Ирена Стојковска

Разбирање на четирите основни средини
(1 дел)

Најчесто под зборот средина на два броја се подразбира бројот кој "се наоѓа" на средината меѓу тие два броја, односно бројот кој е еднакво "оддалечен" од двата броја. На пример, за броевите 2 и 18, тоа е бројот 10, кој е "оддалечен" за 8 и од 2 и од 18. Како е добиен овој број? Забележувајќи дека тоа е бројот со кој може да се замени секој од броевите и повторно нивниот збир да остане непроменет, може да заклучиме дека оваа средина е добиена откако ќе се соберат броевите и така добиениот збир ќе се подели со колку броеви сме собрале. Во нашиот случај имаме, $(2+18):2=20:2=10$. Вака добиената средина е позната под името **аритметичка средина**.

Не секогаш аритметичката средина е вистинскиот одговор при барање на средина на два броја, односно број со кој може да се заменат броевите за да некој резултат остане непроменет. Така на пример ако сакаме производот на два броја да остане непроменет, тогаш секој од броевите треба да го замениме со квадратниот корен од нивниот производ, односно со нивната **геометриска средина**. Пресметувајќи дека $\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$, може да приметиме дека ако секој од броевите 2 и 18 го замениме со нивната геометриска средина 6, тогаш навистина производот ќе остане непроменет.

Овие две средини, аритметичката и геометриската, се дел од основните средини во математиката, со голема практична примена. Можеби помалку познати, но не и помалку применливи се **хармониската и квадратната средина**. Првата, хармониската средина се користи кога сакаме збирот на реципрочните вредности на броевите да остане непроменет, додека втората, квадратната средина се користи кога сакаме збирот од квадратите на броевите да остане непроменет.

За позитивните реални броеви a и b ги воведуваме следните ознаки за горе споменатите основни средини:

- $A=\frac{a+b}{2}$ за **аритметичка средина** на броевите a и b,
- $G=\sqrt{ab}$ за **геометриска средина** на броевите a и b,
- $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$ за **хармониска средина** на броевите a и b,
- $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ за **квадратна средина** на броевите a и b.

Во понатамошниот текст ќе бидат покажани неравенствата кои важат за основните средини, ќе бидат изложени неколку геометриски интерпретации на истите, како и поедноставните геометриски конструкции за секоја од средините. На крајот ќе бидат обопштени дефинициите на основните средини за повеќе броеви и ќе бидат приложени неколку практични примени на средините се со цел за подобро разбирање на истите.

1. Неравенства на основните средини

За четирите основни средини A, G, H и K на броевите a и b, важат следните неравенства

$$H \le G \le A \le K .$$

Во доказите на овие неравенства се користи познатиот факст дека квадратот на било кој реален број е ненегативен. Имено, за докажување на првото неравенство тргнуваме од,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$
$$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$$
$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad / \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$
$$\sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}$$

т.е. $G \ge H$.

За докажување на второто неравенство, почетокот е повторно ист,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$
$$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$$
$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad / : 2$$
$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

т.е. $A \ge G$.

И конечно, за докажување на третото неравенство се тргнува од,

$$(a-b)^2 \ge 0$$
$$a^2-2ab+b^2 \ge 0$$
$$a^2+b^2 \ge 2ab$$
$$2a^2+2b^2 \ge a^2+2ab+b^2 \quad / : 4$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$$

т.е. $K \ge A$.

Ако ги подредиме сите неравенства во една низа од неравенства се добива

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} ,$$

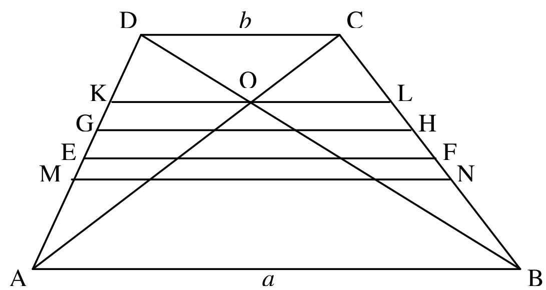
при што равенства важат при $a=b$ (проверете!).

2. Геометриски интерпретации на основните средини

Горе изложените неравенства на основните средини ќе бидат повоочливи доколку разгледаме некоја геометриска интерпретација на средините. Ви приложуваме неколку такви геометриски интерпретации.

2.1. Прва геометриска интерпретација

Нека е даден трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ (цртеж 1).



цртеж 1

1) Што претставува аритметичката средина на броевите a и b?

Ако се повикаме на знаењата за средна линија на трапез со основи a и b, веднаш може да се согледа дека должината на седната линија $\overline{EF}$, при што нели E е средина на кракот AD, а F е средина на кракот BC (цртеж 1), е еднаква на аритметичката средина на броевите a и b т.е.

$$\overline{EF} = \frac{a+b}{2}.$$

2) Да поставиме аналогно прашање како во 1) и да се обидеме да дадеме одговор на тоа прашање, односно што претставува геометриската средина на броевите a и b, каде a и b се должини на основите на трапезот $ABCD$?

Овој пат одговорот не е толку очигледен. За да дојдеме до него повлекуваме отсечка $GH \parallel AB$ ($G \in AD, H \in BC$) така да четириаголниците $ABHG$ и $GHCD$ се слични (цртеж 1). Од нивната сличност имаме

$$a : \overline{GH} = \overline{GH} : b \text{ од каде}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{ab}.$$

Значи, должината на отсечката $\overline{GH}$ е еднаква на геометриската средина на броевите a и b.

3) Следниот факт е интересен. Ако повлечеме отсечка $KL \parallel AB$ ($K \in AD, L \in BC$) така да минува низ пресекот O на дијагоналите AC и BD на трапезот $ABCD$ (цртеж 1), ќе добиеме дека должината на отсечката $\overline{KL}$ е еднаква на хармониската средина на броевите a и b.

Имено, од сличноста на триаголниците ΔKOD и ΔABD имаме:

$$\overline{KO} : \overline{AB} = \overline{KD} : \overline{AD} = (\overline{AD} - \overline{AK}) : \overline{AD} = 1 - \overline{AK} : \overline{AD}. \qquad (1)$$

Од сличноста пак на триаголниците ΔAOK і ΔACD имаме:

$$\overline{KO} : \overline{DC} = \overline{AK} : \overline{AD}. \qquad (2)$$

Со замена на (2) во (1) се добива

$$\overline{KO} : \overline{AB} = 1 - \overline{KO} : \overline{DC}$$

$$\frac{\overline{KO}}{a} + \frac{\overline{KO}}{b} = 1$$

$$\overline{KO} = \frac{ab}{a+b}.$$

Слично се покажува дека $\overline{OL} = \frac{ab}{a+b}$, што значи дека $\overline{KL} = \frac{2ab}{a+b}$.

4) Нека сега MN е отсечка така да $MN \parallel AB$ ($M \in AD, N \in BC$) и четириаголниците $ABNM$ и $MNCD$ се еднаквоплоштни (цртеж 1). Овој пат ќе покажеме дека должината на отсечката $\overline{MN}$ е еднаква на квадратната средина на броевите a и b.

Ако со x ја означиме висината на трапезот $ABNM$, а со y висината на трапезот $MNCD$, тогаш од еднаквоста на плоштините на трапезите $ABNM$ и $MNCD$ и тоа дека нивните плоштини се половина од плоштината на трапезот $ABCD$, имаме

$$\frac{a+\overline{MN}}{2}\cdot x=\frac{\overline{MN}+b}{2}\cdot y \text{ и } \frac{a+b}{2}\cdot(x+y)=2\cdot\frac{a+\overline{MN}}{2}\cdot x,$$

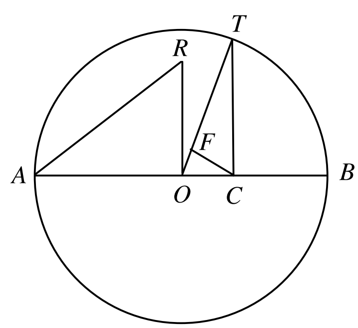
од каде се добива дека $\overline{MN}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Помош? Прво поделете ги двете равенства со x, а потоа изразете го количникот $\frac{y}{x}$ од првото равенство и заменете го во второто. На тој начин ги елиминирате x и y, па лесно ќе може да се добие на што е еднаква должината на отсечката $\overline{MN}$.

Од цртежот 1 се согледува дека $\overline{MN}\le\overline{EF}\le\overline{GH}\le\overline{KL}$, што претставува геометриски увид на покажаните неравенства на средините.

2.2. Втора геометриска интерпретација

Нека е дадена кружницата k со дијаметар $\overline{AB}=a+b$. Точката C од дијаметарот AB е таква да $\overline{AC}=a$ и $\overline{CB}=b$, при што без губење на општоста може да земеме дека $a\ge b$. Нека O е центарот на кружницата k. Точката R е таква да $OR\perp AB$ и при тоа $\overline{OR}=\frac{a-b}{2}$. Точката T е точка од кружницата k така да $CT\perp AB$. И точката F е точка од радиусот OT така да $CF\perp OT$. (види цртеж 2) Тогаш покажете дека,

- $\overline{OT}=\frac{a+b}{2}$ е аритметичката средина,
- $\overline{CT}=\sqrt{ab}$ е геометриската средина,
- $\overline{TF}=\frac{2ab}{a+b}$ е хармониската средина,
- $\overline{AR}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ е квадратната средина.



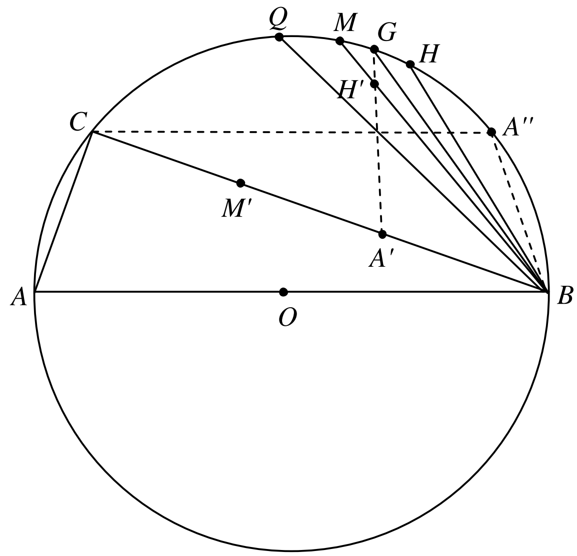
цртеж 2

Од начинот на кој се добиени точките лесно се воочува дека $\overline{TF}\le\overline{CT}\le\overline{OT}\le\overline{AR}$. Првото неравенство доаѓа од правоаголниот ΔTFC каде TF е катета, а CT е хипотенуза. Второто неравенство доаѓа од правоаголниот ΔOCT каде CT е катета, а OT е хипотенуза. И третото неравенство доаѓа од тоа што $\overline{OT}=\overline{OA}$ како радиуци на кружницата и од правоаголниот ΔAOR, каде OA е катета, а AR е хипотенуза.

2.3. Трета геометриска интерпретација

Еве уште една интересна геометриска интерпретација. Тука средините се тетиви од кружница со заедничка точка. Нека триаголникот ΔACB е правоаголен со прав агол кај темето C и катети $\overline{AC}=a$ и $\overline{CB}=b$, при што може да земеме дека $a\le b$. Нека O е средина на хипотензата AB и воедно центар на опишаната кружница k околу ΔACB. Точките $A'\in BC$ и $A''\in k$ се такви да $\overline{BA'}=\overline{BA''}=\overline{AC}=a$ и A и A'' се на различни страни од CB. Точката

$Q \in k$ е таква да BQ е симетрала на аголот $\measuredangle CBA''$. Точката $M' \in BC$ е средина на $A'C$, односно $\overline{A'M'} = \overline{M'C}$, додека точката $M \in k$ е таква да $\overline{BM} = \overline{BM'}$. Точката $G \in k$ е таква да $A'G \perp A''C$ и G е на лакот $\widehat{BA''C}$. Точката H' е пресечна точка на $A'G$ и BM. И точката $H \in k$ е таква да $\overline{BH'} = \overline{BH}$ и се наоѓа на лакот $\widehat{BA''C}$. (види цртеж 3) Тогаш покажете дека,



- $\overline{BM} = \frac{a+b}{2}$ е аритметичката средина,
- $\overline{BG} = \sqrt{ab}$ е геометриската средина,
- $\overline{BH} = \frac{2ab}{a+b}$ е хармониската средина,
- $\overline{BK} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ е квадратната средина.

Од цртежот 3 се согледува дека $\overline{BH} \le \overline{BG} \le \overline{BM} \le \overline{BQ}$, што претставува уште еден геометриски увид на неравенствата на средините.

Ирена Стојковска

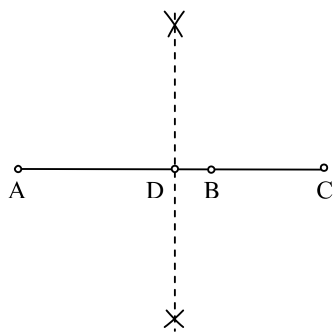
Разбирање на четирите основни средини
(2 дел)

3. Геометриски конструкции на основните средини

Горе изложените геометриски интерпретации може да послужат и како геометриски конструкции на секоја од средините.

1) За конструирање на аритметичката средина на броевите a и b, може да ја искористиме првата геометриска интерпретација. Конструкцијата би имала неколку чекори: конструирање на произволен трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$, потоа барање средина E на кракот AD, повлекување паралелна отсечка EF на AB ($F \in BC$), па тогаш $\overline{EF}=\frac{a+b}{2}$.

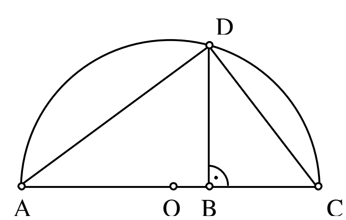
Ако ја искористиме втората геометриска интерпретација, потребно е должините a и b да ги нанесеме една по друга на една права така да $\overline{AC}=a$, $\overline{CB}=b$ и точката C да е меѓу точките A и B. Тогаш, должината на радиусот на кружницата со дијаметар AB е аритметичката средина на броевите a и b.



цртеж 4

Како и да е наједноставна геометриска конструкција е следната. Ако на една права ги нанесеме отсечките $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$, така да точката B е меѓу точките A и C, тогаш симетралата на отсечката $\overline{AC}=a+b$ во пресек со AC ја дава точката D и при тоа $\overline{AD}=\frac{a+b}{2}$. (види цртеж 4)

2) Кога станува збор за геометриската средина на броевите a и b, за нејзино конструирање не е едноставно да се искористи првата геометриска интерпретација. Затоа пак, втората геометриска интерпретација ни дава лесен начин за конструирање на геометриската средина. Имено, може да ја искористиме Евклидовата теорема која гласи $h^2=pq$, каде h е висина во правоаголен триаголник спуштека кон хипотенузата, а p и q се проекциите на катетите врз хипотенузата, исто така и Талесовата теорема која гласи дека периферниот агол над дијаметарот во една кружница е прав. Така, прво на една права ги нанесуваме отсечките $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$, така да точката B е меѓу точките A и C (цртеж 5), потоа конструираме полукруг над AC како над дијаметар, со издигнување на нормала од точката B во пресек со полукругот се добива точката D и тогаш $\overline{BD}=\sqrt{ab}$. Зошто? Многи едноставно. Од Талесовата теорема, триаголникот ΔADC е правоаголен со прав агол кај темето



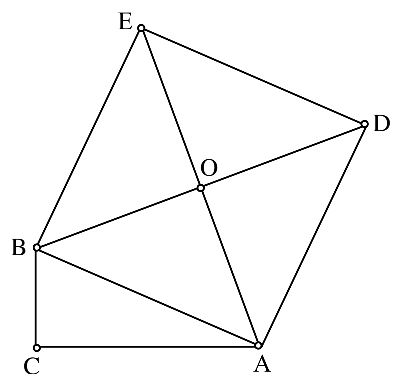
цртеж 5

D, кај овој триаголник DB е висина спуштена кон хипотенузата AC, па затоа од Евклидовата теорема $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, од каде следи дека $\overline{DB} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{ab}$.

3) Наједноставна конструкција за хармониската средина на броевите a и b би била токму онаа од првата геометриска интерпретација. Значи, конструираме трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$, ја наоѓаме пресечната точка O на дијагоналите AC и BD, повлекуваме отсечка $KL \parallel AB$ ($K \in AD, L \in BC$) која минува низ O, тогаш $\overline{KL} = \frac{2ab}{a+b}$.

4) Првата геометриска интерпретација повторно не е толку практична и за конструирање на квадратната средина. Затоа, втората геометриска интерпретација дава полесен начин за таа конструкција. Но, ние тука ќе ви изложиме сосема трет начин. Прво конструираме правоаголен триаголник ΔABC со катекти $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ (цртеж 6). Тогаш, од Питагоровата теорема за хипотенузата $\overline{AB} = c$ имаме $c^2 = a^2 + b^2$. Ако го замениме последното равенство во формулата за квадратната средина, ќе добиеме

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$



цртеж 6

Користејќи дека $c\sqrt{2}$ е должина на дијагонала со страна c, значи дека квадратната средина на броевите a и b би била должината на половината од дијагоналата на квадратот над хипотенузата на правоаголен триаголник со катети a и b, односно $\overline{OA} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (види цртеж 6).

Да забележиме и дека третата геометриска интерпретација, начинот на кој таа е погоре изложена, исто така може да се искористи и за истовремена конструкција на сите средини.

4. Основните средини за повеќе броеви

Формулите за основните средини на повеќе броеви се слични на оние за два броја и доаѓаат од намерата да збирот, односно прозводот, односно збирот на реципрочните вредности, односно збирот на квадратите да остане непроменет доколку секој од броевите се замени со соодветната аритметичка, односно геометриска, односно хармониска, односно квадратна средина. Така, нека се дадени n-те позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогаш,

- $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ е аритметичка средина на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$,
- $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ е геометриската средина на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$,
- $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ е хармониската средина на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$,
- $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ е квадратната средина на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$.

Да ја објасниме малку повеќе операцијата n-ти корен, ознака $\sqrt[n]{\ }$, која се среќава во формулата за геометриската средина. На пример, 3-ти корен на бројот 8 е бројот 2, односно $\sqrt[3]{8} = 2$, затоа што $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, потоа 4-ти корен од бројот 81 е бројот 3, односно $\sqrt[4]{81} = 3$, затоа што $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

За илустрација на основните средини на повеќе броеви, да ги пресметаме истите за броевите 1, 9 и 24. Имаме,

$$A_3 = \frac{1+9+24}{3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3} \approx 11,3333,$$

$$G_3 = \sqrt[3]{1 \cdot 9 \cdot 24} = \sqrt[3]{216} = 6,$$

$$H_3 = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{24}} = \frac{3}{\frac{83}{72}} = \frac{216}{83} = 2\frac{50}{83} \approx 2,6024,$$

$$K_3 = \sqrt{\frac{1^2 + 9^2 + 24^2}{3}} = \sqrt{\frac{658}{3}} \approx 14,8099.$$

5. Примена на основните средини

Понекогаш вистинскиот избор на некоја од средините може да биде "збунувачки", и лесно може да се направи грешка при тоа. Ви нудиме неколку ситуации и објаснувања зошто е употребена соодветната средина.

5.1. Аритметичка или хармониска средина?

Да ги разгледаме следните задачи и начините на нивно решавање.

Задача 1. Патник патува од градот А кон градот Б. За време од првиот час од патувањето тој се движи со константна брзина од $40 km/h$. По изминатиот час тој ја зголемил својата брзина, и следниот еден час се возел со брзина од $60 km/h$. Која е средната брзина со која се движел патникот?

Задача 2. Патник патува од градот А кон градот Б. Првата половина од патот тој ја поминува со брзина од $40 km/h$. По изминатата половина од патот тој ја зголемил својата брзина, и следната половина од патот се возел со брзина од $60 km/h$. Која е средната брзина со која се движел патникот?

Дали иако имаме различни ситуации, сепак одговорот на двете задачи ќе биде ист, односно дека патникот се движел со средна брзина од $(40+60):2 = 50 km/h$?

Пред се да укажеме на дефиницијата за средна брзина. Средна брзина V_s е количникот меѓу вкупниот поминат пат s_{vk} и вкупното потрошено време t_{vk} за да се помине тој пат, односно $V_s = s_{vk} / t_{vk}$.

Во ситуацијата во првата задача, патникот патувал вкупно 2 часа, односно $t_{vk} = 2h$. Првиот час тој патувал со брзина од $40km/h$, значи поминал $40km$, додека вториот час кога патувал со брзина од $60km/h$, поминал $60km$, значи тој вкупно поминал $40+60=100km$, па $s_{vk} = 100km$. Тогаш, средната брзина со која се движел патникот во првата ситуација е $V_s = 100/2 = 50km/h$ што претставува аритметичка средина од брзините со кои се движел првиот и вториот час.

Втората задача е поинаква, па и нејзиното решавање е поинакво. Да ја означиме со $s = s_{vk}/2$ половината од патот. Знаеме дека првата половина од патот патникот ја поминал со брзина од $40km/h$, од каде следи дека тој потрошил време од $s/40$ часа. Слично, бидејќи втората половина од патот тој ја патувал со брзина од $60km/h$, тој потрошил време од $s/60$ часа. Значи, вкупно потрошеното време за да го помине патот $s_{vk} = 2\cdot s$ е $t_{vk} = s/40 + s/60$. Според дефиницијата за средна брзина, имаме дека

$$V_s = \frac{s_{vk}}{t_{vk}} = \frac{2\cdot s}{\frac{s}{40}+\frac{s}{60}} = \frac{2\cdot s}{s\cdot(\frac{1}{40}+\frac{1}{60})} = \frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} = \frac{2\cdot 40\cdot 60}{40+60} = 48km/h,$$

што претставува хармониска средина од брзините со кои патникот се движел во првата и втората половина од патот соодветно.

5.2. Аритметичка или геометриска средина?

За разрешување на оваа дилема ќе ги разгледаме следните задачи.

Задача 1. Профитот (заработката) на една компанија во текот на изминатите три години пораснал за 10 милиони, 12 милиони и 14 милиони денари соодветно. Колку изнесува средниот годишен прираст на профитот?

Задача 2. Профитот (заработката) на една компанија во текот на изминатите три години пораснал за 2%, 4% и 6% соодветно. Колку изнесува средниот годишен прираст на профитот?

Одговорот на прашањето од првата задача е едноставен и јасен. Имено, се работи за аритметичка средина од прирастите на приходите од секоја од трите последователни години. Односно, средниот годишен прираст на профитот изнесува $(10+12+14):3 = 36:3 = 12$ милиони денари.

Дали истиот начин на решавање на задачата може да го примениме и во втората задача? Може да се случи, како одговор на втората задача, некој да каже дека средниот годишен прираст на профитот на компанијата изнесува $(2\%+4\%+6\%):3 = 12\%:3 = 4\%$. Но, дали ова е точниот одговор? На пример, ако земеме дека компанијата почнала со 10 000 000 денари профит, тогаш после првата година профитот пораснал за 2%, значи таа остварила $1,02\cdot 10000000 = 10200000$ денари профит. Следната година профитот пораснал за 4%, па компанијата тогаш остварила $1,04\cdot 10200000 = 10608000$ денари профит. И последната година кога профитот пораснал за 6%, па компанијата остварила $1,06\cdot 10608000 = 11244480$ денари профит. Односно, до истиот резултат доаѓаме и одеднаш, $1,06\cdot 1,04\cdot 1,02\cdot 10000000 = 11244480$ денари. Сега ако го земеме за точен одговорот дека средниот годишен прираст на профитот на компанијата е 4%, тогаш би требало почнувајќи од истиот профит и со годишен прираст на профитот од 4%, после три години да дојдеме до истиот износ на профитот од 11 244 480 денари. Но, при 4% годишен прираст, после три години се постигнува профит од $1,04 \cdot 1,04 \cdot 1,04 \cdot 10000000 = 11248640$ денари, што е за 4 160 денари повеќе. Ова значи дека средниот годишен прираст на профитот на компанијата е сигурно помал од 4%, и тој не смее да се пресметува како аритметичка средина од годишните прирасти. Дали треба да ја примениме формулата за геометриска средина и зошто?

Да го означиме со x средниот годишен прираст на профитот, тогаш треба да важи $x \cdot x \cdot x \cdot 10000000 = 11244480 = 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06 \cdot 10000000$, односно $x \cdot x \cdot x = 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06$, од каде $x = \sqrt[3]{1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06} \approx 1,03987$. Одговорот на втората задача е дека средниот годишен прираст на профитот на компанијата изнесува 3,987%, вредност добиена со помош на формулата за геометриска средина.

5.3. А квадратната средина?

Кога ги дадовме дефинициите за средините на два и повеќе броеви, напоменавме дека тие се однесуваат за позитивни реални броеви, но има случаи кога квадратната средина се пресметува и за броеви со произволен знак (може да има и негативни броеви). Всушност, во пракса квадратната средина најчесто се користи таму каде збирот на броевите е нула, односно нивната аритметичка средина е нула.

Една примена е при пресметување на средната вредност на напонот на наизменичната струја во домаќинствата. Нека трите измерени вредности на напонот на струјата изнесуваат 120, -150 и 75 волти соодветно. Тогаш, средната вредност на напонот на струјата во домаќинството изнесува

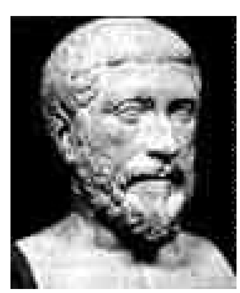
$$\sqrt{(120^2 + (-150)^2 + 75^2) : 3} = \sqrt{42525 : 3} = \sqrt{14175} \approx 119 \text{ волти.}$$

Зошто тука е искористена формулата за квадратната средина? Ќе се обидеме да дадеме накратко објаснување и за оваа примена. Прво, врската меѓу моќноста P, напонот на струјата U и отпорот R е дадена со формулата $P = \frac{U^2}{R}$. Под претпоставка на константен отпор на проводникот при наизменична струја, средната вредност на моќноста P_{sr} ќе се пресмета како аритметичка средина од измерените вредности на моќноста $P_1, P_2, ..., P_n$, односно

$$P_{sr} = \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + ... + P_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{U_1^2}{R} + \frac{U_2^2}{R} + ... + \frac{U_n^2}{R}\right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2}{n} = \frac{U_{sr}^2}{R}.$$

Ова значи дека за средната вредност U_{sr} на напонот важи $U_{sr}^2 = \frac{U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2}{n}$, односно дека $U_{sr} = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2}{n}}$, како што и ја пресметаме погоре средната вредност на напонот.

6. Уште некои интересни факти за основните средини



- Во историјата на математиката се смета дека за прв пат зборот "средина" е употребен од Питагора (6 век п.н.е.) како дел од неговите откритија во музиката за претставување на музичките интервали во вид на бројни дропки. На почетокот биле познати само аритметичката, геометриската и подспротивната, која подоцна е наречена хармониска средина.

- Иако зборот "средина" најчесто има значење на аритметичка средина, како што дадовме објаснување на почетокот, но кога во Англија 1450 год. за прв пат се појавил овој збор, тој имал значење на геометриска средина.

- Зборот "просек" најчесто има значење на аритметичка средина. Така на пример, кога некој ќе каже дека учениците во просек имаат по 6 наставни часа дневно, тоа не значи дека секој ден учениците имаат по 6 наставни часа, туку значи дека кога ќе се соберат сите наставни часови во неделата и ќе се поделат на бројот на работни денови, ќе се добие просекот од 6 наставни часа дневно. На пример, ако еден ученик во понеделник има 7 часа, во вторник има 5 часа, во среда и четврток има по 7 часа и во петок има 4 часа, тогаш тој ученик во просек ќе има $(7+5+7+7+4):5=30:5=6$ часа дневно, иако во неден од деновите нема точно 6 часа. Сега кога го разјаснивме зборот просек да проследиме неколку унтересни факти од животот:

    - Кокошката носи во просек 260 јајца годишно.
    - Кравата дава во просек по 40 чаши млеко во еден ден.
    - Од сите цицачи, мачките спијат најдолго, во просек по 16 часа дневно.
    - Жената дневно изговара во просек по 7000 зборови, додека мажот само 2000.
    - Пушачите имаат животен век во просек за 6 и пол години помал од непушачите.
    - Човекот во просек има 100 000 влакна на главата.
    - Човекот во просек дневно губи од 40 до 100 влакна од својата коса.
    - Човекот во просек заспива за 7 минути.
    - Човекот во просек се смее по 15 пати на ден.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија