцијата одземање ја дефинираме како *обратна операција* на собирањето.

Дефиниција 2

Да одземеме од еден природен број *a* друг даден природен број *b*, значи да најдеме таков трет природен број *x*, кој собран со бројот *b* да го даде бројот *a*; тоа симболички го означуваме:

$$a - b = x; \text{ ако е } b + x = a.$$

Пример: 8 – 5 = 3, бидејќи е 5 + 3 = 8.

Бројот *a* се вика *намаленик*, бројот *b намалител*, а бараниот број - *разлика* на бројот *a* со бројот *b*.

Се поставува прашањето, дали за секои два природни броја *a* и *b* постои разлика *a* – *b* и ако постои, дали таа е еднозначно определена.

Имајќи предвид дека намалителот + разликата = намаленикот, како и тоа дека збирот на два природни броја е секогаш поголем од секој собирок, заклучуваме дека за да постои разликата *a* – *b* неопходно е да биде *a* > *b*. Освен тоа, ако *a* > *b* разликата *a* – *b* постои и таа е единствена. Значи, важи следното тврдење.

Разликата a – b на природните броеви a и b постои и е еднозначно определена само кога намаленикот е поголем од намалителот, т.е. ако е *a* > *b*.

Ако е пак $a \le b$, разликата $a - b$ не постои, т.е. нема природен број *x*, за кој ќе биде $b + x = a$.

Ако е $a = b$, разликата $a - b$ е еднаква на 0, т.е. $a - b = 0$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што преставува операцијата одземање?
2. Во равенството: 21 – 4 = 17, кој број преставува намаленик, кој намалител, а кој разлика?
3. Да се најде разликата на броевите:
   а) 24 572 064 и 15 391 127;
   б) 134 904 и 27 075.
4. Дали е точен исказот: намаленик + намалител = разлика?

I.11.3. МНОЖЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Нека се дадени b конечни множества M_1, M_2, M_3, ... M_b, кои немаат заеднички елементи, а бројот на елементите на секое од нив да е еднаков на a.

Ако образуваме ново множество - унија на дадените множества M_1, M_2, M_3, ... M_b, тогаш бројот на елементите на тоа множество ќе биде еднаков на збирот:

$$\underbrace{a+a+a+.....+a}_{b\text{ собироци}}.$$

кој е некој природен број p. Така определениот природен број p го викаме *производ* на природните броеви a и b и го означуваме со ab.

Дефиниција 3

Производ на природните броеви a и $b \neq 1$ е збирот на b собироци, од кои секој е еднаков на a и симболички го означуваме вака:

$$a \cdot b = \underbrace{a+a+a+.....+a}_{b\text{ собироци}}.$$

Бројот a го викаме *множеник*, бројот b - *множител*, а самата операција - *множење*.

Во специјален случај кога $b = 1$ важи:

Производот на даден број a и бројот 1 е самиот број a, т.е.

$$a \cdot 1 = a.$$

Бидејќи производот $a \cdot b$ е збир на b собироци сите еднакви на бројот a, а збирот секогаш постои и е еднозначно определен затоа ќе важи:

Производот на кои и да било два природни броја секогаш е пак природен број, т.е.

$$(a \in \mathbf{N} \text{ и } b \in \mathbf{N}) \Rightarrow (a \cdot b) \in \mathbf{N}.$$

Значи: *Множеството на природните броеви е затворено во однос на операцијата множење.*

Производот на три природни броја a, b и c го дефинираме како производ од производот на првите два броја a и b и третиот број c, т.е.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c.$$

За множењето на природните броеви важат следните закони (теореми):

1. Закон за комутативност: *Производот не се менува ако множеникот и множителот ги променат своите места и улоги*, т.е.

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ете зошто множеникот и множителот со заедничко име се викаат уште и *множители.* Ова наоѓа оправдување и затоа што во производот можат да учествуваат и повеќе од два броја.

Точноста на овој закон ќе ја земеме како очигледна.

2. Закон за дистрибутивност: *Збир се множи со природен број, кога секој собирок се помножи со тој број и добиените производи потоа се собираат* т.е. за три произволни природни броја a, b и c, секогаш ќе биде:

$$(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$$

Навистина, врз основа на асоцијативниот и комутативниот закон на збирот, имаме:

$$(a+b)\cdot c = \underbrace{(a+b)+(a+b)+....+(a+b)}_{c\text{ собироци}} = \underbrace{(a+a+a+.....+a)}_{c\text{ собироци}} + \underbrace{(b+b+b+.....+b)}_{c\text{ собироци}} = a\cdot c + b\cdot c.$$

3. Закон за асоцијативност: *Производ се множи со даден природен број, кога со тој број се помножи само еден од множителите на производот, а потоа добиениот резултат се помножи со другиот множител*, т.е. a, b и c се кои и да било три природни броја, секогаш ќе биде:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \text{ или } (a\cdot b)\cdot c = (a\cdot c)\cdot b.$$

Навистина, согласно дистрибутивниот закон, имаме:

$$(a\cdot b)\cdot c = \underbrace{a\cdot b + a\cdot b + ...+ a\cdot b}_{c\text{ собироци}} = a\cdot\underbrace{(b+b+....+b)}_{c\text{ собироци}} = a\cdot(b\cdot c).$$

4. Закон за монотоност: *Ако два еднакви (односно нееднакви) природни броја a и b ги помножиме со еден ист природен број, ќе добиеме пак еднакви (односно нееднакви) природни броја*, т.е.

а) $a = b \Rightarrow a\cdot m = b\cdot m$;

б) $a > b \Rightarrow a\cdot m > b\cdot m$;

в) $a < b \Rightarrow a\cdot m < b\cdot m$.

Ќе го докажеме својството под б). Бидејќи е $a > b$, тогаш $a = b + k$, каде што k е некој природен број. Во таков случај:

$$a\cdot m = (b + k)\cdot m, \text{ односно } a\cdot m = b\cdot m + k\cdot m,$$

од каде следува дека:

$$a\cdot m > b\cdot m.$$

Другите случаи под а) и в) докажете ги сами!

Забелешки: Врз основа на горните закони можат да се докажат и следниве својства на релациите за еднаквост и нееднаквост:

4. $(a = b \text{ и } c = d) \Rightarrow a\cdot c = b\cdot d$;
5. $(a > b \text{ и } c > d) \Rightarrow a\cdot c > b\cdot d$;
6. $(a < b \text{ и } c < d) \Rightarrow a\cdot c < b\cdot d$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е производ на два природни броја? Дали производот е пак природен број?
2. Како гласи законот за комутативност? Дали броевите $k_1 = c \cdot d$ и $k_2 = d \cdot c$ се исти?
3. Како гласи законот за дистрибутивност? Дали равенството $(a+b)\cdot 5 = 5a - 5b$ е точно?
4. Како гласи законот за асоцијативност? Провери дали броевите $a = 5\cdot(3\cdot 6)$ и $b = (5\cdot 3)\cdot 6$ се исти?
5. Како гласи законот за монотоност? Ако $a = b$ во кои случај важи равенството $a \cdot m = b \cdot n$?

I.11.4. СТЕПЕН НА БРОЈ

Познато е дека збирот на еднакви собироци во множеството на природните броеви кратко го запишуваме во вид на производ:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{(n\text{ собироци})} = n\cdot a,\ \ (n\in \mathbf{N}).$$

На пример:

а) $7+7+7+7+7 = 5\cdot 7 = 35$;

б) $4+4+4+4 = 4\cdot 4 = 16$.

Слично на тоа и производот на еднакви множители усвоено е (по договор) да се запишува кратко со посебен израз наречен **степен.** Поимот степен го воведуваме со следнава дефиниција:

Дефиниција 1

За било кој број a и било кој природен број n имаме:

$$a^1 = a$$

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(n\text{ собироци})} = a^n\ \ (n\in \mathbf{N}).$$

На пример:

а) производот $3\cdot3\cdot3\cdot3$ кратко симболички го запишуваме со 3^4;

б) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5$;

в) $9\cdot9\cdot9=9^3$.

Според тоа, изразите 3^4, 2^5 и 9^3 ќе ги викаме степен на броеви 3, 2 и 9.

Бројот a се вика **основа** на степенот, а n е **показател** на степенот a^n т.е.

$$a^n = \text{основа на степенот}^{\text{показател на степенот}}.$$

Вредноста пак на производот $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ се вика **вредност** на степенот a^n. Степенот a^n го читаме: „a на n-ти степен“.

Пресметај ја вредноста на степенот: а) 2^4; б) 5^3.

Во специјален случај, ако основата на степенот е единица, тогаш вредноста на степенот е еднаква на единица.

На пример: $1^3=1$, бидејќи $1^3=1\cdot1\cdot1=1$; $1^4=1\cdot1\cdot1\cdot1=1$, итн.

Пресметај ја вредноста на степенот:

а) 2^4 и 2^5; б) 5^3 и 5^2; в) 3^4 и 3^3; г) 1^3 и 1^6.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Запиши ги најкратко следниве изрази:

а) $7+7+7+7$ и $7\cdot7\cdot7\cdot7$; б) $b+b+b$ и $b\cdot b\cdot b$; в) $a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a+c\cdot c\cdot c$.

2 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) a^2+b^3 за $a=2$ и $b=3$; б) a^3-a за $a=3$.

3 Дали се еднакви броевите: а) 4^2 и 2^4; б) 3^2 и 2^3; в) 1^2 и 2^1?

4 Најди ја вредноста на степенот x^4, ако $x\in\{0, 1, 2, 3\}$.

5 Провери дали е правилно пополнета табелата:

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
x^3	0	1	8	27	64	125

6 Провери ја точноста на равенството:

а) $3^2=2^3+1^2$; б) $3^2+2^3=4^2$; в) $4^3+6^2=10^2$; г) $8^2-2^6=1^3$.

I.11.5. ДЕЛЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Операцијата делење ја дефинираме како *обратна операција* на множењето, а имено:

Дефиниција 5

Да се подели даден природен број *a* со друг природен број *b*, значи да се најде таков трет природен број *x*, којшто помножен со бројот *b* ќе го даде бројот *a*; кое симболички го означуваме:

$$a : b = x \text{ или } a / b = x, \text{ ако е } b \cdot x = a.$$

Пример: 21: 3 = 7, бидејќи $3 \cdot 7 = 21$.

Бројот *a* се вика *деленик*, бројот *b делител*, а бараниот број *x* - *количник* или *однос* на броевите *a* и *b*.

Од самата дефиниција на делењето, следува дека:

Деленикот е производ на делителот и количникот.

Како и кај операцијата одземање и овде се поставува прашањето: дали секогаш постои количник на кои и да било два природни броја *a* и *b* и ако постои, дали тој е еднозначно определен?

Од горното својство непосредно следува дека количникот на два природни броја ќе постои само ако деленикот е добиен со множење на делителот и некој друг природен број.

Пример: Природните броеви 28 и 7 имаат количник, бројот 4, т.е. 28 : 7 = 4, бидејќи $4 \cdot 7 = 28$.

Ќе покажеме дека има природни броеви кои немаат количник, на пример броевите *a* = 7 и *b* = 3. Ако постои природен број 7 / 3 = *x*, тогаш треба да е $3 \cdot x = 7$. Бидејќи $3 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$; $3 \cdot 3 = 9$, заклучуваме дека не постои природен број кој помножен со 3 да дава 7.

Може да се докаже и во општ случај теоремата:

Теорема 1

Количникот на кои и да било два природни броја не постои секогаш, но ако постои, тој е еднозначно определен.

Ако за природните броеви *a* и *b* постои количник природен број *q*, така што $a : b = q$, велиме дека природниот број *a се дели* со природниот број *b*. Ако таков природен број *q* не постои тогаш велиме дека бројот *a не се дели* со *b*.

Кога природниот број *a* не се дели со *b*, тогаш се воведува таканаречено *делење со остаток*. Тоа се сведува на изнаоѓањето таков најголем природен број, кој помножен со делителот да дава број што не е поголем од деленикот. Бараниот природен број се вика

неполн количник, а разликата помеѓу делениот и производот од делителот и неполниот количник се вика *остаток*. Остатокот е секогаш помал од делителот.

Пример: 23 : 7 = 3 и остаток 2, каде што 2 < 3. Може да се докаже во општ случај теоремата:

Теорема 2

Ако a и b се два природни броја, при што a ($a > b$) не се дели со b, тогаш постои единствен пар природни броеви q и r, за кои ќе биде:

$$a = b \cdot q + r \quad \text{и} \quad r < b,$$

каде што q е неполн количник на броевите a и b, а r - остаток.

Операцијата делење ги има следниве поважни својства:

Од дефиницијата на операцијата делење, следува следнава теорема:

Теорема 3

Производот од количникот и делителот е еднаков на делениот, т.е.

$$\frac{a}{b} = q \Rightarrow (q \cdot b = a \text{ или } a\ \frac{a}{b} \cdot b = a).$$

Така, на пример ако имаме $\frac{27}{9} = 3$ тогаш $3 \cdot 9 = 27$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што претставува количник на два броја? Како може да го запишеме количникот на броевите c и d?
2. Во изразот $k / r = v$ кој број претставува деленик, кој делител, а кој количник? Дали количникот ќе се промени ако делениот и делителот си ги заменат местата?
3. Најди ги количниците: а) 24 / 8; б) 450 : 10; в) 3 485 : 5;
4. Дали секогаш количникот на два природни броја е природен број? Дали 9 круши може да им ги разделиме на 4 деца, така што секој од нив да добие ист број на круши?
5. Колкав остаток ќе добиеме ако го поделиме бројот 34 со 8?
6. Дали е точно равенството: количник · деленик = делител?

I.12. ЗАВИСНОСТ НА ЗБИРОТ ОД ПРОМЕНАТА НА СОБИРОЦИТЕ

1. Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Јован имал во десниот џеб 4 ореви, а во левиот 5 ореви. Павле му дал уште 2 ореви, а тие Јован ги ставил во десниот џеб. Колку ореви имал Јован во почетокот, а колку потоа?

Во почетокот Јован имал:

$$4 + 5 = 9 \text{ (ореви)},$$

а потоа, кога 2-та ореви од Павле ги ставил во десниот џеб, тој имал:

$$(4 + 2) + 5 = 6 + 5 = 11 \text{ (ореви)}.$$

Тука едниот собирок го зголемивме за 2 единици, а со тоа, како што гледаме и збирот се зголемува за исто толку единици. Според тоа:

Ако еден собирок го зголемиме за неколку единици, а другите собироци останат исти, тогаш и збирот се зголемува за исто толку единици.

Ако собироците ги обележиме со буквите a и b, а збирот со c, т.е. ако е:

$$a + b = c,$$

тогаш горното правило можеме да го запишеме вака:

$$(a + m) + b = c + m.$$

2. Да видиме сега што ќе стане со збирот, ако еден, кој и да било собирок, го намалиме за неколку единици.

Пример 2. Јане имал во десниот џеб 3 костени, а во левиот 5 костени. Тој на сестра му ѝ дал 4 костени од левиот џеб. Колку костени имал Јане во почетокот, а колку потоа?

Во почетокот Јане имал:

$$3 + 5 = 8 \text{ (костени)},$$

а потоа, кога од левиот џеб ѝ дал на сестра му 4 костени, тој имал:

$$3 + (5 - 4) = 3 + 1 = 4 \text{ (костени)},$$

т.е. ќе има 4 ореви помалку отколку во почетокот. Оттука заклучуваме:

Ако еден собирок го намалиме за неколку единици, а другите собироци останат непроменети, тогаш и збирот се намалува за исто толку единици.

Тој заклучок во општ вид го запишуваме:

Ако

$$a + b = c,$$

тогаш:

$$(a - m) + b = c - m.$$

Пример 3. Бојан имал во десниот џеб 3 лешници, а во левиот 7 лешници. Потоа тој зел 3 лешници од левиот џеб и нив ги ставил во десниот џеб. Колку лешници имал Јован во почетокот, а колку потоа?

Во почетокот Јован имал:

$$3 + 7 = 10 \text{ (лешници)},$$

а по преместувањето на 3-те лешници од левиот во десниот џеб тој ќе има:

$$(3 + 3) + (7 - 3) = 6 + 4 = 10 \text{ (лешници)}.$$

Како што гледаме, вкупниот број лешници по извршеното пресметување останал непроменет. Од тоа заклучуваме:

Ако еден собирок го зголемиме за неколку единици, а другиот собирок го намалиме за исто толку единици, збирот не се менува.

Овој заклучок во општ вид го запишуваме: Ако е

$$a + b = c,$$

тогаш имаме:

$$(a + m) + (b - m) = c.$$

Познавањето на овие три основни зависности на збирот од промената на собироците ни овозможува решавање и на покомплицирани задачи, како што е, на пример, следнава:

Задача: На една железничка станица се наоѓале 4 вагони со вкупен товар 38 485 kg. Од првиот вагон истоварале 642 kg, од вториот во третиот вагон префрлиле 427 kg, а во четвртиот вагон утоварале нова стока 1206 kg. Колкав е вкупниот товар во 4-те вагони по извршените промени?

Забележуваме дека бројот 38 485 е збир на непознатите товари на одделните 4 вагони. Истоварувањето на 642 kg од првиот вагон повлекува намалување на општиот збир за тој број. Префрлувањето на 427 kg од вториот во третиот вагон не го менува збирот; а утоварувањето на 1206 kg четвртиот вагон, го зголемува општиот збир за толку.

Задачата ќе ја решиме кога збирот 38 485 прво ќе го намалиме за 642, а потоа го зголемиме за 1206, т.е.

$$38\,485 - 642 = 37\,843 \text{ и потоа } 37\,843 + 1206 = 39\,049.$$

Бидејќи зголемувањето е поголемо од намалувањето, тогаш крајниот товар ќе биде поголем од почетниот за онолку, колку што изнесува разликата на зголемувањето и намалувањето, т.е. $1206 - 642 = 564$.

Според тоа, вкупниот товар по извршените промени ќе се зголеми за 564 kg, што значи дека тој ќе изнесува сега:

$$38\,485 + (1206 - 642) = 38\,485 + 564 = 39\,049.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Збирот на два броја е 250, на пример 150 + 100 = 250. Колкав ќе стане збирот, ако едниот собирок: а) го зголемиме за 30 единици; б) го намалиме за 40 единици, а другиот собирок го оставиме ист?

2 Збирот на два броја е 400. Колкав ќе стане збирот, ако: а) едниот собирок го зголемиме за 20, а другиот собирок го зголемиме за 80; б) едниот собирок го намалиме за 40, а другиот собирок го намалиме за 30! Покажи го тоа на збирот 180 + 220 = 400!

3 Што ќе стане со збирот 300 + 200 = 500, ако: а) едниот собирок го зголемиме за 60, а другиот го намалиме за 20; б) едниот собирок го намалиме за 80, а другиот го зголемиме за 50; в) едниот собирок го зголемиме за 75, а другиот го намалиме за исто толку единици?

4 Што ќе стане со збирот на два броја, ако кон едниот додадеме 42, а кон другиот додадеме 28?

5 Што ќе стане со збирот на два броја, ако кон едниот додадеме 56, а од другиот одземеме 34?

6 Што ќе стане со збирот на три броја, ако кон првиот и вториот додадеме по 24, а од третиот одземеме 100?

7 Пресметај го усно збирот: а) 995 + 247; б) 1504 + 796; в) 498 + 302; г) 777 + 999; д) 2023 + 807!

8 Збирот на два броја треба да се зголеми за 1 000. Што треба да направиме со едниот собирок: а) ако кон другиот собирок додадеме 350; б) ако од другиот собирок одземеме 125?

9 Едниот од двата собироци е зголемен за 40. Што треба да се стори со другиот собирок, така што збирот: а) да не се промени; б) да се зголеми за 15; в) да се намали за 10?

10 Едниот од двата собироци е намален за 25. Што треба да се направи со другиот собирок, така што збирот: а) да не се промени; б) да се зголеми за 10; в) да се намали за 8?

11 Во едно училиште имало 150 стари и 200 нови клупи. Од старите клупи 35 биле заменети со нови. Колку вкупно клупи имало училиштето порано, а колку има сега?

12 Претпријатието „Огрев“ требало да му достави на едно училиште 380 m^3 букови и дабови дрва. Но букови дрва се доставени за 62 m^3 повеќе, а дабови за 45 m^3 помалку. Колку вкупно дрва добило училиштето?

I.13. ЗАВИСНОСТ НА РАЗЛИКАТА ОД ПРОМЕНА НА НАМАЛЕНИКОТ И НАМАЛИТЕЛОТ

1. Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Андреј се наоѓа на 12-то скалило, а Дијана на 7-то скалило броени одоздола на една висока скала. Потоа Андреј се искачил уште за 4 скалила погоре по скалата. За колку скалила повисоко се наоѓал Андреј од Дијана во почетокот, а за колку потоа?

Во почетокот Андреј се наоѓал повисоко од Дијана за:

$$12 - 7 = 5 \text{ (скалила)},$$

а по покачувањето на Андреј за 4 скалила погоре, тој ќе биде повисоко од Дијана за:

$$(12 + 4) - 7 = 16 - 7 = 9 \text{ (скалила)}.$$

Тука намаленикот го зголемивме за 4 единици, а со тоа, како што гледаме и разликата се зголемува за исто толку единици. Според тоа:

Ако намаленикот го зголемиме за неколку единици, а намалителот остане непроменет, тогаш и разликата се зголемува за исто толку единици.

Тој заклучок во општ вид го запишуваме: Ако е

$$a - b = c,$$

тогаш:

$$(a + m) - b = c + m.$$

Пример 2. Иво се наоѓа на 12-то скалило, а Ирина на 7-то скалило. Потоа Иво слегува за 4 скалила подолу, а Ирина останува на истото место на скалата. За колку скалила повисоко се наоѓал Иво од Ирина во почетокот, а за колку потоа?

Во почетокот Иво се наоѓал повисоко од Ирина за:

$$12 - 7 = 5 \text{ (скалила)},$$

а потоа, кога тој се спуштил за 4 скалила подолу, тој ќе биде повисоко од неа за:

$$(12 - 4) - 7 = 8 - 7 = 1 \text{ (скалило)},$$

т.е. за 4 скалила помалку отколку во почетокот. Оттука заклучуваме:

Ако намаленикот го намалиме за неколку единици, а намалителот остане ист, тогаш и разликата се намалува за исто толку единици.

Тој заклучок во општ вид го запишуваме: Кога е

$$a - b = c,$$

тогаш:

$$(a - m) - b = c - m.$$

2. Да видиме сега како зависи разликата од промената на намалителот.

Пример 3. Петар се наоѓа на 12-то скалило, а Марија на 7-то скалило. Потоа Марија се

качува за 3 скалила погоре, а Петар останува на истото место на скалата. За колку скалила пониско се наоѓала Марија од Петар во почетокот, а за колку потоа?

Во почетокот Марија се наоѓала пониско од Петар за:

$$12 - 7 = 5 \text{ (скалила)},$$

потоа, кога таа се качила за 3 скалила погоре, ќе биде пониско од Петар за:

$$12 - (7 + 3) = 12 - 10 = 2 \text{ (скалила)}.$$

Тука намалителот го зголемивме за 3 единици, а со тоа, како што гледаме, разликата се намалила за исто толку единици. Според тоа:

Ако намалителот го зголемиме за неколку единици, а намаленикот го оставиме непроменет, тогаш разликата се намалува за исто толку единици.

Овој заклучок во општ вид го запишуваме: Ако

$$a - b = c,$$

тогаш:

$$a - (b + m) = c - m.$$

Пример 4. Марко се наоѓа на 12-то скалило, а Данче на 7-то скалило. Ако Данче слегла за 3 скалила подолу, а Марко остане на истото место на скалата, за колку скалила пониско ќе се наоѓа Данче од Марко во почетокот, а за колку потоа?

Во почетокот Данче се наоѓала пониско од Марко за:

$$12 - 7 = 5 \text{ (скалила)},$$

а потоа, кога таа се спуштила за 3 скалила подолу, ќе биде пониско од Марко за:

$$12 - (7 - 3) = 12 - 4 = 8 \text{ (скалила)},$$

т.е. разликата помеѓу нив ќе се зголеми за онолку скалила, колку што Данче се симнала подолу. Оттука доаѓаме до заклучок:

Ако намалителот го намалиме за неколку единици, а намаленикот остане непроменет, тогаш разликата се зголемува за исто толку единици.

Тој заклучок во општ вид го запишуваме: Ако

$$a - b = c,$$

тогаш:

$$a - (b - m) = c + m.$$

3. Да видиме сега што ќе стане со разликата, ако истовремено и намаленикот и намалителот ги зголемиме или намалиме за еден ист број.

Пример 5. Бојана има 14 год, а нејзиниот брат Аце има 10 год. Колку години е Бојана постара од Аце сега, а колку ќе биде постара од него по 6 години?

Бојана е сега постара од Аце за:

$$14 - 10 = 4 \text{ (години)}.$$

По 6 години таа ќе има 14 + 6 = 20 (години), а брат и Аце ќе има 10 + 6 = 16 (години). Значи, и по 6 години таа ќе биде исто така за 4 години постара од Аце. Тоа го запишуваме:

$$(14 + 6) – (10 + 6) = 20 – 16 = 4 \text{ (години)}.$$

Од ова заклучуваме дека:

Ако кон намаленикот и намалителот додадеме еден ист број, разликата не се променува.

Ова својство на разликата во општ вид го запишуваме: Ако

$$a – b = c,$$

тогаш:

$$(a + m) – (b + m) = c.$$

Пример 6. Во едно буре има 15 *l* оцет, а во друго буре 10 *l*. Колку литри оцет има повеќе сега во првото буре отколку во второто, а колку ќе има повеќе откако од секое буре извадиме по 3 *l* оцет.

Во првото буре сега има повеќе оцет отколку во второто:

$$15 – 10 = 5 \text{ (литри оцет)}.$$

Ако од секое буре извадиме по 3 *l* оцет, во првото буре ќе остане 15 – 3 = 12 (литри), а во второто 10 – 3 = 7 (литри). Но, при тоа забележуваме дека во првото буре ќе има пак 5 *l* оцет повеќе отколку во второто. Тоа го запишуваме вака:

$$(15 – 3) – (10 – 3) = 12 – 7 = 5 \text{ (литри оцет)}.$$

Затоа заклучуваме дека:

Ако од намаленикот и намалителот извадиме еден ист број, разликата не се променува.

Тоа својство на разликата во општ вид го запишуваме: Ако

$$a – b = c,$$

тогаш:

$$(a – m) – (b – m) = c.$$

Познавањето на горните основни зависности на разликата од промената на намаленикот и намалителот ни овозможува решавање и на посложени задачи од тој вид.

Тие наоѓаат често примена и кај усното одземање. На пример:

а) 396 – 130 = (400 – 130) – 4 =270 – 4 = 266;

б) 605 – 470 = (600 – 470) + 5 = 130 + 5 = 135;

в) 3483 – 997 = (3483 – 1000) + 3 = 2483 + 3 = 2486;

г) 792 – 302 = (792 – 300) – 2 = 492 – 2 = 490;

д) 457 – 237 = (457 + 3) – (237 + 3) = 460 – 240 = 220;

ѓ) 984 – 584 = (984 – 84) – (584 – 84) = 900 – 500 = 400.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Пресметај ги разликите:

а) $150 - 80 = 70$
$160 - 80 =$
$170 - 80 =$
$180 - 80 =$
$200 - 80 =$

б) $150 - 80 = 70$
$140 - 80 =$
$130 - 80 =$
$125 - 80 =$
$110 - 80 =$

Што забележуваш? Како се променува разликата кога намаленикот: а) го зголемуваме; б) го намалуваме за неколку единици?

2 Разликата меѓу два броја е 100, на пример $320 - 220 = 100$. Што ќе стане со неа, ако намаленикот: а) го зголемиме за 40 единици; б) го намалиме за 30 единици, а намалителот го оставиме непроменет?

3 Пресметај ги разликите:

а) $300 - 180 = 120$
$300 - 200 =$
$300 - 210 =$
$300 - 240 =$
$300 - 250 =$

б) $300 - 180 = 120$
$300 - 160 =$
$300 - 130 =$
$300 - 100 =$
$300 - 90 =$

Што забележуваш? Како се променува разликата кога намалитетот: а) го зголемуваме; б) намалуваме за неколку единици?

4 Разликата на два броја е 80, на пример $250 - 170 = 80$. Што ќе стане со неа, ако намалителот: а) го зголемиме за 30 единици; б) го намалиме за 20 единици, а намаленикот го оставиме неизменет?

5 Што ќе стане со разликата $280 - 230 = 50$, ако: а) намаленикот го зголемиме за 60, а намалителот го намалиме за 40; б) намаленикот го намалиме за 20, а намалителот го зголемиме за 8 единици?

6 Разликата на два броја е 130. Колкава ќе стане таа, ако: а) намаленикот го зголемиме за 70, а намалителот го зголемиме за 50; б) намаленикот го зголемиме за 60, а намалителот го зголемиме за 90; в) намаленикот го намалиме за 80, а намалителот го намалиме за 55; г) намаленикот го намалиме за 30, а намалителот го намалиме за 75?

7 Што ќе стане со разликата $80 - 50 = 30$, ако и намаленикот и намалителот: а) ги зголемиме за 40 единици; б) ги намалиме за 10 единици?

8 Пресметај ги усно разликите со заокружување на намаленикот или намалителот: а) 497 –240; б) 728 – 98; в) 856 – 304; г) 1000 – 607; д) 796 – 342; ѓ) 2085 – 890!

7 Што ќе стане со разликата 80 – 50 = 30, ако и намаленикот и намалителот: а) ги зголемиме за 40 единици; б) ги намалиме за 10 единици?

8 Пресметај ги усно разликите со заокружување на намаленикот или намалителот: а) 497 –240; б) 728 – 98; в) 856 – 304; г) 1000 – 607; д) 796 – 342; ѓ) 2085 – 890!

9 Ако намаленикот го зголемиме за 27, што треба да направиме со намалителот, така што разликата да остане неизменета?

10 Ако намалителот го намалиме за 20, што треба да направиме со намаленикот, така што разликата: а) да се зголеми за 30; б) да се намали за 10?

11 Ако намалителот го зголемиме за 50, што треба да направиме со намаленикот, така што разликата: а) да се зголеми за 20; б) да се намали за 30?

12 Напиши како можеш разликата 84 – 57 да ја: а) зголемиш; б) намалиш за 20 единици со менување само на намаленикот или само на намалителот!

13 Таткото има 40 години, а синот 15 години. Каква е разликата меѓу нивните години: а) сега; б) каква била пред 8 години; в) каква ќе биде по 6 години?

I.14. ЗАВИСНОСТ НА ПРОИЗВОДОТ ОД ПРОМЕНАТА НА МНОЖИТЕЛИТЕ

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Што ќе стане со производот на броевите 20 и 7, ако првиот број го зголемиме 4 пати, а другиот го оставиме ист?

Производот на дадените броеви изнесува:

$$20 \cdot 7 = 140.$$

Ако множителот 20 го зголемиме 4 пати, тој ќе стане: $20 \cdot 4 = 80$, тогаш и производот ќе се промени и ќе биде:

$$(20 \cdot 4) \cdot 7 = 80 \cdot 7 = 560.$$

Ако ги споредиме тие производи, ќе видиме дека вториот производ (560) е 4 пати поголем од првиот производ (140). Тоа значи дека со зголемувањето на едниот множител 4 пати се зголемил и производот 4 пати.

Пример 2. Ако во производот $15 \cdot 8 = 120$ вториот множител го зголемиме 5 пати, ќе добиеме:

$$15 \cdot (8 \cdot 5) = 15 \cdot 40 = 600.$$

Забележуваме дека и производот се зголемил 5 пати. Според тоа:

Ако еден од множителите го зголемиме неколку пати, а другите множители останат непроменети, тогаш и производот се зголемува исто толку пати.

Во општ вид тој заклучок го запишуваме:

Ако

$$a \cdot b = c,$$

тогаш имаме:

$$(a \cdot m) \cdot b = c \cdot m.$$

Пример 3. Како ќе се промени производот на броевите 24 и 5, ако првиот множител го намалиме 3 пати, а вториот остане ист?

Производот на дадените броеви изнесува:

$$24 \cdot 5 = 120.$$

Ако множителот 24 го намалиме 3 пати, тој ќе стане: $24 : 3 = 8$. Тогаш и производот ќе се промени и ќе стане:

$$(24 : 3) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Ако го споредиме променетиот производ (40) со првиот производ (120), забележуваме дека тој се намалил 3 пати.

Значи, со намалувањето на едниот множител 3 пати и производот ќе се намали 3 пати.

Пример 4. Ако во производот: $8 \cdot 30 = 240$ вториот множител го намалиме 10 пати, ќе добиеме:

$$8 \cdot (30 : 10) = 8 \cdot 3 = 24.$$

Гледаме дека и производот се намалил 10 пати, значи:

Ако еден од множителите се намали неколку пати, а другите множители останат неизменети, тогаш и производот се намалува исто толку пати.

Запишано во општ вид ќе гласи:

Ако

$$a \cdot b = c,$$

тогаш:

$$(a : m) \cdot b = c : m.$$

Пример 5. Што ќе стане со производот на броевите 40 и 5, ако првиот множител го намалиме 10 пати, а вториот го зголемиме 10 пати?

Производот на дадените броеви изнесува:

$$40 \cdot 5 = 200.$$

Ако едниот множител го намалиме 10 пати, а другиот го зголемиме 10 пати, ќе добиеме:

$$(40 : 10) \cdot (5 \cdot 10) = 4 \cdot 50 = 200.$$

Како што гледаме, производот останува ист.

Според тоа:

Ако еден од множителите го зголемиме неколку пати, а другиот множител го намалиме исто толку пати, производот не се менува.

Во општ вид тој заклучок го запишуваме:

Ако

$$a \cdot b = c,$$

тогаш:

$$(a \cdot m) \cdot (b : m) = c.$$

Ова својство на производот често го користиме при усното множење со броевите 5, 25 и 125. На пример:

а) $68 \cdot 5 = (68 : 2) \cdot (5 \cdot 2) = 34 \cdot 10 = 340$;

б) $32 \cdot 25 = (32 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = 8 \cdot 100 = 800$;

в) $48 \cdot 125 = (48 : 8) \cdot (125 \cdot 8) = 6 \cdot 1000 = 6000$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Производот на два броја е 30, на пример $5 \cdot 6 = 30$. Колкав ќе стане производот, ако едниот од множителите:
а) го зголемиме 2 пати?
б) го намалиме 3 пати?

2 Пресметај ги производите:

а)		б)	
$2 \cdot 5 =$	10	$36 \cdot 4 =$	144
$4 \cdot 5 =$		$18 \cdot 4 =$	
$6 \cdot 5 =$		$12 \cdot 4 =$	
$10 \cdot 5 =$		$9 \cdot 4 =$	
$14 \cdot 5 =$		$6 \cdot 4 =$	

Што забележуваш? Како се менува производот кога едниот множител:
а) го зголемиме 2, 3, 4, 5... пати?
б) го намалиме 2, 3, 4, 11 ... пати?

3 Производот на два броја е 120. Колкав ќе стане тој, ако:
а) едниот множител го зголемиме 3 пати, а другиот го зголемиме 5 пати?
б) едниот множител го намалиме 4 пати, а другиот го намалиме 2 пати?
Покажи го тоа на производот $12 \cdot 10 = 120$!

4 Што ќе стане со производот на два броја, ако:
а) едниот множител го зголемиме 6 пати, а другиот го намалиме 2 пати;
б) едниот множител го намалиме 6 пати, а другиот го зголемиме 3 пати;
в) едниот множител го зголемиме 20 пати, а другиот го намалиме 4 пати?
Покажи го тоа на еден пример!

5 Провери и објасни го равенството: $24 \cdot 25 = (24 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = 6 \cdot 100 = 600$. Користејќи го тоа својство, пресметај ги следниве производи:

а) $18 \cdot 5$; б) $30 \cdot 26$; в) $35 \cdot 12$; г) $25 \cdot 14$; д) $125 \cdot 32$.

6 Пресметај ги производите:
а) 28·5; б) 386·5; в) 32·50; г) 246·50; д) 76·500; ѓ) 354·500.

7 Изврши усно множење кај:
а) 320·5; б) 286·5; в) 84·25; г) 88·125; д) 160·125.

8 Производот на два броја треба да се зголеми 10 пати. Што треба да направиме со едниот број, ако другиот сме го зголемиле 5 пати?

9 Производот на два броја е 325. Каков ќе биде производот, ако двата броја ги намалиме 5 пати?

10 Множеникот е еднаков на 35. За колку единици ќе се намали производот, ако множителот го намалиме за 4 единици?

11 Должината на еден правоаголник е зголемена 2 пати, а ширината е намалена 2 пати. Што ќе стане со површината на тој правоаголник?

12 Плантажните лозја на едно лозарско претпријатие набрани се за 18 дена. За колку дена ќе се наберат лозјата, ако секој ден се бере:
а) 2 пати поголема површина?
б) 3 пати поголема површина?

I.15. ЗАВИСНОСТ НА КОЛИЧНИКОТ ОД ПРОМЕНАТА НА ДЕЛЕНИКОТ И ДЕЛИТЕЛОТ

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Сумата од 1500 денари им е разделена на 5 работници како награда за нивната примерна работа. Колку денари добил секој работник? Колку ќе добиеше секој од нив, ако сумата за наградата беше 2 пати поголема?

Ќе одговориме прво на првото прашање. Секој работник добил по:

$$1500 : 3 = 500 \text{ (денари)}.$$

Кога сумата за награди би била 2 пати поголема, т.е. не 1500 денари, туку 3000 денари, тогаш секој работник би добил по:

$$(1500 \cdot 2) : 3 = 3000 : 3 = 1000 \text{ (денари)}.$$

Значи, кога делениот го зголемиме 2 пати, а делителот остане непроменет, тогаш и количникот ќе се зголеми исто така 2 пати.

Пример 2. Ако во количникот 75 : 3 = 25 делениот го зголемиме 4 пати, ќе добиеме:

$$(75 \cdot 4) : 3 = 300 : 3 = 100.$$

Гледаме дека и количникот се зголемува 4 пати. Оттука заклучуваме:

Ако деленикот го зголемиме неколку пати, а делителот остане ист, тогаш и количникот ќе се зголеми исто толку пати.

Во општ вид тој заклучок го запишуваме:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш:

$$(a \cdot m) : b = c \cdot m.$$

Пример 3. Како ќе се промени количникот на броевите 24 и 4, ако деленикот го намалиме 3 пати, а делителот остане непроменет?

Количникот на дадените броеви изнесува:

$$24 : 4 = 6.$$

Ако деленикот го намалиме 3 пати, тој ќе стане:

$$24 : 3 = 8.$$

Со промената на деленикот се менува и количникот, па тој ќе биде:

$$(24 : 3) : 4 = 8 : 4 = 2.$$

Споредувајќи ги двата количника, забележуваме дека со намалување на деленикот 3 пати, се намалува и количникот 3 пати, т.е. од 6 станува еднаков на 2.

Пример 4. Ако во количникот:

$$100 : 5 = 20,$$

деленикот го намалиме 4 пати, ќе имаме:

$$(100 : 4) : 5 = 25 : 5 = 5.$$

Гледаме дека и количникот ќе се намали 4 пати. Оттука доаѓаме до следниов заклучок:

Ако деленикот го намалиме неколку пати, а делителот остане ист, тогаш и количникот се намалува исто толку пати.

Во општ вид тоа го запишуваме:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш имаме:

$$(a : m) : b = c : m.$$

Пример 5. Што ќе стане со количникот на броевите 75 и 5, ако делителот го зголемиме 5 пати, а деленикот остане неизменет?

Количникот изнесува:

$$75 : 5 = 15.$$

Ако делителот го зголемиме 5 пати, ќе имаме:

$$75 : (5 \cdot 5) = 75 : 25 = 3.$$

Гледаме дека со зголемувањето на делителот 5 пати, количникот се намалил 5 пати, т.е. од 15 станал еднаков на 3.

Пример 6. Во количникот 60 : 5 = 12, ако делителот го зголемиме 3 пати, количникот ќе стане:

$$60 : (5 \cdot 3) = 60 : 15 = 4,$$

т.е. ќе се намали 3 пати. Според тоа можеме да кажеме:

Ако делителот го зголемиме неколку пати, а дељеникот остане непроменет, тогаш количникот се намалува исто толку пати.

Во општ вид:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш имаме:

$$a : (b \cdot m) = c : m.$$

Пример 7. Како ќе се промени количникот на броевите 24 и 12, ако делителот го намалиме 4 пати, а дељеникот остане непроменет?

Количникот на дадените броеви изнесува:

$$24 : 12 = 2.$$

Ако делителот го намалиме 4 пати, ќе добиеме:

$$24 : (12 : 4) = 24 : 3 = 8.$$

Ако го споредиме вториот количник со првиот, забележуваме дека, со намалувањето на делителот 4 пати, количникот се зголемил 4 пати.

Пример 8. Во количникот 180 : 18 = 10, ако делителот го намалиме 6 пати, количникот ќе стане:

$$180 : (18 : 6) = 180 : 3 = 60,$$

т.е. ќе се зголеми 6 пати. Оттука заклучуваме дека:

Ако делителот го намалиме неколку пати, а дељеникот остане ист, тогаш количникот ќе се зголеми исто толку пати.

Во општ вид:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш е:

$$a : (b : m) = c \cdot m.$$

Пример 9. Што ќе стане со количникот на броевите 54 и 9, ако и дељеникот и делителот ги зголемиме 3 пати?

Количникот на дадените броеви изнесува:

$$54 : 9 = 6.$$

Ако и дељеникот и делителот ги зголемиме 3 пати ќе добиеме:

$$(54 \cdot 3) : (9 \cdot 3) = 162 : 27 = 6.$$

Количникот, како што гледаме, останува ист. Оттука заклучуваме:

Ако и дељеникот и делителот едновремено ги зголемиме ист број пати, количникот не се менува.

Во општ вид:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш имаме:

$$(a \cdot m) : (b \cdot m) = c.$$

Тоа е едно од основните својства на количникот, кое го користиме при таканаречената **проширувањето на количникот**.

Даден количник велиме дека го прошируваме, ако и дељеникот и делителот ги помножиме со еден ист број, кој не е нула.

Пример 10. Што ќе стане со количникот на броевите 120 и 30, ако и дељеникот и делителот ги намалиме 10 пати?

Количникот на дадените броеви изнесува:

$$120 : 30 = 4.$$

Ако и дељеникот и делителот ги намалиме 10 пати:

$$(120 : 10) : (30 : 10) = 12 : 3 = 4.$$

Количникот, како што гледаме, останува неизменет. Оттука заклучуваме:

Ако и дељеникот и делителот едновремено ги намалиме ист број пати, количникот не се менува.

Во општ вид:

Ако

$$a : b = c,$$

тогаш:

$$(a : m) : (b : m) = c.$$

Тоа е исто така едно од основните својства на количникот, кое го користиме при таканаречената **скратување на количникот**.

Даден количник велиме дека го скратуваме, ако и делениkот и делителот ги поделиме со еден ист број, кој не е еднаков на нула.

Познавањето на овие основни зависности на количникот од промената на делениkот и делителот ни овозможува решавање и на посложени задачи од тој вид.

Петтото својство на количникот често го користиме и при усното делење со броевите 5, 25 и 125. На пример:

а) 345 : 5 = (345·2) : (5·2) = 690 : 10 = 69;

б) 425 : 25 = (425·4) : (25·4) = 1700 : 100 = 17;

в) 3500 : 125 = (3500·8) : (125·8) = 28000 : 1000 = 28.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Пресметај ти количниците:

а)	б)
60 : 2 = 30	60 : 2 = 30
120 : 2 =	30 : 2 =
180 : 2 =	20 : 2 =
240 : 2 =	12 : 2 =
360 : 2 =	10 : 2 =

Што забележуваш? Како се менува количникот кога делениkот:
а) ќе го зголемиме 2, 3, 4, 5... пати?
б) ќе го намалиме 2, 3, 4, 5 ... пати?

2 Количникот на два броја е 6, на пример 18 : 3 = 6. Колкав ќе стане тој, ако делениkот:
а) го зголемиме 3 пати, а делителот го оставиме неизменет?
б) го намалиме 3 пати, а делителот го оставиме неизменет?

3 Пресметај ги количниците:

а)	б)
360 : 30 = 12	360 : 120 = 3
360 : 60 =	360 : 60 =
360 : 90 =	360 : 40 =
360 : 120 =	360 : 30 =
360 : 180 =	360 : 20 =

Што забележуваш? Како се менува количникот, кога делителот:
а) ќе го зголемиме 2, 3, 4, 5 ... пати?
б) ќе го намалиме 2, 3, 4, 5 ... пати?

4 Количникот на два броја е 12, на пример 240 : 20 = 12. Што ќе стане со него, ако делителот:
а) го зголемиме 4 пати?
б) го намалиме 5 пати, а деленикот го оставиме непроменет?

5 Количникот на два броја е 18, на пример 540 : 30 = 18. Што ќе стане со него ако:
а) деленикот го зголемиме 2 пати, а делителот го намалиме 5 пати?
б) деленикот го намалиме 3 пати, а делителот го зголемиме 2 пати?

6 Покажи на овој пример: 540 : 30 = 18, што ќе стане со количникот, ако:
а) деленикот го зголемиме 10 пати, а делителот го зголемиме 2 пати?
б) деленикот го зголемиме 3 пати, а делителот го зголемиме 6 пати?
в) деленикот го намалиме 9 пати, а делителот го намалиме 3 пати?
г) деленикот го намалиме 2 пати, а делителот го намалиме 10 пати?

7 7. Што ќе стане со количникот, на пример 72 : 12 = 6, ако деленикот и делителот:
а) ги зголемиме 5 пати?
б) ги намалиме 4 пати?

8 Јован го пресметал количникот 56 : 14 на следниот начин:

$$56 : 14 = (56 : 7) : (14 : 7) = 8 : 2 = 4.$$

Пресметај ги на сличен начин следниве количници:
а) 105 : 35; б) 48 : 16; в) 420 : 140; г) 81: 27;
д) 72 : 18; ѓ) 300 : 60; е) 600 : 120; ж) 9000 : 150!

9 Милан ги пресметал количниците 435 : 5 и 650 : 25 на следниот начин:

$$435 : 5 = (435 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 870 : 10 = 87 \text{ и}$$
$$650 : 25 = (650 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 2600 : 100 = 26.$$

Пресметај ги на сличен начин количниците:
а) 370 : 5; б) 1280 : 5; в) 3145 : 5; г) 4300 : 25; д) 750 : 25; ѓ) 1350 : 25!

10 Пресметај ги количниците:
а) 245 : 5; б) 650 : 50; в) 670 : 5; г) 1200 : 50; д) 42000 : 500; ѓ) 316000 : 500!

11 Како треба да се промени само деленикот, така што:
а) количникот да се зголеми 3 пати?
б) количникот да се намали 4 пати?
Покажи го тоа на примери!

12 При зголемување на деленикот 2 пати, како треба да се промени делителот, така што количникот да се намали 5 пати?

13 При намалување на делителот 4 пати, што треба да се направи со деленикот, така што количникот да се зголеми 8 пати?

I.16. БРОЕН ИЗРАЗ. РЕДОСЛЕД НА АРИТМЕТИЧКИТЕ ОПЕРАЦИИ

Изучените аритметички операции: собирање, одземање, множење и делење ги викаме *основни аритметички* операции. Операциите собирање и одземање се викаат уште и аритметички *операции од прв ред*, а операциите множење и делење се викаат аритметички *операции од втор ред.*

Неколку (два или повеќе) броеви сврзани со знаците на основните аритметички операции, велиме дека образуваат *броен израз.*

Бројни изрази имаме различни. Во нив може да се сретнат само една или неколку аритметички операции, што треба да се извршат.

На пример, записите:

$34 + 15 – 27;$	$12 + 45 – 38 – 9;$	$92 – 50 + 44 – 21;$
$40 \cdot 24 : 12;$	$48 : 6 \cdot 4;$	$180 : 6 : 5 \cdot 7;$
$3 \cdot 5 \cdot 18 + 1 \cdot 6 – 19;$	$64 : 8 \cdot 2 + 14;$	$5 + 2 \cdot 3;$

се бројни изрази.

Во првите три изрази се сретнуваат само операции собирање и одземање, т.е. операциите од прв ред. Во четвртиот, петтиот и шестиот израз се сретнуваат пак само аритметички операции од втор ред, т.е. множење и делење. А во последните три изрази, се сретнуваат аритметички операции од прв и втор ред.

Се поставува прашање: по кој ред ќе ги извршуваме аритметичките операции кај посложените бројни изрази?

За редот на извршувањето на аритметичките операции во бројните изрази ќе се придржуваме за следниве правила:

1. Ако во бројниот израз се сретнуваат само операции од прв ред (собирање и одземање) или само операции од втор ред (множење и делење); по договор операциите да ги извршуваме по оној ред како што се тие запишани.

На пример:

а) $54 + 6 – 15 = 60 – 15 = 45;$

б) $72 – 12 + 28 = 60 + 28 = 88;$

в) $8 \cdot 4 : 16 = 32 : 16 = 2;$

г) $30 : 6 \cdot 12 = 5 \cdot 12 = 60.$

Ако пак операциите треба да се извршат по некој друг ред, тогаш тоа го означуваме со употребата на загради.

На пример:

а) $37 - (25 - 8) = 37 - 17 = 20$;

б) $12 \cdot (56 : 8) = 12 \cdot 7 = 84$;

в) $54 : (6 \cdot 3) = 54 : 18 = 3$.

Заградата ни означува дека прво треба да се извршат операциите во неа, а потоа другите операции што се сретнуваат во изразот.

На пример:

а) $(42 - 12) - (17 + 8) + 9 = 30 - 25 + 9 = 5 + 9 = 14$;

б) $36 : (60 : 5) \cdot 8 = 36 : 12 \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$.

Прво ги извршуваме операциите во заградата, а потоа другите операции.

2. Ако во бројниот израз се сретнуваат аритметички операции од прв и втор ред, тогаш прво ги извршуваме операциите од втор ред (множење и делење); а потоа се извршуваат операциите од прв ред (собирање и одземање).

На пример:

а) $27 + 48 : 12 = 27 + 4 = 31$;

б) $45 - 3 \cdot 6 = 45 - 18 = 27$;

в) $7 + 3 \cdot 4 - 24 : 6 = 7 + 12 - 4 = 19 - 4 = 15$.

За секое отстапување, што треба да се направи од горните две правила, во однос на редот за извршување на аритметичките операции, се служиме со употребата на загради.

Заградите ја имаат таа намена да ни покажат какво отстапување треба да се направи од вообичаениот ред на извршувањето на операциите во изразите. На пример:

$$(12 + 8) \cdot 5 - (27 - 12) : 3 = 20 \cdot 5 - 15 : 3 = 100 - 5 = 95.$$

Ако изразот го напишеме без загради, ќе имаме:

$$12 + 8 \cdot 5 - 27 - 12 : 3 = 12 + 40 - 27 - 4 = 52 - 27 - 4 = 25 - 4 = 21,$$

како што гледаме, ќе се добијат различни резултати.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што се бројни изрази?

2 По кој ред ги извршуваме аритметичките операции во бројните изрази?

3 Каква намена имаат заградите во бројните изрази?

4 Пресметај ги бројните изрази:

а) $(102 + 9 - 3) : 4 = \ldots$;

б) $16 \cdot 12 + (5 \cdot 23) - 89 + 14 = \ldots$;

в) $18 : 9 - 1 + 35\,896 : 2 = \ldots$;

г) $61 + 9 \cdot 14 - 105 : 5 + 83 = \ldots$;

д) $144 : 6 \cdot 2 - 24 : 2 = \ldots$;

ѓ) $144 : (6 \cdot 2) - 24 : 2 = \ldots$!

I.17. РЕШАВАЊЕ РАВЕНКИ СО КОРИСТЕЊЕ НА СВОЈСВАТА НА ОСНОВНИТЕ МАТЕМАТИЧКИ ОПЕРАЦИИ

1. СОБИРАЊЕ

Задача: Спасе имал 12 бадеми. Мајка му му дала уште неколку бадеми, кои Спасе ги помешал со своите. Кога Спасе потоа ги пребројал сите бадеми, утврдил дека има 20 бадеми. Колку бадеми добил тој од својата мајка?

Од задачата гледаме дека непознатиот број на бадемите, што Спасе ги добил од мајка му, кога ќе го собереме со бројот на бадемите што Спасе ги имал пред тоа, ќе добиеме збир, кој изнесува 20 бадема.

Ако непознатиот број на бадеми, што Спасе ги добил од мајка му, ги обележиме со буквата x (икс), тогаш задачата можеме да ја запишеме вака:

$$12 + x = 20,$$

т.е. збирот на бадемите што Спасе ги имал и бадемите што ги добил од својата мајка е еднаков на 20.

Значи, задачата се сведува на изнаоѓање еден собирок, кога е познат другиот собирок и нивниот збир. Прашањето можеме да го поставиме и вака:

Кој број собран со бројот 12 го дава бројот 20?

Јасно е дека тој број ќе биде 8, зашто $12 + 8 = 20$. Непознатиот собирок лесно го наоѓаме, кога од познатиот збир ќе го извадиме другиот познат собирок, т.е.

$$\text{од } 12 + x = 20 \text{ добиваме } x = 20 - 12 = 8.$$

Оттука заклучуваме:

Ако се познати збирот и еден негов собирок, тогаш другиот собирок е еднаков на разликата од познатиот збир и познатиот собирок.

Ако собироците ги обележиме со буквите a и b, а нивниот збир со буквата c, т.е. ако:

$$a + b = c,$$

тогаш согласно горниот заклучок ќе имаме:

$$a = c - b \text{ и } b = c - a.$$

2. ОДЗЕМАЊЕ

Задача: Спасе му дал на Јован 5 ореви, а му останале уште 8 ореви. Колку ореви имал Спасе пред да му ги даде на Јован 5–те ореви?

Ако непознатиот број ореви, што Спасе ги имал, ги обележиме со буквата x, тогаш задачата можеме да ја запишеме вака:

$$x - 5 = 8,$$

т.е., кога од непознатиот број ореви, што Спасе ги имал, одделил 5 ореви и му ги дал на Јован, му останале уште 8 ореви.

Значи, задачата се сведува на изнаоѓање на намаленикот, кога се познати намалителот и разликата.

Од фактот, ако Јован му ги врати 5–те ореви на Спасе, тогаш Спасе ќе има исто толку ореви, колку што имал пред тоа, произлегува дека: 8 + 5 = 13, т.е. дека непознатиот намаленик е 13.

Значи, непознатиот намаленик го наоѓаме, кога ќе ги собереме намалителот и разликата, односно од $x - 5 = 8$ добиваме: $x = 8 + 5 = 13$.

Оттука заклучуваме:

Непознатиот намаленик е еднаков на збирот од познатата разлика и познатиот намалител.

Задача: Јован отишол во книжарница да купи една книга. Дал 10 денари, а продавачот му вратил кусур 4 денари. Колку денари чинела книгата?

Ако бројот на денарите, што продавачот ги задржал за книгата, го обележиме со буквата x, задачата можеме да ја запишеме вака:

$$10 - x = 4.$$

Значи задачата се сведува на определување на намалителот, кога се познати намаленикот и разликата. Одговорот на задачата ќе биде 6 денари. До тој резултат ќе дојдеме кога ќе се прашаме: Колку има од 4 до 10? Ова го наоѓаме кога ќе го одземеме бројот 4 од 10. Според тоа:

$$x = 10 - 4,$$

т.е. непознатиот намалител го наоѓаме, кога од намаленикот ќе ја одземеме разликата.

Значи, од $10 - x = 4$ добиваме $x = 10 - 4 = 6$. Оттука заклучуваме:

Ако се познати намаленикот и разликата, тогаш непознатиот намалител ќе го одредиме кога од познатиот намаленик ќе ја одземеме познатата разлика.

Ако при операцијата одземање намаленикот го обележиме со буквата a, а намалителот со буквата b, а нивната разлика со буквата c, т.е. ако:

$$a - b = c,$$

тогаш првото правило за одредување на непознатиот намаленик, со помош на намалителот и разликата можеме да го запишеме вака:

$$a = b + c,$$

а второто правило за одредување на непознатиот намалител, со помош на намаленикот и разликата го запишуваме:

$$b = a - c.$$

3. МНОЖЕЊЕ

Задача: Една нива има облик на правоаголник со должина 60 m. Колкава е ширината на таа нива, ако нејзината плоштина, т.е. нејзината бројна вредност изнесува 2400 m^2?

Ако ширината на нивата ја обележиме со буквата x, тогаш задачата можеме да ја запишеме вака:

$$60 \cdot x = 2400.$$

Бидејќи од геометријата знаеме дека површината на правоаголникот е еднаква на производот од должината и ширината.

Оттука гледаме дека задачата се сведува на изнаоѓање еден множител, кога се познати другиот множител и нивниот производ.

Според горниот запис, прашањето можеме да го поставиме и вака: Бројот 60, со кој број помножен дава 2400?

За да го најдеме тој број, потребно е производот 2400 да го поделиме со бројот 60, т.е.

$$x = 2400 : 60 \text{ или } x = 40,$$

бидејќи $60 \cdot 40 = 2400$. Оттука заклучуваме дека:

Ако се познати производот на два множители и еден од нив, тогаш другиот непознат множител го одредуваме, кога познатиот производ ќе го поделиме со познатиот множител. На пример:

Од $x \cdot 8 = 48$ ќе имаме $x = 48 : 8 = 6$.

Ако при операцијата множење множителите ги обележиме со буквите a и b, а нивниот производ со буквата c, т.е. ако:

$$a \cdot b = c,$$

тогаш горното правило го запишуваме:

$$a = c : b \text{ и } b = c : a.$$

4. ДЕЛЕЊЕ

Задача: Колку вкупно ореви мајката им разделила на своите 4 деца, ако секое дете добило по 15 ореви?

Ако вкупниот број ореви го обележиме со буквата x, тогаш од задачата произлегува дека:

$$x : 4 = 15.$$

Тука непознат ни е деленикот, а познати се делителот и количникот. За да го најдеме деленикот, потребно е да го помножиме количникот со делителот, т.е.,

$$x = 15 \cdot 4 = 60.$$

Значи, мајката разделила 60 ореви. Оттука го добиваме следното правило:

Ако се познати делителот и количникот, непознатиот деленик го наоѓаме кога делителот ќе го помножиме со количникот. На пример:

Од $x : 7 = 14$ ќе имаме $x = 14 \cdot 7 = 98$.

Задача: На крајот на учебната година во VI одделение им се разделени 24 книги на одличните ученици. Колку одлични имало во VI одделение, ако секој одличен ученик добил по 3 книги?

Ако бројот на одличните ученици во одделението го обележиме со буквата x, тогаш задачата ја запишуваме:

$$24 : x = 3.$$

Тука е непознат делителот, а познати се дељеникот и количникот.

Непознатиот делител ќе го најдеме ако дељеникот го поделиме со количникот, т.е.

$$x = 24 : 3 = 8.$$

Значи, во VI одделение имало 8 одлични ученици.

Оттука го добиваме следново правило:

Ако се познати дељеникот и количникот, тогаш непознатиот делител го наоѓаме, кога дељеникот ќе го поделиме со количникот. На пример:

Од $150 : x = 6$ ќе имаме $x = 150 : 6 = 25$.

Ако дељеникот го обележиме со буквата a, делителот со буквата b, а количникот со буквата c; т.е. ако е:

$$a : b = c,$$

тогаш првото правило за одредување на непознат дељеник, со помош на делителот и количникот, го запишуваме:

$$a = b \cdot c,$$

а второто правило за одредување на непознат делител, со помош на дељеникот и количникот, го запишуваме:

$$b = a : c.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Кога е познат збирот на два броја и едниот од нив, како го наоѓаме другиот број? Определи го непознатиот број x во следниве прости врски:

а) $82 + x = 245$;
б) $128 + x = 300$;
в) $x + 37 = 50$;
г) $x + 240 = 620$;
д) $540 = x + 385$;
ѓ) $1000 = 486 + x$.

2 Збирот на два броја изнесува 3425. Ако едниот од тие броеви е 1923, колку е другиот број?

3 Збирот на три броја е 45. Едниот од нив е 12, другиот 23, колкав е третиот број?

4 Замислувам еден број. Ако кон него додадам 34, се добива бројот 82. Кој број сум замислил?

5 Збирот на три броја изнесува 150. Најди ги тие броеви, ако е познато дека збирот на првиот и вториот број е 119, а збирот на вториот и третиот е 74!

6 Кога е позната разликата меѓу два броја и помалиот од нив, како го наоѓаме поголемиот број? Најди го непознатиот број x во следниве равенства:

а) $x - 25 = 110$;
б) $x - 234 = 586$;
в) $x - 8 = 100$;
г) $x - 57 = 100$;
д) $230 = x - 200$;
ѓ) $1480 = x - 620$.

7 Кога е позната разликата меѓу два броја и поголемиот од нив, како го наоѓаме помалиот број? Определи го непознатиот број x во следниве равенства:

а) $400 - x = 162$;
б) $175 - x, = 100$;
в) $10 - x = 7$;
г) $42 - x = 23$;
д) $64 = 100 - x$;
ѓ) $285 = 450 - x$.

8 Разликата меѓу два броја е еднаква на 285. Помалиот број е 320, најди го поголемиот!

9 Кон бројот 428 додаден е бројот 356. Колку треба да се извади од добиениот збир, така што да се добие пак бројот 428?

10 Кога е познат производот на два броја и едниот од множителите, како се наоѓа другиот множител? Определи го бројот x во следниве равенства и направи проверка:

а) $12 \cdot x = 72$;
б) $21 \cdot x = 525$;
в) $x \cdot 9 = 63$;
г) $x \cdot 15 = 600$;
д) $325 = 13 \cdot x$;
ѓ) $180 = x \cdot 12$.

11 Производот на два броја е 525. Ако едниот од тие броеви е 35, Одреди го другиот број!

12 Од кој број треба да се извади 8 пати по 225, за да се добие бројот 570?

13 Како го определуваме деленикот, кога е познат делителот и количникот? Одреди го бројот x во следниве равенства и направи проверка:

а) $x : 14 = 53$;
б) $x : 205 = 32$;
в) $x : 6 = 5$;
г) $x : 15 = 47$;
д) $68 = x : 22$;
ѓ) $272 = x : 1001$.

14 Кој број поделен со 34 го дава бројот 207?

15 Кој број треба да се подели со 32 така, што да се добие количник 207 и остаток 17?

16 Деленикот е еднаков на 560, а количникот е 14. Најди го делителот!

17 Кој број треба да се подели со 34, за да се добие количник 21 и остаток 7?

18 Определи го непознатиот број x во следниве равенства:

а) $x : 5 + 2 = 6$;
б) $(x : 10) \cdot 8 = 48$;
в) $5 + x + 3 = 18$;
г) $2 \cdot x - 5 = 7$;
д) $(x + 4) \cdot 5 = 30$;
ѓ) $(3 \cdot x + 1) : 2 = 5$.

19 Ако даден број се намали за 8 единици, а потоа добиената разлика се зголеми 5 пати, се добива бројот 35. Кој е тој број?

I.18. ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

Познато ни е дека производот на кои и да било два природни броја е пак природен број, меѓутоа, количникот на два природни броја не е секогаш природен број. На пример:

$21 : 7 = 3$; $21 : 8 = 2$ и остаток 5;

$52 : 13 = 4$; $52 : 15 = 3$ и остаток 7 итн.

Ако делењето на два природни броја заврши без остаток, велиме дека првиот природен број (дељеникот) *е делив* со вториот природен број (делителот). Ако пак, делењето на два природни броја заврши со остаток, велиме дека дељеникот не е делив со делителот. На пример:

Бројот 21 е делив со 7, но не е делив со 8; бројот 52 е делив со 13, но не е делив со 15. Според тоа:

Даден природен број е делив со друг природен број ако поделен со него дава потполн количник (без остаток); а не е делив, ако поделен со него дава непотполн количник со остаток.

Во општ случај земеме дека бројот a е делив со бројот b ако $a : b = q$, каде што количникот q е исто така природен број.

На пример, бројот 20 е делив со бројот 5 бидејќи $20 : 5 = 4$. Но, 20 е исто така делив со бројот 2, бидејќи $20 : 2 = 10$. Значи, еден број може да е делив со повеќе броеви.

Бидејќи, ако имаме било кој природен број a важи равенството $a : 1 = a$, следува дека сите природни броеви се деливи со 1. Но исто така може да забележиме дека секој број е делив со самиот себе бидејќи $a : a = 1$.

Ако еден природен број n е делив со природниот број k, односно бројот k се содржи во бројот n, го запишуваме со $n \mid k$, а ако природниот број n не е делив со природниот број k пишуваме $n \nmid k$. На пример, $3 \mid 18$, $1 \mid 127$, $57 \mid 57$, $11 \mid 33$, $10 \nmid 15$, $2 \nmid 99$, $6 \nmid 10$. Условот, да природниот број n се дели со k, означува дека n може да се претстави како производ $k \cdot m$, т.е. $n = k \cdot m$, каде m е количникот од делењето на бројот n со k.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што значи еден број да е делив со друг број?
2. Кои од следните броеви се деливи со 2: а) 21; б) 432; в) 1600; г) 509?
3. Кои природни броеви се деливи со бројот 1?
4. Дали сите броеви се деливи со самите себе?
5. Дали бројот $b = 3 \cdot a$ е делив со бројот 3. Со кој друг број е делив бројот b?

I.19. ДЕЛИВОСТ НА ЗБИР, РАЗЛИКА И ПРОИЗВОД НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

1. ДЕЛИВОСТ НА ЗБИР СО ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Броевите 21, 56 и 70 се деливи со бројот 7; дали и нивниот збир (21 + 56 + 70) е делив со истиот број 7?

Бидејќи е (21 + 56 + 70) : 7 = 21 : 7 + 56 : 7 + 70 : 7 = 3 + 8 + 10 = 21, затоа и збирот 21+56+70 е делив со бројот 7.

Броевите 25, 35 и 40 се деливи со 5, а исто и нивниот збир 100 е делив со 5. Според тоа:

Ако секој од собироците е делив со даден природен број, тогаш и збирот е делив со тој број.

2. Бројот 12 е делив со 3, а бројот 20 не е делив со 3. Покажи дека нивниот збир исто така не е делив со 3!

Во збирот 15+24+30+45 сите собироци се деливи со 5, освен собирокот 24. Увери се дека тој збир, исто така, не е делив со бројот 5! Оттука произлегува правилото:

Ако само еден од собироците не е делив со даден природен број, тогаш и збирот не е делив со тој број.

3. Броевите 12 и 18 не се деливи ни со 5 ни со 7. Лесно се уверуваме дека нивниот збир е делив со бројот 5, бидејќи (12+18) : 5=30 : 5=6; но не е делив со бројот 7, бидејќи (12+18) : 7 = 30 : 7 = 4 и остаток 2.

Според тоа: Ако два или повеќе собирока во збирот не се деливи со даден број, тогаш збирот во некои случаи може да биде делив, а во некои случаи може и да не биде делив со даденият број. За тоа ништо не може да се тврди однапред.

2. ДЕЛИВОСТ НА РАЗЛИКА СО ПРИРОДЕН БРОЈ

Дали разликата на два природни броја е делива со некој трет природен број или не, утврдуваме врз основа на правилата:

Ако намаленикот и намалителот се деливи со даден природен број, тогаш и разликата е делива со тој број. На пример:

$$(35 - 14) : 7 = 35 : 7 - 14 : 7 = 5 - 2 = 3.$$

Ако само намаленикот или само намалителот не е делив со даден број, тогаш и разликата не е делива со тој број. На пример:

Бројот 18 е делив со 6, а бројот 10 не е делив со 6; нивната разлика (18 – 10 = 8) исто така не е делива со бројот 6.

Ако и намаленикот и намалителот не се деливи со даден природен број, тогаш разликата може да е делива, но и може да не е делива со тој број. На пример:

Броевите 25 и 13 не се деливи ни со 4 ни со 7. Меѓутоа, нивната разлика (25 – 13 = 12), е делива со 4, но не е делива со 7.

3. ДЕЛИВОСТ НА ПРОИЗВОД СО ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Бројот 15 е делив со 5, покажи дека производите: $15\cdot2$; $15\cdot4$; $15\cdot8\cdot3$ се, исто така, деливи со бројот 5!

Значи: Ако еден од множителите на производот е делив со даден природен број, тогаш и производот е делив со тој број.

2. Броевите15 и 8 не се деливи ни со 7 ни со 10. Нивниот производ ($15\cdot8 = 120$) не е делив со 7, но делив е со бројот 10.

Според тоа: Ако ниту еден од множителите на производот не е делив со даден број, тогаш производот во некои случаи може да е делив, а во некои случаи може и да не е делив со дадениот број. За тоа ништо не може да се каже однапред.

Забелешки:

1. Ако даден природен број е делив со даден производ, тогаш тој број е делив, исто така, и со секој од множителите на тој производ, На пример:

Бројот 60 е делив со производот $2\cdot3\cdot5$, бидејќи:

$$60 : (2\cdot3\cdot5)=60 : 30=2.$$

Затоа бројот 60 е делив и со 2, и со 3, и со 5.

Но, обратното тврдење од горното секогаш не е точно, а имено:

Ако даден број е делив поодделно со неколку дадени броеви тогаш тој број може да се случи и да не е делив со нивниот производ.

На пример:

Бројот 120 е делив и со 3, и со 6, и со 10, но тој не е делив и со нивниот производ ($3\cdot6\cdot10 = 180$).

2. Бројот 0 е делив со секој природен број. На пример: $0 : 8 = 0$, бидејќи $0\cdot8 = 0$; $0 : 17 = 0$, бидејќи $0\cdot17 = 0$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Ако броевите a, b и c се деливи со 3, дали бројот $k = a + b + c$ е делив со 3?

2 Дали збирот на 3 непарни броја е делив со 2?

3 Дали разликата на 111 111 100 и 259 004 е делива со 4? Дали може да го дознаеме тоа без да ја пресметаме разликата?

4 Дали разликата на броевите $22...24$ и $3...34$, која е природен број, е делива со 5?

5 Дали производот на броевите 45 и 77 е делив со: а) 3; б) 7; в) 2; г) 11; д) 9; ѓ) 5; е) 6?

6 Со кои броеви е делив производот на 124 964 302 и 0?

I.20. ПРАВИЛА ЗА ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

Дали даден природен број е делив со друг природен број, може да се утврди кога дадениот број го поделиме со другиот број. Но, како што ќе видиме, ова можеме да го утврдиме и без да го вршиме делењето.

1.20.1. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЈОТ 2

Бројот 10 е делив со бројот 2, бидејќи $10 : 2 = 5$.

Броевите што завршуваат на нула: 20, 30, 40, 50, 60 итн. можеме да ги претставиме и како производ на кој едниот множител му е 10. Бидејќи 10 е делив со 2, затоа и сите броеви што завршуваат со нула, исто така, се деливи со 2. На пример:

$$90 : 2 = (9 \cdot 10) : 2 = 9 \cdot (10 : 2) = 9 \cdot 5 = 45.$$

Да земеме сега број што не завршува со нула, на пример 738. Бројот 738 може да се претстави во вид на збир вака:

$$738 = 730 + 8.$$

Првиот собирок 730 е делив со 2, бидејќи завршува со нула.

Според тоа, дали бројот 738 е делив со 2 или не, ќе зависи од вториот собирок, т.е. од цифрата на единиците.

Бидејќи и вториот собирок (8) е делив со 2, следува дека и бројот 738 е делив со бројот 2.

Друг пример: дали бројот 5 273 е делив со 2? Ако бројот 5 273 го претставиме во вид на збир $5\ 273 = 5\ 270 + 3$, гледаме дека првиот собирок (5 270) е делив со 2, но вториот собирок (3) не е делив со 2. Оттука заклучуваме дека бројот 5 273 не е делив со 2, бидејќи цифрата на единиците во него не е делива со 2. Според тоа:

Бројот е делив со 2, ако цифрата на единиците му е: 2, 4, 6, 8 или 0.

Природните броеви што се деливи со 2 се викаат *парни броеви*, а броевите пак што не се деливи со 2 - *непарни броеви*.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои броеви се викаат парни, а кои непарни?
2. Дали парните броеви може да ги запишеме како $2 \cdot k$?
3. Кои од следните броеви се деливи со 2: а) 2 348 998; б) 234 241; в) 2 468 101; г) 11 . . . 12?
4. Дали бројот $10 \cdot k$ е делив со 2?
5. Во кој случај бројот $5 \cdot k$ е делив со 2?

I.20.2. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЕВИТЕ 5 И 10

Бројот 10 е делив и со 5 и со 10 бидејќи:

$$10 : 5 = 2;\ \ 10 : 10 = 1.$$

Броевите што завршуваат со нула: 20, 30, 40, 50 итн., исто така се деливи со 5 и со 10, бидејќи можеме да ги претставиме како производ, на кој едниот множител е 10. На пример:

$$20 = 2 \cdot 10;\ \ 30 = 3 \cdot 10;\ \ 470 = 47 \cdot 10.$$

Дали броевите што не завршуваат со нула, на пример 863 и 745, се деливи со 5 и со 0?

Ако ги претставиме во вид на збир:

$$863 = 860 + 3 \ \text{ и } \ 745 = 740 + 5,$$

гледаме дека бројот 863 не е делив ни со 5 ни со 10, бидејќи вториот собирок (3), т.е. цифрата на единиците, не е делива ни со 5, ни со 10. Бројот 745 ќе биде делив со 5, но не е делив со 10, бидејќи последната цифра му е делива со 5, но не е делива со 10.

Бидејќи од едноцифрените броеви деливи со 5 се само броевите 0 и 5, а делив со 10 е само бројот 0, затоа имаме:

Бројот е делив со 5, ако цифрата на единиците му е 0 или 5.

Бројот е делив со 10, ако цифрата на единиците му е 0.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои броеви се деливи со 5, а кои со 10?
2. Дали сите броеви кои се деливи со 10 се истовремено деливи со 5?
3. Кои од следните броеви се деливи со 10, кои со 5, а кои со ниту со еден од нив:
   а) 23 045 090; б) 345 042 014; в) 210 225?
4. Кои броеви се деливи со 5, а не се деливи со 10?

I.20.3. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЈОТ 4

Забележуваме дека бројот 100 е делив со 4, бидејќи:

$$100 : 4 = 25.$$

Следува да заклучиме дека со бројот 4 се деливи сите броеви што завршуваат на две нули, бидејќи тие можат да се претстават како производ на кој едниот множител му е 100. На пример:

$$2300 = 23 \cdot 100;\ \ 18\,400 = 184 \cdot 100.$$

Да видиме сега кои, од броевите што не завршуваат на две нули се деливи со 4. На пример:

Да испитаме дали броевите 3 728 и 18 362 се деливи со 4! Ако тие броеви ги претставиме

во вид на збир:

$$3\ 728 = 3\ 700 + 28 \text{ и } 18362 = 18300 + 62,$$

гледаме дека првите собироци и на двата збира се деливи со 4, бидејќи завршуваат на две нули. Ако и вторите собироци на тие збирови се деливи со 4, тогаш и самите збирови, т.е. дадените броеви, ќе бидат деливи со 4. Според тоа, бројот 3 728 е делив со 4, бидејќи вториот собирок (28) е делив со 4. Меѓутоа, бројот 18 362 не е делив со 4, затоа што вториот собирок (62) не е делив со бројот 4.

Оттука го извлекуваме правилото :

Бројот е делив со 4, ако последните две цифри во него се нули или ако тие образуваат број кој е делив со 4.

Забелешка: На сличен начин може да се изведе и правилото:

Бројот е делив со 8, ако последните три цифри во него се нули или ако тие образуваат број кој е делив со 8. На пример:

Броевите: 47 000, 23 184, 5 408, 12 032 се деливи со бројот 8, меѓутоа броевите: 3500, 1204, 36006 не се деливи со 8.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои броеви се деливи со 4?
2. Кои од следните броеви се деливи со 4: а) 209 431 936; б) 299 314; в) 3 655 551?
3. Дали сите броеви кои завршуваат на 2 се деливи со 4? Каква треба да е цифрата на десетките за да е точен исказот?
4. Дали сите броеви кои се деливи со 8 се деливи и со 4?

I.20.4. ПРИЗНАК ЗА ДЕЛИВОСТ СО БРОЕВИТЕ 3 И 9

Лесно можеме да се увериме дека броевите што се запишани со цифрата 9 се сите деливи со 3 и со 9:

$$9 : 3 = 3 \qquad 9 : 9 = 1$$
$$99 : 3 = 33 \qquad 99 : 9 = 11$$
$$999 : 3 = 333 \qquad 999 : 9 = 111$$
$$9999 : 3 = 3333 \qquad 9999 : 9 = 1111$$

Да видиме, дали бројот 825 е делив со 3 и со 9. Ако 825 го претставиме во вид на збир:

$$825 = 800 + 20 + 5 = 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5,$$

а декадните единици ги замениме со збировите:

$$100 = 99 + 1 \text{ и } 10 = 9 + 1,$$

ќе добиеме:

$$825 = 800 + 20 + 5 = 8\cdot100 + 2\cdot10 + 5 = 8\cdot(99 + 1) + 2\cdot(9 + 1) + 5 =$$
$$= 8\cdot99 + 8 + 2\cdot9 + 2 + 5 = (8\cdot99 + 2\cdot9) + (8 + 2 + 5).$$

Значи:

$$825 = (8\cdot99 + 2\cdot9) + (8 + 2 + 5).$$

Јасно се гледа дека збирот во првата заграда е делив со 3, а исто така и со 9. Оттука заклучуваме: дали бројот 825 ќе биде делив со 3 и со 9, ќе зависи од тоа дали збирот во втората заграда (8 + 2 + 5) = 15 е делив со 3 и со 9 или не.

Како што гледаме збирот во втората заграда (15) е делив со 3, но не е делив со 9. Според тоа, заклучуваме дека бројот 825 е делив со 3, но не е делив со 9.

Што претставува збирот во втората заграда?

Ако добро погледаме ќе видиме дека збирот во втората заграда е збир на одделните цифри од зададениот број 825, т.е. 8+2+5.

Бидејќи секој број можеме да го претставиме како збир на два израза, од кои едниот израз секогаш ќе биде делив со 3 и со 9, а другиот израз ќе претставува збир од цифрите на тој број, тогаш станува јасно дека ќе важи следното правило за деливост на броевите со 3 :

Бројот е делив со 3, ако збирот од цифрите му е делив со 3.

На пример: Бројот 7 152 е делив со 3, бидејќи збирот од неговите цифри 7+1+5+2=15 е делив со 3, а бројот 392 не е делив со 3, бидејќи збирот од неговите цифри 3+9+2=14 не е делив со 3.

Пример: Дали бројот 5247 е делив со 9?

Ќе го претставиме тој број во вид на збир: $5\,247 = (5\cdot999 + 2\cdot99 + 4\cdot9) + (5 + 2 + 4 + 7)$.

Бидејќи збирот во втората заграда 5+2+4+7=18 е делив со 9, велиме дека и бројот 5 247 е делив со 9.

Според тоа: **Бројот е делив со 9, ако збирот од цифрите му е делив со 9.**

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Кои броеви се деливи со 3, а кои со 9?

2 Кои од броевите се деливи со 3, кои со 9, а кои со ниту еден од нив: 246 801; 12 035 054; 918; 123 456; 322 788 100?

3 Кои од следниве броеви: 146; 1026; 7242; 111; 10 521; 424; 827; 100 401; 803; 2223; 555; 4021; 5022 се деливи со 3?

4 Кои од следниве броеви: 2735; 2025; 20 220; 80 794; 11 277; 2556; 2400; 8001 се деливи со 9?

5 Што треба да е исполнето за да одредени броеви бидат истовремено деливи со 2 и 3?

6 Во кои случаи бројот $\underbrace{222\ldots22}_{n}$ е делив со: а) 3; б) 9?

I.21. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

Да ја разгледаме деливоста на некои броеви од низата на природните броеви: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 итн. :

- бројот 1 е делив само со самиот себе (т.е. со 1);
- бројот 2 е делив со 1 и со самиот себе (т.е. со 2);
- бројот 3 е делив со 1 и со самиот себе (т.е. со 3);
- бројот 4 е делив со 1, со 2 и со самиот себе (т.е. со 4);
- бројот 5 е делив со 1 и со самиот себе (т.е. со 5);
- бројот 6 е делив со 1, со 2, со 3 и со самиот себе (т.е. со 6);
- бројот 7 е делив со 1 и со самиот себе (т.е. со 7);
- бројот 8 е делив со 1, со 2, со 4 и со самиот себе (т.е. со 8);
- бројот 9 е делив со 1, со 3 и со самиот себе (т.е. со 9);
- бројот 10 е делив со 1, со 2, со 5 и со самиот себе (т.е. со 10);
- бројот 11 е делив со l и со самиот себе (т.е. со 11);
- бројот 12 е делив со 1, со 2, со 3, со 4, со 6 и со самиот себе (т.е. со 12) итн.

Оттука заклучуваме дека:

1. Најмалиот природен број (бројот 1) е делив само со самиот себе.

2. Секој природен број (освен бројот 1) е делив со бројот 1 и со самиот себе, бидејќи 7 : 1 = 1 и 7 : 7 = 1, а исто така и 12 : 1 = 12 и 12 : 12 = 1 итн.

3. Некои броеви се деливи само со 1 и со самиот себе. Такви се броевите: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 итн.

4. Некои броеви пак, освен што се деливи со 1 и со самите себе, деливи се уште барем со еден или неколку други броеви.

Броевите што се деливи само со бројот 1 и со самите себе се викаат прости броеви. Броевите пак, што освен со бројот 1 и со самите себе се деливи уште со барем еден или неколку други броеви, се викаат сложени броеви.

На пример:

Прости броеви се: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Сложени броеви се: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ... Сите прости броеви што не се поголеми од 1 000 дадени се во следнава таблица:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	851	859	863	877	881	883	887	907	911
919	927	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Таблица на простите броеви до 1000

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои броеви се викаат прости, а кои сложени?
2. Сите парни броеви се сложени, освен еден. Кој е тој?
3. Сите непарни едноцифрени броеви се прости, освен еден. Кој е тој?
4. Кои од броевите: 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 22, 23, 29, се прости, а кои сложени?
5. Колку единици треба да се додадат на кој и да било прост број, па да се добие најблискиот сложен број?
6. Напиши ги сите прости броеви од 1 - 50!

1.22. РАЗЛОЖУВАЊЕ СЛОЖЕН ПРИРОДЕН БРОЈ НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ

Секој сложен број може да се претстави како производ на прости броеви. На пример:

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{или} \quad 30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Бројот 6 е сложен број, а броевите 2 и 3 се викаат негови *прости множители*. Бројот 30 е исто така сложен број. Тој може да се претстави како производ од 2 и 15, но бидејќи множителот 15 е и самиот сложен број, кога ќе го замениме во производот со неговите прости множители 3 и 5, велиме дека бројот 30 сме го претставиле како производ на три прости броеви.

Таквото претставување на сложените броеви го викаме нивно *разложување на прости множители*, според тоа:

Дефиниција 1

Да се разложи сложен број на прости множители значи тој да се претстави како производ од прости броеви.

Како се врши разложувањето на броевите на прости множители ќе видиме од следниве примери:

Пример 1. Да се разложи на прости множители бројот 420! Простите множители на бројот 420 треба да ги бараме меѓу оние прости броеви, со кои е делив тој. Гледаме дека бројот 420 е делив со 2, со 3, па и со 5; според тоа, тие се сигурно негови прости множители. Но дали се само тие? Не се само тие, бидејќи производот на најдените прости броеви $2\cdot 3\cdot 5=30$ не го даваат дадениот број 420.

Разложувањето на бројот 420 ќе го вршиме последователно вака: бидејќи бројот 420 е делив со 2, делејќи го со 2 добиваме: $420 = 2\cdot 210$. Сега го разложуваме бројот 210. Тој е делив пак со 2, делејќи го добиваме:

$$210 = 2\cdot 105 \quad \text{или} \quad 420 = 2\cdot 2\cdot 105.$$

Бројот 105 не е делив со 2, но е делив со 3 и со 5. Делејќи го бројот 105 со 3 (најмалиот прост број со кој е делив), добиваме: $105 = 3\cdot 35$ или $420 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 35$.

На крајот бројот 35 ако го напишеме со производ од 5 и 7, $35 = 5\cdot 7$, ќе добиеме:

$$420 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7.$$

Со тоа бројот е разложен на прости множители.

Разложувањето на броевите на прости множители може да се запише и во друга форма, многу попрактично, особено за поголеми броеви.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Десно од бројот 420 повлекуваме вертикална линија, а лево од неа го запишуваме првиот најмал прост број, со кој е делив дадениот број 420. Тоа е бројот 2, со кој го делиме бројот 420, а добиениот количник го запишуваме лево од вертикалната линија под бројот 420. Сега гледаме со кој најмал прост број е делив количникот 210. Тоа е пак бројот 2, кој го запишуваме десно од линијата спроти бројот 210. Потоа го делиме 210 со 2 и новиот количник 105 го пишуваме лево од линијата под 210. Сега 105 не е делив со 2, а е делив со 3. Бројот 3 го пишуваме десно спроти 105, а новиот количник 35 го пишуваме лево под 105. Потоа бројот 35 го делиме со 5, па добиваме за количник прост број 7. На крајот, делејќи го простиот број 7 сам со себе (т.е. со 7), го добиваме последниот количник 1.

Простите множители на 420 се броевите што ги добиваме лево од вертикалната линија т.е. $420 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$.

Пример 2. Да. Се разложи на прости множители бројот 1 350!

Разложувањето ќе го извршиме на вториот начин:

По извршеното разложување резултатот го запишуваме вака:

$$1\,350 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 \quad \text{или} \quad 1\,350 = 2\cdot 3^3\cdot 5^2,$$

каде што 3^3 ни означува дека 3 се јавува три пати како множител, а 5^2 дека 5 се јавува 2 пати како множител.

1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Пример 3. Да се разложи на прости множители бројот 24 255!

Дадениот број не е делив со 2, а е делив со 3. Кога ќе дојдеме до количникот 539, кој не е делив со 5, треба да провериме дали е делив со 7. Тоа го правиме со обично делење. По завршување на разложувањето добиваме:

$$24255 = 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 11 \text{ или } 24255 = 3^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11.$$

24 255	3
8 085	3
2 695	5
539	7
77	7
11	11
1	

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што значи да се разложи сложен број на прости множители? Покажи го тоа на еден пример!
2. Разложи ги напамет на прости множители следниве броеви: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; 25; 30; 45.
3. Разложи ги на прости множители броевите: 102; 315; 824; 1248; 3126; 1764; 2304; 4410; 7808.
4. Разложи ги на прости множители декадните единици: 10; 100; 1 000; 10 000; 100 000; 1 000 000. Што забележуваш?
5. Одреди ги заедничките прости делители на следниве броеви: а) 10 и 14; б) 50 и 75; в) 12 и 18; г) 30 и 75; д) 96 и 84.

I.23. ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛИ (ЗД) И НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ (НЗД)

Нека се дадени броевите: 60; 90 и 150.

Да ги разложиме секој одделно на прости множители.

$$60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5;\ \ 90 = \ 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5;\ \ 150 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5.$$

Забележуваме дека 2, 3 и 5 се јавуваат како нивни заеднички множители. Тоа значи дека и трите броја се деливи и со 2 и со 3, па и со 5. Затоа заедничките множители 2, 3 и 5 ги викаме уште и *заеднички делители* на броевите 60, 90 и 150. Покрај броевите 2, 3 и 5, заеднички делители на 60, 90 и 150 се уште и броевите 6, 10, 15 и 30. Според тоа:

Дефиниција 1

Заеднички делител за два или повеќе броеви е таков број со кој сите тие се деливи без остаток.

Некои природни броеви, освен бројот 1 немаат други заеднички делители, а некои пак имаат и повеќе.

Пример 1. Кои се заеднички делители за броевите 6 и 35? Ако ги разложиме на прости множители: $6 = 2\cdot 3$; $35 = 5\cdot 7$, гледаме дека тие немаат ниту еден заеднички, множител (делител) или поточно: освен бројот 1 тие немаат други заеднички множители (делители).

Такви броеви, кои освен бројот 1 немаат други заеднички делители, се викаат *заемно прости* или *релативно прости броеви.*

На пример:

Релативно прости броеви се 8 и 25; 4, 21 и 25.

Два или повеќе прости броеви исто така немаат заеднички делители, на пример: 5 и 7; 3, 11 и 17 итн.

Ако неколку сложени броеви имаат повеќе заеднички делители, тогаш меѓу нив постои еден кој е најголем. На пример:

Заеднички делители на броевите 60, 90 и 150 се: 2; 3; 5; 6; 10; 15 и 30, а меѓу нив бројот 30 е *најголем заеднички делител*.

Пример 2. Кои се заеднички делители на броевите 210, 105 и 30?

Ако ги разложиме на прости множители:

$$210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7;$$
$$105 = 3\cdot 5\cdot 7;$$
$$30 = 2\cdot 3\cdot 5;$$

гледаме дека нивни заеднички делители се 3 и 5. Тоа се прости заеднички делители, но гледаме дека заеднички делител ќе биде и производот $3\cdot 5=15$ од простите заеднички

делители. Производот од сите прости заеднички делители, всушност ќе претставува исто така заеднички делител. Во нашиот пример, најголем заеднички делител за броевите 210, 105 и 30, ќе биде 15. Скратено тоа го запишуваме вака:

$$\text{НЗД}\ (210{,}105,\ 30) = 15.$$

Од сето изложено дотука заклучуваме дека:

Дефиниција 2

Најголемиот заеднички делител на неколку броеви е најголемиот број, со кој се деливи сите броеви.

Пример 3. Да се најде НЗД за броевите: 48, 36 и 60. Прво ги разложуваме на прости множители:

$$48 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3;$$
$$36 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3;$$
$$60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

Забележуваме дека сите броеви се деливи со $4 = 2\cdot 2$, но 36 и 60 не се деливи со $8 = 2\cdot 2\cdot 2$. Гледаме исто така дека сите броеви се деливи со 3, но не и со $9 = 3\cdot 3$. Затоа, најголемиот заеднички делител е бројот $2\cdot 2\cdot 3$.

Значи: НЗД (48, 36 и 30) $= 2\cdot 2\cdot 3 = 12$.

Пример 4. Да се најде НЗД за 26 и 65!

Од $26 = 2\cdot 13$ и $65 = 5\cdot 13$ гледаме дека:

$$\text{НЗД}\ (26 \text{ и } 65) = 13.$$

Најголемиот заеднички делител го викаме уште и *најголема заедничка мера* кога се работи за мерење на две или повеќе дадени величини. На пример:

Нека се дадени две отсечки долги 30 cm и 42 cm. Која најголема отсечка може да се помести цел број пати и врз двете дадени отсечки?

Отсечки што можат да се сместат цел број пати во едната и другата дадена отсечка можат да бидат со следниве должини: 1 cm; 2 cm; 3 cm; или 6 cm. Најголема таква отсечка несомнено е отсечката, чија должина претставува НЗД за должините на двете дадени отсечки. Тоа е отсечката со должина 6 cm којашто се вика и најголема заедничка мера за дадените отсечки.

Аналогно на постапката за разложување на даден број на прости множители постои и едноставна постапка за наоѓање на НЗД за дадени броеви. Всушност, со самата постапка најголемиот заеднички делител го добиваме разложен на прости множители, а потоа потребно е тие множители само да се помножат.

Постапката ќе ја илустрираме со наоѓање на НЗД за броевите 72, 360 и 252. Броевите ги запишуваме во ист ред и после крајниот број повлекуваме вертикална линија. Постапката ја започнуваме како и при разложување на прости множители. Кога ќе стигнеме до редот 18, 90, 63 не можеме постапката да ја продолжиме со бројот 2. Затоа се обидуваме да ја продолжиме постапката со бројот 3 (следниот прост број). Постапката завршува кога во добиениот ред ќе имаме взаемно прости броеви, бидејќи постапката не може да продолжи.

Во нашиот случај 2, 10 и 7 се взаемно прости броеви, па затоа:

НЗД (72, 360, 252) = 2·2·3·3 = 36.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кој број го викаме заеднички делител за неколку броеви? Прикажи неколку примери!
2. Кои броеви се викаат заемно прости? Прикажи примери!
3. Што е најголем заеднички делител и како се запишува?
4. Колкав е најголемиот заеднички делител на два или повеќе заемно прости броеви?
5. Најди го НЗД за броевите: а) 175 и 225; б) 234, 429 и 75; в) 60, 150, 165 и 210; г) 105 и 126.
6. Колкава е најголемата заедничка мера за следниве должини: а) 280 cm и 42 cm; б) 35 mm и 45 mm.

I.24. ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛИ (ЗС) И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ (НЗС)

Ако даден број е делив со некој друг број, тогаш првиот даден број се вика *содржа̄тел* на вториот број, а вториот број се вика *делӣтел* на првиот. На пример:

Бројот 18 е содржател на броевите 2, 3, 6 и 9, бидејќи тој е делив со сите тие броеви, а самите броеви 2, 3, 6 и 9 ги викаме множители или делители на бројот 18.

Лесно можеме да се увериме дека секој број има неограничено многу содржатели, а нив ги добиваме кога тој број ќе го помножиме по ред со броевите: 2, 3, 4, 5, 6 итн.

Да ги земеме броевите 12 и 15. Тие се содржат без остаток во секој од броевите: 60, 120, 180, 240, 300, 360 итн. Затоа велиме дека броевите 60, 120, 180, 240, 300, 360 итн. се *заеднички содржа̄тели* на броевите 12 и 15. Според тоа:

Дефиниција 1

Заеднички содржател за два или повеќе броеви е таков број, кој што е делив со секој од дадените броеви.

Така на пример, заеднички содржатели за броевите 5, 6 и 10 се: 30, 60, 90, 120, 150,

180 итн., т.е. и нив ги има неограничено многу. Но меѓу сите тие заеднички содржатели, за нас често ќе има посебен интерес најмалиот од нив (30), којшто го викаме уште и *најмал заеднички содржа̄тел* (скратено НЗС) за дадените броеви 5,6 и10.

Најмал заеднички содржател за две или повеќе дадени броеви е таков најмал број, којшто е делив со секој од дадените броеви.

Пример 1. Да се одреди НЗС за броевите 12 и 15.

Прво ќе го разложиме секој од дадените броеви на прости множители:

$$12 = 2\cdot 2\cdot 3 \text{ и } 15 = 3\cdot 5,$$

потоа размислуваме: За да биде најмалиот заеднички содржател (што го бараме) делив со 12 (т.е. да го содржи бројот 12), тој мора да ги содржи сите множители на 12. Значи, НЗС да ги содржи множителите 2; 2 и 3 и тоа множителот 2 треба да го содржи двапати.

За да биде НЗС делив и со 15, тој треба да ги содржи и неговите множители 3 и 5, но бидејќи множителот 3 веќе го имаме земено од бројот 12, затоа за нов множител на НЗС ќе го земеме само другиот множител 5. По таков начин наоѓаме дека НЗС за броевите 12 и 15 ќе ги има следните множители: 2, 2, 3 и 5, т.е.

$$\text{НЗС } (12, 15) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 60.$$

Лесно се уверуваме дека најдениот НЗС за броевите 12 и 15 ги содржи и двата броја, бидејќи:

$$60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = (2\cdot 2\cdot 3)\cdot 5 = 12\cdot 5 \text{ и } 60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 2\cdot 2\cdot (3\cdot 5) = 4\cdot 15.$$

Пример 2. Да се одреди НЗС за броевите: 54, 120, 140 и 450. Прво ќе ги разложиме дадените броеви одделно секој на прости множители:

54 | 2	120 | 2	140 | 2	450 | 2
27 | 3	60 | 2	70 | 2	225 | 3
9 | 3	30 | 2	35 | 5	75 | 3
3 | 3	15 | 3	7 | 7	25 | 5
1	5 | 5	1	5 | 5
	1		1

т.е., $54 = 2\cdot 3^3$; $120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$; $140 = 2^2\cdot 5\cdot 7$; $450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$.

Гледаме дека за сите дадени броеви заеднички множител е само 2, додека другите множители 3, 5 и 7, што се среќаваат во одделните броеви не им се заеднички.

Од првиот пример видовме дека за множители на НЗС ги зедовме сите прости множители (заеднички и незаеднички) и тоа секој прост множител толку пати, колку што пати најмногу се јавува во тие броеви.

Во овој пример, по извршеното разложување на прости множители на броевите 54, 120, 140 и 450, забележуваме дека: Заедничкиот множител 2 се јавува најмногу 3 пати (во бројот 120), па затоа во НЗС тој множител ќе го земеме, исто така, три пати.

Множителот 3 се јавува најмногу 3 пати (во бројот 54), па затоа во НЗС тој множител ќе

го земеме 3 пати.

Множителот 5 се јавува најмногу 2 пати (во бројот 450), па затоа во НЗС тој множител ќе го земеме 2 пати.

Множителот 7 се јавува само еднаш и тоа само во бројот 140, па затоа и тој множител во НЗС ќе го земеме само еднаш.

Според тоа, бараниот најмал заеднички содржател за броевите: 54, 120, 140 и 450, ќе биде:

НЗС (54, 120, 140, 450) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 37\,800$. Оттука заклучуваме:

Дефиниција 2

Најмал заеднички содржател за неколку дадени броеви е таков број, кој ги има сите прости заеднички и незаеднички множители на дадените броеви до онолку пати, по колку што се сретнуваат најмногу пати во тие броеви.

Најмалиот заеднички содржател за дадените броеви во практиката многу побрзо го наоѓаме кога нивното разложување на прости множители го вршиме истовремено. Тоа се врши вака:

Ги запишуваме дадените броеви еден покрај друг, а зад последниот повлекуваме една вертикална линија:

54,	120,	140,	450	2
27,	60,	70,	225	2
27,	30,	35,	225	2
27,	15,	35,	225	3
9,	5,	35,	75	3
3,	5,	35,	25	3
1,	5,	35,	25	5
	1,	7,	5	5
		7,	1	7
		1,		

Лево од линијата, во истиот ред со дадените броеви, го запишуваме првиот најмал прост делител со кој се дели било сите или барем еден од дадените броеви. Потоа ги делиме броевите што се делат со тој делител, а добиените количници ги запишуваме под соодветните броеви. Броевите пак, што не се деливи со тој делител ги препишуваме. Ако макар еден од добиените количници се дели со истиот прост делител, тогаш треба да се изведе повторно делење на истиот начин, а делителот со кој делиме го запишуваме десно од линијата. Така продолжуваме додека сите колони под дадените броеви не завршат со 1.

На овој начин десно од вертикалната линија се добиваат сите прости множители на бараниот најмал заеднички содржател, којшто потоа лесно се пресметува.

Најдениот најмал заеднички содржател за броевите 54, 120, 140 и 450 по првиот и

вториот начин гледаме дека е ист:

$$НЗС\ (54, 120, 140, 450) = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7 = 37\ 800.$$

Бројот 54 колку пати се содржи во најдениот НЗС (37 800) може да се одреди кога ќе се пресмета количникот 37 800 : 54, но тоа е доста бавна и отежната постапка.

Колку пати даденият број 54 се содржи во НЗС (37 800) може многу побрзо и полесно да се одреди и вака: од добиените прости множители на НЗС (десно од вертикалната линија) ги издвојуваме (или покриваме со рака) оние прости множители, чиј производ е еднаков на бројот 54. Тоа се множителите $2\cdot3\cdot3\cdot3=54$. Производот пак, на неиздвоените (непокриените со раката) прости множители од НЗС, ќе ни покаже колку пати бројот 54 се содржи во НЗС. Така наоѓаме дека $54 = 2\cdot3\cdot3\cdot3$ се содржи во НЗС (37800) - $2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7 = 700$ пати.

Така постапуваме и тогаш кога треба да се одреди колку пати 120, 140 или 450 се содржи во НЗС, па добиваме:

$$37800 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7 = (2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5)\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7 = 120\cdot315;$$

велиме дека 120 во 37800 се содржи 315 пати.

Слично на ова, одреди сам колку пати се содржат броевите 140 и 450 во НЗС (37 800).

6,	15,	30	2
3,	15,	15	3
1,	5,	5	5
1,	1,	1	

Пример 3. Да се одреди НЗС за броевите 6, 15 и 30!

Постапувајќи како во претходниот пример гледаме дека: НЗС(6, 15, 30) = 30, а тој е најголемиот од дадените броеви. Тоа е затоа што другите два дадени броеви се содржат без остаток во бројот 30. Оттука заклучуваме:

Ако најголемиот од дадените броеви е делив со секој од останатите дадени броеви, тогаш тој најголем број ќе претставува истовремено и најмал заеднички содржател за сите дадени броеви. На пример: НЗС за 3, 4 и 12 е 12.

Пример 4. Да се одреди НЗС за: 6, 8, 9, 36, 48.

Пред да почнеме да го бараме НЗС гледаме дека бројот 6 се содржи во 36 и 48, бројот 8 се содржи во 48, а 9 се содржи во 36. Бидејќи 36 и 48 треба да се содржат во НЗС што го бараме, тогаш во него несомнено ќе се содржат и множителите на 36 и 48. Според тоа, од петте дадени броеви, броевите 6, 8 и 9 ги изоставаме, па ќе бараме НЗС само за останатите броеви 36 и 48. Така наоѓаме дека:

$$НЗС\ (6, 8, 9, 36, 48) = НЗС\ (36, 48) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 144$$

Пример 5. Да се одреди НЗС за броевите 5, 7 и 11!

Според познатата постапка наоѓаме:

$НЗС\ (5, 7, 11) = 5\cdot7\cdot11 = 385.$

Оттука гледаме дека дадените броеви се сите прости. Па тие мораат да влезат како множители на нивниот НЗС.

Во таков случај НЗС е еднаков на производот на дадените прости броеви.

Пример 6. Да се одреди НЗС за 28 и 15. Наоѓаме дека: НЗС (28, 15) = 28·15 = 420.

Гледаме дека двата дадени броја немаат заеднички множители, т.е. тие се заемно прости броеви. Во овој случај НЗС е еднаков на производот од дадените броеви. Според тоа:

Најмалиот заеднички содржател на два прости или заемно прости броеви е еднаков на нивниот производ.

На пример: НЗС за 3 и 5 е 15, за 84 и 55 е еднаков на 84·55 = 4 620.

Да напоменеме дека ако се дадени повеќе од два броја, претходното правило не мора да важи. На пример, броевите 6 = 2·3, 10 = 2·5 и 15 = 3·5 немаат заеднички множители и НЗС(6, 10, 15) = 2·3·5 = 30, но $30 \neq 6 \cdot 10 \cdot 15$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Даден број колку содржатели може да има? Зошто?
2. Што е тоа заеднички содржател за два или повеќе дадени броеви?
3. Колку заеднички содржатели можеме да имаме за неколку дадени броеви?
4. Кој број го викаме најмал заеднички содржател за неколку дадени броеви и како тој се одредува? Дај примери!
5. Како се одредува НЗС за простите и за два взаемно прости броеви? Покажи го тоа на неколку примери!
6. Одреди го НЗС за броевите: а) 18 и 24; б) 45 и 54; в) 15 и 25; г) 48 и 72; д) 4 и 6; ѓ) 8, 15 и 7; е) 10 и 7; ж) 4, 5 и 6; з) 5, 12 и 60; ѕ) 3, 4 и 12; и) 9, 27 и 81.
7. Најди го НЗС за броевите, а потоа одреди колку пати секој од дадените броеви се содржи во најдениот НЗС: а) 42, 56 и 84; б) 45, 72, 120 и 180; в) 12, 18 и 32.
8. Треба да се направи сандаче во форма на квадар со основа квадрат, во кое ќе редиме кутии со должина 15 cm и ширина 6 cm. Каква најмала должина треба да има страната на квадратот за да можеме цел број кутии да наредиме едно до друго во него?
9. Предното тркало на една кола има периметар од 225 cm, а задното тркало периметар од 325 cm. Колкав најмал пат ќе помине колата, додека двете тркала истовремено се завртат цел број пати?
10. По должината на еден пат од местото A поставени се столбови на секои 35 метри по еден. Решено е тие столбови да се разместат така што сега од местото A да бидат распоредени на растојание 50 метри еден од друг. На какво најмало растојание од местото A стариот столб нема да биде преместуван?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1 Што можеш да кажеш за множеството A, ако важи релацијата $A \subseteq \varnothing$?

2 Што може да се каже за множеството B, ако за секое множество A важи:
а) $A \cap B = B$;
б) $A \cup B = A$?

3 Како ќе се промени производот на три броја, ако првиот број се зголеми 4 пати, вториот број се намали 8 пати, а третиот број се зголеми 6 пати?

4 Деленикот е зголемен 4 пати. Како треба да се промени делителот, така што количникот:
а) да се зголеми 12 пати;
б) да се намали 2 пати;
в) да остане неизменет?

5 Еден мотоциклист поминал некое растојание за 6 часа. За колку часа една кола ќе помине 8 пати поголемо растојание, ако таа се движи 3 пати побрзо од мотоциклистот?

6 Една сточарска фарма за своите крави спремила резервна храна за 100 дена. Колку дена ќе се хранат кравите, ако резервната храна е зголемена 3 пати, а крави имало 2 пати повеќе, отколку што е сметано на почетокот?

7 Пресметај ја вредноста на изразите:
а) $30 + 320 : 4 - 15 \cdot 7$;
б) $28 \cdot 6 - 28 : 7 + 406$;
в) $(42 : 6 + 52 : 4) \cdot 8 - (100 - 82)$;
г) $480 : 15 \cdot 4 - 56 : 8 + 14$;
д) $(15 - 7) : (28 : 7) + 42 : 6$;
ѓ) $(64 - 22) : (36 + 6) + 23$.

8 Делителот е еднаков на 15, количникот е 24, а остатокот 11. Најди го деленикот!

9 Најди ги сите броеви кои се деливи со производот на броевите 12 и 13?

10 Напиши ги сите заемно прости броеви заедно со бројот 10, но што се помали од него!

11 Најди колку е НЗД (324, 516, 120).

12 Најди колку е НЗС (25, 55, 60).

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1 Запиши го множеството:
а) на сите денови во неделата;
б) на сите градови во нашата Република што имаат над 20 000 жители;
в) на сите бои во сончевиот спектар;
г) на сите непарни природни броеви што се помали од 20.

2 Наведи неколку елементи од множеството на сите зборови што започнуваат на буквата *s*.

3 Запиши го на два начина множеството на сите природни броеви што го задоволуваат условот: а) $x < 7$; б) $x \leq 5$; в) $3 \leq x < 8$.

4 Одреди какви се множествата, конечни или бесконечни:
а) $S =$ {книги во библиотеката};
б) $M =$ {кружни линии, што минуваат низ две дадени точки во рамнината};
в) $P =$ {прави што минуваат низ две дадени точки};
г) $A =$ {парни природни броеви};
д) $B =$ {листови на едно дрво}.

5 Нека е $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Запиши ги следниве подмножества од A:
а) сите парни броеви од A;
б) сите непарни броеви од A.

6 Дали се вистинити тврдењата:
а) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$;
в) $2 \in \{1, 2, 3\}$;
г) $2 \subset \{1, 2, 3\}$;
д) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}\}$?

7 Дадени се множествата: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{3, 6, 9\}$.
Образувај ги следниве множества: а) $A \setminus B$; б) $B \cap C$; в) $A \cup C$.

8 Образувај ги пресекот и унијата од множествата:

$$A = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x \leq 5\} \text{ и } B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 3 \leq x < 7\}.$$

9 Запиши го множеството $M = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 2 < x < 8\}$ како пресек на две множества!

10 Запиши го множеството $S = \{ x \mid x \in \mathbf{N}, x < 5 \text{ или } x > 9\}$ како унија на две множества!

11 Дадени се множествата: $A = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x \leq 8\}$ и $B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 9 < x < 15\}$. Одреди ги разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

12 Во една паралелка имало 32 ученика. Од нив 20 ученици се членови на групата млади математичари, 14 се членови на шах - секцијата, а 8 ученици не членуваат ни во една од тие две секции. Колку млади математичари се членови на шах - секцијата?

13 Нека A е било кое множество. На што се еднакви множествата:
а) $A \cap A$, $A \cap \varnothing$; б) $A \cup A$, $A \cup \varnothing$; в) $A \setminus A$, $A \setminus \varnothing$?

14 Нека M е множество на две прави што се сечат во точката S. Дали смееме да запишеме: $S \in M$?

15 Кое од следниве две множества е подмножество на другото и запиши го тоа: а) A и $A \cap B$; б) A и $A \cup B$; в) $A \cap B$ и $A \cup B$?

16 Во кои случаи ќе бидат точни равенствата:
а) $A \cap B = B$; б) $A \cap B = A \cup B$; в) $A \setminus B = A$?

17 На што е еднаков комплементот на: а) празното множество, б) универзалното множество? Наведи примери!

18 На што се еднакви множествата: а) $A \cap A'$; б) $A \cup A'$; в) $A \setminus A'$?

19 Зошто низата на природните броеви е бесконечна?

20 Што е бројна линија и што прикажуваме на неа?

21 Кој број доаѓа во низата на природните броеви по бројот: 39, 994 520, 8 009, 7 999, 5 422 998?

22 Кој број во низата на природните броеви се наоѓа пред бројот: 80, 100, 112, 10000, 100500?

23 Зошто ги делиме броевите на класи? Како ги добиваме класите?

24 Како се вика првата класа? Како се вика втората класа? Како третата? итн.

25 Како се пишува милион? Како милијарда? Како билион?

26 Прочитај ги следниве броеви: 5 088 420, 721 000 208, 2 003 004 005 001!

27 Напиши ги броевите: педесет илјади и дваесет, осумстотини пет илјади и два, дваесет милиони триста пет, триста милиони, пет милијарди и дваесет илјади!

28 Од цифрите 3, 6 и 7 да се напишат сите троцифрени броеви и да се подредат по големина.

29 Која е највисоката декадна единица во троцифрениот број? Во петцифрениот? Во осумцифрениот број?

30 Колку класи содржи четирицифрениот број? Колку петцифрениот? Колку осумцифрениот? Колку десетцифрениот број?

31 Напиши го најмалиот четирицифрен број, шестцифрен, петцифрен и десетцифрен број, потоа прочитај ги тие броеви!

32 Каква месна вредност има цифрата 3 во броевите: 54 383 005, 45 300, 3 000 000?

33 Запиши го: а) првиот; б) третиот; в) петтиот; г) n-тиот број, што доаѓа по бројот a во низата на природните броеви!

34 Докажи дека:

а) Збирот на два непарни броја е парен број;

б) Збирот на еден парен и еден непарен број е непарен број;

в) Збирот на два парни броја е пак парен број!

35 Ако се a и b парни броеви, а c - непарен број, кажи какви ќе бидат броевите:

а) $a + b$; б) $a + c$; в) $a + b + c$; г) $a + b \cdot c$; д) $a + 1$.

36 Испитај дали множеството на: а) парните броеви; б) непарните броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење!

37 Пресметај ги следниве производи со групирање на множителите на најпогоден начин:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $4 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 6$; в) $9 \cdot 125 \cdot 6 \cdot 8$!

38 Запиши ги во пократка форма збировите:

а) $9 + 9 + 9 + 9 + 9$; б) $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; в) $(8 + 7) + (8 + 7) + (8 + 7)$.

39 Најди го бројот x, ако е:

а) $s + x = a$; б) $x - 3 = c$; в) $a - x = c$; г) $x \cdot 4 = 28$; д) $a \cdot x = c$; ѓ) $x : 2 = b$.

40 Изврши ги операциите означени во изразите:

а) $24 + 48 : 6 = ?$
б) $18 \cdot 12 - 8 \cdot 6 = ?$
в) $(510 : 17 + 18) - (54 - 60 : 4) = ?$
г) $1204 \cdot 0 + 1 \cdot (420 + 0 : 26) = ?$
д) $627\,900 : 8050 + 26928 : 33 = ?$
ѓ) $(24 + 48) : 6 = ?$
е) $18 \cdot (12 - 8) \cdot 6 = ?$
ж) $1\,092\,352 : 544 + (27 - 26) \cdot 380 = ?$
з) $2200 - 420 : 20 + 14 \cdot 41 = ?$
ѕ) $2000 - 820 \cdot (20 - 18) = ?$

41 Да се пресмета вредноста на изразите:

а) $24 : 3 + 5^3 - 8^2$;
б) $(72 : 8 - 5) \cdot 3^2 : 6$;
в) $(5 + 3)^2 - 5^2 + 17$;
г) $(3^2 - 5) \cdot 6 + 43 - 7 \cdot 5$;
д) $52 : 13 \cdot 5 - (3^3 - 5^2)$;
ѓ) $46 + 23 \cdot (180 : 9 - 4^2) + 7^2$.

42 Напиши изрази со помош на загради, а потоа пресметај ја нивната вредност:

а) Бројот 8 да се помножи со количникот на броевите 42 и 6;

б) Бројот 120 да се подели со производот на броевите 8 и 3;

в) Бројот 64 да се подели со количникот на броевите 32 и 4;

г) Количникот на броевите 18 и 3 да се помножи со количникот на броевите 35 и 7;

д) Збирот на броевите 12, 7 и 5 да се подели со количникот на броевите 56 и 7;

ѓ) Разликата на броевите 15 и 6 да се помножи со збирот на броевите 8 и 12!

43 Запиши ги следниве изрази, а потоа пресметај ги:

а) Од производот на броевите 427 и 25 да се одземе количникот на броевите 650 и 25;

б) Од производот на броевите 56 и 24 одземи ја нивната разлика;

в) Од производот на броевите 84 и 28 одземи го нивниот збир;

г) Кон количникот на броевите 504 и 8 додај го нивниот збир;

д) Кон збирот на броевите 27, 18 и 5 додај го нивниот производ.

44 Како го определуваме делителот кога е познат дељеникот и количникот? Определи го бројот x во следниве равенства:

а) $48 - x = 6$;

б) $144 : x = 24$;

в) $180 : x = 36$;

г) $2889 : x = 107$;

д) $307 = 3\,684 : x$;

ѓ) $40 = 320 : x$.

45 Определи го бројот, кој кога ќе се помножи со 8 и од добиениот производ се извади бројот 12, се добива бројот 60!

46 Сум замислил еден број. Кога од него ќе извадам 27 се добива бројот 45. Кој број сум го замислил?

47 За колку единици треба да се намали бројот 152, за да се добие 98?

48 Разликата на два броја е еднаква на 524, а поголемиот број е 1260. Најди го помалиот број!

49 Количникот на два броја е 43, а делителот е 14. Најди го дељеникот!

50 Количникот на два броја е 18, а дељеникот е 216. Најди го делителот.

51 Дељеникот е еднаков на 31, количникот е 4, а остатокот 3. Определи го делителот!

52 Ако даден број се подели на 5 дела и кон добиениот количник се додаде бројот 12, се добива бројот 18. Кој е тој број?

53 Одреди го непознатиот дељеник при следниве делења со остаток:

а) $x : 5 = 7$ и остаток 2; б) $x : a = b$ и остаток r.

54 Кои броеви се деливи со 2, а кои со 5!

55 Кои од броевите: 10, 14, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 36, 38, 40, 42, 50, 385, 7000, 9004, 9005, се деливи со 2, а кои со 5?

56 Кои од броевите: 840, 950, 1028, 1500, 275, 8060, 10025, 20750, 4872, 9996, се деливи со 4, а кои со 5?

57 Покажи кои од следниве години: 1915, 1982, 1990, 1998, 2000, 2002, 2008, 2100, 2200, 2252, 2300, 2376, 2400, 2500, ќе бидат прости, а кои престапни?

58 Наместо ѕвездичките во средината на следниве броеви напиши цифра, со што тие броеви ќе бидат деливи со наведениот број: а) 28*51 со 3; б) 14*3 со 3; в) 107*2 со 9; г) 126*5 со 25; д) 7*28 со 6; ѓ) 61*35 со 15; е) 281 *6 со 12.

59 Од цифрите 0, 2, 3 и 4 напиши неколку броеви, кои едновремено се деливи со 2, 3, 4, 5, 9 и 10.

60 Од цифрите 2, 3, 5 и четвртата произволно земена цифра напиши неколку броеви кои се деливи: а) со 2; б) со 3; в) со 4; г) со 5; д) со 6; ѓ) со 9.

61 Каков број е производот на кој и да било парен број со било кој непарен број? А каков ќе биде производот на било кои два непарни броја? Зошто?

62 Разложи го на прости множители бројот 245 230!

63 Кои од броевите: 53, 111 111, 1 294 398, 432 815, 79, се прости, а кои сложени?

64 Најди колку е НЗД (42, 34, 450).

65 Најди колку е НЗС (9, 12, 24, 36).

ТЕМА II

ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

Науката која ги изучува геометриските фигури и ги испитува нивните својства се нарекува **геометрија**. Делот од геометријата што ги изучува рамнинските фигури кои лежат во иста рамнина се нарекува **планиметрија**. Во оваа тема ќе изучуваме рамнинска геометрија, т.е. планиметрија и ќе се запознаеме се некои од поважните геометриски фигури, како што се точка, права, кружница, агол итн. Понатаму секогаш ќе подразбираме дека фигурите лежат во една рамнина. На пример, ако кажеме ,,Нека се дадени две прави“, подразбираме дека тие лежат во иста рамнина. Таа рамнина може да биде определена со училишната табла, листот од тетратката и сл.

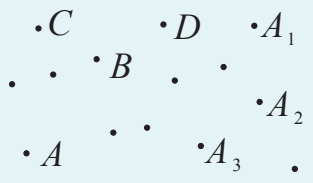
II.1. ТОЧКА И ПРАВА

1. Во математиката вообичаено е наједноставните поими да не ги дефинираме, а за нив даваме само нивни интерпретации. Таков поим е поимот за точка. Точките ги замислуваме како ситни честици, кои се толку ситни што немаат ни должина, ни ширина, ни дебелина. Такви честици во реалниот свет не постојат. Нив само ги замислуваме.

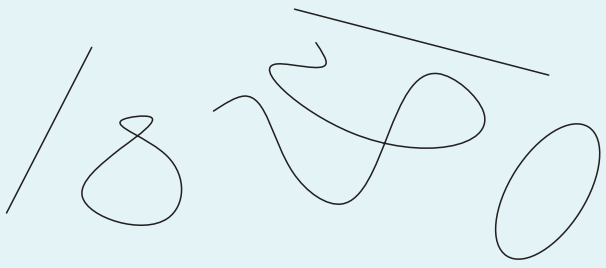
Во тетратката и на таблата точките ги претставуваме со траги што ги остава допрената игла, подострен молив или врвот на кредата. Но, секоја таква точка, колку и да е мала, сепак има должина и ширина. Меѓутоа, геометриската точка нема никакви димензии.

Точките вообичаено ги обележуваме со мало полно крукче (•) или со пресек на две прави - цртички (×), а ги означуваме со големите печатни букви A, B, C,... од латинската азбука, или со $A_1, A_2, A_3,$ итн., како на цртеж 1.

Секое непразно множество на точки се нарекува **геометриска фигура**. Според тоа, секоја точка претставува една геометриска фигура. Друг важен вид на геометриски фигури се правите.



Цртеж 1

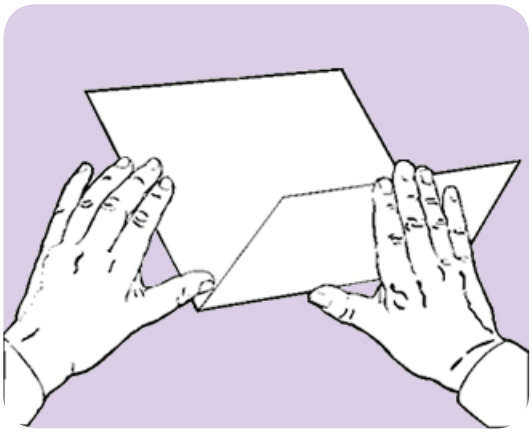


Цртеж 2

На цртеж 2 нацртани се неколку линии. Тие можат да бидат прави или криви. Претстава за права линија можеме да добиеме на повеќе начини. На пример:

Земете еден тенок конец и затегнете го добро помеѓу два клина (цртеж 3). Затегнатиот конец е модел на една права линија. Ваквиот начин на добивање на права линија често се користи го градежништвото и во други области.

Цртеж 3

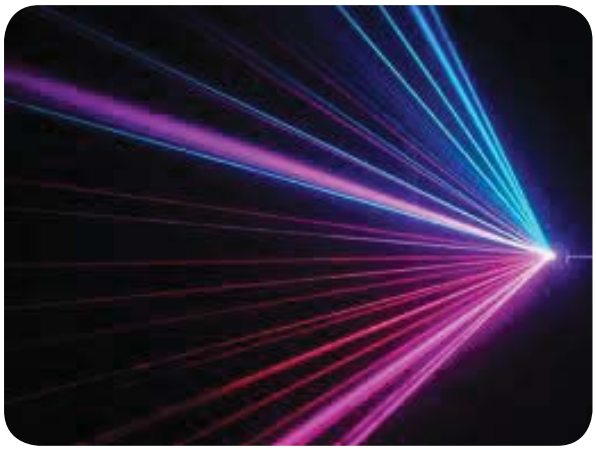


Цртеж 4

Земете еден лист хартија и превиткајте го како и да било. Работ што се добива при тоа, исто така, претставува права линија (цртеж 4).

Претстава за права линија ни даваат и ласерските зраци кои во модерното време нашле голема примена (цртеж 5).

Правите линии, претставени со затегнатиот конец и работ на превитканиот лист хартија, како што гледаме се ограничени и од двата краја. Исто како што поимот за точка не се дефинира, така и поимот за права во математиката обично не се дефинираа, туку само се дава негов опис. Така, под поимот **права** подразбираме права линија која е неограничена од двата краја. Бидејќи правата е неограничена од двата краја, ние можеме да нацртаме само дел од неа. Но секогаш треба да подразбираме дека таа е продолжена и од едниот и од другиот крај.



Цртеж 5

Поим за права ни дава, на пример и секој раб на книга, училница, зграда итн., доколку замислиме дека тој раб е продолжен од двата краја до бесконечност.

2. Ќе наведеме некои својства на правата.

1º Правата нема ниту почеток ниту крај.

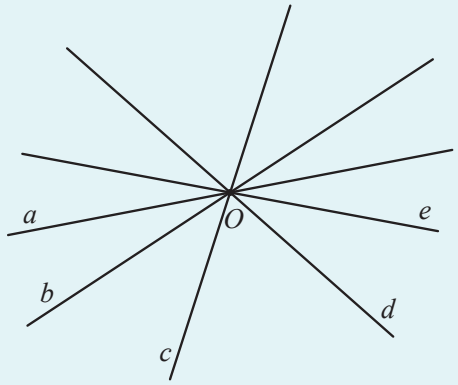
2º Низ една точка *O* можат да се повлечат бесконечно многу прави.

Ова својство е илустрирано на цртеж 6.

3º Низ кои и да било две различни точки A и B минува една и само една права.

Својството 3º можеме да го искажеме и на следниот начин:

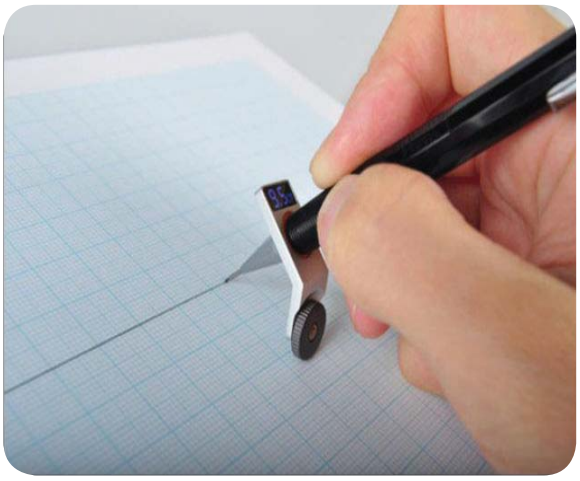
Правата е потполно определена со две различни точки.



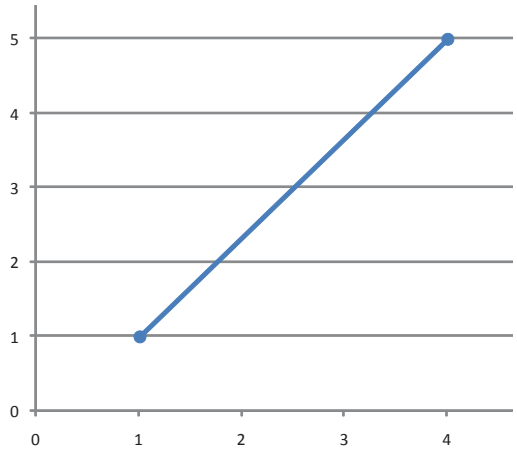
Цртеж 6

Цртеж 7

Правите ги цртаме со линијар. На цртеж 7 е покажано како се црта права. На цртеж 8 е прикажан начин на цртање права линија со еден модерен тип на технички молив со тркалце. Освен што ни дава стабилност да нацртаме права линија тркалцето го мери изминатиот пат и со тоа ни покажува колку е долга линијата што ја цртаме.



Цртеж 8



Цртеж 9

Како што се гледа на цртеж 6, правите ги означуваме со мали латински букви, на пр., a, b, c,… или пак со две точки низ кои минува таа права, на пр., AB, AC, MN,… Всушност, со задавање на почетна и крајна точка се црта сегмент од права во компјутерска програма (цртеж 9).

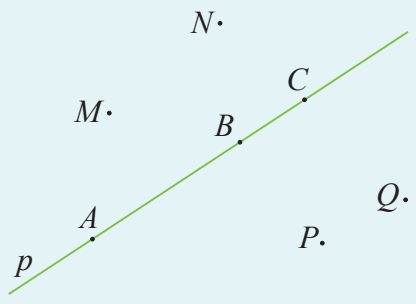
ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колку прави можат да се повлечат низ една точка? А колку низ две различни точки?
2. Нацртај три прави во тетратката, а потоа обележи ги.
3. Обележи две точки во тетратката, потоа соедини ги со една права линија и две криви линии. Која од тие три линии е најкратка?
4. Кои својства ги има правата?
5. а) Колку точки има на една права?
   б) Може ли на една права да лежат само 2 точки?
   в) Може ли на една права да лежат само 2011 точки?
6. Обележи три различни точки во тетратката! Може ли секогаш низ тие три точки да се повлече една права?

II.2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКИ И ПРАВИ

1. Заемна положба на точка и права.

Нацртајте една права и означете ја со p. Таа има бесконечно многу точки. Изберете три кои и да било нејзини точки и означете ги со A, B и C. Потоа, изберете и означете уште неколку други точки: M, N, P и Q во рамнината како на цртеж 10.



Цртеж 10

Гледаме дека точките A, B и C ѝ припаѓаат (лежат) на правата p, а точките M, N, P и Q не ѝ припаѓаат (не лежат) на неа.

Тоа симболички го запишуваме:

$$A \in p,\ B \in p,\ C \in p,\ M \notin p,\ P \notin p,\ \text{итн.}$$

Во општ случај, дадена права и дадена точка можат да ги имаат следниве две заемни положби:

а) точката ѝ припаѓа (лежи) на правата;

б) точката не ѝ припаѓа (не лежи) на правата.

Ако се дадени три или повеќе точки, тогаш велиме дека тие се **колинеарни**, ако лежат на една права, т.е. ако постои права на која тие ѝ припаѓаат. Ако, пак, не постои таква права која поминува низ тие точки, тогаш велиме дека тие точки не се колинеарни, односно дека

тие се **неколинеарни** точки.

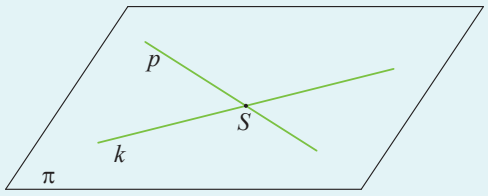
2. Заемна положба на две прави.

Нека k и p се две прави во една рамнина. Да испитаме какво множество е $k \cap p$.

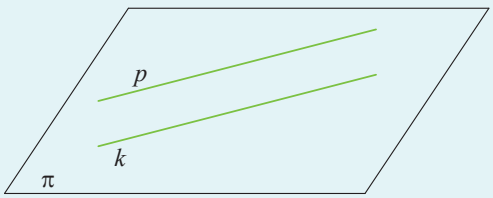
Можни се следните три случаи:

а) Правите k и p имаат само една заедничка точка, т. е. $k \cap p = \{S\}$.

Во тој случај велиме дека правите k и p **се сечат** во една точка S. Заедничката точка S се нарекува **пресек** на правите k и p (цртеж 11).



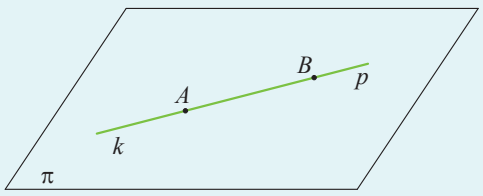
Цртеж 11



Цртеж 12

б) Правите k и p немаат ниту една заедничка точка, т.е. $k \cap p = \varnothing$. Во тој случај велиме дека правите k и p **се паралелни** и пишуваме $k \,||\, p$ (цртеж 12).

в) Правите k и p имаат барем две заеднички точки. Да ги означиме тие две точки со A и B. Знаеме дека овие две точки A и B определуваат единствена права. Според тоа, доаѓаме до заклучок дека двете прави претставуваат исто множество на точки, т.е. секоја точка на правата k е точка и на правата p и обратно, секоја точка на правата p е точка и на правата k. Во овој случај, велиме дека правите k и p **се совпаѓаат** (цртеж 13).



Цртеж 13

Случајот кога правите k и p се совпаѓаат го вбројуваме во специјален случај на паралелност, па затоа велиме:

1° Секоја права е паралелна сама на себе, т.е. $k \,||\, k$.

За паралелноста на правите важат исто така и следните две особини:

2° Ако правата k е паралелна на правата p, тогаш и правата p е паралелна на правата k, т.е.

$$k \,||\, p \Rightarrow p \,||\, k.$$

3° Ако правата k е паралелна на правата p, а правата p е паралелна на правата s, тогаш правата k е паралелна и на правата s, т.е.

$$k \,||\, p \text{ и } p \,||\, s \Rightarrow k \,||\, s.$$

Проверете ги овие својства со помош на цртеж. Притоа разгледајте ги поодделно двата можни случаи за паралелни прави.

3. Заемна положба на две точки.

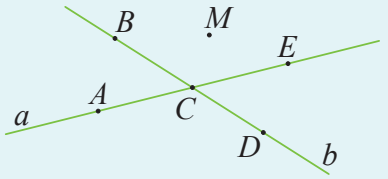
Нека се дадени две точки A и B. Можни се два случаја: точките да се различни ($A \neq B$) и точките да се совпаѓаат. Кога точките A и B се совпаѓаат пишуваме $A \equiv B$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е тоа геометриска фигура?

2 Нацртај геометриска фигура која се состои од само три:
а) колинеарни; б) неколинеарни точки.

3 На цртеж 14 нацртани се две прави a и b и обележени се неколку точки: A, B, C,... Запиши ги кратко следниве реченици:
а) точката A ѝ припаѓа на правата a, а не ѝ припаѓа на правата b;
б) точката B лежи на правата b, а не лежи на правата a;
в) точката C ѝ припаѓа на правата a и на правата b;
г) точката M не ѝ припаѓа ниту на правата a, ниту на правата b.



Цртеж 14

4 Кои се заемните положби на две прави? Одговорот илустрирај го со цртеж.

5 Каква заемна положба имаат линиите во тетратките по мајчин јазик?

6 Кои се својствата на паралелните прави?

7 Колку точки можат да определат три прави, ако меѓу нив нема паралелни.

8 Колку прави определуваат три: а) колинеарни; б) неколинеарни точки?

9 Колку прави определуваат четири точки во произволна положба? Разгледај ги сите можни случаи.

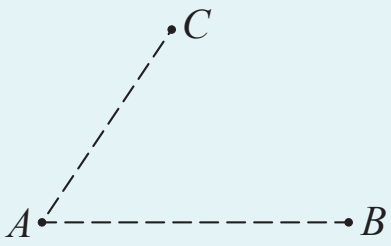
II.3. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Да воочиме било кои три различни точки A, B и C (цртеж 15). Практиката нè упатува на еден ваков заклучок: точката A се наоѓа поблизу до точката C отколку до точката B (цртеж 15).

Тоа го искажуваме уште и вака:

Растојанието од точката A до точката C е помало отколку растојанието од точката A до точката B.

Под зборот „**растојание**“ од една до друга точка ќе подразбираме некоја точно определена величина која, како и секоја друга величина, може да се мери и да се изразува со број. Растојанието го изразуваме во сантиметри, метри или километри. На пример, растојанието од точката A до точката B на цртеж 15 е 4 cm, а тоа од точката A до точката C е 3 cm.



Цртеж 15

Растојанието од точката A до точката B симболички ќе го означуваме со $\overline{AB}$, па горниве заклучоци ги запишуваме: $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm. Според тоа:

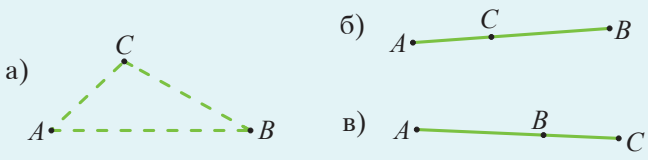
$$\overline{AB} > \overline{AC}, \text{ односно } \overline{AC} < \overline{AB}.$$

Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш растојанието од A до B е еднакво на нула, т.е., ако $A \equiv B$ тогаш $\overline{AB} = 0$.

Очигледно е дека за растојанието ќе важи и следново својство:

Растојанието од точката A до точката B е еднакво на растојанието од точката B до точката A, т.е. $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Обележи три различни точки A, B и C и измерите ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Тоа е сторено во три различни случаи на цртеж 16.



Цртеж 16

Ако го споредиме растојанието $\overline{AC}$ со збирот на растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, ќе забележиме дека во случаите а) и б) ќе биде $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, а во случајот в) ќе имаме: $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$.

Тоа е во согласност со следново важно својство на растојанијата.

За кои и да било три точки A, B и C, растојанието од A до C е помало или еднакво (велиме не поголемо) од збирот на растојанијата од A до B и од B до C, т.е., секогаш важи релацијата:

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}\,.$$

Нацртајте една права p и на неа воочи три различни точки A, M и B (цртеж 17).

Што искажуваме со реченицата: „Точката M *лежи меѓу* точките A и B“? Измерете ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Што забележувате?

Поимот „**лежи меѓу**“ често ќе го користиме. Тој поим, со помош на поимот растојание, го воведуваме вака:

Точката M лежи меѓу точките A и B, ако тие три различни точки припаѓаат на една права и ако важи равенството $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$.

Цртеж 17

Очигледно е дека:

Од три различни точки, кои ѝ припаѓаат на иста права, една од нив секогаш лежи меѓу другите две точки.

Но, од три различни точки кои не ѝ припаѓаат на иста права ниту една од нив не може да се каже дека лежи меѓу другите две.

И навистина, ако три точки A, B и C не ѝ припаѓаат на иста права, секогаш е $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, па не е можно да биде $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Од иста причина не се можни ниту равенствата:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \quad \text{и} \quad \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}\,,$$

што покажува дека ниту една од нив не лежи меѓу другите две.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што подразбираме под растојание од една точка до друга?

2 Кога за една точка велиме дека лежи помеѓу другите две точки? Образаложи го одговорот со помош на цртеж.

3 Нека $A \equiv B$. Колкаво е растојанието помеѓу точките A и B?

4 Дадени се три различни колинеарни точки. Дали може:

а) ниту една од нив да не лежи помеѓу другите две?

б) точно една од нив да лежи помеѓу другите две точки?

в) точно две точки од нив да лежат помеѓу другите две точки?

г) секоја точка да лежи помеѓу другите две точки?

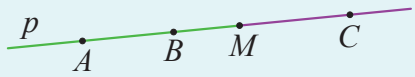
5 Каква е заемната положба меѓу точките A, B и M, ако е $\overline{BM} + \overline{AM} = \overline{BA}$?

6 Точката S лежи меѓу точките A и B, а точката M лежи меѓу точките S и B.
а) дали тие точки припаѓаат на иста права?
б) дали точката S лежи помеѓу A и M?
в) дали точката M лежи помеѓу A и B?
г) дали точката M лежи помеѓу A и S?

II.4. ПОЛУПРАВА И ОТСЕЧКА

1. Полуправа

Нацртајте една права p и означете неколку произволни точки на неа, како на цртеж 18.



Цртеж 18

Гледаме дека точката $M \in p$ го разбива множеството точки кои што се различни од M од правата p на две непразни подмножества (два дела), така што:

1°. Точката M лежи меѓу кои и да било две точки (A и C), што лежат на различните делови од правата, но;

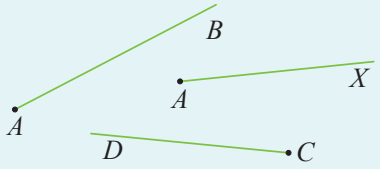
2°. Од две точки (A и B), што лежат на еден ист дел од правата, една од нив секогаш лежи меѓу другата точка и точката M.

Секој од двата дела, на кои точката *M* ја разбива правата *p* вклучително и точката *M*, се вика полуправа со почеток *M*.

Затоа секоја полуправа, како дел од правата, е ограничена од едната страна. Точката (M), што ја ограничува полуправата, се вика **почеток** на полуправата.

Полуправите имаат почеток но немаат крај, за разлика од правите, кои немаат ниту почеток ниту крај.

Полуправата ја означуваме со две печатни букви од кои првата ни го означува почетокот, а другата која и да било друга нејзина точка, на пример: полуправа AX, полуправа AB, полуправа CD (цртеж 19).

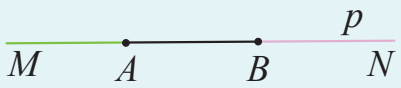


Цртеж 19

2. Отсечка

Нацртајте една права $p=MN$ и означете две различни нејзини точки со A и B (цртеж 20).

Гледаме дека точките A и B ја разбиваат правата p на три подмножества (три дела). Тоа се: полуправите AM и BN и множеството на сите точки што лежат меѓу точките A и B.



Цртеж 20

Множеството на сите точки од правата p, што лежат меѓу точките A и B, вклучувајќи ги и точките A и B, се вика **отсечка** и се означува со AB.

Точките A и B се викаат **крајни точки** или краеви на отсечката AB, а секоја друга точка која ѝ припаѓа на отсечката AB, се вика нејзина **внатрешна точка**. Според тоа, можеме да дефинираме:

II

Дефиниција 1

Отсечка е дел од правата, што е ограничена со две различни точки од неа.

Растојанието меѓу крајните точки на отсечката AB, се вака **должина на отсечката** и се означува со $\overline{AB}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Нацртај три полуправи, обележи ги и прочитај ги!

2 Дали полуправите можат да се споредуваат како што е тоа случај со отсечките? Може ли да се каже која од две полуправи е поголема, а која помала?

3 Нацртај една права и означи три нејзини различни точки со A, B и C. Потоа од некоја точка O, што не ѝ припаѓа на правата p, повлечи три полуправи кои ќе минуваат соодветно низ точките A, B и C!

4 Во рамнината на тетратката означи кои и да било четири точки A, B, C и D. Нацртај полуправи кои поаѓаат од точката A, а минуваат низ една од другите три точки, потоа нацртај полуправи кои поаѓаат од точката B, па од точките C и D, а минуваат низ една од останатите точки! Така нацртаните полуправи, колку различни прави образуваат?

5 Точките A, B, C, D по овој ред се обележени на правата p. Шрафирај ги следните подмножества од правата: а) $AC \cup BD$; б) $AC \cap BD$; в) $AC \cap CD$; г) $AB \cap CD$.

6 Нацртај права p и на неа означи три различни точки со A, B и C. Наведи колку и кои полуправи и отсечки се добиваат на правата p?

7 Можат ли две полуправи да имаат: а) само една заедничка точка; б) само две заеднички точки?

8 Дадени се три различни точки. Колку отсечки тие определуваат?

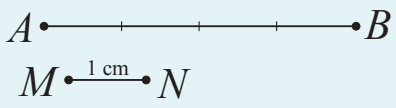
II.5. ДОЛЖИНА НА ОТСЕЧКА

Должината на отсечката ја одредуваме со мерење. За таа цел избираме некоја отсечка MN, за која земаме дека има должина еднаква на 1. Отсечката MN тогаш се вика **единична отсечка** или **мерна единица**, при што $\overline{MN} = 1$.

Основна мерна единица за мерење на отсечките е **метарот** (m). Помали мерни единици од метарот се: **дециметар** (dm), **сантиметар** (cm), **милиметар** (mm), **микрон** (μ), а поголеми се: **декаметар** (dkm), **хектометар** (hm) и **километар** (km).

Називите на помалите и поголемите мерни единици од метарот се образуваат со зборовите: **деци**, што значи десетти дел од единицата, **санти -** стоти дел и **мили -** илјадити дел; **дека** што значи 10, **хекто -** 100 и **кило** - 10 000. Еден микрон претставува должина од илјадити дел од милиметарот.

На цртежот 21 дадена е отсечка AB. За да ја одредиме нејзината должина, земаме отсечка $\overline{MN} = 1$ cm. Ја нанесуваме отсечката MN со помош на линијар или шестар врз дадената отсечка AB. Гледаме дека таа се нанесува точно 4 пати и пишуваме $\overline{AB} = 4$ cm.



Цртеж 21

Бројот 4 cm се вика **мера** или **должина на отсечката** AB, а неименуваниот број 4 се вика **мерен број** на отсечката AB.

Отсечката, како и секоја геометриска фигура е непразно множество од точки.

Да се потсетиме: две непразни множества A и B велиме дека се еднакви ако тие се состојат од едни исти елементи и притоа пишуваме $A = B$.

Според тоа, еднаквите множества A и B се едно исто множество, кое е запишано само на два различни начина.

Но, отсечките AB и CD на цртеж 22 *не се еднакви множества*, бидејќи тие не се состојат од едни исти точки. Затоа, да се каже „отсечките AB и CD се еднакви“ не би било точно. Ако отсечката AB со лизгање ја пренесеме и ја поставиме врз отсечката CD, ќе забележиме дека отсечките AB и CD се совпаѓаат (се сливаат во една отсечка). Притоа доаѓа до совпаѓање и на секоја точка од отсечката AB само со по една точка од отсечката CD и обратно.

Цртеж 22

Очигледно е дека растојанијата AB и CD се еднакви, т.е. отсечките AB и CD имаат еднакви должини. Во таков случај, за отсечките AB и CD (како фигури) велиме дека се **складни** и пишуваме:

$$AB \cong CD .$$

Воопшто:

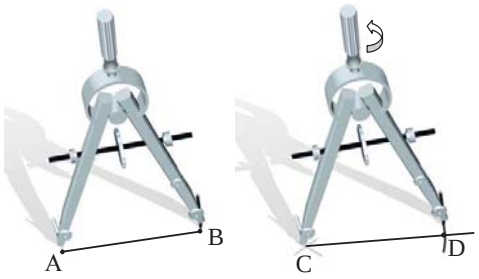
Две отсечки се складни, ако и само ако тие имаат еднакви должини, ако $\overline{AB} = \overline{CD}$

тогаш $AB \cong CD$ **и обратно.** Меѓутоа, вообичаено е за складните отсечки да велиме дека тие се **еднакви** и покрај тоа што како множества тие не се еднакви.

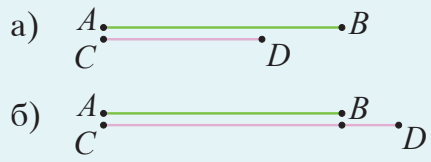
Утврдувањето на складноста, т.е. еднаквоста на две отсечки, како и цртањето на отсечка што е складна (еднаква) на дадена отсечка, најлесно се изведува со помош на шестар - види цртеж 23.

Ако отсечките AB и CD не се еднакви тогаш или AB е **поголема** од CD (цртеж 24а) или AB е **помала** од CD (цртеж 24б), т.е.

или $AB > CD$ или $AB < CD$.



Цртеж 23



Цртеж 24

Тоа, практично, го утврдуваме преку споредување на должините на отсечките AB и CD со помош на шестар.

Нека M е точка на отсечката AB. За точката M велиме дека е **средишна точка**, ако важи $\overline{AM} = \overline{MB}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Нацртај произволна отсечка AB, а потоа конструирај друга отсечка што е еднаква на отсечката AB!

2 Нацртај две еднакви отсечки, а потоа утврди која од нив е поголема, а која помала. Запиши го тоа!

3 Нацртај единична отсечка, а потоа нацртај отсечка со должина а) 3; б) 5.

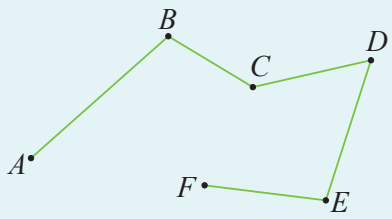
4 Дадена е права p и точка $O \in p$. Колку точки од правата p има, чие растојание од точката O е: а) поголемо од 3 cm; б) еднакво на 3 cm; в) помало од 3 cm?

5 Дадена е права q и точка $A \in q$. Што претставува множеството точки од правата q, чие растојание од точката A е: а) не помало од 3 cm; 5) не поголемо од 3 cm; в) еднакво на 3 cm?

6 Нацртај произволна отсечка со должина 5 cm, а потоа најди ја средишната точка на таа отсечка.

II.6. ИСКРШЕНА ЛИНИЈА

Во рамнината на тетратката обележете неколку точки A, B, C, D, E и F и повлечете ги отсечките AB, BC, CD, DE и EF (цртеж 25). Ќе се добие една линија $ABCDEF$ која е составена од отсечките AB, BC, CD, DE и EF, на кои крајот на првата отсечка се совпаѓа со почетокот на втората, а крајот на втората се совпаѓа со почетокот на третата отсечка итн., а освен тоа, ниту еден пар соседни отсечки (кои имаат заедничка крајна точка) не ѝ припаѓаат на иста права. Така добиената линија $ABCDEF$ се вика **искршена линија**.



Цртеж 25

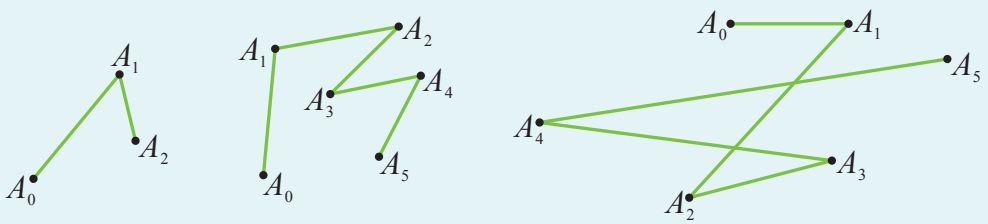
Искршената линија $A_0A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ претставува, всушност, унија од отсечките A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... , $A_{n-1}A_n$, на кои крајот на секоја отсечка (освен на последната) се совпаѓа со почетокот на наредната и ниту еден пар соседни отсечки не ѝ припаѓаат на иста права.

Отсечките A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... , $A_{n-1}A_n$, се викаат **страни на искршената линија** $A_0A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Точките A_1, A_2, A_3, ... , A_{n-1} се викаат **темиња**, а точките A_0 и A_n **краеви** на искршената линија, при што A_0 е почетна, а A_n крајна точка.

Две темиња, кои ѝ припаѓаат на иста страна на искршената линија, се викаат **соседни темиња**, а две страни со заедничко теме, се викаат **соседни страни** на искршената линија.

Збирот од должините на сите страни на искршената линија се вика **должина на искршената линија**.

Ако краевите на искршената линија A_0 и A_n не се совпаѓаат велиме дека искршената линија е **отворена** (цртеж 26).



Цртеж 26

Пример. Нека е дадена искршената линија $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$, при што $\overline{A_0A_1} = 2$ cm,

$\overline{A_1A_2} = 4$ cm, $\overline{A_2A_3} = 2{,}5$ cm, $\overline{A_3A_4} = 5$ cm, $\overline{A_4A_5} = 7$ cm. Тогаш, должината на целата искршена линија е еднаква на:

$$L = 2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 2{,}5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 20{,}5 \text{ cm}.$$

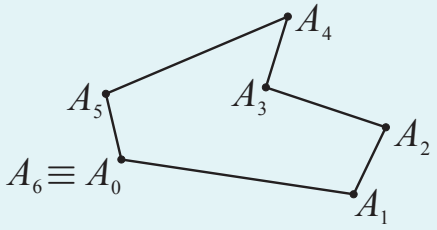
Очигледно е дека важи следното својство:

1° **Должината на секоја отворена, искршена линија $A_0A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ е поголема од растојанието меѓу нејзините крајни точки, т.е.**

$$\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} > \overline{A_0A_n}.$$

Уверете се во тоа со мерење!

Ако краевите на искршената линија A_0 и A_n се совпаѓаат, т.е. $A_0 \equiv A_n$, велиме дека искршената линија е **затворена** (цртеж 27).



Цртеж 27

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е искршена линија?

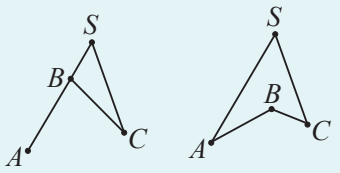
2 Во што е разликата помеѓу темињата и краевите на една искршена линија?

3 Нацртај искршена линија која има три страни и одреди ја нејзината должина!

4 Може ли две страни на една искршена линија да припаѓаат на иста права?

5 Искршената линија има должина на страните: $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm, $\overline{DE} = 5$ cm. Може ли отсечката што ги сврзува краевите на искршената линија $ABCDE$ да има должина: а) 9 cm; б) 14 cm; в) 15 cm?

6 Покажи дека должината на искршената линија ABC е помала од должината на искршената линија ASC (цртеж 28).



Цртеж 28

7 Нацртај: а) отворена; б) затворена; искршена линија со најмал број на страни.

II.7. ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ПОИМИ

Досега се запознавме со неколку поими од планиметријата, како што се поимите: точка, права, растојание, полуправа, искршена линија и други. Во математиката, по обичај, се дефинираат некои од поимите со помош на поедноставни поими. На пример, за да дефинираме полуправа, секако дека претходно треба да знаеме, на пример, што е тоа права и точка. Но, ако сакаме да дефинираме што е тоа точка, ќе забележиме дека не постојат попрости поими од поимот за точка со кои новиот поим за точка би бил дефиниран. Ист е случајот ако се обидеме да дадеме дефиниција за права. Поимот за точка не е доволен за да дефинираме права. Имено, права е множество на точки, но тоа не е доволно, бидејќи има и други множества на точки кои не се прави. На пример, и отсечката е множество од точки, но сепак не е права.

Таквите, наједноставни поими кои не можеме да ги дефинираме со поедноставни поими од нив ги нарекуваме **основни поими**. Сите останати поими, кои можат да се дефинираат со помош на основните поими се нарекуваат **изведени поими**. Така, на пример, основни поими со кои што се сретнавме до сега се: точка, права, растојание, рамнина, множество, додека изведени поими се: полуправа, отсечка, лежи помеѓу и др.

Основните поими, бидејќи не се дефинираат, се нарекуваат и недефинирани поими и пожелно е описно да се каже нивното значење. Но неопходно е да се дадат нивните својства, на пример: На секоја права лежат барем две точки, постојат барем три точки кои не лежат на иста права итн.

Основите на геометријата се изнесени уште во времето на старите Грци. Поточно, систематска изградба на геометријата е дадено во тринаесет книги под наслов „Елементи“, чиј автор е Евклид (325-265 пр.н.е.). Меѓутоа, ова познато дело не ја изложува геометријата во потполност спрема современите барања, па тоа во потполност е направено од страна на Давид Хилберт во 1899 година.

Ако некој се обиде да даде дефиниција на сите поими, покрај тоа што веќе напоменавме дека логично е посложените поими да се дефинираат со поедноставни, но не и обратно, тогаш се доаѓа до следната ситуација. Во тој случај неопходно се доаѓа до „вртење во круг“. Тоа подразбира дека за да дефинираме еден поим П неопходно е претходно да се знае некој друг поим $П_1$, но за да се дефинира поимот $П_1$, неопходно е да се дефинира претходно поимот П. За да се избегне оваа несакана ситуација на „вртење во круг“, неопходно е некои од поимите да ги прифатиме како основни, т.е. недефинирани, а останатите да бидат дефинирани со нивна помош.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои поими ги нарекуваме основни поими, а кои изведени поими?
2. Наведи примери на основни и на изведени поими.
3. Од која причина сме принудени некои од поимите да ги прифатиме како основни (недефинирани) поими?

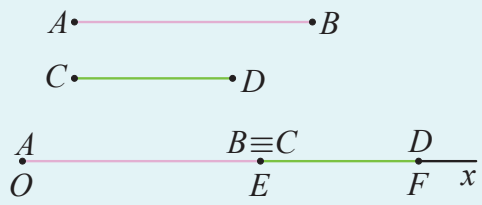
II.8. ГРАФИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ОТСЕЧКИ

1. Графичко собирање на отсечки

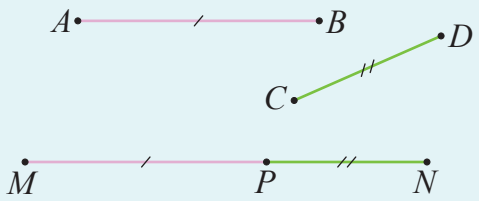
Нека се дадени отсечките AB и CD (цртеж 29).

Од почетокот O на една произволна полуправа Ox, со шестар прво ќе ја пренесеме отсечката $OE \cong AB$, а потоа во продолжение на истата полуправа од точката E ја пренесуваме и втората отсечка CD ($EF \cong CD$). Така добиената отсечка OF се вика **збир на отсечките** AB и CD (цртеж 29) и пишуваме: $OF \cong AB + CD$.

Меѓутоа, збир на отсечките AB и CD се вика и секоја отсечка MN, во која постои внатрешна точка P, така што $MP \cong AB$ и $PN \cong CD$ (цртеж 30).



Цртеж 29



Цртеж 30

Збирот на повеќе од две отсечки: AB, CD, EF, GH, ... го одредуваме, кога кон збирот на две од нив (на пример, AB и CD) ја додадеме третата отсечка (EF), потоа кон добиениот збир ја додадеме четвртата отсечка (GH), итн.

1° За собирањето на отсечките важи комутативниот и асоцијативниот закон на збирот, т.е.

(i) $AB + CD \cong CD + AB$ и

(ii) $(AB + CD) + EF \cong AB + (CD + EF)$.

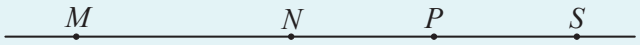
Во вистинитоста на ова својство, можеш да се увериш на следниот начин. Нанеси ги отсечките AB, CD, EF последователно на една полуправа со почеток во точка M (цртеж 31), а потоа нанеси ги последователно отсечките MN, NP и PS, така што $AB \cong MN$, $CD \cong NP$ и $EF \cong PS$. Покажи дека:

$$AB + CD \cong MP,\ DC + BA \cong PM,$$

па оттука заклучи дека важи (i). Потоа покажи дека важи:

$$(AB + CD) + EF \cong MS \quad \text{и} \quad AB + (CD + EF) \cong MS,$$

па оттука заклучи дека важи (ii).



Цртеж 31

2. Графичко одземање на отсечки

Нека се дадени две нескладни отсечки AB и CD, при што $AB > CD$ (цртеж 32).

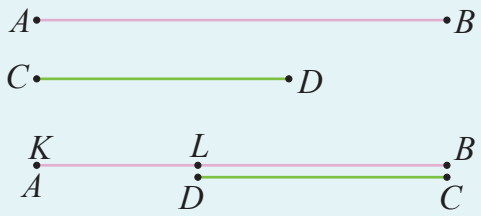
Секоја отсечка KL, таква што $KL + CD \cong AB$, се вика **разлика на отсечката** AB **со отсечката** CD и се пишува:

$$KL \cong AB - CD .$$

Значи:

$$KL \cong AB - CD \quad \text{ако е} \quad KL + CD \cong AB .$$

Разликата $AB - CD$, практично, ја одредуваме кога од едниот крај, на пример од точката B, врз поголемата отсечка AB со шестар ја пренесеме помалата отсечка CD (цртеж 32). Така добиената отсечка AD е бараната разлика на дадените отсечка AB со CD.



Цртеж 32

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е збир, а што е разлика на две отсечки?

2 Дали за произволни две отсечки AB и CD постои разликата $AB - CD$?

3 Нацртај две отсечки AB и CD ($\overline{AB} > \overline{CD}$), а потоа конструирај ги отсечките:

а) $AB + CD$; б) $AB - CD$; в) $3 \cdot AB$; г) $AB + 2CD$.

4 За три точки A, B, C познато е дека: $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm. Може ли растојанието $\overline{BC}$ да биде еднакво на: а) 12 cm; б) 5 cm; в) 13 cm; г) 2 cm?

5 Нацртај три произволни отсечки, а потоа провери дали за собирањето на отсечките важи комутативниот и асоцијативниот закон.

6 Нацртај една искршена линија $ABCD$, потоа со помош на шестар и линијар, конструирај отсечка, чија должина е еднаква на должината на искршената линија $ABCD$.

II.9. КРУЖНИЦА И КРУГ

Да се потсетиме на дефиницијата на кружница.

Дефиниција 1

Кружница е множество на сите точки во рамнината, што се наоѓаат на дадено растојание *r* од една фиксна точка *O* од таа рамнина.

Точката O се вика **центар на кружницата**, а секоја отсечка, која го сврзува центарот O со која и да било точка од кружницата, се вика **радиус на кружницата**.

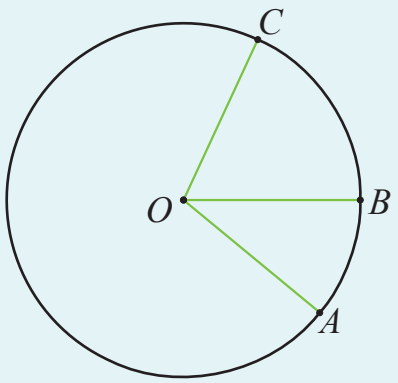
Бидејќи секоја точка од кружницата (A, B, C, ...) е на растојание r од центарот O, затоа сите радиуси на кружницата ќе имаат должина еднаква на бројот r (цртеж 33), т.е. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = ... = r$.

Значи, сите радиуси на една кружница се еднакви отсечки со должина r. Затоа и должината на радиусот на кружницата, често, пократко ја викаме само **радиус на кружницата**.

Колку кружници можат да се нацртаат во рамнината со центар во дадена точка O и со даден радиус $r = 2$ cm? (Зошто?)

Со дадена точка како центар и даден радиус може да се нацрта само една кружница. Кружницата со центар O и радиус r симболички ќе ја означуваме со $k(O,r)$.

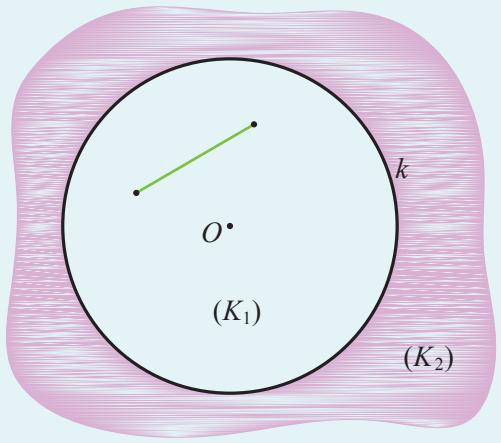
Ако две кружници имаат еднакви радиуси, тогаш и тие две кружници се складни, бидејќи можат да се доведат до совпаѓање.



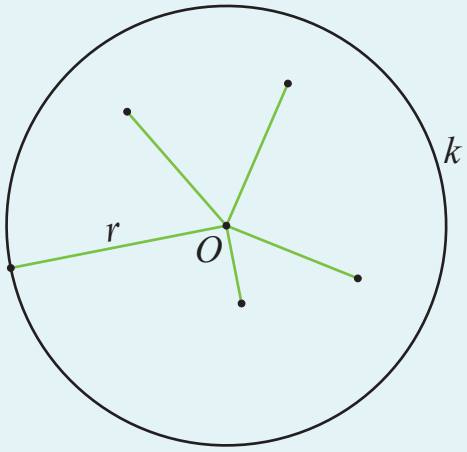
Цртеж 33

На цртеж 34 нацртана е кружница $k(O,r)$. Гледаме дека таа го разбива множеството точки од рамнината (што не припаѓаат на k) на две подмножества (два дела) и тоа: K_1 - множеството на точките што припаѓаат на делот од рамнината кој што го содржи центарот на кружницата и тој се нарекува **внатрешна област** на кружницата и K_2 - множеството на точките што припаѓаат на делот од рамнината кој што не го содржи центарот на кружницата и тој се нарекува **надворешна област** на кружницата.

Внатрешната област K_1 на кружницата k има својство да ако било кои две точки од областа K_1 се соединат со отсечка тогаш целата таа отсечка се содржи во неа (цртеж 34).



Цртеж 34



Цртеж 35

Унијата од кружницата k и нејзината внатрешна област K_1 претставува нова геометриска фигура во рамнината која се вика **круг**.

Лесно забележуваме дека кругот се состои од оние и само оние точки од рамнината, чие растојание од една фиксна точка O од таа рамнина не е поголемо од r, т.е. помало или еднакво на r (цртеж 35). Затоа, можеме да кажеме дека:

Дефиниција 2

Унијата од кружницата k и нејзината внатрешна област K_1 претставува нова геометриска фигура во рамнината која се вика круг.

Поимот за круг можеме да го дефинираме и на следниот начин.

Дефиниција 2'

Круг е множество на сите точки во рамнината чие растојание од една фиксна точка во таа рамнина не е поголемо од r.

Точката O - центар на кружницата е центар и на кругот, а радиусот на кружницата е радиус и на кругот. Два круга се складни ако имаат еднакви радиуси.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е кружница? Припаѓа ли на кружницата нејзиниот центар?
2. Што е радиус на кружницата?
3. Со што е определена кружницата? Нацртај две кружници со заеднички центар, а со радиуси r_1 =2 cm и r_2 =3 cm.
4. Што е круг? Припаѓа ли на кругот неговиот центар?
5. Во рамнината на тетратката означи две точки A и B. Потоа, нацртај кружница со центар во точката A, која минува низ точката B.
6. Какви се две кружници или два круга со еднакви радиуси?
7. Дадена е права p и точка S, што припаѓа на правата p. Одреди го множеството точки од правата p, чие растојание од точката S е: а) еднакво на 3 cm; б) помало од 3 cm; в) не поголемо од 3 cm; г) не помало од 3 cm; д) поголемо од 3 cm.

II.10. ТЕТИВА, ДИЈАМЕТАР И КРУЖЕН ЛАК

Нацртајте една кружница и соединете кои и да било две различни нејзини точки A и B (цртеж 36). Добиената отсечка AB се вика **тетива** на кружницата $k(O,r)$. Тетиви на кружницата се и отсечките CD, MN, EF (цртеж 36). Значи:

Дефиниција 1

Тетива на кружницата е отсечка чии крајни точки ѝ припаѓаат на кружницата.

Очигледно е дека кружницата има бесконечно многу тетиви. Некои од нив се складни (еднакви), некои поголеми, а други помали. Најголеми тетиви се оние што минуваат низ центарот на кружницата. На цртеж 36 тоа е тетивата MN и таа се нарекува **дијаметар**.

Дефиниција 2

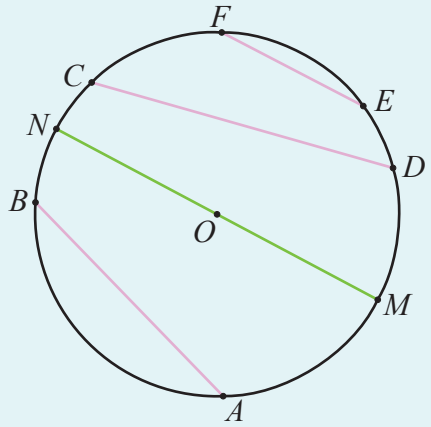
Тетива што минува низ центарот на кружницата се вика дијаметар.

Кружницата има, исто така, бесконечно многу дијаметри, но сите тие се складни (еднакви) еден на друг (Зошто?).

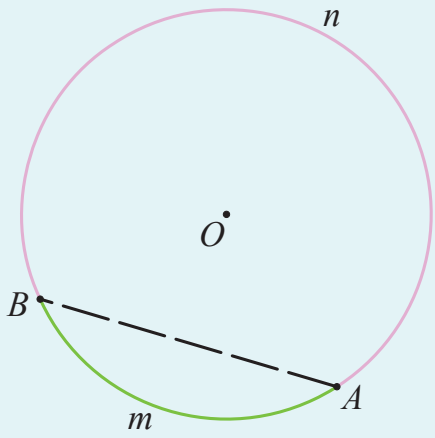
Должината на дијаметарот ја означуваме со a, и таа е еднаква на $2r$, т.е. $d=2r$. (Зошто?).

Секоја тетива на дадена кружница е тетива и на соодветниот круг и обратно, а исто така и дијаметарот на кружницата е дијаметар и на кругот што е соодветен на неа и обратно.

Дијаметарот ги дели кружницата и кругот на два складни делови - **полукружница** и **полукруг**. Уверете се во тоа сами, со превиткување.



Цртеж 36



Цртеж 37

Дефиниција 3

Кружен лак е дел од кружницата, ограничен со две различни нејзини точки, вклучувајќи ги и тие точки.

На цртеж 37 е нацртан еден кружен лак AmB. Со крајните точки A и B е определен и уште еден кружен лак AnB.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е тетива, а што дијаметар на кружницата?
2. Што е кружен лак?
3. Колку радиуси можеш да повлечеш во една кружница? А колку дијаметри?

4 Нацртај една кружница и во неа повлечи неколку радиуси и дијаметри!
Потоа, спореди ги: а) радиусите; б) дијаметрите; в) радиусите и дијаметрите!

5 Зошто во кружницата не можат да се повлечат два паралелни дијаметри, а можат ли да се повлечат две паралелни тетиви?

6 Нацртај кружница со радиус $r = 23$ mm. Колкава е должината на најголемата тетива, што може да се повлече во неа?

7 Нацртај кружница со радиус $r = 2$ cm. Земи една точка од неа и означи ја со A, а потоа повлечи две тетиви, AB и AC долги 3 cm.

8 Нацртај две кружници со заеднички центар O и радиуси 2 cm и 4 cm. Каде лежат точките M, чие растојание од O е: а) $\overline{OM} < 2$ cm; б) $\overline{OM} \leq 4$ cm; в) $\overline{OM} > 4$ cm; г) $2 \text{ cm} \leq \overline{OM} \leq 4$ cm; д) $\overline{OM} = 2$ cm?

9 Нацртај круг со центар во точката O и радиус $r = 3$ cm. Можат ли да се најдат точки M и S, што припаѓаат на кругот, а нивното растојание да е: а) $\overline{MS} = 3$ cm; б) $\overline{MS} = 6$ cm; в) $\overline{MS} = 5$ cm; г) $\overline{MS} = 2$ cm; д) $\overline{MS} = 8$ cm?

II.11. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА КРУЖНИЦА СО ТОЧКА И ПРАВА

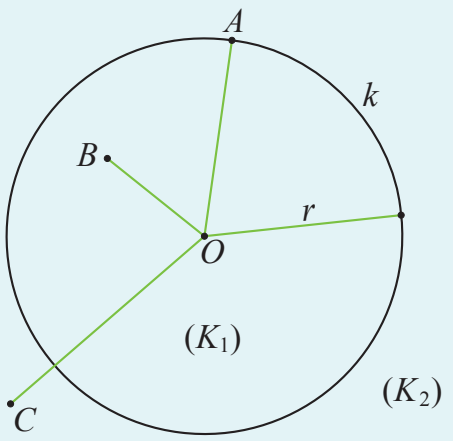
1. Заемна положба на точка и кружница

Нацртај кружница $k(O,r)$ (цртеж 38). Ако во истата рамнина воочиме неколку различни точки A, B, C,.... ќе забележиме дека секоја од нив во однос на кружницата $k(O,r)$ може да зазема една од следниве три положби:

1°. Точката A припаѓа на кружницата, т.е. $A \in k(O,r)$;

2°. Точката B припаѓа на внатрешната област K_1 на кружницата, т.е. $B \in K_1$;

3°. Точката C припаѓа на надворешната област K_2 на кружницата, т.е. $C \in K_2$ (цртеж 38).



Цртеж 38

Ако во секоја од тие положби го споредиме растојанието на вооченатa точка од центарот на кружницата со радиусот на истата, ќе видиме дека: $\overline{OA} = r$, $\overline{OB} < r$, $\overline{OC} > r$. Според тоа:

1°. Точката A припаѓа на кружницата, ако нејзиното растојание до центарот е еднакво на радиусот, т.е. ако $\overline{OA} = r$.

2°. Точката B припаѓа на внатрешната област на кружницата, ако нејзиното растојание до центарот е помало од радиусот, т.е. ако $\overline{OB} < r$.

3°. Точката C припаѓа на надворешната област на кружницата, ако нејзиното растојание до центарот е поголемо од радиусот на кружницата, т.е. ако $\overline{OC} > r$.

2. Заемна положба на права и кружница

На цртеж 39 нацртана е кружница $k(O,r)$ и три прави a, b и p, кои лежат на рамнината на која лежи и кружницата. Од сликата гледаме дека:

1°. Правата a и кружницата $k(O,r)$ имаат две заеднички точки A и B, т.е.

$$k(O,r) \cap a = \{A, B\}.$$

Правата која со дадена кружница има две заеднички точки, **велиме дека ја сече кружницата и се вика пресечка на кружницата.**

Двете заеднички точки на пресечката и кружницата се викаат **пресечни точки.**

Во тој случај забележуваме дека сите внатрешни точки од тетивата која што ја отсекува пресечката од кружницата, се наоѓаат во внатрешноста на кружницата. Затоа секоја таква точка се наоѓа на растојание од центарот на кружницата кое е помало од радиусот на кружницата.

2°. Правата b и кружницата $k(O,r)$ имаат една заедничка точка M, т.е.

$$k(O,r) \cap b = \{M\}.$$

Права која со дадена кружница има само една заедничка точка, **а со неа лежат во една рамнина**, **велиме дека ја допира кружницата и се вика тангента на кружницата.**

Заедничката точка на тангентата и кружницата се вика **точка на допир**, односно **допирна точка**.

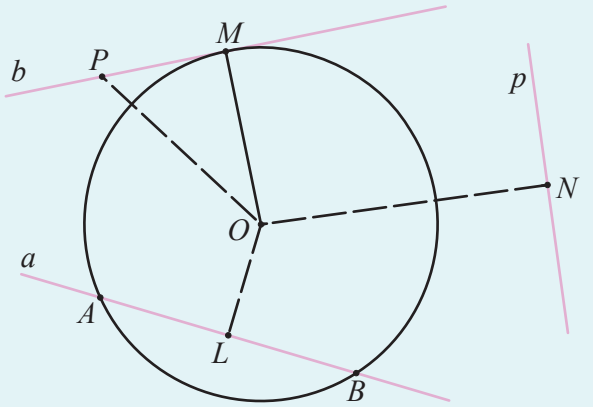
Ако правата b ја допира кружницата во точката M (цртеж 39), тогаш секоја друга точка од правата b лежи надвор од кружницата. Тоа значи дека растојанието на која и да било друга точка, на пример точката P, од правата b до центарот е поголемо од радиусот OM на

кружницата. Според тоа, радиусот во допирната точка M е најкратка отсечка од сите отсечки што го соединуваат центарот O со која и да било точка од правата b.

3°. Правата p и кружницата $k(O,r)$ немаат ниту една заедничка точка, т.е.

$$k(O,r)\cap p = \varnothing.$$

Во тој случај велиме дека правата p лежи во надворешната област на кружницата, односно дека **лежи надвор** од кружницата. Во тој случај сите точки од таа права се наоѓаат на растојание поголемо од радиусот на кружницата.



Цртеж 39

Според тоа, дадена права и кружница што лежат на една рамнина, можат да заземат една од следниве три различни заемни положби:

1°. Правата ја сече кружницата во две точки и тогаш таа е пресечка на кружницата;

2°. Правата ја допира кружницата во една точка тогаш таа е тангента на кружницата;

3°. Правата нема ниту една заедничка точка со кружницата тогаш таа лежи надвор од кружницата.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

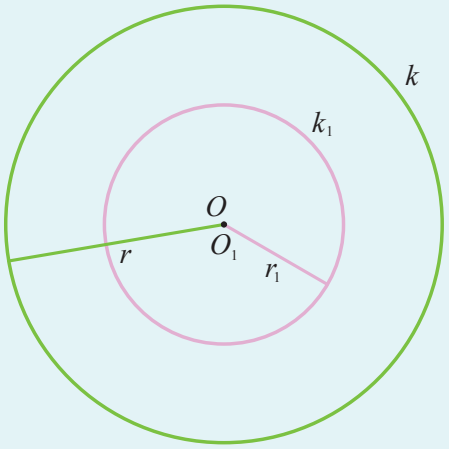
1. Колку и кои заемни положби можат да заземат во рамнината една точка и дадена кружница?
2. Колку и кои заемни положби можат да заземат во рамнината една права и дадена кружница?
3. Дадена е кружница со радиус $r = 4$ cm и една точка T, чие растојание од нејзиниот центар е: а) 3 cm; б) 40 mm; в) 5 cm. Каква положба има таа точка во однос на кружницата?
4. Дадена е кружницата k и една точка $M \in k$. Одреди ја онаа точка од кружницата која е најдалеку од точката M.
5. Што е тангента на кружница и кои својства ги има таа?
6. Во крајните точки на еден дијаметар конструирани се тангенти на кружницата. Каква заемна положба имаат тие тангенти? Зошто?

II.12. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ КРУЖНИЦИ

Две кружници можат да имаат заеднички центар или различни центри.

Кружници, што имаат заеднички центар се викаат **концентрични кружници**. Такви се кружниците на цртеж 40.

Две кружници пак, што имаат различни центри се викаат **ексцентрични кружници**. Растојанието меѓу центрите на таквите кружници, т.е. должината на отсечката што ги поврзува нивните центри, се вика **централно растојание**, кое обично се обележува со c, $c = \overline{OO_1}$.



Цртеж 40

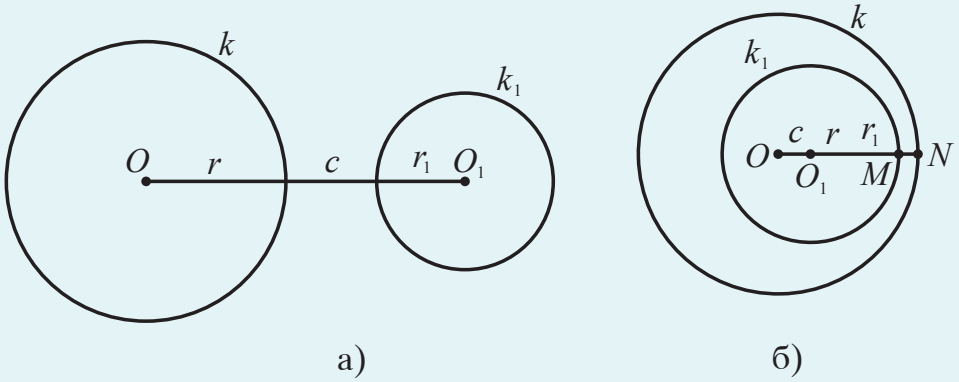
Сите можни најразлични заемни положби што можат да ги заземат две ексцентрични кружници со радиуси r и r_1, ќе ги распределиме во следните три групи:

1°. Кружниците немаат ниту една заедничка точка, т.е.

$$k(O,r) \cap k_1(O_1,r) = \varnothing.$$

Тогаш се можни два случаја:

а) **Кружниците се наоѓаат надвор една од друга** (цртеж 41а). Во тој случај нивното централно растојание е поголемо од збирот на радиусите, т.е. $c > r + r_1$.



а) б)

Цртеж 41

б) **Кружниците се наоѓаат внатре една во друга** (цртеж 41б). Во тој случај нивното централно растојание е помало од разликата на радиусите, т.е. $c < r - r_1$, бидејќи $c + \overline{MN} = r - r_1$ (цртеж 41б).

И концентричните кружници со различни радиуси можеме да ги вброиме во оваа група кружници, што немаат заеднички точки и лежат внатре една во друга, но кај нив специфично е тоа што централното растојание им е еднакво на нула, т.е. $c = 0$.

2°. **Кружниците имаат само една заедничка точка** (M), т.е.

$$k(O,r) \cap k_1(O_1,r) = \{M\}.$$

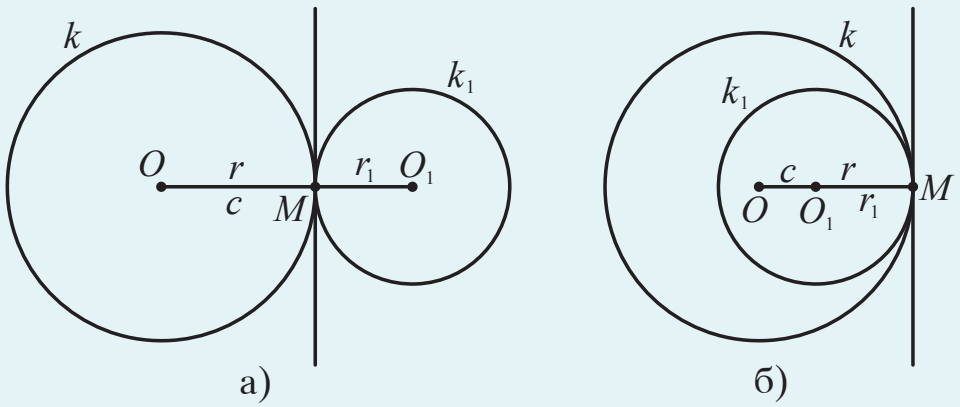
Тогаш велиме дека кружниците **се допираат**, а заедничката точка им се вика **допирна точка**. И во овој случај можни се два подслучаи:

II

а) **Кружниците се допираат и лежат надвор една од друга** (велиме тие се допираат однадвор) (цртеж 42а). Во тој случај нивното централно растојание е еднакво на збирот од радиусите, т.е. $c = r + r_1$.

б) **Кружниците се допираат и лежат внатре една во друга** (велиме дека тие се допираат однатре) (цртеж 42б). Во тој случај, нивното централно растојание е еднакво на разликата од радиусите, т.е.

$$c = r - r_1 \quad \text{при} \quad r > r_1.$$



Цртеж 42

И во двата случаја, кога кружниците се допираат, тие имаат една заедничка тангента во допирната точка M.

3°. **Кружниците имаат две заеднички точки** (A и B), т.е.

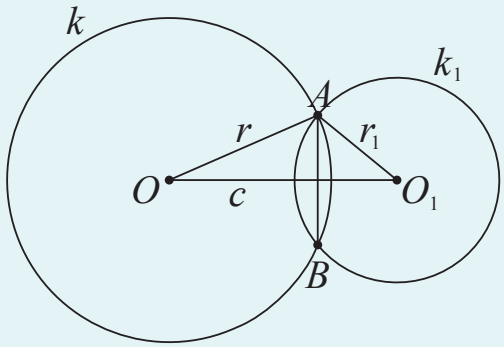
$$k(O,r) \cap k_1(O_1,r) = \{A,B\}.$$

Тогаш велиме дека кружниците **се сечат**, а заедничките точки се викаат **пресечни точки** (цртеж 43).

Ако едната од пресечните точки, на пример точката A, ја соединиме со центрите на двете кружници ќе добиеме отворена искршена линија OAO_1, со крајни точки O и O_1.

Да се потсетиме дека должината на секоја отворена искршена линија е поголема од растојанието меѓу нејзините крајни точки. Според тоа:

Централното растојание на двете кружници што се сечат е помало од збирот на радиусите на кружниците, т.е. $c < r + r_1$.



Цртеж 43

II

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Во каква заемна положба се наоѓаат две кружници со радиуси r и r_1 и централно растојание c, ако е: а) $r = 32$ mm, $r_1 = 18$ mm, $c = 54$ mm; б) $r = 26$ mm, $r_1 = 14$ mm, $c = 4$ mm; в) $r = 2$ cm, $r_1 = 12$ mm, $c = 25$ mm; г) $r = 17$ mm, $r_1 = 1$ cm, $c = 0$; д) $r = 3$ cm, $r_1 = 16$ mm, $c = 14$ mm; ѓ) $r = 28$ mm, $r_1 = 13$ mm, $c = 1$ cm?

2 Нацртај кружница со радиус $r = 4$ cm и означи една произволна точка M на неа. Потоа конструирај друга кружница со радиус 25 mm која ќе ја допира првата кружница: а) однадвор, в) однатре во точката M.

3 Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците со даден радиус r, кои се допираат до друга дадена кружница: а) однадвор; б) однатре? Направи цртеж.

4 Какво множество од точки образуваат центрите на сите кружници, што се допираат со друга дадена кружница во одредена точка од неа?

5 Колку точки може да содржи пресекот на: а) права и кружница; б) две кружници со еднакви радиуси; в) две кружници со различни радиуси?

6 Колку точки може да содржи пресекот на: а) права и круг; б) два круга?

7 Да се одредат радиусите на две концентрични кружници, ако дијаметарот на поголемата кружница е разделен од помалата кружница на три дела кои се долги: 4 cm, 6 cm, 4 cm.

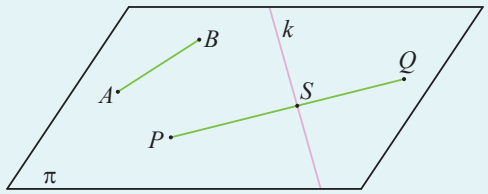
8 Да се одредат радиусите и централното растојание на две кружници, што се наоѓаат внатре една во друга, ако дијаметарот на поголемата кружница, што минува низ центарот на помалата кружница е разделен од помалата кружница на три дела кои се долги: а) 7 cm, 6 cm, 2 cm; б) 4 cm, 3 cm, 7 cm.

9 Колкаво е централното растојание на две кружници со еднакви радиуси, од кои секоја минува низ центарот на другата кружница?

II.13. ПОЛУРАМНИНА И АГОЛ

1. Полурамнина

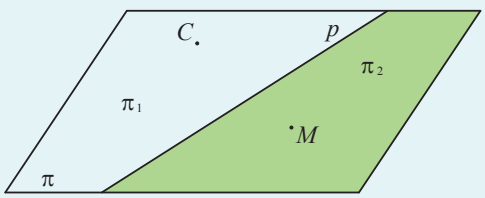
Во рамнината π на цртеж 44 повлечени се една права k и две отсечки AB и PQ. Отсечката AB и правата k немаат заеднички точки, т.е. $AB \cap k = \varnothing$, а отсечката PQ и правата k имаат една заедничка точка S, т.е. $PQ \cap k = \{S\}$ (цртеж 44). За точките A и B кои ѝ припаѓаат на рамнината π велиме дека се наоѓаат на иста страна од правата k, а за точките P и Q кои исто така ѝ припаѓаат на рамнината π, велиме дека се наоѓаат на различни страни од правата k. Значи:



Цртеж 44

Две точки A и B се наоѓаат од иста страна на правата k, ако отсечката AB и правата k немаат ниту една заедничка точка, т.е., ако $AB \cap k = \varnothing$, а две точки P и Q се наоѓаат на различни страни од правата k (велиме уште дека P и Q се раздвоени од правата k), ако отсечката PQ и правата k имаат една заедничка точка, т.е. $PQ \cap k = \{S\}$ (цртеж 44).

Секоја права p што ѝ припаѓа на рамнината π (цртеж 45), го разбива множеството од точки на рамнината кои што не лежат на правата p, на две дисјунктни подмножества: множеството π_1 на сите точки од рамнината π, кои со точката $C \in \pi_1$ се наоѓаат на иста страна од правата p и множество π_2 на сите точки од рамнината π, кои со точката $M \in \pi_2$ се наоѓаат на иста страна од правата p. Секое од множествата $p \cup \pi_1$ и $p \cup \pi_2$ се нарекува **полурамнина со гранична права** p.



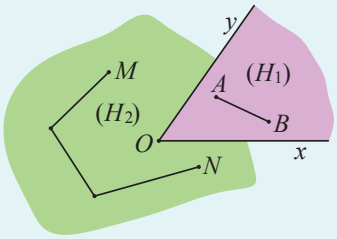
Цртеж 45

Полурамнините ќе ги означуваме со нејзината гранична полуправа заедно со една точка на таа полурамнина што не лежи на граничната права. На пример, полурамнините π_1 и π_2 на цртеж 45 ќе ги означуваме со *pC* и *pM*.

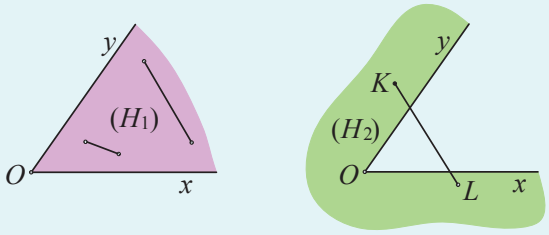
2. Агол

Нацртајте две полуправи *Ox* и *Oy* со заеднички почеток *O* (цртеж 46). Тие го разбиваат множеството на сите точки од рамнината (што не им припаѓаат на полуправите) на две подмножества. Тоа се: множеството на сите точки од областа H_1 и множеството на сите точки од областа H_2, така што:

Секои две точки што ѝ припаѓаат на една иста област H_1 или H_2, можат да се соединат со една отсечка или искршена линија која нема да ги пресече полуправите *Ox* и *Oy* (цртеж 46).



Цртеж 46



Цртеж 47

Потоа, секои две точки од областа H_1 ако ги соединиме со отсечка, целата таа отсечка ѝ припаѓа на областа H_1. Тоа својство го нема областа H_2. На пример, отсечката *KL* чии крајни точки *K* и *L* ѝ припаѓаат на областа H_2, не ѝ припаѓа целата (со сите свои точки) на областа H_2 (цртеж 47). Затоа, за областа H_1 велиме дека е **конвексна**, а за областа H_2 - **неконвексна (**или **конкавна)**.

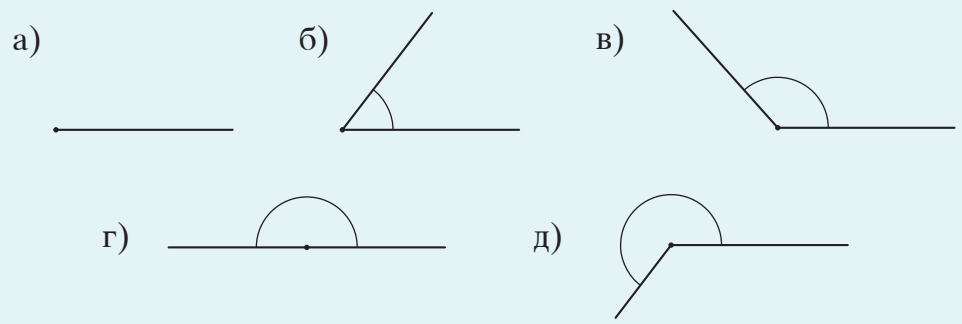
Дефиниција 1

Унијата од полуправите *Ox* и *Oy* со заеднички почеток *O* и множеството точки на една од областите H_1 или H_2, на кои полуправите ја разбиваат рамнината, се вика агол.

Аголот може да се дефинира и на следниот начин: **Агол е геометриска фигура која се состои од две полуправи со заеднички почеток и една од областите, на кои тие ја разбиваат рамнината на која ѝ припаѓаат.**

Две полуправи со заеднички почеток секогаш образуваат два агла со заеднички краци. Кој од тие два агла во конкретниот случај сакаме да го разгледаме, обично го означуваме со еден кружен лак, како што е покажано на цртеж 48. Ако двете полуправи се совпаѓаат, тогаш аголот се нарекува **нула агол** (цртеж 48а).

Ако областа на разгледуваниот агол е конвексна, велиме дека тој агол е **конвексен**. Такви се аглите: б), в) и г) на цртеж 48. Ако пак, областа на аголот е неконвексна, за тој агол велиме дека е **неконвексен** (или **конкавен**) (цртеж 48г).



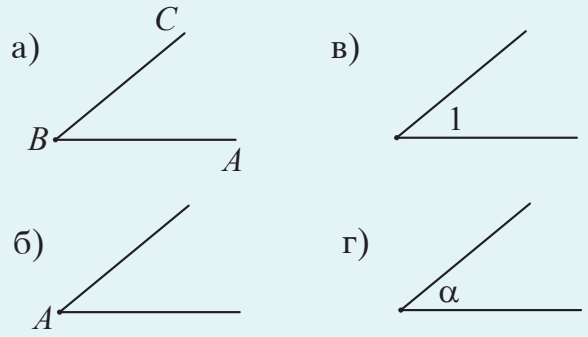
Цртеж 48

Дефиниција 2

Агол чии краци образуваат една права, се нарекува рамен агол.

Забележуваме дека аглите кои што се конвексни и различни од рамниот агол, можат да се претстават како пресек на две полурамнини. Покажи го тоа на цртежот 48б. Кои се тие две полурамнини?

Аглите ги означуваме на различни начини. Најчесто ги означуваме со три големи печатни букви, што ги пишуваме една кај темето, а другите две кај краците. При ваквото означување на аглите, буквата што го означува темето треба да падне помеѓу другите две букви при запишувањето и читањето на аголот, на пример, агол ABC (цртеж 49а).



Цртеж 49

Аглите можат да се обележуваат и само со една голема печатна буква, што се става кај темето, на пример агол A (цртеж 49б). Аглите често ги означуваме и со цифрите: 1, 2, 3, 4, ... или со малите грчки букви α (алфа), β (бета), γ (гама), δ (делта), што се стават кај темето во неговата внатрешна област (цртеж 49в,г). При запишувањето на аглите, наместо зборот "агол" го пишувам е знакот $\angle$, како на пример, $\angle ABC$, $\angle D$, $\angle 1$. При означувањето на аглите со грчките букви α, β, γ, итн. обично го изоставаме знакот $\angle$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е полурамнина? Нацртај две полурамнини.

2 Што е агол? Што разликуваме кај него?

3 Како ги означуваме аглите? Нацртај три агли и означи ги!

4 Нацртај две прави AB и CD, кои се сечат во точка S. Колку агли гледаш на цртежот? Прочитај ги и запиши ги!

5 Нацртај три полуправи со заеднички почеток, што припаѓаат на иста рамнина. Колку различни агли образуваат тие?

6 Кој агол се вика конвексен, а кој конкавен (неконвексен)?

7 а) Што е рамен агол?

б) Што е нула агол?

в) Дали рамниот агол е конвексен?

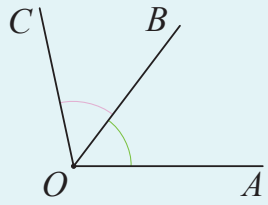
г) Дали рамниот агол може да се претстави како пресек на две полурамнини?

II.14. СОСЕДНИ, НАПОРЕДНИ И НАКРСНИ АГЛИ

Во ова поглавје ќе разгледаме некои посебни заемни положби на два агла во рамнината.

1. На цртеж 50 се нацртани два агла $\angle AOB$ и $\angle BOC$, во таква положба што тие имаат заеднички теме O и еден заеднички крак OB, кој претставува, како што гледаме, граница на областите на двата агла, т.е.

$$\angle AOB \cap \angle BOC = OB.$$



Цртеж 50

Таквите агли ги нарекуваме **соседни**.

Дефиниција 1

Два агла, со заедничко теме и еден заеднички крак, а областите им лежат на различни страни од заедничкиот крак, се викаат соседни агли.

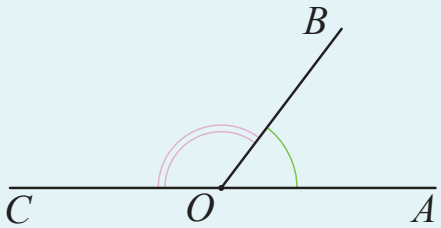
Такви се аглите $\angle AOB$ и $\angle BOC$ (цртеж 50).

Унија на соседните агли $\angle AOB$ и $\angle BOC$ претставува некој нов агол,

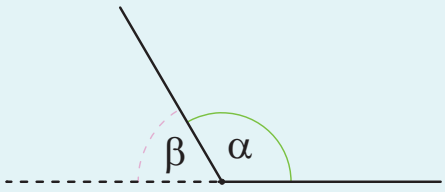
$$(\angle AOB) \cup (\angle BOC) = \angle AOC,$$

кој се нарекува нивен збир.

2. Во специјален случај, ако збирот на два соседни агла е рамен агол, тогаш такви два соседни агла ги нарекуваме уште и **напоредни агли**.



Цртеж 51



Цртеж 52

Такви се соседните агли $\angle AOB$ и $\angle BOC$ на цртеж 51 и нивните незаеднички краци образуваат една права (цртеж 51). Според тоа, напоредните агли можеме да ги дефинираме на следниот начин.

Дефиниција 2

Два агла кои имаат заедничко теме и еден заеднички крак, а другите два крака им образуваат една права, се викаат напоредни агли.

Напоредни агли можеме да добиеме и вака:

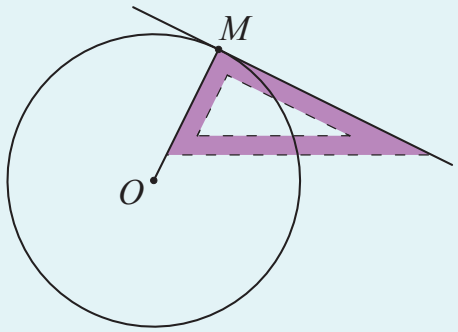
Ако кој да било крак на даден агол α го продолжиме зад неговото теме, ќе добиеме нов агол β, кој заедно со дадениот агол образуваат напоредни агли (цртеж 52). При тоа велиме дека β е напореден агол со α и обратно: α е напореден агол со аголот β.

Ако еден агол α со лизгање може да се доведе до поклопување со некој агол β, тогаш велиме дека тие два агла се **складни** и пишуваме $\alpha \cong \beta$. Аналогно како што складните отсечки ги нарекуваме по договор еднакви отсечки, исто така и два складни агла се договараме да ги нарекуваме **еднакви** и пишуваме $\alpha = \beta$. Сега можеме да дефинираме прав агол.

Дефиниција 3

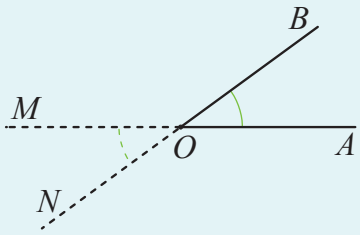
Еден агол се нарекува прав, ако тој е еднаков со неговиот напореден агол.

Прави агли можеме да забележиме многу често во нашата околина, на пример, два соседни рабови на тетратките образуваат прав агол, соседните рабови на подот (или таванот) во училниците образуваат прав агол итн. Да забележиме исто така дека **за произволна точка M од една кружница, радиусот OM образува прав агол со секоја од двете полуправи со почеток во M, коишто образуваат тангента во точката M** (цртеж 53). Ова може да се искористи за цртање на тангента кон дадена кружница во дадена точка (цртеж 53).

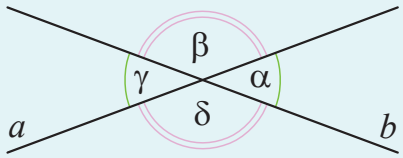


Цртеж 53

3. Нацртај еден произволен агол $\angle AOB$ и продолжи ги неговите краци зад темето O (цртеж 54). Аголот што го градат продолженијата на краците, ако го разгледаме заедно со дадениот агол ќе забележиме дека тие два агла имаат заедничко теме, а нивните краци образуваат (припаѓаат на) две прави што се сечат.



Цртеж 54



Цртеж 55

II

Дефиниција 4

Два агла кои имаат заедничко теме, а краците на едниот агол се продолженија од краците зад темето на другиот агол, се викаат накрсни агли.

Две прави a и b кои се сечат, образуваат четири агли: α, β, γ и δ (цртеж 55). Аглите α и γ се накрсни, но и аглите β и δ, исто така се накрсни.

Велиме дека аголот α е накрсен со аголот γ и обратно: аголот γ е накрсен со аголот α. Истото важи и за другиот пар накрсни агли: β и δ.

Ако едниот накрсен агол, на пример, аголот $\angle AOB$ (цртеж 54), го исечеме и го поставиме врз другиот нему накрсен агол $\angle MON$, ќе забележиме дека тие два агла се совпаѓаат, т.е. тие се еднакви. Провери го тоа на други накрсни агли. Значи, **накрсните агли се еднакви**.

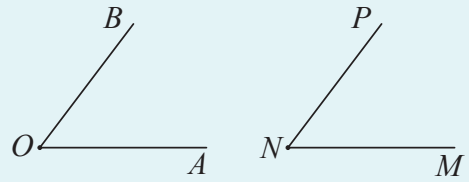
ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои два агла се викаат соседни, напоредни, а кои накрсни агли?
2. Нацртај еден произволен агол и конструирај го на него напоредниот агол како и неговиот накрсен агол.
3. Какви се напоредните агли, ако тие се складни еден на друг?
4. Нацртај две прави кои се сечат и покажи колку пара напоредни, а колку пара накрсни агли се образувани?
5. Нацртај една кружница и избери една точка на неа, а потоа од дадената точка повлечи тангента кон кружницата.
6. Нацртај три прави, кои се сечат, сите во една точка. Колку пара накрсни агли се образуваат?
7. Ако две прави се сечат и ако еден од добиените агли е прав, какви се другите агли?

II.15. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ. АГЛОМЕР

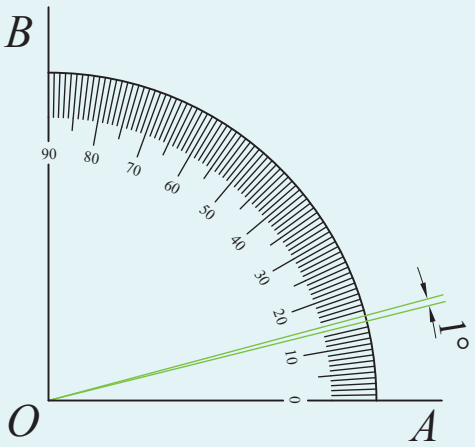
1. За два складни агла велиме дека имаат еднаква големина, а за два нескладни агли дека имаат различна големина. Значи, големината е општо својство на секој агол. Затоа, аглите можеме да ги разгледуваме и како величини од одреден вид.

Големината на аголот, како и на секоја друга величина ја одредуваме со мерење. За таа цел треба да избереме некој произволен агол за кого усвојуваме дека има единечна големина. Тој агол го викаме, *единечен агол* или единица мерка.



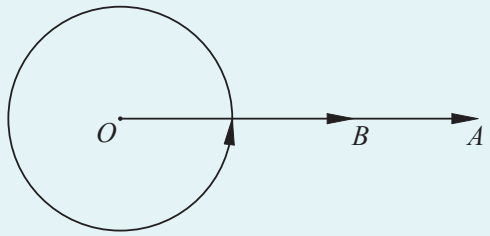
Цртеж 56

Големината на аголот $\angle AOB$ симболички ја означуваме со $\widehat{AOB}$, за разлика од означувањето со $\angle AOB$. На пример, на цртеж 56 се нацртани два складни (еднакви) агла $\angle AOB$ и $\angle MNP$, но тогаш и нивните мерни големини се еднакви, т.е. $\widehat{AOB}=\widehat{MNP}$. Ако аглите се означени со грчки букви, на пример α и β тогаш наместо $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ пишуваме $\alpha=\beta$.



Цртеж 57

За воведување на основна единица мерка за мерење на аглите ќе тргнеме од правиот агол. Основна единица за мерење на агол е **аголен степен**, (или само степен) **и тој се дефинира како 90-ти дел од правиот агол и се означува со** „$^\circ$“. Значи, правиот агол има големина 90 степени и пишуваме 90°. На цртеж 57 е прикажан правиот агол, како и неговата поделба на 90 степени. Ако еден агол има големина од 46 аголни степени, тоа го запишуваме $\alpha=46^\circ$. Рамниот агол, кој е еднаков на два прави агли има големина од 180°.



Цртеж 58

Ако аголот AOB е таков што полуправата прави едно полно завртување околу својот почеток, таа пак ќе дојде во својата почетна положба (цртеж 58). Притоа образува два рамни агла и нејзината големина е 360°. Овој агол го нарекуваме **полн агол**.

Секој ненултиагол чија големина е помала од $90°$, т.е. од правиот агол, се нарекува остар агол. Значи, за остриот агол α важи $0° < \alpha < 90°$.

Секој агол чија големина е поголема од $90°$ (т.е. од правиот агол), а е помала од $180°$, (т.е. рамниот агол), се нарекува тап агол. Значи, за тапиот агол β важи $90° < \beta < 180°$.

Секој агол чија големина е поголема од $180°$ (т.е. од рамниот агол), а е помала од $360°$, (т.е. полниот агол), се нарекува конкавен агол. Значи, за конкавниот агол γ важи $180° < \gamma < 360°$.

Помали единици мерки за мерење на аглите се: **аголна минута** и **аголна секунда**.

Аголна минута е 60-ти дел од аголниот степен и се означува со „'“, т.е. $1° = 60'$; а **аголна секунда е 60-ти дел од аголната минута** и се означува со „" “, т.е. $1' = 60"$, односно:

$$1° = 60' = 3600".$$

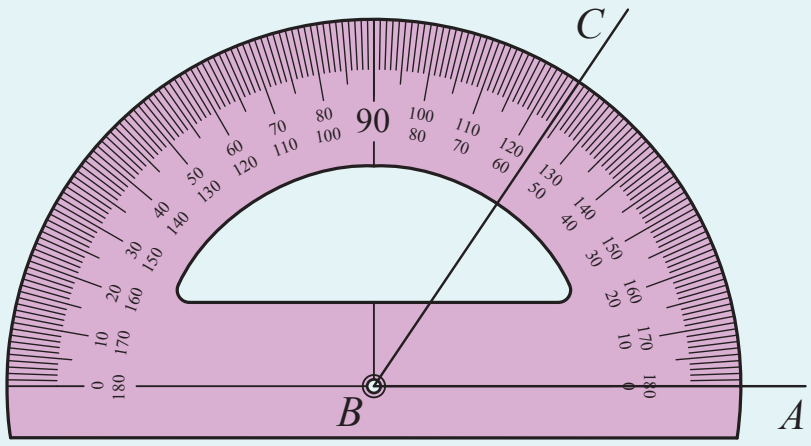
На пример, ако аголот содржи 115 аголни степени, 34 аголни минути и 56 аголни секунди, тоа кратко го запишуваме $115°34'56"$.

Историска забелешка. Поделбата на 1 час на 60 минути, на 1 минута на 60 секунди, 1 аголен степен на 60 аголни минути, 1 аголна минута на 60 аголни секунди како и полниот агол на $360°$, потекнува од Сумерците во Месопотамија.

2. Мерењето на аглите го вршиме со специјална направа - **агломер** (цртеж 59). Тој најчесто има форма на полукруг и е исечен во средината. Надворешната полукружница е разделена на 180 складни делови (степени). Забележуваме дека на нашите агломери не се означени минутите и секундите. Постојат други направи со кои ги мериме тие мали делови од аголот. Тие се употребуваат во науката и техниката, каде што се потребни многу поточни мерења.

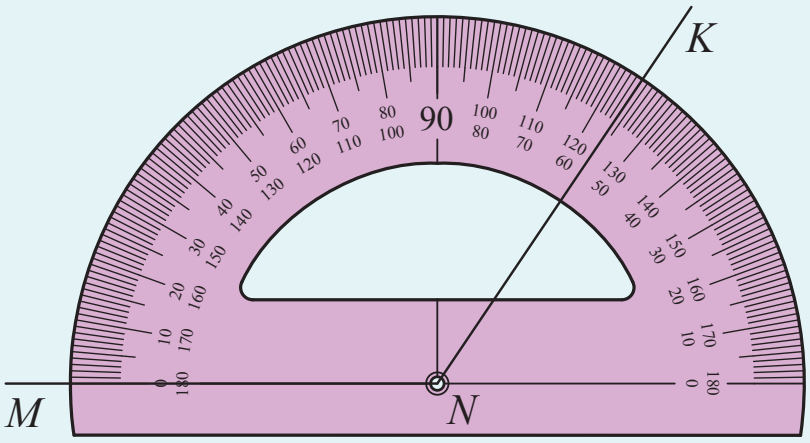
Нацртајте еден произволен агол *ABC* (цртеж 59). За да го измериме тој агол го поставуваме агломерот врз аголот *ABC*, така што центарот на агломерот, обележен со цртичка да падне во темето *B* на аголот *ABC*, а дијаметарот на агломерот да се поклопи со еден од краците на аголот, на пример, со кракот *AB* (цртеж 59). Тогаш другиот крак *BC* ќе помине низ еден од разделите на агломерот. Потоа ги броиме зафатените раздели со краците на аголот. Тој број ни покажува колку аголни степени содржи даденият агол.

Аголот *ABC* гледаме дека има $56°$, т.е. $\widehat{ABC} = 56°$.



Цртеж 59

Некои агломери имаат една скала, а некои две скали. Кај агломерите што имаат две скали треба да се внимава на која скала ќе се прочита големината на аголот. На пример, да го измериме аголот MNK (цртеж 60). Го поставуваме агломерот врз аголот MNK, како што е покажано на цртежот и гледаме дека $\widehat{MNK} = 124°$ (цртеж 60).

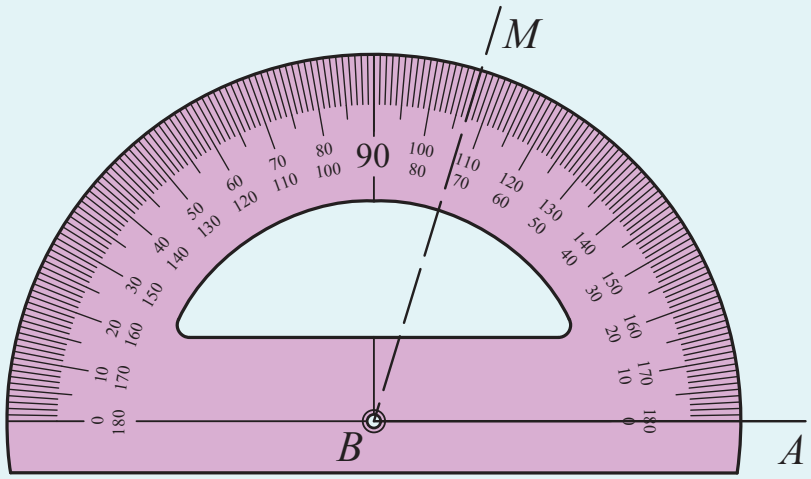


Цртеж 60

Агломерот го употребуваме и за цртање на агли со зададена големина. Да нацртаме

агол со големина $73°$. Тоа го правиме вака: конструираме една полуправа AB, а потоа го поставуваме агломерот, така што неговиот центар да се поклопи со почетокот на полуправата, а дијаметарот на агломерот да ја поклопи полуправата AB (цртеж 61).

Кога агломерот е така поставен, ја обележуваме точката во која ќе падне поделбата на скалата на агломерот, што ја одредува големината на дадениот агол, т.е. $73°$. Потоа таа точка ја сврзуваме со почетокот на полуправата AB и со тоа го добиваме аголот BAM што има $73°$.



Цртеж 61

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Со кои мерни единици ги мериме аглите? Што е агловен степен, агловна минута и агловна секунда?
2. Колку степени има: а) правиот; б) рамниот; в) тапиот агол?
3. Кој агол го викаме а) остар; б) тап; в) конкавен?
4. Прочитај ги големините на аглите: а) $15°4'$; б) $120°46'23"$; в) $239°4'1"$.
5. Од каков вид се аглите: а) $85°44'$; б) $159°46'25"$; в) $325°41'1"$; г) $360°$?
6. Каков агол опишува врвот на минутната стрелка на часовникот во тек на 20 минути?

7 Со помош на агломер нацртај ги следните агли чија големина е: а) $28°$, б) $125°$, в) $149°$, г) $250°$. (Упатство: $250 = 180 + 70$).

8 Нацртај три различни остри агли, обележи ги, а потоа измери ги со агломер.

9 Нацртај два тапи агла, обележи ги, измери ги со агломер и запиши ја нивната големина.

10 Нацртај два конкавни агла и измери ја нивната големина!

11 Нацртај еден произволен агол, а потоа со помош на агломер нацртај друг таков агол кој ќе биде за 5 степени поголем од измерениот.

12 Нацртај ги од око следниве агли $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, а потоа провери со агломер за колку си погрешил(а).

13 Нацртај кружница и во неа повлечи еден дијаметар AB. Крајните точки A и B на дијаметарот поврзи ги со произволна точка M од кружницата, а потоа измери го со агломер аголот AMB. Повтори ја постапката за различен избор на точката M. Што забележуваш? Каков е аголот AMB?

14 Еден брод плови во насока југозапад, а потоа свртува кон југ. За колкав агол бродот свртел од првобитната насока?

15 Претвори го аголот $4234''$ во степени, агловни минути и агловни секунди.

II.16. ЦЕНТРАЛЕН АГОЛ. ЦРТАЊЕ НА АГОЛ ЕДНАКОВ НА ДАДЕН АГОЛ

Нацртај една кружница и од нејзиниот центар повлечи две полуправи (цртеж 62). Полуправите ќе образуваат два агла: еден конвексен и еден конкавен.

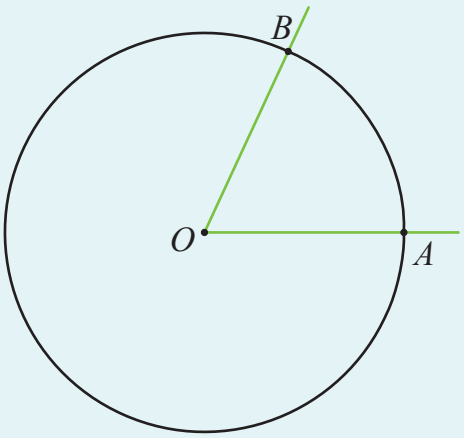
Дефиниција 1

Агол чие теме е во центарот на кружницата, се вика централен агол.

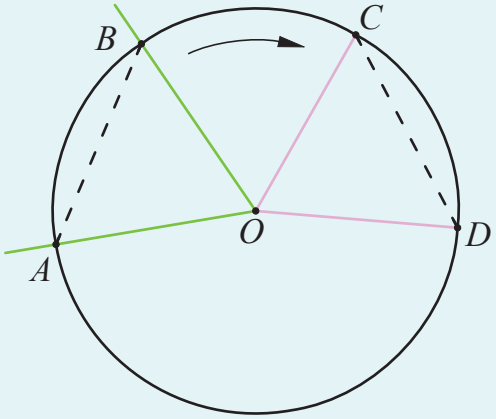
Ќе ги разгледуваме само конвексните централни агли.

Краците на конвексниот централен агол AOB велиме дека го зафаќаат кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$

(цртеж 62), а со тоа и тетивата AB. За лакот $\overset{\frown}{AB}$ и тетивата AB велиме дека му соодветствуваат (одговараат) на централниот агол AOB и обратно: централниот агол AOB дека му одговара на лакот $\overset{\frown}{AB}$, односно на тетивата AB.



Цртеж 62



Цртеж 63

Да видиме каква зависност постои помеѓу централните агли и тетивите и кружните лаци, што им одговараат на тие централни агли.

Нека централните агли AOB и COD (цртеж 63) се еднакви, т.е.

$$\angle AOB = \angle COD .$$

Ако делот AOB од кругот, го вртиме во рамнината на кружницата околу центарот O во насока на стрелката, додека радиусот OA не се совпадне со OC, тогаш радиусот OB ќе се совпадне со OD (зошто?). Оттука гледаме дека кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ ќе се совпадне со лакот $\overset{\frown}{CD}$, а исто така и тетивата AB ќе се совпадне со тетивата CD. Значи добиваме:

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD} \quad \text{и} \quad AB = CD .$$

Според тоа:

Ако два централни агла во кружницата се складни тогаш складни се и на нив соодветните кружни лаци, односно тетиви.

Ако потоа претпоставиме дека: на кружницата лаците $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ се складни, т.е. $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$, тогаш знаеме дека ним им одговараат еднакви тетиви $AB = CD$ и ако со движење ги доведеме до совпаѓање, ќе дојдеме до следниов обратен заклучок:

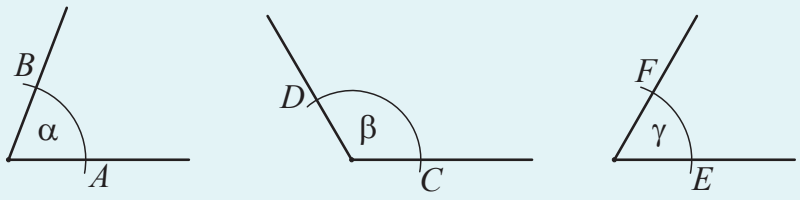
Ако два кружни лака (односно тетиви) во кружницата се складни тогаш складни се и нивните соодветни централни агли.

Горниве два заклучока често пати заедно ги искажуваме вака:

Два централни агла во кружницата се складни ако и само ако нивните соодветни лаци, односно тетиви, се складни.

Овие заклучоци важат и за централни агли и нивните соодветни лаци и тетиви и во две складни кружници.

2. Нацртај неколку агли и од нивните темиња нацртај кружни лаци со еднакви радиуси (цртеж 64). Сите тие стануваат централни агли. Ако некои од тие агли зафаќаат складни кружни лаци, видовме дека тие агли, исто така, се складни (еднакви).

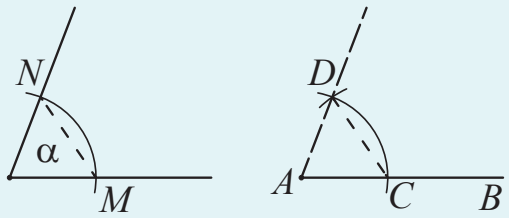


Цртеж 64

Складноста на кружните лаци, нацртани со складни радиуси ја утврдуваме пак, по тоа дали им се еднакви тетивите што им одговараат или не. Ова го користиме при конструирање на агол, што е еднаков на друг даден агол.

Нека е даден аголот α (цртеж 65). Да конструираме (нацртаме) друг агол еднаков на α. Тоа го постигнуваме на следниот начин:

Конструираме една полуправа AB. Потоа со произволен, но ист отвор на шестарот, цртаме кружни лаци од темето на аголот α и од почетокот на полуправата AB. Со повторно отворање на шестарот ја земаме тетивата MN, што одговара на лакот $\overset{\frown}{MN}$, ја пренесуваме од точката C, пресекувајќи го лакот нацртан од почетокот на полуправата AB во некоја точка D.



Цртеж 65

Така добиената точка D, ја сврзуваме со почетокот на полуправата и добиваме агол што е складен (еднаков) на дадениот агол α (цртеж 65).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кој агол се вика централен агол?
2. Нацртај кружница и два централни агла во неа.
3. Нацртај три агли и направи да станат централни на три складни кружници.
4. Каков однос постои помеѓу централните агли и тетивите и лаците што им одговараат во една или во две складни кружници?
5. Нацртај две складни кружници со радиус r =3 cm. Во секоја од нив повлечи по една тетива долга 4 cm. Какви се лаците и централните агли што им одговараат на тие тетиви?
6. Каков централен агол му одговара на дијаметарот на кружницата?
7. Нацртај кружница со радиус $r = 2$ cm и во неа еден централен агол што ѝ одговара на тетивата која е еднаква на радиусот на кружницата.
8. Нацртај кружница со радиус $r = 24$ mm и во неа повлечи два, нормални еден на друг, радиуси! Каков централен агол се добива и колкав кружен лак му одговара на тој агол?
9. Нацртај агол, што ќе биде складен на друг даден агол.
10. Нацртај три различни произволни агли, а потоа конструирај агли што се поодделно еднакви на секој од нив.

II.17. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

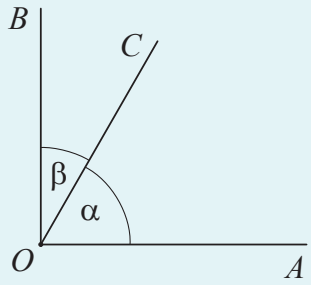
1. Нацртај еден прав агол AOB (цртеж 66). Потоа, од неговото теме O повлечете некоја полуправа OC, која припаѓа на внатрешната област на правиот агол AOB.

Полуправата OC го разбива правиот агол AOB на два остри агла $\angle AOC$ и $\angle COB$.

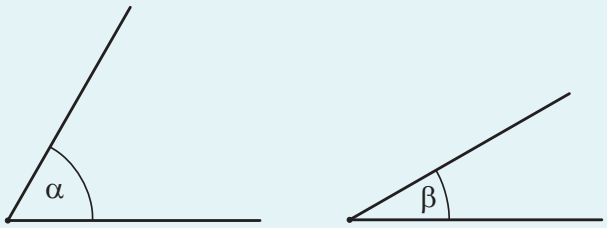
За секој од острите агли $\angle AOC$ и $\angle COB$ (цртеж 66) велиме дека *го дополнува* другиот остар агол до прав агол.

Дефиниција 1

Два агла чиј збир е прав агол, се викаат комплементни агли.



Цртеж 66



Цртеж 67

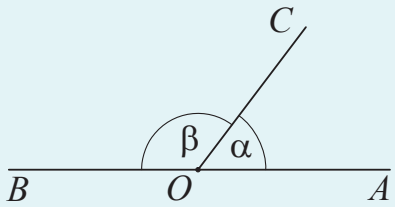
За секој од двата комплементни агли велиме дека е **комплемент**, т.е. дополнување до прав агол на другиот агол.

Нацртајте ги аглите $\angle AOC$ и $\angle COB$ и одделно како на цртеж 67. Аглите на цртеж 67 се исто така комплементни бидејќи збирот на двата агла изнесува прав агол, т.е. $90°$. Имено, за да бидат комплементни аглите не е задолжително тие да бидат соседни.

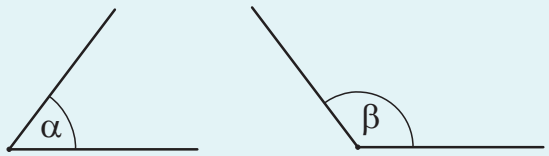
Со помош на цртежот 66 размисли како ќе го нацрташ комплементот на даден остар агол.

2. На цртеж 68 е нацртан еден рамен агол AOB и од неговото теме повлечена е полуправа OC, која припаѓа на неговата внатрешна област.

Очигледно е дека полуправата OC во овој случај го разбива рамниот агол AOB на два нови агла: $\angle AOC$ и $\angle COB$ чиј збир е рамен агол.



Цртеж 68



Цртеж 69

Дефиниција 2

Два агла чиј збир е рамен агол се викаат суплементни агли.

За секој од двата суплементни агли велиме дека е **суплемент** на другиот агол.

Нацртајте ги аглите $\angle AOC$ и $\angle COB$ и одделно како на цртеж 69. Аглите на цртеж 69 се исто така суплементни бидејќи збирот на двата агла изнесува рамен агол, т.е. $180°$. Имено, за да бидат суплементни аглите не е задолжително тие да бидат соседни.

Со помош на цртежот 68 размисли како ќе го нацрташ суплементот на даден остар или тап агол.

За суплементните агли важат следните својства:

1° Суплементен на остар агол е тап агол.

2° Суплементен на тап агол е остар агол.

3° Суплементен на прав агол е прав агол.

4° Секои два напоредни агли се исто така суплементни агли.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Кои два агла се викаат комплементни?

2 Кои два агла се викаат суплементни?

3 Нацртај еден остар агол, а потоа одреди го конструктивно: а) неговиот комплемент; б) неговиот суплемент.

4 Нацртај еден тап агол, а потоа конструирај го неговиот суплемент.

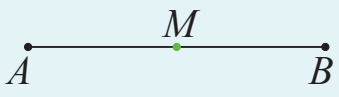
5 Какви се напоредните агли, ако тие се еднакви еден на друг?

6 Можат ли два напоредни агли, да бидат: а) и двата остри; б) и двата тапи; в) и двата прави; г) едниот прав, а другиот тап агол?

7 Правите AB и CD се сечат во точката M. Збирот на аглите AMC и BMD е рамен агол. Одреди каков е аголот AMD.

II.18. СИМЕТРАЛА НА ОТСЕЧКА И СИМЕТРАЛА НА АГОЛ

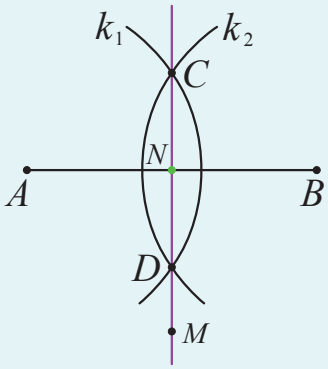
1. Нацртајте една произволна отсечка AB на лист хартија (цртеж 70). Потоа исечете конец колку што е долга отсечката AB. Ако конецот го превиткате така, што неговите краеви во точките A и B да се совпаднат, другиот крај на конецот ќе биде некоја точка M, која можете да ја означите со боја на пример. Кога краевите на конецот ќе ги затегнете и неговите краеви повторно



Цртеж 70

ќе ги поставите во точките A и B, означената точка ќе лежи на отсечката AB. За точката M очигледно е дека ќе важи $\overline{AM} = \overline{BM}$, т.е. M ќе претставува средишна точка на отсечката AB.

Меѓутоа во пракса средишната точка се наоѓа многу поедноставно, како што е покажано на цртеж 71. Цртаме две кружници k_1 и k_2 со ист радиус r чии центри се наоѓаат во точките A и B соодветно. Доколку радиусот на кружниците е доволно голем, кружниците k_1 и k_2 ќе се сечат во две точки C и D. Очигледно е дека секоја од точките C и D се наоѓа на еднакво растојание од точките A и B. Непосредно со мерење можеме да се увериме дека и секоја точка M од правата CD се наоѓа на исто растојание од A и B, т.е. $\overline{MA} = \overline{MB}$. Освен тоа не постои точка P која што не лежи на правата, а која е еднакво оддалечена од точките A и B. Според тоа, пресечната точка на правите AB и CD ќе биде средишната точка N на отсечката AB. Со тоа конструкцијата на бараната средишна точка N е завршена.



Цртеж 71

Забележуваме дека со претходната конструкција не само што ја најдовме средишната точка на отсечката AB, туку ги најдовме и сите точки од рамнината коишто се еднакво оддалечени од крајните точки A и B. Правата CD се нарекува **симетрала на отсечката** AB.

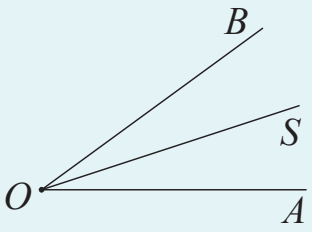
Дефиниција 1

Множеството на сите точки M во една рамнина коишто се наоѓаат на исто растојание од крајните точки A и B на една отсечка, т.е. $\overline{MA} = \overline{MB}$, образува права која се нарекува симетрала на отсечката AB.

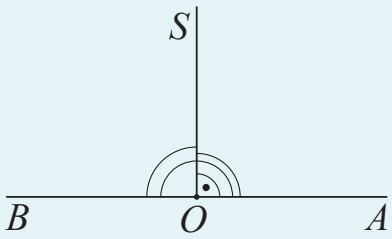
2. Нацртајте еден произволен агол, AOB на лист хартија (цртеж 72) и исечете ја хартијата по краците на аголот. Ако добиениот модел од хартија го превиткате така што краците OA и OB да се совпаднат, а потоа моделот го исправите, на него се образува раб (превој) OS, кој го разделува даденият агол на два еднакви агла AOS и SOB (цртеж 72). За секој од еднаквите агли AOS и SOB велиме дека е *половина* од даденият агол.

Дефиниција 2

Полуправата која го разделува еден агол на половина се нарекува бисектриса на аголот.



Цртеж 72



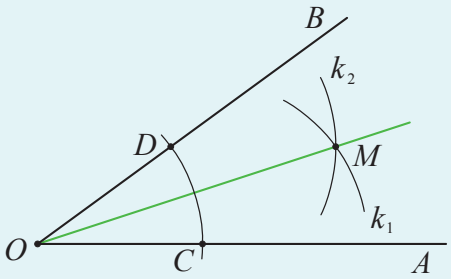
Цртеж 73

II

Колку симетрали може да има еден агол?

На цртеж 73 е нацртан рамен агол AOB и е повлечена неговата бисектриса OS. Таа го разделува рамниот агол на два еднакви агли AOS и SOB. Какви се тие агли?

На цртеж 74 е дадена конструкција на бисектриса на произволен агол AOB. Со помош на шестарот чиј центар се наоѓа во точката O нанесуваме две точки C и D на полуправите OA и OB така што $\overline{OC} = \overline{OD}$. Потоа цртаме две кружници k_1 и k_2 со ист радиус чии центри се наоѓаат во точките C и D соодветно. Можеме овие две кружници k_1 и k_2 да ги нацртаме со радиуси еднакви на $r = \overline{OC} = \overline{OD}$. Во таков случај кружниците k_1 и k_2 ќе се сечат во две точки, од кои едната е точката O, бидејќи $r = \overline{OC} = \overline{OD}$. Втората пресечна точка да ја означиме со M. Тогаш бараната бисектриса е полуправата со почеток во O и која минува низ пресечната точка M.



Цртеж 74

Сега нацртај еден рамен агол и обиди се да ја конструираш неговата бисектриса, со што ќе го поделиш рамниот агол на два прави агла. На овој начин можеш да конструираш прав агол без да користиш правоаголен триаголник како помошно средство.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е симетрала на отсечка?
2. Што е симетрала на агол?
3. Нацртај две отсечки, а потоа најди ги средишните точки.

4 Нацртај симетрала на дадена отсечка.

5 Каков агол претставува половината од: а) остар агол; б) тап агол; в) конкавен агол; г) рамен агол; д) полн агол?

6 Нацртај два агла, а потоа конструирај ги нивните бисектриси.

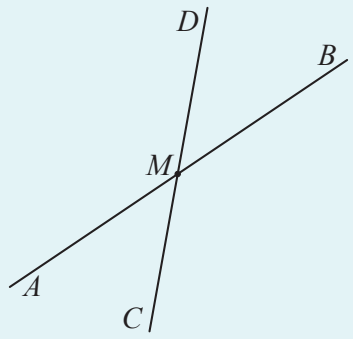
7 Нацртај агол од $138°$, а потоа подели го конструктивно на два еднакви агли. Потоа измери го секој од тие два агла за да провериш дали прецизно си цртал(а).

II.19. НОРМАЛНИ ПРАВИ

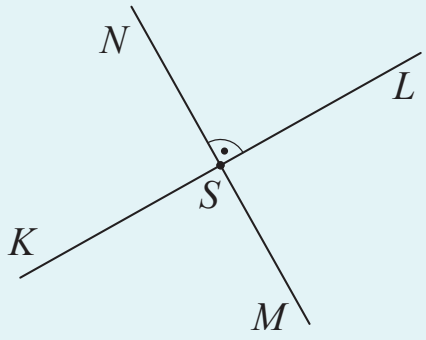
На цртеж 75 нацртани се две прави AB и CD, кои се сечат во точката M. Гледаме дека при пресекувањето тие образуваат четири агли: два остри и два тапи. Двата остри агла, а исто и двата тапи агла се еднакви како накрсни, т.е.

$$\angle AMC = \angle BMD \quad \text{и} \quad \angle AMD = \angle BMC\,.$$

На цртеж 76 нацртани се исто така две прави KL и MN кои се сечат, но при пресекувањето тие образуваат еден прав агол $\angle LSN$. Какви се другите три агли $\angle KSN$, $\angle KSM$ и $\angle MSL$? И тие се прави. Објасни зошто! Таквите прави ги нарекуваме **нормални** или **ортогонални**.



Цртеж 75



Цртеж 76

Дефиниција 1

Две прави кои при пресекувањето образуваат прави агли се нарекуваат заемно нормални (или ортогонални).

За правата MN велиме дека е нормална (ортогонална) на правата KL и обратно, а тоа симболички го запишуваме: $MN \perp KL$ или $KL \perp MN$.

Во нашата околина често можеме да забележиме заемно нормални прави. Всушност ако полуправите на било кој прав агол ги замислиме како прави ќе добиеме заемно нормални прави. Набројте неколку такви примери.

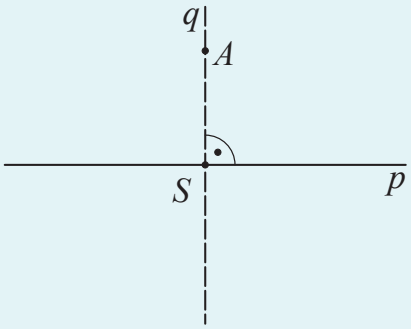
Наместо „нормална права“, често пати велиме **нормала**, а наместо „заемно нормални прави“ велиме **нормални прави**.

Две прави што се сечат, а не се нормални една на друга велиме дека се **коси** една спрема друга. Такви се правите AB и CD на цртеж 75.

Нормалните прави го имаат следново важно својство:

1° Низ дадена точка во рамнината што не ѝ припаѓа на дадена права, може да се повлече само една права што е нормална на дадената права.

На цртеж 77 низ точката A е повлечена права q, што е нормална на правата p. Штом е $q \perp p$, тогаш јасно е дека секоја друга права што ќе мине низ точката A не може да биде нормална на правата p, а ќе биде коса со неа.



Цртеж 77

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 За кои две прави велиме дека се нормални една на друга?

2 Каква положба имаат:
а) соседните; б) спротивните; в) произволни;
рабови на една тетратка?

3 Именувај и напиши неколку големи печатни букви од:
а) македонската кирилична азбука; б) латинската азбука,
кај кои гледаш нормални отсечки.

4 Нацртај две нормални прави a и b, а потоа нацртај права c што е нормална на b. Што забележуваш? Каква е заемната положба на правите a и c?

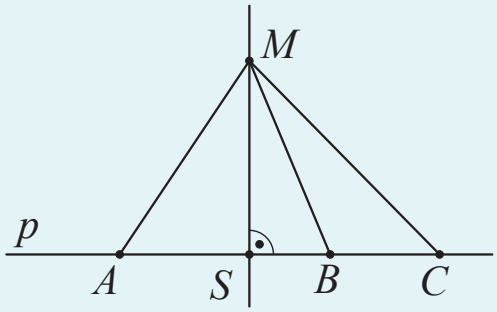
5 Дали во рамнината постојат три прави такви што било кои две од нив да бидат нормални?

6 Земи еден лист хартија и превиткај го два пати, така што кога ќе го развиткаш, на него да добиеш две нормални прави.

II.20. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Нацртајте права p и означете една произволна точка M што не ѝ припаѓа на правата p. Потоа, низ точката M во рамнината, во која лежат M и p, повлечете нормала на правата p (цртеж 78). Повлечената нормала од точката M ќе ја пресече правата p во точно одредена точка S. Точката S се вика **подножје** на повлечената нормала MS од точката M кон правата p.

На правата p да означиме неколку точки A, B, C, . . . кои се различни од точката S и истите да ги соединиме во точката M.



Цртеж 78

Ако ги измериме и споредиме должините на отсечките MA, MB, MC и MS, ќе забележиме дека должината на нормалната отсечка MS е помала од должината на секоја коса отсечка MA, MB, MC, . . . , т.е.

$$\overline{MS} < \overline{MA}, \quad \overline{MS} < \overline{MB}, \quad \overline{MS} < \overline{MC}.$$

Според тоа: **Растојанието од точката M до подножјето на повлечената низ неа нормала на правата p е помало од растојанието на точката M до која и да било друга точка од правата p.**

Значи, точката S од правата p е најблиска од сите нејзини точки до точката M.

Дефиниција 1

Растојанието од точката M до подножјето на повлечената нормала низ точката M кон правата p, се вика растојание од точката M до правата p.

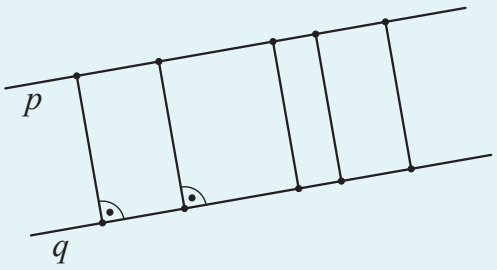
Разгледај го цртежот 39 и заклучи каква е врската помеѓу растојанието од центарот O на кружницата и правите кои имаат три различни положби во однос на дадената кружница. Имено, важат својствата:

1°. Правата a е сечица на кружницата, ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е помало од радиусот, т.е. $c < r$;

2°. Правата b е тангента на кружницата, ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е еднакво на радиусот, т.е. $c = r$;

3°. Правата *c* лежи надвор од кружницата, ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е поголемо од радиусот, т.е. $c > r$ **.**

Ако две прави p и q се паралелни (цртеж 79), тогаш растојанието на секоја точка од едната права (на пример, p) до другата права е едно исто. Затоа, растојание меѓу две паралелни прави се вака растојанието на која и да било точка од едната до другата права.



Цртеж 79

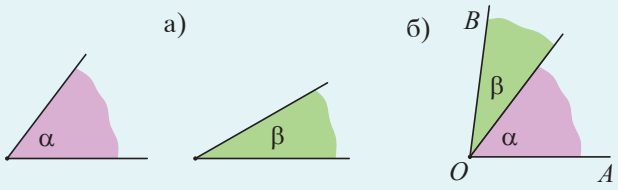
ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колку нормални прави можат да се повлечат од дадена точка M кон дадена права a?
2. Што е растојание од дадена точка до дадена права?
3. Ако една точка лежи на една права тогаш колкаво е растојанието од таа точка до правата?
4. Нацртај една права и обележи една точка што не припаѓа на правата. Одреди го растојанието на таа точка до правата.
5. Нацртај три прави во рамнината на тетратката, во различна положба и обележи една точка од рамнината која не припаѓа на ниту една од тие прави. Одреди го растојанието од таа точка до секоја од правите.
6. Нацртај еден произволен остар агол MON. На кракот OM обележи три произволни точки A, B, C и од нив повлечи нормали на другиот крак. Одреди ги растојанијата на точките A, B и C до кракот ON.
7. Нацртај две заемно паралелни прави a и b. На едната права обележи неколку различни точки A, B, C, ... и од нив спушти нормали на другата права. Што забележуваш? Какви се растојанијата на точките A, B,C, ... до другата права?
8. Нацртај две заемно паралелни прави p и q и одреди го растојанието помеѓу нив.
9. Нацртај остар агол AOB и конструирај ја бисектрисата на тој агол. Избери произволна точка од бисектрисата и одреди ги растојанијата од таа точка до правите OA и OB. Што забележуваш? Какви се тие две растојанија?

II.21. ГРАФИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ

1. Нека се дадени аглите α и β (цртеж 80).

Со движење аглите α и β секогаш можеме да ги доведеме во таква положба, така што темињата на кои и да било два крака да им се совпаднат, а нивните области да немаат ниту една заедничка точка, како што е покажано на цртеж 80б. Во таа положба велиме дека аглите α и β се *надоврзани* еден на друг.



Цртеж 80

Унијата на надоврзаните агли α и β претставува нов агол AOB кој се вика **збир** на аглите α и β. Тоа симболички го запишуваме вака:

$$\alpha + \beta = \angle AOB.$$

На сличен начин, кога на збирот на два дадени агла надоврземе трет агол, добиваме нов агол кој се вика збир на трите агли, итн.

Да покажеме како конструктивно го одредуваме збирот на неколку дадени агли.

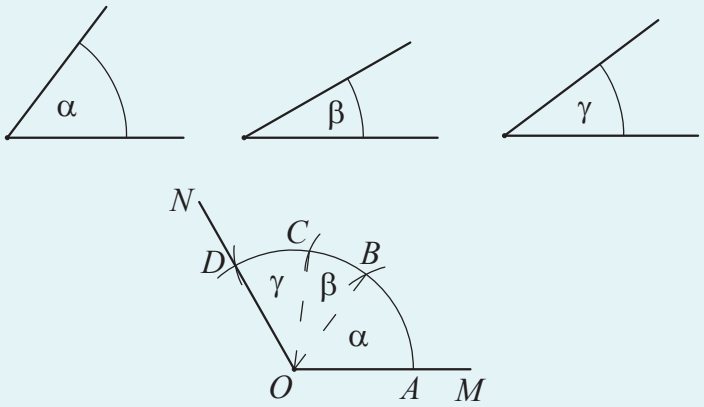
Пример: Да се соберат аглите α, β и γ (цртеж 81).

Прво конструираме една полуправа OM. Потоа, од темињата на аглите α, β, γ и почетокот на полуправата OM цртаме кружни лаци со произволни, но еднакви радиуси. Потоа, по кружниот лак што е нацртан од почетокот на полуправата OM и тоа од точката A ја пренесуваме, со отворот на шестарот, тетивата што одговара на аголот α. Така ја добиваме точката B.

Од точката B во истата насока потоа ја пренесуваме, со отвор на шестарот, тетивата што му одговара на аголот β и ја добиваме точката C. Од точката C на ист начин ја пренесуваме и тетивата што му одговара на третиот агол γ, со што добиваме уште една точка D на кружниот лак, нацртан од почетокот на полуправата OM.

Добиената точка D ја сврзуваме со почетокот на полуправата OM и се добива аголот MON (цртеж 81) кој претставува збир на аглите α, β и γ, т.е.

$$\angle MON = \alpha + \beta + \gamma.$$



Цртеж 81

За собирањето на агли важат истите својства како за собирањето на броеви:

1º Кај собирањето на аглите важи комутативниот и асоцијативниот закон, т.е.

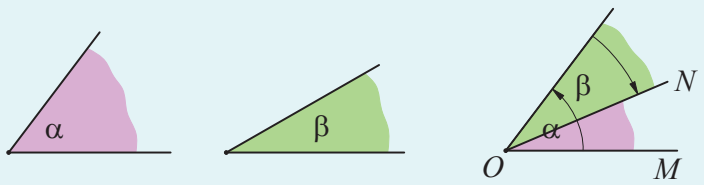
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{и} \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Даден агол α се множи со природен број n, ако го конструираме збирот $\alpha+\alpha+...+\alpha$ од n собироци. На пример, $5\alpha=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$.

2. Што значи од даден агол α да се одземе друг даден помал агол β (цртеж 82)? Тоа значи да се одреди трет агол γ, таков што $\gamma + \beta = \alpha$.

Аголот γ се вика **разлика** на даденият агол α со аголот β и пишуваме: $\gamma = \beta - \alpha$. Да покажеме како ја одредуваме разликата на аглите α и β.

Помалиот агол β со движење го доведуваме во таква положба, што темето и едниот негов крак да се совпаднат со темето и едниот крак на поголемиот агол α, но при тоа целата област на аголот β да се содржи во областа на аголот α, како што е покажано на цртеж 82.



Цртеж 82

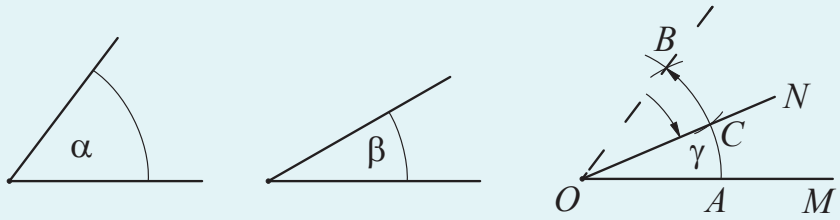
При тоа, непоклопената област на аголот α одредува нов агол *MON* кој, всушност, е бараната разлика на дадениот агол α со аголот β, бидејќи $\angle MON + \beta = \alpha$. Според тоа:

$$\angle MON = \alpha - \beta.$$

Да покажеме сега како конструктивно ја одредуваме разликата на два различни дадени агла (цртеж 83).

Разликата α – β конструктивно ја наоѓаме на следниот начин: прво повлекуваме една полуправа *OM*, а потоа од темињата на аглите α и β и почетокот на полуправата *OM* цртаме кружни лаци со произволни, но еднакви радиуси.

Потоа, по кружниот лак што е нацртан од почетокот на полуправата *OM* и тоа од точката *A*, во една насока ја пренесуваме со отвор на шестарот тетивата што му одговара на аголот α. Така добиваме една точка *B*. Сега со отвор на шестарот од точката *B*, само во спротивна насока од првата, ја пренесуваме тетивата што му одговара на аголот β и на тој начин добиваме уште една точка *C* која лежи на кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$.



Цртеж 83

Така добиената точка *C* ја сврзуваме со почетокот на полуправата *OM*, па добиениот агол *MON* претставува бараната разлика на аголот α со аголот β, т.е.

$$\angle MON = \alpha - \beta.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Нацртај три различни остри агли и собери ги. Каков агол може да биде нивниот збир?

2 Нацртај два тапи агла, а потоа собери ги. Каков агол ќе претставува нивниот збир?

3 Од еден прав агол одземи еден, кој и да било, остар агол. Каков агол ќе добиеш?

4 Каков агол се добива кога два различни тапи агла а) се соберат; б) се одземат еден од друг?

5 Нацртај три различни агли, а потоа одреди го конструктивно нивниот збир.

6 Нацртај два нееднакви агла, а потоа одреди ја конструктивно разликата на поголемиот со помалиот агол.

7 Нацртај произволен остар агол, а потоа конструирај го аголот а) 2α; б) 3α; в) 4α.

8 Нацртај два агла α и β ($\alpha > \beta$), а потоа конструирај го аголот: а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha-\beta$; в) $2\alpha+\beta$; г) $\alpha+2\beta$; д) $2\alpha-\beta$.

9 Покажи дека за собирањето на агли важат комутативниот и асоцијативниот закон.

II.22. АРИТМЕТИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ

Собирањето и одземањето на аглите чии мерни броеви ни се познати, може да се изврши и аритметички, односно со сметање. Тоа ќе го илустрираме со следниве примери.

Задача 1. Да се соберат аглите: $\alpha=23°$, $\beta=38°$ и $\gamma=65°$. Големината на збирот на дадените агли ја наоѓаме со собирање на нивните мерни броеви, т.е.

$$\alpha+\beta+\gamma=23°+38°+65°=126°.$$

Задача 2. Да се одреди разликата $\alpha-\beta$, ако е $\alpha=94°$ и $\beta=66°$. За добиената разлика добиваме: $\alpha-\beta=94°-66°=28°$.

Задача 3. Да се соберат аглите $\alpha=48°\ 27'\ 45"$, $\beta=32°\ 15'\ 36"$ и $\gamma=52°\ 42'\ 40"$.

Прво ги испишуваме мерните броеви на дадените агли еден под друг и тоа да бидат секунди под секунди, минути под минути и степени под степени. Потоа ги собираме одделно секундите, па минутите и на крајот степените.

$$\begin{array}{rrrr} \alpha = & 48° & 27' & 45" \\ \beta = & 32° & 15' & 36" \\ \gamma = & 52° & 42' & 40" \\ \hline \alpha+\beta+\gamma = & 132° & 84' & 121" \end{array}.$$

Ако земеме предвид дека: $60"=1'$ и $60'=1°$, добиваме $121"=2'1"$ и $84'=1°\ 24'$, па наместо збирот $\alpha+\beta+\gamma=132°\ 84'\ 121"$ пишуваме:

$$\alpha+\beta+\gamma=133°\ 26'\ 1".$$

Задача 4. Да се одреди разликата $\alpha-\beta$, ако е $\alpha=74°\ 53'\ 38"$ и $\beta=55°\ 18'\ 25"$.

Под мерниот број на аголот α го запишуваме мерниот број на аголот β и ги одземаме одделно, прво секундите, па минутите и на крајот степените. Така наоѓаме:

$$\alpha = 74^\circ\ 53'\ 38''$$
$$\beta = 55^\circ\ 18'\ 25''$$
$$\alpha - \beta = 19^\circ\ 35'\ 13''.$$

Задача 5. Да се одреди разликата $\alpha - \beta$, ако е $\alpha = 65^\circ\ 13'\ 25''$ и $\beta = 48^\circ\ 45'\ 38''$.

По запишувањето на мерните броеви на аглите еден под друг:

$$\alpha = 65^\circ\ 13'\ 25''$$
$$\beta = 48^\circ\ 45'\ 38'',$$

гледаме дека од $25''$ не можеме да одземаме $38''$, а исто така и $45'$ не можат да се одземат од $13'$. Во таков случај користиме позајмување, т.е. од $13'$ земаме $1'$ и ја претвораме во секунди $1' = 60''$. Потоа од 65° одземаме 1° и го претвораме во минути $1^\circ = 60'$. Така за мерниот број на аголот α можеме да запишеме:

$$\alpha = 65^\circ\ 13'\ 25'' = 64^\circ\ 72'\ 85'',$$

па затоа одземањето лесно го извршуваме:

$$\alpha = 64^\circ\ 72'\ 85''$$
$$\beta = 48^\circ\ 45'\ 38''$$
$$\alpha - \beta = 16^\circ\ 27'\ 47''.$$

Задача 6. Одземи го аголот $\alpha = 53^\circ\ 14''$ од правиот агол.

Правиот агол има 90°, што можеме да го запишеме како $89^\circ\ 59'\ 60''$. Тогаш, одземањето не претставува тешкотија:

$$90^\circ = 89^\circ\ 59'\ 60''$$
$$\alpha = 53^\circ\ 00'\ 14''$$
$$90^\circ - \alpha = 36^\circ\ 59'\ 46''.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Пресметај ги збировите:

а) $52^\circ\ 34' + 17^\circ\ 8'\ 48'' + 120^\circ$;
б) $45^\circ\ 35' + 68^\circ\ 18'\ 50'' + 86^\circ\ 48'$;
в) $150^\circ + 98^\circ\ 45' + 25^\circ\ 15' + 12^\circ$;
г) $68^\circ + 105^\circ\ 20' + 47^\circ\ 59' + 40^\circ$;
д) $24^\circ\ 36'\ 28'' + 45^\circ\ 12' + 64^\circ\ 25'$.

2 Пресметај ја разликата на аглите:

а) $56^\circ - 38^\circ$;
б) $125^\circ - 63^\circ\ 15'$;
в) $84^\circ\ 15'\ 8'' - 49^\circ\ 25'$;
г) $54^\circ\ 24'\ 24'' - 18^\circ\ 45'\ 45''$;
д) $180^\circ - 44^\circ\ 28'\ 56''$.

3 Изврши ги означените операции со аглите:
а) $26° 42' 18" + 56° 3' 25" - 33° 27' 45"$;
б) $250° - (62° 30' 54" + 134° 25' 6")$;
в) $180° - 52° 48' 50" - (29° 43' 15" + 13° 12' 45")$;
г) $90° + 32° 15' - (90° - 83° 35")$.

4 Од збирот на аглите $48° 15' 50"$ и $27° 35' 20"$ одземи ја нивната разлика.

5 Нацртај ги аглите $\beta = 58°$ и $\alpha = 35°$, а потоа одреди го конструктивно аголот: а) $\alpha+\beta$; б) $\beta-\alpha$. Добиениот агол потоа измери го со агломер.

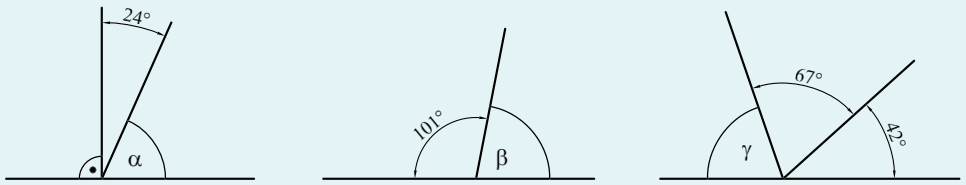
6 Нацртај го аголот $\alpha = 73°$, а потоа конструирај го аголот 3α.

7 Нацртај три различни агли, измери ги со агломер, потоа собери ги и нацртај го со агломер нивниот збир!

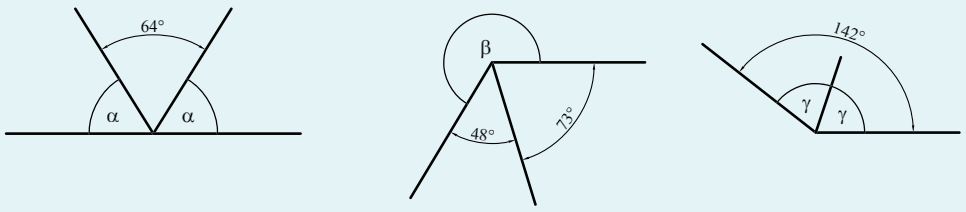
8 Едниот од два напоредни агла има: а) $25° 30'$; б) $40° 45'$; в) $60° 25'$; г) $90°$. Колкав е другиот агол?

9 Поголемиот од два комплементни агла е три пати поголем од другиот. Колку изнесува големината на секој од нив?

10 На цртежите 84 и 85 одреди ја големината на аглите што се означени со грчки букви. Аглите што се означени со исти букви се еднакви.



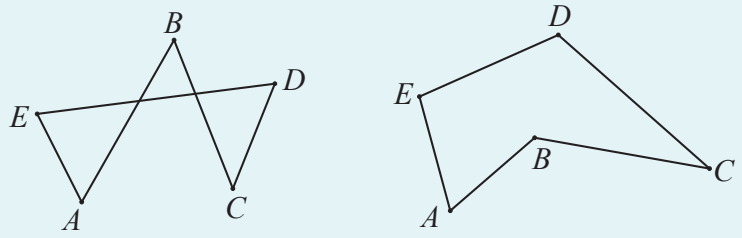
Цртеж 84



Цртеж 85

II.23. МНОГУАГОЛНИК

На цртеж 86 нацртани се две затворени искршени линии. Тие се разликуваат една од друга по тоа што, кај првата искршена линија несоседните страни AB и DE, а исто така и BC и DE се сечат; а кај втората не постои ниту еден пар несоседни страни кои се сечат. Ние ќе разгледуваме затворени искршени линии само од вториот вид.

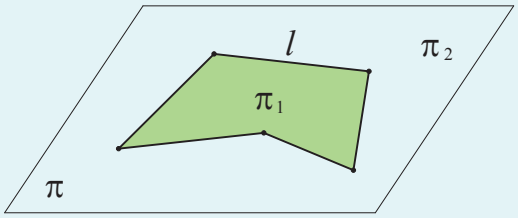


Цртеж 86

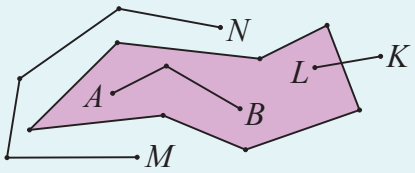
Дефиниција 1

Затворена искршена линија, која лежи на иста рамнина и нема ниту еден пар несоседни страни кои се сечат, се вика уште и многуаголна или полигонална линија.

Секоја полигонална линија l што лежи во рамнината π (цртеж 87) го разбива множеството на сите точки од рамнината π (што не ѝ припаѓаат на l) на две подмножества и тоа: π_1 - множество на точките што припаѓаат на делот од рамнината π што е ограничен со полигоналната линија (внатрешност на полигоналната линија l); и π_2 - множество на точките што не припаѓаат ниту на l, ниту на π_1 (надворешност на полигоналната линија) (цртеж 87).



Цртеж 87



Цртеж 88

На цртеж 87 внатрешната област π_1 на полигоналната линија l е обоена. Внатрешната и надворешната област на полигоналната линија го имаат следново својство: секои две точки што припаѓаат на иста област секогаш можат да се соединат со отсечка или искршена линија која не ја сече полигоналната линија l (цртеж 88). Но, точките што припаѓаат на различни области, тоа својство го немаат (цртеж 88).

Дефиниција 2

Унијата од множеството точки што ѝ припаѓаат на полигоналната линија l и множеството точки од нејзината внатрешна област се вика многуаголник или полигон.

Полигоналната линија l за многуаголникот се вика негова **граница** или **контура**, а страните и темињата на полигоналната линија се викаат страни и темиња на многуаголникот. Многуаголникот симболички го означуваме како полигоналната линија, со именување на сите негови темиња: ABC, $ABCD$, $ABCDE$, итн.

2. Да се потсетиме дека должина на една искршена линија претставува збирот на должините на сите страни на искршената линија. Ако сега разгледуваме затворена искршена линија која претставува многуаголник, природно е периметарот (или обиколката) на многуаголникот да се дефинира како должина на соодветната искршена линија и ќе го означуваме со буквата L.

Дефиниција 3

Збирот од должините на сите страни на многуаголникот $ABCD...M$ се вика периметар на многуаголникот, т.е.

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ... + \overline{MA}.$$

Пример. Една овошна градина е заградена со многуаголникот $ABCD$ кој има должини на страни $\overline{AB} = 12$ m, $\overline{BC} = 14$ m, $\overline{CD} = 10$ m и $\overline{DA} = 15$ m. Да се пресмета колку метри жица било потребно за оградување, ако се знае дека оградата е направена со три реда на жица.

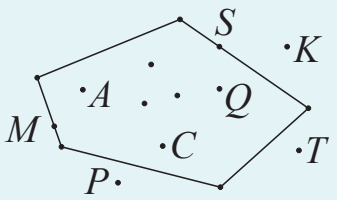
Периметарот на многуаголникот е:

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 12 \text{ m} + 14 \text{ m} + 10 \text{ m} + 15 \text{ m} = 51 \text{ m}.$$

За оградување потребни се три пати повеќе метри жица отколку што е периметарот. Според тоа потребни се: $3 \cdot 51\,\text{m} = 153$ m жица.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е полигонална линија, а што е многуаголник?
2. Нацртај произволен многуаголник, а потоа одреди го периметарот на многуаголникот.
3. Во рамнината на тетратката означи пет точки, од кои никои три не лежат на иста права. Нацртај полигонална линија чии темиња се означените точки, а потоа одреди ја должината на добиената полигонална линија.
4. Колку најмалку страни може да има многуаголникот?
5. Може ли низ некоја точка што ѝ припаѓа на: а) внатрешната; б) надворешната област на даден многуаголник да се повлече права која нема да пресече ниту една страна на многуаголникот?
6. На цртеж 89 нацртан е еден многуаголник. Кои од означените точки на цртежот припаѓаат: а) на многуаголникот; б) на внатрешната; в) на надворешната област; г) на контурата на многуаголникот?

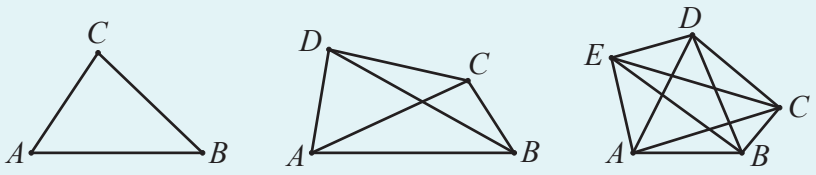


Цртеж 89

II.24. ВИДОВИ НА МНОГУАГОЛНИЦИ

Да ги разгледаме многуаголниците на цртеж 90. Забележуваме дека за секој од тие многуаголници, бројот на темиња е еднаков на бројот на страни. Всушност тоа важи и за кој било многуаголник, т.е. **во секој многуаголник бројот на темињата е еднаков на бројот на страните**.

Според бројот на страните (односно бројот на темињата), многуаголникот може да биде **триаголник** (ако има три страни), **четириаголник** (ако има четири страни), **петаголник** (ако има пет страни), **шестаголник** (ако има шест страни) итн. (цртеж 90).

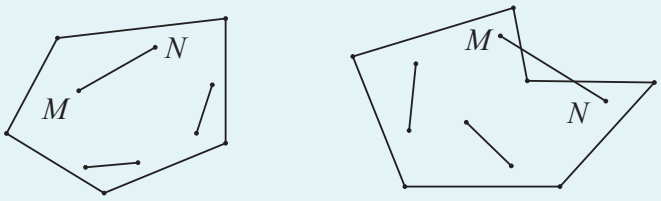


Цртеж 90

Две темиња кои припаѓаат на иста страна се викаат **соседни темиња**, а две страни со заеднички крај (теме) се викаат **соседни страни** на многуаголникот.

Отсечката што сврзува кои да било две несоседни темиња на многуаголникот, се вика негова **дијагонала**. Петаголникот има 5 дијагонали, четириаголникот има 2, а триаголникот нема ниту една дијагонала. Зошто? (цртеж 90).

На цртеж 91 нацртани се два многуаголника. Кај првиот од нив воочуваме дека: која и да било отсечка MN, чии крајни точки ѝ припаѓаат на внатрешната област на многуаголникот, целата лежи во таа област. Но, кај вториот многуаголник постојат отсечки (MN), на кои постои барем една точка што не припаѓа на внатрешната област, иако крајните точки (M и N) ѝ припаѓаат на таа област.



Цртеж 91

Првиот од тие два многуаголника се вика **конвексен многуаголник**, а вториот се вика **неконвексен** (или **конкавен**) **многуаголник**. Самиот збор „конвексен“ означува „испакнат“, додека зборот „конкавен“ означува „вдлабнат“. Според тоа:

Дефиниција 3

Даден многуаголник е конвексен ако на неговата внатрешна област ѝ припаѓаат сите отсечки, чии крајни точки се од таа област.

Секој многуаголник кој не го задоволува тој услов, се вика неконвексен (или конкавен). Ние ќе ги разгледуваме само конвексните многуаголници. Лесно се воочува дека сите дијагонали на конвексниот многуаголник ѝ припаѓаат на неговата внатрешна област.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Од каков вид можат да бидат многуаголниците според бројот на страните, а од каков вид според нивната конвексност?

2 Колку дијагонали можат да се повлечат низ едно теме на еден конвексен:
а) четириаголник; б) петаголник; в) шестаголник?

3 Колку вкупно дијагонали има: а) шестаголникот; б) седумаголникот?

4 Даден е конвексен многуаголник $ABCDE$. Може ли да се повлече права MS која ќе пресече само една страна на многуаголникот?

5 Нацртај конкавен четириаголник и конкавен петаголник.

6 Дали постои конкавен триаголник? Зошто?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1 Што може да биде пресекот на една полуправа и една отсечка што лежат на една права?

2 Отсечката MS нема заеднички точки со правата AB, со која лежи во иста рамнина. Како се поставени точките M и S во однос на правата AB?

3 Дадена е кружницата k и точка $M \notin k$. Одреди ја онаа точка од кружницата која е: а) најблиску до точката M; б) најдалеку од точката M.

4 Дадена е кружница со радиус $r = 27$ mm. Нејзиниот центар е на растојание од една права: а) 2 cm; б) 27 mm; в) 3 cm. Каква положба има таа права спрема кружницата? Направи цртеж.

5 Нацртај еден тап агол, а потоа конструирај ја неговата бисектриса.

6 Колку степена ќе опише врвот на стрелката од часовникот во рок од 5 часа?

7 Еден од аглите, што ги образуваат две прави кои се сечат, изнесува $70°$. Одреди колку изнесуваат другите агли.

8 Одреди го комплементот и суплементот за секој од аглите:: а) $25° 33'$; б) $42° 15'$; в) $58°$.

9 Еден шестаголник $ABCDEF$ има должини на страни: $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm, $\overline{DE} = 7$ cm, $\overline{EF} = 6$ cm, $\overline{FA} = 4$ cm. Пресметај го неговиот периметар.

10 Може ли растојанието помеѓу крајните точки A и D на една искршена линија $ABCD$ да биде 10 cm, ако $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm и $\overline{CD} = 2$ cm?

11 Нацртај два остри агла α и β ($\alpha > \beta$), а потоа конструирај го аголот $2\alpha - \beta$.

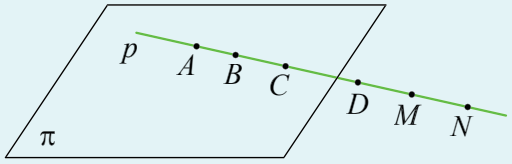
12 Нацртај произволна отсечка AB, а потоа најди три точки при што секоја од нив да се наоѓа на еднакво растојание до A и B.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1 Што може да биде пресекот на две полуправи што лежат на иста права?

2 Што може да биде пресек на две отсечки што лежат на иста права?

3 Точките A и B од правата p лежат на рамнината π (цртеж 92). Што можеш да кажеш за точките C, D, M и N од правата p?



Цртеж 92

4 Ако две прави се паралелни, дали тие секогаш лежат во една рамнина?

5 Ако две прави се сечат, дали тие секогаш лежат во една рамнина?

6 Нацртај искршена линија во една полурамнина која со границата на полурамнината да има: а) само една заедничка точка; б) само две заеднички точки; в) бесконечно множество заеднички точки.

7 Може ли еден многуаголник да има точно а) 3; б) 4; в) 5 дијагонали?

8 На правата p означени се три нејзини точки A, B и C. Колку различни полуправи се образуваат при тоа и кои се тие?

9 Во рамнината П повлечени се две паралелни прави p и q. На колку дисјунктивни делови ја разбиваат рамнината П правите p и q?

10 Колку различни отсечки определуваат 3 различни точки кои: а) припаѓаат; б) не припаѓаат на иста права?

11 Колку различни отсечки определуваат 4 различни точки кои припаѓаат на една иста права p?

12 Што можеш да кажеш за правите a, b и c, ако е познато дека: а) $a \perp c$ и $c \perp b$; б) $a \perp c$ и $c \parallel b$; в) $a \parallel c$ и $c \perp b$?

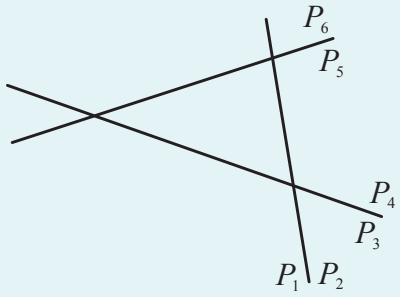
12 Што можеш да кажеш за правите a, b и c, ако е познато дека: а) $a \perp c$ и $c \perp b$; б) $a \perp c$ и $c \parallel b$; в) $a \parallel c$ и $c \perp b$?

13 На цртеж 93 нацртани се три прави, кои две по две се сечат. Со P_1, P_2, P_3,... означени се соодветните полурамнини на кои нацртаните прави ја разбиваат рамнината. Шрафирај ги фигурите што се определени со следниве множества:

а) $P_1 \cap P_4$; б) $P_2 \cap P_5$; в) $P_2 \cap P_6$;

г) $(P_1 \cap P_5) \cap P_4$; д) $(P_2 \cap P_6) \cap P_3$;

ѓ) $(P_4 \cap P_5) \cap (P_1 \cap P_5)$.



Цртеж 93

14 Ако еден агол е $68°$, колкав е неговиот: а) комплемент; б) суплемент?

15 Можат ли два вкрстени агла да бидат: а) комплементни, б) суплементни; и во кој случај?

16 Еден од аглите што се образувани при сечењето на две прави е: а) за $60°$ поголем; б) за $80°$ помал; в) 4 пати помал од еден од останатите агли. Пресметај ја големината на секој од тие агли.

17 Каква заемна положба имаат две прави што се нормални на трета права a?

18 Дадена е права p и една точка M што лежи на неа. Колку нормални прави можат да се повлечат во рамнината низ точката M на правата p?

19 Дадена е кружница и една права p што лежи надвор од неа. Одреди ја онаа точка од кружницата која е: а) најблиску до правата p; б) најдалеку од правата p!

20 Дадена е правата p и точката $C \notin p$. Конструирај кружница со центар во точката C која што ќе се допира со правата p.

21 Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците кои се допираат до дадена права, во една нејзина дадена точка? Направи цртеж.

22 Нацртај кружница и една права што ја сече кружницата. Одреди ја онаа точка од кружницата која е најдалеку од правата!

23 Нацртај отсечка $\overline{AO} = 5$ cm. Потоа, нацртај две кружници со центри во точките A и B, така што: а) двете кружници да имаат еднакви радиуси $r = 3$ cm; б) едната кружница да има радиус $r_1 = 4$ cm, а другата $r_2 = 2$ cm; в) едната да има радиус 22 mm, а другата 28 mm. Во каква заемна положба се наоѓаат нацртаните кружници?

24 Нацртај кружница и повлечи во неа тетива AB. Во крајната точка B на таа тетива нацртај друга тетива BC која ќе биде нормална на тетивата AB. Соедини ги точките A и C. Што забележуваш? Каква е тетивата AC?

25 Нацртај агол $\alpha = 140°$. Од темето на аголот α повлечи нормални полуправи на неговите краци кои ќе припаѓаат на внатрешната област на аголот α. Одреди го аголот β што го образуваат нормалите.

26 Еден кружен лак претставува: а) 1/3; б) 1/4; в) 1/5; г) 1/8; д) 1/10 од кружницата. Одреди колку агловни степени има централниот агол што му одговара на тој кружен лак.

27 Нацртај кружница со радиус $r = 4{,}3$ cm, а потоа во неа нацртај тетива, долга 5 cm. Измери го централниот агол што ѝ одговара на нацртаната тетива.

ТЕМА III

ДРОПКИ. ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

III.1. ПОИМ ЗА ДРОПКИ. ЧИТАЊЕ И ПИШУВАЊЕ

Дотука ние се запознавме со својствата и основните аритметички операции на природните броеви. Но, освен со природните броеви во практичниот живот се среќаваме и со други броеви што ги викаме дропки. Тоа се броеви што ни искажуваат одреден дел од некоја величина или дел од целото.

На пример: домаќинката на продавачот му вели: „Отсечи ми половина метар од ова платно“ или „Измери ми половина килограм сирење“. Тука должината на платното и масата на сирењето не се изразени во цели метри или цели килограми, но во делови од тие единици.

Мајката, спремајќи го ручекот, ѝ вели на Марија: „Брат ти Петар по половина час ќе се врати од училиште“. Исто така и тука времето не е искажано во цели часови, но во делови од часот.

По ручекот таткото ја расекол лубеницата на 5 еднакви делови и секому му дал по еден таков дел, но мајката својот дел ѝ го дала на најмалата ќерка Марија. Ако се запрашаме колку добил секој од лубеницата, ќе одговориме: „По една петинка, а Марија две петинки од лубеницата“.

Во сите горни примери не стануваше збор за цели единици, туку за делови од нив. Деловите од целото (единицата) можат да бидат најразлични: половинки, третинки, четвртинки, петтинки, шестинки, седминки, осминки, деветтинки, десеттинки, стотинки итн. На пример, дециметарот е десетти дел (десеттинка) од метарот, а сантиметарот е стоти дел (стотинка) од метарот.

Деловите од целото: 1 половинка, 1 третинка, 1 четвртинка, 1 петтинка или 2 петтинки, 3 четвртинки, 3 петтинки, 5 осминки итн., претставуваат одредена количина, според тоа и тие се броеви. Таквите броеви ги искажуваме или со 1 дел од целото или со повеќе такви еднакви делови.

Броевите што содржат еден или неколку еднакви делови од целото (единицата), се викаат **дропки**.

Зборовите: половинка, четвртинка, третинка, петтинка, десеттинка, стотинка итн. при искажувањето на дропките ни покажуваат на колку еднакви делови е разделена единицата (целото), според тоа и нив можеме да ги изразиме со природните броеви: 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 10, . . . , 100 итн.

Според тоа, дропките ги искажуваме со помош на два броја, што при запишувањето ги разделуваме со една хоризонтална цртичка и тоа вака:

1 половинка ја запишуваме:	$\frac{1}{2}$
1 третинка ја запишуваме:	$\frac{1}{3}$
1 четвртинка ја запишуваме:	$\frac{1}{4}$
1 петтинка ја запишуваме:	$\frac{1}{5}$
2 петтинки ги запишуваме:	$\frac{2}{5}$
3 четвртинки ги запишуваме:	$\frac{3}{4}$
3 петтинки ги запишуваме:	$\frac{3}{5}$
5 осминки ги запишуваме:	$\frac{5}{8}$

Бројот што стои под цртичката го викаме **именител**, а ни покажува **на колку еднакви делови е разделена единицата,** т.е., името на тие делови. Бројот пак, што стои над цртичката го викаме **броител**, а ни покажува колку **такви делови сме земале**, односно колку ги има во дропката.

Хоризонталната цртичка, што го разделува броителот од именителот, се вика **дробна црта**. На пример, кај дропката:

$$\frac{5}{8} = \frac{\text{Броител}}{\text{Именител}}$$

Бројот 5 е броител, а бројот 8 е именител.

Дропките, можат да имаат најразлични именители, т.е. за именител може да дојде кој и да било природен број, таквите дропки се викаат уште и обични дропки.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Зошто ни служат дропките? Како ги означуваме?

2 Напиши ги следниве изрази како дропки:
а) 7 осминки; б) 3 десеттинки; в) 10 стотинки; г) 23 петтинки; д) 4 деветтинки.

3 Запиши ги со зборови следните дропки:

а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{12}{15}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{6}{13}$; д) $\frac{7}{10}$.

4 Што претставува броител, а што именител? Како се вика хоризонталната цртичка која го разделува броителот од именителот?

5 Напиши ги следните дропки, ако:

а) броителот е 10, а именителот е за 3 поголем од броителот;

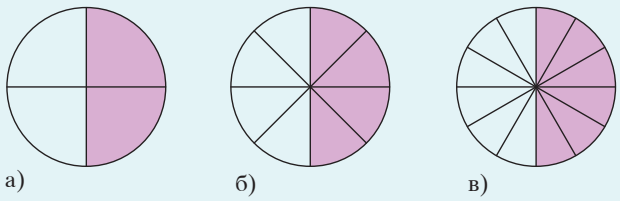
б) именителот е два пати поголем од броителот b;

в) броителот е за 3 единици помал од именителот k;

г) бројот над дробната црта е 8, а бројот под дробната црта е било кој природен број поголем од броителот.

III.2. ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ НА ДРОПКИ. ЕДНАКВОСТ НА ДРОПКИ

На цртежот 1 под а) кругот е поделен на 4 еднакви делови, а два од тие дела се обоени. Двата обоени дела сочинуваат $\frac{2}{4}$ од кругот. Бидејќи е обоен половина круг, затоа $\frac{2}{4}$ од кругот се еднакви на $\frac{1}{2}$ од кругот. Значи дропките $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{2}$ се еднакви, т.е. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.



Цртеж 1

Ако секоја четвртинка од кругот ја поделиме уште на по два еднакви дела (цртеж 1б) тогаш целиот круг ќе се подели на 8 еднакви делови, а обоени ќе бидат 4 такви делови. Значи:

$$\frac{2}{4}=\frac{4}{8}.$$

Ако пак, секоја четвртинка од кругот ја поделиме на по три еднакви делови (цртеж 1в) тогаш целиот круг ќе се подели на 12 еднакви делови, а обоени ќе бидат 6 такви делови. Значи:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12}.$$

Дропката $\frac{4}{8}$ може да се добие од дропката $\frac{2}{4}$ со множење на нејзиниот броител и именител со 2:

$$\frac{2}{4}=\frac{2\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{4}{8}.$$

Слично, дропката $\frac{6}{12}$ може да се добие од дропката $\frac{2}{4}$ со множење на нејзиниот броител и именител со 3:

$$\frac{2}{4}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{6}{12}.$$

И дропката $\frac{1}{2}$ може да се добие од дропката $\frac{2}{4}$, но со делење на нејзиниот броител и именител со 2:

$$\frac{2}{4}=\frac{2:2}{4:2}=\frac{1}{2}.$$

Според тоа:

Ако броителот и именителот на дропката ги помножиме или поделиме со еден ист природен број тогаш ќе добиеме друга дропка еднаква на првата дропка.

Тоа е **основно својство на дропките**, кое во општ вид со помош на букви го запишуваме:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k},\ k\in \mathbf{N}.$$

Првата трансформација се вика **проширување на дропката $\frac{a}{b}$ со бројот** k, а втората трансформација - **скратување на дропката $\frac{a}{b}$ со бројот** k. Така, на пример, трансформацијата на дропката $\frac{2}{3}$ во $\frac{8}{12}$ е проширување на дропката $\frac{2}{3}$ со бројот 4, а трансформацијата на дропката $\frac{8}{12}$ во $\frac{2}{3}$ е скратување на дропката со бројот 4. Една дропка се нарекува **нескратлива** ако не постои природен број со кој таа може да се скрати. Таква е на пример

дропката $\frac{3}{4}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е проширување, а што скратување на дропка?

2 Прошири ги следниве дропки:

а) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ со бројот 3; б) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11}, \frac{9}{14}, \frac{5}{12}$ со бројот 4.

3 Со колку е извршено проширувањето на следниве дропки:

а) $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$; б) $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$; в) $\frac{1}{4}=\frac{7}{28}$; г) $\frac{5}{7}=\frac{25}{35}$?

4 Скрати ги дропките: $\frac{6}{9}; \frac{5}{15}; \frac{12}{15}; \frac{18}{24}; \frac{15}{21}; \frac{20}{36}$.

5 Напиши ги испуштените броители и именители:

$$\frac{2}{3}=\frac{\quad}{12}; \frac{5}{8}=\frac{\quad}{40}; \frac{5}{9}=\frac{30}{\quad}; \frac{4}{7}=\frac{36}{\quad}; \frac{7}{12}=\frac{\quad}{60}; \frac{20}{64}=\frac{\quad}{16}.$$

III

III.3. ВИДОВИ НА ДРОПКИ. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ДРОПКИ НА БРОЈНА ПРАВА

Сите досегашни примери на дропки беа од облик $\frac{a}{b}$, каде a и b се природни броеви, такви што $a < b$. Таквите дропки ќе ги викаме **чисти** дропки. Но, што ако $a \geq b$? Таквите дропки ќе ги нарекуваме **нечисти**, бидејќи покрај некој дел од целото тие во себе содржат и некој природен број. Нека при делење на a со b се добива количник n и остаток r. Тогаш, за нечистата дропка $\frac{a}{b}$ велиме дека се состои од n цели и дробен дел $\frac{r}{b}$ ($r < b$). Таквите претставувања на нечистите дропки ги нарекуваме **мешани броеви**.

На пример, $\frac{5}{2}$ се состои од две цели и $\frac{1}{2}$, а тоа го запишуваме како $2\frac{1}{2}$. Дропката $\frac{15}{6}$ се состои од две цели и $\frac{3}{6}$. Но, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, па $\frac{15}{6}=2\frac{3}{6}=2\frac{1}{2}$.

Во претходниот пример можевме дропката $\frac{15}{6}$ да ја скратиме со 3 и да добиеме $\frac{5}{2}$, а потоа можевме да ја запишеме како $2\frac{1}{2}$. Значи, крајниот резултат е ист, независно од тоа дали нечистата дропка прво ќе се скрати, па ќе се претвори во мешан број или прво ќе ја претвориме во мешан број, а потоа во дробниот дел ќе кратиме.

Сега да ја разгледаме обратната постапка. Ако е даден мешан број, на пример, $5\frac{3}{8}$ ние можеме да го запишеме како нечиста дропка $\frac{a}{b}$. Имено, $5\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 8+3}{8}=\frac{43}{8}$. Дропките $\frac{5}{1}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{16}{4}$ итн., во кои броителот се дели со именителот, нема потреба да ги запишуваме во вид на дропки, туку пишуваме 5, 2, 4 итн. Имено, дробната црта означува делење, без разлика дали делењето е изводливо или не.

III

При проширувањето и скратувањето на дропките, како и при претворањето на еден мешан број во нечиста дропка, ние всушност една дропка ја запишуваме на друг начин. Притоа старата и новата дропка се само различни записи на еден ист број. Затоа може да се каже дека **две дропки се еднакви ако со наведените претходни трансформации едната може да се доведе до другата дропка**.

Примери: $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{7}{6}=\frac{21}{18}$; $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$; $\frac{8}{4}=\frac{2}{1}=2$; $4\frac{3}{5}=\frac{23}{5}$; $6\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$; $\frac{20}{11}=1\frac{9}{11}$; $\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$; $\frac{25}{20}=1\frac{1}{4}$; итн.

За да ги претставиме дропките на бројна права потребно е тие да бидат чисти дропки или да бидат мешани броеви. Ако сакаме да претставиме нечиста дропка на бројна права потребно е да ја трансформираме во мешан број. Претставувањето се врши на следниот начин:

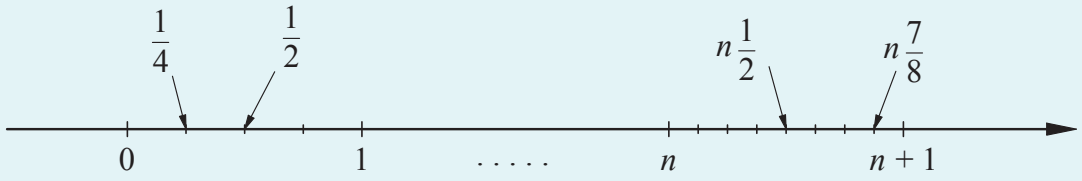
1. Ако сакаме да претставиме чиста дропка на бројна права, очигледно е дека треба да ја нанесеме помеѓу броевите 0 и 1. Ова растојание (помеѓу 0 и 1) го разделуваме на толку делови колку што е именителот на дропката. Потоа ја бараме цртата што е еднаква на броителот на дропката (цртеж 2).

2. Ако сакаме да претставиме мешан број на бројна права потребно е да ја најдеме цртата која е еднаква на целиот дел n на мешаниот број. Потоа, растојанието помеѓу броевите n и n+1 го разделуваме на толку делови колку што е именителот на дробниот дел од мешаниот број. Оттука, ја бараме цртата што е еднаква на броителот на дробниот дел на мешаниот број (цртеж 2).

Како што може да се забележи на цртеж 2, чистата дропка $\frac{1}{2}$ ја нанесуваме на бројната

права така што растојанието од 0 до 1 го разделуваме на 2 дела и на првата црта се наоѓа оваа дропка. На истиот начин ја претставуваме чистата дропка $\frac{1}{4}$.

Мешаниот број $n\frac{7}{8}$ го нанесуваме на бројна права така што растојанието помеѓу n и $n+1$ го разделуваме на 8 делови и ја одбираме 7-та црта.



Цртеж 2

Конкретно, ако сакаме да го претставиме мешаниот број $7\frac{3}{5}$ на бројна права, растојанието помеѓу 7 и 8 го разделуваме на 5 дела и ја одбираме третата црта. Ако е потребно да претставиме нечиста дропка, на пример, да ја претставиме дропката $\frac{14}{3}$ на бројна права прво ја трансформираме во мешан број $4\frac{2}{3}$, па оттука следува веќе познатата постапка.

III

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Кои дропки се викаат чисти, а кои нечисти? Што се мешани броеви?

2 Претстави ги графички (како на цртеж 2) следните нечисти дропки, односно мешани броеви:

$$\frac{5}{3};\ 1\frac{1}{3};\ \frac{9}{4};\ 3\frac{2}{3};\ \frac{10}{3};\ 2\frac{2}{5}.$$

3 Следните нечисти дропки:

$$\frac{8}{5};\ \frac{14}{3};\ \frac{101}{5};\ \frac{20}{6},$$

претстави ги во вид на мешани броеви.

4 Следните мешани броеви:

$$3\frac{1}{5};\ 4\frac{1}{3};\ 1\frac{9}{10};\ 6\frac{2}{3},$$

претстави ги во вид на нечисти дропки.

5 Претвори ги долните нечисти дропки во мешани броеви, кога претходно ќе ги скратиш:

$$\frac{80}{64};\ \frac{98}{42};\ \frac{63}{42};\ \frac{134}{108};\ \frac{70}{30};\ \frac{145}{48}.$$

6 Изрази го решението на равенката со дропка:

а) $2x = 5$; б) $5x = 8$; в) $6 : x = 8$.

7 Напиши ги множествата од дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, ако $a \in \{1; 3\}$ и $b \in \{4; 6\}$.

8 Колку:

а) шестинки има (се содржат) во дропките: $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}$,

б) осминки има во дропките: $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{8}$?

III

III.4. СОБИРАЊЕ ДРОПКИ СО ЕДНАКВИ ИМЕНИТЕЛИ

Пример 1. Еден тракторист првиот ден изорал $\frac{2}{7}$ од еден блок, а вториот ден изорал $\frac{3}{7}$ од блокот. Колкав дел од блокот трактористот изорал за двата дена?

Решение. Очигледно е дека вкупната површина што ја изорал трактористот е еднаква на збирот на површините што ги изорал во првиот и вториот ден. Тоа го запишуваме вака: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$. Велиме дека бројот $\frac{5}{7}$ е **збир** на дропките $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{7}$, а исто и изразот $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ е збир на собироците $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{7}$.

Гледаме дека дропките $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{7}$ имаат еднакви именители, а ги собираме кога ќе ги собереме нивните броители, а именителот го оставаме ист. Оттука правилото:

Збир на две дропки со еднакви именители е еднаков на дропка со броител еднаков на збирот од броителите на двете дропки и именител - еднаков на нивниот именител, т.е.

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}=\frac{a+b}{k}\ ;\ (a, b, k, \in \mathbf{N}).$$

Добиената дропка - збир пожелно е (ако е можно) да се скрати. На пример:

$$\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{8+4}{15}=\frac{12}{15}=\frac{12:3}{15:3}=\frac{4}{5}.$$

Пример 2. Еден работник првиот ден завршил $\frac{3}{16}$ од работата, а вториот ден извршил $\frac{1}{16}$ од работата повеќе од првиот ден. Колкав дел од работата извршил работникот за двата дена?

Решение. Вториот ден работникот извршил $\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$ од работата. За двата дена заедно работникот завршил:

$$\frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16},$$

од работата.

III

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Како се собираат дропки со еднакви именители? Покажи го тоа со примери!

2 Собери ги дропките и ако е можно скрати ја дропката - збир.

а) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$; б) $\frac{14}{15}+\frac{7}{15}$; в) $\frac{6}{5}+\frac{4}{5}$; г) $\frac{2}{3}+\frac{0}{3}$; д) $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$.

3 Еден комбајн првиот ден ожнеал $\frac{2}{9}$ од еден блок, а вториот ден ожнеал за $\frac{1}{9}$ од блокот повеќе отколку првиот ден. Колкав дел од блокот ожнеал комбајнот вториот ден, а колкав за двата дена?

4 Пресметај го збирот $\frac{5}{8}+x$ за $x\in\left\{\frac{3}{8};\frac{1}{8};\frac{5}{8};\frac{11}{8};\frac{13}{8}\right\}$. .

III.5. ОДЗЕМАЊЕ ДРОПКИ СО ЕДНАКВИ ИМЕНИТЕЛИ

Познато е дека одземањето е обратна операција на собирањето. Затоа, како кај природните и кај децималните броеви, така и кај дропките, имаме:

Разликата на две дропки е дропка чиј збир со дропката - намалител е еднаков на дропката - намаленик.

На пример: $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$, бидејќи $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$.

$\frac{7}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5}{11}$, бидејќи $\frac{5}{11}+\frac{2}{11}=\frac{7}{11}$.

Општо, ако $a \geq b$ тогаш $\frac{a}{k}-\frac{b}{k}=\frac{a-b}{k}$, бидејќи $\frac{a-b}{k}+\frac{b}{k}=\frac{(a-b)+b}{k}=\frac{a}{k}$.

Пример 1. Цветанка требало да испие $\frac{5}{8}l$ млеко, но таа испила само $\frac{3}{8}l$. Колку млеко останало неиспиено?

III

Решение. Решението на задачата се сведува на одредување на разликата: $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=?$

Бараната разлика е $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ па $\frac{1}{4}l$ млеко останало неиспиено.

Според тоа:

Дропки со еднакви именители се одземаат кога од броителот на дропката - намаленик се одземе броителот на дропката - намалител и добиената разлика се земе за броител на дропката - разлика, а за именител се земе истиот именител.

Пример 2. Да се реши равенката $x+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Решение. Знаеме дека непознат собирок е еднаков на разликата од познатиот збир и познатиот собирок т.е.

Од $x+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ имаме: $x=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Како се одземаат дропки со еднакви именители? Наведи примери.

2 Пресметај ја разликата:

а) $\frac{9}{13}-\frac{5}{13}$; б) $\frac{8}{15}-\frac{2}{15}$; в) $\frac{7}{18}-\frac{5}{18}$; г) $\frac{24}{29}-\frac{19}{29}$.

3 Провери дали е точно пополнета табелата:

x	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{14}{11}$	$\frac{15}{11}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{25}{11}$
$x-\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	1	$\frac{12}{11}$	$\frac{15}{11}$	2

Што забележуваш, како се менува разликата $x-\frac{3}{11}$ кога намалениkот се зголемува?

4 Едно семејство сака да заштеди $\frac{3}{14}$ од своите месечни приходи. Колкав дел од приходите смее да троши?

5 Реши ги равенките: а) $\frac{3}{4}-x=\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7}-x=\frac{3}{7}$; в) $x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

6 Провери дали е точно: а) $\frac{a}{k}-0=\frac{a}{k}$; б) $\frac{a}{k}-\frac{a}{k}=0$.

7 Што ќе се случи со разликата на две дропки, ако: а) намалениkот и намалителот ги зголемиш за $\frac{2}{9}$? б) намалениkот и намалителот ги намалиш за $\frac{5}{9}$? Наведи по еден пример.

III.6. ДЕЦИМАЛНА ДРОПКА И ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

Од множеството на дропки со најразлични именители, ако ги одделиме дропките што за именител имаат: 10, 100, 1000, 10000 итн. ќе добиеме дропки, чии што именители се декадни единици. Таквите дропки за нас претставуваат посебен интерес и се викаат уште **децимални дропки.**

Децимални дропки се: $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{9}{100}, \frac{8}{1000}, \frac{13}{10000}$ итн.

Децималните дропки, како што ќе видиме, го имаат тоа својство, што можат да се запишат и без именител, т.е. во друга форма.

Со мерење на должината на училницата, нека најдеме дека таа е долга 7 m 4 dm 5 cm. Тој резултат го запишуваме во форма на повеќеимен број (како погоре) или пак во форма на едноимен број 745 cm. При тоа за основна единица го имаме земено сантиметарот.

Ако пак за основна единица мерка за должина го земеме метарот или дециметарот тогаш горниот резултат од мерењето на должината на училницата не ќе можеме да го искажеме во форма на едноимен природен број.

Бидејќи знаеме дека 1 m = 10 dm, т.е. дека дециметарот е 1 десетти дел или 1 десеттинка $\frac{1}{10}$ од метарот, тогаш можеме да речеме дека: 10 десеттинки прават 1 цело или дека: десеттинката е 10 пати помала од целото. А бидејќи 1 dm = 10 cm или 1cm = $\frac{1}{10}$ dm, тогаш пак: 10 стотинки прават 1 десеттинка или дека стотинката е 10 пати помала од десеттинката.

Од пишувањето на природните броеви знаеме дека:

- стотката е 10 пати помала од илјадата;
- десетката е 10 пати помала од стотката;
- единицата е 10 пати помала од десетката.

Користејќи го тоа својство на декадниот броен систем, зад единицата можеме да ги редиме и десетичните дропки, бидејќи:

- десеттинката е 10 пати помала од единицата;
- стотинката е 10 пати помала од десеттинката;
- илјадата е 10 пати помала од стотинката;
- десетилјадата е 10 пати помала од илјадата итн.

Според тоа, за десеттинките што се десет пати помали од простите единици отвораме нов ред - **ред на десеттинки**, што доаѓа надесно од редот на простите единици. Надесно од редот на десеттинките доаѓа **редот на стотинките**, а надесно од нив **редот на илјадите**, па редот на **десетилјадите, стоилјадите, милионитите** итн.

За да го одделиме целиот од дробниот дел во бројот, после простите единици ставаме запирка „ **,** “ што ја викаме **децимална запирка**.

Тогаш резултатот од мерењето на должината на училницата 7 m 4 dm 5 cm, ако за основна единица мерка го земеме метарот, го запишуваме вака: 7,45 m, а го читаме: 7 цели 4 десеттинки и 5 стотинки од метарот, (бидејќи дециметрите се десеттинки, а сантиметрите стотинки од метарот), или 7 цели и 45 стотинки од метарот. Тука и дециметрите се изразени во сантиметри.

Ако пак за основна единица го земеме дециметарот, повеќеименованиот број 7 m 4 dm 5 cm го запишуваме вака: 74,5 dm, а го читаме: 74 цели и 5 десеттинки од дециметарот. При ова запишување метрите се претворени во дециметри, а сантиметрите се како што ни е познато десетти делови од дециметарот.

Вака запишаните броеви 7,45 m и 74,5 dm, што содржат и цел и дробен дел, се викаат **децимални броеви.**

Цифрите, што стојат надесно од децималната запирка се викаат **децимални места** или само **децимали**, а и тие образуваат **децимален дел**. Цифрите што стојат налево од децималната запирка, се викаат **цели**. Оттука, станува јасно зошто броевите што немаат децимален дел се викаат уште и цели броеви.

По таков начин гледаме дека и децималните дропки можат да бидат запишани без именител, а во форма на децимални броеви.

За да ја запишеме децималната дропка, на пример, $\frac{5}{10}$ без именител, треба прво да воочиме дека во неа нема цели, а на местото на целите да напишеме нула, т.е. $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Слично ќе имаме:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \qquad \frac{6}{10} = 0{,}6; \qquad \frac{23}{100} = 0{,}23; \qquad \frac{524}{1000} = 0{,}524.$$

Значи: ако децималниот број нема цели тогаш пред децималната запирка мораме да напишеме нула. Такви децимални броеви што не содржат цели, се викаат **децимални дропки.**

При запишувањето на децималните дропки без именител, треба да внимаваме по децималната запирка да има толку цифри колку што има нули во декадната единица од именителот.

Ако бројот на цифрите во броителот е помал од бројот на нулите во именителот тогаш налево од броителот потребните децимални места ги пополнуваме со нули.

Така на пример: $\frac{7}{100} = 0{,}07;$ или $\frac{1}{100} = 0{,}01;$ $\frac{27}{1000} = 0{,}027;$ $\frac{6}{1000} = 0{,}006;$ $\frac{1}{1000} = 0{,}001.$

Десеттинките, стотинките, илјадите, итн. ќе ги викаме **децимални единици од прв, втор, трет ред** итн.

Редот на децималните единици се пресметува од децималната запирка надесно, додека редот на декадните единици од децималната запирка налево.

Со воведувањето на децималните единици, всушност, ние само го прошируваме декадниот броен систем.

Како кај целите, така и кај децималните броеви, месната вредност на нивните цифри расте кога се оди налево, а опаѓа кога се оди надесно.

Децималните броеви се запишуваат така што прво се запишуваат целите, ако има такви, а ако нема, тогаш се пишува 0, а зад неа се става децималната запирка, потоа зад децималната запирка се пишуваат децималните единици на соодветните места што им припаѓаат според нивните месни вредности.

Ако во бројот нема некои децимални единици од одреден ред тогаш на нивното место се пишува нула, за да ја сочуваат својата месна вредност другите цифри. На пример: бројот 24 цели и 6 илјадити го запишуваме вака: 24,006. Двете нули по децималната запирка ни покажуваат дека во бројот нема десеттинки и стотинки.

Запишаните децимални броеви ги читаме така што прво го читаме делот лево од децималната запирка како природен број, а потоа го читаме целиот децимален дел пак, како природен број, само што на крајот го изговараме името (називот) на последната децимална единица.

На пример, бројот 6,0482 го читаме вака: 6 цели и 482 десетилјадити.

Ако децималниот број има повеќе децимали, неговото читање можеме да го извршиме и вака: ги разделуваме децималите, почнувајќи од децималната запирка надесно, во групи од

по 3 цифри (последната група може да биде само со една или две децимали), потоа ја читаме секоја група одделно како природен број, само што по нејзиното читање го изговараме името (називот) на последната децимална цифра на секоја од одделните групи. На пример, децималниот број 0,05480617 го читаме вака: 0 цели 54 илјадити 806 милионити и 17 сто милионити.

Истиот децимален број можеме да го прочитаме на следниот начин:

0 цели, пет милиони четиристотини осумдесет илјади и шестотини седумдесет сто милионити.

Запишувањето и читањето на децималните броеви, како и редот на декадните единици и децималните единици прегледно го даваме во следнава табела:

Тип	ПРИРОДНИ												ДЕЦИМАЛНИ								
Ред	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		1	2	3	4	5	6	7	8	10
Назив	Десетки милијарди	Единици милијарди	Стотки милиони	Десетки милиони	Единици милиони	Стотки илјади	Десетки илјади	Единици илјади	Стотки	Десетки	Единици	Децимална запирка	Десеттинки	Стотинки	Илјадити	Десетилјадити	Сто илјадити	Милионити	Десетмилионити	Сто милионити	Милијардити итн.
Примери							4	8	5	5 3	6 0	, ,	8 7	3 1	0	9					

Прочитај ги броевите запишани во табелата!

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е децимална дропка?
2. Што е децимален број? Која е функцијата на децималната запирка?
3. Прочитај го децималниот број: а) 12,9427; б) 259,029542; в) 13,00032!
4. Запиши го бројот:
   а) 23 цели 452 илјадити 230 милионити и 2 десетмилионити;
   б) 134 цели и 9 сто милионити;
   в) 0 цели 100 илјадити;
   г) 0 цели 1 десеттинка.
   Што забележуваш? Дали броевите под в) и г) се исти?
5. Во бројот 732,341796 колкава е цифрата сто илјадити?

III.7. СВОЈСТВА НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ

Напоменуваме дека во праксата при сметањето со децимални броеви, понекогаш ќе прибегнуваме кон допишување на нули од десната страна на тие броеви. Зошто ни е потребно тоа?

Нека ни се дадени следниве броеви: 2,4; 38,52; 486; 67,021; 0,4305. Како што гледаме тие децимални броеви имаат различен број децимали, а бројот 486 е пак природен број. Со допишувањето од десно по неколку нули, ние можеме да го израмниме бројот на нивните децимали, т.е. секој од тие броеви да има по 4 децимали:

2,4000; 313,5200; 486,0000; 67,0210; 0,4305.

Од друга страна пак, ако одреден децимален број завршува од десно со една или неколку нули тогаш со испуштањето на тие нули вредноста на тој децимален број исто така не се менува.

На пример: 3,500 m = 3,5 m.

Да видиме сега пак, што станува со еден децимален број, ако од неговата лева страна му допишеме една или неколку нули.

На пример, ако од левата страна на бројот 4,2 допишеме две нули, ќе добиеме 004,2. Допишаните нули ни покажуваат дека во бројот нема десетки и стотки, но тоа е јасно и без тие да стојат пред бројот.

Значи, допишувањето на нули од левата страна на децималните броеви нема никакво значење и со тоа не се променува нивната вредност.

Напоменуваме дека допишувањето или отфрлувањето на нули помеѓу вредносните цифри на децималните броеви не смее да се прави, зошто тоа повлекува и промена на нивната вредност. На пример, $2,56003 \neq 2,5603$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Дали броевите 20,302 и 20,30200 се исти? Зошто е тоа така?

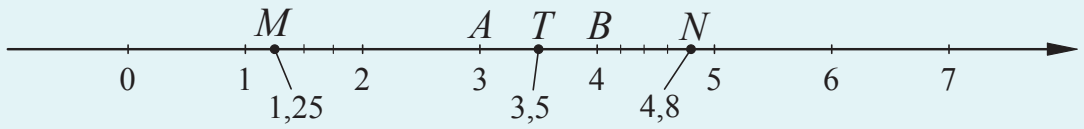
2 Дали броевите 45,3200 и 0045,3020 се исти? Зошто е тоа така?

3 Бројот 301,70800 запиши го така што ќе има: а) 4 децимали; б) 3 децимали; в) 2 децимали?

III.8. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ НА БРОЈНА ПРАВА

Децималните броеви, исто така како и природните броеви, можеме да ги претставуваме графички на бројна оска.

На пример, децималниот број 3,5 на бројната оска го преставуваме со точката T (цртеж 3), која се наоѓа на средината помеѓу точките A и B што одговараат на природните броеви 3 и 4.



Цртеж 3

III

На истата бројна оска на децималните броеви 1,25 и 4,8 им одговараат точките M и N (цртеж 3). Како се добиени тие?

Затоа можеме да кажеме дека:

На секој природен или децимален број им одговара по една точно определена точка на бројната оска.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Претстави ги на бројна оска децималните броеви: 4,5; 0,5; 1,75; 2,25; 5,2; 3,6!

2 Колку точки на бројната оска му одговараат на еден децимален број?

3 Одреди на бројната оска точки што им припаѓаат на броевите: а) 0,8; б) 1,4; в) 5,5; г) 4,75; д) 5,2!

III.9. СПОРЕДУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ ПО ГОЛЕМИНА

Споредувањето на децималните броеви по големина се разликува од споредувањето на природните броеви. Кај природните броеви, на пример, секој двоцифрен број е поголем од кој и да било едноцифрен, а и најмалиот трицифрен број е поголем од кој и да било двоцифрен итн. При споредувањето на децималните броеви, бројот на децималите не одлучува секогаш за нивната големина.

Да ги земеме децималните броеви: 8,3 и 7,3. Тие имаат различен број на цели, но еднаков број на десеттинки. Јасно е дека првиот децимален број, што има поголем број цели единици е поголем од вториот децимален број, т.е.

$$8,3 > 7,3.$$

Да ги земеме сега децималните дропки: 0,5 и 0,48.

За да ги споредиме тие дропки, кон првата дропка од десната страна допишуваме една нула, со цел да го израмниме бројот на нивните децимали. Така добиваме: 0,50 и 0,48. Бидејќи првата дропка има 50 стотинки, т.е. повеќе отколку втората дропка, која пак има 48 стотинки, затоа забележуваме дека:

$$0,5 > 0,48.$$

Да ги споредиме по големина децималните броеви: 2,36 и 2,352. Тие, како што гледаме имаат еднаков број цели единици, еднаков број на десеттинки, а се разликуваат по втората децимала, т.е. по бројот на стотинките. Бидејќи првиот децимален број има повеќе стотинки од вториот, тогаш:

$$2,36 > 2,352.$$

Според сето дотука изложено можеме да заклучиме дека: **од два децимални броја поголем е тој што има поголем број цели единици, а при еднаков број на целите единици, поголем е тој што има поголем број десеттинки. Ако пак, децималните броеви имаат еднаков број цели единици и еднаков број десеттинки тогаш поголем е тој што има поголем број стотинки, итн**.

На пример:

$$12,47739 > 12,477286.$$

Тие се разликуваат дури по бројот на десетилјадите.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Спореди ги броевите: а) 2,5 и 2,50; б) 0,35 и 0,3500; в) 3,02 и 3,002; г) 5,04 и 5,4 и запиши го тоа со равенство или соодветно неравенство!

2 Спореди ги следниве децимални броеви кога меѓу нив ќе ставиш од знаците: **=**, > или <: а) 3,2 и 3,198; б) 6,87 и 7; в) 0,02 и 1,2; г) 0,80 и 0,800; д) 0,03 и 0,003; ѓ) 37,2 и 36,6!

3 Спореди ги броевите: а) 4,23 со 5; б) 3,18 со 3,28; в) 0,12 со 0,119; г) 0,998 со 1; д) 0,001 со 0,01; ѓ) 0,3 со 0,2995!

4 Подреди ги следните броеви да растат по големина: 1,02; 4; 8,3; 1,11; 1,015; 0,42; 0,428; 0,054; 2,0009!

III.10. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ДЕКАДНА ЕДИНИЦА

1. Задача: Ако еден бензински мотор за 1 час троши 12,35 *l* бензин, колку ќе потроши за 10 часа?

За 10 часа моторот ќе потроши 10 пати повеќе, т.е. треба да го пресметаме производот $12,35 \cdot 10$.

Децималниот број 12,35, ако го претставиме како збир: 12,35 = 1 Д (десетки) + 2 Е (единици) + 3 д (десеттинки) + 5 с (стотинки), ќе имаме:

$$12,35 \cdot 10 = (1 \text{ Д} + 2 \text{ Е} + 3 \text{ д} + 5 \text{ с}) \cdot 10 = 1 \text{ Д} \cdot 10 + 2 \text{ Е} \cdot 10 + 3 \text{ д} \cdot 10 + 5 \text{ с} \cdot 10 =$$
$$= 10 \text{ Д} + 20 \text{ Е} + 30 \text{ д} + 50 \text{ с}.$$

Но бидејќи: 10 Д = 1 С (стотки), 20 Е = 2Д, 30 д = 3 Е, а 50 с = 5 д, тогаш:

$$12,35 \cdot 10 = (1 \text{ Д} + 2 \text{ Е} + 3 \text{ д} + 5 \text{ с}) \cdot 10 = 10 \text{ Д} + 20 \text{ Е} + 30 \text{ д} + 50 \text{ с} =$$
$$= 1 \text{ С} + 2 \text{ Д} + 3 \text{ Е} + 5 \text{ д} = 123,5 \text{ или } 12,35 \cdot 10 = 123,5.$$

Значи, за 10 часа моторот ќе потроши 123,5 литри бензин.

III

Оттука гледаме дека кога децималниот број 12,35 го помноживме со 10, само кога неговата децимална запирка ја поместивме за едно место во десно.

На сличен начин можеме да се увериме дека:

$24,836 \cdot 100 = (2 \text{ Д} + 4 \text{ Е} + 8 \text{ д} + 3 \text{ с} + 6 \text{ и}) \cdot 100 = 200 \text{ Д} + 400 \text{ Е} + 800 \text{ д} + 300 \text{ с} + 600 \text{ и} =$
$= 2 \text{ И} + 4 \text{ С} + 8 \text{ Д} + 3 \text{ Е} + 6 \text{ д} = 2483,6$ или $24,836 \cdot 100 = 2483,6$, т.е. децималниот број кога го помноживме со 100 неговата децимална запирка ја поместуваме за две места во десно.

Оттука го изведуваме и општото правило, кое гласи:

Децимален број се множи со повисока декадна единица, така што неговата децимална запирка се поместува надесно за онолку места, колку што нули има декадната единица.

На пример:

1) $7,402536 \cdot 10\,000 = 74\,025,36$;

2) $0,001204 \cdot 1000 = 1,204$.

Ако при поместувањето на децималната запирка надесно нема доволно децимални места, тогаш кон децималниот број се допишуваат потребниот број нули. На пример:

1. $6,8 \cdot 1\,000 = 6,800 \cdot 1\,000 = 6800$;

2. $0,028 \cdot 10\,000 = 0,0280 \cdot 10\,000 = 280$;

3. Да видиме сега како се дели децимален број со: 10, 100, 1 000 итн.

Бидејќи видовме дека $12,35 \cdot 10 = 123,5$ и $24,836 \cdot 100 = 2\,483,6$ тогаш ќе имаме:

$$123,5 : 10 = 12,35 \text{ и } 2483,6 : 100 = 24,836.$$

Значи, децимален број се дели со 10 или 100, ако неговата децимална запирка ја поместиме налево за едно или две места.

Оттука и општото правило: **Децимален број се дели со повисока декадна единица, така што неговата децимална запирка се поместува налево за онолку места, колку што**

нули има декадната единица. На пример:

1) 6342,7 : 1 000 = 6,3427;
2) 54,8 : 100 = 0,548;
3) 2,3 : 1 000 = 0002,3 : 1 000 = 0,0023.

Бидејќи и природните броеви можат да се сметаат како децимални броеви кај кои сите децимали се нули, тогаш можеме да речеме дека:

Природен број се дели со декадна единица, така што во него ќе се одделат оддесно налево онолку децимали, колку што нули има декадната единица. На пример:

1) 428 : 100 = 4,28;
2) 52 : 10 000 = 00052 : 10 000 = 0,0052.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кое е правилото за множење на децимален број со повисока декадна единица?
2. Пресметај ги следните производи:
   а) 23,134458 · 100 000; б) 45,2184 · 10 000; в) 0,00248 · 100!
3. Како се дели децимален број со повисока декадна единица?
4. Пресметај ги следните количници:
   а) 235 974,24 : 10 000; б) 23,9524 : 100; в) 0,0245 : 1 000!
5. Како се дели природен број со декадна единица? Пресметај ги количниците:
   а) 620 : 10 000; б) 2 : 100; в) 135 211 : 1 000!

III.11. СОБИРАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН И ПРИРОДЕН БРОЈ

Собирањето на природен број со децимален се врши на сличен начин како собирањето на природните броеви. Разликата е во тоа што децималниот број, освен од цел дел, се состои и од децимали. Тоа значи дека при собирањето ќе ги собереме целиот дел на децималниот број и природниот број, а децималите ќе останат непроменети. На следните примери е прикажано собирање на децимални и природни броеви.

Примери: $0,42+5=5,42$; $8,2367+3=11,2367$; $5+42,9=47,9$; $0+30,0021=30,0021$.

Од примерите забележуваме дека не е важна местоположбата на децималниот број бидејќи важи комутативниот закон. Притоа може да дојдеме до следниот заклучок:

Збирот на децимален и природен број претставува децимален број со цел дел еднаков на збирот на природниот број и целиот дел на децималниот број и децимален дел еднаков со децималниот дел на децималниот број.

Во случај ако имаме повеќе собироци од кои само еден е децимален број важи истото

правило. Ќе ги собереме прво природните броеви и на овој збир (кој е исто така природен број) ќе го додадеме децималниот број. Значи пак ќе се сведе собирањето да биде на еден природен и еден децимален број.

Примери: $3+2,49+5=8+2,49=10,49$; $23+7+0,2003=30+0,2003=30,2003$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Каков број е збирот на децимален и природен број? Како се пресметува овој збир?

2 Најди ги следните збирови: а) $1,1001+7$; б) $2+0,43$; в) $25,145+240$; г) $2+1,76931$?

3 Колку децимали ќе има збирот на природен и децимален број со 35 децимали?

III

III.12. ОДЗЕМАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН И ПРИРОДЕН БРОЈ

Како што веќе знаеме при одземање на два природни броеви не важи комутативниот закон, односно, важно е кој број е намаленик, а кој намалител. Тоа ни дава до знаење дека и при одземање на децимален и природен број, важен ќе биде распоредот на овие два броја. Значи, ќе добиеме два случаи.

Ако децималниот број е намаленик, а природниот број намалител тогаш разликата ќе претставува децимален број со цел дел еднаков на разликата на целиот дел на децималниот број со природниот број и децимален дел еднаков на децималниот дел на намаленикот.

Може да забележиме дека овој начин е многу сличен со собирањето на децимален и природен број.

Примери: $6,732-4=2,732$; $9,32-9=0,32$; $236,0001-125=111,0001$.

Ако природниот број е намаленик, а децималниот број е намалител, разликата исто така ќе претставува децимален број. Оваа разлика ќе ја добиеме ако намаленикот и намалителот ги помножиме со декадна единица така што ќе добиеме разлика на природни броеви која ќе ја поделиме со истата декадна единица.

Во овој случај ние множиме и делиме со ист број, односно, нема да направиме промена на изразот. Целта е да се доведе до операција на одземање на природни броеви која веќе ни е позната. За да биде појасно ќе ни послужат следните примери.

Примери: $5-2,43=\frac{(5-2,43)\cdot 100}{100}=\frac{5\cdot 100-2,43\cdot 100}{100}=\frac{500-243}{100}=\frac{257}{100}=2,57$;

$$8-4,0201=\frac{8\cdot 10000-4,0201\cdot 10000}{10000}=\frac{80000-40201}{10000}=3,0799.$$

Како што може да видиме, децималите на разликата и намалителот се разликуваат, но бројот на децималите е ист кај двата децимални броја. Ако намаленикот има *n* децимали, тогаш и разликата ќе има *n* децимали. Исто така, за да добиеме природен број од децимален ние множиме со декадна единица. Колку децимали има намаленикот, толку нули ќе има и декадната единица со која множиме и делиме

.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Каков број е разликата на децимален и природен број? Како се пресметува оваа разлика ако намаленик е децималниот, а намалител природниот број?
2. Пресметај ја разликата: а) $418{,}1724 - 358$; б) $325{,}18 - 103$; в) $18{,}123 - 18$!
3. Ако природен број е намаленик, а децимален број намалител, како ќе ја пресметаме разликата?
4. Пресметај ја разликата: а) $420 - 358{,}2103$; б) $25 - 3{,}25561$; в) $17 - 16{,}9999$!

III.13. СОБИРАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ

Децималните броеви се собираат на ист начин како и целите броеви. Тоа можеме да го видиме од следните примери:

Задача 1. Да се соберат децималните броеви: 4,235 и 0,523!

Ќе ги напишеме децималните броеви еден под друг:

$$\begin{array}{r} 4{,}235 \\ +\ 0{,}523 \\ \hline 4{,}758 \end{array}$$

Па собираме: 3 илјадити и 5 илјадити се 8 илјадити; 2 стотинки и 3 стотинки се 5 стотинки; 5 десеттинки и 2 десеттинки се 7 десеттинки; 0 цели и 4 цели се 4 цели. Според тоа, бараниот збир изнесува 4,758.

Задача 2. Да се изврши собирањето: 6,054 + 15,68 + 0,2754 + 24,5 = ?

Собироците ги пишуваме еден под друг, така што цифрите со исти месни вредности да бидат едни под други, а децималните запирки да се најдат во една вертикална колона, т.е.

$$\begin{array}{r} 6{,}054 \\ 15{,}68 \\ 0{,}2754 \\ +\ 24{,}5 \\ \hline 46{,}5094 \end{array}$$

Тука при собирањето на стотинките добиваме 20 стотинки, тогаш во збирот под стотинките ќе напишеме нула (0), а цифрата 2 ќе ја додадеме на десеттинките. При собирањето

на десеттинките добиваме: 2 + 5 + 2 + 6 + 0 = 15 десеттинки.

Во 15 десеттинки има 1 цело и остануваат 5 десеттинки, значи во збирот под десеттинките ќе напишеме 5, а 1 цело го задржуваме напамет, за да го додадеме кон збирот на целите. Пред да отпочнеме со собирањето на целите во збирот ставаме децимала запирка. Потоа, при собирањето на простите единици добиваме: 1 + 4 + 0 + 5 + 6 = 16 единици (цифрата 6 ја пишуваме под единиците, а цифрата 1 ја додаваме кон десетките) итн.

Така го добиваме бараниот збир, што изнесува 46,5094.

За да не настанат грешки при пишувањето на децималните броеви со различен број на децимали, можеме претходно, со допишување на потребен број нули, децималните броеви да ги доведеме да имаат еднаков број децимали, така ќе имаме:

$$\begin{array}{r} 6{,}0540 \\ 15{,}6800 \\ 0{,}2754 \\ +\ 24{,}5000 \\ \hline 46{,}5094 \end{array}$$

III

Како што гледаме: **децималните броеви се собираат како и природните броеви, но при тоа треба да внимаваме:**

1. Кога ги пишуваме броевите еден под друг, децималните запирки да дојдат во иста вертикална колона и

2. Во добиениот збир децималната запирка да се стави во истата вертикална колона, во која таа се наоѓа и кај самите собироци.

Резултатот што се добива при собирањето на децималните броеви се нарекува **збир** на децималните броеви.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Да се соберат децималните броеви со пишување едно под друго:

а) 3,42 + 14,08 + 0,6 = ?
б) 0,85 + 0,046 + 7,3 = ?
в) 12,01 + 3,65 + 0,99 = ?
г) 157,52 + 87,425 = ?
д) 3 028,6 + 1 034,4 = ?

2 Четири планинари собирале лековити билки, првиот од нив набрал 1,250 kg, вториот 0,980 kg, третиот 1,5 kg, а четвртиот 1 kg. Колку набрале сите четворица заедно?

3 Едно лице во пошта предало три пакета со маса: првиот 6,480 kg, вториот 8,250 kg и третиот 3,5 kg. Колкава им е масата на трите пакета заедно?

4 Еден патник првиот час изминал 5,3 km, вториот час 5,25 km, а третиот час 5 km. Колку километри изминал тој за 3 часа?

5 На што треба да внимаваме кога собираме децимални броеви?

III.14. ОДЗЕМАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ

Задача 1. Во едно буре нека има 7,86 *hl* бензин. Колку бензин ќе остане во бурето, ако од него извадиме 3,52 *hl*?

За да најдеме колку безин останало во бурето, треба од бројот 7,86 *hl* да го одземеме бројот 3,52 *hl*.

Одземањето на децималните броеви го вршиме на ист начин како и одземањето на природните броеви. Го пишуваме намалителот под намаленикот, така што цифрите со исти месни вредности и децималните запирки да паднат едни под други:

$$\begin{array}{r} 7{,}86\ hl \\ -\ 3{,}52\ hl \\ \hline 4{,}34\ hl \end{array}$$

Одземањето го отпочнуваме од најмалите децимални единици: 2 стотинки од 6 стотинки се 4 стотинки; 5 десеттинки од 8 десеттинки се 3 десеттинки. Пред да отпочнеме со одземањето на целите, во разликата ставаме децимална запирка, потоа ги одземаме целите: 3 единици од 7 единици се 4 единици.

Во бурето ќе останат уште 4,34 *hl* бензин.

III

Задача 2. Една работничка во фабрика за текстил исткала еден ден 42,45 m штоф, а другиот ден 44,3 m. Колку метра повеќе штоф исткала вториот ден?

Задачата ќе ја решиме кога бројот 42,45 m го одземеме од бројот 44,3 m:

$$\begin{array}{r} 44{,}3 \\ -\ 42{,}45 \\ \hline \end{array}$$

Бидејќи намаленикот има една децимала, а намалителот две, тогаш за да го израмниме бројот на децималите, кон намаленикот допишуваме една нула, па добиваме:

5 стотинки од 0 стотинки не можеме да одземеме, тогаш земаме од бројот на десеттинките на намаленикот 1 десеттинка, којашто има 10 стотинки и 0 стотинки се пак 10 стотинки. Сега велиме:

$$\begin{array}{r} 44{,}30 \\ -\ 42{,}45 \\ \hline 1{,}85 \end{array}$$

5 стотинки од 10 стотинки се 5 стотинки (цифрата 5 ја пишуваме под стотинките во разликата); 4 десеттинки од 2 десеттинки (колку што останаа) не можеме да одземеме, затоа земаме од бројот на целите 1 цело и го претвораме во десеттинки. 1 цело има 10 десеттинки и 2 десеттинки се 12 десеттинки. Потоа: 4 десеттинки од 12 десеттинки се 8 десеттинки (нив ги пишуваме во разликата). Пред да отпочнеме со одземање на целите делови во разликата ставаме децимална запирка, потоа продолжуваме со одземањето: 2 единици од 3 единици (колку што останаа) се 1 единица; 4 десетки од 4 десетки не останува ништо.

Вториот ден работничката исткала 1,85 m штоф повеќе отколку во претходниот ден.

Задача 3. Еден кол долг 2 m е забиен во земја. Колку е забиен в земја, ако над земјата колот е висок 1,35 m?

Треба да ја најдеме разликата 2 – 1,35 = ?

Запишувајќи ги броевите, имаме:

$$\begin{array}{r} 2 \\ -\ 1{,}35 \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 2{,}00 \\ -\ 1{,}35 \\ \hline 0{,}65 \end{array}$$

Тука природниот број - намалениkот (2), го запишуваме во форма на децимален број (2,00).

Значи: колот е забиен во земја 0,65 m.

Од сето изложено следи дека: **децималните броеви се одземаат како и природните броеви, но при тоа треба да внимаваме:**

1. На правилното пишување на намалителот под намалениkот, т.е. децималните запирки на намалениkот и намалителот да дојдат во иста вертикална колона, а воедно со тоа и цифрите со еднакви месни вредности да бидат едни под други.

2. Ако намалениkот е природен број или децимален број со помалку децимали, отколку што ги има намалителот, тогаш во намалениkот се допишуваат (или само се замислуваат) толку нули, за да се израмни бројот на нивните децимали.

3. Во добиената разлика, децималната запирка да се стави во истата вертикална колона во којашто се наоѓа таа во намалениkот и намалителот.

Резултатот што се добива при одземање на децимални броеви се вика **разлика** на тие децимални броеви.

III

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Пресметај ја разликата!

а) 14,2 – 4,84 = ?
б) 0,824 – 0,0452 = ?
в) 7,77 – 6,88 = ?
г) 240 – 55,05 = ?
д) 62 – 18,9 = ?
ѓ) 7,1 – 0,842 = ?

2 Охридското езеро има плоштина 358,23 km^2, а Преспанско езеро 272,68 km^2. За колку километри квадратни е помало Преспанското Езеро од Охридското?

3 Од една даска што е долга 5 m отсечени се две парчиња со должина 2,2 m и 1,85 m. Колкава е должината на преостанатото парче од даската?

4 Петар е висок 1,62 m, а Јован 1,48 m. Колку е повисок Петар од Јован?

5 Еден сад со маст има маса од 2,48 kg, а само садот има маса од 0,6 kg. Колку маса има маста?

6 На што треба да внимаваме кога одземаме децимални броеви?

III.15. МНОЖЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ПРОИЗВОЛЕН ПРИРОДЕН БРОЈ

Задача. Ако една вреќа со брашно има маса 86,35 kg, колкава маса имаат 27 вреќи?

27 вреќи брашно ќе имаат 27 пати поголема маса т.е. $86{,}35 \cdot 27$ kg. За да го најдеме бараниот производ ќе постапиме вака:

Ако множеникот 86,35 го зголемиме 100 пати тогаш тој станува природен број и ќе имаме множење на природни броеви, т.е. $8635 \cdot 27 = 233\ 145$.

Но, познато ни е дека со зголемувањето за неколку пати на еден од множителите, тогаш исто толку пати се зголемува и производот. Значи, добиениот производ 233 145, од множењето на природните броеви 8635 и 27 е 100 пати поголем, од бараниот производ на зададените броеви 86,35 и 27.

Според тоа, бараниот производ ќе го добиеме, кога најдениот производ на природните броеви го намалиме 100 пати, т.е. $233\ 145 : 100 = 2\ 331{,}45$. Значи: $86{,}35 \cdot 27 = 2\ 331{,}45$.

Најдовме: кога една вреќа има маса 86,35 kg, тогаш 27 вреќи имаат маса 2331,45 kg.

III

Оттука и правилото: **Децимален број се множи со природен број, на тој начин како да е тој природен број, само што во добиениот производ одделуваме оддесно налево толку децимали, колку што ги има децималниот број што го множиме**.

Согласно правилото, горното множење го извршуваме практично вака:

$$\begin{array}{r} 86{,}35 \cdot 27 \\ \hline 604\ 45 \\ 1727\ 0 \\ \hline 2331{,}45 \end{array}$$

Задача. Еден конец сме го раздвоиле на 112 еднакви делови. Ако должината на секој од тие делови е 13,521 cm колкава била првобитната должина на конецот?

Од задачата може да се заклучи дека првобитната должина на конецот ќе ја добиеме ако го најдеме производот:

$$\begin{array}{r} 13{,}521 \cdot 112 \\ \hline 27\ 042 \\ 135\ 21 \\ 1352\ 1 \\ \hline 1514{,}352 \end{array}$$

Значи, добивме дека конецот бил долг 1514,352 cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Како гласи правилото за множење на децимален број со природен број?
2. Пресметај ги производите: а) 53,217 · 35; б) 125 · 1,78; в) 4,000104 · 254!
3. Ако имаме 5 тегли сол со маса 95,32 g, колкава вкупна маса на сол имаме?
4. За да купиме три метра штоф платно ни се потребни 7920 денари. Колку ќе платиме за 5,25 m од истиот штоф?

III.16. МНОЖЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

Задача. Еден литар жива има маса од 13,6 kg. Колку маса има 2,38 *l* жива, а колку 0,74 *l* жива?

Задачата ќе ја решиме, кога ќе ги помножиме децималните броеви:

$$13{,}6 \cdot 2{,}38 = ? \text{ и } 13{,}6 \cdot 0{,}74 = ?$$

Тука, како што гледаме, и двата множители, т.е. и множеникот и множителот се децимални броеви. Но, ако множеникот го зголемиме 10 пати, а множителот 100 пати, тогаш тие стануваат природни броеви; а како такви множејќи ги, добиваме: 136 · 238 = 32368 и 136 · 74 = 10064.

Но поради зголемувањето 10 пати на множеникот и 100 пати на множителот, производот се зголемува 1000 пати; затоа бараниот (вистинскиот) производ на децималните броеви ќе го добиеме кога најдениот производ на соодветните природни броеви го намалиме 1 000 пати, т.е. во него оддесно налево одделиме 3 децимали:

13,6 · 2,38 = 32,368 и 13,6 · 0,74 = 10,064

Наоѓаме дека: 2,33 *l* жива има маса 32,368 kg, а 0,74 *l* жива има маса 10,064 kg.

Оттука произлегува и правилото: **Два децимални броја се множат, не обрнувајќи внимание на децималните запирки, исто како тие да се природни броеви, само што во конечниот добиен производ одделуваме оддесно налево толку децимали, колку што ги имаат заедно децималните броеви што ги множиме.**

Резултатот што притоа се добива се нарекува **производ** на дадените децимални броеви.

Согласно со ова правило горните множења на децималните броеви практично се изведуваат вака:

13,6 · 2,38
1 088
4 08
27 2
32,368

13,6 · 0,74
544
9 52
10,064

Од множењето при горните два примера можеме да заклучиме уште и:

1. Кога двата множителa се поголеми од 1, тогаш нивниот производ е поголем како од едниот, така и од другиот множител.

2. Кога еден од двата множители е помал од 1, тогаш нивниот производ е помал од другиот множител и

3. Кога двата множителa се помали од 1, тогаш нивниот производ ќе биде помал како од едниот така и од другиот множител.

Последниот заклучок можеме да го видиме од примерот: $0{,}82 \cdot 0{,}03 = 0{,}0246$, каде што $0{,}0246 < 0{,}82$ и $0{,}0246 < 0{,}03$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Како се множат децималните броеви?
2. Најди го производот: а) $2{,}357 \cdot 1{,}52$; б) $153{,}3 \cdot 2{,}5402$; в) $0{,}3 \cdot 72{,}02058$?
3. Каков ќе биде производот на два броја кои се поголеми од 1? Што ако и двата множителa се помали од 1?
4. Една нива има форма на правоаголник со димензии 25,42 m и 73,41 m. Колкава е плоштината на нивата?

III.17. ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ПРИРОДЕН БРОЈ

Задача: Еден патник за 6 часа изминал 25,698 km. Колку минувал средно на еден час?

За еден час минувал 6 пати помалку, т.е. 25,698 : 6 (km). За да го извршиме делењето, деленикот можеме да го претвориме во природен број, со тоа што ќе го помножиме со 1000. Всушност, притоа километрите ги претвораме во метри, т.е. 25,698 km = 25 698 m, па ќе имаме да делиме природен број со природен:

$$25\,698 \text{ m} : 6 = 4\,283 \text{ m}.$$

Од порано ни е познато дека, ако деленикот го зголемиме неколку пати, тогаш и количникот се зголемува исто толку пати. Значи, добиениот количник 4 283 m од делењето на природните броеви е 1000 пати поголем од бараниот количник на зададените броеви. Според тоа, бараниот количник ќе го добиеме кога најдениот количник на природните броеви го намалиме 1 000 пати, т.е. ќе имаме: 25,698 km : 6 = 4,283 km.

Притоа пак метрите ги имаме изразено во километри. Патникот секој час минувал средно по 4,283 km.

До истиот резултат ќе дојдеме и ако множеникот не го претвориме во природен број, но по завршување на делењето на природните броеви, пред да ја спуштиме цифрата на десеттинките кон добиениот остаток од делењето на природните броеви, ставиме децимална

запирка во количникот. На пример:

$$\begin{array}{l} 25{,}698 : 6 = 4{,}283 \\ \underline{24} \\ \quad 1\,6 \\ \quad \underline{1\,2} \\ \quad\quad 49 \\ \quad\quad \underline{48} \\ \quad\quad\quad 18 \\ \quad\quad\quad \underline{18} \end{array}$$

Општото правило за делење на децимален број со природен број ќе гласи:

Децимален број се дели со природен број, на тој начин како да е тој природен број, само што по завршувањето на делењето на природните, пред да ја спуштиме цифрата на десеттинките во количникот, зад добиените цифри ставаме децимална запирка, па делењето продолжува. Ако по спуштањето на последната децимала добиеме пак остаток тогаш кон тој остаток допишуваме една нула и делењето на тој начин продолжува сè додека не заврши. На пример:

$$\begin{array}{l} \underline{308{,}01} : 15 = 20{,}534 \\ \underline{30} \\ \quad 8\,0 \\ \quad \underline{7\,5} \\ \quad\quad 51 \\ \quad\quad \underline{45} \\ \quad\quad\quad 60 \\ \quad\quad\quad \underline{60} \end{array}$$

Ако целиот дел од децималниот број не се дели со делителот, т.е. ако бројот на целите во деленикот е помал од делителот, тогаш во количникот се пишува 0 цели, па потоа делењето продолжува со спуштањето на десеттинките, стотинките итн.

На пример:

$$\begin{array}{l} \underline{4{,}4772} : 82 = 0{,}0546 \\ \underline{4\,10} \\ \quad 377 \\ \quad \underline{328} \\ \quad\quad 492 \\ \quad\quad \underline{492} \end{array}$$

Ако делителот е природен број, кој завршува со една или повеќе нули, тогаш тие нули во делителот се испуштаат, но децималната запирка во деленикот се поместува за толку места налево. Ова е во согласност со познатото својство на количникот:

Ако и деленикот и делителот се поделат со еден ист број, количникот не се менува.

На пример:

$$2305{,}6 : 400 = (2305{,}6 : 100) : (400 : 100) = 23{,}056 : 4 = 5{,}764.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Како се врши делење на децимален со природен број?
2. Пресметај ги следните количници:
   а) 245,1 : 25; б) 73,9624 : 80; в) 0,296 : 16!
3. Еден конец со должина 24,315 m треба да го разделиме на 15 еднакви делови. Колкава ќе биде должината на секој од тие делови?

III.18. ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН СО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

Задача: Еден литар жива има маса 13,6 kg. Колку литри има живата, која има маса 43,52 kg?

Ќе има онолку литри, колку што пати по 13,6 kg има во 43,52 kg. Значи, треба да го извршиме делењето:

43,52 kg : 13,6 kg.

Како што гледаме, имаме делење на децимален број со децимален број.

За да го извршиме делењето, се ползуваме со познатото основно својство на количникот кое гласеше:

Количникот не се менува, ако едновремено и деленикот и делителот ги помножиме со еден ист број. Ние знаеме да делиме децимален број со природен број, затоа делителот за да стане природен број го множиме со 10, но за да не се промени бараниот количник, со 10 го множиме и деленикот.

Така делењето на дадените децимални броеви го заменуваме со делење на броевите: 435,2 : 136, каде што делителот е природен број.

Ако го извршиме делењето ќе добиеме:

$$\begin{array}{l} \underline{435{,}2} : 136 = 3{,}2 \\ \underline{408} \\ \quad 27\,2 \\ \quad \underline{27\,2} \end{array}$$

Значи: 43,52: 13,6 = 3,2. Живата која има маса 43,52 kg има 3,2 литри.

Оттука доаѓаме до следното општо правило за делење со децимален број:

Децимален или природен број се дели со децимален број, така што најнапред во делителот ја отфрлуваме децималната запирка, т.е. го претвораме во природен број, а потоа деленикот го зголемуваме толку пати, колку што се зголемил делителот со отфрлувањето на неговата децимална запирка. Потоа делењето го вршиме по правилото за делење со природен број. Резултатот што притоа се добива се нарекува **количник** на

дадените децимални броеви. На пример:

1. Да се изврши делењето: 6,342 : 0,25 = ?

Решение:

$$6{,}342 : 0{,}25 = \underline{634{,}2} : 25 = 25{,}368$$
$$\underline{50}$$
$$134$$
$$\underline{125}$$
$$92$$
$$\underline{75}$$
$$170$$
$$\underline{150}$$
$$200$$
$$\underline{200}$$

т.е. децималната запирка во делителот и деленикот ја поместуваме за две места налево.

2. Да се подели бројот 86,1 со 2,46!

Решение:

$$86{,}1 : 2{,}46 = 86{,}10 : 2{,}46 = \underline{8610} : 246 = 35$$
$$\underline{738}$$
$$1230$$
$$\underline{1230}$$

Тука, бидејќи деленикот имаше помалку децимали од делителот, му допишавме една нула.

3. Да се изврши делењето 32 : 1,28!

Решение:

$$32 : 1{,}28 = (32 \cdot 100) : (1{,}28 \cdot 100) = \underline{3200} : 128 = 25$$
$$\underline{256}$$
$$640$$
$$\underline{640}$$

Кога имаме да делиме природен со децимален број, тогаш од децималниот број ја отфрлуваме децималната запирка, а кон природниот број допишуваме толку нули, колку што има децимали делителот.

Порано, кај делењето на природни броеви, делењето беше можно, само ако делителот е помал од деленикот. Со воведувањето пак на децималните броеви, делењето станува секогаш можно, па, дури и тогаш кога делителот е децимален број или децимална дропка.

По однос на вредноста на количникот ќе напоменеме дека, при делењето треба да се има во предвид следното:

1. Ако делителот е поголем од 1 тогаш количникот ќе биде секогаш помал од деленикот,

2. Ако пак делителот е помал од 1 тогаш количникот ќе биде поголем од деленикот. На

пример:

1) 15,2: 4 = 3,8, од каде гледаме дека: 3,8 < 15,2.
2) 15,2: 0,4 = 152 : 4 = 38 каде што: 38 > 15,2.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Како се врши делење на децимален со децимален број?

2 Пресметај ги следните количници:
а) 873,0876 : 145,2; б) 344,852 : 23,62; в) 34,4892 : 0,701!

3 Една машина за копање земја за еден ден ископува 254,8 m^3, а еден работник рачно ископува за истото време 2,8 m^3 земја. Колку работници заменува таа машина?

4 Еден тротоар долг 106,5 m и широк 2,1 m треба да се покрие со плочки кои имаат форма на квадрат со страна 0,3 m. Колку плочки се потребни?

III.19. ПРЕТВОРАЊЕ НА ДРОПКА ВО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

За да се претвори чиста дропка во децимален број, всушност, **треба да се подели броителот со именителот**. Така ќе добиеме количник на два природни броја чија пресметка веќе ни е позната. Тоа ќе биде илустрирано со следните примери.

Примери: $\frac{4}{5}=4:5=0,8$; $\frac{3}{4}=3:4=0,75$; $\frac{1}{8}=1:8=0,125$.

Ако се работи за нечиста дропка тогаш пресметката се врши на истиот начин.

Примери: $\frac{5}{4}=5:4=1,25$; $\frac{8}{5}=8:5=1,6$; $\frac{17}{2}=17:2=8,5$.

Во случај ако треба да претставиме децимален број од мешан број тогаш се врши пресметка на децималниот дел како чиста дропка кој потоа се собира со целиот дел на мешаниот број и се добива бараниот децимален број.

Примери: $7\frac{4}{5}=7+4:5=7+0,8=7,8$; $249\frac{1}{8}=249+1:8=249+0,125=249,125$.

Ако сакаме да извршиме обратна операција, односно, од децимален број да добиеме дропка потребно е да добиеме две величини, броител и именител. Поради тоа ние избираме именителот да е во форма на декадна единица, односно, децималниот број ќе го претставиме во вид на децимална дропка. Потоа, оваа децимална дропка ќе ја скратиме доколку тоа е можно. Да се обидеме од пресметаните децималните броеви од горенаведените примери да добиеме дропки.

Примери: $0,125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$; $8,5=\frac{85}{10}=\frac{17}{2}$; $0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

Во случај ако децималниот број е поголем од 1 тогаш подобро е од него директно да добиеме мешан број, отколку да добиеме нечиста дропка. Во таков случај целите делови на децималниот број и мешаниот број ќе останат исти, а децималниот дел на децималниот број ќе го претвориме во децимална дропка и како таква, ако е можно, ќе ја скратиме.

Примери: $105,34 = 105\frac{34}{100} = 105\frac{17}{50}$; $2542,2403 = 1242\frac{2403}{10000}$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Како се претвора чиста дропка во децимален број? Како се претвора мешан број во децимален број?

2 Претвори ги во децимални броеви следните дропки:

а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{4}{125}$!

3 Претвори ги во децимални броеви следните нечисти дропки и мешани броеви:

а) $4629\frac{3}{16}$; б) $502\frac{1}{20}$; в) $\frac{464}{25}$; г) $\frac{3609}{8}$!

4 Претвори ги во дропки децималните броеви:
а) 2359,342; б) 0,1346; в) 215,31; г) 0,85304!

III

III.20. КОНЕЧНО И БЕСКОНЕЧНО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ. ПЕРИОДИЧЕН ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

Како што знаеме, секоја обична дропка може да се претвори во децимална дропка кога нејзиниот броител ќе се подели со именителот.

Примери: $\frac{3}{5} = 3:5 = 0,6$; $\frac{7}{8} = 7:8 = 0,875$.

Во повеќето случаи тој процес на делење, колку и да го продолжуваме, не завршува на одреден број децимали, туку продолжува бесконечно.

Примери: $\frac{2}{3} = 2:3 = 0,6666...$; $\frac{5}{33} = 5:33 = 0,151515...$

Во таков случај обичната дропка преминува *во децимална дропка со бесконечно многу децимали* и се нарекува **бесконечно децимален број**. Останатите децимални дропки,

кои имаат конечно многу децимали, се викаат уште и *конечни децимални дропки*, односно, **конечно децимални броеви**.

Дефиниција 1

Секој децимален број со бесконечно многу децимали, во кој една или неколку цифри без прекин се повторуваат по еден ист ред, се вика периодичен децимален број.

Цифрата или групата цифри што се повторува се вика период на периодичниот децимален број. За пократко пишување периодот се пишува само еднаш и тоа затворен во заграда.

Примери: Наместо 0,666... пишуваме: 0,(6);

Наместо 0,151515... пишуваме: 0,(15);

Наместо 123,583333... пишуваме: 123,58(3); а се чита 123 цели 58 стоти и 3 во период.

Периодичниот децимален број кај кој периодот започнува веднаш по децималната запирка се вика *чисто периодичен децимален број*, а периодичниот децимален број кај кој помеѓу децималната запирка и периодот се наоѓа една или неколку цифри што не се повторуваат се вика *мешано периодичен децимален број*. Цифрата или групата цифри што се наоѓаат помеѓу децималната запирка и периодот се вика *предпериод*.

Така, на пример, чисто периодични децимални броеви се броевите: 8,(3); 15,(12); 41,(523); 1572,(39) итн.

Броевите: 325,91(345), 2,3(2), 143,4(321), 1392,123(2), се мешано периодични децимални броеви. Првиот број има предпериод 91 и период 345, вториот број има предпериод 3 и период 2 итн.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е тоа бесконечно децимален број? Прикажи неколку примери!
2. Што е тоа конечно децимален број? Прикажи неколку примери!
3. Кои од следните броеви се бесконечно а кои конечно децимални броеви:
   а) 0,142333... ; б) 0,142333; в) 124,555... ; г) 31,444?
4. Што е тоа период на периодичен децимален број? Што е период во броевите: а) 135,61(243); б) 20,(62); в) 0,00(1)?
5. Што е тоа периодичен децимален број? Како се делат периодично децималните броеви?
6. Кои од следните броеви се чисто периодични, а кои мешано периодични децимални броеви: а) 32,(32); б) 127,1(51); в) 743,34(3214); г) 124,(4)?

III.21. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ

Пример. Ако за 8 сливи, приближно еднакви по големина, сме платиле 74,5 денари, колку приближно чини една слива?

За да најдеме колку чини 1 слива, треба да го извршиме делењето:

$$74{,}5 : 8 = 9{,}3125 \text{ денари.}$$

Значи, една слива чини приближно 9,3125 денари.

Бидејќи стотите делови од денарот (дени) се наша најниска парична единица, затоа во бројот 9,3125 ден. ќе задржиме само две децимали, т.е. стотинките, а останатите децимали (илјадите и десетилјадите) треба да се отфрлат, т.е. изостават од добиениот број. Па велиме: една слива чини 9,31 денари.

Ваквото отфрлување (изоставање) на неколку децимали од точниот децимален број го викаме заокружување на тој број на одреден број децимали.

Во практичниот живот честопати ние не сметаме ни со деловите од денарот (дените), па според тоа кај горниот децимален број можеме да ги отфрлиме и сите децимали, т.е. бројот да го заокружиме на цел број.

Во бројот 9,3125 ден. се содржат 9 цели денари и 31 стотинка од денарот (дени) и некој дел од нив. Бидејќи 31 дени се поблизу до нула денари отколку до еден денар, затоа при заокружувањето на децималниот број 9,3125 ден. на цел број, подобро е да се земе за негова приближна вредност 9 денари отколку 10 денари.

Извршеното заокружување на децималниот број 9,3125 ден. на две децимали, или на цел број го запишуваме вака:

$$9{,}3125 \text{ денари} \approx 9{,}31 \text{ денари} \quad \text{или} \quad 9{,}3125 \text{ денари} \approx 9 \text{ денари},$$

каде што знакот „$\approx$“ го читаме „*приближно еднакво на*“.

При заокружувањето на даден број, како што гледаме, тој се заменува со друг број помал или поголем од него.

Разликата што покажува за колку приближната вредност на еден точен број е помала или поголема од точниот број се вика грешка на приближната вредност.

На пример: Кога бројот 9,3125 го заокружиме на 9,31 грешката ќе биде:

$$9{,}3125 - 9{,}31 = 0{,}0025,$$

а ако би го заокружиле на 9,32 грешката ќе биде:

$$9{,}32 - 9{,}3125 = 0{,}0075,$$

т.е. поголема. Затоа, бројот 9,3125 го заокружуваме на две децимали, така што притоа правиме помала грешка, т.е. $9{,}3125 \approx 9{,}31$.

Кога истиот број го заокружиме на 10, грешката ќе биде: $10 - 9{,}3125 = 0{,}6875$, а кога би го заокружиле на 9, грешката ќе биде $9{,}3125 - 9 = 0{,}3125$, т.е. многу помала. Затоа бројот 9,3125 го заокружуваме на 9 цели, а не на 10 цели, т.е. $9{,}3125 \approx 9$.

Заокружувањето на броевите може да биде со *кусок* или со *вишок*.

Заокружувањето на даден број е извршено со кусок, ако неговата приближна вредност е помала од него. Тоа настанува тогаш, кога од дадениот број отфрлиме неколку децимали, но притоа да не се менува вредноста на последната задржана децимала (цифра).

Заокружувањето на даден број велиме дека е извршено со вишок, ако неговата приближна вредност стане поголема од него. При заокружувањето со вишок, вредноста на последната задржана цифра се зголемува за 1 единица.

На пример. Заокружувањето на следните броеви е извршено:

8,45263 ≈ 8,4526 (на 4 децимали со кусок);

8,45263 ≈ 8,453 (на 3 децимали со вишок);

8,45263 ≈ 8,45 (на 2 децимали со кусок);

8,45263 ≈ 8,5 (на 1 децимала со вишок);

8,45263 ≈ 8 (на цел број со кусок).

Често пати во практиката наместо да кажеме: да се заокружи бројот 8,45263 на 4, 3, и 2 или 1 децимала, ние велиме: Да се заокружи бројот 8,45263 *со точност* до 0,0001, 0,001, 0,01 или 0,1.

Да се заокружи даден број со точност до 0,0001, значи неговата приближна вредност да биде таква, што грешката при заокружувањето да биде помала од 0,0001. Лесно можеме да се увериме дека: да се заокружи даден број со точност до 0,0001, значи исто што и да се заокружи тој број на четири децимали.

Да се заокружи даден број со точност до 0,001, 0,01 или 0,1 треба да се разбере, така што грешката при заокружувањето да биде помала од 0,001, 0,01 или 0,1, а тоа го постигнуваме ако дадениот број го заокружуваме на 3, 2 или 1 децимала.

Заокружувањето на броевите на одреден број децимали го вршиме во согласност со следниве правила:

1. Ако првата цифра од групата децимали што треба да се отфрли (изостави) е 5 или поголема од 5 тогаш последната задржана цифра се зголемува за 1.

На пример: 0,23542 ≈ 0,24 (со точност до 0,01); 5,68 ≈ 5,7 (со точност до 0,1).

2. Ако првата цифра од групата децимали што треба да се отфрли (изостави) е помала од 5 тогаш едноставно се отфрлува групата цифри што треба да се отфрли, но притоа последната задржана цифра не се променува.

На пример: 4,728 ≈ 4,7 (со точност до 0,1); 12,064 ≈ 12,06 (со точност до 0,01).

3. Ако првата цифра што треба да се отфрла е 5, а зад неа нема други вредносни цифри, тогаш последната задржана цифра, ако е непарна, ја зголемуваме за 1, а ако е пак парна, ја оставаме непроменета.

На пример: 2,075 ≈ 2,08 (со точност до 0,1); 0,345 ≈ 0,34 (со точност до 0,01) и 7,25 ≈ 7,2 (со точност до 0,1).

Во последниот случај заокружувањето го правиме, така што последната задржана цифра во бројот да биде парна. Точноста ќе биде иста и ако заокружувањето го вршиме на непарен број, но парните цифри се попогодни при сметањето, отколку непарните.

Понекогаш ги заокружуваме и природните броеви:

На пример: Во една шума има 825 713 дрвја, којшто број сме го добиле со броење или проценување. Како што веќе видовме, таквиот резултат од броењето не е точен. Не само што е сомнителна цифрата на единиците и цифрата на десетките, но може да биде сомнителна и цифрата на стотките, па и цифрата на илјадите.

Во таков случај добиениот резултат го заокружуваме или на стотките или пак на илјадите, а понекогаш и на десетилјадите.

Заокружувањето на природните броеви го вршиме по истите правила како и заокружувањето на децималните броеви, само што *местата на отфрлените цифри од природниот број ги пополнуваме со нула.* Така, на пример, кога бројот 825713 го заокружуваме на стотките, т.е. со точност до 100, ќе добиеме:

$$825\,713 \approx 825\,700 \text{ (со точност до 100 со кусок).}$$

Ако истиот број го заокружиме на илјадите или десетоилјадите, т.е. со точност до 1 000 или до 10000, ќе имаме:

$$825\,713 \approx 826\,000 \text{ (со точност до 100 со вишок);}$$

$$825\,713 \approx 830\,000 \text{ (со точност до 10 000, со вишок).}$$

III

1. Како резултат на заокружувањето на точните природни и децимални броеви се добиваат секогаш приближни вредности (приближни броеви) со одредена точност.

2. Со заокружувањето на приближните броеви се добиваат пак приближни броеви, но само со помала точност.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е грешка на приближната вредност?

2 Кои се правилата за заокружување на децимален број на одреден број децимали?

3 Заокружи го децималниот број:

а) 245,32146 со точност до 0,001;

б) 12,342 со точност до 0,1;

в) 0,953 на цел број!

4 На колкава точност е заокружен бројот 87,594721:

а) 87,595; б) 87,59472; в) 87,6?

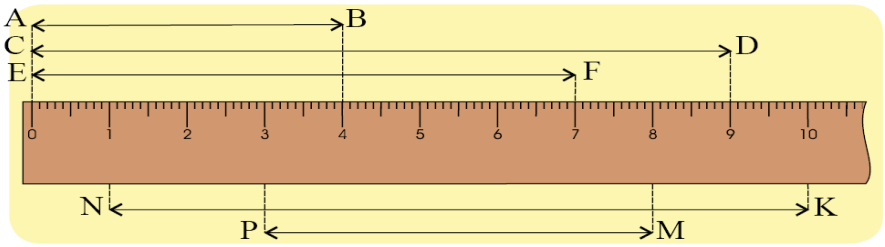
5 Никола отишол да купи портокали во продавница. На дигитална вага продавачката измерила маса на портокалите од 2,455 kg. Ако еден килограм портокали чини 65 денари, пресметај колку треба да плати Никола: а) во денари и дени; б) во денари?

III.22. ИНСТРУМЕНТИ ЗА ПРИБИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИ

Во секојдневниот живот се среќаваме со најразлични проблеми. За нивно истражување и проучување најважен и неодминлив чекор е прибирање и средување на потребниот број податоци за нив.

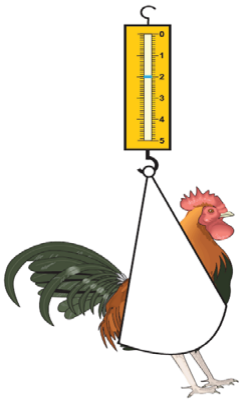
Прибирањето на податоци за проблемот што го истражуваме може да се врши на различни начини: со мерење, со анкетирање, со броење, набљудување и др.

За **мерење** на секоја величина постојат посебни инструменти. Така на пример, должината на отсечките ја мериме со линијар (цртеж 4), брзината на движењето на колите ја мериме со брзинометар (цртеж 5), тежината со рачно кантарче (динамометар) (цртеж 6) или терезија, температурата на воздухот со термометар (цртеж 7), итн.



Цртеж 4

Цртеж 5



Цртеж 6

Цртеж 7

Прибирањето на податоците преку пишан **прашалник** (прашања напишани на листови) се нарекува **анкета.** Најчесто анкетите се јавни, односно се користат за собирање на

мислењата на луѓето околу некоја тема, но сепак постојат и такви анкети кои се користат за научни истражувања со цел да се потврдат, да се негираат некои утврдени сознанија или пак да се откријат нови. На пример, да се направи анкета за користење на интернет од страна на тинејџерите во Р. Македонија (колку и за што го користат интернетот).

Ако е потребно да се изврши прибирање на податоци за зимзелени дрва во некој парк (пр. колку смреки, борови, елки итн. има во паркот) тогаш ќе треба да ги **броиме** сите видови на зимзелени дрва во тој парк.

Понекогаш за да дојдеме до заклучок за некој проблем, потребно е да вршиме **набљудување** на истиот. Најчесто набљудувањето вклучува и мерење на некои карактеристики за проблемот. На пример, ако е потребно да набљудуваме како се менува температурата во пролет, ќе биде потребно да ја мериме температурата на одредени временски интервали во текот на пролетта за да дојдеме до резултати.

III

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. На кои начини се врши прибирање на податоци?
2. Набroј неколку инструменти со кои се врши мерење и опиши ја нивната намена?
3. Одреди ја должината на секоја отсечка на цртежот 4:
   а) која отсечка од нив има најмала, а која најголема должина;
   б) кои две отсечки имаат еднакви должини?
4. Колкава брзина на движење покажува брзинометарот на цртеж 5? Во која насока ќе се заврти стрелката, ако колата је намали брзината на 100 km на час? Што ќе покажува брзинометарот кога колата ќе застане?
5. Прочитај на кантарчето (цртеж 6), колку е тежок петелот?
6. Колкава температура покажува термометарот на цртеж 7, а колкава ќе покажува тој ако температурата се намали за 4°C?
7. За што се користи анкета? Состави прашалник кој се состои од 3 прашања.
8. Кој начин на прибирање на податоци ќе го искористиш ако треба да дознаеш:
   а) колку ученици има во V одделение, а колку во VI одделение во твоето училиште;
   б) како учениците од твоето одделение го користат слободното време;
   в) колку саати во неделата поминуваш на компјутер, а колку саати во неделата читаш книга?

III.23. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ ВО ТАБЕЛА

Во практичниот живот многу често се среќаваме со потребата од споредување на различни величини. За да извршиме споредување на еднородни величини, нив ги мериме и како резултат на тие мерења ги добиваме нивните мерни броеви. По прибирањето на податоци, се јавува потреба за нивно нагледно претставување. Еден од видовите на претставување е табеларно, во табела.

Пример 1. Како проблем нека е избран одредување и споредување на височините на 5 ученици.

Ученик	Висина
Петар	160
Марија	130
Ана	150
Филип	140
Бојан	100

Табела 1

Резултатите од мерењето на височините на секој од 5-те ученици ги прикажуваме со табелата 1. Од табеларното прикажување на податоците за височините на учениците можеш да дадеш одговор на повеќе прашања.

На пример, на прашањата како што се:

а) за колку сантиметри Петар е повисок од Марија, а за колку од Бојан?

б) кој ученик е највисок а кој е најнизок?

в) дали има ученици со иста висина?

Б					
О	66				
С	170	170			
Т	149	133	42		
Ш	150	223	87	129	
	Б	**О**	**С**	**Т**	**Ш**

Табела 2

Пример 2. На географските и сообраќајни карти често пати од страна се даваат табели во кои се дадени најкратките растојанија од еден до друг град. Ако имаме, на пример, 10 градови, тогаш треба да се зададени 45 растојанија. За да биде попрегледно и претставено на мал простор, се применуваат табели во форма на триаголник. На следната табела (табела 2) се дадени растојанијата меѓу било кои два града меѓу градовите Скопје (С), Битола (Б),

Тетово (Т), Штип (Ш), Охрид (О). Разгледај ја табелата и одговори колкави се најкратките растојанија помеѓу Тетово и Штип, помеѓу Скопје и Битола и помеѓу Битола и Тетово.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Учениците Александар, Борко, Виктор, Горан и Дарко тренираат кошарка. Висините на овие ученици се следните : Александар-140 cm , Борко-135 cm, Виктор-138 cm, Горан-143 cm и Дарко-150 cm. Овие висини на учениците престави ги во три табели. Во првата подреди ги учениците по азбучен ред на нивните имиња, во втората табела подреди ги учениците според нивната висина почнувајќи од највисокиот, а во третата табела исто според висината, но почнувајќи од најнискиот.

2 Во еден туристички град во текот на летните месеци (јуни, јули и август) се регистрирани следните ноќевања: во 2000 год. - 746000, во 2001 год. - 690 000, во 2002 год. - 715 000, во 2003 год. - 739 000, во 2004 год. -751 000, во 2005 год. - 760 000, во 2006 год. - 747 000, во 2007 год. - 761 000, во 2008 год. - 757 000, во 2009 год. - 783 000, во 2010 год. - 780000. Овие податоци внеси ги во табела.

3 Состави табела со карактеристиките на секоја планета од Сончевиот систем (големина, растојание до Сонцето и др.).

4 Од податоците прикажани на табела 3 (за населението во Република Македонија со пристап на интернет во 2008 и 2009 година), одговори на следните прашања:

а) за колку се зголемил бројот на населението кое имало пристап на интернет од 2008 до 2009 година;

б) од каде најмногу населението имало пристап во 2009 година;

в) какви се промените за пристапот на интернет од „образовните институции“ и „интернет кафе и други јавни места“ во 2008 и 2009 година?

	2008[1)]	2009[1)]
Население со пристап на интернет	661 653	835 431
Имале пристап на интернет од:		
дома	409 928	635 201
работа	137 820	155 998
образовни институции (училиште, факултет)	118 701	133 600
интернет-кафе́ и други јавни места	241 213	199 272

1) Податоците се однесуваат на првиот квартал од референтната година

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1 Да се соберат децималните броеви:
а) 13,348 + 0,0784 + 2,35 = ?
б) 0,0452 + 0,00378 + 7,08 = ?

2 Да се одземат децималните броеви!
а) 7 – 5,2 = ?
б) 4 – 0,246 = ?
в) 18,2 – 9 = ?
г) 1 – 0,4872 = ?
д) 6 – 0,48 = ?

3 Една фирма посеала со пченица 124,6 ha, а со јачмен посеала 15,84 ha помалку отколку пченица. Колку вкупно површина има посеано со пченица и јачмен?

4 Претпријатието „Огрев“ располагало со 248,85 тони јаглен, од тоа количество првиот ден е продадено 102,97 тони, вториот ден 64,4 тони, а третиот ден 35 тони јаглен. Колку јаглен останал непродаден по третиот ден?

5 Еден работник преработил 162 m жица за една смена, а тоа изнесувало 1,35 од нормата. Колкава му е нормата?

6 Еден селанец тргнал во град. Кога изминал 7,5 km, му останало да измине уште 0,75 од целиот пат. Кој дел од патот го изминал и колку километри изнесува целиот пат од неговото село до градот?

7 Во еден магацин имало 54 вреќи грав по 85 kg во секоја вреќа. Во истиот магацин имало и 102 вреќи шеќер. По колку килограми шеќер има во секоја вреќа, ако во магацинот имало два пати повеќе шеќер отколку грав?

8 Маслото од четири буриња, од кои секое има по 325 *l* треба да се префрли во други буриња, што собираат по 100 литри. Колку такви буриња ќе се наполнат?

9 Една парцела има форма на правоаголник со должина 94,8 m и ширина 63,7 m. Друга парцела има форма на квадрат со страна 72,3 m. Која од тие парцели има поголема површина и за колку е поголема?

10 Да се пресмета $3\frac{3}{8}+5\frac{3}{8}$.

11 Да се пресмета $7\frac{1}{9}-2\frac{5}{9}$.

12 Да се заокружат броевите а) $2,5437$; б) $7,4671$ со точност 0,001.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1 Да се соберат децималните броеви со пишување едно под друго:

а) 8,2 + 0,25 + 7 + 15,08 + 0,345 = ?

б) 244 + 68,2 + 9,486 + 0,3 = ?

в) 2,5+7,75+0,148+6 = ?

2 Колкава должина имала една даска, ако од неа сме добиле три парчиња што се долги: 1,25 m; 0,95 m и 1,7 m?

3 Еден производител на задругата ѝ продал првиот ден од бербата: 1,65 тони грозје, вториот ден 2,2 тони, третиот ден 3 тони и четвртиот 1,825 тони грозје. Колку грозје продал вкупно производителот?

III

4 Еден спортист првиот ден истрчал $2\frac{3}{8}$ километри, а вториот ден $1\frac{3}{8}$ километри повеќе од првиот ден. Колку километри истрчал спортистот вториот ден, а колку за двата дена?

5 Изврши ги следните операции со дропките:

а) $324\frac{1}{7}+216\frac{3}{7}$; б) $\frac{23481}{61}-\frac{23433}{61}$; в) $4\frac{3}{71}+2\frac{3}{71}$.

6 Да се одземат децималните броеви!

а) 68,425 – 9,213 = ?

б) 8,054 – 0,48 = ?

в) 12,005 – 4,506 = ?

г) 524,5 – 48,387 = ?

д) 0,908 – 0,726 = ?

7 Од 18 kg шајки, потрошено е извесно количество, па останале 11,6 kg. Колку шајки се потрошени?

8 Еден кол, чија што должина е 4 m, забиен е во дното на една река 0,6 m, а над површината на водата вири 1,25 m. Колкава е длабочината на реката на тоа место?

9 Од едно парче платно чија што должина е 7,25 m, отсечени се 2,9 m. Колку е подолго второто парче од првото?

10 Една продавница добила три буренца сирење со маса: 35,4 kg, 27,2 kg и третото 18,9 kg. Ако првиот ден е продадено 30,7 kg, вториот ден 38,4 kg, уште колку сирење останало непродадено?

11 Двајца велосипедисти тргнуваат истовремено од едно место во еден ист правец. Едниот од нив изминува за 1 секунда 4,3 m, а другиот 4,8 m. На какво растојание се велосипедистите еден од друг по 1530 секунди?

12 Една празна парцела, што има форма на правоаголник со страни: должина 98,4 m и ширина 64,8 m, треба да се посади лозје. Колку лози ќе се посадат на таа парцела, ако лозите ги садиме на растојание од 1,2 m една од друга?

13 Од една табла стакло со димензии 0,86 m × 0,64 m отсечени се 4 парчиња што имаат форма на правоаголник со димензии 0, 34 m × 0,26 m, две парчиња со димензии 0,26 m × 0,08 m и две парчиња со димензии 0,34 m × 0,1 m. Да се најде плоштината на парчето што останало?

14 Два авиона полетале едновремено, од два различни аеродрома, во пресрет еден на друг. По два и пол часа летање, тие се сретнале. Колкаво е растојанието меѓу аеродромите, ако едниот авион секој час изминувал по 150,4 km, а другиот 162,6 km?

15 Еден базен, што собира 129,6 илјади литри вода, се полни од две цевки за 3 часа и 36 минути. Ако едната цевка дава 6 литри во секунда, колку литри во секунда дава втората цевка? За колку време ќе го наполни базенот сама првата цевка, а за колку сама втората цевка?

16 Еден блок со плоштина 88,5 ha бил посаден со тутун, памук и пченица. Со тутун било посадено 0,4 од целата површина, со памук било посеано 8,6 ha повеќе отколку со тутун, а другата површина била посеана со пченица. По колку хектара биле посеани од секоја култура посебно?

17 Една продавница за месо еден ден продала 373,8 kg месо, кое пак претставува 0,7 од целокупното количество на месо што го имала. Колку месо останало непродадено тој ден?

18 7,74 литри вино разделено е во 2 шишиња, така што во едното има 0,82 литри повеќе отколку во другото шише. По колку литри вино има во секое шише?

19 Нека имаме две буриња со бензин и нека во едното има 5,2 *hl*, а во другото 3,8 *hl* бензин. Колку бензин треба да префрлиме од првото во второто буре за да имаат тие еднакво количество? А што би требало да направиме, за да има во едното буре три пати повеќе бензин, отколку во другото?

20 Во една овошна градина имало 1 250 дрвја, од тие јаболка биле 0,46, кајсии имало 223 помалку отколку јаболка, а другите дрвја биле сливи. Колку дрвја јаболка, кајсии и сливи имало во таа градина?

21 Збирот на три броја изнесува 926. Најди ги тие броеви, ако збирот на првиот и вториот изнесува 797,7, а збирот на вториот и третиот е 651,5!

22 Една домаќинка купила во продавницата 4 kg ореви и 3 kg јаболка и за сето платила 1 155 денари. Колку чини еден килограм ореви, ако 1 kg јаболка чини 65 денари?

23 Еден муштерија купил од една продавница еднаков број метри штоф и платно. Штофот го платил по 425 денари метар, а платното по 74 денари 1 метар. Колку метра штоф и платно купил тој, ако за сето платил 1 757 денари?

24 Еден камион поминал 0,7 од патот што требало да го мине, а неизминати му останале уште 69 km. Колку километри има изминато?

25 Состави прашалник со кој ќе добиеш информации за омилените спортови на твоите другари?

26 Измери ги во твоја близина должините на 5 предмети (на пример, тетратка, молив и др.) и запиши ги по растечки редослед во табела.

ТЕМА IV

МЕРЕЊЕ

IV.1. МЕРНА ЕДИНИЦА

Во природата се среќаваме со најразлични предмети и тела. Телата ги разликуваме едни од други по нивните многубројни својства, како што се: тврдост, боја, мирис, вкус, маса, форма, големина, местоположба итн.

Секојдневните потреби во животот често наложуваат предметите да ги споредуваме по нивната големина, маса и другите својства што ги имаат. За едни велиме дека се потешки, за други полесни; за едни велиме дека се поголеми, други помали, а можат да бидат и еднакви. Ако имаме пред себе неколку прачки, жици или јажиња за едни од нив велиме дека се подолги, за други дека се подебели итн.

За дрвјата велиме дека се едни повисоки, други пониски; за бунарите, реките, езерата, велиме дека се едни подлабоки, други поплитки, а трети еднакви по длабочина.

Споредувањето на телата по одредените нивни својства го вршиме со мерења. Својствата на телата, по кои вршиме споредување со помош на мерење, ги викаме уште и **величини**. Величини се: масата на телата, должината, ширината, дебелината, висината, длабочината, плоштината (на дворот, ливадата, подот во собите), волуменот (на бурето, кутијата) итн.

Величини се исто така: времето, аголот, вредноста (на купената стока), брзината на движењата на телата и возилата итн.

Величини мажат да бидат од ист или различен вид, па според тоа ги делиме на **истовидни величини** и **разновидни величини**.

Должината, ширината, висината, дебелината, длабочината се истовидни величини и тоа, всушност, се сè должини што ги мериме со иста мерка - метарот. Должината, масата, плоштината, времето, зафатнината пак се разновидни величини.

Споредување можеме да правиме само на истовидните величини.

За да споредиме две истовидни величини, на пример: должината и ширината на училницата, потребно е да земеме трета таква истовидна величина со точно одредена големина (на пример стап со должина 1 метар). Пренесувајќи го стапот прво по должината, а потоа по ширината на училницата, броиме колку пати сме го пренесле по должината, а колку пати по ширината на училницата. Ако по должината сме го пренесле 8 пати, а по ширината 6 пати, тогаш велиме дека должината на училницата е поголема од нејзината ширина за 2 должини на стапот, т.е. за 2 метра.

Величината, со помош на која го вршиме споредувањето на две или повеќе истовидни величини, ако има точно одредена позната големина, ја викаме **единица мерка** или **мерна единица** на тој вид величини.

Споредувањето на дадена величина со големината на единицата мерка од тој вид величини, го викаме мерење на дадената величина.

Според тоа велиме: **да се измери дадена величина значи да се најде колку пати единицата мерка за тој вид величина се содржи во дадената величина.** Бројот, што ни покажува колку пати единицата мерка се содржи во величината што ја мериме, се вика **мерен број** на таа величина.

На пример, ако единицата мерка - метарот сме го пренеле по должината на училницата 8 пати, велиме дека училницата е долга 8 метра, а бројот 8 е нејзин мерен број.

Порано за мерење на величините се употребувале различни единици мерки, така на пример, должините се мереле со чекори, педи, стапки, лакот, а до скоро кај нас и со аршин. Ваквите единици мерки, чија што големина не е точно (прецизно) одредена, во практичниот живот внесувале разни недоразбирања. Затоа се појавила потребата за единици мерки да се земат величини со точно одредена големина.

Така кон крајот на XVIII век во Франција создаден е нов единствен систем на мерки, кој што денес го употребуваат скоро сите народи во светот.

Во основата на повеќе единици мерки во тој нов систем е земена единицата мерка за должина - **метарот**. Оттука доаѓа и името на тој систем, што го викаме **метрички систем на мерки.**

Покрај основната **единица** мерка за мерење на величините воведени се и **повисоки** и **пониски** единици. Повисоките единици ги добиваат имињата кога пред името на основната единица се стават зборовите: **дека** (десет) за единиците што се 10 пати поголеми од основната единица; **хекто** (сто) за единиците што се 100 пати поголеми и **кило** (илјада) за единиците што се 1000 пати поголеми од основната единица.

Пониските единици ги добиваат пак своите имиња кога пред името на основната единица се стават зборовите: **деци** (десетти дел) за единиците што се 10 пати помали, **санти** (стоти дел) за единиците што се 100 пати помали и **мили** (илјадити дел) за единиците што се 1000 пати помали од основната единица мерка.

Вака изградениот метрички систем на мерки е во потполна согласност со декадниот броен систем, од каде што и доаѓа неговата голема практичност и едноставност.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што се тоа величини? Набroj неколку величини! Како ги делиме величините?
2. Што е тоа единица мерка? Што е тоа мерен број?
3. Кој систем на единици мерки се употребува кај нас и во речиси целиот свет?
4. Кои се повисоки, а кои пониски единици?
5. Што значи зборот хекто, а што зборот санти?

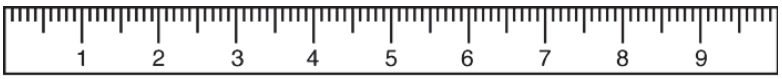
IV.2. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ДОЛЖИНА, ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

IV.2.1. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ДОЛЖИНА

Основна единица мерка за должина е **метарот**. Метарот како меѓународна мерка усвоен е прв пат во 1875 година, а означен е на еден линијар изработен од платина и иридиум. Тој прототип на метарот се чува во Меѓународното биро за мерки во Севр крај Париз и има постојана должина. Копија од прототипот може да си земе секоја држава.

При одредувањето на основната единица за должина научниците тргнале од тоа што таа да претставува 40-милионити дел од земјиниот меридијан. Затоа велиме дека метарот е еднаков на 40-милионити дел од Земјиниот меридијан. Меѓутоа, поновите и поточните мерења на должината на земјиниот меридијан покажуваат дека тој изнесува 40 003 432 m. Метарот се обележува со (m).

Поголеми (повисоки) единици мерки за должина од метарот се: **декаметар** (dkm), што е еднаков на 10 m, **хектометар** (hm), што е еднаков на 100 m и **километар** (km), што е еднаков на 1000 m.



Цртеж 1

Помали (пониски) единици мерки за должина од метарот се: **дециметар** (dm) (цртеж 1), што претставува 10-ти дел од метарот, **сантиметар** (cm), што претставува 100-ти дел од метарот и **милиметар** (mm) , што претставува 1000-ти дел од метарот.

Оттука, заклучуваме дека меѓу основната единица за должина и повисоките и пониските единици од неа постојат следниве односи:

1 km = 10 hm = 100 dkm = 1 000 m
1 hm = 10 dkm = 100 m
1 dkm = 10 m
1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm

Како што гледаме, секоја повисока единица мерка за должина содржи 10 непосредно помали од неа единици мерки.

Покрај овие единици мерки за должина, во одделни земји се употребуваат и следниве единици мерки:

- 1 аршин = 711 mm;
- 1 лакот = 177 mm;
- 1 стапка = 316 mm;
- 1 палец = 26 mm;
- 1 јарда (англиска) = 910 mm;
- 1 фат = 190 cm;

- 1 врста = 1067 m;
- 1 морска милја = 1 852 m;
- 1 географска милја = 7 420 m.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Која е основна мерка за должина?
2. Што е декаметар, а што е дециметар?
3. Кои единици се поголеми, а кои помали од метарот?
4. Кои единици мерки се употребуваат освен метарот?

IV.2.2. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ПЛОШТИНА[3]

Основна единица мерка за мерење на плоштината е **квадратниот метар**, што пократко го запишуваме со m^2. Квадратниот метар претставува плоштина, што ја има еден квадрат, чија што страна е долга 1 m.

Помали единици мерки за плоштина се: **квадратен дециметар** (dm^2), **квадратен сантиметар** (cm^2) и **квадратен милиметар** (mm^2).

Квадратен дециметар, тоа е плоштината на квадрат со страна долга 1 dm. Ако сакаме да видиме колку dm^2 содржи 1 m^2 тогаш страните на квадратниот метар ќе ги разделиме секоја на по 10 dm, потоа соединувајќи ги соодветните точки по ред од спротивните страни ќе добиеме 10 реда, а во секој ред по 10 квадратни дециметри.

Оттука, гледаме дека 1 m^2 содржи 100 dm^2.

Квадратен сантиметар, тоа е плоштина на квадрат со страна долга 1 cm. Кога страните на квадратниот дециметар (цртеж 2) ги разделиме на сантиметри, а така добиените точки од спротивните страни ги соединиме по ред, ќе добиеме 10 реда од по 10 кв. сантиметри (цртеж 2).

Тоа значи дека 1 dm^2 содржи 100 cm^2.

Квадратен милиметар, тоа е плоштината на квадрат со страна долга 1 mm. Со слична постапка како горната можеме да утврдиме дека: 1 cm^2 содржи 100 mm^2.

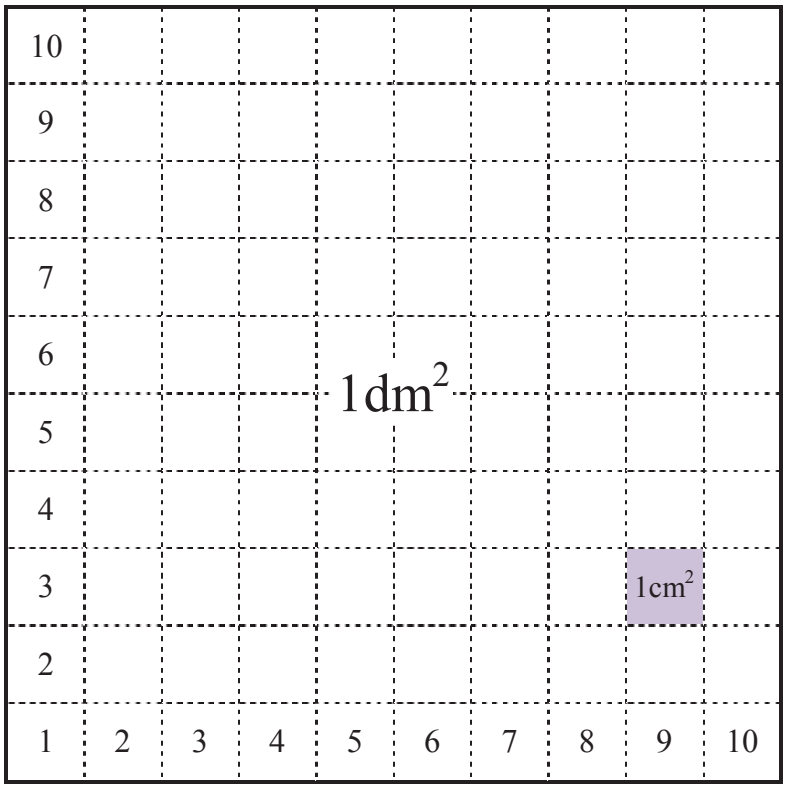
Поголеми единици мерни за плоштина се: **квадратен декаметар** (dkm^2) или **ар** (a); **квадратен хектометар** (hm^2) или **хектар** (ha) и **квадратен километар** (km^2).

Квадратен декаметар или ар, тоа е плоштина што ја има квадрат, чија што страна изнесува 10 m. Значи 1 ар има 100 m^2,

Квадратен хектометар или хектар претставува плоштина што ја има квадрат, чија што страна изнесува 1 hm или 100 m.

Затоа 1 хектар има 10 000 m^2 (Зошто?).

[3] Претворањето на поголеми единици во помали (и обратно) се дадени за тие што сакаат да знаат повеќе. Ова се однесува и за наставните единици што следуваат.



Цртеж 2

Квадратен километар ни претставува плоштина што ја има квадрат, чија што страна изнесува 1 km или 1000 m.

Квадратниот километар има 1 000 000 m^2.

Во практика често се употребува како единица мерка за плоштина уште и декар, кој има 10 ара или 1000 m^2.

Помеѓу основната единица мерка за плоштина и пониските и повисоките единици мерки од неа, постојат следниве односи:

$$1\ km^2 = 100\ ha = 10\ 000\ a = 1\ 000\ 000\ m^2$$
$$1\ ha = 100\ a = 10\ 000\ m^2$$
$$1\ a = 100\ m^2$$
$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\ 000\ cm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10\ 000\ mm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

Оттука, гледаме дека секоја повисока единица мерка за плоштина содржи 100 непосредно помали единици.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

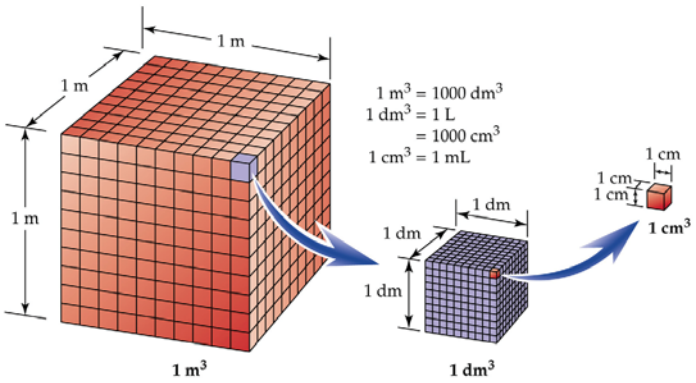
1. Која е основна мерка за мерење на плоштина?
2. Колку mm^2 се содржат во: а) 1 cm^2; б) 1 dm^2; в) 1 m^2?
3. Што е тоа ар, а што е тоа хектар? Која е поголема единица од овие две?

IV.2.3. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ВОЛУМЕН (ЗАФАТНИНА)[4]

Основна единица мерка за волумен е **кубниот метар**, што го запишуваме пократко со **m^3**. Кубниот метар, всушност, е волумен на 1 коцка со раб долг 1 m (цртеж 3).

Помали единици мерки за волумен од кубниот метар се: **кубен-дециметар** (**dm^3**), **кубен сантиметар** (**cm^3**) и **кубен милиметар** (**mm^3**).

Кубен дециметар е волуменот што ја има коцка, чиј што раб е долг 1 dm. Кубен сантиметар е зафатнина што ја има коцка со раб 1 cm. Кубен милиметар е зафатнина на коцка со раб 1 mm.



Цртеж 3

Поголеми единици мерки за зафатнина од кубниот метар во пракса многу ретко се употребуваат. Тие почесто се употребуваат во науката, кога се искажуваат зафатнините на небеските тела: Сонцето, Земјата, Месечината итн. И тогаш се употребува најмногу кубниот километар (**km^3**):

Како што ни е познато од геометријата кубниот метар содржи 1000 dm^3, кубниот дециметар содржи пак 1000 cm^3, а кубниот сантиметар содржи 1000 mm^3.

Според тоа, помеѓу основната единица и пониските единици мерки за зафатнина постојат следниве односи:

[4] Претворањето на поголеми единици во помали (и обратно) се дадени за тие што сакаат да знаат повеќе. Ова се однесува и за наставните единици што следуваат.

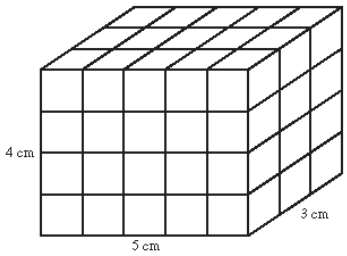
$$1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3 = 1\ 000\ 000\ cm^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ mm^3$$
$$1\ dm^3 = 1\ 000\ cm^3 = 1\ 000\ 000\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 1\ 000\ mm^3$$
$$1\ mm^3$$

$1\ km^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$.

Забележуваме дека: секоја повисока единица мерка за зафатнина содржи 1 000 непосредно помали од неа единици мерки.

Ако сакаме да пресметаме волумен на квадар, бидејќи сите димензии (должина, ширина и висина) се нормални меѓу себе, волуменот ќе биде еднаков на производот на овие димензии. Значи, ако должината ја обележиме со a, ширината со b, а висината со c тогаш волуменот ќе биде еднаков на:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



Цртеж 4

На цртеж 4 имаме прикажано еден квадар со димензии $a = 5$ cm, $b = 3$ cm и $c = 4$ cm. Волуменот на овој квадар ќе биде:

$$V = a \cdot b \cdot c = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60\ cm^3.$$

Волуменот на коцката се добива за специјален случај кога $a = b = c$. Тоа значи дека волуменот на коцка ќе биде:

$$V = a^3.$$

Мора да се внимава во каква единица ни се зададени страните a, b и c, затоа што во таква кубна единица ќе биде волуменот V.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Која е основна мерка за мерење на волумен?
2. Кои се помали единици мерки од кубен метар?
3. Колку cm^3 има во: а) $1\ m^3$; б) $1\ dm^3$?
4. Како се пресметува волумен на квадар, а како на коцка?

IV.3. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ТЕЧНОСТ

Основна единица мерка за мерење на течностите е **литар**, што покусо го обележуваме со *l*.

Литарот е всушност волумен што е еднаков на волуменот на 1 dm³ (цртеж 3), само што во секојдневниот живот на литарот му се дава обично форма на цилиндер наместо форма на коцка.

Поголеми единици мерки за течност од литарот се: **декалитар** (*dkl*) кој што содржи 10 *l*, **хектолитар** (*hl*) што содржи 100 *l*. Понекогаш ја употребуваме и единицата мерка **килолитар** (*kl*) што содржи 1000 литри.

Помали единици мерки за течности од литарот се: **децилитар** (*dl*) што претставува 10-ти дел од литарот; **сантилитар** (*cl*) 100-ти дел од литарот и **милилитар** (*ml*) претставува 1000-ти дел од литарот.

Како што гледаме, секоја повисока единица мерка за течност содржи 10 непосредно пониски единици мерки.

Според тоа, можеме да го забележиме следниот однос на повисоките и пониските единици мерки спрема основната единица мерка - литарот:

$$1\ kl = 10\ hl = 100\ dkl = 1\ 000\ l$$
$$1\ hl = 10\ dkl = 100\ l$$
$$1\ dkl = 10\ l$$
$$1\ l = 10\ dl = 100\ cl = 1\ 000\ ml$$
$$1\ dl = 10\ cl = 100\ ml$$
$$1\ cl = 10\ ml$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Со која единица мерка ги мериме течностите?
2. Кои се поголеми, а кои помали единици од литарот?
3. Колку *cl* има во 1 *dkl*?
4. На кој волумен одговара 1 *l*?

IV.4. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА МАСА

Основна единица мерка за маса е **грам**, што го обележуваме пократко со g.

Грам - маса, тоа е масата на еден кубен сантиметар чиста дестилирана вода на температура + 4 °C.

Поголеми единици мерки за маса од грамот се: **декаграм** (dg) што има 10 g, **хектограм**

(hg) што има 100 g и **килограм** (kg) што има 1 000 g. Помали единици мерки за маса од грамот се: **дециграм** (dg) - 10-ти дел од грамот, **сантиграм** (cg) - 100-ти дел од грамот и **милиграм** (mg) - 1000-ти дел од грамот.

Како што гледаме и кај единиците мерки за маса извршена е декадна поделба, т.е. секоја повисока единица мерка содржи 10 непосредно пониски единици мерки. Според тоа, односот на повисоките и пониските единици спрема основната единица мерка за маса - грамот ќе биде следниов:

1 kg = 10 hg = 100 dkg = 1 000 g
1 hg = 10 dkg = 100 g
1 dkg = 10 g
1 g = 10 dg = 100 cg = 1 000 mg
1 dg = 10 cg = 100 mg
1 cg = 10 mg

Во практичниот живот често се употребуваат и следниве мерки поголеми од килограмот: **1 товар** или **1 метричка цента** (mc) или **1 квинтал** (q) = 100 kg;

1 тон (t) = 10 mc = 1000 kg;

1 вагон = 10 тони = 100 mc = 10 000 kg.

Во пракса најчесто се користи килограмот како мерка за маса. Од таа причина честопати килограмот се зема за основна единица мерка за маса. Но, тоа е само договор и од претходното кажано ништо друго не се менува.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Со која единица мерка одредуваме колкава маса имаат одредени предмети?
2. Кои се поголеми, а кои помали единици мерки од декаграмот?
3. Која е поголема мерна единица: dg или dkg?

IV.5. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ВРЕМЕ И ЗА ТЕМПЕРАТУРА

Основна единица за мерење на времето е денот. Тоа е времето, што е потребно да се заврти Земјата еднаш околу својата оска.

Помали единици мерки за време од денот се: **саат** или **час**, **минута** и **секунда**.

Ако времето од еден ден го поделиме на 24 еднакви дела тогаш секој така добиен дел ни претставува време од 1 час. Значи, денот има 24 часа. Часот го обележуваме покусо со латинската буква **h** (од латинскиот збор **hora** = час). Часовите почнуваме да ги броиме од

полноќ до полноќ.

Ако времето од еден час го поделиме на 60 еднакви дела тогаш секој така добиен дел ни претставува нова помала единица за време наречена минута (**min**).

Кога времето од 1 минута ќе се подели на нови 60 еднакви делови, се добива најмалата единица мерка за време, наречена секунда и се означува со **s**.

Времето од една секунда во науката се зема за основна единица мерка за време. Тогаш ќе имаме:

$$\begin{aligned} 1\ \text{min} &= 60\ \text{s};\\ 1\ \text{h} = 60\ \text{min} &= 3600\ \text{s};\\ 1\ \text{ден} = 24\ \text{h} = 1440\ \text{min} &= 86400\ \text{s}. \end{aligned}$$

Поголеми единици мерки за време од денот се: **недела** (седмица), **месец**, **година**.

Неделата е време што ја сочинуваат 7 дена (понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота и недела).

Месец е време што го сочинуваат 28, 29, 30 или 31 ден. При сметањето земаме дека месецот има 30 дена.

IV

Годината е време, што е потребно Земјата да се заврти еднаш околу Сонцето. Тоа време изнесува 365 дена и 6 h (или поточно 365 дена 5 h 48 min и 47 s). За полесно сметање установено е три години една по друга да имаат по 365 дена, а секоја четврта да има 366 дена. Годините што имаат по 365 дена ги викаме **прости**, а годината што има 366 дена ја викаме **високосна** или **престапна**. Во високосната година месецот февруари добива 29 дена, додека во простите години тој има по 28 дена.

Се употребуваат и поголеми единици мерки од годината, а тоа се: **деценија (десетлетка),** што има 10 години и **век** или **столетие** што има 100 години.

Годината ја делиме на 12 месеци или поделена на недели добиваме: 52 недели и 1 ден, а во високосната 52 недели и 2 дена.

Температурата ја мериме во Целзиусови степени (**°C**). Оваа скала е избрана така што на температура од 0°C водата замрзнува, а на 100°C водата почнува да врие. Еден степен Целзиусов е температура која претставува еден стоти дел од температурната разлика помеѓу точка на мрзнење и точка на вриење на водата. Покрај Целзиусови степени се користат и други единици како на пример Келвини (K), а во некои земји и Фаренхајтови степени (°F).

Во однос на другите единици мерки за температура треба да се напомене дека Келвинот (K) е единица за апсолутна температура. Големината на оваа единица (1 K) е идентична со единицата на Целзиусовите степени. Разликата е во тоа што нулата на Келвиновата скала е спуштена во однос на Целзиусовата на 273,15 °C под нулата. Оваа точка се означува како 0 K и се вика апсолутна нула.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Која е основна мерна единица за време?
2. Кои се поголеми, а кои помали единици мерки од денот и како ги бележиме?
3. Кои години се прости, а кои престапни?
4. Со која единица мерка ја мериме температурата?
5. Како настанала Целзиусовата скала?
6. Кои единици мерки за температура се употребуваат освен °C?

IV.6. ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ

Од порано ни е познато дека броевите можат да бидат неименувани или именувани.

Неименувани броеви се: 3, 8, 17, 427, 3084 итн. Тие ни покажуваат само од колку елементи (единици) е составено некое множество.

Именувани броеви се: 6 ореви, 36 ученици, 4 метри, 5 kg, 203 квадратни метри итн. Нив ги добиваме при броењето на елементите на одредено множество или при мерењето на некоја величина. Тие ни го покажуваат, покрај бројот на елементите што го содржи дадено множество или бројот на единиците мерки што го содржи величината, уште и нивното име, т.е. нивниот вид.

При мерењето на различните величини можеме да добиеме како резултат и број што ќе биде искажан со повеќе единици од ист вид, на пример: училницата е долга 7 m 3 dm 5 cm, балончето собира 3 *l* 8 *dl* или подот на нашата спална има 15 m^2 58 dm^2.

Таквите броеви ги викаме **именувани броеви**. Именуваните броеви можеме да ги претвориме и во такви именувани броеви, што ќе бидат искажани само со едни единици од тој вид. Таквите именувани броеви ги викаме едноимени, за разлика од повеќеимените броеви. На пример: повеќеимениот број 4 m 6 dm 5 cm можеме да го изразиме и во форма на едноимен број 465 cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што се тоа именувани броеви? Прикажи неколку примери.
2. Кои се неименувани броеви? Прикажи неколку примери.
3. Што се тоа повеќеимени, а што се едноимени броеви? Дали бројот 15 m^2 58 dm^2 е едноимен?

IV.7. ПРЕТВОРАЊЕ НА ПОВЕЌЕИМЕНИТЕ БРОЕВИ ВО ЕДНОИМЕНИ

Претворањето на повеќеимените броеви во едноимени станува лесно, кога го знаеме изразувањето на повисоките единици со пониски или најниски единици.

Претворањето се врши така што сите повисоки единици од повеќеимениот број ги изразуваме со најниските единици што се сретнуваат во него, потоа добиените броеви ги собираме. На пример:

1. 6 m 4 dm 7 cm = 6 · 100 cm + 4 · 10 cm + 7 cm = 600 cm + 40 cm + 7 cm = 647 cm;

2. 4 m^2 8 dm^2 12 cm^2 = 4·10 000 cm^2 + 8·100 cm^2 + 12 cm^2 = 40 000 cm^2 + 800 cm^2 + 12 cm^2 = = 40 812 cm^2;

3. 76 m^3 63 cm^3 = 76·1 000 000 cm^3 + 63 cm^3 = 76 000 000 cm^3 + 63 cm^3 = 76 000 063 cm^3;

4. 8 *hl* 5 *l* 2 *dl* = 8 · 1000 *dl* + 5 · 10 *dl* + 2 *dl* = 8000 *dl* + 50 *dl* + 2 *dl* = 8052 *dl*;

5. 7 km 9 m 4 dm = 7·10 000 dm + 9·10 dm + 4 dm = 70 000 dm + 90 dm + 4dm = 70 094 dm.

Претворањето на повеќеимените броеви од метричкиот систем во едноимени броеви особено се олеснува, кога се знае дека редукционите броеви се декадни единици (10, 100 или 1000).

Кај мерките за должина, течност и маса; бидејќи редукциониот број е 10, за секоја единица доаѓа (се паѓа) по едно место во едноимениот број. При тоа треба да се внимава, на местата на единиците што ги нема во повеќеимениот број, да се стави (напише) по една нула.

На пример:

1) 3 km 8 m 6 cm = 300806 cm. Нулите се напишани на местата на хектометрите, декаметрите и дециметрите.

2) 7 *hl* 3 *l* 4 *cl* = 70304 *cl*. Нулите ни кажуваат дека нема декалитри и децилитри.

3) 12 kg 4 g 5 dg = 120 045 dg.

Кај мерките за плоштина, бидејќи редукциониот број е 100, за секоја единица што следи една по друга доаѓаат по две места во едноимениот број. И тука, при претворањето на повеќеимениот број во едноимен, треба да внимаваме на местата на единиците што ги нема во повеќеимениот број да напишеме по две нули. Ако бројот на некои од единиците е едноцифрен број, тој треба да се направи двоцифрен, со тоа што пред него ќе се напише една нула.

На пример:

1) 28 m^2 35 cm^2 = 280 035 cm^2. Тука двете нули доаѓаат на местата на кв. дециметри, што ги нема во зададениот повеќеимен број.

2) 16 m^2 3 dm^2 8 cm^2 = 16 m^2 03 dm^2 08 cm^2 = 160 308 cm^2.

Тука пак, со по 1 нула ги дополнуваме празните места на кв. дециметри и кв. сантиметри за да станат двоцифрени броеви.

Бидејќи кај мерките за зафатнина редукциониот број е 1000, тогаш за секоја единица мерка доаѓаат по три места во едноимениот број. Ако некои од единиците мерки се дво-

цифрени или едноцифрени броеви, треба прво тие да се направат троцифрени броеви, на тој начин што пред бројот на односните единици допишуваме една или две нули. Исто така и тука на местата на единиците што ги нема во повеќеимениот број, треба да се напишат по три нули. На пример:

1) 76 m^3 54 dm^3 8 cm^3 = 76 m^3 054 dm^3 008 cm^3 = 76 054 008 cm^3. (Што означуваме со нулите)?

2) 7 m^3 40 cm^3 = 7 m^3 040 cm^3 = 7 000 040 cm^3.

Претворањето на даден повеќеимен број во едноимен број се врши така што сите повисоки единици од повеќеимениот број се претвораат во пониски единици што се сретнуваат во него, а потоа добиените броеви се собираат.

На пример:

1) Колку дена има во 6 год 5 мес 18 дена?

Ќе работиме: 6 год 5 мес 18 дена = (6 · 365) дена + (5 · 30) дена + 18 дена =

= 2190 дена + 150 дена + 18 дена = 2358 дена;

2) Колку секунди има во: 5 дена 18 h 35 min 40 s?

5 дена 18 h 35 min 40 s = (5 · 86 400) s + (18 · 3600) s + (35 · 60) s + 40 s =

= 432 000 s + 64 800 s + 2100 s + 40 s = 498 940 s.

Претворањето можеме да го извршиме и постепено вака:

Најнапред, деновите ги претвоуваме во часови. Во 5 дена има 5·24 = 120 h. На овој број му ги додаваме 18 часови од повеќеимениот број, па добиваме: 120 h +18 h = 138 h. Овие часови потоа ги претвораме во минути, кога ги помножуваме со редукциониот број 60, добиваме: 138 · 60 = 8280 минути. Кон овие минути ги додаваме 35-те минути од повеќеимениот број, па добиваме: 8280 min + 35 min = 8315 минути. Овој број на минути на крајот го претвоуваме во секунди, кога го помножуваме со редукциониот број 60, па ќе добиеме: 8 315 · 60 = 498 900 секунди. Кон добиените секунди ги додаваме и секундите од повеќеимениот број, па конечно добиваме: 498 900 s + 40 s = 498 940 s. Значи: 5 дена 18 h 35 min 40 s = 498 940 s.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Претвори ги следните повеќеимени броеви во едноимени:

а) 15 km 4 m 2 cm = ... cm;

б) 2 m^2 52 dm^2 4 cm^2 = … cm^2;

в) 24 m^3 753 dm^3 42 cm^3 = … cm^3;

г) 15 *hl* 4 *l* 7 *dl* = … *dl*;

д) 6 h 27 min 14 s = … s.

2 Планинскиот врв Кораб е висок 2 km 7 hm 6 dkm 4m. Претвори ја висината на Кораб во метри!

3 Првото прелетување околу Земјата со авион без спуштање извршено е во 1949 година за 3 дена 22 h и 1 min. За колку минути е извршено тоа прелетување?

IV.8. ПРЕТВОРАЊЕ НА ЕДНОИМЕНИТЕ БРОЕВИ ВО ПОВЕЌЕИМЕНИ

Едноимените броеви од метричкиот систем лесно ги претвораме во повеќеимени броеви, кога се знаат месните вредности на неговите цифри.

Знаеме дека кај мерките за должина, течност и маса за секоја единица што следи едно по друго одговара по едно место во едноимениот број. Тогаш, едноимените броеви од горните величини ги претвораме во повеќеимени броеви, кога бројот го разделуваме оддесно налево во групи од по една цифра и кон секоја група (цифра) го придружуваме по ред соодветното име на единицата мерка. На пример:

1) 4639 mm = 4/6/3/9 mm= 4 m 6 dm 3 cm 9 mm;

2) 3087 *dl* = 3/0/8/7 *dl* = 3 *hl* 0 *dkl* 8 *l* 7 *dl* = 3 *hl* 8 *l* 7 *dl*;

3) 500 602 cg = 5/0/0/6/0/2 cg = 5 kg 0 hg 0 dkg 6 g 0 dg 2 cg = 5 kg 6 g 2 cg.

Бидејќи кај мерките за плоштина редукциониот број е 100, тогаш за секоја единица мерка што следи едно по друго одговараат по две места (цифри) во едноимениот број. Едноимените броеви од мерките за плоштина ги претвораме во повеќеимени, кога бројот го разделиме оддесно налево во групи од по две цифри и кон секоја група по ред го придружуваме соодветното име на единицата мерка. На пример;

1) 304285 cm^2 = 30/42/85 cm^2 = 30 m^2 42 dm^2 85 cm^2;

2) 1050046 mm^2 = 1/05/00/46 mm^2 = 1 m^2 05 dm^2 00 cm^2 46 mm^2 = 1 m^2 5 dm^2 46 mm^2.

Кај мерките за зафатнина, бидејќи за секоја единица што следи едно по друго одговараат по три места (цифри), едноимениот број го разделуваме оддесно налево во групи од по три цифри и на секоја група го додаваме соодветното име на единицата мерка. На пример:

1) 47 506 720 cm^3 = 47/506/720 cm^3 = 47 m^3 506 dm^3 720 cm^3;

2) 12 000 026 050 mm^3 = 12/000/026/050 mm^3 =12 m^3 26 cm^3 50 mm^3.

Пример 1. Да се претвори едноимениот број 746 772 s во повеќеимен!

$$
\begin{array}{l}
\underline{746772} : 60 = 12446 \text{ min} \\
\underline{60} \\
146 \\
\underline{120} \\
\ 267 \\
\ \underline{240} \\
\ \ 277 \\
\ \ \underline{240} \\
\ \ \ 372 \\
\ \ \ \underline{360} \\
\ \ \ \ 12 \text{ s}
\end{array}
$$

Претворањето го отпочнуваме прво со одделување на непосредно повисоките единици, т.е. минутите што се содржат во едноимениот број. Тоа го постигнуваме кога бројот на секундите го поделуваме со редукциониот број 60. Притоа добиениот количник ќе ни покаже колку повисоки единици - минути има во едноимениот број, а остатокот ќе ни покаже колку истоимени единици (секунди) останале. Така добиваме: 746 772 s = 12 446 min 12 s. Потоа, од бројот на минутите ги одделуваме часовите што се содржат во нив, делејќи ги со редукциониот број 60, па добиваме: 746 772 s = 207 h 26 min 12 s.

На крајот од бројот на часовите (207) ги одделуваме деновите што се содржат во нив, кога нивниот број го поделуваме со редукциониот број 24:

Така добиваме 746 772 s = 8 дена 15 h 26 min 12 s.

Како што гледаме претворањето на едноимениот број во повеќеимен мораме да го вршиме постепено од едни во други наредни повисоки единици. Притоа, повеќеимениот број го сочинуваат крајниот количник, како највисоки единици и добиените остатоци при одделните делења како пониски единици.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Претвори ги следните едноимени броеви во повеќеимени:

а) 4 231 401 m = … km … dkm … m;

б) 5 420 311 cm^2 = … m^2 … dm^2 … cm^2;

в) 622 953 211 cm^3 = … m^3 … dm^3 … cm^3;

г) 5320 *cl* = … *dkl* … *l* … *dl*;

д) 52 315 s = … h … min … s.

2 Преспанското Езеро се наоѓа на надморска височина од 853 метри. Претвори ја таа висина во повеќеимен број!

3 Месечината ја обиколува Земјата за 2 360 592 секунди. Претвори го тој број во повеќеимен број!?

IV.9. ПРЕТВОРАЊЕ ПОГОЛЕМИ ВО ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ И ОБРАТНО

Познато ни е дека кај мерките за должина, течности и маса секоја повисока единица содржи 10 непосредно пониски единици.

Кај мерките пак за плоштина, секоја повисока единица содржи 100 непосредно пониски единици, додека пак секоја повисока единица за волумен содржи 1000 непосредно пониски единици.

Бројот што ни покажува колку пониски единици содржи непосредно повисоката единица, се вика **редукционен број**.

Значи: кај мерките за должина, течност и маса редукциониот број е 10, кај мерките за плоштина тој е 100, а кај мерките за волумен тој е 1000.

Ако сакаме повисоките единици мерки од метричкиот систем да ги изразиме со непосредно пониски единици, тогаш треба само бројот на повисоките единици да го помножиме со редукциониот број на тој вид мерки. На пример:

а) 8 m = (8 · 10) dm = 80 dm;

б) 46 dm^2 = (46 · 100) cm^2 = 4600 cm^2;

в) 28 m^3 = (28 · 1000) dm^3 = 28 000 dm^3;

г) 3 *l* = (3 · 10) *dl* = 30 *dl*.

Ако пак, повисоките единици мерки од метричкиот систем сакаме да ги изразиме во пониски, но не во непосредно пониски тогаш изразувањето можеме да го вршиме постепено или пак директно кога бројот на повисоките единици го помножуваме со декадна единица која што има толку пати повеќе нули во зависност од тоа во кои по ред пониски единици ги изразуваме. На пример:

1. 7 m = ? cm; 7 m = 70 dm = 700 cm, односно:

   7 m = (7 · 100) cm = 700 cm;

2. 86 хектари = (86 · 100) ари = 8 600 ари = (8 600 · 100) m^2 = 860 000 m^2, односно:

   86 ha = (86 · 10 000) m^2 = 860 000 m^2;

3. 24 m^3 = 24 000 dm^3 = 24 000 000 cm^3, односно:

   24 m^3 = (24 · 1 000 000) cm^3= 24 000 000 cm^3;

4. 5 *hl* = 50 *dkl*= 500 *l* = 5000 *dl*, односно:

   5 *hl* = (5 · 1 000) *dl* = 5 000 *dl*;

5. 32 kg = (32 · 1 000) g = 32 000 g = 320 000 dg, односно:

   32 kg = (32 · 10 000) dg = 320 000 dg.

И пониските единици можат да бидат изразени во непосредни или други повисоки единици. Тоа го практикуваме најчесто, кога бројот на пониските единици завршува на неколку или повеќе нули.

Изразувањето на пониските единици мерки од метричкиот систем во непосредно повисоки единици од тој вид, го вршиме на тој начин, што бројот на пониските единици го поделуваме со редукциониот број за тој вид единици. На пример:

50 dm = (50 : 10) m = 5 m;

3 000 cm^2 = (3000 : 100) dm^2 = 30 dm^2;

765 000 cm^3 = (765 000 : 1000) dm^3 = 765 dm^3;

4800 *dl* = (4 800 : 10) *l* = 480 *l*;

830 hg = (830 : 10) kg = 83 kg.

Ако пониските единици не ги изразуваме во непосредно повисоки, туку во уште повисоки единици, тогаш тоа изразување можеме да го вршиме постепено или пак директно, кога бројот на пониските единици го поделуваме со декадна единица која што има толку пати повеќе нули од редукциониот број, во зависност од тоа во кои по ред повисоки единици ги изразуваме. На пример:

1. 56 000 m = (56 000 : 10) dkm = 5600 dkm = (5600: 10) hm = 560 hm = (560 : 10) km = 56 km, односно:

$$56\ 000\ \text{m} = (56\ 000 : 1000)\ \text{km} = 56\ \text{km};$$

2. $2\ 800\ 000\ \text{cm}^2 = (2\ 800\ 000 : 100)\ \text{dm}^2 = 28\ 000\ \text{dm}^2 = (28\ 000 : 100)\ \text{m}^2 = 280\ \text{m}^2$, односно:

$$2\ 800\ 000\ \text{cm}^2 = (2\ 800\ 000 : 10\ 000)\ \text{m}^2 = 280\ \text{m}^2;$$

3. $4\ 000\ 000\ \text{mm}^3 = (4\ 000\ 000 : 1000)\ \text{cm}^3 = 4000\ \text{cm}^3 = (4000 : 1000)\ \text{dm}^3 = 4\ \text{dm}^3$, односно:

$$4\ 000\ 000\ \text{mm}^3 = (4\ 000\ 000 : 1\ 000\ 000)\ \text{dm}^3 = 4\ \text{dm}^3;$$

4. $52\ 000\ dl = (52\ 000 : 10)\ l = 5200\ l = (5200 : 10)\ dkl = 520\ dkl = (520 : 10)\ hl = 52\ hl$, односно:

$$52\ 000\ dl = (52\ 000 : 1000)\ hl = 52\ hl;$$

5. 30200 dkg = (30 200 : 10) hg = 3 020 hg = (3020 : 10) kg = 302 kg, односно:

$$30\ 200\ \text{dkg} = (30\ 200 : 100)\ \text{kg} = 302\ \text{kg}.$$

Знаеме дека редукционите броеви кај мерките за време и агли не се декадни единици, а кај мерките за време тие не се еднакви ниту меѓу себе. Затоа при претворањето на повисоките единици на овие мерки, во непосредно пониски единици, треба да се помножи бројот на повисоките единици со соодветниот редукционен број. На пример:

1) 4 дена = (4 · 24) h = 96 h;
2) 8 h = (8 · 60) min = 480 min;
3) 35 min = (35 · 60) s = 2 100 s.

Тука мораме да го извршиме потребното множење, затоа што редукционите броеви не се декадни единици.

Ако сакаме повисоките единици да ги претвориме во пониски, но не во непосредно пониски, тоа можеме да го извршиме постепено или пак директно, ако ни е познат односот помеѓу тие две единици. На пример:

5 дена = (5 · 24) h = 120 h = (120 · 60) min = 7200 min = (7200 · 60) s = 432 000 s, добиваме дека 5 дена = 432 000 s.

Претворањето на деновите во секунди можеме да го извршиме и директно, ако знаеме дека 1 ден има 86 400 s. Тогаш ќе имаме:

$$5\ \text{дена} = (5 \cdot 86\ 400)\ \text{s} = 432000\ \text{s}.$$

Друг пример: да се претворат 18° во аголни секунди!

$18° = (18 \cdot 60)' = 1\ 080' = (1\ 080 \cdot 60)'' = 64\ 800''$ или директно, кога знаеме дека $1 = 3\ 600''$:

$$18° = (18 \cdot 3\ 600)'' = 64\ 800''.$$

Пониските единици ги претвораме во непосредно повисоки од тој вид, кога бројот на пониските единици го поделуваме со соодветниот редукционен број на тој вид единици мерки. На пример:

1) 540 min = (540 : 60) h = 9 h;
2) 384 h = (384: 24) дена = 16 дена;
3) $2520' = (2\ 520 : 60) = 420°$.

Ако пониските единици сакаме да ги претвориме во повисоки, но не во непосредно

повисоки единици од тој вид, тогаш тоа можеме да го извршиме постепено или директно. На пример, бројот на секундите го претвораме во денови, кога прво секундите ги претвораме во минути, па минутите во часови и на крајот часовите во денови. Бројот на секундите може и директно да се претвори во денови, ако тој број го поделиме со 86 400 s = 1 ден. На пример:

1) 432 000 s = (432 000 : 60) min = 7200 min = (7200 : 60) h = 120 h = (120 : 24) дена = 5 дена односно 432 000 s = (432 000 : 86 400) дена = 5 дена.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Што е тоа редукционен број? Колкав е тој за единица маса, плоштина и волумен?

2 Претвори ги следните броеви во бараната единица:

а) 210 cm = … dm;
б) 21 ар = … m^2;
в) 30 dkm^3 = … m^3;
г) 40 t = … dkg;
д) 15 *l* = … *dl*;
ѓ) 10 800 s = ... h.

3 Планетата Венера го обиколува Сонцето за 224 дена 16 часа и 48 минути. Изрази го тоа време во секунди!

4 Реката Вардар е долга 388 km. Изрази ја таа должина во метри!

IV

IV.10. СОБИРАЊЕ НА ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ

Задача 1. Во едно балонче нека има 3 *l* 6 *dl* шира. Ако во него ставиме уште 2 *l* 8 *dl*, колку шира ќе има во балончето?

За да најдеме колку шира ќе има во балончето, треба двата повеќеимени броеви да ги собереме. Тоа го правиме вака:

Ги запишуваме дадените повеќеимени броеви, така што истоимените единици од нив да паднат едни под други:

$$\begin{array}{l} 3\ l \quad 6\ dl \\ 2\ l \quad 8\ dl \\ \hline 5\ l \quad 14\ dl = 6\ l\ \ 4\ dl \end{array}$$

Собирањето го отпочнуваме од најниските единици мерки: 8 *dl* и 6 *dl* се 14 *dl*; 2 *l* и 3 *l* се 5 *l*. Бидејќи во збирот 14 *dl* се содржи 1 *l*, тогаш тој 1 *l* го одделуваме од децилитрите и го додаваме кон збирот на наредните повисоки единици-литри, па бараниот збир ќе биде: 6 *l* 4 *dl*.

Собирањето на повеќеимените броеви од метричкиот систем на мерки можеме да го извршиме и на тој начин што прво ќе ги претвориме во едноимени броеви, а потоа едноимените собироци ќе ги собереме како цели броеви. Така добиениот збир ќе претставува едноимен

број, што можеме да го изразиме потоа во повеќеимен број.

На овој начин горната задача ќе ја решиме:

$$\begin{array}{rr} 3\ l & 6\ dl = 36\ dl \\ 2\ l & 8\ dl = 28\ dl \\ \hline 6\ l & 4\ dl = 64\ dl \end{array}$$

Задача 2. Еден селанец од селото до автобуската станица дошол за 1 h и 25 min. Со автобусот до железничката станица стигнал за 45 min. Потоа со возот патувал до местото на слегување 3 h и 30 min. Колку време поминал на пат селанецот?

Тоа го наоѓаме:

$$\begin{array}{rrl} 1\text{ h} & 25\text{ min} & \\ & 45\text{ min} & \\ 3\text{ h} & 30\text{ min} & \\ \hline 4\text{ h} & 100\text{ min} & = 5\text{ h } 40\text{ min} \end{array}$$

Значи, селанецот поминал на пат вкупно 5 часа 40 минути. Собирањето можеме да го извршиме и по вториот начин, кога прво повеќеимените броеви ќе ги претвориме во најниските единици - минути.

$$\begin{array}{rrrl} 1\text{ h} & 25\text{ min} & = & 85\text{ min} \\ & 45\text{ min} & = & 45\text{ min} \\ 3\text{ h} & 30\text{ min} & = & 210\text{ min} \\ \hline 5\text{ h} & 40\text{ min} & = & 340\text{ min} \end{array}$$

Вториот начин, како што гледаме, кај собирањето на повеќеимените броеви од неметричките мерки е многу непрактичен и бавен, затоа тој во практика не се ни употребува.

Првиот пак начин на собирањето (ќе видиме дека тоа важи и за другите операции) на повеќеимените броеви од метричкиот систем е многу поедноставен и полесен, бидејќи претворањето на повеќеимените броеви во едноимени не бара изведување на операциите множење и делење со редукционите броеви. Резултатот што се добива при собирање на именувани броеви се нарекува **збир** на именуваните броеви.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Собери ги следните броеви:

а) 3 hm 9 m 4 dm + 7 dkm 2 dm 3 cm = ?

б) 4 dm^2 9 mm^2 + 3 m^2 5 cm^2 + 5 m^2 7 dm^2 = ?

в) 88 cm^3 10 mm^3 + 1 m^3 54 cm^3 = ?

г) 11 мес 8 дена + 5 год 9 мес 18 дена = ?

д) 17 kg + 624 g 3 dg + 34 hg 5 dkg = ?

2 Еден работник работел во едно претпријатие 3 год 8 мес 20 дена, во друго претпријатие 6 год 2 мес 18 дена, а во трето год 7 мес. Колку вкупно има работено во трите претпријатија?

3 Часовникот ни заостанал 8 min и 45 s. Колку е точното време, ако тој ни покажува 10 h 55 min и 30 s?

IV.11. ОДЗЕМАЊЕ НА ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ

Задача 1. Едно стопанство посеало со пченица и јачмен вкупно 36 ha 5,6 a 28 m^2. Ако со пченица се посеани 24 ha 38 a 45 m^2, колку се посеани со јачмен?

Задачата ќе ја решиме, кога од првиот повеќеимен број го извадиме вториот.

Пишувањето на намалителот под намаленикот треба да дојде така што истоимените единици да паднат едни под други.

Одземањето го започнуваме од најниските единици:

$$\begin{array}{r} 36\text{ ha }56\text{ a }28\text{ m}^2 \\ -\ 24\text{ ha }38\text{ a }45\text{ m}^2 \\ \hline 12\text{ ha }17\text{ a }83\text{ m}^2 \end{array}$$

Бидејќи од 28 m^2 не можеме да одземеме 45 m^2, тогаш од 56 a ќе земеме 1 a, што го претвораме во кв. метри (1 a = 100 m^2) и ги додаваме кон 28 m^2, па ќе имаме 45 m^2 од 128 m^2 се 83 m^2. Потоа ги одземаме повисоките единици: 38 a од 55 a (колку што останаа) се 17 a, 24 ha од 36 ha се 12 ha. Значи: со јачмен се посеани, 12 ha 17 a 83 m^2. Горното одземање можеме да го извршиме и на вториот начин, кога и намаленикот и намалителот ги претвораме во едноимени броеви:

$$\begin{array}{r} 36\text{ ha }56\text{ a }28\text{ m}^2 = 365\,628\text{ m}^2 \\ -\ 24\text{ ha }38\text{ a }45\text{ m}^2 = 243\,845\text{ m}^2 \\ \hline 12\text{ ha }17\text{ a }83\text{ m}^2 = 121\,783\text{ m}^2 \end{array}$$

што е попрактично.

Задача 2. Мајката имала 28 год 9 мес 26 дена кога ѝ се родил син. Колку години е синот сега, ако сега мајката има 42 год 5 мес 24 дена?

Задачата ја решаваме, ако од бројот на годините што ги има мајката сега, ги одземеме годините, месеците и деновите што таа ги имала кога ѝ се родил синот.

Одземањето го извршуваме кога прво повеќеимените броеви правилно ги запишеме еден под друг:

$$\begin{array}{r} 42\text{ год }\ 5\text{ мес }\ 24\text{ дена} \\ -\ 28\text{ год }\ 9\text{ мес }\ 26\text{ дена} \\ \hline 13\text{ год }\ 7\text{ мес }\ 18\text{ дена} \end{array}$$

Одземањето го започнуваме од најниските единици. Бидејќи од 24 дена не можеме да одземеме 26 дена, тогаш од 5-те месеци земаме 1 месец. Земениот 1 месец има 30 дена, што ги додаваме кон 24 дена, па добиваме во намаленикот 54 дена. Сега одземаме, 26 дена од 54 дена се 28 дена. Потоа ги одземаме повисоките единици мерки - месеците, 9 месеци не можеме да одземеме од 4 месеци (колку што останаа по извршеното позајмување), затоа земаме од бројот на годините 1 година, таму остануваат уште 41 година. Земената 1 година има 12 месеци и 4 месеци се 16 месеци. Сега одземаме, 9 месеци од 16 месеци се 7 месеци. Најпосле ги одземаме и највисоките единици мерки - годините, 28 години од 41 година (колку што останаа) се 13 години. Значи, синот сега има 13 год 7 мес 18 дена.

Задача 3. Еден остар агол во правоаголниот триаголник изнесува $\alpha = 54^\circ\ 28'\ 45''$. Колку изнесува другиот остар агол во тој правоаголен триаголник?

Задача 4. Илинденското востание е кренато на 2 август 1903 година, а на 11 октомври 1941 година започна Народноослободителното востание во Македонија. Колку време поминало помеѓу тие два датуми?

Оваа задача можеме да ја решиме на два начина.

Секој датум по календарот го толкуваме вака: на пример, Народноослободителното востание во Македонија започна на 11 октомври 1941 година, што значи тоа започнало 11-тиот ден од десеттиот месец на 1941 година од почетокот на броењето на времето. Ако поставиме прашање: колку години, месеци и денови изминале од почетокот на броењето на времето до тој настан, ќе одговориме: од почетокот на броењето на времето до отпочнувањето на НОБ изминале: 1940 години, 9 месеци и 10 дена, а до кревањето на Илинденското востание изминале: 1902 год. 7 месеци 1 ден.

За да најдеме колку време изминало од едниот до другиот настан, треба од изминатото време до вториот (поблискиот) настан да го одземеме изминатото време до првиот (подалечниот) настан, односно:

Значи: од кревањето на Илинденското востание до започнувањето на НОБ во Македонија, изминале: 38 год 2 мес и 9 дена.

$$\begin{array}{rrrr} 1940 \text{ год} & 9 \text{ мес} & 10 \text{ дена} \\ -\ 1902 \text{ год} & 7 \text{ мес} & 1 \text{ ден} \\ \hline 38 \text{ год} & 2 \text{ мес} & 9 \text{ дена} \end{array}$$

Тоа е првиот логичен начин на решавањето на ваков вид задачи, каде што имаме да пресметаме некое изминато време од еден до друг настан, т.е. од еден до друг датум.

До истиот резултат ќе дојдеме, ако задачата ја решиме и вака:

Од датумот на вториот (поблискиот) настан да го одземеме датумот на првиот (подалечниот) настан, па ќе добиеме:

датум на започнување на НОБ во Македонија:	1941 год	10 мес	11 дена
датум на подигањето на Илинденското востание:	1903 год	8 мес	2 дена
	38 год	2 мес	9 дена

Во пракса при решавањето на ваков вид задачи почесто го применуваме вториот начин.

Задача 5. Генијалниот изумител во електротехниката Никола Тесла умрел на 07.01.1943 година. Тогаш имал 86 години 5 месеци 27 дена. Кога е роден тој?

Задачата може да ја решиме на следниот начин:

$$\begin{array}{rrrr} & 1943 \text{ год} & 1 \text{ мес} & 7 \text{ дена} \\ - & 86 \text{ год} & 5 \text{ мес} & 27 \text{ дена} \\ \hline & 1956 \text{ год} & 7 \text{ мес} & 10 \text{ дена} \end{array}$$

Значи, Никола Тесла се родил на 10.07.1956 година.

Резултатот што се добива при одземање на именувани броеви се нарекува **разлика** на именувани броеви.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Најди ги следните разлики:

а) 2 km 6 dkm 5m – 9 hm 6 m 4 cm=?

б) 6 m^2 81 dm^2 – 40 dm^2 25 cm^2 = ?

в) 42 m^3 748 dm^3 – 13 m^3 2 dm^3 200 cm^3 = ?

г) 5 *dkl* 4 *dl* – 5 *l* 9 *dl* 3 *cl* = ?

д) 2 mc 3 kg – 38 kg 4 hg = ?

ѓ) 1 год 3 дена 15 h – 23 дена 20 h = ?

2 Колку години, месеци и денови имаш ти денес?

3 Колку време има изминато од ослободувањето на Скопје 13. XI 1944 година до денес?

IV.12. МНОЖЕЊЕ НА ИМЕНУВАН СО НЕИМЕНУВАН БРОЈ

Задача 1. При инсталирањето на електрично осветление за 1 соба потрошени се 9 m 3 dm 5 cm изолирана жица. Колку жица е потребно за инсталирањето на електрична струја во 6 такви соби?

За инсталирањето на електрична струја во 6 соби ќе биде потребно 6 пати повеќе жица, т.е. треба повеќеимениот број 9 m 3 dm 5 cm да се помножи со неименуваниот број 6.

Со неименуваниот број ги множиме одделно сите единици од повеќеимениот број, почнувајќи од најниските. Потоа, ако во некој од тие производи се содржи некоја повисока единица тогаш таа се одделува и се додава кон производот на соодветната повисока единица.

Така ќе добиеме:

$$\begin{array}{r} 9 \text{ m} \quad 3 \text{ dm} \quad 5 \text{ cm} \cdot 6 \\ \hline 54 \text{ m} \quad 18 \text{ dm} \quad 30 \text{ cm} = 54 \text{ m} \quad 21 \text{ dm} = 56 \text{ m} \quad 1 \text{ dm} \end{array},$$

односно, дека за 6 соби ќе биде потребна 56 m 1 dm жица.

Множењето на повеќеименуван број со неименуван можеме да го извршиме и на тој начин што повеќеимениот број прво го претвориме во едноимен, а потоа добиениот едноимен производ го претвориме пак во повеќеимен број.

На пример: 9 m 3 dm 5 cm · 6 = 935 cm · 6 = 5 610 cm = 56 m 1 dm.

Задача 2. Планетата Венера го заобиколува Сонцето за 224 дена 16 часа и 48 минути. За колку време Венера ќе го обиколи Сонцето 3 пати?

Времето на едно заобиколување треба да се помножи со бројот 3.

	224 дена	16 часа	48 минути · 3
	672 дена	48 часа	144 минути =
=	674 дена	2 часа	24 минути =
1 год.	309 дена	2 часа	24 минути

Задача 3. Звукот во секоја секунда изминува 340 m. На какво растојание се наоѓа еден топ од нас, ако неговиот истрел го слушнеме по 1 минута и 18 секунди, откако ќе ја видиме неговата светлина?

За да ја решиме задачата, треба повеќеимениот број 1 min 18 s да го претвориме во секунди, па тој број да го помножиме со 340 m/s, односно брзината на звукот.

1 min 18 s · 340 m/s = 78 s · 340 m/s = 26 520 m = 26 km 520 m.

Значи, топот од нас е оддалечен 26 km 520 m.

IV

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали може да множиме повеќеимен број со неименуван, ако повеќеимениот број прво го претвориме во едноимен, а потоа добиениот едноимен производ го претвориме пак во повеќеимен број.

2. Најди ги следните производи:
   а) 3 km 5 dkm 7 dm · 12 = ?
   б) 1 a 6 m^2 24 dm^2 · 8 = ?
   в) 5 *l* 8 *dl* 3 *cl* · 40 = ?
   г) 9 m^3 54 dm^3 5 cm^3 · 4 = ?
   д) 11 дена 6 h 23 min · 16 = ?

3. Еден мотоциклист обиколува еден круг за 4 min 43 s. Колку време му е потребно да го заобиколи тој круг 14 пати?

4. Во едно семејство синот има 10 год 5 мес 18 дена. Таткото од синот е 4 пати постар. Колку години има таткото?

IV.13. ДЕЛЕЊЕ НА ИМЕНУВАН СО НЕИМЕНУВАН БРОЈ

Задача 1. Пет трактора за еден ден изорале 10 ha 16 a 52 m^2. Колкава плоштина средно изорал секој трактор?

Еден трактор ќе изора 5 пати помалку:

10 ha 16 a 25 m^2 : 5 =?

Повеќеимен број се дели со неименуван, така што прво се делат највисоките единици, потоа пониските и на крајот најниските единици. Притоа, ако при делењето на некои единици добиеме остаток, тој остаток го претвораме во непосредно пониски единици, што ги додаваме кон соодветните единици од повеќеимениот број. Така добиениот збир, потоа го делиме со делителот итн.

10 ha 16 a 25 m^2 : 5 = 2 ha 3 a 25 m^2
10 ha
16 a
15 a
1 a 25 m^2
125 m^2
125 m^2

Ако повеќеимениот број, што го делиме е од метричкиот систем мерки тогаш попрактично е тој прво да се претвори во едноимен број, па потоа да го извршиме делењето како со цели броеви.

На пример: 10 ha 16 a 25 m^2 : 5 = 101 625 m^2 : 5 = 20 325 m^2 = 2 ha 3 a 25 m^2.

Задача 2. Еден базен се полни низ една цевка за 17 h 15 min. Ако три такви цевки го полнат тој базен едновремено, за кое време ќе го наполнат?

Три цевки ќе го наполнат базенот за 3 пати покусо време, т.е. времето за кое го полни една цевка сама треба да се подели со неименуваниот број 3. Делењето го започнуваме од највисоките единици:

17 h 15 min : 3 = 5 h 45 min
15 h
2 h 15 min
135 min
135 min

Наоѓаме дека базенот се наполнува за 5 h 45 min. Во горните два примера имавме делење на повеќеимен број со неименуван број и како што гледаме количникот ќе биде пак именуван (повеќеимен) број од истиот вид како и деленикот.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Како се дели повеќеимен број со неименуван?
2. Најди ги следните количници:
   а) 7 *hl* 32 *l* 6 *dl* : 6 = ?
   б) 3 kg 801 g : 7 = ?
   в) 14 год 3 мес 16 дена : 4 = ?
   г) 9 m^3 856 dm^3 : 7 = ?
   д) 64 ha 38 m^2 : 6 = ?
   ѓ) 4 m 7 dm 5 cm : 5=?
3. Еден брод, што сообраќа на одредена линија, 6 тури ги прави за 19 дена и 6 h. За колку време прави една тура?
4. Колку метри се потребни за да се направи една кошула, ако за 62 кошули се потребни 161 m 2 dm платно?

IV.14. ИЗБИРАЊЕ ПРИМЕРОК НА ИСТРАЖУВАЊЕ

Со цел да разгледаме некој проблем во врска со работа со податоци основно е најпрво да го разгледаме проблемот што всушност точно сакаме да испитуваме, а потоа да пристапиме кон собирање на податоци, а на крај нивна анализа. Значи, еден од основните предуслови за успешна работа со податоци е да знаеме точно кои се целите на нашето истражување. Потоа, при собирањето на податоците многу е важно да извршиме правилна селекција на податоците. Селектирањето, всушност, подразбира одлучување кој податок е важен и ако е важен да го впишеме во табелата, а ако не е важен, тогаш го занемаруваме.

Ако притоа испишуваме важни податоци, тоа може да не ја даде вистинската слика за она што испитуваме. Значи, постои можност ние самите да влијаеме на исходот, а со тоа да ја нарушиме објективноста на испитувањето. Множеството чии елементи се наша цел на испитување се нарекува **примерок**.

Доколку треба да собереме мал број на податоци, тогаш најдобро е да ги земеме во предвид сите релевантни податоци, без исклучок. На пример, ако треба да најдеме просечен успех по сите предмети истовремено на учениците од VIa, тогаш формираме листа од сите можни оценки (за секој ученик по секој предмет). Потоа, сите овие оценки во листата на податоци влегуваат рамноправно. Во овој случај примерокот го сочинуваат сите ученици од VIa.

На пример, можеме да испитуваме дали во одделенијата има повеќе девојчиња или момчиња, со кој спорт најчесто се занимаваат учениците во основното училиште, причините за глобално затоплување, влијанието на Месечината врз Земјата итн.

Собраните податоци неопходно е да ги групираме по различни основи. На пример, ако сакаме да ги испитаме причините за сообраќајните незгоди во текот на една година тогаш испитувањата ги впишуваме во повеќе графови, како на пример: дали возачот бил под дејство на алкохол, дали причината е поради неисправноста на возилото или поради невнимателност, дали незгодата се случила дење или ноќе, дали се случила за време на дожд, снег или магла, возраст на возачот и слично.

Пред самиот почеток на истражувањето ние можеме да избереме една **претпоставка** и со самото истражување сакаме да ја потврдиме нашата претпоставка или да ја негираме. На пример, при испитување на причините за сообраќајните незгоди наша претпотавка може да биде дека сообраќајните незгоди се случуваат најчесто поради човечкиот фактор (алкохолизирана состојба, невнимателност и сл.) а помалку од неисправност на возилото. После направените анализи од истражувањето може да се донесе **заклучок** дали нашата претпоставка била добра или не.

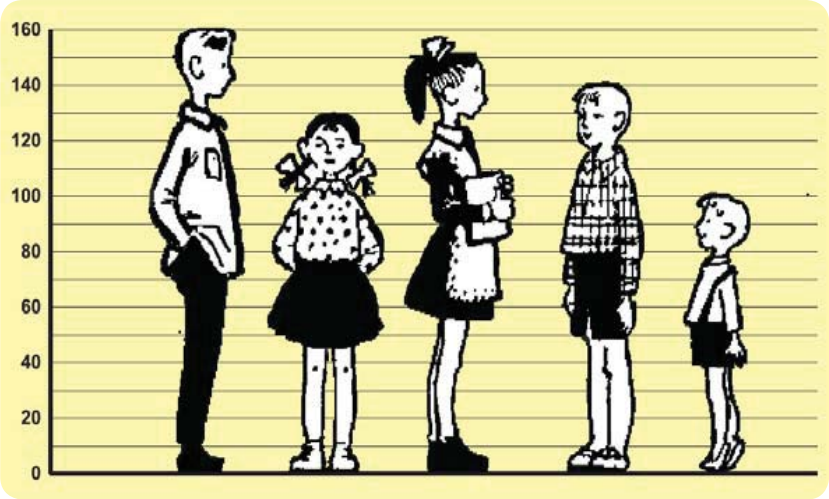
ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои се основните предуслови за правилно прибирање и селектирање на податоци?
2. Направи листа од податоци на 100 фрлања на коцка. Податоците чувај ги за подоцна да ги анализираш.
3. Во текот на една седмица, запишувај за секој ден поодделно колкава сума си потрошил за своите лични потреби (ужинка, тетратки, моливи, блок и слично). Дали ќе ја запишеш сумата на пари потрошени за заедничка потрошувачка?
4. Направи листа на податоци на фрлање на монета. Запиши колку пати ќе падне парата од една страна, а колку пати од другата. Што забележуваш?

IV.15. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ПОДАТОЦИ ОД ТАБЕЛА НА РАЗНИ ВИДОВИ ДИЈАГРАМИ

За да биде споредувањето на различните величини, множества или други податоци извршено уште попрегледно, покрај составување на табели користиме и цртежи, таканаречени **дијаграми**.

Пример 1. Нека е дадена табелата од претходното поглавје за висините на учениците (табела 1). Со прикажување на овие величини графички (цртеж 5), уште полесно може да се одговорат прашањата како што се: кој ученик е највисок, кој ученик е најнизок, дали Марија е повисока од Петар и др.



Цртеж 5

Дијаграмите можат да бидат главно **столбести** или **секторни**.

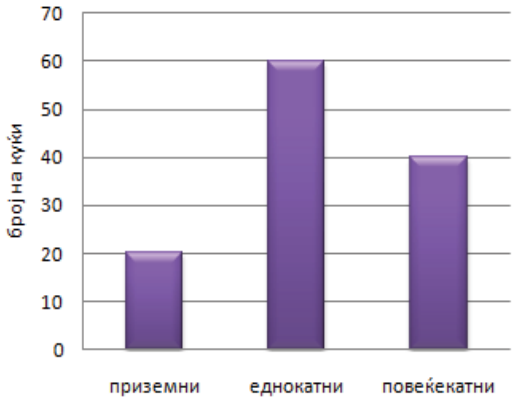
Како ги цртаме и користиме дијаграмите ќе покажеме со примери.

Пример 2. Во горните одделенија на едно основно училиште учеле 350 ученици. Од сите ученици на крајот на учебната година покажале: 14/100 одличен успех, 26/100 многу добар успех, 42/100 добар успех и 18/100 доволен успех. Да го претставиме успехот на учениците со помош на столбест дијаграм.

Решение. На столбестиот дијаграм величините или податоците што се изразени во стоти делови ги преставуваме со правоаголници (столбови) со иста ширина, а високи по неколку милиметри, колку што е бројот на стотинките. Така, 1/100 обично го претставуваме со 1 mm.

Бидејќи ширината на правоаголниците (столбовите) е иста (цртеж 6), затоа големината на податоците, што се претставени со правоаголниците на столбестиот дијаграм ќе зависи само од нивната висина.

Цртеж 6



Цртеж 7

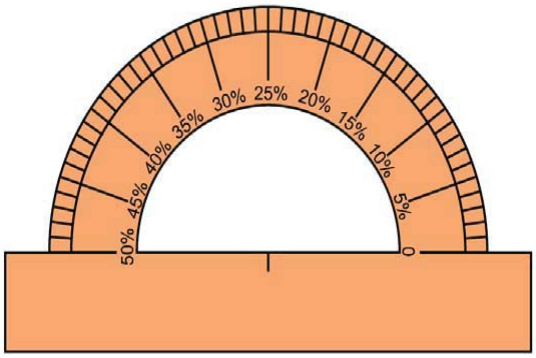
Пример 3. Во едно село има 120 куќи. Од нив 20 куќи се приземни, 60 се еднокатни и 40 се повеќекатни. Бројот на куќите по групи да го претставиме со столбест дијаграм.

Решение. За таа цел цртаме три столба, со иста ширина и со висина, на секој толку милиметри колку што куќи има во соодветната група. Така, првиот столб ќе има висина 20 mm, вториот 60 mm, а третиот столб ќе биде со висина 40 mm. Ако секоја куќа би ја претставувале со столб висок 2 mm тогаш висината на трите столба на цртеж 7 би се зголемила 2 пати.

Пример 3. Едно земјоделско стопанство од целата обработлива површина засеало: со пченица 38/100, со шеќерна репка 25/100, со ориз 22/100, а останатата површина со други култури. Засеаните површини со одделните земјоделски култури да се претстават со дијаграм.

Решение. Засеаните површини можеме да ги претставиме со столбест дијаграм, но во овој случај одделните делови од целата обработлива површина на стопанството ќе ги преставиме со соодветни кружни исечоци (сектори) од еден ист круг (цртеж 8). Тој дијаграм се вика **секторен дијаграм**. Него го цртаме со помош на **процентен агломер** (цртеж 9). Притоа ознаката „%“ за процент означува исто што и стоти дел. На пример, 15%=15/100 итн.

Цртеж 8



Цртеж 9

За да го нацртаме секторниот дијаграм, претходно цртаме еден круг со произволен радиус (цртеж 8). Во кругот повлекуваме произволен почетен радиус, а потоа врз кругот го поставуваме процентниот агломер, така што неговиот центар да се поклопи со центарот на кругот, а нулевиот радиус на агломерот да го поклопи почетниот радиус на кругот. Кога е така поставен процентниот агломер, со молив ја одбележуваме точката во која ќе падне делот 38% од скалата на процентниот агломер. Потоа, таа точка ја соединуваме со центарот на кругот, па го добиваме кружниот исечок, чија плоштина претставува 38% од плоштината на целиот круг. На сличен начин ги одредуваме и кружните исечоци 25% и 22%.

Ако го измериме преостанатиот кружен исечок, што одговара на делот посеан со други култури, ќе видиме дека тој кружен исечок претставува 15% од плоштината на целиот круг.

Податоците од претходниот пример 2 може исто така да бидат претставени и со секторен дијаграм. Но, за тоа е потребно претходно броевите на приземните куќи (20), еднокатните куќи (60) и повеќекатните куќи (40) да се изразат во проценти од вкупниот број (120) куќи во селото.

Процентен агломер, кој е неопходен за цртање на секторните дијаграми можете сами да направите од картон.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е дијаграм и што претставуваме со него?
2. Какви дијаграми познаваш?
3. Семејниот месечен буџет на Стојанови го сочинуваат: заработката на таткото 45%, платата на мајката 30%, пензијата на дедото 20% и стипендијата на синот 5%. Претстави ги на секторен дијаграм вкупните месечни приходи на семејството Стојанови.
4. Од 200 kg бакарна руда добиени се 32 kg чист бакар. Претстави го тоа со секторен дијаграм.
5. Едно земјоделско стопанство има 112 ha обработлива површина. Од неа посеани се 45% со пченица, 28% со јачмен, 20% со пченка, а останатиот дел со памук. Претстави ги посеаните површини со секторен и столбест дијаграм.
6. Плоштината на целата земјина топка изнесува 510 милиони km^2. Од северната земјина полутопка само 39% е копно, а останатиот дел е под вода, а од јужната полутопка само 19% е копно, а останатиот дел е под вода. Претстави ги на одделни секторни дијаграми плоштините на копното и водата за целата земјина топка, за секоја земјина полутопка одделно.

IV.16. АНАЛИЗА НА ПОДАТОЦИ ДОБИЕНИ ПРИ ИСТРАЖУВАЊЕ

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Во текот на осум дена секој ден напладне температурата на воздухот е мерена и изнесувала: 2°C, 3°C, 1°C, 4°C, 6°C, 1°C, 0°C, 5°C. Колкава била средната вредност на температурата тие денови?

Решение. За да ја решиме задачата, ќе ги собереме износите на 8-те дневни температури и добиениот збир ќе го поделиме со бројот 8, т.е. $\frac{2+3+1+4+6+1+0+5}{8}=\frac{22}{8}=2,75$. Значи,

температурата на воздухот во текот на 8-те дена имала **средна** или **просечна вредност** 2,75°C.

За вака определената средна вредност на температурата 2,75°C, поточно за бројот 2,75 велиме дека е аритметичка средина на броевите 2, 3, 1, 4, 6, 1, 0 и 5.

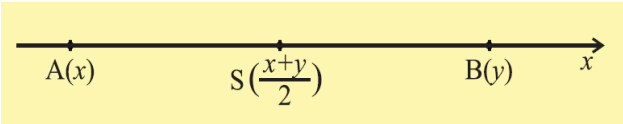
Аритметичка средина на два или повеќе броеви се вика количникот од нивниот збир и бројот на собироците.

На пример, аритметичка средина на броевите a, b и c се вика количникот $\frac{a+b+c}{3}$.

Пример 2. На бројната оска точките A и B нека имаат координати A(x) и B(y) (цртеж 11). Да се одреди координатата на средишната точка S на отсечката AB.

Решение. Средишната точка S на отсечката AB има координата, што е еднаква на аритметичката средина од координатите на крајните точки на отсечката AB, т.е.

$$S=(\frac{x+y}{2})$$



Пример 3. Пет ученици се натпреварувале во дисциплината скок во далечина и ги постигнале следните резултати: Миле скокнал 1,6 m, Борко 2,05 m, Зоран 1,85 m, Павле 1,55 m и Стојан 1,9 m. Да направиме ранг листа од тој натпревар и да се најде аритметичката средина.

Решение. Резултатите од секој натпревар обично ги прикажуваме на табела или со дијаграм. Табелата на која натпреварувачите се определени според нивниот пласман: на прво, второ, трето,... место, се вика ранг листа. Во нашиот случај тоа е следна:

табела - ранг листа.

Бр.	Натпреварувач	Скок
1	Борко	2,05 m
2	Стојан	1,90 m
3	Зоран	1,85 m
4	Миле	1,60 m
5	Павле	1,55 m

Аритметичката средина е $\frac{2,05+1,9+1,85+1,6+1,55}{5}=1,79$. Значи просечно овие ученици скокале по 1,79m во далечина.

Во општ случај ако имаме n елементи $a_1, a_2, ..., a_n$, тогаш нивната аритметичка средина ќе биде:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1 Одреди ја аритметичката средина на броевите:
а) 18,27 и 36; б) 24, 34, 40 и 56; в) 0 и 50.

2 Во едно одделение има 30 ученици од кои 8 од нив се одлични, 10- многу добри, 9 - добри, а останатите доволни, по предметот математика. Најди го просечниот успех на ученици во тоа одделение по предметот математика.

3 Во периодот март - јуни во Пелагонија имало врнежи: во месец март 52 l на 1 m^2, во месец април 36 l на m^2, во месец мај 46 l на m^2 и во месец јуни 23 l на m^2. Одреди го просечниот месечен износ на врнежи во тој период.

4 Учениците Петар, Весна, Ирина и Иван на крајот на учебната година го покажале следниот успех по одделни предмети:

ученик	мак. јаз.	анг. јаз.	мат.	ист.	геог.	биол.	лик. вос.	физ вос.	муз. вос.
Петар	4	3	3	4	5	4	5	4	2
Весна	4	5	3	4	3	5	4	4	4
Ирина	5	5	5	4	5	4	5	4	3
Иван	3	4	4	3	4	5	3	5	3

Одреди го средниот успех на секој ученик одделно и рангирај ги според покажаниот општ успех.

5 Еден возач поминал 3 часа во возење. Првите два часа возел со брзина 80 km на час, а третиот час возел со брзина 50 km на час. Одреди колкав пат поминал тој и со каква просечна брзина возел?

6 Во текот на шест дена во неделата една продавница продавала различни количества брашно на ден и тоа: 86 kg, 72 kg, 102 kg, 95 kg, 98 kg, 111 kg. Одреди ја просечната дневна потрошувачка на брашно во продавницата.

7 Имаме три вида гроздова ракија со различна јачина и тоа: од 40°, 45° и 54° јачина. Ако измешаме 3 еднакви делови од 40° ракија, со 2 такви дела од 45° ракија и 1 таков дел ракија со јачина 54°, ќе добиеме нов вид ракија. Колкава јачина ќе има новодобиениот вид ракија?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1 Која е основна единица мерка за маса? Што е грам?

2 Претвори ги именуваните броеви во бараната единица мерка.
а) 700 000 mm = ... hm
б) 270 000 dm = ... km
в) 400 000 mm = ... hm

3 Претвори ги именуваните броеви во бараната единица мерка:
а) 840 000 *cl* = ... *hl*
б) 830 000 *cl* = ... *dkl*
в) 7 200 *ml* = ... *dl*

4 Претвори ги едноимените броеви во повеќеимени:
а) 4 000 502 mm = ... km .... dm .... mm
б) 7023 cm = ...dkm .... dm .... cm
в) 7240 m = ... km .... m

5 Претвори ги едноимените броеви во повеќеимени:
а) 4 063 *dl* = ... *hl* .... *l* .... *dl*
б) 1054 *cl* = ... *l* .... *dl* .... *cl*
в) 2 402 *dl* = ... *dkl* .... *dl*

6 Претвори ги едноимените броеви во повеќеимени:
а) 32 004 dkg = ... kg .... dkg
б) 14 001 g = ... kg .... g
в) 8 204 cg = ... g .... cg

7 Изврши ги операциите со следните повеќеимени броеви:
а) 6 dkm 8 m 5 cm – 3 m 4 dm 2 cm = ?
б) 6 *dkl* 6 *dl* + 7 *dkl* 2 *cl* – 8 *l* 3 *cl* = ?
в) $64° 30' - 52° 42'' + 2° 34' = ?$

8 Планетата Сатурн го обиколува Сонцето за 10 769 дена 5 h 16 min и 31 s. Изрази го тоа време во секунди!

9 Една цевка што исфрла 8 литра во една секунда наполнува еден базен за 12 h 28 min 24 s. Колку литри собира базенот?

10 Во еден триаголник познати ни се аглите: $\alpha = 28° 16' 42''$ и $\beta = 86° 32' 24''$. Колку изнесува третиот агол γ ?

11 Торта со волумен 4 dm^3 32 cm^3 910 mm^3 раздели ја на 5 еднакви дела.

12 Од 35 ученици, 12 се со одличен успех , со многу добар и добар успех има ист број на ученици, 6 се со доволен успех и 1 ученик е со недоволен успех. Претстави го успехот на столбест дијаграм и најди го просечниот успех на овие 35 ученици.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1 Како доаѓаме до број со мерење?

2 Кои величини ги мериме? Набroj неколку?

3 Што значи да се измери дадена величина?

4 Која е основна единица мерка за должина?

5 Кажи ги повисоките и пониските единици мерки за плоштина! Каков е нивниот однос?

6 Кажи ги повисоките и пониските единици мерки за волумен! Каков е нивниот однос?

7 Која е основна единица мерка за течност? Што е литар?

8 Набroj ги повисоките и пониските единици мерки за маса. Каков е нивниот однос?

9 Претвори ги следните именувани броеви во бараните единици:

а) 12 m = ... dm
б) 27 m = ... mm
в) 8 km^2 = ... m^2
г) 47 dm^2 = ... cm^2
д) 3 kg= .... dkg
ѓ) 8 hg = ... kg
е) 72 dm^3 = ... cm^3
ж) 4 cm^3 = ... mm^3
з) 6 dkl = ... *cl*
ѕ) 28 *hl* = ... *dl*

10 Претвори ги повеќеимените броеви во едноимени:

а) 4 m 6 dm 7 cm =.... cm
б) 3 km 2 dkm 8 m =.... m
в) 3 a 5 dm^2 7 cm^2 = ... cm^2
г) 36 ha 8 m^2 = ... m^2
д) 3 *hl* 8 *dkl* 2 *l* = ... *l*
ѓ) 14 *l* 5 *cl* = ... *cl*
е) 8 dkg 4 g 2 cg = ... cg
ж) 4 тони 6 kg = ... kg

11 Претвори ги едноимените броеви во повеќеимени:

а) 25 006 cm^2= .... m^2.... dm^2.... cm^2
б) 50 007 dm^2 = ... m^2 .... dm^2
в) 540 025 dm^3 = ... m^3 .... dm^3
г) 8 000 042 dm^3 = ... m^3 .... dm^3
д) 524 *dl* = ... *hl* .... *dkl* .... *l*
ѓ) 208 *dl* = ... *dkl* .... *dl*
е) 348 g = ... hg .... dkg .... g
ж) 4 058 dg = ... hg .... g .... dg

12 Република Македонија има плоштина 25 713 km^2, изрази ја таа плоштина во кв. метри!

13 24,3 *hl* вино треба да се раздели подеднакво во 30 буриња. По колку литри ќе има во секое од тие буриња?

14 Која е основна единица за време?

15 Кои се повисоките и пониските единици за време! Каков е нивниот однос?

16 Колку дена има во годината?

17 Колку секунди има во денот?

18 Претвори ги следните повеќеимени броеви во едноимени:
а) 17 дена 8 h 35 min = ?
б) 6 дена 13 h 45 min 20 s = ?
в) 12 дена 5 h 30 s = ?

19 Претвори ги едноимените броеви во повеќеимени: а) 5625 s; б) 82 430 min; в) 1000000 s; г) 12 427 h; д) 9745 дена; ѓ) 24 308"; е) 127 009"; ж) 8420'.

20 Изврши ги операциите со повеќеимените броеви:
а) 8 m 7 dm 3 cm + 14 m 8 cm + 3 m 5 dm 6 mm = ?
б) 15 m^2 4 dm^2 8 cm^2 – 24 dm^2 3 cm^2 + 90 mm^2 = ?
в) 9 m^3 34 dm^3 + 560 dm^3 49 cm^3 + 824 mm^3 = ?
г) 4 *l* 8 *dl* + 7 *l* 2 *cl* – 2 *l* 4 *dl* 8 *cl*= ?
д) 6 kg 4 hg 2 g – 6 dkg 6 g 2 dg + 13 kg = ?
ѓ) 12 h 38 min + 36 h 54 s = ?
е) 1 год 3 дена 15 h – 23 дена 20 h = ?
ж) 20° 2' 2" + 34° 18' 8" – 42° 50"= ?

21 Пресметај ги следните производи:
а) 5 m 4 cm · 8 = ?
б) 8 ha 12 m^2 · 27 = ?
в) 12 m^3 8 dm^3 · 15 = ?
г) 3 *hl* 7 *l* 5 *dl* · 28 = ?
д) 8 kg 6 g 4 dg · 34 = ?
ѓ)2 h 3 min 24 s · 12 = ?
е) 3 год 8 мес 13 дена · 7 = ?
ж) 8° 34' ·14= ?

22 Пресметај ги следните количници:
а) 18 km 18 m : 14 = ?
б) 172 m^2 68 dm^2 : 12 = ?
в) 30 m^3 60 dm^3 : 15 = ?
г) 5 *hl* 10 *l* : 25 = ?
д) 54 kg 90 g : 18 = ?
ѓ) 7 дена 15 h 30 min : 15 = ?
е) 3 год 4 месеци 3 дена : 2 = ?
ж) 29° 12' 6" : 7 = ?

23 Часовникот ни отишол напред (избрзал) 12 min и 38 s. Ако тој покажува 14 часот 46 min 20 s, колку е точното време?

24 Таткото имал 33 год 2 мес 18 дена, кога му се родил син. Колку години има таткото, ако сега син му има 14 год 11 мес 23 дена?

25 Александар се оженил кога имал 27 год 8 мес 20 дена. Неговата жена имала тогаш 22 год 10 мес 25 дена. Колку години ќе има тој, кога жена му ќе наполни 50 години, а колку години ќе има жена му кога тој ќе наполни 60 години?

26 Еден литар морска вода има маса 1 kg 3 dkg 2 g, колку е масата на 6 *l* морска вода?

27 Ако еден часовник дневно заостанува по 3 min 15 s. Колку ќе заостане за 12 дена?

28 Во еден триаголник аголот α изнесува 54° 27' 14". Аголот β е за 5° 50" поголем од α. Да се одредат аглите β и γ на тој триаголник!

29 Во правоаголен триаголник острите агли се разликуваат еден од друг за 12° 42' 16". Колку изнесува секој од нив?

30 Една операција, што почнала во 14 часот 50 минути, завршила во 16 часот и 25 минути. Колку траела таа?

31 Часовникот ни заостанува 25 секунди на ден, за колку дена тој ќе заостане 1 час?

32 Што е истражување, а што е примерок?

33 100 тениски топчиња се сместени во 4 кутии. Во првата кутија има 10 топчиња, во втората 35 топчиња и во третата 25 топчиња. Престави ги овие податоци во секторен и столбест дијаграм.

34 Во текот на една седмица семејството Петревски потрошило 750 денари во понеделник и среда, 683 денари во вторник, во четврток 2 пати повеќе од вторник, во петок 507 денари, а во сабота и недела вкупно 2360 денари. Одреди ја просечната дневна потрошувачка за таа седмица на семејството Петровски.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

ТЕМА I - ПРИРОДНИ БРОЕВИ

I.1.

I.1.1.

1. Глутница. **2.** Елементи од множеството. **3.** Припаѓа со $\in$, не припаѓа со $\notin$. **4.** Да. **5.** Бројни множества. **6.** Да. **7.** $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. **8.** Физика, хемија итн. **9.** Да.

I.1.2.

2. Да. **3.** Не.

I.1.3.

2. Да. **3.** Не. Член е само бројот 5. **4.** Еден член.
5. а) $P = \{$граѓани $\mid$ Години (граѓани) $\geq 18\}$, б) $P = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ и $9 < x < 100\}$,
в) $P = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ и $1 \leq x \leq 6\}$, г) $P = \{x \mid x, k \in N$ и $x = 2k\}$.

I.2.

I.2.2.

1. Да. **2.** Не. **3.** $A \subseteq B$. **4.** Не. **5.** Да. **6.** Да. Тоа се: $\{1, 3\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ и . **7.** а) Не. б) Не.

I.2.3.

2. Графички цртежи.

I.2.4.

2. Да. **3.** Точни се: а), в), д). **4.** а) Да, б) Да, в) Не, г) Не. **5.** Да.

I.2.5.

1. Дефиниција 2. Со знакот $\sim$. $V \sim R$. **2.** Да. **3.** Не. **4.** Не.

I.3.

2. Не. **3.** Да.

I.4.

I.4.1.

1. Дефиниција 1. Со знакот $\cap$. **2.** а) $A \cap B = \{\$, \&\}$, б) $C \cap B = \{$а, б, в$\}$, в) $M \cap K = \{1, 3, 5\}$,
г) $T \cap P = \varnothing$, д) $A \cap B \cap C = \{$з, а, ј$\}$. **3.** Дефиниција 2. **4.** Не. Пресекот не е $\varnothing$. **7.** $\varnothing$.

I.4.2.

1. Дефиниција 3. Со $\cup$. **2.** а) $A \cup B = \{4, 5, \square, n, p, 7, \Diamond\}$, б) $B \cup C = \{4, p, 7, \Diamond, \circ, n\}$, в) $A \cup B \cup C = \{4, 5, \square, n, p, 7, \Diamond, \circ\}$. **3.** B. **4.** Множество на природни броеви. **5.** A. **6.** Конечно множество. **7.** Бесконечно множество.

I.4.3.

1. Дефиниција 4. Со \. **2.** а) $A \setminus B = \{d, 2\}$, б) $B \setminus A = \{1, a\}$, в) $A \setminus (A \setminus B) = \{e, r, 4\}$. **3.** Множество на парни броеви. **4.** Да. **5.** Конечно множество. **6.** $\varnothing$.

I.5.

I.5.1.

1. Дефиниција 1. **2.** Не. **3.** b е прва, a е втора координата. **4.** Не.

I.5.2.

1. Дефиниција 2. Со знакот $\times$. **2.** а) $A \times B = \{(a, 4), (a, c), (2, 4), (2, c), (c, 4), (c, c)\}$, б) $B \times A = \{(4, a), (4, 2), (4, c), (c, a), (c, 2), (c, c)\}$. **3.** $A = B$. **4.** $B^2 = \{(2, 2), (2, €), (2, e), (€, 2), (€, €), (€, e), (e, 2), (e, €), (e, e)\}$, $D(B^2) = \{(2, 2), (€, €), (e, e)\}$. **5.** $A = \{a, x\}$, $B = \{x, c\}$.

I.6.

4. Бројот 4. **5.** Да. **6.** Не. **8.** Не. **9.** а) $<$, б) $>$, в) $=$, г) $<$. **12.** 2, 4, 6.

I.6.1.

1. а) a, б) 0, в) 5, г) 0, д) a, ѓ) 0, е) $x \neq 0$, ж) 0. **2.** Дефиниција 5. **3.** Нула. **4.** Не.

I.7.

1. Да. **2.** За 1. **3.** Да. **5.** а) 5 не е еднакво на 9. б) 7 е поголемо од 6, а помало од 10.

I.8.

1. Не. **2.** 31 502 058. **3.** 0. **4.** Седумстотини деведесет и три милиони четиристотини шеесет и две илјади триста и еден.

I.9.

1. Деветти ред. **2.** 10 милијарди. **3.** Поголем. **4.** Нема од четврти ред, 3 единици од трет ред, 4 единици од втори ред и 6 единици од прв ред.

I.10.

1. Да. Основа е бројот 2. **2.** Италијанско потекло. Означува број еднаков на илјада илјади единици. **3.** Затоа што основа е бројот 10. **4.** Трилион. **5.** Француско потекло. Означува број еднаков на илјада милиони единици.

I.10.1.

1. Арапските цифри. **2.** Да. **3.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. **4.** 1.

I.10.2.

1. Стотките. **2.** Вредноста на цифрата, што ја има со својата местоположба во бројот. **3.** Месната вредност на цифри што се повторуваат во: 3083-единици и илјади, 4225-десетки и стотки, 212-стотки и единици, 555-стотки десетки и единици. **4.** Вредноста на цифрата што ја има кога таа ни означува едноцифрен број.

I.10.3.

1. 25=XXV, 39=XXXIX, 49=XLIX, 88=LXXXVIII, 100=C, 101=CI, 480=CDLXXX, 208=CCVIII, 999=CMXCIX. **2.** DCCCI=801, CMIX=909, CCXCI=291, DLI=551. **4.** II.VIII. MCMIII. **5.** Цифрите V, L и D не смеат да се повторуваат.

I.11.1.

1. Дефиниција 1.

I.11.2.

1. Дефиниција 2. **2.** 21 - намаленик, 4 - намалител, 17 - разлика. **3.** а) 9 180 937, б) 107 829. **4.** Не.

I.11.3.

1. Да. **2.** Да. **3.** Не. **4.** Да. **5.** $m = n$.

I.11.4.

1. а) $4 \cdot 7$ и 7^4 б) $3 \cdot b$ и b^3 в) $a^5 + c^3$. **2.** а) 31, б) 24. **3.** а) Да, б) Не, в) Не.

4. $x^4 \in \{0, 1, 14, 81\}$. **5.** Правилно е пополнета. **6.** а) Точно, б) Неточно, в) Точно, г) Неточно.

I.11.5.

1. $c : d$. **2.** k - деленик, r - делител и v - количник. Да. **3.** а) 3, б) 45, в) 697. **4.** Не. Не. **5.** 2. **6.** Не.

I.12.

1. а) 280, б) 210. **2.** а) 500, б) 330. **3.** а) 540, б) 470, в) 500. **4.** Збирот ќе се зголеми за 70. **5.** Збирот ќе се зголеми за 22. **6.** Збирот ќе се намали за 76. **7.** а) 1242, б) 2300, в) 1776, д) 2830. **8.** а) додаваме 650, б) додаваме 1125.

I.13.

1. а) 80, 90, 100, 120, б) 60, 50, 45, 30. Разликата се: а) зголемува, б) намалува. **2.** Разликата ќе биде: а) 140, б) 70. **3.** а) 100, 90, 60, 50, б) 140, 170, 200, 210. Разликата се: а) намалува, б) зголемува. **4.** Разликата ќе биде: а) 50, б) 100. **5.** Разликата ќе биде: а) 150, б) 28. **6.** Разликата ќе биде: а)150, б) 100, в) 105, г) 175. **7.** Разликата ќе биде: а)30, б) 30. **8.** а) 257, б) 640, в) 552, г) 393, д) 454, ѓ) 1195.

I.14.

1. а) 60, б) 10. **2.** а) 200, 30, 50, 70, б) 72, 48, 36, 24. Производот се: а) зголемува, б) намалува. **3.** Производот ќе биде: а) 180, б) 15. **4.** Производот ќе се: а) зголеми 3 пати, б) намали 2 пати, в) зголеми 5 пати. **5.** а) 90, б) 780, в) 420, г) 350, д) 4000. **6.** а) 140, б) 1930, в) 1600, г) 12 300, д) 38 000, ѓ) 177 000. **7.** а) 1600, б) 1430, в) 2100, г) 11 000, д) 20 000. **8.** Треба да го зголемиме 2 пати.

I.15.

1. а) 60, 90, 120, 180, б) 15, 10, 6, 5. Количникот се: а) зголемува, б) намалува. **2.** Количникот ќе биде: а) 18, б) 2. **3.** а) 6, 4, 3, 2, б) 6, 9, 12, 18. Количникот се: а) намалува, б) зголемува. **4.** Количникот ќе се: а) намали 4 пати, б) зголеми 5 пати. **5.** Количникот ќе се: а) зголеми 10 пати, б) намали 6 пати. **6.** Количникот ќе биде: а) 90, б) 9, в) 6, г) 90. **7.** Количникот ќе биде: а) ист (6), б) ист (6). **8.** а) 3, б) 3, в) 3, г) 3, д) 4, ѓ) 5, е) 5, ж) 40.

I.16.

4. а) 29, б) 232, в) 17949, г) 249, д) 36, ѓ) 0.

I.17.

1. а) 163, б) 172, в) 13, г) 380, д) 155, ѓ) 514. **2.** 1502. **3**. 10. **4.** 48. **5.** Првиот е 76, вториот е 43 и третиот е 31. **6.** а) 125, б) 820, в) 108, г) 157, д) 430, ѓ) 2100. **7.** а) 238, б) 75, в) 3, г) 19, д) 36, ѓ) 165. **8.** 605. **9.** 356. **10.** а) 6, б0 25, в) 7, г) 40, д) 25, ѓ) 15. **11.** 15. **12.** 2370. **13.** а) 742, б) 6560, в) 30, г) 705, д) 1496, ѓ) 272272. **14.** 7038. **15.** 6641. **16.** 40. **17.** 721. **18.** а) 20, б) 60, в) 10, г) 6, д) 2, ѓ) 3. **19.** 15.

I.18.

2. б) и в). **3.** Сите. **4.** Да. **5.** Да. Делив е и со a.

I.19.

1. Да. **2.** Не. **3.** Да. Да. **4.** Да. **5.** а) Да, б) Да, в) Не, г) Да, д) Да, ѓ) Да, е) Не. **6.** Со сите.

I.20.

I.20.1.

2. Да. **3.** а) и г). **4.** Да. **5.** Ако k е делив со 2.

I.20.2

2. Да. **3.** Со 10 е делив а), со 5 е делив в) со ниту еден од нив б). **4.** Што завршуваат на 5.

I.20.3.

2. а). **3.** Не. Непарна. **4.** Да.

I.20.4.

2. Со 3 се деливи 246 801, 918, 123 456, со 9 е делив 918, а со ниту еден од нив 12 035 054

и 322 788 100. 3. 1026, 7242, 111, 10 521, 100 401, 2223, 555, 5022. 4. 2025, 11 277, 2556, 8001. 5. Треба да е парен број со збир на цифри делив со 3. 6. Треба да е n делив со: а) 3, б) 9.

I.21.

2. Бројот 2. **3.** Бројот 9. **4.** Прости се: 7, 11, 17, 23, 29. Сложени се: 6, 8, 9, 12, 14, 16, 22. **5.** Една единица (бидејќи сите прости броеви се парни, а сите парни броеви се сложени). **6.** 2, 3, 5,7 ,11 ,13 ,17 ,19 ,23 ,29 ,31 ,37 ,41 ,43 , 47.

I.22.

2. $4=2^2$, $6=2\cdot3$, $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\cdot5$, $12=2^2\cdot3$, $15=3\cdot5$, $16=2^4$, $18=2\cdot3^2$, $20=2^2\cdot5$, $21=3\cdot7$, $22=2\cdot11$, $24=2^3\cdot3$, $25=5^2$, $30=2\cdot3\cdot5$, $45=3^2\cdot5$. **3.** $102=2\cdot3\cdot17$ $315=3^2\cdot5\cdot7$, $824=2^3\cdot103$, $1248=2^5\cdot3\cdot13$, $3126=2\cdot3\cdot521$, $1764=2^2\cdot3^2\cdot7^2$, $2304=2^8\cdot3^2$, $4410=2\cdot3^2\cdot5\cdot7^2$, $7808=2^7\cdot61$. **4.** $10=2\cdot5$, $100=2^2\cdot5^2$, $1000=2^3\cdot5^3$, $10000=2^4\cdot5^4$, $100000=2^5\cdot5^5$, $1000000=2^6\cdot5^6$. **5.** а) 2, б) 5, в) 2 и 3, г) 3 и 5, д) 2 и 3.

I.23.

4. Бројот 1. **5.** а) 25, б) 3, в) 5, г) 21. **6.** а) 14 cm, б) 5 mm.

I.24.

6. а) 48, б) 270, в) 75, г) 144, д) 2, ѓ) 840, е) 70, ж) 60, з) 60, ѕ) 12, е) 81. **7.** а) НЗС (42, 56, 84) = 168 се содржи: 4 пати во 42; 3 пати во 55; 2 пати во 84, б) НЗС (45, 72, 120, 180) = 360 се содржи: 8 пати во 45; 5 пати во 72; 3 пати во 120; 2 пати во 180, в) НЗС (12, 18, 32) = 288 се содржи: 24 пати во 12; 16 пати во 18; 9 пати во 32. **8.** 30 cm. **9.** 2925 cm. **10.** 350 m.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. $A=\varnothing$. **2.** а) $A=B$, б) $B\subseteq A$. **3.** Ќе се зголеми 3 пати. **4.** а) Да се намали 3 пати, б) Да се зголеми 8 пати, в) Да се зголеми 4 пати. **5.** 16 часа. **6.** 150 дена. **7.** а) 5, б) 570, в) 142, г)135, д) 9, ѓ) 24. **8.** 371. **9.** 1, 3, 4, 12, 13, 156. **10.** 1, 3, 7, 9. **11.** 12. **12.** 3300.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

4. а) конечно, б) бесконечно, в) конечно, г) бесконечно, д) конечно. **5.** а) A={2,4,6,8}, б) B={1,3,5,7,9}. **6.** а) да, б) не, в) да, г) да, д) да. **7.** а) $A \setminus B=A$, б) $B\cap C=\{6\}$, в) $A\cup C=\{1,3,5,6,7,9\}$. **8.** $A\cap B=\{x\mid x\in \mathrm{N}$ и $3\le x\le 5\}$, $A\cup B=\{x\mid x\in \mathrm{N}$ и $x<7\}$. **11.** $A \setminus B=A$, $B \setminus A=B$. **12**.10. **13.** а) A, $\varnothing$, б) A, A, в) $\varnothing$, A. **14.** Не. **15.** а) $(A\cap B)\subseteq A$, б) $A\subseteq(A\cup B)$, в) $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$. **16.** а) Ако A е еквивалентно на B, б) Ако A е еквивалентно на B, в) $A\cap B=\varnothing$. **21.** 40, 994 521, 8010, 8000, 5 422 999. **22.** 79, 99, 111, 9999, 100 499. **27.** 50 020, 805 002, 20 000 305, 300 000 000, 5 000 020 000. **33.** а) a+1, б) a+3, в) a+5, г) a+n. **34. Доказ:** а) $(2n+1)+(2n+1)=2(2n+1)$ каде $(2n+1)$ може да го замениме со некоја друга променлива m, па

добиваме $2m$, б) $(2n+1)+2n=2(2n)+1=2k+1$, в) $2n+2n=2(2n)=2k$, $2n=k$ и $x \in \mathrm{N}$. **35.** а) парен, б) непарен, в) непарен, г) парен, д) непарен. **37.** а) $(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5) = 1000$, б) $(4\cdot 25)\cdot 7\cdot 6=4200$, в) $(125\cdot 8)\cdot 9\cdot 6=54\,000$. **38.** а) $9\cdot 5$, б) $5\cdot 3\cdot 5$, в) $3\cdot(8+7)$. **39.** $x=$ а) a-s, б) $c+3$, в) a-c, г) $28/4=7$, д) c/a, ѓ) $2\cdot b$. **63.** Прости се: 53 и 79, а сложени се 111 111, 1 294 398 и 432 815. **65.** 72.

ТЕМА II - ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

II.1.

1. Низ една точка можат да се повлечат бесконечно многу прави, а низ две точки една права. **3.** Најкратка е правата линија. **5.** а) Бесконечно, б) не, в) не. **6.** Не.

II.2.

3. а) $A \in a$, $A \notin b$, б) $B \in b$, $B \notin a$, в) $C \in a$, $C \in b$, г) $M \notin a$, $M \notin b$. **5.** Тие се паралелни. **7.** Една или три точки. **8.** а) Една права, б) три прави.

II.3.

3. 0. **4.** а) Не, б) да, в) не, г) не. **5.** M лежи помеѓу A и B, или M=A, или M=B. **6.** а) Да, б) да, в) да, г) не.

II.4.

2. Не. **6.** Се добиваат три отсечки и шест полуправи. **7.** а) Да, б) не. **8.** 3.

II.5.

4. а) Бесконечно, б) 2, в) бесконечно. **5.** а) Две полуправи, б) отсечка, в) две точки.

II.6.

2. Секое теме лежи на две страни, а секој крај лежи на една страна. **4.** Може, ако тие две страни не се соседни. **6.** а) Да, б) не, в) не.

II.8.

2. Не. **4.** а) Да, б) да, в) не, г) да.

II.9.

1. Центарот не припаѓа на кружницата. **4.** Центарот припаѓа на кругот. **6.** Тие се складни.

II.10.

3. Можат да се повлечат бесконечно радиуси и бесконечно дијаметри. **5.** Центарот на кружницата мора да лежи и на двата паралелни дијаметри, а тоа не е можно. Можат да се повлечат две паралелни тетиви. **8.** а) Во внатрешноста на помалата кружница, б) во

внатрешноста на поголемата кружница или на самата кружница, в) надвор од двете кружници, г) во внатрешноста на втората кружница или на неа, и надвор од помалата кружница или на неа, д) на помалата кружница. **9.** а) Да, б) да, в) да, г) да, д) не.

II.11.

3. а) Точката лежи во внатрешноста на кружницата, б) точката лежи на кружницата, в) точката лежи надвор од кружницата. **6.** Тангентите се паралелни бидејќи тие се нормални на дијаметарот.

II.12.

1. а) Тие се надвор една од друга, б) кружниците се внатре една во друга, в) тие се сечат, г) тие се концентрични, д) тие се допираат од внатре, ѓ) кружниците се внатре една во друга. **3.** а) кружница, б) кружница. **4.** Центрите лежат на една права, но се различни од дадената допирна точка. **5.** а) Две, една или ниту една точка. **6.** а) Бесконечно, една или ниту една точка, б) бесконечно, една или ниту една точка. **7.** 7 cm и 3 cm. **8.** а) Радиусите се 75 mm и 3 cm, а централното растојание е 25 mm, б) радиусите се 7 cm и 15 mm, а централното растојание е 15 mm. **9.** Централното растојание е еднакво на радиусот на двете кружници.

II.13.

7. б) Да, в) не.

II.14.

3. Аглите се прави. **4.** 4 пара напоредни и два пара накрсни агли. **6.** 6 пара. **7.** Прави агли.

II.15.

2. а) 90°, б) 180°, в) повеќе од 90°, а помалку од 180°. **5.** а) Остар, б) тап, в) конкавен, г) полн агол. **6.** 120°. **13.** $\angle AMB=90°$. **14.** Тап агол. **15.** 1°10' 34".

II.16.

5. Складни. **6.** 180°. **8.** Централниот агол е 90°, а кружниот лак е четвртинка од целата кружница.

II.17.

5. Прави агли. **6.** а) Не, б) не, в) да, г) не. **7.** Ако M лежи помеѓу A и B, и M лежи помеѓу C и D, тогаш аголот AMD е прав. Ако M не лежи помеѓу A и B, и M не лежи помеѓу C и D, аголот AMD е исто така прав. Во останатите случаи не може да се каже колкав е аголот AMD.

II.18.

5. а) Остар агол, б) остар агол, в) тап агол, г) прав агол, д) рамен агол.

II.19.

2. а) Тие се нормални, б) паралелни, в) паралелни или нормални. **4.** Правите a и c се паралелни. **5.** Не.

II.20.

1. Една. **3.** 0. **7.** Растојанијата се еднакви. **9.** Растојанијата се еднакви.

II.21.

1. Остар агол, тап или конкавен агол. **2.** Конкавен. **3.** Остар агол. **4.** а) Конкавен агол, б) остар или тап агол.

II.22.

1. а) $189°\,42'48''$, б) $200°\,41'50''$, в) $286°$, г) $261°19'$, д) $134°13'28''$. **2.** а) $18°$, б) $61°\,45'$, в) $34°\,50'8''$, г) $35°\,38'40''$, д) $135°\,31'4''$. **3.** а) $41°17'58''$, б) $63°\,4'$, в) $84°15'10''$, г) $115°\,15'35''$. **4.** $55°10'40''$. **8.** а) $154°\,30'$, б) $139°15'$, в) $119°\,35'$, г) $90°$. **9.** $22°\,30'$ и $67°\,30'$. **10.** $\alpha=66°$, $\beta=79°$, $\gamma=71°$; $\alpha=58°$, $\beta=239°$, $\gamma=71°$.

II.23.

4. 3. **5.** а) Не може, б) може. **6.** а) A,M,C,Q,S, б) A,C,Q, в) K,T,P, г) M,S.

II.24.

2. а) 1, б) 2, в) 3. **3.** а) 9, б) 14. **4.** Не. **6.** Не.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Празно множество, точка и отсечка. **2.** Точките M и S лежат од иста страна на правата AB. **4.** а) Правата ја сече кружницата, б) правата е тангента на кружницата, в) правата и кружницата немаат заеднички точки. **5.** $150°$. **6.** $70°$, $110°$ и $110°$. **8.** а) Комплементниот агол е $64°\,27'$, а суплементиот агол е $154°27'$, б) комплементниот агол е $47°\,45'$, а суплементиот агол е $137°\,45'$, в) комплементниот агол е $32°$, а суплементиот агол е $122°$. **10.** Не.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Полуправа, отсечка, точка и празно множество. **2.** Отсечка, точка и празно множество. **3.** Наведените точки исто така лежат во дадената рамнина. **4.** Да. **5.** Да. **7.** а) Не, б) не, в) да. **8.** 6. **9.** Ако правите p и q се различни, тие определуваат три дела, а ако се совпаѓаат тие определуваат два дела. **10.** а) 3, б) 3. **11.** 6. **12.** а) $a \parallel b$, б) $a \perp b$, в) $a \perp b$. **14.** а) $22°$, б) $112°$. **15.** а) Да, б) да. **16.** а) $60°$ и $120°$, б) $130°$ и $50°$, в) $36°$ и $144°$. **17.** Тие се паралелни. **18.** Една права. **20. Упатство:** Од точката C повлечи нормала кон дадената права. **21.** Бараното геометриско место на точки е права која минува низ дадената точка, освен дадената точка, и е нормална на дадената права. **23.** а) Кружниците се сечат, б) кружниците се сечат, в) кружниците се допираат од надвор. **24.** Тетивата AC е дијаметар. **25.** $\beta=40°$. **26.** а) $120°$, б) $90°$, в) $72°$, г) $45°$, д) $36°$.

ТЕМА III - ДРОПКИ. ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

III.1.

2. а) $\frac{7}{8}$, б) $\frac{3}{10}$, в) $\frac{10}{100}$, г) $\frac{23}{5}$, д) $\frac{4}{9}$. **3.** а) една деветинка, б) дванаесет петнаесетинки, в) три петинки, г) шест тринаестинки, д) седум десетинки. **5.** а) $\frac{10}{13}$, б) $\frac{b}{2\cdot b}$, в) $\frac{k-3}{k}$, г) $\frac{8}{x}$, $x \in N$ и $x > 8$.

III.2.

2. а) $\frac{3}{6}; \frac{9}{15}; \frac{6}{21}; \frac{15}{18}; \frac{9}{12}$, б) $\frac{8}{12}; \frac{12}{16}; \frac{32}{44}; \frac{36}{56}; \frac{20}{48}$. **3.** а) 3, б) 9, в) 7, г) 5. **4.** $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{9}$. **5.** 8; 25; 54; 63; 35; 5.

III.3.

3. $1\frac{3}{5}; 3\frac{2}{5}; 20\frac{1}{5}; 3\frac{2}{6}$. **4.** $\frac{16}{5}; \frac{13}{3}; \frac{19}{10}; \frac{20}{3}$. **5.** $1\frac{1}{4}; 2\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}; 1\frac{13}{54}; 2\frac{1}{3}; 3\frac{1}{48}$. **6.** а) $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, б) $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$; в) $\frac{6}{8}$. **7.** $\frac{a}{b} \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}; \frac{3}{6}\right\}$, $\frac{b}{a} \in \left\{\frac{4}{1}; \frac{4}{3}; \frac{6}{1}; \frac{6}{3}\right\}$. **8.** а) 3; 2; 4; 9, б) 4; 2; 6.

III.4.

2. а) $\frac{1}{2}, \frac{7}{5}, 2, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$. **3.** Во вториот ден ожнеал $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ од блокот, а во двата дена $\frac{5}{9}$ од блокот. **4.** $\left(\frac{5}{8} + x\right) \in \left\{1; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 2; \frac{9}{4}\right\}$.

III.5.

2. а) $\frac{4}{13}$, б) $\frac{2}{5}$, в) $\frac{1}{9}$, г) $\frac{5}{29}$. **3.** Точна е. Разликата се зголемува. **4.** $\frac{11}{13}$. **5.** а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{7}$, в) 0. **6.** а) Да,

б) Да. **7.** а) Разликата ќе биде: а) иста, б) иста.

III.6.

3. а) 12 цели и 9427 десето илјадити, б) 259 цели 29 илјадити и 542 милионити, в) 13 цели и 32 сто илјадити. **4.** а) 23,4522302; б) 134,00000009; в) 0,1; г) 0,1. Броевите под в) и г) се исти. **5.** 9.

III.7.

1. Да. **2.** Не. **3.** а) 301,7080; б) 301,708; в) Не може да се запише.

III.8.

2. Една точка.

III.9.

1. а) $2,5 = 2,50$; б) $0,35 = 0,3500$; в) $3,02 > 3,002$; г) $5,04 < 5,4$. **2.** а) $3,2 > 3,198$; б) $6,87 < 7$; в) $0,02 < 1,2$; г) $0,80 = 0,800$; д) $0,03 > 0,003$; ѓ) $37,2 > 36,6$. **3.** а) $4,23 < 5$; б) $3,18 < 3,28$; в) $0,12 > 0,119$; г) $0,998 < 1$; д) $0,001 < 0,01$; ѓ) $0,3 > 0,2995$. **4.** 0,054; 0,42; 0,428; 1,015; 1,02; 1,11; 2, 0009; 4; 8,3.

III.10.

2. а) 2313445,8; б) 452184; в) 0,248. **4.** а) 23,597424; б) 0,239524; в) 0,0000245. **5.** а) 0,62; б) 0,02; в) 135,211.

III.11.

2. а) 8,1001; б) 2,43; в) 265,145; г) 3,176931. **3.** 35 децимали.

III.12.

2. а) 60,1724; б) 222,18; в) 0,123. **4.** а) 61,7897; б) 21,4439; в) 0,0001.

III.13.

1. а) 18,1; б) 8,196; в) 16,65; г) 244,945; д) 1037,428. **2.** 4,73 kg. **3.** 18,23 kg. **4.** 15,55 km.

III.14.

1. а) 9,36; б) 0,7788; в) 0,89; г) 184,95; д) 43,1; ѓ) 6,258. **2.** 85,55 km^2. **3.** 0,95 m. **4.** 0,14 m. **5.** 1,88 kg.

III.15.

2. а) 1862,595; б) 222,5; в) 1016,026416. **3.** 476,6 g. **4.** 13 860 денари.

III.16.

2. а) 3,58264; б) 389,41266; в) 21,606174. **4.** 1866,0822 m^2.

III.17.

2. а) 9,804; б) 0,92453; в) 0,0185. **3.** 1,621 m.

III.18.

2. а) 6,013; б) 14,6; в) 49,2. **3.** 91. **4.** 2485 плочки.

III.19.

2. а) 0,375; б) 0,3125; в) 0,032. **3.** а) 4629,1875; б) 502,05; в) 18,56; г) 451,125. **4.** а)

$$\frac{1179671}{500};\ \frac{673}{5000};\ \frac{21531}{100};\ \frac{10663}{12500}.$$

III.20.

3. Бесконечни се: а) и в). Конечни се: б) и г). **4.** а) 243; б) 62; в) 1. **6.** Чисто периодични се: а) и г). Мешано периодични се: б) и в).

III.21.

3. а) 245,3215; б) 12,4; в) 1. **4.** Со точност до: а) 0,001; б) 0,00001; в) 0,1. **5.** а) 159,58 денари, б) 160 денари.

III.22.

3. $AB = 4$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 7$ cm, $NK = 9$ cm, $PM = 5$ cm. а)најмала должина има отсечката AB а најголема CD и NK, б) CD и NK. **4.** 218 km на час. Стрелката ќе се заврти во позитивна насока. Кога колата ќе застане, брзинометарот ќе покажува 0. **5.** 1,9 kg. **6.** Ако температурата се намали за 4°C, термометарот ќе покажува 13°C. **8.** а) броење, б) анкета, прашалник, в) набљудување со броење.

III.23.

4. а) 173778, б) од дома, в) се зголемил пристапот на интернет од образовни институции од 2008 до 2009, се намалил пристапот од јавните места од 2008 до 2009.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. а) 15,7764, б) 7,12898. **2.** а) 1,8, б) 3,754, в) 9,2, г) 0,5128, д) 5,52. **3.** Има вкупно 233,36 ha посеано со пченица и јачмен. **4.** 46,48. **5.** Нормата му е 120 m жица на смена. **6.** Поминал 0.25 од целиот пат (од неговото село од градот) кој изнесува 30 km. **7.** Во секоја вреќа има по 45 kg шеќер. **8.** 13 буриња. **9.** Поголема површина има парцелата со форма на правоаголник и тоа за 811,47 m^2 поголема од квадратната парцела. **10.** $8\frac{6}{8}$. **11.** $4\frac{5}{9}$. **12.** а) 2,544, б) 7,467.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) 30,875, б) 321,986, в) 16,398. **2.** 3,9 m. **3.** 8,675 тони. **4.** $3\frac{6}{8}$, $6\frac{1}{8}$. **5.** а) $540\frac{4}{7}$, б) $\frac{48}{61}$, в) 2.

6. а) 59,212,б) 7,574, в) 7,499, г) 476,113, д) 0,182. **7.** 6,4 kg. **8.** 3,35 m. **9.** 4,35 m. **10.** 12,4. **11.** Велосипедистите се на меѓусебно растојание од 765 m по 1530 sec. **12.** 4428. **13.** 0,0872 m^2. **14.** 469,5 m. **15.** Втората цевка дава 4 *l* во секунда. Првата цевка сама ќе го наполни базенот за 21600 sec, а втората цевка сама ќе го наполни базенот за 32 400 sec. **16.** Со тутун биле посеани 35,4 ha , со памук 44 ha и со пченица 19,1 ha. **17.** 534. **18.** 3,46 и 4,28. **19.** Од првото буре треба да префрлиме 0,7 *hl* во второто буре. Од второто буре треба да префрлиме 1.55 *hl* во првото буре. **20.** Има 575 дрвја јаболка, 352 кајсии и 323 сливи. **21.** Првиот број е: 274,5 , вториот број е: 522,2 , третиот број е: 129,3. **22.** 240 денари. **23.** Купил 18 m штоф и 18 m платно. **24.** 161 km.

ТЕМА IV - МЕРЕЊЕ

IV.1

3. Метрички систем.

IV.2.

IV.2.1.

1. Метар.

IV.2.2.

2. а) 100, б) 10 000, в) 1 000 000. **3.** Поголем е хектарот.

IV.2.3.

3. а) 1 000 000, б) 1 000.

IV.3.

3. 1 000. **4.** 1 dm^3.

IV.4

3. dkg.

IV.5.

3. K, °F и др.

IV.6.

3. Не.

IV.7.

1. а) 1500402 cm; б) 205 204 cm^2; в) 24 753 042 cm^3; г) 1 547*dl*; д) 23234 сек. **2.** 2764 m. **3.** 5641 мин.

IV.8

1. а) 4 231 km 40 dkm 1 m; б) 542 m^2 3 dm^2 11 cm^2; в) 622 m^3 953 dm^3 211 cm^3; г) 5 *hl* 3 *l* 2 *dl*; д) 14 часа 31 мин 55 сек. **2.** 8 hm 5 dkm 3m. **3.** 27 дена 7 часа 43 мин 12 секунди.

IV.9.

2. а) 21 dm; б) 2100 m^2; в) 30 000 m^3; г) 4 000 dkg; д) 150 *dl*; ѓ) 3 часа. **3.** 19 414 080 сек. **4.** 388 000 m.

IV.10.

1. а) 3 hm 7 dkm 9m 4 dm 3 cm = 37 943 cm; б) 8 m^2 11 dm^2 5 cm^2 9 mm^2 = 8 110 509 mm^2; в) 1 m^3 142 cm^3 10 mm^3 = 1 000 142 010 mm^3; г) 6 год 8 мес 26 дена; д) 21 kg 7 dkg 4 g 3 dg = 210743 dg. **2.** 9 год 11 мес 8 дена. **3.** 11 часот 4 мин 15 сек

IV.11.

1. а) 115 869 cm; б) 72125 cm^2 ; в) 29 745 800 cm^3; г) 4447 *cl*; д) 1646 hg; ѓ) 8035 часа.

IV.12.

2. а) 366 084 dm; б) 84992 dm^2; в) 23320 *cl*; г) 36 216 020 cm^3; д) 259 568 мин. **3.** 3962 сек. **4.** 41 година 10 месеци 12 дена.

IV.13

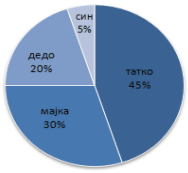
2. а) 1221 *dl*; б) 543 g; в) 1304 дена; г) 1408 dm^3; д) 106 673 m^2; ѓ) 95 cm. **3.** 77 часа. **4.** 24 m.

IV.14.

2. Упатство: Фрлај ја коцката (зар) 100 пати и за секое фрлање запишувај во табела што се паднало (1,2,3,4,5 или 6). Потоа можеш да направиш анализа- колку пати се паднала секоја бројка итн.

IV.15.

3. Приходи на семејството Стојанови во секторен дијаграм (цртеж 1). **4.** Столбест дијаграм за бакарна руда и чист бакар во kg (цртеж 2).



Цртеж 1

Цртеж 2

IV.16.

1. а) 27, б) 32,67, в) 25. **2.** 3,76. **3.** 39,25. **4.** Среден успех на: Петар- 4,77; Весна- 4; Ирина-

4,44; Иван- 3,77. **5.** 70 km/h. **6.** 94 kg. **7.** 44.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

2. а) 7 hm, б) 27 km, в) 4 hm. **3.** а) 84 *hl*, б) 830 *dkl*, в) 72 *dl*. **4.** а) 4 km 5 dm 2 mm, б) 7 dkm 2 dm 3 cm, в) 7 km 240 m. **5.** а) 4 *hl* 6 *l* 3 *dl*, б) 10 *l* 5 *dl* 4 *cl*, в) 24 *dkl* 2 *dl*. **6.** а) 320 kg 4 dkg, б) 14 kg 1 g, в) 82 kg 4 cg. **7.** а) 6 463 cm (64 m 6 dm 3 cm), б) 12 259 *cl* (122 *l* 5 *dl* 9 *cl*), в) 12° 3’18’’. **8.** 930 460 591 s. **9.** 359 232 *l*. **10.** Третиот агол изнесува 65° 10’54’’. **11.** 806582 mm^3. **12.** Просечниот успех по предметот математика е 3,68.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

9. а) 120 dm, б) 2700 mm, в) 8 000 000 m^2, г) 4700 cm^2, д) 0,3 dkg, ѓ) 800 kg, е) 72 000 cm^3, ж) 4000 mm^3, з) 6000 *cl*, s) 28 000 *dl*. **10.** а) 467 cm, б) 3028 m, в) 300 507 cm^2, г) 360 008 m^2, д) 382 *l*, ѓ) 1405 *cl*, е) 8402 cg, ж) 4006 kg. **11.** а) 2 m^2 50 dm^2 6 cm^2, б) 500 m^2 7 dm^2, в) 540 m^3 25 dm^3, г) 8000 m^3 42 dm^3, д) 0 *hl* 5 *dkl* 2,4 *l*, ѓ) 2 *dkl* 8 *dl*, е) 3 hg 4 dkg 8 g, ж) 4 hg 5 g 8 dg. **12.** 25 713 000 000 m^2. **13.** 81 *l*. **18.** а) 24 995 min, б) 567 920 s, в) 1 054 830 s. **19.** а) 1 h 33 min 45 s, б) 57 дена 6 h 50 min, в) 11 дена 13 h 46 min 40 s, г) 1 година 152 дена 19 h, д) 26 години 255 дена, ѓ) 6° 45’8’’, е) 35° 16’49’’, ж) 140° 20’. **20.** а) 6 mm 1 cm 3 dm 26 m, б) 14 m^2 80 dm^2 5 cm^2 90 mm^2, в) 9 m^3 594 dm^3 49 cm^3 824 mm^3, г) 9 *l* 3 *dl* 4 *cl*, д) 19 kg 3 hg 3 cg 5 g 8 dg, ѓ) 48 h 38 min 54 s, е) 344 дена 19 h, ж) 12° 19’20’’. **21**. а) 40 m 32 cm, б) 216 ha 324 m^2, в) 60 m^3 120 dm^3, г) 84 *hl* 196 *l* 140 *dl*, д) 272 kg 204 g 136 dg, ѓ) 24 h 40 min 48 s, е) 22 год 8 мес 91 дена, ж) 119° 56’. **22.** а) 1 km 287 m, б) 14 m^2 39 dm^2, в) 2 m^3 4 dm^3, г) 20,4 *l*, д) 3 kg 5 g, ѓ) 12 h 14 min, е) 1 год 8 мес 4 дена, ж) 4° 10’18’’. **23.** 14 h 37 min 42 s. **24.** 48 год 2 мес 11 дена. **25.** Кога жена му ќе наполни 50 години, тој ќе има 54 години 9 месеци и 25 дена а кога тој ќе наполни 60 години жена му ќе има 55 години 2 мес 5 дена. **26.** 6 kg 1 hg 9 dkg 2 g. **27.** 39 min. **28.** $b = 59° 28’4’’$, $g = 66° 3’42’’$. **29.** Едниот агол е 38° 38’52’’, а другиот 51° 21’8’’. **30.** 1 h 35 min. **31**. За 144 дена. **34.** 916,57.

АЗБУЧНИК НА ПОИМИТЕ

Анкета, 199
Аритметичка средина, 236

Бесконечно децимален број, 194
Бисектриса, 143
Броен израз, 68
Броител, 164

Венов дијаграм, 12

Декартов производ, 26
Децимален број, 174
Децимален дел, 174
Децимална дропка, 173
Децимална запирка, 174
Дијагонала, 158
Дијаграм
- столбест, 233
- секторен, 233
Дијаметар, 118
Должина на отсечка, 108
Дропка, 163

Еднакви дропки, 165
Едноимен број, 217

Заклучок, 232
Збир на децимални броеви, 184
Збир на именувани броеви, 225

Изведени поими, 113
Именител, 164
Именуван број, 217
Искршена линија, 111
Истражување, 199

Карактеристично својство, 5
Кардинален број, 28
Колинеарни точки, 102
Количник на децимални броеви, 191
Комплемент, 23
Комплементни агли, 140
Конвексен агол, 128
Конечно децимален број, 195
Конкавен агол, 134
Круг, 117
Кружен лак, 119
Кружница, 116

Лежи меѓу, 106

Мерна единица
- за должина, 209
- за плоштина, 210
- за волумен, 212
- за маса, 214
- за време, 215
- за температура, 216
Месна вредност, 40
Мешан број, 167
Многуаголник (полигон), 156
Множества
- дисјунктни, 19
- еднакви, 13
- еквивалентни, 15
Множество
- празно, 7
- универзално, 12
- конечно, 17
- бесконечно, 17

Најголем заеднички делител, 87
Најмал заеднички содржател, 89
Накрсни агли, 132
Напоредни агли, 130
Нескратлива дропка, 166
Нечиста дропка (поголема од 1), 167
Нормални прави, 145
Нула агол, 128

Основни поими, 113
Отсечка, 108

Паралелни прави, 103
Периметар на многуаголник, 156
Периодично децимален број, 195
Повеќеимен број, 217
Подмножество, 11
- вистинско, 14
Подреден пар, 24
Полигонална линија, 155
Полн агол, 133
Полуправа, 107
Почеток на полуправа, 107
Прав агол, 131
Права, 99
Прашалник, 199
Пресек на множество, 18
Пресечка, 121
Претпоставка, 232
Признак за деливост
- со 2, 78
- со 5, 79
- со 10, 79
- со 4, 80
- со 3, 81
- со 9, 81
Примерок, 231
Производ на децимални броеви, 188
Прости броеви, 82
Проширување на дропка, 166

Разлика на децимални броеви, 186
Разлика на именувани броеви, 228
Разлика на множества, 22
Рамен агол, 128
Растојание од точка до права, 147
Растојание, 105

Симетрала на отсечка, 143
Складни (еднакви) отсечки, 109
Скратување на дропка, 166
Сложени броеви, 82
Соседни агли, 130
Средишна точка, 110
Степен, 48
Суплементни агли, 141

Тангента, 121
Тетива, 118
Точка, 99

Унија на множество, 20

Централен агол, 137

Чиста дропка (помала од 1), 167

СОДРЖИНА

ВОВЕД **3**

ТЕМА I
ПРИРОДНИ БРОЕВИ

I.1. МНОЖЕСТВО **5**
I.1.1 ПОИМ ЗА МНОЖЕСТВО **5**
I.1.2. ПРАЗНО МНОЖЕСТВО **7**
I.1.3. НАЧИНИ НА ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВАТА **8**
I.2. ЕДНАКВИ МНОЖЕСТВА И ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА **10**
I.2.1. НЕКОИ РЕЛАЦИИ (СООДНОСИ) МЕЃУ МНОЖЕСТВАТА **10**
I.2.2. ПОДМНОЖЕСТВО **10**
I.2.3. УНИВЕРЗАЛНО МНОЖЕСТВО. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ **12**
I.2.4. ЕДНАКВОСТ НА МНОЖЕСТВА **13**
I.2.5. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА **15**
I.3. КОНЕЧНИ И БЕСКОНЕЧНИ МНОЖЕСТВА **17**
I.4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАТА **18**
I.4.1. ПРЕСЕК НА МНОЖЕСТВАТА **18**
I.4.2. УНИЈА НА МНОЖЕСТВА **20**
I.4.3. РАЗЛИКА НА ДВЕ МНОЖЕСТВА **22**
I.5. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА МНОЖЕСТВА **24**
I.5.1. ПОДРЕДЕН ПАР **24**
I.5.2. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА ДВЕ МНОЖЕСТВА **26**
I.6. МНОЖЕСТВО НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ **28**
I.6.1 ПРОШИРУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВОТО N СО НУЛАТА **30**
I.7. ПОДРЕДУВАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ **33**
I.8. ПИШУВАЊЕ И ЧИТАЊЕ НА БРОЕВИТЕ ПО КЛАСИ **34**
I.9. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ НА ДЕСЕТКИ, СТОТКИ И ИЛЈАДИ **36**
I.10. ДЕКАДЕН БРОЕН СИСТЕМ **37**
I.10.1. ЦИФРИ. НУЛАТА КАКО БРОЈ **39**
I.10.2. ЗАКОН НА ПОЗИЦИЈАТА НА ЦИФРИТЕ ВО ДЕКАДНИОТ БРОЕН СИСТЕМ **40**
I.10.3. РИМСКИ СИСТЕМ НА БРОЕВИТЕ **41**
1.11 ОПЕРАЦИИ СО ПРИРОДНИ БРОЕВИ **43**
I.11.1. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ **43**
I.11.2. ОДЗЕМАЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ **45**
I.11.3. МНОЖЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ **46**
I.11.4. СТЕПЕН НА БРОЈ **48**

I.11.5. ДЕЛЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ 50
I.12. ЗАВИСНОСТ НА ЗБИРОТ ОД ПРОМЕНАТА НА СОБИРОЦИТЕ 52
I.13. ЗАВИСНОСТ НА РАЗЛИКАТА ОД ПРОМЕНА НА НАМАЛЕНИКОТ И НАМАЛИТЕЛОТ 55
I.14. ЗАВИСНОСТ НА ПРОИЗВОДОТ ОД ПРОМЕНАТА НА МНОЖИТЕЛИТЕ .. 59
I.15. ЗАВИСНОСТ НА КОЛИЧНИКОТ ОД ПРОМЕНАТА НА ДЕЛЕНИКОТ И ДЕЛИТЕЛОТ 62
I.16. БРОЕН ИЗРАЗ. РЕДОСЛЕД НА АРИТМЕТИЧКИТЕ ОПЕРАЦИИ 68
I.17. РЕШАВАЊЕ РАВЕНКИ СО КОРИСТЕЊЕ НА СВОЈСВАТА НА ОСНОВНИТЕ МАТЕМАТИЧКИ ОПЕРАЦИИ 70
I.18. ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ 75
I.19. ДЕЛИВОСТ НА ЗБИР, РАЗЛИКА И ПРОИЗВОД НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ .. 76
I.20. ПРАВИЛА ЗА ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ 78
1.20.1. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЈОТ 2 78
I.20.2. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЕВИТЕ 5 И 10 79
I.20.3. ПРИЗНАК СО ДЕЛИВОСТ СО БРОЈОТ 4 79
I.20.4. ПРИЗНАК ЗА ДЕЛИВОСТ СО БРОЕВИТЕ 3 И 9 80
I.21. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ 82
1.22. РАЗЛОЖУВАЊЕ СЛОЖЕН ПРИРОДЕН БРОЈ НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ 83
I.23. ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛИ (ЗД) И НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ 86
ДЕЛИТЕЛ (НЗД) 86
I.24. ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛИ (ЗС) И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ 88
СОДРЖАТЕЛ (НЗС) 88
ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА 93
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ 94

ТЕМА II
ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

II.1. ТОЧКА И ПРАВА 99
II.2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКИ И ПРАВИ 102
II.3. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ 105
II.4. ПОЛУПРАВА И ОТСЕЧКА 107
II.5. ДОЛЖИНА НА ОТСЕЧКА 109
II.6. ИСКРШЕНА ЛИНИЈА 111
II.7. ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ПОИМИ 113
II.8. ГРАФИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ОТСЕЧКИ 114
II.9. КРУЖНИЦА И КРУГ 116
II.10. ТЕТИВА, ДИЈАМЕТАР И КРУЖЕН ЛАК 118
II.11. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА КРУЖНИЦА СО ТОЧКА И ПРАВА 120
II.12. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ КРУЖНИЦИ 123
II.13. ПОЛУРАМНИНА И АГОЛ 126

II.14. СОСЕДНИ, НАПОРЕДНИ И НАКРСНИ АГЛИ 130
II.15. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ. АГЛОМЕР 133
II.16. ЦЕНТРАЛЕН АГОЛ. ЦРТАЊЕ НА АГОЛ ЕДНАКОВ НА ДАДЕН АГОЛ 137
II.17. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ АГЛИ 140
II.18. СИМЕТРАЛА НА ОТСЕЧКА И СИМЕТРАЛА НА АГОЛ 142
II.19. НОРМАЛНИ ПРАВИ 145
II.20. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА 147
II.21. ГРАФИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ 149
II.22. АРИТМЕТИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ 152
II.23. МНОГУАГОЛНИК 155
II.24. ВИДОВИ НА МНОГУАГОЛНИЦИ 157
ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА 159
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ 160

ТЕМА III
ДРОПКИ. ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

III.1. ПОИМ ЗА ДРОПКИ. ЧИТАЊЕ И ПИШУВАЊЕ 163
III.2. ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ НА ДРОПКИ. ЕДНАКВОСТ НА ДРОПКИ 165
III.3. ВИДОВИ НА ДРОПКИ. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ДРОПКИ НА БРОЈНА ПРАВА 167
III.4. СОБИРАЊЕ ДРОПКИ СО ЕДНАКВИ ИМЕНИТЕЛИ 170
III.5. ОДЗЕМАЊЕ ДРОПКИ СО ЕДНАКВИ ИМЕНИТЕЛИ 172
III.6. ДЕЦИМАЛНА ДРОПКА И ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 173
III.7. СВОЈСТВА НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ 177
III.8. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ НА БРОЈНА ПРАВА 178
III.9. СПОРЕДУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ ПО ГОЛЕМИНА 178
III.10. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ДЕКАДНА ЕДИНИЦА 180
III.11. СОБИРАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН И ПРИРОДЕН БРОЈ 181
III.12. ОДЗЕМАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН И ПРИРОДЕН БРОЈ 182
III.13. СОБИРАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ 183
III.14. ОДЗЕМАЊЕ НА ДЕЦИМАЛНИТЕ БРОЕВИ 185
III.15. МНОЖЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ПРОИЗВОЛЕН ПРИРОДЕН БРОЈ 187
III.16. МНОЖЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 188
III.17. ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ СО ПРИРОДЕН БРОЈ 189
III.18. ДЕЛЕЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН СО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 191
III.19. ПРЕТВОРАЊЕ НА ДРОПКА ВО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 193
III.20. КОНЕЧНО И БЕСКОНЕЧНО ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ. ПЕРИОДИЧЕН ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 194
III.21. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ДЕЦИМАЛЕН БРОЈ 196

III.22. ИНСТРУМЕНТИ ЗА ПРИБИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИ 199
III.23. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ ВО ТАБЕЛА 201
ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА 203
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ 204

ТЕМА IV
МЕРЕЊЕ

IV.1. МЕРНА ЕДИНИЦА 207
IV.2. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ДОЛЖИНА, ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН 209
IV.2.1. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ДОЛЖИНА 209
IV.2.2. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ПЛОШТИНА 210
IV.2.3. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ВОЛУМЕН (ЗАФАТНИНА) 212
IV.3. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ТЕЧНОСТ 214
IV.4. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА МАСА 214
IV.5. МЕРНА ЕДИНИЦА ЗА ВРЕМЕ И ЗА ТЕМПЕРАТУРА 215
IV.6. ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ 217
IV.7. ПРЕТВОРАЊЕ НА ПОВЕЌЕИМЕНИТЕ БРОЕВИ ВО ЕДНОИМЕНИ 218
IV.8. ПРЕТВОРАЊЕ НА ЕДНОИМЕНИТЕ БРОЕВИ ВО ПОВЕЌЕИМЕНИ 220
IV.9. ПРЕТВОРАЊЕ ПОГОЛЕМИ ВО ПОМАЛИ МЕРНИ ЕДИНИЦИ И ОБРАТНО 221
IV.10. СОБИРАЊЕ НА ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ 224
IV.11. ОДЗЕМАЊЕ НА ИМЕНУВАНИ БРОЕВИ 226
IV.12. МНОЖЕЊЕ НА ИМЕНУВАН СО НЕИМЕНУВАН БРОЈ 228
IV.13. ДЕЛЕЊЕ НА ИМЕНУВАН СО НЕИМЕНУВАН БРОЈ 230
IV.14. ИЗБИРАЊЕ ПРИМЕРОК НА ИСТРАЖУВАЊЕ 231
IV.15. ПРЕТСТАВУВАЊЕ ПОДАТОЦИ ОД ТАБЕЛА НА РАЗНИ ВИДОВИ ДИЈАГРАМИ 232
IV.16. АНАЛИЗА НА ПОДАТОЦИ ДОБИЕНИ ПРИ ИСТРАЖУВАЊЕ 235
ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА 238
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ 239
ОДГОВОРИ И УПАТСТВА 243
АЗБУЧНИК НА ПОИМИТЕ 257