Републички натпревар 1986

I година

1. На колку нули завршува бројот $1986!$?

Решение. Нека $1986!=2^m\cdot 5^n\cdot k$, каде што k не е делив ниту со 2 ниту со 5. Бидејќи во броевите од 1 до 1986, 2 се појавува почесто отколку 5, следува дека $m>n$. Бидејќи $10=2\cdot 5$, следува дека 1986 завршува на n нули. Меѓу броевите $1,2,3,...,1986$ постојат $[\frac{1986}{5}]=397$ броеви кои завршуваат на 5, $[\frac{1986}{25}]=79$ броеви деливи со 5^2, $[\frac{1986}{125}]=15$ броеви деливи со 5^3, $[\frac{1986}{625}]=3$ броеви деливи со 5^4 и не постојат броеви делив со 5^5. Според тоа, бројот на нулите па бројот $1986!$ е

$$n=397+79+15+3=494\,.$$

2. Еден човек патува со чамец по реката Дрим од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е $18\ km$, а тој патувал вкупно 5 часа. Колкава е брзината на реката Дрим, ако човекот за исто време патувал $4\ km$ низводно, а $2\ km$ во обратна насока?

Решение. Нека брзината на реката е $x\ km/h$, а на чамецот во мирна вода е $y\ km/h$. Од условот на задачата следува следува дека

$$\frac{18}{y+x}+\frac{18}{y-x}=5 \quad \text{и} \quad \frac{4}{y+x}=\frac{2}{y-x}\,.$$

Нека $\frac{1}{y+x}=u$, $\frac{1}{y-x}=v$. Тогаш се добива системот равенки

$$\begin{cases}18u+18v=5\\ 4u=2v\end{cases}.$$

Негово решение е $u=\frac{5}{54}$, $v=\frac{5}{27}$. Според тоа, го добиваме системот

$$\begin{cases}x+y=\frac{54}{5}\\ x-y=\frac{27}{5}\end{cases}$$

т.е. $x=2,7\,km/h$, $y=8,1\ km/h$. Значи, брзината на реката Дрим е $2,7\,km/h$.

3. Средините на страните во даден паралелограм се поврзани со спротивните темиња. Така добиените отсечки заградуваат еден осумаголник. Да се покаже дека неговата плоштина е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

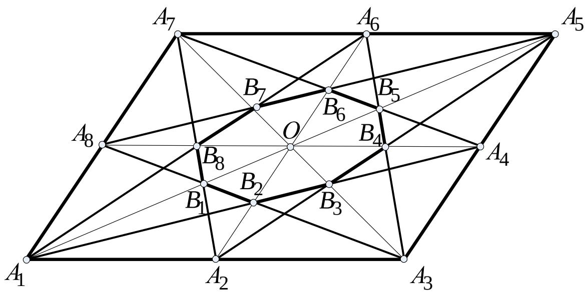
Решение. Нека A_2,A_4,A_6,A_8 се средини на страните, а O центар на паралелограмот $A_1A_3A_5A_7$. Нека $B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6,B_7,B_8$ се темиња на осумаголникот (види цртеж).

Бидејќи пресекот на дијагоналите во параллелограм е негов центар на симетрија, следува дека A_8, B_8, O, B_4, A_4, а исто така и A_6, B_6, O, B_2, A_2 се колинеарни.

Нека M е пресекот на A_4A_6 и OA_5. Бидејќи M е средина на A_4A_6 следува дека B_5 е тежиште на триаголникот OA_4A_6 и O, B_5, N, A_5 се колинеарни. Слично се покажува дека A_1, B_1, O, B_5, A_5, а исто така и A_3, B_3, O, B_7, A_7 се колинеарни.

Нека P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 се плоштините на триаголниците OA_4A_5, OA_4B_5, OB_4B_5, $A_4B_5B_4$, $A_4A_5B_5$ соодветно. Бидејќи триаголниците OB_4B_5 и $B_4A_4B_5$ имаат еднакви страни и висини, следува дека $P_3 = P_4$. Бидејќи триаголниците OA_4B_5 и $B_5A_4A_5$ имаат еднакви висини спуштени од A_4 и $\overline{A_5B_5} = 2\overline{OB_5}$ (B_5 е тежиште на триаголникот OA_4A_6), следува дека $P_5 = 2P_2$. Од тоа што $P_2 = P_3 + P_4 = 2P_3$, следува дека

$P_1 = P_2 = P_5 = 3P_2 = 6P_3$.



Оваа дискусија се спроведува на ист начин за секој од паровите триаголници (OB_1B_2, OA_1A_2), (OB_2B_3, OA_2A_3), …, (OB_8B_1, OA_8A_1) (види цртеж), од што следува дека плоштината на осумаголникот е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

4. Во секое поле од шаховската табла е запишан број. Збирот на броевите запишани на било кои четири полиња што формираат патека на коњ (во облик на буквата Г) е константен. Колку различни броеви се запишани на таблата? Одговорот да се образложи.

Решение. Да разгледаме произволен 3×3 дел од таблата (види цртеж). Според условот од задачата следува дека $a_1 + a_4 + a_5 + a_6 = a_4 + a_5 + a_6 + a_3$, од каде што следува дека $a_1 = a_3$. Слично се докажува дека $a_4 = a_6$, $a_7 = a_9 = a_3 = a_1$ и $a_2 = a_8$.

Потоа, од $a_1 + a_2 + a_5 + a_2 = a_1 + a_2 + a_5 + a_8 = a_1 + a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_5 + a_4 + a_4$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a	c	a
c	a	c
a	c	a

следува дека $a_2 = a_4$. Слично се покажува дека $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a$ и $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = c$. Според тоа, броевите запишани на истобојни полиња (црни или бели) се еднакви. Нека на белите полиња е запишан бројот a, а на црните полиња е запишан бројот c. Ако $a = c$, тогаш одговорот е еден, а ако $a \neq c$, тогаш одговорот е два.

II година

1. Да се покаже дека за секој природен број k

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1} > \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Решение. За секој $k \geq 1$, од $4k^2 - 1 < 4k^2$ делејќи со позитивниот број $2k(2k+1)$ следува дека $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$. Според тоа, даденото неравенство следува од неравенството

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k+1} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\right) \\ &< \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)^2.\end{aligned}$$

2. Следната равенка да се реши во множеството природни броеви

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336.$$

Решение. Ако една подредена тројка природни броеви е решение на равенката, тогаш и секоја нејзина пермутација е исто така решение на равенката.

Нека x, y, z е решение на равенката во множеството природни броеви. Ќе покажеме дека $x \neq y \neq z \neq x$, покажувајќи дека ако два броеви од x, y, z се еднакви, тогаш x, y, z не е решение. Нека $x = y$. Тогаш е можно: 1) $z = x$; 2) $z < x$; 3) $z = x+1$ или 4) $z > x+1$.

1) Ако $z = x$, тогаш $2^x + 2^y + 2^z = 3\cdot 2^x$ е делив со 3, а 2336 не е делив со 3.

2) Ако $z = x+1$, тогаш 2336 е делив со 73, а $2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+2}$ не е.

3) Нека $z > x+1$, т.е. $z = x+1+k$ за некој природен број k. Тогаш

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^{x+1}(1+2^k)$$

не е еднаков на 2336 од исти причини како и во 2).

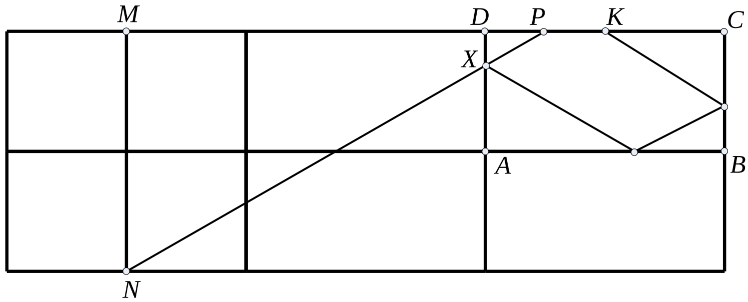
На ист начин се покажува дека $x \neq z$ и $y \neq z$.

Нека $x < y < z$, т.е. $y = x+p$, $z = y+s = x+p+s$. Тогаш од

$$2^x[1+2^p(1+2^s)] = 2^x + 2^y + 2^z = 2336 = 2^5[1+2^3(1+2^3)],$$

следува дека $x = 5, y = 8$ и $z = 11$. Значи, решенија на равенката се сите пермутации на тројката $5, 8, 11$.

3. На маса за играње на билијард во облик на правоаголник $ABCD$, поставена е билијардна топка на растојание $1m$ од ќошот D и $3m$ од ќошот C. Страните на масата се $\overline{AB}=\overline{CD}=4\ m$ и $\overline{BC}=\overline{AD}=2\ m$. Топката е удрена така што првото одбивање е од страната AD. После три одбивања топката удира во средината на страната CD. Да се определи точката од страната AD во која топката се одбила првиот пат.



Решение. Бараната топка е на растојание $\frac{4}{7}$ m од ќошот D. Тоа следува од сличноста на триаголниците MNP и DXP (види цртеж).

4. На секое поле од една 100×100 „шаховска“ табла запишан е знак $+$. Се дозволува со една операција да се заменат сите знаци во некој ред или колона со нивните спротивни знаци ($+$ со $-$ или $-$ со $+$). Дали е можно после конечно многу операции на таблата да бидат запишани точно 1986 знаци со $-$? Одговорот да се образложи.

Решение. По конечен број на операции, нека x_k е бројот на операции применети на k-тиот ред, а y_k е бројот на операции применети на k-тата колона, за $k=1,2,...,100$. Нека меѓу броевите $x_1,x_2,...,x_{100}$ има p, а меѓу $y_1,y_2,...,y_{100}$ има q непарни броеви. Бидејќи парен број операции на дадена колона или ред не ги менува знаците, следува дека, после конечниот број на операции, на таблата ќе има точно

$$100p+100s-2pq=p(100-q)+q(100-p)$$

знаци $-$. Според тоа, задачата се сведува на прашањето: Дали постојат непарни броеви p и q така што $0\le p\le100$, $0\le q\le100$ и $p(1000-q)+q(100-p)=1986$? Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$(50-p)(50-q)=1507=11\cdot137\ .$$

Бидејќи 11 и 137 се прости броеви, а $-50\le50-p\le50$ и $-50\le50-q\le50$, следува дека такви броеви p и q не постојат.

III година

1. Да се докаже дека равенката

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{p},\ p\in\mathbb{N}$$

има единствено решение во $\mathbb{N}$ ако и само ако p е прост број.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката, тогаш $\frac{1}{x}>\frac{1}{p}$, па $x<p$. Значи, за $p=1$ равенката нема решение во множеството природни броеви.

Нека $p>1$. Ако постои решение во $\mathbb{N}$, тогаш $x=p-k$ за некој природен број $0<k<p$ од што следува дека $\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p}=\frac{1}{y}$, т.е. $y=\frac{p(p-k)}{k}$. За $k=1$ се добива едно решение: $x=p-1,\ y=p(p-1)$.

Нека p е прост број. Тогаш $\mathrm{NZD}(p,k)=1$ и $\mathrm{NZD}(p-k,k)=1$, за секој $1<k<p$. Според тоа $\frac{p(p-k)}{k}$ не е природен број, па единствено решение е: $x=p-1,\ y=p(p-1)$.

Обратно, ако p не е прост број, т.е. $p=m\cdot n,\ m\neq 1\neq n$, тогаш решение на равенката е и парот $x_1=p-m,\ y_1=n(p-m)$.

2. Да се реши равенката

$$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4.$$

Решение. Бидејќи $x=0$ не е решение на равенката, таа е еквивалентна со равенката

$$\left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right)^4+\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^4-2=0.$$

Со смената , $\frac{x^2+x+1}{x}=p$, ја добиваме равенката

$$(p-1)^4+(p+1)^4-2=0,$$

чии решенија се $p_1=p_2=0$, $p_3=i\sqrt{6}$ и $p_4=-i\sqrt{6}$.

За $p_1=p_2=0$, се добива $x^2+x+1=0$, т.е. $x_1=x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=x_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

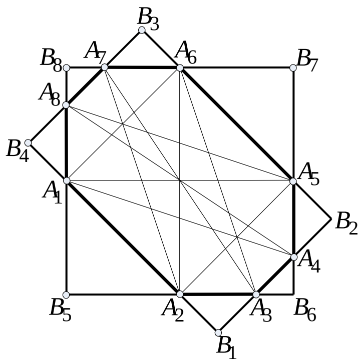
За $p_3=i\sqrt{6}$ се добива равенката $x^2+(1-i\sqrt{6})x+1=0$, т.е.

$$x_{5/6}=\frac{-1+i\sqrt{6}\pm\sqrt{-9-2i\sqrt{6}}}{2},$$

За $p_3=-i\sqrt{6}$, се добива равенката $x^2+(1+i\sqrt{6})x+1=0$, т.е.

$$x_{7/8}=\frac{-1-i\sqrt{6}\pm\sqrt{2i\sqrt{6}-9}}{2}.$$

3. Ако еден осумаголник има еднакви агли и должините на страните му се рационални броеви, тогаш тој осумаголник има центар на симетрија. Да се докаже.



Решение. Бидејќи збирот на аглите на осумаголникот е 1080° следува дека аглите на дадениот осумаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ се еднакви на 135°. Ако над секоја страна од осумаголникот доцртаме од надворешна страна рамнокрак правоаголен триаголник, ќе добиеме два правоаголници $B_1B_2B_3B_4$ и $B_5B_6B_7B_8$ (види цртеж). Со пресметување се добива дека

$$\overline{B_1B_4} = \overline{A_1A_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_1A_9} + \overline{A_2A_3}) \text{ и}$$

$$\overline{B_2B_3} = \overline{A_5A_6} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}) \ .$$

Од тоа што $\overline{B_1B_4} = \overline{B_2B_3}$; должините на страните на осумаголникот се рационални броеви; и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ е ирационален број, следува дека $\overline{A_1A_2} = \overline{A_5A_6}$. Слично се покажува дека $\overline{A_2A_3} = \overline{A_6A_7}$, $\overline{A_3A_4} = \overline{A_7A_8}$ и $\overline{A_4A_5} = \overline{A_8A_1}$. Бидејќи $A_1A_2 \parallel A_5A_6$, $A_2A_3 \parallel A_6A_7$, $A_3A_4 \parallel A_7A_8$ и $A_4A_5 \parallel A_8A_1$ следува дека четириаголниците $A_1A_2A_5A_6$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_3A_4A_7A_8$, $A_4A_5A_8A_1$ се паралелограми. Од тоа што: A_1A_5 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_8$ и $A_1A_2A_5A_6$; A_2A_6 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_6A_7$; A_3A_7 е дијагонала на $A_2A_3A_6A_7$ и $A_3A_4A_7A_8$; и A_4A_8 е дијагонала на $A_3A_4A_7A_8$ и $A_1A_4A_5A_8$, следува дека горните четири паралелограми имаат ист центар на симетрија за осумаголникот

4. Членовите на едно племе живеат не повеќе од 79 години и само оние кои наполниле 20 години можат да создаваат потомство. Во племето има 1986 луѓе. Да се докаже дека постојат 497 членови на племето од кои никој не е потомок на друг.

Решение. Бидејќи $\frac{79}{20} < 4$, следува дека секој член од тоа племе може да има најмногу три колена потомци. Членовите на племето можат да се разделат во четири дисјунктни класи. Во првата класа се сите членови кои немаат потомци. Во втората класа се сите членови кои имаат точно едно колено потомци. Во третата класа се сите членови кои имаат точно две колена потомци. Во четвртата класа се останатите членови на племето, т.е. оние членови кои имаат точно три колена потомци. Во секој од тие класи ниеден член не е потомок на друг член од истата класа, затоа што во спротивно, тие двајца би имале различен број на колена на потомци. Бидејќи $4 \cdot 496 < 1986$, следува, според принципот на Дирихле, дека постои барем една класа во кој има барем 497 членови.

IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број $k>1$, збирот

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k},$$

не е природен број.

Решение. Нека n е најголемиот природен број за кој 2^n е делител на некој од броевите $2,3,4,...,k$. Ако 2^n е делител на два од тие броеви, тогаш тие броеви се од облик $2^n p$ и $2^n q$ за p и q непарни броеви. Бидејќи меѓу секои два непарни природни броеви постои парен број, следува дека меѓу $2^n p$ и $2^n q$, па значи и помеѓу $2,3,4,...,k$, постои природен број од облик $2^n r$ за r парен број. Според тоа 2^{n+1} е делител на некој од броевите $2,3,4,...,k$. Значи, постои само еден број од броевите $2,3,4,...,k$ кој е делив со 2^n. Нека m е тој број. Најмалиот заеднички содржател на броевите $2,3,4,...,k$ е од облик $2^n s$, каде што s е непарен број. Нека $x_i=\frac{2^n s}{i}$, за $i=2,3,4,...,k$. Тогаш x_i е парен број за секој $i\neq m$ и x_m е непарен. Дадениот збир е

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{2^n s}=\frac{A}{B},$$

каде што A е непарен, а B е парен природен број. Според тоа, тој збир не е природен број.

2. Нека f е функција со својството

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1).$$

Да се докаже дека f е периодична функција.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\begin{aligned} f(x+2)+f(x)&=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1)) \\ &=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1) \end{aligned},$$

т.е.

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} f(x+4)&=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1) \\ &=f(x)-\sqrt{2}[f(x+1)+f(x-1)] \\ &=f(x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}f(x) \\ &=-f(x) \end{aligned}.$$

Значи, за секој реален број x,

$$f(x+8) = -f(x+4) = f(x),$$

од што следува дека f е периодична функција.

3. Иста како задача 3 од трета година.

4. Иста како задача 4 од трета година.