**Самоил Малчески, Скопје**
**Мартин Лукарески, Скопје**

# ПОПОЛНУВАМЕ ТАБЕЛИ СО БРОЕВИ

Пополнување табели со броеви. Што е тоа? Сигурно повеќето од вас се сретнале со магичниот $3\times3$ квадрат, т.е. со задачата во табела со димензии $3\times3$ да се запишат, на пример, броевите од 1 до 9, но така што збирот на броевите запишани во секоја редица, колона и дијагонала да биде еднаков. Решавањето на оваа и слични задачи не е ниту лесно, ниту едноставно, но само да споменеме дека за пополнување на класичните магичните квадрати со непарна димензија (непарен број на полиња на една страна) постои разработен алгоритам, кој овде нема да го разгледуваме. Во нашите натамошни разгледувања ќе се осврнеме на неколку задачи, во кои квадратна табела треба да се пополни со дадени броеви, при што треба да бидат исполнети определени услови.

Најпрво ќе разгледаме неколку задачи кои се однесуваат на пополнување на табела со димензии $3\times3$.

1. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се запишани во магичен квадрат (збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков). Определи го збирот на броевите запишани во четирите аголни квадратчиња.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   |   |   |
|   |   |   |

**Решение.** Збирот на броевите од 1 до 9 е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Според тоа, збирот на броевите запишани во секој од трите реда е $45:3=15$. Ако ги собереме збировите на вториот ред, втората колона е двете дијагонали ќе добиеме $4\cdot15=60$, при што во овој збир бројот запишан во централното квадратче учествува четири пати, а сите други броеви учествуваат по еднаш. Според тоа, во централното квадратче е запишан бројот $(60-45):3=5$. Сега, збирот на броевите запишани во четирите аголни полиња е еднаков на $2\cdot15-2\cdot5=20$. ■

2. Во табелата на цртежот десно се запишани броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. Збирот на броевите запишани во секоја редица е еднаков и е двапати поголем од збирот на броевите запишани во полињата означени со $*$. Кои броеви се запишани во полињата означени со $*$? Посочи пример на табела со ова својство.

|   |   |   |
|---|---|---|
| ⋆ |   |   |
|   | ⋆ |   |
|   |   | ⋆ |

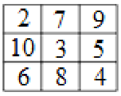
**Решение.** Збирот на сите броеви запишани во табелата е еднаков на

$$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54.$$

Имаме три редици во кои се запишани броеви кои имаат еднакви збирови, па затоа збирот на броевите запишани во една редица е еднаков на $54:3=18$. Овој збир е двапати поголем од збирот на броевите запишани во полињата означени со $*$, па затоа збирот на броевите во дијагоналните полиња е еднаков на $18:2=9$. Од броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10, збир на три различни броја се добива на единствен начин и тоа

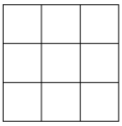
$$2+3+4=9.$$

На цртежот десно е даден пример на табела со саканото својство. Да забележиме дека табелата во дадениот пример го има истото својство и во однос на колоните, т.е. збирот на броевите запишани во секоја колона е двапати поголем од збирот на броевите запишани во дијагоналните полиња. ■



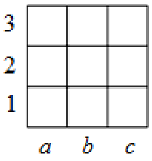
| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 9 |
| 10 | 3 | 5 |
| 6 | 8 | 4 |

3. Во табелата на цртежот десно се запишани 6 нули и 3 единици така што во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала има барем по една единица. Определи го збирот на броевите запишани во четирите аголни полиња.



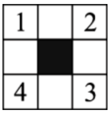
**Решение.** Во табелата се запишани 3 единици така што во трите реда има барем по една единица. Тоа значи, дека во секој ред има точно по една единица и по две нули. Аналогно во секоја колона има точно по една единица и по две нули.

Нека претпоставиме дека единица е запишана во полето $a2$. Тогаш во преостанатите две полиња на колоната $a$ и преостанатите две полиња на редот 2 се запишани нули. Ако втората единица е запишана во полето $b1$ или во полето $b3$, тогаш третата единица мора да е запишана во полето $c3$ или во полето $c1$, соодветно. И во двата случаја на една од дијагоналите нема да е запишана ниту една единица, што противречи на условот на задачата. Аналогно се докажува дека единица не може да биде запишана ниту во полињата $b1, b3$ и $c2$. Но, во колоната $b$ е запишана единица, па затоа таа се наоѓа во поето $b2$. Сега лесно се добива дека другите две единици се запишани во аголните полиња на иста дијагонала.



Конечно, од претходно изнесеното следува дека збирот на броевите во аголните полиња е еднаков на 2. ■

4. Во квадратчињата на еден $3\times3$ квадрат Никола ги запишал броевите од 1 до $9$ . Притоа, четири од овие броеви се гледаат, а останатите се прекриени (цртеж десно). Тој на својот брат Стојан му кажал дека за бројот 5 важи дека збирот на броевите во соседните квадратчиња е еднаков на 13 (соседни квадратчиња се оние кои имаат заедничка страна) и дека истото важи и за бројот 6. Кој број го запишал Никола во црното квадратче?



**Решение.** Јасно, бројот 5 не е запишан во црното квадратче, бидејќи тогаш збирот на броевите во неговите соседни квадратчиња е

$$6+7+8+9=30.$$

Исто така и бројот 6 не е запишан во црното квадратче, бидејќи тогаш збирот на броевите во неговите соседни квадратчиња е

$$5+7+8+9=29.$$

Значи, броевите 5 и 6 се запишани во белите полиња.

Ако во црното квадратче е запишан бројот 7, тогаш збировите на соседните броеви на белите квадратчиња се

$$7+1+2=10,\quad 7+2+3=12,\quad 7+3+4=14,\quad 7+4+1=12,$$

што не е можно бидејќи два од збировите треба да се еднакви на 13. Ако во црното квадратче е запишан бројот 9, тогаш збировите на соседните броеви на белите квадратчиња се

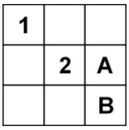
$$9+1+2=12,\quad 9+2+3=14,\quad 9+3+4=16,\quad 9+4+1=14,$$

што не е можно бидејќи два од збировите треба да се еднакви на 13. Ако во црното квадратче е запишан бројот 8, тогаш збировите на соседните броеви на белите квадратчиња се

$$8+1+2=11,\quad 8+2+3=13,\quad 8+3+4=15,\quad 8+4+1=13,$$

што значи дека во црното квадратче е запишан бројот 8. ■

5. Марко треба да ја дополни табелата дадена на цртежот десно, така што во секоја редица и секоја колона точно по еднаш се содржат броевите 1, 2 и 3. Колку изнесува збирот на двата броја кои Марко треба да ги запише во квадратчињата означени со буквите А и В?



**Решение.** Од условот на задачата следува дека во првото квадратче од втората редица треба да е запишан бројот 3, кој исто така треба да биде запишан и во второто квадратче на првата редица. Според тоа, во третото квадратче на првата редица треба да биде запишан бројот 2, а на местото на буквата А треба да биде запишан бројот 1. Сега, на местото на буквата В треба да е запишан бројот 3. Конечно, збирот на броевите во квадратчињата означени со буквите А и В е $1+3=4$. ■

6. Во квадратот даден на цртежот десно, во секое од малите квадратчиња треба да се запишат броевите 1, 2 и 3, но така што во секој ред и секоја колона мора да се содржи секој од броевите 1, 2 и 3. Кој број може да биде запишан на местото на прашалникот?

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **?** | |
| **2** | **1** | |
| | | |

**Решение.** Јасно, на местото на прашалникот не може да биде запишан бројот 1. Понатаму, ако на местото на прашалникот е запишан бројот 2, тогаш во празните полиња на првата и втората колона треба да биде запишан бројот 3, што не е можно бидејќи тогаш во третата редица нема да се запишани сите три броја 1, 2 и 3. Останува да пороввериме дали на местото на прашалникот може да се запише бројот 3. Тогаш во третото поле на првиот ред треба да стои бројот 2, во третото поле на вториот ред бројот 3, а во третиот ред последователно од лево кон десно броевите 3, 2 и 1, со што условот на задачата е исполнет.

Од досега изнесеното следува, дека на местото на прашалникот може да биде запишан само бројот 3. ■

7. Во еден вид СУДОКУ броевите 1, 2, 3 и 4 треба да се запишат во секоја колона и секоја редица по еднаш. Во математичкото СУДОКУ Илија прво мора да ги запише резултатите од алгебарските операции (цртеж десно), а потоа да го дополни СУДОКУТО. Кој број Илија ќе го запише во сивото квадратче?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1\times1$ | | $1\times3$ | |
| $2\times2$ | $6-3$ | | $6-5$ |
| $4-1$ | $1+3$ | $8-7$ | |
| $9-7$ | $2-1$ | | ▨ |

**Решение.** Прво Илија треба да ги изврши назначените операции со што ја добива табелата прикажана на цртежот десно.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 3 | |
| 4 | 3 | | 1 |
| 3 | 4 | 1 | |
| 2 | 1 | | ▨ |

Сега, прво Илија треба во третото квадратче на втората редица да го запише бројот 2 и во четвртото поле на третата редица повторно да го запише бројот 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

Понатаму, во првото квадратче на втората колона го запишува бројот 2, а во четвртото квадратче на третата колона бројот 4. Потоа, во четвртото квадратче на првата редица треба да го запише бројот 4, за да конечно во сивото квадратче да го запише бројот 3 (цртеж лево). ■

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ