XII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

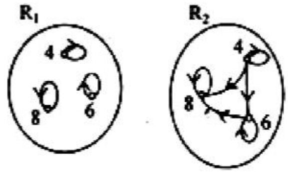
1. Во множеството $M=\{4, 6, 8\}$ се дадени релациите R_1 и R_2 со нивните графици: $R_1=\{(x, y)|x, y\in M$ и $x=y\}$ и $R_2=\{(x, y)|x, y\in M$ и $x\leq y\}$. Да се испитаат својствата на релациите R_1 и R_2.

2. Еден ученик наместо да помножи еден број со 506, тој го помножил истиот број со 56, при што добил помал производ за 11250. Кој број го множел ученикот?

3. Бегајќи од мачката, глушецот се нашол на 20 чекори од својата дупка, а мачката на пет скока зад глушецот. Додека мачката прави еден скок глушецот прави 3 чекори, а еден мачкин скок по должина е еднаков на 10 глувчеви чекори. Дали мачката ќе го фати глушецот? Образложи!

4. Ако страната на еден квадрат се зголеми за 11 cm, тогаш неговата плоштина се зголемува за 319 cm^2. Најди ја должината на страната на тој квадрат.

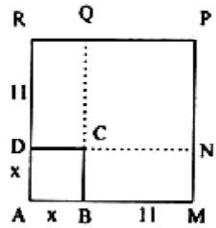
V одделение



1. Релацијата R_1 е рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна
Релацијата R_2 е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
Релација за еквивалентност е R_1, а релации за подредување се R_1 и R_2.

2. Нека x е бараниот број, тогаш:
$506x-56x=11250$; $x(506-56)=11250$; $450x=11250$; $x=25$.
Тој број е 25.

3. На мачката ѝ се потребни 7 скока за да го фати глушецот (20:10+5=7). Додека мачката направи 6 скока глушецот ќе направи 6·3=18 чекори. На глушецот му недостигаат уште два чекори до дупката и еден чекор да се сокрие, а за тоа време мачката го прави седмиот скок. Додека мачката го направи седмиот скок, глушецот ќе се сокрие, бидејќи тој ќе направи три чекори.



4. Нека x е должината на бараниот квадрат, тогаш:

I - начин: $P_{ABCD}=x^2$; $P_{AMPR}-x^2=319$,
a $P_{CNPQ}=121\ cm^2$.
$P_{BMNC}=P_{DCQR}=(319-121):2=198:2=99\ cm^2$.
$P_{BMNC}=11x=99$, т.е. $x=9$ cm

II - начин: $2\cdot 11x+121=319$;
$22x=198$;
$x=9$ cm.

VI одделение

1. Двајца велосипедисти тргнале од местата A и B еден кон друг. Кога се сретнале, првиот поминал $\frac{4}{7}$ од патот и уште $\frac{24}{10}$ km, а вториот два пати помалку од првиот. Најди го растојанието од A до B.

2. Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC, така што $\angle DAC=\angle ACD$. Периметарот на триаголникот ABC е 17 cm, а периметарот на триаголникот ABD е 14 cm. Пресметај ја должината на страната AC, ако $\overline{CD}=5$ cm.

3. Еден нож има маса колку две лажици. Три лажици имаат маса колку еден нож и една вилушка, а послужавникот има маса колку нож и лажица заедно. Најди ја масата на ножот, лажицата и послужавникот, ако вилушката има маса 40 g.

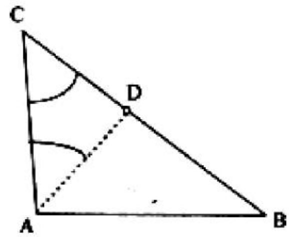
4. Во триаголник ABC повлечена е бисектрисата AD (D припаѓа на страната BC). Нека E е средина на страната AC. Ако е $\angle BAC=2\angle ABC$ и отсечката $DE \parallel AB$, тогаш најди ја големината на внатрешните агли на триаголникот.

VI одделение

1. Нека растојанието од A до B е x, тогаш:

$$\frac{4}{7}x+\frac{24}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}x+\frac{24}{10}\right)=x;\ \frac{6}{7}x+\frac{18}{5}=x;\ x=\frac{126}{5}=25,5\ \text{km}.$$

2. I - начин: Бидејќи $\angle ACD=\angle CAD$, следува дека ΔACD е рамнокрак, т.е. $\overline{CD}=\overline{AD}=5$ cm. (види цртеж)



$L_{ABD}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}=14$, и $\overline{AB}+\overline{BD}=9$,

а $L_{ABC}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC}+\overline{AC}=17$;

$9+5+\overline{AC}=17$;

$\overline{AC}=3$ cm.

II - начин: Бидејќи ΔADC е рамнокрак $\overline{AD}=\overline{DC}$, тогаш $\overline{AC}=L_{ABC}-L_{ABD}=3$ cm.

3. Нека со Н, В, Л и П ги означиме соодветно масата на ножот, вилушката, лажицата и послужавникот, тогаш имаме:

Н=2Л ...(1)
3Л=Н+В ...(2)
П=Н+Л ...(3)

Од (1) и (3) заклучуваме дека П=3Л.

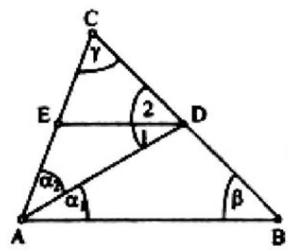
Од (1) и (2) заклучуваме дека 3Л=2Л+В, т.е. Л=В. Според тоа Н=2В, а П=3В, т.е. Н=2·40=80 g, Л=40 g и П=3·40=120 g.

4. Ако AD е бисектриса на аголот BAC, тогаш $\alpha_1=\alpha_2$. Бидејќи $ED\parallel AB$, следува дека $\angle 1=\angle\alpha_1$ и $\angle 1=\angle\alpha_2$.

ΔAED е рамнокрак, $\overline{AE}=\overline{ED}$.

E е средина на AC, следува дека $\overline{DE}=\overline{EC}$, т.е. $\angle 2=\angle\gamma$.

Аглите 2 и β се еднакви како согласни агли на трансверзала, следува дека $\gamma=\beta$. Од условот $\beta=\alpha_1=\alpha_2$ следува дека $\alpha_1+\alpha_2+\beta+\gamma=180^\circ$, т.е. $4\beta=180^\circ$. $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$ и $\alpha=90^\circ$, т.е. триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен.



VII одделение

1. Ако дијагоналите на рамнокрак трапез се меѓусебно нормални, тогаш средната линија е еднаква со висината на трапезот. Докажи!

2. Од балон полн со чист алкохол источено е $\frac{1}{4}$ од алкохолот, а потоа дополнет со вода. Повторно е источено $\frac{1}{3}$ од течноста во балонот и пак е дополнет со вода. Што има повеќе во балонот - вода или алкохол ? Образложи го одговорот.

3. Два часовника со стрелки се пуштени во работа на 9.04.1994 година во 10 часот наутро. Еден од часовниците секогаш покажува точно време, а другиот брза 90 секунди за секој час. На која дата и во колку часот двата часовника ќе покажат исто време?

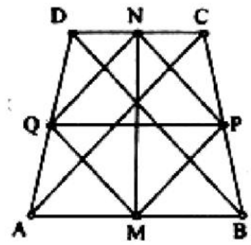
4. Во правоаголник ABCD, страната AB е два пати поголема од страната BC. На страната AB е избрана точката M, така што $\angle AMD=\angle CMD$. Најди ја големината на аголот CMD.

VII одделение

1. Ако M, P, Q, N се средини на страните на трапезот, тогаш:

$\overline{QN} = \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{QN} \parallel \overline{MP}$;

$\overline{QM} = \overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ и $\overline{QM} \parallel \overline{NP}$; како средни линии на соодветни триаголници. Оттука следува дека четириаголникот MPNQ е ромб.



Како е: $AC \perp BD$ и $BD \parallel NP$, следува дека $AC \perp NP$. (1)

$BD \perp AC$ и $AC \parallel QN$, следува дека $BD \perp QN$. (2)

Од (1) и (2) следува дека $NP \perp QN$, а MNPQ е квадрат, т.е. $h = \overline{MN} = \overline{QP}$.

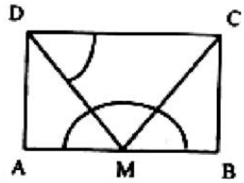
2. Да го проследиме количеството на вода во балонот. По дополнувањето во балонот ќе има $\frac{1}{4}$ вода. По источувањето $\frac{1}{3}$ течност, источено е $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ вода, а во балонот останало $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ вода. По дополнувањето $\frac{1}{3}$ во балонот ќе има: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ вода, т.е. во балонот има иста количина вода и алкохол.

3. Двата часовника повторно ќе покажат исто време, откако вториот часовник што брза ќе отиде напред 12 часови, т.е. 720 минути. За да отиде напред 12 часови потребно му е време 720:1,5=480 часови, т.е. еднакво 20 дена. Според тоа часовниците ќе покажат исто време на 29.04.1994 година во 10 часот наутро.

4. Бидејќи четириаголникот е правоаголник, следува:

$\angle AMD = \angle MDC$ - како наизменични агли.

Бидејќи $\angle AMD = \angle DMC$, следува дека и $\angle CDM = \angle CMD$, т.е. ΔDMC е рамнокрак и $\overline{CD} = \overline{CM} = 2\overline{BC}$. Бидејќи ΔMBC е правоаголен и $\overline{MC} = 2\overline{BC}$, следува дека $\angle BMC = 30^o$. Според тоа $\angle CMD = 150^o : 2 = 75^o$.



VIII одделение

1. Одреди ја плоштината на правоаголник на кој должината на дијагона-лата е 6 cm, а аголот меѓу дијагоналите е 30°.

2. Одреди ги сите тројки едноцифрени природни броеви a, b и c за кои важи равенството: $\frac{2}{a}+\frac{b}{7}=\frac{30+c}{35}$.

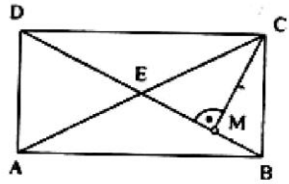
3. Една група работници можат да завршат некоја работа за 10 дена, а друга група истата работа можат да ја завршат за 15 дена. Да се заврши таа работа за 12 дена била ангажирана третина од првата група и дел од втората група. Кој дел од втората група работници учествува во работата?

4. Во паралелограмот ABCD, со M и N обележани се средините на страните AB и BC, соодветно. Докажи дека DM и DN ја делат дијагоналата AC на три еднакви делови.

VIII одделение

1. Нека CM⊥BD. Од правоаголниот триаголник CME имаме: $\overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{3}{2}$ (катета спроти агол од 30^0 во правоаголен триаголник) .

$P_{ABCD}=2P_{BCD}=2\cdot\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{CM}=6\cdot\frac{3}{2}=9\ cm^2$



2. Дадениот израз го трансформираме во форма:

$\frac{2}{a}=\frac{30+c}{35}-\frac{b}{7}$; $\frac{2}{a}=\frac{30+c-5b}{35}$; $\frac{70}{a}=30+c-5b$;

$a\in\{1, 2, 5, 7\}$ (едноцифрени делители на 70).

Ако a=1, тогаш 70=30+c-5b, а c=40+5b, што е невозможно бидејќи за секој едноцифрен број b бројот c не може да биде едноцифрен, значи $a\neq1$. Од исти причини и $a\neq2$.

Ако a=5, тогаш 14=30+c-5b, а $b=\frac{16+c}{5}$. Следи: $c\in\{4, 9\}$.

За c=4, b=4, а бараната тројка е (5, 4, 4).

За c=9, b=5, а бараната тројка е (5, 5, 9).

Ако a=7 тогаш 10=30+c-5b, а $b=\frac{20+c}{5}$. Следи: c=5 и b=5, а бараната тројка е (7, 5, 5).

Според тоа бараната тројка (a, b, c) е: (5, 4, 4); (5, 5, 9); (7, 5, 5).

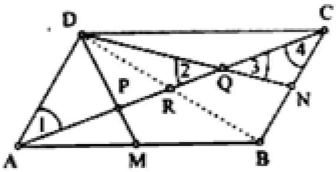
3. За еден ден првата група може да заврши $\frac{1}{10}$ од работата, а третина од групата ќе заврши $\frac{1}{30}$ од работата. Ако делот од втората група е x, тогаш тие за еден ден ќе завршат $\frac{x}{15}$ дел од работата. Деловите од двете групи за еден ден завршуваат $\frac{1}{12}$ од работата. Според тоа:

$$\frac{1}{30}+\frac{x}{15}=\frac{1}{12};\qquad 2+4x=5;\qquad x=\frac{3}{4}.$$

Од втората група учествувале $\frac{3}{4}$ од работниците.

4. I - начин: Нека трите дела се: $\overline{AP}=x$; $\overline{PQ}=y$; $\overline{QC}=z$. $\Delta AQD\sim\Delta CQN$ ($\angle 1=\angle 4$ и $\angle 3=\angle 2$). Од сличноста на триаголниците имаме: $\overline{AD}:(x+y)=\overline{CN}:z$.

Бидејќи $\overline{AD}=2\overline{CN}$, следува дека $z=\frac{x+y}{2}$. ... (1)



$\Delta AMP\sim\Delta CDP$ ($\angle P$ - накрсен, $\angle A=\angle C$ агли со паралелни краци). Од сличноста на триаголниците имаме: $\overline{AM}:x=\overline{CD}:(y+z)$. Бидејќи $\overline{CD}=2\overline{AM}$, следува $x=\frac{y+z}{2}$. ... (2)

Ако (1) го замениме во (2) добиваме:

$x=\dfrac{y+\frac{x+y}{2}}{2}$, т.е $x=y$. Ако (2) го замениме во (1) добиваме: $z=\dfrac{\frac{y+z}{2}+y}{2}$; т.е. $y=z$.

Според тоа $x=y=z$, т.е. $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$.

II - начин: Во триаголниците ABD и DBC, точките P и Q се нивните тежишта. Според тоа

$\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AR}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{AC}$; $\overline{CQ}=\frac{2}{3}\overline{CR}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{3}\overline{AC}$.

т.е. $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}=\frac{1}{3}\overline{AC}$.