ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

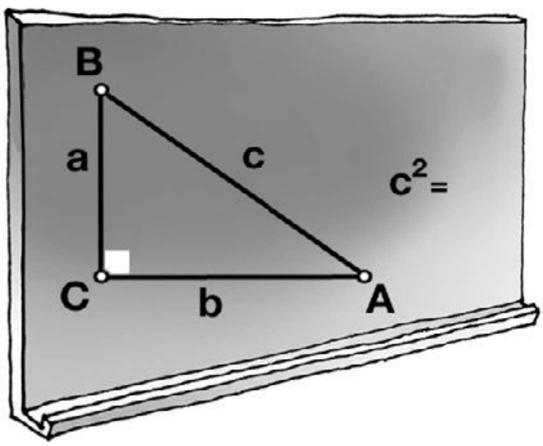
ЗА ОСНОВНО ОБРАЗОВАНИЕ

Ристо Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески

Скопје, 2023

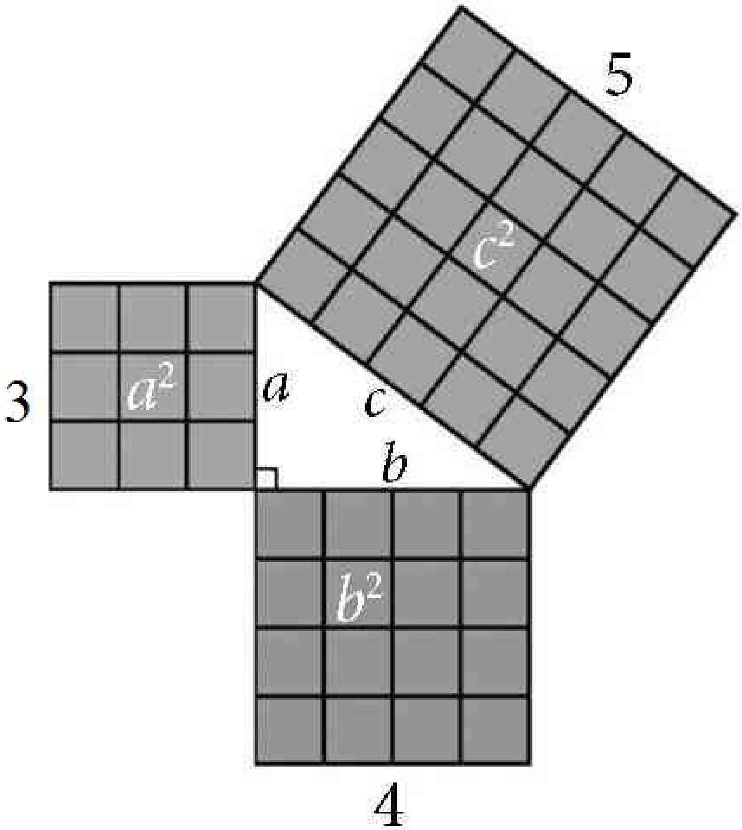
Ристо Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески

ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА ЗА ОСНОВНО ОБРАЗОВАНИЕ



Скопје, 2023

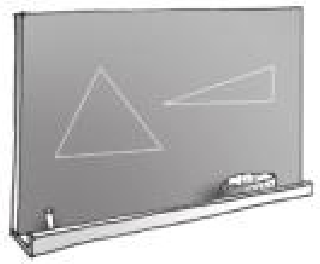
Рецензент:
Д-р Зоран Мисајлески,
Градежен факултет, Скопје



СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 237 геометриски задачи, повеќето од кои се задавани на математички натпревари во основното образование. Задачите се поделени во шест глави и тоа:



1. Триаголник,
2. Четириаголник,
3. Кружница и круг,
4. Неравенства,
5. Дополнителни задачи и
6. Нерешени задачи.

Повеќето од задачите разгледувани во првите пет глави се детално решени, а некои задачи се со кратки решенија, кои се доволни за да се следи идејата на решението. Затоа, на читателот му препорачуваме сите решенија детално да ги испише. Притоа, од особена важност е да ги нацрта цртежите за задачите кај кои истите недостасуваат. Освен тоа, сакаме да напоменеме дека и покрај вложениот напор задачите не се идеално под-редени според тежината на истите, бидејќи за ваков вид задачи тоа прак-тично и не е можно целосно да се направи.

Задачите содржани во шестата глава не се решени и за истите не се понудени ниту упатства за нивно решавање. Сметаме дека читателот треба посебно внимание да обрне на овие задачи, бидејќи голем дел од подготов-ките за натпреварите треба да се одвива токму на самостојно откривање на решенијата на задачите кои претходно биле задавани на различни натпре-вари, почнувајќи од регионално ниво, па се до Јуниорската балканска математичка олимпијада, која покрај Европскиот математички куп (јуни-ори), Турнирот на градови (основна и напредна варијанта за 8 и 9 одде-ление) и Иранската геометриска олимпијада (елементарно ниво), момен-тално е показател за нивото кое треба да го достигнат учениците на возраст до 15,5 години.

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодариме на рецензентот д-р Зоран Мисајлески чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надеваме дека оваа мала збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за националните, така и за меѓународните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што рековме, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторите
мај, 2023 г.

1. ТРИАГОЛНИК

1. Во рамнината се дадени пет точки A, B, C, D, E, такви што $\overline{AC} = 5\ cm$, $\overline{AE} = 4\ cm$, $\overline{BC} = 14\ cm$, $\overline{BD} = 2\ cm$ и $\overline{DE} = 3\ cm$. Определи го растојанието меѓу срединнте на отсечките AB и CD.

2. Даден е триаголник ABC со центар на впишаната кружница I и $\measuredangle BAC = 70^\circ$. Ако $\overline{CA} + \overline{AI} = \overline{BC}$ определи го $\measuredangle ABC$.

3. Околу $\triangle ABC$ е опишана кружница k. Тангентите на k во точките A и B се сечат во точката T. Правата низ T, паралелна со AC ја сече BC во точката D. Докажи, дека $\overline{AD} = \overline{CD}$.

4. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката H и $\overline{CH} = \overline{AB}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

5. За внатрешните агли $\alpha = \measuredangle BAC$ и $\beta = \measuredangle ABC$ на триаголникот ABC важи $\alpha - \beta = 90^\circ$. Нека M и N се пресечните точки на правата AB со симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C, соодветно. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$!

6. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со краци AC и BC и $\measuredangle ACB = 108^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D. Низ D повлекуваме права нормална на AD која ја сече правата AB во точка E. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{CD}$.

7. Даден е $\triangle ABC$. Точката D од страната AC е таква што $2\overline{AD} = \overline{DC}$. Нека E подножјето на нормалата повлечена од D кон BC, а F пресечната точка на правите BD и AE. Ако триаголникот BEF е рамностран, определи го $\measuredangle ADB$.

8. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C.

Точките D и E се соодветно подножја на висината и симетралата на внатрешниот агол повлечени од темето C кон хипотенузата AB. Нека $AD = q, BD = p$ и $AE = n, BE = m$. Докажи дека:

а) $a : b = m : n$,

б) $p : q = m^2 : n^2$.

9. Даден е $\triangle ABC$ со тежиште G. Точката M е средина на отсечката AG. Определи го односот во кој правата CM ја дели тежишната линија на $\triangle ABC$ повлечена од темето B.

10. Околу кружница со радиус 1 е опишан $\triangle ABC$, чии должини на висини се цели броеви. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамностран.

11. Точката D е средина на лакот ACB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Кружница низ точките D и C ги сече отсечките CA и CB соодветно во точките M и N. Докажи, дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.

12. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC е избрана точка M. Точката N е надворешна за $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ е рамностран. Правата AC ја сече правата BN во точка D, а правата CM ја сече правата AN во точка K. Определи го $\measuredangle ADK$.

13. Точката M е средина на страната AB на триаголникот ABC, а точката N е средина на CM. Продолжението на AN ја сече BC во точката P. Определи го односот $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}$.

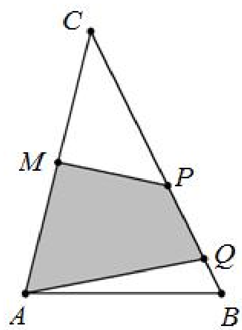
14. Докажи дека во секој триаголник ABC важи формулата
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$
каде h_a, h_b, h_c се висините, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

15. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана точка M. Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме соодветно со n_a, n_b, n_c. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини во триаголникот.

16. Во триаголникот ABC точката M е средина на страната AC. Точката P лежи на страната BC и $\overline{CP}=q\%\overline{BC}$, а точката Q припаѓа на отсечката PB и е таква што $\overline{PQ}=k\%\overline{PB}$. Плоштината на четириаголникот $AQPM$ е еднаква на $p\%$ од плоштината на триаголникот ABC (цртеж десно).
а) Ако $k=50$, да се определи p.
б) Ако $p=q=60$, да се определи k.



17. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол при темето C, катети a и b и висина повлечена кон хипотенузата h. Докажи дека
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

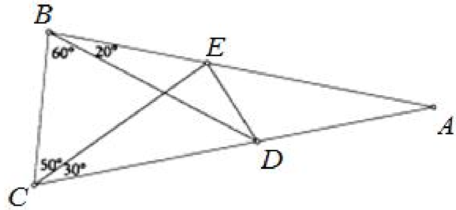
18. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC=20^\circ$ и $\overline{AB}=\overline{AC}$. На страната AB е земена точка D така што $\overline{AD}=\overline{BC}$. Определи го $\measuredangle DCA$.

19. Во триаголникот ABC, $\measuredangle ACB=60^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка M, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точка N. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SM}=\overline{SN}$.

20. Во триаголникот ABC повлечени се симетралите на аглите во темињата A и C. Точките P и Q се проекциите на точката B на тие симетрали, соодветно. Докажи дека отсечката PQ е паралелна со страната AC.

21. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот $AL\,(L\in BC)$ и тежишната линија $CM\ (M\in AB)$ се заемно нормални. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$, ако тие се последователни цели броеви.

22. Според податоците од цртежот десно, определи го $\measuredangle BDE$.



23. Низ центарот I на впишаната кружница за $\triangle ABC$ е повлечена права, која ги сече AB и BC соодветно во точките M и N. Точките K и L на страната AC се такви што $\measuredangle IKL = \measuredangle INB$ и $\measuredangle ILK = \measuredangle IMB$. Докажи дека $\overline{AM} + \overline{KL} + \overline{CN} = \overline{AC}$.

24. Во триаголникот ABC е исполнето равенството $\overline{BC} = 2\overline{AC}$. Точката D на страната BC е таква, што $\measuredangle CAD = \measuredangle CBA$. Правата AD ја сече надворешната симетрала на аголот во темто C во точката E. Докажи $\overline{AE} = \overline{AB}$.

25. Даден е остроаголен триаголник ABC со центар O на опишаната кружница и ортоцентар H. Нека D е пресечната точка на CO и AB, E е средината на CD, точката P е подножјето на нормалата повлечена од C кон AB, а X е средината на OH. Докажи дека
$$\overline{OE} + \overline{XE} = \overline{PX}.$$

26. Во триаголник ABC е впишана кружница со центар I, која ги допира страните CA и AB соодветно во точките E и F. Ако BI ја сече EF во точката K, докажи, дека K припаѓа на правата која минува низ средините на страните BC и AC.

27. Во $\triangle ABC$, со страни $\overline{AC} = 10$ и $\overline{BC} = 15$, точките T и I се соодветно тежиштето и центарот на впишаната кружница. Определи ја должината на страната AB, ако $\measuredangle CIT = 90^\circ$.

28. На страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка N, а на отсечката CN е избрана точка P таква што $\overline{CP} = k\%\overline{CN}$ Нека Q и R се средините на отсечките AP и BP, соодветно. Ако плоштината на $\triangle CQR$ е еднаква на 35% од плоштината на $\triangle ABC$, да се определи k.

29. Во триаголникот ABC познати се $\overline{AC} = 6cm, \overline{BC} = 8cm$ и $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Точката M е средина на отсечката AB, а точката D лежи на истата

страна од отсечката *AB* како и точката *C*, но така што $\overline{DA} = \overline{DB} = 7\ cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот CDM.

30. Нека a, b, c се страни на даден $\triangle ABC$ и притоа важи равенството
$$a^2 + b^2 = c^2.$$
Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната c е прав.

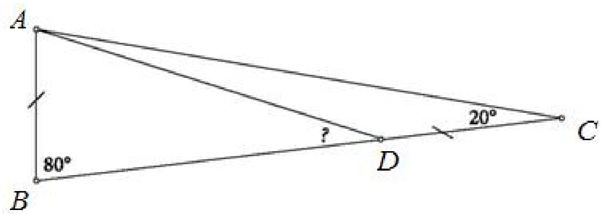
31. Даден е триаголник ABC со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a = 12\ cm$ и $t_b = 20\ cm$. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

32. Во правоаголен $\triangle ABC$ низ средината M на хипотенузата AB е повлечена права, нормална на AB, која ја сече катетата BC во точка K и продолжението на катетата AC во точка L. Да се определи $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB}$, ако $\overline{KM} : \overline{KL} = 9 : 7$.

33. Разликата на квадратите на отсечките кои ги формира нормалата повлечена од средината на една од катетите кон хипотенузата е еднаква на квадратот на другата катета. Докажи!

34. Нека O точка е во внатрешноста на правоаголниот $\triangle ABC$, со прав агол во темето C. Ако плоштините на триаголниците AOB, BOC и AOC се еднакви, докажи дека
$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 5\overline{OC}^2.$$

35. Според податоците на долниот цртеж, ако $\overline{AB} = \overline{CD}$, пресметај го $\measuredangle ADB$.



36. Даден е правоаголен триаголник со остар агол 15°, радиус на опишана кружница R и катети a и b. Докажи дека $R = \sqrt{ab}$.

37. Нека точката D е средина на страната AB на триаголникот ABC, а точката E припаѓа на страната AC и е таква што важи $\overline{AE} = 2\overline{EC}$. Докажи дека правата BE ја полови тежишната линија CD на триаголникот ABC

38. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\measuredangle ACB$ е 48°. Нормалата на симетралата на $\measuredangle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

39. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC, а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB. Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP.

40. Даден е остроаголен триаголник ABC $(\overline{CA} > \overline{BC} > \overline{AB})$ со ортоцентар H и центар на опишана кружница O. Симетралите на $\measuredangle C$ и $\measuredangle B$ ја сечат опишаната кружница соодветно во точките D и E. Точката D' е симетрична на D во однос на AB, а точката E' е симетрична на E во однос на AC. Ако точките O, H, D', E' лежат на една кружница, определи го $\measuredangle BAC$ и докажи, дека правата $D'E'$ минува низ точката A.

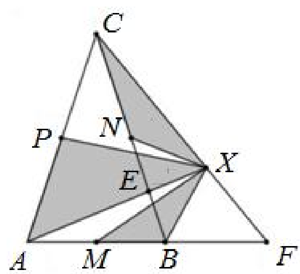
41. Во триаголник ABC, CD е висината во триаголникот спуштена од темето од C и точката H е ортоцентарот на триаголникот. Нека точката K е центар на кружница која што минува низ точката D и нека правата BH е тангента на кружницата со допирна точка H. Докажи дека правата DK ја преполовува страната AC.

42. Во триаголник ABC е впишана кружница со центар I, која ги допира страните BC, CA, AB соодветно во точките D, E, F. Ако BI ја сече EF во точката K, а AI ја сече FD во точката L, докажи, дека $\measuredangle KCL = \measuredangle EFD$.

43. Дадени се два триаголника, такви што должините на страните на првиот триаголник се совпаѓаат со должините на тежишните линии на вториот триаголник. Определи го односот на плоштините на овие два триаголника.

44. Во агол се впишани две кружници со радиуси r и R, кои немаат заедничка точка и рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AC}=\overline{BC}$ (точките A и B се на едниот крак, а точката C на другиот крак од аголот). Кружницата со радиус r надворешно го допира кракот AC на $\triangle ABC$, а кружницата со радиус R надворешно го допира кракот BC на $\triangle ABC$. Докажи, дека збирот на радиусите на двете кружници $R+r$ е еднаков на висината h на $\triangle ABC$, повлечена од темето C.

45. Даден е триаголник ABC со плоштина 60 и точка X надвор од него (цртеж десно). Точките M, N и P се соодветно средини на страните AB, BC и CA. Плоштините на триаголниците APX и CNX се соодветно 36 и 16.



а) Определи ја плоштината на триаголникот BMX.

б) Ако E е пресечната точка на правите AX и BC, а F е пресечната точка на правите CX и AB, определи ја плоштината на три-аголникот EFX.

46. Во произволен квадрат се сместени два складни рамнострани триаголници, кои немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека должината на висината на рамностраниот триаголник е помала или еднаква на половина од должината на дијагоналата на квадратот.

47. Во правоаголен триаголник ABC е повлечена тежишната линија CM $(M \in AB)$ кон хипотенузата. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече CM во точката P. Ако $\overline{BP}=\overline{AC}$, определи го $\measuredangle BAC$.

48. На лист хартија е нацртан триаголник ABC со плоштина 1. На страните AB и AC се означени соодветно точките D и E така, што DE е

паралелна со BC и $\overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Точката F е таква, што ако го превиткаме листот по правата DE, темето A се совпаѓа со F. Докажи дека $\overline{BD}=2\overline{AD}$ и определи ја плоштината на триаголникот FBC.

49. Даден е $\triangle ABC$ со висина CD. Ако $\overline{AC}+\overline{CB}=2$ и $\overline{CD}+\overline{AB}=\sqrt{5}$, определи ги страните на $\triangle ABC$.

50. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ACB=60^\circ$. Докажи, дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот со темиња средините на страните на $\triangle ABC$ е еднакво оддалечен од страните AC и BC на $\triangle ABC$.

51. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB. Точката $P\in AB$ е таква, што $\overline{AP}=2\overline{PB}$. Точката Q од отсечката CP е таква што $\measuredangle AQP=\measuredangle ACB$. Докажи дека $\measuredangle PQB$ е еднаков на половина од $\measuredangle ACB$.

52. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и M и N се две точки од хипотенузата BC, такви што $\measuredangle MAN=45^\circ$ и $M\in BN$. Докажи дека
$$\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\overline{MN}^2.$$

53. Дадени се природен број n и триаголник ABC со плоштина 2023. На страната BC се избрани $n-1$ точки, кои ја делат на n еднакви делови. Точката најблиска до C да ја означиме со A_1. Отсечката AA_1 е поделена на $n-1$ еднакви делови, при што точката најблиска до A_1 ја означуваме со B_1. Отсечката BB_1 е поделена на $n-2$ еднакви делови, при што точката најблиска до B_1 ја означуваме со A_2 итн. до поделба на отсечка на два дела. Плоштината на триаголникот A,B и последната избрана точка (која ја дели отсечката на два еднакви дела) е еднаква на 1. Определи го n.

54. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата AC се избрани точки E и F такви што $2\overline{CE}=\overline{EF}$. Нормалата на катетата CA во точката E и тежишната линија на триаголникот ABC повлечена во темето C се сечат во точката G. Нека H е точка на правата CA таква што точката A е средина на отсеч-

ката CH . Докажи дека правите GF и BH се паралелни.

55. Даден е триаголник $ABC(\overline{AC}=\overline{BC})$. Точката M е средина на страната AB, а точката P е внатрешна за триаголникот и $\measuredangle PAB=\measuredangle PBC$. Кои вредности може да ги прима збирот $\measuredangle APM+\measuredangle BPC$?

56. **(Теорема на Стјуарт).** Ако на страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка D, која лежи меѓу точките A и B, тогаш точно е равенството
$$\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}-\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}^2\cdot\overline{AB}. \qquad (1)$$

57. Нека m_A, m_B, m_C се должините на тежишните линии на $\triangle ABC$ повлечени од темињата A, B, C соодветно. Докажи, дека
$$m_A^2=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{2}-\frac{\overline{BC}^2}{4},\quad m_B^2=\frac{\overline{BC}^2+\overline{BA}^2}{2}-\frac{\overline{AC}^2}{4},\quad m_C^2=\frac{\overline{CA}^2+\overline{CB}^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

58. Изрази ги должините на симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ со помош на должините на неговите страни.

59. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и точки D и E на хипотенузата AB такви што $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$. Докажи, дека
$$\overline{CD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\tfrac{2}{3}\overline{AB}^2. \qquad (1)$$

60. За триаголникот ABC е дадено $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{BC}-\overline{AB}=1$ и $\overline{AC}>3$. Ако $CD\perp AB\,(D\in AB)$, определи ја разликата $\overline{BD}-\overline{AD}$.

61. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како $5:12$, кружницата со дијаметар MN каде M и N се средините на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q . Определи го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

62. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека X и Y се точки на страните AB и AC такви што $\overline{BX}=\overline{CY}$. Нека I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABY и ACX , соодветно, а T е точка во која по втор пат се сечат опишаните кружници околу три-

аголниците ABY и ACX .Докажи го равенството

$$\frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}}=\frac{\overline{BY}}{\overline{CX}}.$$

63. Нека ABC е остроаголен триаголник со ортоцентар H . Кружницата d со центар H и радиус AH по втор пат ги сече правите AB и AC во точките E и F , соодветно. Нека E', F', H' се соодветно сликите на точките E, F, H при осната симетрија во однос правата BC . Докажи дека точките A, E', F', H' лежат на иста кружница.

64. Над страните на триаголникот ABC надвор од него се конструирани триаголниците AMB, BNC и CPA , така што

$$\measuredangle MAB=\measuredangle MBA=\measuredangle NBC=\measuredangle NCB=20^\circ \text{ и } \measuredangle PAC=\measuredangle PCA=50^\circ.$$

Определи ги аглите на $\triangle MNP$.

65. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC . Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

66. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC=\frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA=\frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K , соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM}+\overline{MK}=6\,cm$.

67. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB=3\measuredangle ABC$. Нека L е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB и нека $P_{\triangle ALC}:P_{\triangle LBC}=1:2$, каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

68. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD}=3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E , различна од B , таква што $\overline{CE}=\overline{BC}$. Ако $\overline{BD}=\overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC=90^\circ$.

69. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Кружницата k со дијаметар AC по втор пат ја сече страната AB во точката D, а тангентата на кружницата k во точката D ја сече страната BC во точката E. Кружницата опишана околу триаголникот CDE ја сече страната AB во точките D и F. Определи го односот на плоштините на триаголниците ABC и BEF.

70. Нека ABC е триаголник со тап агол во темето C и k е кружница со дијаметар AB. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече кружницата k во точка D $(D \neq A)$, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече кружницата k во точка E $(E \neq B)$. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките F и G, соодветно. Докажи дека точките D, E, F и G лежат на една права.

71. Нека I е центар на вписаната кружница, а A' и B' се редоследно средините на страните BC и AC на дадениот триаголник ABC. Со M и N да ги означиме средините на оние лаци AC и BC на опишаната кружница на триаголникот ABC кои го содржат преостанатото теме на траголникот. Ако точките M, I, N се колинеарни, докажи дека важи $\measuredangle AIB' = \measuredangle BIA' = 90^\circ$.

2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Триаголник ABC со $\measuredangle ACB = 45^\circ$ е впишан во кружница k. Тангентите на k во точките A и B се сечат во точката D. Права низ D, паралелна со AC ја сече BC во точката M. Определи го $\measuredangle AMC$.

2. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ е дадено $\measuredangle CBD = \measuredangle CAB$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle BDA$. Докажи дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ се исполнети равенствата $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD}$ и $\measuredangle ABC + \measuredangle BAD = 120^\circ$. Докажи, дека симетралите на $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ се сечат на отсечката AB.

4. Страните BC и AD на четириаголникот $ABCD$ се паралелни, а неговите дијагонали се сечат во точката O. Ако $\overline{CD} = \overline{AO}$, $\overline{BC} = \overline{OD}$ и CA е симетрала на $\measuredangle BCD$, определи го $\measuredangle ABC$.

5. На симетралите на страните AB и BC на $\triangle ABC$ се избрани точки P и Q при што P е надворешна, а Q е внатрешна за $\triangle ABC$. Ортогоналните проекции на P и Q врз страната AC се означени соодветно со M и N. Ако $2\overline{MN} = \overline{AC}$, докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle PBQ$.

6. Точката X е во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ и е таква што ABX и CDX се рамнострани триаголници. Ако P, Q и R се соодветно средините на BC, DX и AX, да се определи $\measuredangle RPQ$.

7. Квадрат е поделен на 16 правоаголници со три хоризонтални прави (паралалени на една од неговите страни) и три вертикални прави (паралелни на другата страна) . Докажи, дека ако периметрите на сите 16 правоаголници се цели брови и должината на страната на квадратот не е цел број, тогаш таа е дропка со именител 2 или 4.

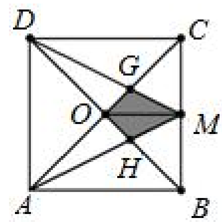
8. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точките M и N припаѓаат соодветно на страните AB и BC и се такви што отсечките AN и CM ја делата плоштната на четириаголникот на два еднакви дела. Докажи, дека MN ја полови BD.

9. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 20\,cm$ и $\overline{BC} = 12\,cm$. На правата BC е избрана точка Z таква, што $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B. Нека E е внатрешна точка за правоаголникот, која се наоѓа на растојание $6\,cm$ како од страната AB, така и од страната AD. Ако правата EZ ги сече AB и CD соодветно во точките X и Y, определи ја плоштината на четириаголникот $AXYD$.

10. Даден е правоаголник $ABCD$. На стра-ната AB е избрана точка P, а пресечната точка на PC и BD е означена со Q. Ако плоштината на $\triangle APD$ е 16, а плоштината на $\triangle PBQ$ е 9, определи ја плоштината на дадениот правоаголник.

11. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M и N се на страната AB и се такви што $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, а точките P и Q се на страната CD е се такви што $\overline{CP} = \overline{PQ} = \overline{QD}$. Докажи дека $P_{ABCD} = 3P_{MNPQ}$.

12. Нека M е средината на страната BC на квадратот $ABCD$, цртеж десно. Колкав дел од плоштината на квадратот е обоен?

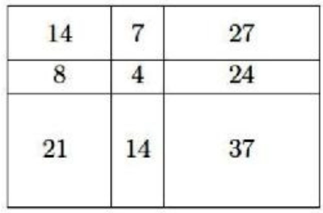


13. Точката M е средина на страната AB на триаголникот ABC. Правата CM ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P, а точката Q е симетрична на P во однос на M. Правата BQ ја сече страната AC во точката R. Ако $CRMB$ е тетивен четириаголник, определи го $\measuredangle BRC$.

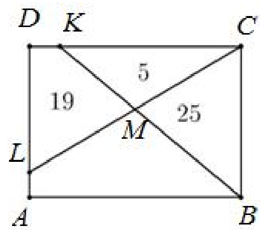
14. Околу триаголникот ABC е опишана кружница k. Висината повлечена од темето C ги сече AB и k соодветно во точките D и E, а симетралата на $\measuredangle ACB$ ги сече AB и k соодветно во точките F и G.

Правата DG ја сече k во точка H , а правата FH ја сече k во точка I . Докажи дека триаголниците AIG и BEG се складни.

15. Правоаголник е поделен на девет правоаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Во секој од деветте правоагоници е запишан периметарот изразен во сантиметри, но два од запишаните броеви не се точни. Определи го периметарот на големиот правоаголник.

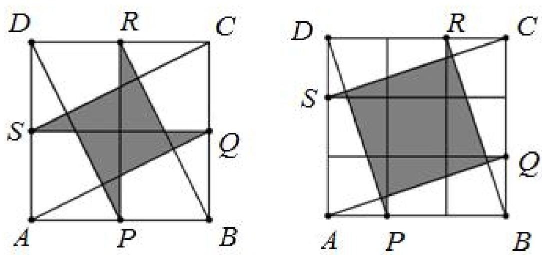


16. На страните CD и DA на правоаголникот $ABCD$ соодветно се избрани точките K и L .
а) Докажи, дека
$$P_{BCL} : P_{BCK} = P_{LCD} : P_{LCK} \,.$$
б) Нека отсечките BK и CL се сечат во точката M (цртеж десно). Ако плоштината на $\triangle CKM$ е 5, плоштината на $\triangle BCM$ е 25 и плоштината на четириаголникот $DLMK$ е 19, определи ја плоштината на четириголникот $ABML$.



17. Даден е квадрат $ABCD$ со страна n, каде n е природен број. На страните AB, BC, CD, DA соодветно се избрани точки P, Q, R, S , така што $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1$. Определи ја плоштината на обоениот дел од квадратот при

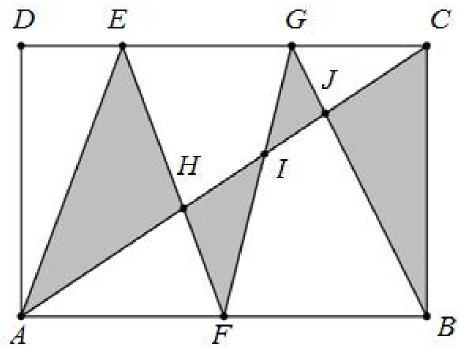
а) $n = 2$, б) $= 3$.



18. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека E е точка на полуправата DB таква што AB е симетрала на $\measuredangle CAE$ и нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1.$$

19. Даден е правоаголник $ABCD$. Точката F е средина на страната AB, а точките E и G припаѓаат на страната CD, како на цртежот десно. Плоштината на триаголникот BCJ е еднаква на 12, а плоштините на преостанатите обоени триаголници (во некој редослед) се 2,4; 4,8 и 14,4. Определи ја плоштината на дадениот правоаголник.



20. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ и точка P внатре во него таква, што $\measuredangle PAB=\measuredangle PBC=\measuredangle PCD=\measuredangle PDA$. Правите AD и BC се сечат во точката Q, а правите AB и CD се сечат во точката R. Докажи, дека аголот меѓу правите PQ и PR е еднаков на аголот меѓу правите AC и BD.

21. Дадена е полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точката од k таква што $CO\perp AB$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече k во точката D. Нека E е точката од AB таква што $DE\perp AB$ и нека F е средината на CB. Докажи дека четириаголникот $EFCD$ е тетивен.

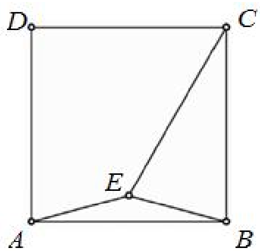
22. Во трапез $ABCD$ ($AB\,||\,CD$) дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Правата низ O, паралелна со AD, ја сече AB во точката M, а правата низ O, паралелна со BC, ја сече AB во точката N. Докажи, дека $\overline{AM}=\overline{BN}$.

23. а) Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Докажи дека $\frac{P_{ABC}}{P_{ADC}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{DO}}$.

б) На страните AB и BC на триаголникот ABC се избрани соодветно точки M и N така, што $\overline{AB}=2\overline{AM}$ и $\overline{BC}=3\overline{CN}$. Отсечките CM и AN се еднакви и се сечат во точката O. Ако $\overline{AO}=6\,cm$, да се определи должината на отсечката CO.

24. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата на агол AP, ($P \in BC$). Точката M припаѓа на отсечката AP, а точката N е симетрична на M во однос на средината на BC. Правата CN ја сече правата AB во точката E (B е меѓу A и E), а правата BN ја сече правата AC во точката D (C е меѓу A и D). Докажи дека $\overline{CD} = \overline{BE}$.

25. Даден е квадрат $ABCD$ и во него точка E таква што $\measuredangle BAE = \measuredangle EBA = 15^\circ$. Определи го $\measuredangle ECB$.



26. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H и средина M на страната AC. Низ H е повлечена права, нормална на MH, која ги сече страните AB и BC во точките E и F, соодветно. Докажи, дека $\overline{HE} = \overline{HF}$.

27. Даден е правоаголник $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$. Нормалата повлечена од B на дијагоналата AC ја сече правата AD во точката E, а кружницата со центар $k(A, \overline{AB})$ ја сече страната CD во точката F. Докажи дека $AF \perp EF$.

28. Дијагоналите во правоаголникот $ABCD$ имаат должина d. Од темето D кон дијагоналата AC спуштена е нормала која што ја сече AC во точка E. Од точката E спуштаме нормали кон страните AB и BC, кои ги сечат AB и BC во точките F и G, соодветно. Ако $\overline{EF} = 1, \overline{EG} = n$, докажи дека $d^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} + 1$.

29. За да стаса од дома до најблиската продавница, Кристијан се движи по обележана патека: оди 200 метри на исток, потоа 150 метри на северо-исток и уште 100 метри на исток (насоката северо-исток е одредена со симетралата на аголот формиран од насоките север и исток). Кристијан сакал да го скрати својот пат и почнал да се движи низ паркот по права линија, директно од неговиот дом кон продавницата. Точно кога ја пресретнал обележаната патека, сретнал еден дедо, се засрамил од

неговиот прекорен поглед, па одлучил да продолжи да оди по обележаната патека до продавницата. За колку Кристијан го скратил патот од дома до продавницата?

30. Квадрат $EFGH$ со страна 2 е поставен во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со страна 7 така, што страните на двата квадрати се паралелни. Потоа темињата B и D се поврзани со темињата E и G со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Докажи дека збирот на плоштините на четириаголниците $BGFE$ и $DEHG$ не зависи од положбата на квадратот $EFGH$.

31. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките K, L, M се средини соодветно на страните AB, CD, DA . Отсечката BM ги сече CK и AL соодветно во точките P и Q . Плоштината на четриаголникот $AKPQ$ е 12.
а) Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$.
б) Ако N е средина на BC и отсечката DN ги сече AL и CK соодветно во точките R и S , определи ја плоштината на $PQRS$.

32. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече страната DC во точка L, а дијагоналата BD во точка K, таква што $\overline{DK} : \overline{KB} = 3:4$. Пресметај ја должината на отсечката LC, ако периметарот на паралелограмот е 28.

33. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и $k(O, r)$ е неговата впишана кружница, која ги допира страните BC и AD во точките K и L, соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар OC минува низ пресекот на правите KL и OD .

34. Околу триаголник ABC е опишана кружница k . Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече k во точката L. Нека K е точката на правата низ L, паралелна со AC , која е еднакво оддалечена од A и C . Ако M е средината на AB, докажи дека четириаголникот $AMKL$ е рамнокрак трапез.

35. Симетралата на аголот ABC и симетралата на аголот BCD во трапез $ABCD$, се сечат во точка M на кракот AD на трапезот. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако се познати $\overline{MB} = p$, $\overline{MC} = q$ и

висината на трапезот h (h е растојанието меѓу основите AB и CD на трапезот).

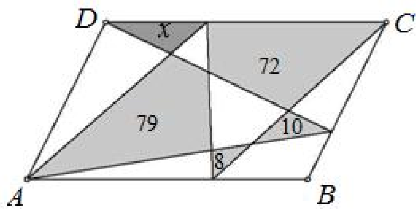
36. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle CDM} = P_{\square ABCD}.$$

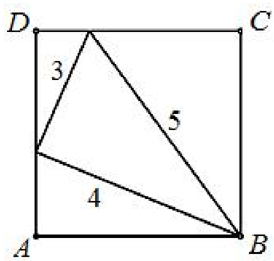
37. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките P и M се средини соодветно на страните AB и CD, Дијагоналата AC ја сече DP во точката R и ја сече BM во точката Q. Ако $\frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}} = \frac{3}{8}$, определи го односот $\frac{\overline{DR}}{\overline{RP}}$.

38. Во внатрешноста на триаголникот ABC, за кој $\measuredangle ABC = 45^\circ$ е избрана точка D таква, што $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 45^\circ$. АКо $\overline{BD} = 6\,cm$, определи ја плоштината на четириаголникот $ADCB$.

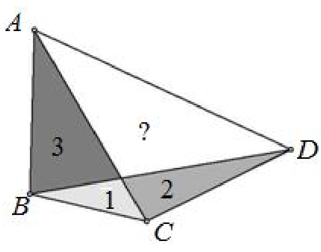
39. Во паралелограмот $ABCD$ се дадени плоштините на два четириаголника и два триаголника (цртеж десно). Определи ја плоштината на триаголникот означен со x.



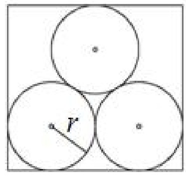
40. Во квадрат $ABCD$ е вписан триаголник со должини на страни 3, 4 и 5 (цртеж десно). Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.



41. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, кој со своите дијагонали е поделен на четири триаголници. За трите триаголници се познати плоштините (цртеж десно). Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.



42. Определи ја плоштината на четириаголникот прикажан на цртежот десно, ако сите впишани кружници имаат радиус еднаков на r .

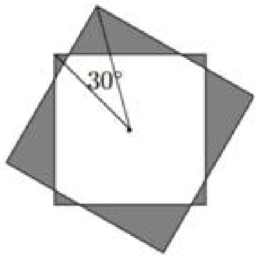


43. Во трапезот $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под прав агол. Докажи дека

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(\overline{AB}+\overline{CD})^2 .$$

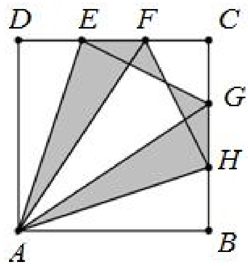
44. Во четириаголникот $ABCD$ точките M,P,N,Q се средини соодветно на страните AB,BC,CD,DA. Ако $\overline{MN}=\overline{PQ}$, докажи дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

45. На цртежот десно двата квадрати имаат заеднички центар. Ако должината на страната на едниот квадрат е 1, определи ја должината на страната на другиот квадрат така, што збирот на плоштините на обоените триаголници е најмал.



46. Определи ја плоштината на обоениот дел од квадратот $ABCD$ (цртеж десно), ако

$$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FC}=\overline{CG}=\overline{GH}=\overline{HB}=1 .$$



47. Во конвексен четириаголник $ABCD$ аглите во темињата A и C се еднакви и симетралата на аголот во темето B минува низ средината на страната CD. Ако $\overline{CD}=3\overline{AD}$, определи го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

48. Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен триаголник со $\measuredangle ACB=60^\circ$, во кој отсечките AP $(P\in BC)$ и BQ $(Q\in AC)$ се висини. Определи ја плоштината на четириаголникот $CPOQ$.

49. Во остраоголен $\triangle ABC$ се повлечени висините AH_a и BH_b, а точката M е средина на страната AB. Околу $\triangle AMH_a$ и $\triangle BMH_b$ се опишани

кружници кои по втор пат се сечат во точката P. Докажи дека точката P припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

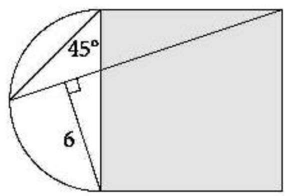
50. Рамностран $\triangle ABC$ е впишан во квадрат со страна 1 (секое теме на триаголникот е на некоја страна на квадратот). Определи ја најмалата и најголемата можна вредност на должината на страната на $\triangle ABC$.

51. Четириаголникот $ABCD$, чии дијагонали не се заемно нормални, е впишан во кружница со дијаметар BD. Нека M е симетричната точка на точката A во однос на правата BD и $\{N\} = AM \cap BD$. Нека p е правата низ N, паралелна со правата AC, и нека p ги сече правите CD и BC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека точките P, C, Q и M се темиња на правоаголник.

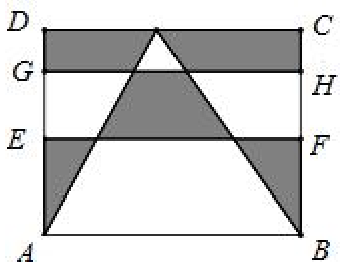
52. На страните BC и AC на $\triangle ABC$ соодветно се избрани точки A' и B' и нека AA' и BB' се сечат во точката X. Ако $P_{ABX} = p$, $P_{A'B'X} = q$ и $P_{A'B'C} = r$, изрази ја плоштината на $\triangle ABC$ преку p, q и r,

53. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC се избрани точки D, E, F, соодветно, така што четириаголникот $CEFD$ е паралелограм. Нека $O = AD \cap BE, M = AD \cap EF, N = DF \cap BE$. Докажи дека триаголникот DEO и четириаголникот $FNOM$ имаат еднакви плоштини.

54. Според податоците дадени на цртежот десно, пресметај ја плоштината на засенчениот квадрат.



55. Во правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно отсечките EF и GH се паралелни на страната AB, а точката P која припаѓа на страната CD е поврзана со темињата A и B. Ако плоштината на обоениот дел е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{AE} = \overline{DG}$.



56. За конвексниот четириаголник $ABCD$ се исполнети равенствата $\overline{AB}+\overline{CD}=\sqrt{2}\,\overline{AC}$ и $\overline{BC}+\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{BD}$. Докажи дека $ABCD$ е паралелограм.

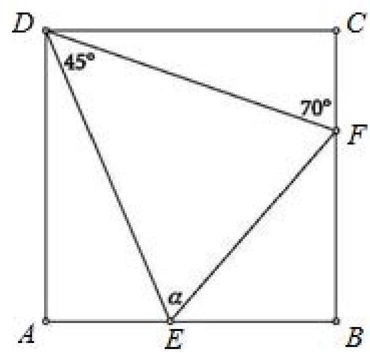
57. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница k. Точките K и L се соодветно допирните точки на k со страните AB и CD. Вписаната кружнца μ во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките M и N. Докажи, дека правите MN и KL се сечат на правата која минува низ центрите на k и μ.

58. Во остроаголниот триаголник ABC, точките E,F,G се подножјата на висините повлечени од темињата A,B,C, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Ако $\overline{AB}=\overline{CH}$, докажи дека

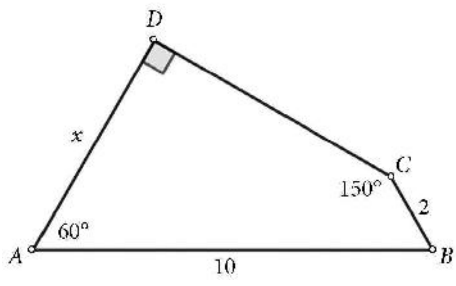
$$P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFF}\cdot\overline{AB}^2,$$

каде P_{AGF},P_{BEG},P_{CFF} се плоштините на триаголниците AGF, BEG, CFE, соодветно.

59. Даден квадрат $ABCD$. Според означените елементи на цртежот десно определи го $\measuredangle FED$.



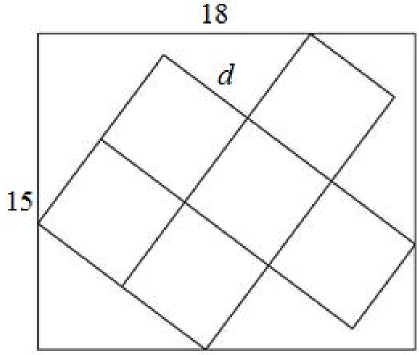
60. Определи ја должината на страната AD на четириаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно.



61. **(Втора теорема на Птоломеј).** Нека $ABCD$ е тетивен четиириаголник. Докажи дека

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}. \quad (1)$$

62. Во правоаголник со димензии 18×15 се впишани шест складни квадрати со должина на страна d, како што е прикажано на цртежот десно.



а) Определи ја должината на страната d.

б) Дали впишаните квадрати покриваат повеќе од 50% од плоштината на правоаголникот?

63. На страните AB и AC на остроаголниот триаголник ABC, со ортоцентар H и центар на опишана кружница O, редоследно се избрани точки P и Q такви што четириаголникот $APHQ$ е паралелограм. Докажи дека важи

$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PQ}}{\overline{QA}\cdot\overline{QO}}=2.$$

64. Во $\triangle ABC$ точките M,N,P припаѓаат на сстраните AB,BC,CA соодветно и се такви што четириаголникот $CPMN$ е паралелограм. Ако $MP\cap AN=R,\ BP\cap MN=S,\ AN\cap BP=Q$ докажи, дека

$$P_{MRQS}=P_{NQP}$$

65. Даден е триаголник ABC. Нека I е центарот на впишаната кружница, а A' и B' се редоследно средините на страните BC и AC на триаголникот ABC. Со M и N да ги означиме соодветно средините на оние лаци AC и BC на опишаната кружница околу триаголникот ABC кои го содржат преостанатото теме на триаголникот. Ако точките M,I,N се колинеарни, докажи дека важи

$$\measuredangle AIB'=\measuredangle BIA'=90^\circ.$$

66. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC. На страните AC и BC соодветно се избрани точки D и E такви што $\overline{CD}=\overline{DE}$. Нека H,J и K се средини на DE,AE и BD, соодветно. Опишната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F, а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G. Правата

низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I. Нека $IH \cap GF = M$. Докажи дека точките J, M и K се колинеарни.

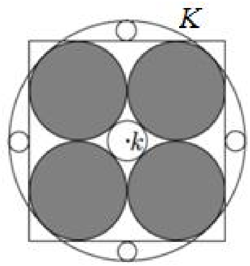
67. Нека $ABCD$ е квадрат и k е кружница со центар во точката B и радиус $\overline{BA}$. Нека T е точка на кружницата k во внатрешноста на квадратот. Тангентата на кружницата k во точката T ги сече отсечките CD и DA редоследно во точките E и F. Нека G и H се редоследно пресеците на правите BE и BF со отсечката AC. Докажи дека правите BT, EH и FG се сечат во една точка.

68. Во координатната рамнина се дадени n еднакви квадрати, чии страни се паралелни со координатните оски. Ако за секои два од дадените квадрати постои точка, која е внатрешна за двата квадрати, докажи, дека сите n квадрати имаат заедничка точка.

69. Во координатна рамнина се дадени 28 правоаголници, секој од кои има страни паралелни со координатните оски. Секој од дадените правоаголници пресекува најмалку 21 од преостанатите 27 правоаглници. Докажи дека меѓу дадените правоаголници постои правоаголник кој ги пресекува преостанатите 27 правоаголници.

3. КРУЖНИЦА И КРУГ

1. Даден е квадрат. Секој од четирите круга, обоени на цртежот, се допира до две страни на квадратот и до два обоени круга. Конструирани се кружници $k(O,r)$ и $K(O,R)$, кои соодветно се допираат надворешно и внатрешно до секој од обоените кругови, како и четири кружници со радиус t кои ја допираат кружницата K и една страна на квадратот во нејзината средина. Докажи дека $r=2t$.



2. Дадени се прави p и p', кои се сечат во точка A. Кружница k ја допира p во точката A и ја сече p' во точка C, а кружница k' ја допира p' во точката A и ја сече k во точка D. Кружниците k и k' по втор пат се сечат во точка B. Докажи, дека ако $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\sqrt{2}$, тогаш $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=2$.

3. Дадени се кружници k_1 и k_2, кои немаат заеднички внатрешни точки. Правите A_1A_2, $A_1 \in k_1$, $A_2 \in k_2$ и B_1B_2, $B_1 \in k_1$, $B_2 \in k_2$ се соодветно заедничка надорешна и заедничка внатрешна тангента на кружниците. Докажи дека правите A_1B_1 и A_2B_2 се заемно нормални.

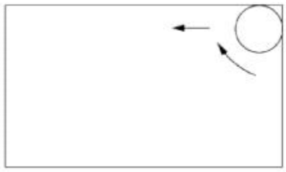
4. Дадена е отсечка AB и на неа точка P. Над отсечките AB, AP и PB, како над дијаметри се конструирани полукружници. Пресметај го збирот на должините на трите полукружници.

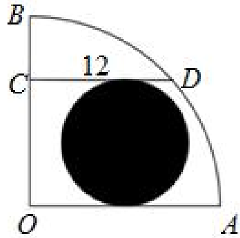
5. Нека се дадени две концентрични кружници и нека тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина $2\,cm$. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен!

6. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$). Впишаната во три-

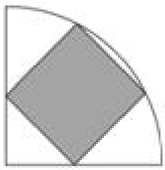
аголникот кружница k ја допира страната BC во точката E. Права низ A ја сече k во точките F и G. Правите EF и EG ја сечат AB соодветно во точките K и L. Докажи дека $\overline{KA} = \overline{BL}$.

7. Круг со радиус $3\,cm$ од внатрешната страна на правоаголникот со должина $25\,cm$ и ширина $20\,cm$ се тркала по неговите страни (види цртеж). Одреди ја плоштината на оној дел од правоаголникот кој не се покрива при тркалањето на кругот.



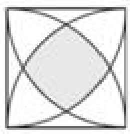


8. Пресметај ја плоштината на белиот дел од кружниот исечок,ако $\measuredangle AOB = 90^\circ$ и $CD \parallel OA$.

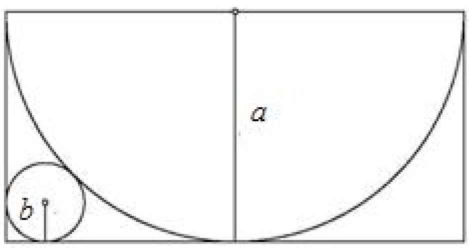


9. На цртежот десно кружниот исечок има радиус 1. Определи ја плоштината на квадратот.

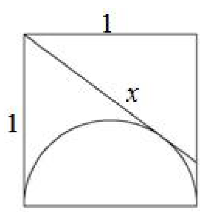
10. Во квадрат со должина на страна 1 се конструирани четири лаци со центри во темињата на квадратот, цртеж десно. Определи ја плоштината на осенчениот дел од квадратот.



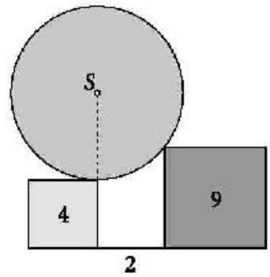
11. На цртежот десно се дадени правоаголник во кој е впишан полукруг со радиус a и круг со радиус b. Определи го количникот $\frac{a}{b}$.



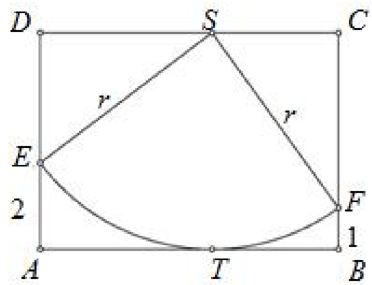
12. Даден е квадрат со страна 1, во чија внатрешност над една страна е конструирана полукружница и од едно од спротивните темиња е повлечена тангента на полукружницата (цртеж десно). Определи ја должината x на делот од тангентата кој е внатре во квадратот.



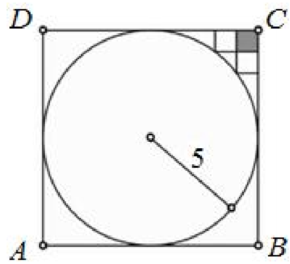
13. Определи ја плоштината на кругот даден на цртежот десно, кој во темиња ги допира дадените квадрати, за кои се дадени нивните плоштини и растојанието меѓу нив.



14. Во правоаголникот $ABCD$ е впишана четвртина од круг со центар S, како што е прикажано на цртежот десно. Определи го радиусот r на кругот.

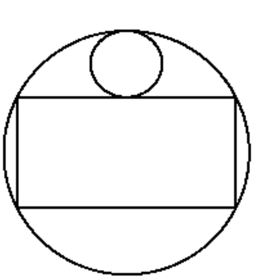


15. Во квадрат $ABCD$ е впишана кружница со радиус 5. Меѓу квадратот и кружницата се впишани три складни квадрати, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на секој од овие квадрати.

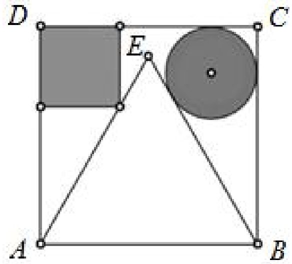


16. Над страната CD во надворешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран $\triangle CDE$. Нека M е центарот на опишаната кружница околу $\triangle CDE$, а точката S е пресекот на правите BE и AC. Докажи дека $\triangle CMS$ е рамнокрак.

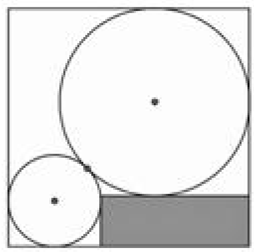
17. Во една кружница е впишан правоаголник, а во еден од кружните отсечоци е впишана најголема можна кружница, која допира една страна на правоаголникот и ја допира од внатре поголемата кружница, како на цртежот. Радиусот на помалата кружница е 3 единици, а големата кружница има радиус $r > 3$. Познато е дека правоаголникот има плоштина $P = 72\sqrt{2}$ квадратни единици. Одреди го радиусот r на поголемата кружница.



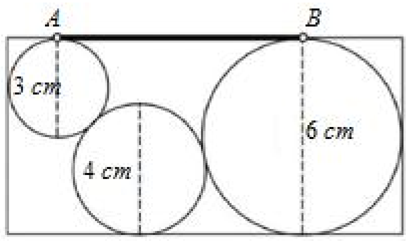
18. Над страната AB во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABE. Меѓу квадратот и триаголникот се вишани помал квадрат кај кој едно теме е на страната на триаголникот и круг кој допира две страни на квадратот и една страна на триаголникот (цртеж десно). Која фигура има поголема плоштина, малиот квадрат или кругот?



19. Определи ја плоштината на засенчениот правоаголник на цретежот десно, ако плоштината на помалиот круг е еднаква на 2® , плоштината на поголемиот круг е еднаква на 8® , а круговите ги допираат страните на квадратот и страните на правоаголникот како што е прикажано на цртежот.

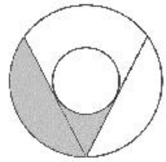


20. Користејќи ги податоците на цртежот десно, определи ја должината на отсечката AB.

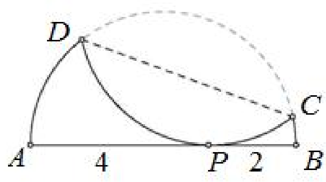


21. На кружница k се избрани три точки A, B, C и нека X, Y, Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки во k. Нека A', B', C' се средините на тетивите YZ, ZX, XY соодветно. Докажи дека правите AA', BB', CC' се сечат во една точка.

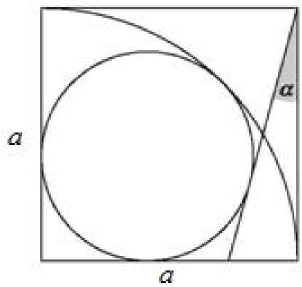
22. Радиусите на концентричните кружници кои формираат кружен прстен прикажан на цртежот десно имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на осенчениот и неосенченит дел од кружниот прстен.



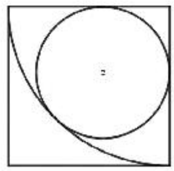
23. Определи ја должината на тетивата CD по која е превиткан полукругот како што е прикажано на цртежот десно.



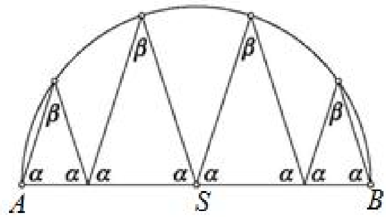
24. На цртежот десно е даден квадрат со должина на страна a, во кој е впишана четвртина кружница, а потоа во неа е впишана кружница. На кружницата од спротивното теме е повлечена тангента која со страната на квадратот зафаќа агол $\sim$. Определи го аголот $\sim$.



25. Во квадрат со страна $2\,cm$ е впишан четвртина од круг, а потоа е впишан круг како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на овој круг.

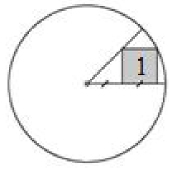


26. Над отсечката AB како над дијаметар е нацртана полукружница, во која се впишани четири рамнокраки триаголници чии основи лежат на дијаметарот AB и агли при основата еднакви на $\sim$ (цртеж десно). Определи го аголот $\sim$.



27. Кружниците μ_1 и μ_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на μ_1 и μ_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на μ_1 и t_2 е C, а вториот пресек на μ_2 и t_1 е D. На полуправата AB, по B, дадени се точки P и E, така што $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P, Q и R се колинеарни.

28. Според податоците дадени на цртежот десно пресметај ја плоштината на кругот, ако плоштината на квадратот е еднаква на 1.



29. Две кружници се сечат во точки P и Q. На кружниците да се определат точки A и B, такви што точката P лежи на отсечката AB и производот $\overline{AP} \cdot \overline{PB}$ ќе има најголема можна вредност.

30. Кружниците k_1 и k_2 надворешно се допираат во точката F. Права t ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките A и B, соодветно. Права p паралелна на правата t ја допира кружницата k_2 во точката C и ја сече кружницата k_1 во точките D и E.

а) Докажи дека точките A, F и C лежат на иста права.

б) Докажи дека точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BDE.

31. На кружница се дадени точки A, B, C, D такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Нека симетралите на $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ABD$ се сечат во точката E. Ако правите AE и CD се паралелни, определи го $\measuredangle ABC$.

4. НЕРАВЕНСТВА

1. На страните AC и BC на триаголникот ABC соодветно се избрани точки B' и A'. Ако AA' и BB' се сечат во точката X, докажи, дека:

   а) $P_{XA'B'} < P_{ABX}$,

   б) $P_{XA'B'} < P_{CB'A'}$.

2. Даден е правоаголен $\triangle ABC, (\measuredangle ACB = 90^\circ)$. Точките P и Q на страната BC и точките R и S на страната CA се такви што $\measuredangle BAP = \measuredangle PAQ = \measuredangle QAC$ и $\measuredangle ABS = \measuredangle SBR = \measuredangle RBC$. Ако T е пресечната точка на AP и BS, докажи дека $120^\circ < \measuredangle RTB < 150^\circ$.

3. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD, $AB > CD$. На страната BC е одбрана точка M, така што $BM < MC$. Докажи дека
$$P_{\triangle AMD} > P_{\triangle AMB} + P_{\triangle CMD}.$$

4. Докажи, дека за секој $\triangle ABC$ е точно неравенството
$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \geq 2\overline{BC} \cdot m_A,$$
каде m_A е должината на тежишната линија повлечена кон страната BC.

5. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека a и b се две соседни страни на правоаголникот, а c е страната на квадратот. Докажи дека
$$a + b - c > R\sqrt{2},$$
каде R е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

6. Ако a, b, c се должини на страни на триаголник, докажи дека
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3. \qquad (1)$$

7. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник. Докажи ги неравенствата

$$\sqrt{2}(a+b+c) \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c)\,. \qquad (1)$$

8. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Докажи дека

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 < 2\overline{AB}^2\,.$$

9. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со радиус 1. Определи ја најголемата можна вредност на производот

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}\,.$$

10. Нека a,b,c се должините на страните и m_a, m_b, m_c се должините на соодветните тежишни линии на $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} < 1\,.$$

11. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C, хипотенуза c и висина повлечена кон хипотенузата h. Докажи дека

$$\frac{c}{h} + \frac{h}{c} \ge \frac{5}{2}\,. \qquad (1)$$

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катети a и b, хипотенуза c и радиус на впишаната кружница r. Докажи дека

а) $a < \frac{r}{2}$, б) $r \le \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$.

13. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи го неравенството

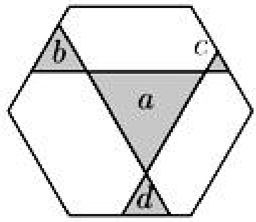
$$3(a^3b+b^3c+c^3a) + 2(ab^3+bc^3+ca^3) \ge 5(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\,.$$

14. Нека a,b,c се должините на страните и h_a, h_b, h_c се должините на соодветните висини на $\triangle ABC$. Докажи, дека

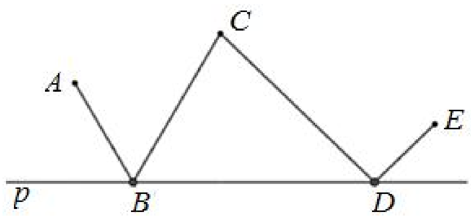
$$\frac{1}{2} < \frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c} < 1\,.$$

5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Правилен шестаголник, со прави паралелни на неговите страни е поделен на седум делови (три шестаголника и четири рамнострани триаголници, како што е прикажано на цртежот десно). Должините на страните на рамностраните триаголници се a,b,c и d. Определи ја должината на страната шестаголникот.



2. Искршената линија $L = ABCDE$ не преоѓа под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A,C и E, линијата L е со најмала можна должина
Докажи дека
$\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 2\measuredangle BCD$.



3. Во кружница е впишан правилен дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$. Докажи, дека дијагоналите $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11}$ се сечат во една точка.

4. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Точката M е средина на DE, X е пресечната точка на AC и BM, Y е пресечната точка на BF и AM, а Z е пресечната точка на AC и BF. Да се определи $P_{BXC} + P_{AYF} + P_{ABZ} - P_{MXZY}$.

5. Од средината на секоја страна на остроаголен триаголник ABC со плоштина $10\,cm^2$ се повлечени нормали кон другите две страни на триаголникот. Пресечните точки на овие нормали заедно со средините на страните се темиња на шестаголник. Определи ја плоштината на овој шестаголник.

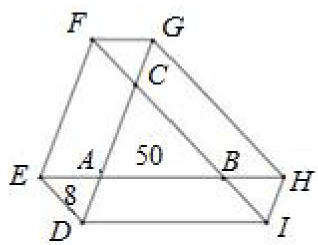
6. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, пришто должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

7. За $\triangle ABC$ симетричната права CG_c $(G_c \in AB)$ на медијаната CM_c во однос на симетралата на аголот CL_c ја нарекуваме симедијана на триаголникот низ темето C. Секој триаголник има три симедијани AG_a, BG_b и CG_c кои го определуваат симедијаниот $\triangle G_aG_bG_c$. Дали постои $\triangle ABC$ кој не е рамностран, а соодветниот симедијанен $\triangle G_aG_bG_c$ е рамностран.

8. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\,cm$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}\,M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е меѓу A и M_5 и точката M_9 е меѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искршената линија

$$L \equiv AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B\,.$$

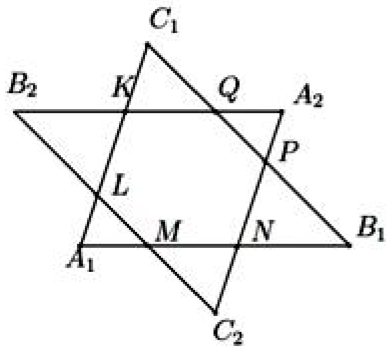
9. Даден е триаголник ABC со плоштина 50. На правата AC е избрана точка D како што е прикажано на цртежот десно. Правата низ D, паралалена со BC, ја сече правата AB во точката E. Правата низ E, паралелна на AC, ја сече правата BC во точката F. Правата низ F, паралелна со AB, ја сече правата AC во точката G. Правата низ G, паралелна со BC, ја сече правата AB во точката H. Правата низ H, паралелна со AC, ја сече правата BC во точката I.



а) Докажи, дека правата DI е паралелна на правата AB.

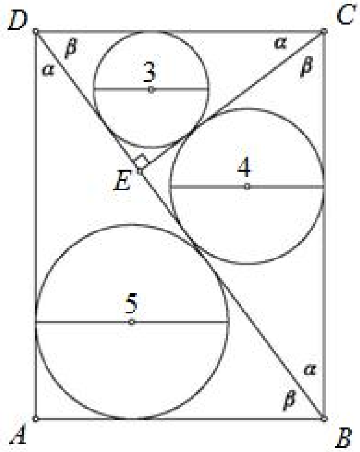
б) Ако плоштината на триаголникот ADE е 8, определи ја плоштината на шестаголникот $DEFGHI$.

10. На цртежот десно триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни и соодветните страни им се паралелни. Познато е дека плоштините на триаголниците A_1LM , C_2MN и B_1NP се соодветно 1, 4 и 9. Определи ја плоштината на шестаголникот $KLMNPQ$.



11. Страната $\overline{BC}=a$ на правилниот петаголник $ABCDE$ е продолжена преку темето C до точката F така што $\overline{CF}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Изрази ја должината на отсечката AF со помош на должината на страната a .

12. Правоаголникот $ABCD$ со дијагоналата BD е поделен на два правоаголни триаголника. Висината CE повлечена кон страната BD го дели триаголникот BCD на два правоаголни триаголника (цртеж десно). Во триаголниците CDE , BCE и ABD се впишани кружници чии дијаметри се со должини 3, 4 и 5, соодветно. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.



13. Плоштините на три ѕида на дрвен квадар изнесуваат $6dm^2;8dm^2$ и $12dm^2$. Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка така што едно нејзино теме се совпаѓа со темето на квадарот, при што страната на коцката е 25% од најмалата страна на квадарот. Пресметај:

а) го бројот на темиња, рабови и ѕидови на добиеното тело,

б) ги плоштината и волуменот на квадарот и телото,

в) процентот на плоштината и процентот на волуменот на телото во однос на соодветната мерка на квадарот.

14. Броевите 42, 48 и 82 се (во некој редослед) волуменот, плоштината и збирот на должините на сите рабови на правоаголен паралелопипед чии должини на рабови се цели броеви. Определи ги должините на рабовите на овој паралелопипед.

15. Квадрат со страна 1 е обоен во три бои. Кој е најголемиот реален број a таков, што во квадратот секогаш може да се најдат две еднобојни точки на растојание поголемо или еднакво на a?

16. Во петаголникот $ABCDE$ триаголниците ABC, BCD, CDE и DEA имаат еднакви плоштини. Правите AC и AD ја сечат BE во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{BM} = \overline{NE}$.

17. Во координатната рамнина е даден конвексен петаголник $ABCDE$ чии темиња се со целобројни координати. Докажи, дека во внатрешноста на петаголникот има точка со целобројни координати.

18. На страните BC и CD на квадрат $ABCD$ со страна 1 се избрани точки M и N, такви што $\overline{CM} + \overline{CN} = 1$. Отсечките AM и AN ја сечат дијагоналата BD соодветно во точките P и Q. Докажи дека отсечките BP, PQ и QD се страни на триаголник, кај кој едниот агол е еднаков на 60°.

19. Низ центарот O на рамностраниот $\triangle ABC$ е повлечена права l, која ги сече страната CA во точка N и страната BC во точка M. Докажи дека од отсечките AM, BN, MN може да се конструира триаголник и за сите конструирани триаголници (кога правата l се менува) висината повлечена кон страната MN има иста должина.

20. Дијаметарот на кружната основа на еден цилиндричен сад е еднаков на неговата висина. Садот се наоѓа на хоризонатална површина и е целосно наполнет со течност. Дали ако го навалиме садот така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, од садот ќе истече помалку или повеќе од третина од течноста во него? Образложи го одговорот.

6 НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle BAC = 39^\circ$ и $\measuredangle ABC = 77^\circ$. Точките M и N се избрани соодветно на страните BC и CA и се такви што $\measuredangle MAB = 34^\circ$ и $\measuredangle NBA = 26^\circ$. Определи го $\measuredangle BNM$.

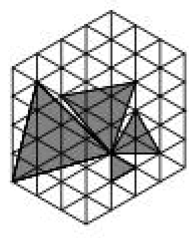
2. Даден е триаголник ABC, во кој $\measuredangle CAB = 45^\circ$ и $\measuredangle CBA = 15^\circ$. На правата AC е избрана точка M таква, што $\overline{CM} = 2\overline{AC}$ и C е меѓу A и M. Определи го $\measuredangle AMB$.

3. Даден е триаголник ABC таков што $\measuredangle BAC = 120^\circ$. Докажи дека растојанието од центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ до неговиот ортоцентар е еднакво на $\overline{AB} + \overline{AC}$.

4. Даден е триаголник ABC е точка D на страната AC. Впишаните кружници во триаголниците ABD, BCD и ABC се допираат до AC соодветно во точките F, K и D. Докажи дека $\overline{DK} = \overline{KF}$.

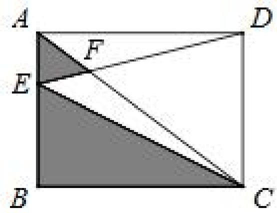
5. Произволна кружница k, која минува низ темињата B и C на триаголникот ABC, ги сече страните AB и AC соодветно во точките M и N. Точки P и Q припаѓаат соодветно на лаците BM и CN и се такви што $\overline{BP} = \overline{AC}$ и $\overline{CQ} = \overline{AB}$. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle APQ$ лежи на фиксна права, независно од избо-рот на кружницата k .

6. Рамнината е покриена со бескрајна триаголна мрежа, во која единичниот триаголник е рамностран и има плоштина 1 (цртеж десно). Интересни ги нарекуваме рамностраните триаголници со темиња во јазлите на мрежата. На цртежот десно се прикажани интересни триаголници со плоштини 1, 3, 7 и 13. Дали постои интересен триагоник со плоштина:



а) 2015, б) 2016, в) 2017?

7. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ е земена произволна точка E. Нека F е пресечната точка на отсечките AC и DE.



а) Ако збирот на плоштините на триаголниците AEF и BCE е еднаков на 40% од плоштината на правоаголникот $ABCD$, определи го односот $\overline{AE}:\overline{AB}$.

б) Ако збирот на плоштините на триаголниците BCE и FCD е еднаков на половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{BE}:\overline{AE}=\overline{AE}:\overline{AB}$.

8. На страната AB на паралелограмот $ABCD$ е избрана точка M и е конструиран паралелограм $MCND$.

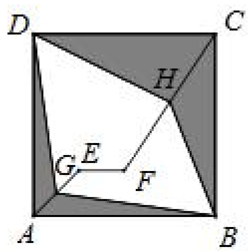
а) Докажи, дека правата DC минува низ средините на отсечките AN и BN.

б) Докажи, дека $P_{ABN}=P_{ABCD}$.

9. Даден е квадрат $ABCD$. Кружница k со центар O минува низ точката A и ги сече страните BC и CD соодветно во точките P и Q, при што $\measuredangle PAQ=45^\circ$. Докажи дека $O\in AC$.

10. Два квадрати со должина на страна 1 се сечат во осум точки. Докажи дека плоштината на заедничкиот дел е поголема од $\frac{1}{2}$.

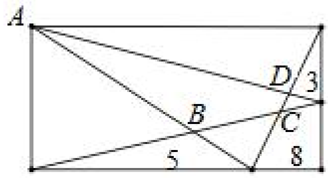
11. На цртежот десно отсечката EF е паралелна со страната AB на квадратот $ABCD$, а точките G и H се средини соодветно на AE и CH. Збирот на плоштините на триаголниците ABG, BCH, CDH и DAG е еднаков на $k\%$ од плоштината на квадратот $ABCD$.



а) Ако $k=20$ и $\overline{AB}=30$, определи ја должината на отсечката EF.

б) Ако $\overline{EF}=k\%\overline{AB}$, определи го k.

12. Четири отсечки го делат правоаголникот на делови како што е прикажано на цртежот десно. Познати се плоштините на три од деловите. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.



13. Во остроаголен триаголник ABC се повлечени висината AD и симетралата на BL. Нека $BL \cap AD = E$ и $CE \cap DL = F$. Докажи, дека плоштината на четириаголникот $AEFL$ е еднаква на плоштината на триаголникот FDC ако и само ако $\measuredangle BAC = 90^\circ$.

14. Во трапез $ABCD$ точката M е средина на кракот BC.

а) Докажи дека $P_{AMD} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$.

б) Ако плоштините на трите триаголници, на кои отсечките AM и DM го делат трапезот $ABCD$, се последователни парни броеви, определи ја плоштината на овој трапезот.

15. Правоаголниот трапез $ABCD$ е таков, што $AB \| CD$, $AB \perp AD$ и $\overline{CD} = \overline{AD}$. Точката $F \neq D$ од дијагоналата BD е таква што $\angle AFC = 90^\circ$. Ако $AF \cap BC = K$ и $\overline{KA} = \overline{KD}$, определи го односот $\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}}$.

16. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Надворешно над неговите страни се конструирани квадрати. Докажи, дека отсечката која ги поврзува центрите на квадратите конструирани над AB и CD е еднаква и нормална на отсечката која ги поврзува центрите на квадратите конструирани над BC и AD.

17. Точките M и N лежат соодветно на страните BC и CD на паралелограмот $ABCD$. Докажи дека тежишните линии BB', CC' и DD' соодветно во $\triangle ABM$, $\triangle CMN$ и $\triangle DAN$ се сечат во една точка.

18. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD < 90^\circ$. Точката M е внатрешна за ромбот и е таква, што $\measuredangle AMB + \measuredangle CMD = 180^\circ$. Ако P и Q се центрите на опишаните кружници соодветно околу $\triangle AMD$ и $\triangle AMB$, докажи дека или четириаголникот $APMQ$ е ромб или точките A, P, M, Q се коли-

неарни.

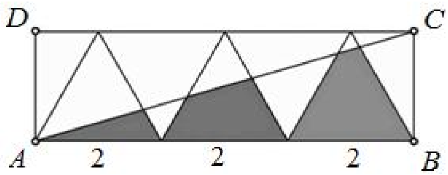
19. Дадени се 7 прави, такви што меѓу секои четири од нив постојат две, кои се паралелни. Дали е точно, дека меѓу овие седум прави секогаш има три кои се паралелни?

20. Даден е триаголник со плоштина 1. Дали може од овој триаголник да се исечат три складни многуаголници, секој со плоштина поголема од $\frac{1}{4}$?

21. Даден е правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. Докажи го равенството

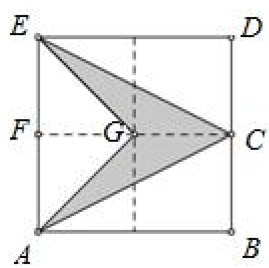
$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_5}.$$

22. Внатре во правоаголникот $ABCD$ се впишани три складни рамнострани триаголници со страна со должина 2 (цртеж десно). Триаголниците се пресечени со дијагоналата AC. Докажи дека збирот на плоштините на засенчените делови во првите два триаголници е поголем од плоштината на засенчениот дел во третиот триаголник.



23. Од произволна точка M на основата AB на рамнокракиот триаголник ABC повлечени се нормали MP и MQ на краците AC и BC. Докажи дека $\overline{MP} + \overline{MQ} = \overline{AD}$, каде D е подножјето на висината повлечена од темето A на кракот BC.

24. На цртежот десно е прикажан квадрат $ABDE$ чија дијагонала е со должина $4\sqrt{2}\ cm$. Пресметај ја плоштината на засенчениот четириаголник $ACEG$.



25. Две кружници со различни радиуси се сечат во точките M и N. Во точката M конструирај

права која помалата кружница ја сече во точката A, а поголемата во точката B, така што $\overline{AM}=\overline{BM}$.

26. Точките M и N се средини на страните AB и BC на квадратот $ABCD$. Отсечките CM и DN се сечат во точката P. Докажи дека $\overline{AP}=\overline{AD}$.

27. На страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$ се дадени точки K, L, M, N такви што $\overline{AK}=\frac{2}{3}\overline{AB}, \overline{BL}=\frac{2}{3}\overline{BC}, \overline{CM}=\frac{2}{3}\overline{CD}, \overline{DN}=\frac{2}{3}\overline{DA}$. Докажи дека плоштината на четириаголникот определен со правите AL, BM, CN, DK е еднаква на $\frac{1}{13}$ од плоштината на квадратот $ABCD$.

28. Дадени се рамностран триаголник ABC и точка M во неговата внатрешност. Нека точките A', B', C' се проекциите на точката M соодветно на страните BC, CA, AB. Докажи дека збирот $\overline{AC'}+\overline{BA'}+\overline{CB'}$ е константен, т.е. не зависи од изборот на точката M.

29. Нека ABC е остроаголен триаголник, H е негов ортоцентар, а M е средина на страната BC. Нека точката N е подножјето на нормалата повлечена од H на AM. Докажи дека точките B, C, N и H припаѓаат на иста кружница.

30. Складни кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Нека P е произволна точка на лакот AB на кружницата k_2 кој е содржан внатре во кружницата k_1 и нека правата AP ја сече кружницата k_1 уште во точката C, а полуправата CB ја сече кружницата k_2 уште во точката D. Нека симетралата на $\measuredangle CAD$ ја сече кружницата k_1 уште во точката E, кружницата k_2 уште во точката F, а полуправата FB ја сече k_1 уште во точката Q. Ако X е една од пресечните точки на кружниците опишани околу триаголниците CDP и EQF, докажи дека триаголникот CFX е рамностран.

31. Нека D е произволна точка на страната AB на триаголникот ABC и I е центарот на впишаната кружница во него. Точките P и Q се

пресеците на симетралата на отсечката AB и полуправите AI и BI, соодветно. Кружницата опишана околу триаголникот ADP ја сече отсечката AC во точката E, различна од A. Кружницата опишана околу триаголникот BDQ ја сече отсечката BC во точка F, различна од B. Нека K е пресечната точка на овие кржници, различна од D. Докажи дека кружниците E, F, K, I припаѓаат на една кружница.

32. Нека ABC е остроаголен триаголник, H е негов ортоцентар, а M е средина на страната BC. Точката N е подножје на нормалата повлечена од H на AM. Докажи дека точките B, C, N и H припаѓаат на иста кружница.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ТРИАГОЛНИК

1. Во рамнината се дадени пет точки A,B,C,D,E, такви што $\overline{AC}=5\,cm$, $\overline{AE}=4\,cm$, $\overline{BC}=14\,cm$, $\overline{BD}=2\,cm$ и $\overline{DE}=3\,cm$. Определи го растојанието меѓу срединнте на отсечките AB и CD.

Решение. Од неравенството на триаголник следува:

$$14\,cm=\overline{BC}\leq\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{EA}+\overline{AC}=14\,cm,$$

па затоа во претходното неравенство важи знак за равенство, што значи дека точките A,B,C,D,E се колинеарни. Сега лесно се пресметува дека бараното растојание е еднакво на $3,5\,cm$.

2. Даден е триаголник ABC со центар на впишаната кружница I и $\measuredangle BAC=70^\circ$. Ако $\overline{CA}+\overline{AI}=\overline{BC}$ определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека D е точка на полуправата CA таква што $\overline{AD}=\overline{AI}$ и A е меѓу C и D. Тогаш $\triangle CDI\cong\triangle CBI$ и важи

$$\measuredangle CAI=2\measuredangle ADI=2\measuredangle CBI=\measuredangle ABC.$$

Според тоа, $\measuredangle ABC=35^\circ$.

3. Околу $\triangle ABC$ е опишана кружница k. Тангентите на k во точките A и B се сечат во точката T. Правата низ T, паралелна со AC ја сече BC во точката D. Докажи, дека $\overline{AD}=\overline{CD}$.

Решение. Имаме $\measuredangle ACB=\measuredangle TAB=\measuredangle TBA=\measuredangle TDB$. Според тоа, околу четириаголникот $ATBD$ може да се опише кружница, па затоа $\measuredangle ADC=\measuredangle ATB$ и $\triangle ADC\sim\triangle ADC$, т.е. $\overline{AD}=\overline{CD}$.

4. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката H и $\overline{CH}=\overline{AB}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

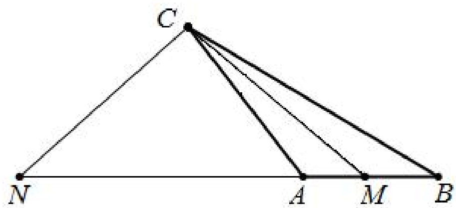
Решение. Нека висините се AA_1, BB_1 и CC_1 (направи цртеж). Од $\measuredangle BAA_1=90^\circ-\measuredangle ABC=\measuredangle A_1CH$ и $\overline{CH}=\overline{AB}$ следува $\triangle ABA_1\cong\triangle CHA_1$. Според тоа, $\overline{A_1B}=\overline{A_1H}$ и од $\triangle BA_1H$ имаме $\measuredangle A_1BH=45^\circ$. Сега, од $\triangle BCB_1$ наоѓаме $\measuredangle ACB=45^\circ$.

5. За внатрешните агли $\alpha = \measuredangle BAC$ и $\beta = \measuredangle ABC$ на триаголникот ABC важи $\alpha - \beta = 90^\circ$. Нека M и N се пресечните точки на правата AB со симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C, соодветно. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$!

Решение. Од условот $\alpha - \beta = 90^\circ$ следува дека триаголникот ABC е тапоаголен. За да покажеме дека $\overline{CM} = \overline{CN}$, доволно е да докажеме дека важи $\measuredangle CNM = \measuredangle NMC$.

Да означиме со $\gamma = \measuredangle ACB, \delta = \measuredangle AMC$. Од $\triangle MBC$ имаме $\delta = \beta + \frac{\gamma}{2}$ (бидејќи δ е надворешен агол за овој триаголник), а од $\triangle AMC$ имаме $\alpha + \delta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$. Ако на левата страна на последното равенство го додадеме и одземеме аголот β и го искористиме условот, ќе добиеме

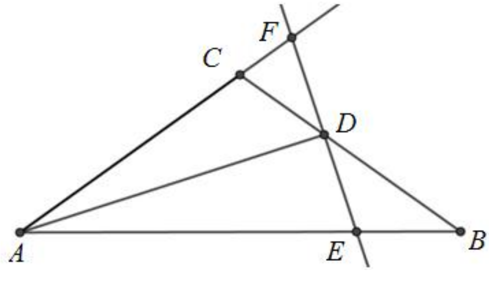
$$\alpha - \beta + \delta + \beta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$$
$$90^\circ + \delta + \delta = 180^\circ$$
$$2\delta = 90^\circ$$
$$\delta = 45^\circ$$



Бидејќи $\measuredangle NCM = 90^\circ$, како агол меѓу симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C, кои се два напоредни агли, следува дека $\measuredangle CNM = 45^\circ$, т.е NMC е рамнокрак триаголник, па $\overline{CM} = \overline{CN}$.

6. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со краци AC и BC и $\measuredangle ACB = 108^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D. Низ D повлекуваме права нормална на AD која ја сече правата AB во точка E. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{CD}$.

Решение. Нека F е пресечната точка на правата ED со правата AC. Сега $\triangle ABC$ е рамнокрак и $\measuredangle ACB = 108^\circ$, па затоа $\measuredangle BAC = 36^\circ$. Од AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ имаме $\measuredangle DAC = 18^\circ$. Триаголникот ADF е правоаголен па имаме $\measuredangle DFA = 72^\circ$. Од $\measuredangle ACB = 108^\circ$ имаме



$$\measuredangle DCF = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ .$$

Следува $\triangle DCF$ е рамнокрак триаголник и $\overline{DC} = \overline{FD}$. Од AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ следува $\overline{DE} = \overline{FD} = \overline{CD}$.

7. Даден е $\triangle ABC$. Точката D од страната AC е таква што $2\overline{AD} = \overline{DC}$. Нека E подножјето на нормалата повлечена од D кон BC, а F пресечната точка на правите BD и AE. Ако триаголникот BEF е рамностран, определи го $\measuredangle ADB$.

Решение. Нека K е средината на DC. Тогаш $\overline{AD} = \overline{DK} = \overline{KC} = \overline{KE}$ и во $\triangle DEB$ аглите се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Освен тоа, $\measuredangle DEF = 90^\circ - \measuredangle BEF = 30^\circ$ и затоа $\triangle DFE$ е рамнокрак и $\overline{DF} = \overline{FE} = \overline{BF}$. Да ја повлечеме средната отсечка FK во $\triangle BDC$. Таа е паралелна со BC и важи $\measuredangle DFK = \measuredangle DBC = 60^\circ = \measuredangle DFA$. Според тоа, FD е висина во $\triangle AFK$ (бидејќи е симетрала на агол и е тежишна линија) и $\measuredangle ADB = 90^\circ$.

8. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C. Точките D и E се соодветно подножја на висината и симетралата на внатрешниот агол повлечени од темето C кон хипотенузата AB. Нека $AD = q, BD = p$ и $AE = n, BE = m$. Докажи дека:

а) $a : b = m : n$ б) $p : q = m^2 : n^2$.

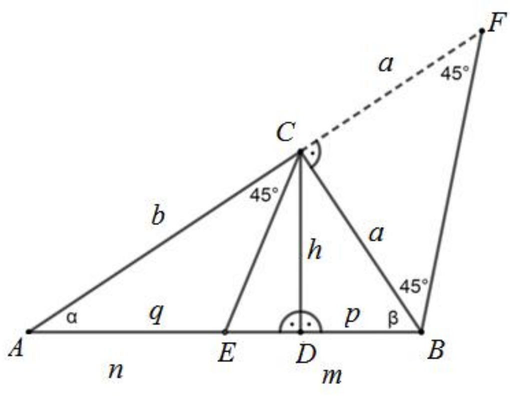
Решение. а) Имаме

$\triangle AEC \sim \triangle ABF \quad \Rightarrow$

$(m+n) : n = (a+b) : b \quad \Rightarrow$

$m : n + 1 = a : b + 1 \quad \Rightarrow$

$a : b = m : n.$



б) Имаме:

$\triangle CDB \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$p : a = a : c \quad \Rightarrow$

$p = \dfrac{a^2}{c} \wedge \triangle ADC \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$q : b = b : c \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{b^2}{c}$

Добиваме, $p : q = \dfrac{a^2}{c} : \dfrac{b^2}{c} \quad \Rightarrow \quad p : q = a^2 : b^2$.

9. Даден е $\triangle ABC$ со тежиште G. Точката M е средина на отсечката AG. Определи го односот во кој правата CM ја дели тежишната линија на $\triangle ABC$ повлечена од темето B.

Решение. Ако BB_1 е тежишната линија на $\triangle ABC$ повлечена од темето B, тогаш пресечната точка K на BB_1 и CM е тежиште на $\triangle AGC$, бидејќи GB_1 и CM се тежишни линии на овој триаголник. Затоа $\overline{B_1K} = \frac{1}{3}\overline{B_1G} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}\overline{BB_1}) = \frac{1}{9}\overline{BB_1}$. Според тоа, K ја дели отсечката BB_1 во однос $8:1$, сметајќи од темето B.

10. Околу кружница со радиус 1 е опишан $\triangle ABC$, чии должини на висини се цели броеви. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамностран.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Тогаш, бидејќи $h_c > 2r$, добиваме $h_c > 2$, па затоа $h_c \ge 3$. Последното значи дека $P = \frac{ch_c}{2} \ge \frac{3c}{2}$. Од друга страна

$$P = sr = \frac{a+b+c}{2} \le \frac{3c}{2}.$$

Според тоа, $\frac{3c}{2} \le \frac{a+b+c}{2} \le \frac{3c}{2}$ и како $a \le b \le c$, од последните неравенства следува $a = b = c$, при што $h_a = h_b = h_c = 3$.

11. Точката D е средина на лакот ACB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Кружница низ точките D и C ги сече отсечките CA и CB соодветно во точките M и N. Докажи, дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.

Решение. Да ги разгледаме $\triangle BND$ и $\triangle AMD$. Имаме,

1) $\measuredangle NBD = \measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \measuredangle MAD$

2) $\overline{AD} = \overline{BD}$,

3) $\measuredangle BND = 180^\circ - \measuredangle CND = 180^\circ - \measuredangle CMD = \measuredangle AND$.

Според тоа, $\triangle BND \cong \triangle AMD$, па затоа $\overline{AM} = \overline{BN}$.

12. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC е избрана точка M. Точката N е надворешна за $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ е рамностран. Правата AC ја сече правата BN во точка D, а правата CM ја сече правата AN во точка K. Определи го $\measuredangle ADK$.

Решение. Имаме $\triangle CAM \cong \triangle BAN$ (два пара еднакви страни и агол меѓу нив од 60°). Затоа $\measuredangle ACK = \measuredangle ABD$. Понатаму, $\triangle CAK \cong \triangle BAD$ (еднаква страна и налегнати агли на неа), па затоа $\overline{AD}=\overline{AK}$ и бидејќи $\measuredangle DAK=60^\circ$, заклучуваме дека $\triangle ADK$ е рамностран.

13. Точката M е средина на страната AB на триаголникот ABC, а точката N е средина на CM. Продолжението на AN ја сече BC во точката P. Определи го односот $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}$.

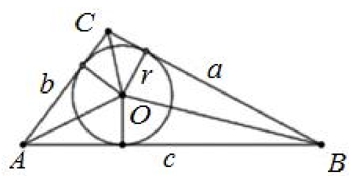
Решение. Бидејќи $P_{AMN}=P_{ACN}=P_{BMN}=\frac{1}{4}P_{ABC}$, ако означиме $P_{NPC}=x$ и $P_{NPB}=y$, добиваме $\frac{x}{P_{ANC}}=\frac{y}{P_{ABN}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{NA}}$. Понатаму, од $P_{ABN}=\frac{1}{2}P_{ABC}$ добиваме $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Конечно, $\frac{\overline{CP}}{\overline{PB}}=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

14. Докажи дека во секој триаголник ABC важи формулата

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

каде h_a,h_b,h_c се висините, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC (види цртеж). Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците ABO, ACO, BCO. Висината на секој од овие триаголници е еднаква на r, па затоа



$$P=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}.$$

Сега, ако земеме предвид дека $\frac{2P}{a}=h_a, \frac{2P}{b}=h_b, \frac{2P}{c}=h_c$, од последното равенство последователно добиваме

$$\frac{ar}{2P}+\frac{br}{2P}+\frac{cr}{2P}=1,$$

$$\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1,$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

што и требаше да се докаже.

15. Во внатрешноста на произволен триаголник ABC е избрана точка M.

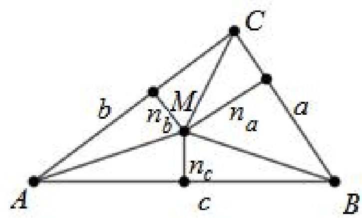
Должините на нормалите од точката M до страните BC, CA, AB да ги означиме соодветно со n_a, n_b, n_c. Докажи дека

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

каде h_a, h_b, h_c се соодветните висини во триаголникот.

Решение. Отсечките MA, MB, MC го делат триаголникот ABC на три триаголници со плоштини $\frac{1}{2}an_a, \frac{1}{2}bn_b, \frac{1}{2}cn_c$. Збирот на овие три плоштини е еднаков на плоштината P на триаголникот ABC, т.е.

$$\frac{1}{2}an_a+\frac{1}{2}bn_b+\frac{1}{2}cn_c=P.$$



Но,

$$\frac{2P}{a}=h_a, \frac{2P}{b}=h_b, \frac{2P}{c}=h_c,$$

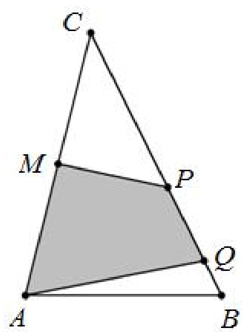
па од последното равенство последователно добиваме

$$\frac{a}{2P}n_a+\frac{b}{2P}n_b+\frac{c}{2P}n_c=1$$

$$\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_b}+\frac{n_c}{h_v}=1,$$

што и требаше да се докаже.

16. Во триаголникот ABC точката M е средина на страната AC. Точката P лежи на страната BC и $\overline{CP}=q\%\overline{BC}$, а точката Q припаѓа на отсечката PB и е таква што $\overline{PQ}=k\%\overline{PB}$. Плоштината на четириаголникот $AQPM$ е еднаква на $p\%$ од плоштината на триаголникот ABC (цртеж десно).



а) Ако $k=50$, да се определи p.

б) Ако $p=q=60$, да се определи k.

Решение. Лесно се докажува дека $\frac{k}{50}=\frac{2p-q}{100-q}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. Според тоа,

а) $p=50$, б) $k=75$.

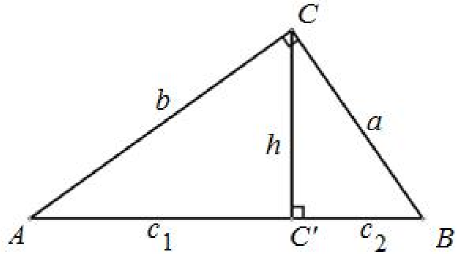
17. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол при темето C, катети a и b и висина повлечена кон хипотенузата h. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Решение. *Прв начин*. При ознаки како на долниот цртеж, од Евклидовите теореми следува

$$a^2=cc_2,\ b^2=cc_1,\ h^2=c_1c_2,$$

од каде добиваме



$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{cc_2},$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{cc_1},$$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{c_1c_2}.$$

Од последните три равенства добиваме

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{cc_2}+\frac{1}{cc_1}=\frac{c_1+c_2}{cc_1c_2}=\frac{c}{cc_1c_2}=\frac{1}{c_1c_2}=\frac{1}{h^2},$$

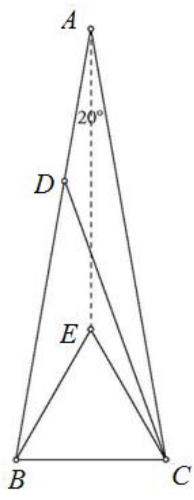
што и требаше да се докаже.

Втор начин. За плоштината на триаголникот имаме $P=\frac{ab}{2}$ и $P=\frac{ch}{2}$, па затоа ако се искористи Питагоровата теорема $c^2=a^2+b^2$, добиваме

$$\frac{1}{h^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot 4P^2}{4P^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot 4(\frac{ch}{2})^2}{4(\frac{ab}{2})^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot c^2\cdot h^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{c^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

што и требаше да се докаже.

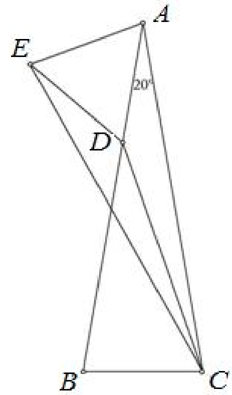
18. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC=20^\circ$ и $\overline{AB}=\overline{AC}$. На страната AB е земена точка D така што $\overline{AD}=\overline{BC}$. Определи го $\measuredangle DCA$.



Решение. *Прв начин*. Нека E е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle EBC$ е рамностран (цртеж десно). Имаме $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BE}=\overline{AD}$ и AE е заедничка страна на $\triangle ABE$ и $\triangle ACE$, од признакот ССС следува дека $\triangle ABE\cong\triangle ACE$. Оттука следува $\measuredangle BAE=\measuredangle CAE=10^\circ$. Понатаму, од $\measuredangle ABC=\measuredangle ACB$ $=80^\circ$ следува $\measuredangle ABE=\measuredangle ACE=80^\circ-60^\circ=20^\circ$. Сега, за $\triangle ACE$ и $\triangle CAD$ важи AC е заедничка страна, $\overline{CE}=\overline{AD}$ и $\measuredangle ECA=\measuredangle DAC=20^\circ$, па од признакот САС следува дека $\triangle CAD\cong\triangle ACE$. Конечно, од оваа складност следува

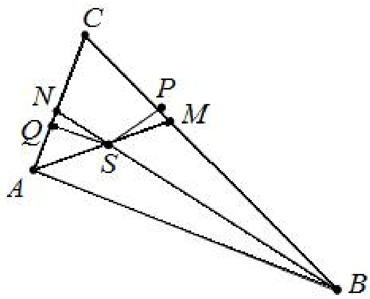
$\measuredangle DCA = \measuredangle EAC = 10^\circ$.

Втор начин. Над отсечката AD, надвор од $\triangle ABC$ конструираме рамностран $\triangle DAE$ (цртеж десно). Имаме $\overline{AB} = \overline{CA}$, $\overline{BC} = \overline{AE}$ и $\measuredangle CAE = \measuredangle ABC = 80^\circ$, па од признакот САС следува дека $\triangle CAE \cong \triangle ABC$. Понатаму, од докажаната складност следува $\measuredangle ECA = \measuredangle BAC = 20^\circ$, $\overline{AC} = \overline{EC}$ и како по конструкција $\overline{AD} = \overline{ED}$, од признкот САС следува дека $\triangle CAD \cong \triangle CED$. Конечно, од оваа складност следува $\measuredangle DCA = \measuredangle DCE = 10^\circ$.



19. Во триаголникот ABC, $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка M, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точка N. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SM} = \overline{SN}$.

Решение. Нека P и Q се подножја на нормалите спуштени од S кон BC и AC, соодветно. Нека означиме $\sim = \measuredangle AMC$ и $\ = \measuredangle BNA$. Од $\measuredangle ACB = 60^\circ$, за внатрешните агли на триаголникот ABC имаме



$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 120^\circ.$$

Во $\triangle AMC$ важи

$$\sim + 60^\circ + \frac{\measuredangle BAC}{2} = 180^\circ \Rightarrow \sim + \frac{\measuredangle BAC}{2} = 120^\circ \qquad (1)$$

Во $\triangle BNC$ важи

$$(180^\circ - \quad) + 60^\circ + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 180^\circ \Rightarrow (180^\circ - \quad) + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 120^\circ \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), се добива

$$\sim + \frac{\measuredangle BAC}{2} + (180^\circ - \quad) + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 240^\circ,$$

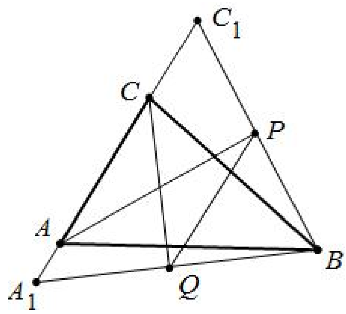
$$\sim - \quad + \frac{\measuredangle BAC + \measuredangle ABC}{2} = 60^\circ,$$

$$\sim - \quad = 0,$$

$$\sim = \quad .$$

Според тоа, триаголниците MPS и NQS се складни според признакот АСА, бидејќи имаат исти агли и $\overline{SQ} = \overline{SP}$, како радиуси на впишаната кружница во триаголникот ABC. Следува дека $\overline{SM} = \overline{SN}$, што и требаше да се докаже.

20. Во триаголникот ABC повлечени се симетралите на аглите во темињата A и C. Точките P и Q се проекциите на точката B на тие симетрали, соодветно. Докажи дека отсечката PQ е паралелна со страната AC.

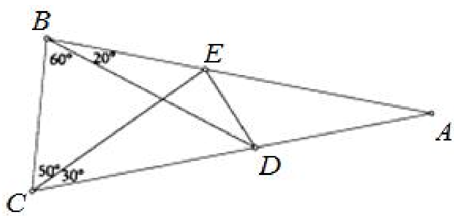


Решение. Нека ги продолжиме отсечките BQ и BP до пресек со правата AC и нека тие точки ги означиме со A_1 и C_1, соодветно. Во триаголникот ABC_1 отсечката AP е висина и симетрала на аголот во темето A. Значи тој триаголник е рамнокрак, $\overline{AB} = \overline{AC_1}$. Тогаш отсечката AP е исто така и тежишна линија, па $\overline{BP} = \overline{PC_1}$. Сосема аналогно, CQ е тежишна линија во триаголникот CBA_1, па $\overline{BQ} = \overline{QA_1}$. Значи, PQ е средна линија за триаголникот A_1BC_1. Значи, отсечката PQ е паралелна со страната AC.

21. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот $AL\ (L \in BC)$ и тежишната линија $CM\ (M \in AB)$ се заемно нормални. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$, ако тие се последователни цели броеви.

Решение. Ако K е пресечната точка на AL и CM, од условот на задачата следува, дека $\triangle AKM \cong \triangle AKC$ (направи цртеж). Според тоа, $\overline{AM} = \overline{AC}$, па затоа $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Сега, од $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AB}$ следува дека $\overline{BC} > \overline{AC}$. Ако $\overline{AB} = \overline{AC} + 1$ и $\overline{BC} = \overline{AC} + 2$, добиваме дека $\overline{AC} = 1$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$ и таков триаголник не постои. Останува да важи $\overline{BC} = \overline{AC} + 1$ и $\overline{AB} = \overline{AC} + 2$, од каде добиваме $\overline{AC} = 2$, $\overline{AB} = 4$ и $\overline{BC} = 3$.

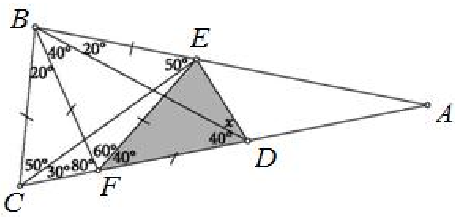
22. Според податоците од цртежот десно, определи го $\measuredangle BDE$.



Решение. Нека F е точка AC таква што $\measuredangle CBF = 20^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle BFC = \measuredangle FCB = 80^\circ,$$

што значи дека $\triangle CFB$ е рамнокрак. Понатаму, $\measuredangle DFB$ е надворешен за $\triangle CFB$, па затоа



$$\measuredangle DFB = 180^\circ - \measuredangle BFC = 100^\circ.$$

Од $\triangle CEB$ добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle BEC &= 180^\circ - \measuredangle ECB - \measuredangle CBE \\ &= 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ \\ &= 50^\circ.\end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle CEB$ е рамнокрак и важи $\overline{BC} = \overline{BE}$. Но, $\overline{BC} = \overline{BF}$, па затоа $\overline{BF} = \overline{BE}$, т.е. $\triangle FEB$ е рамнокрак и како $\measuredangle FBE = 60^\circ$, заклучуваме дека тој е рамностран. Според тоа, $\overline{EF} = \overline{BF}$. Понатаму, од $\triangle BDF$ имаме

$$\measuredangle BDF = 180^\circ - \measuredangle FBD - \measuredangle DFB = 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ,$$

што значи дека $\triangle BDF$ е рамнокрак и важи $\overline{FD} = \overline{BF}$. Но, тоа значи дека $\overline{EF} = \overline{BF} = \overline{FD}$, т.е. $\triangle DEF$ е рамнокрак, од што следува дека $\measuredangle EDF = \measuredangle DEF = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle BDE = \measuredangle EDF - \measuredangle BDF = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

23. Низ центарот I на впишаната кружница за $\triangle ABC$ е повлечена права, која ги сече AB и BC соодветно во точките M и N. Точките K и L на страната AC се такви што $\measuredangle IKL = \measuredangle INB$ и $\measuredangle ILK = \measuredangle IMB$. Докажи дека $\overline{AM} + \overline{KL} + \overline{CN} = \overline{AC}$.

Решение. Нека E, D, F се подножјата на нормалите повлечени од точката I соодветно на страните AC, BC, AB. Тогаш

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{AM} + \overline{MF} \text{ и } \overline{CE} = \overline{CD} = \overline{CN} + \overline{ND}.$$

Бидејќи $\triangle IMF \cong \triangle ILE$ и $\triangle IND \cong \triangle IKE$, добиваме $\overline{KL} = \overline{MF} + \overline{ND}$ и затоа

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AF} + \overline{CD} = (\overline{AM} + \overline{MF}) + (\overline{CN} + \overline{ND}) \\ &= \overline{AM} + \overline{CN} + (\overline{MF} + \overline{ND}) = \overline{AM} + \overline{CN} + \overline{KL}.\end{aligned}$$

24. Во триаголникот ABC е исполнето равенството $\overline{BC} = 2\overline{AC}$. Точката

D на страната BC е таква, што $\measuredangle CAD = \measuredangle CBA$. Правата AD ја сече надворешната симетрала на аголот во темто C во точката E. Докажи $\overline{AE} = \overline{AB}$.

Решение. Триаголниците ABC и DAC се слични, па ако означиме $\overline{CD} = t$, добиваме $\overline{AC} = 2t$ и $\overline{BC} = 4t$, што значи $\overline{BD} = 3t$. Непосредно се пресметува, дека $\measuredangle AEC = \frac{\sim -}{2}$. Нека P е точка на DB таква, што $\overline{DP} = t$. Тогаш триаголникот APC е рамнокрак и

$$\measuredangle APC = \measuredangle PAC = 90^\circ - \frac{¥}{2},$$

од каде добиваме $\measuredangle DAP = \frac{\sim -}{2}$. Оттука следува, дека AP е симетрала на агол во триаголникот ABD, па затоа $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. Но, триаголниците APD и ECD се складни, па затоа $\overline{AE} = 2\overline{AD}$. Конечно, $\overline{AE} = \overline{AB}$.

25. Даден е остроаголен триаголник ABC со центар O на опишаната кружница и ортоцентар H. Нека D е пресечната точка на CO и AB, E е средината на CD, точката P е подножјето на нормалата повлечена од C кон AB, а X е средината на OH. Докажи дека

$$\overline{OE} + \overline{XE} = \overline{PX}.$$

Решение. Бидејќи PE е тежишна линија во правоаголен триаголник (направи цртеж), имаме $\measuredangle PCE = \measuredangle EPC$ и $\overline{EP} = \overline{EC}$. Ако Q е пресечната точка на CP со опишаната кружница, тогаш $\overline{HP} = \overline{PQ}$ и триаголникот OQC е рамнокрак. Следствено

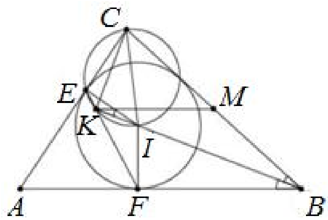
$$\measuredangle OQC = \measuredangle OCP = \measuredangle PCE = \measuredangle EPC,$$

од каде добиваме, дека PE е средна линија за триаголникот HQO. Тоа значи, дека пресечната точка на PE и OH е точката X. Освен тоа, $\overline{PX} = \frac{R}{2}$ и $\overline{OE} + \overline{PE} = \overline{OE} + \overline{EC} = R$, од каде добиваме

$$\overline{OE} + \overline{EX} + \overline{XP} = R, \text{ т.е. } \overline{OE} + \overline{XE} = \frac{R}{2} = \overline{PX}.$$

26. Во триаголник ABC е впишана кружница со центар I, која ги допира страните CA и AB соодветно во точките E и F. Ако BI ја сече EF во точката K, докажи, дека K припаѓа на правата која минува низ средините на страните BC и AC.

Решение. Нека правата низ K, паралелна на AB, ја сече BC во точката M. Доволно е да докажеме, дека M е средина на BC. Триаголникот KBM е рамнокрак и важи $\overline{BM}=\overline{KM}$. Освен тоа, важи



$$\measuredangle BKF=\measuredangle AFE-\measuredangle KBF$$

$$=90^\circ-\frac{\sim}{2}-\frac{\ }{2}=\frac{¥}{2},$$

што значи дека четириаголникот $EKIC$ е тетивен. Според тоа, $\measuredangle IKC=\measuredangle IEC=90^\circ$. Значи, триаголникот BKC е правоаголен и од $\overline{BM}=\overline{KM}$ следува дека отсечката KM е негова тежишна линија.

27. Во $\triangle ABC$, со страни $\overline{AC}=10$ и $\overline{BC}=15$, точките T и I се соодветно тежиштето и центарот на впишаната кружница. Определи ја должината на страната AB, ако $\measuredangle CIT=90^\circ$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на триаголникот. Нека правата IT ги сече AC и BC соодветно во точките P и Q. Очигледно $\triangle CIP\cong\triangle CIQ$ и оттука следува $\overline{CP}=\overline{CQ}$ и $P_{\triangle CPQ}=2P_{\triangle CIP}=\overline{CP}\cdot r$. Од друга страна, бидејќи растојанијата од T до AC и BC се соодветно еднакви на $\frac{h_b}{3}$ и $\frac{h_a}{3}$, добиваме

$$P_{\triangle CPQ}=P_{\triangle CPT}+P_{\triangle CQT}=\frac{\overline{CP}\cdot h_b}{6}+\frac{\overline{CQ}\cdot h_a}{6}=\frac{\overline{CP}\cdot(h_a+h_b)}{6}.$$

Од последните две равенства следува $h_a+h_b=6r$. Сега, ако се земе предвид дека $h_a=\frac{2P}{a}, h_b=\frac{2P}{b}$ и $r=\frac{P}{s}$, го добиваме равенството $(a+b)(a+b+c)=6ab$. Конечно, бидејќи $a=15$ и $b=10$, од последното равенство добиваме $c=11$.

28. На страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка N, а на отсечката CN е избрана точка P таква што $\overline{CP}=k\%\overline{CN}$ Нека Q и R се средините на отсечките AP и BP, соодветно. Ако плоштината на $\triangle CQR$ е еднаква на 35% од плоштината на $\triangle ABC$, да се определи k.

Решение. Да означиме $P_{APC}=x, P_{BPC}=y, P_{APB}=z$. Тогаш важи

$$P_{CQR}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z.$$

Оттука добиваме

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=\frac{7}{20}(x+y+z),$$

т.е. $3(x+y)=2z$. Тоа значи дека $x+y=\frac{2}{5}(x+y+z)$. Понатаму,

$\frac{x}{P_{ANC}}=\frac{y}{P_{BNC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}=k\%$, па затоа $\frac{x+y}{P_{ANC}+P_{BNC}}=k\%$, од каде добиваме $x+y=k\%P_{ABC}$. Но, $k\%P_{ABC}=k\%(x+y+z)$, па затоа

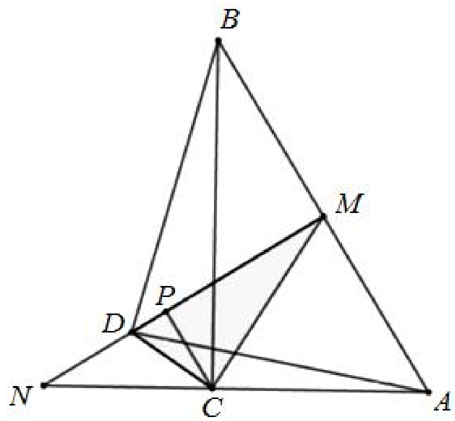
$$k\%(x+y+z)=\frac{2}{5}(x+y+z),$$

односно $k=40$.

29. Во триаголникот ABC познати се $\overline{AC}=6cm, \overline{BC}=8cm$ и $\measuredangle ACB=90°$. Точката M е средина на отсечката AB, а точката D лежи на истата страна од отсечката AB како и точката C, но така што $\overline{DA}=\overline{DB}=7\ cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот CDM.

Решение. Од Питагоровата теорема за триаголникот ABC следува дека

$$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\ cm.$$



Триаголникот ADB е рамнокрак триаголник, па во него тежишната линија повлечена од врвот D е истовремено и висина. Заради тоа три-аголникот DMB е правоаголен триаголник и

$$\overline{DM}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}\ cm.$$

Нека N е пресечната точка на правите DM и AC. Триаголниците NAM и BAC се слични (имаат еднакви агли) и од нивната сличност важи $\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$ Тогаш, $\overline{NA}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BA}}{\overline{AC}}=\frac{25}{3}\ cm$. Нека CP е висината во триаголникот CDM спуштена од темето C. Тогаш и триаголниците NCP и NAM се слични (имаат еднакви агли) и затоа важи $\frac{\overline{CP}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$, т.е.

$\frac{\overline{CP}}{\overline{NA}-\overline{AC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$. Оттука $\overline{CP}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}(\overline{NA}-\overline{AC})=\frac{7}{5}\ cm$.

За плоштината на триаголникот CDM имаме

$$P=\frac{\overline{DM}\cdot\overline{CP}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{5}\ cm^2.$$

30. Нека a,b,c се страни на даден $\triangle ABC$ и притоа важи равенството

$$a^2+b^2=c^2.$$

Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната c е прав.

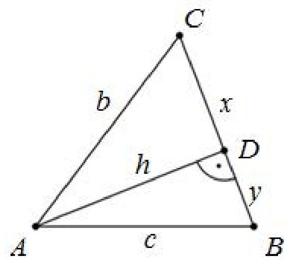
Решение. Со примена на Питагорова теорема ќе го докажеме следното посилно тврдење:

За $\triangle ABC$ е триаголник со страни $a=BC$, $b=AC$ и $c=AB$ важи:

1) ако $\measuredangle ACB<90^\circ$, тогаш $c^2<a^2+b^2$,

2) ако $\measuredangle ACB>90^\circ$, тогаш $c^2>a^2+b^2$.

<ins>Доказ на 1).</ins> Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во внатрешноста на триаголникот ABC (бидејќи $\measuredangle C<90^\circ$). При ознаки како на цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја Питагоровата теорема имаме:



$$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$b^2=h^2+x^2,$$

$$c^2=h^2+y^2.$$

Оттука,

$$a^2+b^2=c^2+(2x^2+2xy)=c^2+2x(x+y)=c^2+2xa>c^2.$$

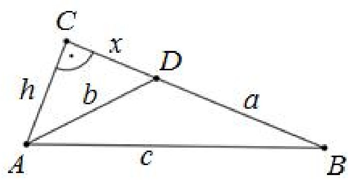
<ins>Доказ на 2).</ins> Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во надворешноста на триаголникот ABC (бидејќи $\measuredangle C>90^\circ$).

При ознаките како на цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја Питагоровата теорема, имаме:

$$a^2=(y-x)^2=y^2-2xy+x^2,$$

$$b^2=h^2+x^2,$$

$$c^2=h^2+y^2.$$



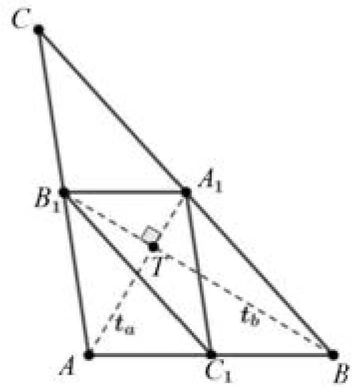
Оттука

$$a^2+b^2=c^2-(2xy-2x^2)=c^2-2x(y-x)=c^2-2xa<c^2.$$

Од претходните разгледувања следува дека, ако внатрешниот агол наспроти страната c не е прав агол, тогаш $a^2+b^2\neq c^2$, од што следува тврдењето на задачата.

31. Даден е триаголник ABC со меѓусебно нормални тежишни линии $t_a=12\,cm$ и $t_b=20\,cm$. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Со A_1, B_1, C_1 ги означуваме средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Имаме $\overline{AA_1} = t_a = 12\ cm$ и $\overline{BB_1} = t_b = 20\ cm$. Ги разгледуваме триаголниците AC_1B_1, $A_1B_1C_1, C_1BA_1$ и B_1A_1C. За $\triangle AC_1B_1$ имаме $\overline{AC_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{AB_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$, и $\overline{C_1B_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. Триаголникот $A_1B_1C_1$ е триаголник чии страни се средните линии на $\triangle ABC$, па важи $\overline{A_1C_1} = \frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{A_1B_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, и $\overline{C_1B_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$. За C_1BA_1 имаме $\overline{C_1B} = \frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{BA_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{C_1A_1} = \frac{\overline{CA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$. За $\triangle B_1A_1C$ имаме $\overline{B_1C} = \frac{\overline{AC}}{2}$, $\overline{CA_1} = \frac{\overline{BC}}{2}$, и $\overline{B_1A_1} = \frac{\overline{BA}}{2}$ како средна линија во $\triangle ABC$.



Од досега изнесеното следува дека $\triangle ABC$ е составен од четири складни триаголници. Нека со P' ја означиме плоштината на секој од четирите складни триаголника. Тогаш плоштината на $\triangle ABC$ е $P = 4P'$. Според тоа доволно е да ја пресметаме плоштината P'.

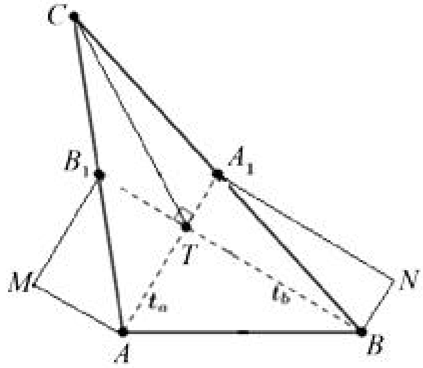
Бидејќи A_1B_1 е средна линија во $\triangle ABC$, таа е паралелна со AB, што значи дека ABA_1B_1 е трапез за чии дијагонали важи $AA_1 \perp BB_1$. Од овде, плоштината на трапезот ќе биде

$$P_{ABA_1B_1} = \frac{\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1}}{2} = \frac{12 \cdot 20}{2} = 120\ cm^2 .$$

Бидејќи трапезот е составен од трите складни триаголника AC_1B_1, $A_1B_1C_1$ и C_1BA_1, секој со плоштина P', добиваме $P_{ABA_1B_1} = 3P'$. Оттука

$P' = 40\ cm^2$ и $P = 4P' = 160\ cm^2$.

Втор начин. Со A_1, B_1 ги означуваме средините на страните BC и AC, соодветно, па $\overline{AA_1} = t_a = 12\ cm$ и $\overline{BB_1} = t_b = 20\ cm$. Бидејќи тежиштето ги дели те-



жишните линии во однос 1:2 се добива:

$$\overline{AT} = 8\ cm\ ,\ \overline{TA_1} = 4\ cm\ ,$$

$$\overline{AT} = \frac{40}{3}\ cm \text{ и } \overline{TB_1} = \frac{20}{3}\ cm\ .$$

Бидејќи плоштината на $\triangle BTC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот BTA_1N, и плоштината на $\triangle ATC$ е еднаква на плоштината на правоаголникот ATB_1M, следува дека плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците BTA_1N, ATB_1M и триаголникот ABT. Според тоа, плоштината на $\triangle ABC$ е

$$\frac{40}{3}\cdot 4 + \frac{20}{3}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot\frac{40}{3}\cdot 8 = 160\ cm^2\ .$$

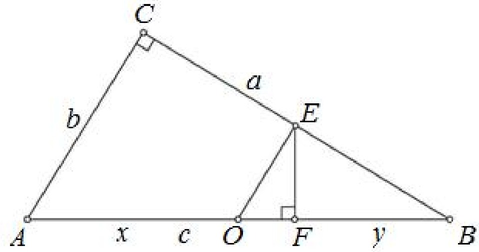
32. Во правоаголен $\triangle ABC$ низ средината M на хипотенузата AB е повлечена права, нормална на AB, која ја сече катетата BC во точка K и продолжението на катетата AC во точка L. Да се определи $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB}$, ако $\overline{KM} : \overline{KL} = 9 : 7$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за триаголникот и нека $\overline{KM} = 9x$ и $\overline{KL} = 7x$. Од $\triangle KMB \sim \triangle AML$ следува $\frac{\overline{KM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{LM}}$ или $\frac{9x}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{16x}$, од каде добиваме $c = 24x$. Понатаму, од $\triangle KMB \sim \triangle ACB$ следува $\frac{\overline{KM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$ или $\frac{9x}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{a}$, од каде добиваме $3a = 4b$. Оттука и од $a^2 + b^2 = c^2 = 576x^2$, добиваме $a = \frac{96x}{5}$ и $b = \frac{72x}{5}$. Според тоа,

$$\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = \frac{72}{5} : \frac{96}{5} : 24 = 3 : 4 : 5\ .$$

33. Разликата на квадратите на отсечките кои ги формира нормалата повлечена од средината на една од катетите кон хипотенузата е еднаква на квадратот на другата катета. Докажи!

Решение. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето C и нека точката E е средина на катетата BC, O е средината на хипотенузата AB, а $EF \perp AB$, каде $F \in AB$. Воведуваме ознаки $\overline{AF} = c$,



$\overline{BF} = y$. Имаме:

$$\overline{OF} = \overline{AF} - \overline{AO} = x - \frac{1}{2}\overline{AB} = x - \frac{1}{2}(x+y) = \frac{x-y}{2} \text{ и } \overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}b .$$

Од $OE \parallel AC$ следува дека $\measuredangle EOF = \measuredangle CAB$ и како $EF \perp AB$, заклучуваме дека правоаголните триаголници OEF и ABC се слични. Според тоа, важи $\frac{\overline{OE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{\frac{b}{2}}{x+y} = \frac{\frac{x-y}{2}}{b}$, од каде добиваме

$$b^2 = (x-y)(x+y), \text{ т.е. } b^2 = x^2 - y^2 ,$$

што и требаше да се докаже.

34. Нека O точка е во внатрешноста на правоаголниот $\triangle ABC$, со прав агол во темето C. Ако плоштините на триаголниците AOB, BOC и AOC се еднакви, докажи дека

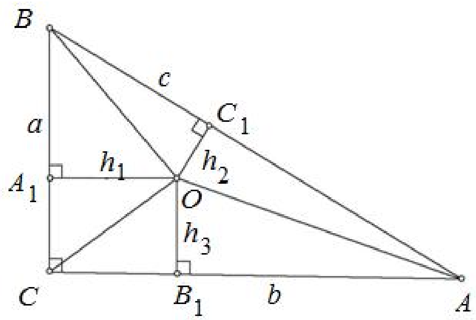
$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 5\overline{OC}^2 .$$

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на нормалите повлечени од точката O, кон страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$. Воведуваме ознаки $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, $\overline{OA_1} = h_1, \overline{OB_1} = h_3, \overline{OC_1} = h_2$.

Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB_1}^2 + \overline{OB_1}^2 = \overline{OA}^2 \text{ и}$$

$$\overline{BA_1}^2 + \overline{OA_1}^2 = \overline{OB}^2 ,$$



па затоа

$$(b-h_1)^2 + h_3^2 = \overline{OA}^2 \text{ и}$$

$$(a-h_3)^2 + h_1^2 = \overline{OB}^2 ,$$

од каде добиваме

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = (b-h_1)^2 + h_3^2 + (a-h_3)^2 + h_1^2 ,$$

т.е.

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + b^2 - 2ah_3 - 2bh_1 + 2(h_1^2 + h_3^2) . \qquad (1)$$

Понатаму, од условот на задачата следува

$$P_{\triangle OBC} = P_{\triangle OCA} = P_{\triangle OAB} ,$$

па затоа $P_{\triangle OBC} = P_{\triangle OCA} = \frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$, од каде добиваме

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_3 = \frac{1}{6}ab ,$$

т.е.

$$b = 3h_1,\ a = 3h_3. \qquad (2)$$

Понатаму, од правоаголниот триаголник OCA_1 следува

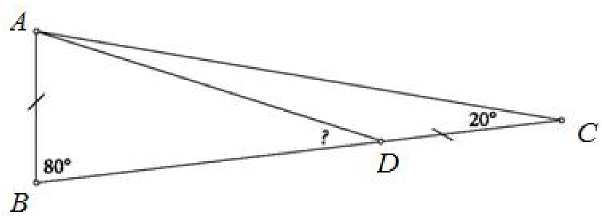
$$h_1^2 + h_3^2 = \overline{OC}^2. \qquad (3)$$

Конечно, од (1), (2) и (3) следува

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 9h_3^2 + 9h_1^2 - 6h_3^2 - 6h_1^2 + 2(h_1^2 + h_3^2)$$
$$= 5(h_1^2 + h_3^2) = 5\overline{OC}^2,$$

што и требаше да се докаже.

35. Според податоците на долниот цртеж, ако $\overline{AB} = \overline{CD}$, пресметај го $\measuredangle ADB$.



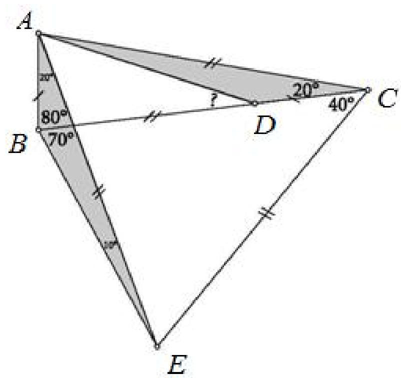
Решение. Од $\triangle ABC$ имаме

$$\measuredangle BAC = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ.$$

Понатаму, од

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CBA = 80^\circ$$

следува дека $\triangle ABC$ е рамнокрак. Нека E е точка во рамнината таква што е од иста страна на правата AC како и точките B и D и $\triangle AEC$ е рамностран и да ја повлечеме отсечката BE. Имаме,



$$\measuredangle BCE = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Понатаму, $\overline{BC} = \overline{EC}$, што значи дека $\triangle BEC$ е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle EBC = \measuredangle CEB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Значи,

$$\measuredangle AEB = \measuredangle CEB - \measuredangle CEA = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

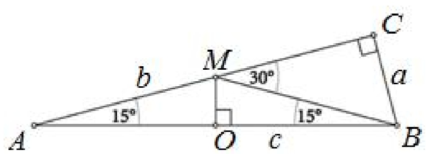
Сега, за триаголниците ABE и CDA важи $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AE} = \overline{AC}$ и

$\measuredangle BAE = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ + 10^\circ) = 20^\circ = \measuredangle ACD$, што значи дека тие се складни. Според тоа, $\measuredangle ADC = \measuredangle EBA = 150^\circ$, од што следува

$$\measuredangle ADB = 180^\circ - \measuredangle CDA = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

36. Даден е правоаголен триаголник со остар агол 15°, радиус на опишана кружница R и катети a и b. Докажи дека $R = \sqrt{ab}$.

Решение. *Прв начин.* Нека во $\triangle ABC$, со прав агол во темето C, точката O е средина на хипотенузата AB и $\sim = 15^\circ$ (цртеж десно).



Нека точката $M \in AC$ е таква што $\measuredangle ABM = 15^\circ$. Триаголникот ABM е рамнокрак, па затоа $MO \perp AB$. Но, тоа значи дека $\triangle BMO \sim \triangle ABC$, па затоа $\frac{\overline{BO}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Понатаму, $\measuredangle BMC = 30^\circ$, како надворешен агол за $\triangle ABM$, па затоа $\triangle MBC$ е половина од рамностран триаголник. Според тоа, $\overline{BM} = 2a$ и како $\overline{AB} = 2R$, добиваме $\frac{R}{2a} = \frac{b}{2R}$, од каде наоѓаме $R = \sqrt{ab}$.

Втор начин. Како во првиот начин на решавање докажуваме дека $\triangle MBC$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BC} = a$, $\overline{BM} = 2a$ и $\overline{MC} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Тоа значи,

$$b = \overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{BM} + \overline{MC} = 2a + a\sqrt{3} = a(2+\sqrt{3}).$$

Сега, бидејќи во правоаголен триаголник радиусот на опишаната кружница е еднаков на половина од хипотенузата, од Питагоровата теорема следува

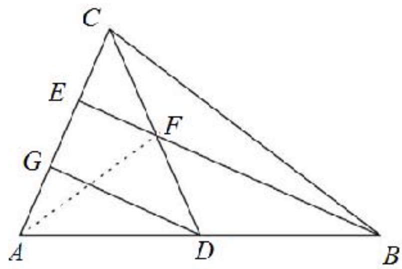
$$2R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{4a^2(2+\sqrt{3})}$$
$$= 2\sqrt{a \cdot a(2+\sqrt{3})} = 2\sqrt{ab},$$

т.е. $R = \sqrt{ab}$.

37. Нека точката D е средина на страната AB на триаголникот ABC, а точката E припаѓа на страната AC и е таква што важи $\overline{AE} = 2\overline{EC}$. Докажи дека правата BE ја полови тежишната линија CD на триаголникот ABC

Решение. Нека точката G е средина на AE. Тогаш

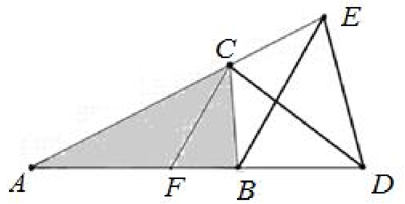
$$\overline{AG} = \overline{GE} = \overline{EC}$$



и како DG е средна линија во триаголникот ABE заклучуваме дека $DG \parallel BE$. Нека BE и CD се сечат во точката F. Во триаголникот GDC точката E е средина на страната GC и како $DG \parallel EF$, заклучуваме дека EF е средна линија соодветна на страната GD, што значи дека $\overline{DF} = \overline{FC}$.

38. Во триаголник ABC аголот во темето C, т.е. $\measuredangle ACB$ е 48°. Нормалата на симетралата на $\measuredangle ACB$ која минува низ темето C ја сече правата AB во точка D, така што точката B лежи меѓу точките A и D и $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. Пресметај ги големините на аглите во триаголникот ABC.

Решение. Правата CD која е нормала на симетралата на внатрешниот $\measuredangle ACB$ е истовремено и симетрала на надворешниот акол во темето C. Ја продолжуваме страната AC преку темето C и на неа



ја означуваме точката E така што да важи $\overline{BC} = \overline{CE}$. Триаголниците BCD и CDE се складни според признакот за складност САС. Од нивната складност следува $\measuredangle CBD = \measuredangle CED$, а $\measuredangle CBD = \sim + ¥$. Бидејќи

$$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AD}$$

следува дека триаголникот ADE е рамнокрак со агли

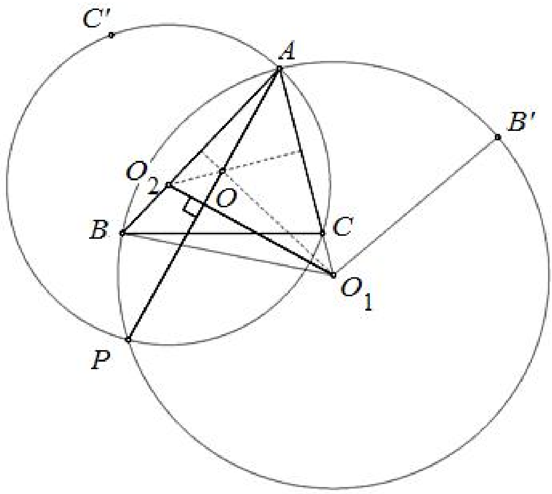
$$\measuredangle ADE = \measuredangle AED = \sim + ¥ .$$

За триаголникот ADE важи $\sim + 2(\sim + ¥) = 180^\circ$ и како $¥ = 48^\circ$ добиваме $\sim = 28^\circ$ и $\quad = 104^\circ$.

39. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC, а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB. Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P.

Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP.

Решение. Нека O_1 е пресекот на правата AC и симетралата на страната AB. Заради осната симетрија важи $\overline{BO_1} = \overline{B'O_1}$, т.е. O_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABB'. Аналогно ја дефинираме точката O_2 како пресек на правата AB и симетралата на страната AC, што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACC'.



Бидејќи AP е заедничка тетива на двете кружници, правата AP е нормална на правата O_1O_2. Симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O, т.е. OO_1 е нормална на AB и OO_2 е нормална на AC. Значи, O е ортоцентар на триаголникот AO_2O_1. Заклучуваме дека правата AO е нормална на правата O_1O_2. Значи, правите AP и AO се нормални на O_1O_2, од што следува дека тие се совпаѓаат, т.е. точките A, O и P се колинеарни.

40. Даден е остроаголен триаголник ABC $(\overline{CA} > \overline{BC} > \overline{AB})$ со ортоцентар H и центар на опишана кружница O. Симетралите на $\measuredangle C$ и $\measuredangle B$ ја сечат опишаната кружница соодветно во точките D и E. Точката D' е симетрична на D во однос на AB, а точката E' е симетрична на E во однос на AC. Ако точките O, H, D', E' лежат на една кружница, определи го $\measuredangle BAC$ и докажи, дека правата $D'E'$ минува низ точката A.

Решение. Имаме $O \in EE'$ и $O \in DD'$. Симетричните точки H_c и H_b соодветно во однос на AB и AC лежат на опишаната кружница. Од симетријата следува дека $\measuredangle H_b EE' = \measuredangle HE'E$ и $\measuredangle H_c DD' = \measuredangle HD'D$. Бидејќи O, H, D', E' лежат на една кружница, важи $\measuredangle HD'D = \measuredangle HE'E$. Според тоа, $\measuredangle H_b EE' = \measuredangle H_c DD'$, што е еквивалентно на

$$\tfrac{1}{2}¥ + \quad = \tfrac{1}{2} \quad + \sim \text{, т.е. } 2\sim = \quad + ¥ ,$$

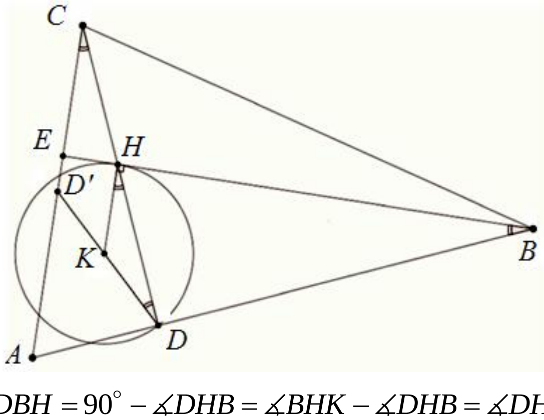
од каде добиваме $\sim = 60^\circ$. Но, $\measuredangle D'AB = \frac{1}{2}¥$ и $\measuredangle E'AC = \frac{1}{2}$, од каде добиваме $\measuredangle D'AB + \measuredangle E'AC = \frac{1}{2}¥ + \frac{1}{2} \quad = \sim = \measuredangle BAC$, што значи дека правата $D'E'$ минува низ точката A.

41. Во триаголник ABC , CD е висината во триаголникот спуштена од темето од C и точката H е ортоцентарот на триаголникот. Нека точката K е центар на кружница која што минува низ точката D и нека правата BH е тангента на кружницата со допирна точка H . Докажи дека правата DK ја преполовува страната AC .

Решение. Нека $D' = DK \cap AC$. Нека E е подножната точка на висината спуштена од темето B (види цртеж). Јасно е дека $\measuredangle BHK = 90^\circ$. Понатаму, триаголниците ADC и AEB се правоаголни, па важи

$$\measuredangle ACD = 180^\circ - (90^\circ + \measuredangle CAD) = 90^\circ - \measuredangle CAD = \measuredangle ABE$$

(или како агли со заемно нормални краци). Сега



$$\measuredangle DBH = 90^\circ - \measuredangle DHB = \measuredangle BHK - \measuredangle DHB = \measuredangle DHK .$$

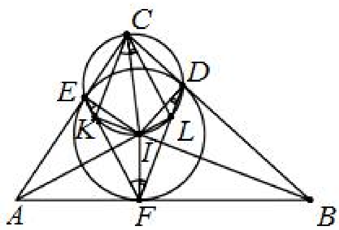
Триаголникот KDH е рамнокрак, па затоа $\measuredangle KDH = \measuredangle KHD$. Оттука $\measuredangle KDH = \measuredangle KHD = \measuredangle ABE = \measuredangle ACD$, па добиваме дека триаголникот $AD'D$ е рамнокрак и $\overline{CD'} = \overline{DD'}$. Триаголникот ADC е правоаголен со прав агол во темето D, па според Талесовата теорема, постои кружница со дијаметар *AC* на која лежи темето *D*. Од $\overline{CD'} = \overline{DD'}$, каде $D' \in AC$, јасно е дека точката *D'* е центарот на таа кружница и тогаш важи $\overline{AD'} = \overline{DD'}$. Со тоа докажавме дека правата правата *DK* ја преполовува страната *AC*.

42. Во триаголник ABC е впишана кружница со центар I, која ги допира страните BC, CA, AB соодветно во точките D, E, F. Ако BI ја сече EF во точката K, а AI ја сече FD во точката L, докажи, дека $\measuredangle KCL = \measuredangle EFD$.

Решение. Ќе докажеме, дека точката K лежи на кружница k со дијаметар IC. Јасно, точките E и D лежат на k. Понатаму,

$$\measuredangle BKF = \measuredangle AFE - \measuredangle KBF$$

$$= 90^\circ - \frac{\sim}{2} - \frac{}{2} = \frac{¥}{2},$$



па $\measuredangle IKE = 180^\circ - \frac{¥}{2}$. Според тоа,

$$\measuredangle IKE + \measuredangle ICE = 180^\circ - \frac{¥}{2} + \frac{¥}{2} = 180^\circ,$$

од каде следува дека четириаголникот $EKIC$ е тетивен, т.е. K припаѓа на k. Оттука следува, дека $\measuredangle KCI = \measuredangle KEI = \measuredangle EAI = \frac{\sim}{2}$. Аналогно се докажува, дека $\measuredangle LCI = \frac{}{2}$. Конечно,

$$\measuredangle KCL = \measuredangle KCI + \measuredangle LCI = \frac{\sim}{2} + \frac{}{2} = 90^\circ - \measuredangle EFA + 90^\circ - \measuredangle DFB = \measuredangle EFD.$$

43. Дадени се два триаголника, такви што должините на страните на првиот триаголник се совпаѓаат со должините на тежишните линии на вториот триаголник. Определи го односот на плоштините на овие два триаголника.

Решение. Нека вториот триаголник е ABC со тежишни линии AM, BN и CP. Избираме точка X таква што $CX \parallel BN$ и $PX \parallel AM$. Тогаш $\triangle CPX$ има страни еднакви на тежишните линии на $\triangle ABC$, што значи дека има еднаква плоштина како првиот триаголник (направи цртеж). Сега, ако се повлечат нормалите h и m соодветно од B и X на CP, лесно се добива дека $h : m = 2 : 3$. Според тоа, $\frac{2h \cdot \overline{CP}}{2} : \frac{m \cdot \overline{CP}}{2} = 4 : 3$, што значи $P_{ABC} : P_{CPX} = 4 : 3$.

44. Во агол се впишани две кружници со радиуси r и R, кои немаат заедничка точка и рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AC}=\overline{BC}$ (точките A и B се на едниот крак, а точката C на другиот крак од аголот). Кружницата со радиус r надворешно го допира кракот AC на $\triangle ABC$, а кружницата со радиус R надворешно го допира кракот BC на $\triangle ABC$. Докажи, дека збирот на радиусите на двете кружници $R+r$ е еднаков на висината h на $\triangle ABC$, повлечена од темето C.

Решение. Нека O е темето на дадениот агол и A е меѓу O и B. Од изразувањеето на плоштината на $\triangle OBC$ преку радиусот R на припишаната кружница и како збир на плоштините на $\triangle OAC$ и $\triangle ABC$ добиваме

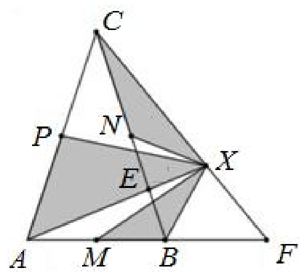
$$R\cdot(\overline{OB}+\overline{OC}-\overline{BC})=r(\overline{OA}+\overline{AC}+\overline{OC})+h\cdot\overline{AB}\,. \qquad (1)$$

Нека кружницата со радиус r има центар O_1 и ја допира правата AB во точката M, а кружницата со радиус R има центар O_2 и ја допира AB во точката N. Од сличноста на триаголниците OO_1M и OO_2N добиваме

$$R\cdot(\overline{OA}+\overline{OC}-\overline{AC})=r(\overline{OB}+\overline{BC}+\overline{OC})\,. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) лесно следува дека $r+R=h$.

45. Даден е триаголник ABC со плоштина 60 и точка X надвор од него (цртеж десно). Точките M,N и P се соодветно средини на страните AB,BC и CA. Плоштините на триаголниците APX и CNX се соодветно 36 и 16.



а) Определи ја плоштината на триаголникот BMX.

б) Ако E е пресечната точка на правите AX и BC, а F е пресечната точка на правите CX и AB, определи ја плоштината на три-аголникот EFX.

Решение. а) Од равенството $P_{ABC}+P_{BCX}=P_{ABX}+P_{ACX}$, ако искористиме дека тежишната линија го дели триаголникот на два триаголника со еднакви плоштини, добиваме $P_{ABC}+2P_{NCX}=2P_{BMX}+2P_{APX}$. Значи, $P_{BMX}=10$.

б) Со h_A и h_B да ги означиме растојанијата од точките A и B, соодветно до правата CF. Имаме

$$\overline{AE}:\overline{EX}=P_{ABC}:P_{XBC}=60:32=15:8,$$

$$\overline{AF}:\overline{FB}=P_{AFX}:P_{BFX}=h_A:h_B=P_{ACX}:P_{BCX}=72:32=9:4.$$

Според тоа,

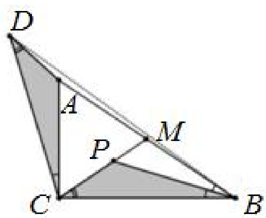
$$P_{EFX}=\frac{\overline{EX}}{\overline{AX}}P_{AFX}=\frac{\overline{EX}}{\overline{AX}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}P_{ABX}=\frac{8}{23}\cdot\frac{9}{5}\cdot 10=\frac{144}{23}.$$

46. Во произволен квадрат се сместени два складни рамнострани триаголници, кои немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека должината на висината на рамностраниот триаголник е помала или еднаква на половина од должината на дијагоналата на квадратот.

Решение. Ќе докажеме, дека секој рамностран триаголник со висина поголема од половината дијагонала на квадратот го содржи центарот на квадратот како внатрешна точка. Нека го претпоставиме спротивното. Конструираме рамностран триаголник со висина поголема од половината дијагонала на дадениот квадратот кој во својата внатрешност не го содржи центарот на квадратот O. Низ O повлекуваме права a паралелна на една од страните на триаголникот, која не го сече триаголникот. Растојанието од темето кое не е на страната паралелна на правата a до правата a да го означиме со m. Тогаш за висината h на рамностраниот триаголник важи $h<m\le\frac{d}{2}$. Последното противречи на претпоставката дека висината на рамностраниот триаголник е подолга од $\frac{d}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

47. Во правоаголен триаголник ABC е повлечена тежишната линија CM $(M\in AB)$ кон хипотенузата. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече CM во точката P. Ако $\overline{BP}=\overline{AC}$, определи го $\measuredangle BAC$.

Решение. Имаме $\measuredangle ABP=\measuredangle PBC=\sim$, $\measuredangle MCB=2\sim$. Конструираме $\triangle DAC$ складен на $\triangle CPB$, $\overline{DC}=\overline{CB}$ и $\measuredangle DCA=\sim$, како што е прикажано на цртежот десно. Тогаш $\measuredangle ADC=2\sim$.



Триаголникот DBC е рамнокрак и од $\measuredangle ADC=\measuredangle ABC$ следува $\measuredangle ADB=\measuredangle ABD$.

Оттука, ако $A\notin BD$, добиваме $\overline{AD}=\overline{AB}$. Последното не е можно, бидејќи

$$\overline{AD} = \overline{CP} < \overline{CM} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$

Според тоа, $A \in BD$, па затоа $\measuredangle BAC = 3\sim$ и добиваме $\sim = 18^\circ$. Добиваме $\measuredangle BAC = 54^\circ$.

48. На лист хартија е нацртан триаголник ABC со плоштина 1. На страните AB и AC се означени соодветно точките D и E така, што DE е паралелна со BC и $\overline{DE} = \tfrac{1}{3}\overline{BC}$. Точката F е таква, што ако го превиткаме листот по правата DE, темето A се совпаѓа со F. Докажи дека $\overline{BD} = 2\overline{AD}$ и определи ја плоштината на триаголникот FBC.

Решение. Нека плоштината на триаголникот ADE ја означиме со x. Триаголниците DBE и DCE имаат еднакви плоштини, и нека ги означиме со S. Бидејќи $\overline{BC} = 3\overline{DE}$, плоштините на триаголниците DBC и ECB се еднакви на $3S$, направи цртеж. Понатаму,

$$\frac{P_{ADE}}{P_{DBE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{P_{ADC}}{P_{DBC}},$$

па затоа $\frac{x}{S} = \frac{x+S}{3S}$, од каде добиваме $S = 2x$. Според тоа, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{x}{S} = \frac{1}{2}$.

Нека H е растојанието меѓу паралелните прави DE и BC, а со h да ја означиме висината во триаголникот ADE повлечена кон страната DE. Имаме

$$\frac{1}{2} = \frac{P_{ADE}}{P_{DBE}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot h}{\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot H},$$

од каде добиваме $H = 2h$. Последното значи дека висината повлечена од темето A во триаголникот ABC е еднаква на $3h$, а растојанијата од точката F до правите DE и BC се еднакви на h. Според тоа,

$$P_{BCF} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot h = \tfrac{1}{3}P_{ABC} = \tfrac{1}{3}.$$

Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на сличност. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

49. Даден е $\triangle ABC$ со висина CD. Ако $\overline{AC} + \overline{CB} = 2$ и $\overline{CD} + \overline{AB} = \sqrt{5}$, определи ги страните на $\triangle ABC$.

Решение. Ставаме $\overline{BC} = x$ и $\overline{AB} = y$. Да ја фиксираме едната променлива $(y = c)$ и да го определиме триаголникот со константен периметар $c + 2$ и страна c, кој има најголема плоштина, односно висина. Од Хероновата формула следува

$$\sqrt{s(s-c)}\sqrt{(s-x)(s-2+x)} \le \sqrt{s(s-c)}\,\tfrac{2s-2}{2}\,.$$

Десната страна на неравенството е константа, што значи дека максимална плоштина се добива кога $s-x=s-2+x$, односно кога триаголникот е рамнокрак и притоа $x=1$, т.е. $\overline{AC}=\overline{CB}=1$. Според тоа, $y+h=\sqrt{5}$ и $h^2+\frac{y^2}{4}=1$. Од првото равенство имаме $h=\sqrt{5}-y$ и со замена во второто равенство последователно добиваме

$$(\sqrt{5}-y)^2+\frac{y^2}{4}=1,$$

$$5-2\sqrt{5}y+y^2+\frac{y^2}{4}=1,$$

$$y^2-2\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}y+(\frac{4\sqrt{5}}{5})^2=9,$$

$$(y-\frac{4\sqrt{5}}{5})^2=0$$

$$y=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Конечно, $\overline{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $\overline{AC}=\overline{CB}=1$ и $\overline{CD}=h=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

50. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ACB=60^\circ$. Докажи, дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот со темиња средините на страните на $\triangle ABC$ е еднакво оддалечен од страните AC и BC на $\triangle ABC$.

Решение. Кружницата опишана околу триаголникот со темиња средините на страните на $\triangle ABC$ е Ојлеровата кружница за $\triangle ABC$. Нека O е центар на Ојлеровата кружница. На Ојлеровата кружница припаѓаат и подножјата на висините на $\triangle ABC$. Ако H е подножјето на висината повлечена од B кон AC, а M е средината на BC, тогаш $\triangle BHC$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{CH}$. Сега од признакот ССС следува дека триаголниците OCH и OCM се складни, па затоа CO е симетрала на $\measuredangle ACB$, т.е. O е еднакво оддалечен од страните AC и BC на $\triangle ABC$.

51. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB. Точката $P\in AB$ е таква, што $\overline{AP}=2\overline{PB}$. Точката Q од отсечката CP е таква што $\measuredangle AQP=\measuredangle ACB$. Докажи дека $\measuredangle PQB$ е еднаков на половина од $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека C' е втората пресечна точка на CP и опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш $C'P$ е симетрала на агол во $\triangle AC'B$ и од својството на симетралата следува $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{1}$. Конструираме симетрала на AC' и нека таа ја сече CP во точка Q'. Имаме, $\measuredangle AQ'P = 180^\circ - ¥$, па затоа $\measuredangle CC'A = 90^\circ - \frac{¥}{2}$ и $\measuredangle C'Q'A = ¥$, што значи дека $Q \equiv Q'$. Ако S е пресечната точка на симетралата на AC' со AC', тогаш лесно се докажува дека триаголниците SQC' и BQC'се складни, од што следува тврдењето на задачата.

52. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и M и N се две точки од хипотенузата BC, такви што $\measuredangle MAN = 45^\circ$ и $M \in BN$. Докажи дека

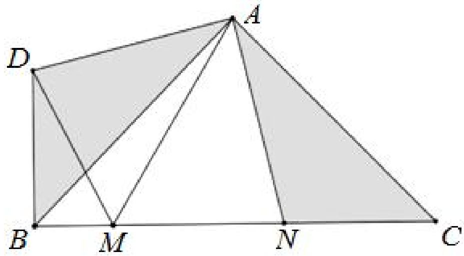
$$\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2 .$$

Решение. Над страната AB, надвор од $\triangle ABC$, конструираме $\triangle ABD$ складен со $\triangle ACN$, таков што $\overline{BD} = \overline{NC}$ и $\overline{AD} = \overline{AN}$. Тогаш,

$$\measuredangle MBD = \measuredangle MBA + \measuredangle ABD = \measuredangle ABM + \measuredangle ACN = \measuredangle ABC + \measuredangle BCA = 90^\circ .$$

Уште повеќе,

$$\begin{aligned}\measuredangle DAM &= \measuredangle DAB + \measuredangle BAM \\ &= \measuredangle NAC + \measuredangle BAM \\ &= \measuredangle BAC - \measuredangle MAN \\ &= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \\ &= \measuredangle MAN.\end{aligned}$$



Бидејќи $\overline{DA} = \overline{AN}$ и AM е заедничка страна, триаголниците DAM и MAN се складни (САС). Заклучуваме дека $\overline{DM} = \overline{MN}$. Сега ја применуваме Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник MBD и добиваме

$$\overline{MN}^2 = \overline{DM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2$$

што и требаше да се докаже.

53. Дадени се природен број n и триаголник ABC со плоштина 2023. На страната BC се избрани $n-1$ точки, кои ја делат на n еднакви делови. Точката најблиска до C да ја означиме со A_1. Отсечката AA_1 е поделена на $n-1$ еднакви делови, при што точката најблиска до A_1 ја

означуваме со B_1. Отсечката BB_1 е поделена на $n-2$ еднакви делови, при што точката најблиска до B_1 ја означуваме со A_2 итн. до поделба на отсечка на два дела. Плоштината на триаголникот A, B и последната избрана точка (која ја дели отсечката на два еднакви дела) е еднаква на 1. Определи го n.

Решение. Плоштината на $\triangle ABA_1$ е еднква на $\frac{n-1}{n}P_{ABC}$. Плоштината на $\triangle BAB_1$ е еднаква на $\frac{n-2}{n-1}P_{ABA_1}=\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}P_{ABC}$ итн. Последната плоштина е еднаква на

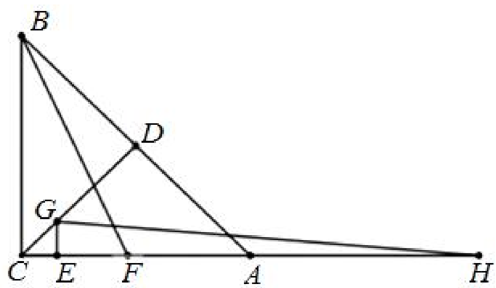
$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}P_{ABC}=\frac{1}{n}P_{ABC},$$

па затоа $n=2023$.

54. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата AC се избрани точки E и F такви што $2\overline{CE}=\overline{EF}$. Нормалата на катетата CA во точката E и тежишната линија на триаголникот ABC повлечена во темето C се сечат во точката G. Нека H е точка на правата CA таква што точката A е средина на отсечката CH. Докажи дека правите GF и BH се паралелни.

Решение. Нека $\overline{CE}=x$, $\overline{GE}=y$. Тогаш $\overline{EF}=2x$, $\overline{AF}=b-3x$ и $\overline{FH}=2b-3x$. Триаголниците CEG и ACB се слични (тие се правоаголни и $\measuredangle GCE=\measuredangle BAC$, бидејќи триаголникот ADC е рамно-крак), па затоа $\frac{\overline{GE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}$, од каде добиваме $y=\frac{ax}{b}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}P_{BGF}&=P_{BCF}-P_{GBCE}-P_{EFG}\\&=\frac{3xa}{2}-\frac{a+y}{2}x-\frac{2xy}{2}\\&=\frac{2xa-3xy}{2}=\frac{2xa-3x\frac{ax}{b}}{2}\\&=\frac{2abx-3ax^2}{2b}=\frac{ax}{b}\frac{2b-3x}{2}\\&=\frac{y(2b-3x)}{2}=\frac{\overline{GE}\cdot\overline{FH}}{2}\\&=P_{FHG}.\end{aligned}$$



Заклучуваме дека триаголниците *BGF* и *HGF* имаат еднакви плоштини и имаат иста страна, *GF*, па затоа нивните висини од темињата *B* и *H* се еднакви, односно растојанијата од темињата *B* и *H* до правата *GF* се еднакви. Оттука следува дека *GF* и *BH* се паралелни прави.

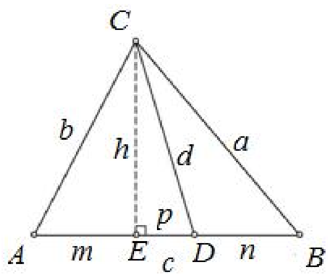
55. Даден е триаголник $ABC(\overline{AC}=\overline{BC})$. Точката M е средина на страната AB, а точката P е внатрешна за триаголникот и $\measuredangle PAB=\measuredangle PBC$. Кои вредности може да ги прима збирот $\measuredangle APM+\measuredangle BPC$?

Решение. Нека P_1 е симетричната точка на P во однос на M, а P_2 е сликата на P при ротација со центар C и агол $\measuredangle ACB$. Лесно се докажува дека $\triangle PP_2B\cong APP_1$ и како $\measuredangle P_2PC=\measuredangle BAC=\measuredangle PBP_2$, добиваме дека $\measuredangle APM+\measuredangle BPC=180^\circ$.

56. **(Теорема на Стјуарт).** Ако на страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка D, која лежи меѓу точките A и B, тогаш точно е равенството

$$\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}-\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}^2\cdot\overline{AB}. \qquad (1)$$

Решение. Нека E е подножјето на висината повлечена од темето C и при вообичаените ознаки за $\triangle ABC$ уште да означиме $\overline{CE}=h$, $\overline{ED}=p$, $\overline{AD}=m$ и $\overline{BD}=n$, цртеж десно. Тре-ба да го докажеме равенството



$$a^2m+b^2n-cmn=d^2c. \qquad (1')$$

Од Питагоровата теорема применета на триаголникот $\triangle CAE$ имаме $b^2=h^2+(m-p)^2$, а од Питагоровата теорема применета на $\triangle CBE$ следува $a^2=h^2+(n+p)^2$. Понатаму, од Питагоровата теорема применета на $\triangle CED$ имаме $h^2=d^2-p^2$. Сега, од последните три равенства следува

$$b^2=d^2-p^2+(m-p)^2 \text{ и } a^2=d^2-p^2+(n+p)^2,$$

од каде ги добиваме равенствата

$$b^2=d^2+m^2-2mp \text{ и } a^2=d^2+n^2+2np. \qquad (2)$$

Ако првото равенство во (2) го помножиме со n, а второто го помножиме со m ги добиваме равенствата

$$b^2n=d^2n+m^2n-2mnp \text{ и } a^2m=d^2m+n^2m+2mnp.$$

Конечно, ако ги собереме последните две равенства и искористиме дека $m+n=c$, го добиваме равенството

$$a^2m+b^2n=d^2c+mnc,$$

кое е еквивалентно со равенството (1').

57. Нека m_A, m_B, m_C се должините на тежишните линии на $\triangle ABC$ повлечени од темињата A, B, C соодветно. Докажи, дека

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}, \quad m_B^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2}{2} - \frac{\overline{AC}^2}{4}, \quad m_C^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство. Останатите две равенства се докажуваат аналогно.

Нека A' е средината на страната BC. Бидејќи

$$\overline{CA'} = \overline{BA'} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ и } m_A = \overline{AA'},$$

од теоремата на Стјуарт го добиваме равенството

$$m_A^2 \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{BC}}{2}$$

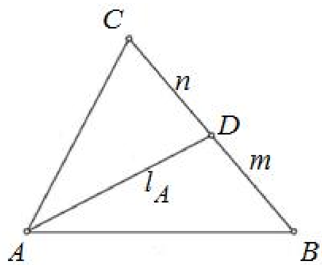
и ако скратиме со $\overline{BC}$ го добиваме равенството

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}.$$

58. Изрази ги должините на симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ со помош на должините на неговите страни.

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата l_A на аголот при темето A со страната BC. Знаеме дека

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} \text{ и } \overline{CD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}}.$$



Сега бидејќи $l_A = \overline{AD}$ од теоремата на Стјуарт следува

$$l_A^2 \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{CA} + \overline{AB}}$$

$$l_A^2 = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CA} + \overline{AB}} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} - \overline{BC}^2 \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CA} + \overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CA} + \overline{AB}}$$

$$l_A^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}(1 - \frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AB} + \overline{AC})^2}.$$

Аналогно се докажува дека

$$l_B^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}(1 - \frac{\overline{AC}^2}{(\overline{AB} + \overline{BC})^2} \text{ и } l_C^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC}(1 - \frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC} + \overline{BC})^2}.$$

59. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и точки D и E на хипотенузата AB такви што $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$. Докажи, дека

$$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = \frac{2}{3}\overline{AB}^2 . \qquad (1)$$

Решение. Од теоремата на Стјуарт следува

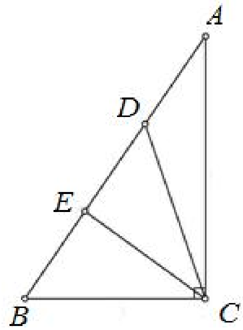
$\overline{CD}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB} - \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ и

$\overline{CE}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AE} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{EB} - \overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB}$.

Понатаму, од

$$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB},\ \ \overline{DB} = \frac{2}{3}\overline{AB},\ \overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB},$$

$$\overline{EB} = \frac{1}{3}\overline{AB},\ \overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$



и од последните две равенства добиваме

$$\overline{CD}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2 + \frac{2}{3}\overline{AC}^2 - \frac{2}{9}\overline{AB}^2 \text{ и}$$

$$\overline{CE}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2 + \frac{1}{3}\overline{AC}^2 - \frac{2}{9}\overline{AB}^2 .$$

Конечно, ако прво ги собереме последните две равенства, потоа добиеното равенство го собереме со равенството $\overline{DE}^2 = \frac{1}{9}\overline{AB}^2$ и земеме предвид дека $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, го добиваме равенството (1).

60. За триаголникот ABC е дадено $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BC} - \overline{AB} = 1$ и $\overline{AC} > 3$. Ако $CD \perp AB\ (D \in AB)$, определи ја разликата $\overline{BD} - \overline{AD}$.

Решение. Нека $\overline{AC} = x$. Тогаш $\overline{AB} = x+1$ и $\overline{BC} = x+1$. Од условот на задачата следува $x > 3$, па затоа $(x+1)(x-3) > 0$. Последното неравенство е еквивалентно на неравенсвото $(x+2)^2 < x^2 + (x+1)^2$, што значи дека триаголникот ABC постои и е остроаголен. Тоа значи дека точката D е внатрешна за страната AB . Имаме

$$x^2 - \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 = (x+2)^2 - \overline{BD}^2 ,$$

па затоа

$$\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 = 4(x+1) .$$

Од друга страна

$$\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 = (\overline{BD} - \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{AD}) = (x+1)(\overline{BD} - \overline{AD}) .$$

Според тоа,

$$(x+1)(\overline{BD} - \overline{AD}) = 4(x+1) ,$$

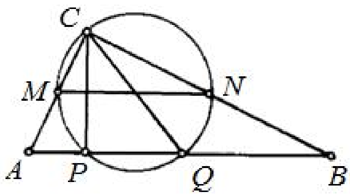
од каде добиваме $\overline{BD}-\overline{AD}=4$.

61. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како $5:12$, кружницата со дијаметар MN каде M и N се средините на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q. Определи го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

Решение. Нека за катетите на триаголникот ABC важи

$$\overline{AC}:\overline{BC}=5:12,$$

од каде $\overline{AC}=5k$ и $\overline{BC}=12k$, за некој $k>0$ (цртеж десно) Тогаш



$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{25k^2+144k^2}=13k.$$

Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, добиваме дека

$$\overline{MN}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\tfrac{13}{2}k.$$

Кружницата со дијаметар MN минува низ темето C, затоа што аголот кај темето C е прав агол. Точката која е симетрична на точката C во однос на дијаметарот MN исто така е точка од кружницата со дијаметар MN. Нека е тоа точката P'. Од $CP'\perp MN$ и $MN\parallel AB$ следува дека $CP'\perp AB$. Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, заклучуваме дека точката P' припаѓа и на страната AB. Оттука следува дека $P'\equiv P$ и CP е висина на триаголникот ABC повлечена кон хипотенузата. За плоштината на триаголникот имаме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CP}}{2}$, од каде наоѓаме $\frac{5k\cdot 12k}{2}=\frac{13k\cdot\overline{CP}}{2}$, односно $\overline{CP}=\frac{60}{13}k$.

Тогаш, од правоаголниот триаголник APC имаме

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{25k^2-\frac{3600}{169}k^2}=\frac{25}{13}k.$$

За втората пресечна точка Q од $\measuredangle QPC=90^\circ$, следува дека CQ е дијаметар на кружницата, па затоа $\overline{CQ}=\frac{13}{2}k$. Сега, од правоаголниот триаголник QPC имаме

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{\frac{169}{4}k^2-\frac{3600}{169}k^2}=\frac{119}{26}k.$$

Тогаш,

$$\overline{QB}=\overline{AB}-\overline{AP}-\overline{PQ}=13k-\frac{25}{13}k-\frac{119}{26}k=\frac{13}{2}k.$$

Конечно, $\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QB}=\frac{25}{13}k:\frac{119}{26}k:\frac{13}{2}k=50:119:169$.

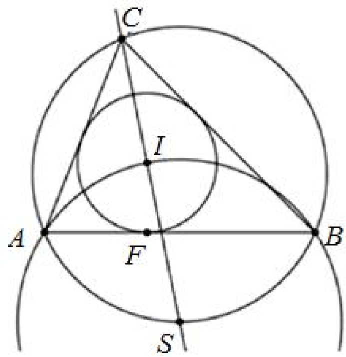
62. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека X и Y се точки на страните AB и AC такви што $\overline{BX}=\overline{CY}$. Нека I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABY и ACX , соодветно, а T е точка во која по втор пат се сечат опишаните кружници околу триаголниците ABY и ACX .Докажи го равенството

$$\frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}}=\frac{\overline{BY}}{\overline{CX}}.$$

Решение. *Лема*. Нека I е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC , а k е опишаната кружница околу тиаголникот ABC и нека правата CI по втор пат ја сече кружницата k во точката S . Тогаш S е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABI .

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle SAI&=\measuredangle SAB+\measuredangle BAI\\&=\measuredangle SCB+\measuredangle BAI\\&=\measuredangle ACI+\measuredangle IAC\\&=\measuredangle AIS.\end{aligned}$$



Значи, $\triangle IAS$ е рамнокрак и важи $\overline{SA}=\overline{SI}$. Слично се докажува дека $\triangle ABS$ е рамнокрак и $\overline{SB}=\overline{SI}$. Сега од

$$\overline{SA}=\overline{SI}=\overline{SB}$$

следува тврдењето на лемата. ■

Да се вратиме на задачата. Со S да ја означиме втората пресечна точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ со опишаната кружница околу $\triangle ABY$. Од условот на задачата имаме $\overline{BX}=\overline{CY}$, од лемата следува $\overline{SB}=\overline{SY}$ и важи $\measuredangle SBX=\measuredangle SBA=180^\circ-\measuredangle SYA=\measuredangle SYC$, па затоа $\triangle SBX\cong\triangle SYC$. Сега, од складноста следува $\measuredangle XSB=\measuredangle CSY$, па затоа

$$\measuredangle CSX=\measuredangle CSY+\measuredangle YSX=\measuredangle XSB+\measuredangle YSX=\measuredangle BSY$$

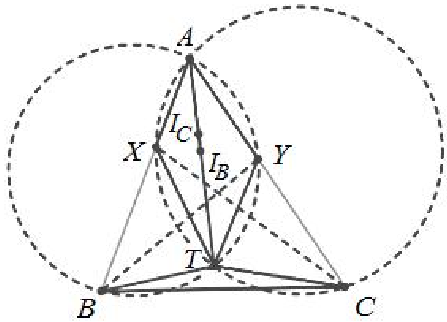
и

$$\measuredangle BSY+\measuredangle BAY=\measuredangle CSX+\measuredangle CAX=180^\circ. \qquad (1)$$

Од (1) следува дека точките B,S,Y,A лежат на една круж-ница. Тоа значи $S\equiv T$. Според тоа, точките B,Y,I_B припаѓаат на кружница со центар во точката T и радиус

$$\overline{TB}=\overline{TY}=\overline{TI_B}=r_B$$

и аналогно точките C, X, I_C припаѓаат на кружница со центар во точката T и радиус $\overline{TC}=\overline{TX}=\overline{TI_C}=r_C$. Понатаму, триаголни-ците BTY и CTX се рамно-краки со агол при врвот



$$\measuredangle BTY=180^\circ-\measuredangle BAC=\measuredangle CTX,$$

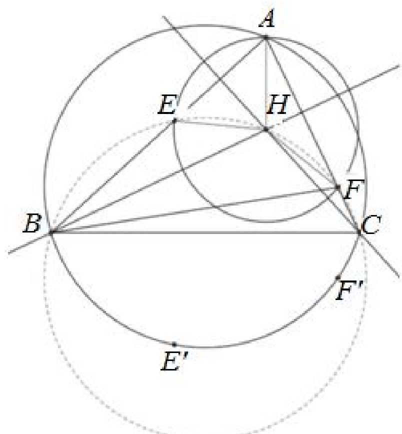
па затоа $\triangle BTY \sim \triangle CTX$. Од сличноста следува

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{CX}}=\frac{\overline{BT}}{\overline{CT}}=\frac{r_B}{r_c}=\frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}},$$

што и требаше да се докаже.

63. Нека ABC е остроаголен триаголник со ортоцентар H. Кружницата d со центар H и радиус AH по втор пат ги сече правите AB и AC во точките E и F, соодветно. Нека E', F', H' се соодветно сликите на точките E, F, H при осната симетрија во однос правата BC. Докажи дека точките A, E', F', H' лежат на иста кружница.

Решение. Ќе докажеме дека точките E', F', H' припаѓаат на опиша-ната кружница ω околу триаголникот ABC.



Имаме $\overline{AH}=\overline{EH}=\overline{FH}$, $CH\perp AB$ и $BH\perp AC$. Оттука следува дека BH и CH се симетрали на отсечките AF и AE, соодветно. Затоа важи $\overline{AB}=\overline{FB}$ и $\overline{AC}=\overline{EC}$. Сега имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle CBH&=\measuredangle CAH=\measuredangle EAC-\measuredangle EAH\\&=\measuredangle AEC-\measuredangle AEH=\measuredangle CEH,\end{aligned}$$

од каде што следува дека четириаголникот $BEHC$ е тетивен. Аналогно, четириаголникот $BFHC$ е тетивен. Како слика на E при осна симетрија во однос на BC за точката E' важи

$$\measuredangle BE'C=\measuredangle BEC=\measuredangle BHC=180^\circ-\measuredangle BAC,$$

од каде заклучуваме дека E' припаѓа на ω. Аналогно се докажува дека F' припаѓа на ω. Конечно, имаме

$$\measuredangle BH'C = \measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

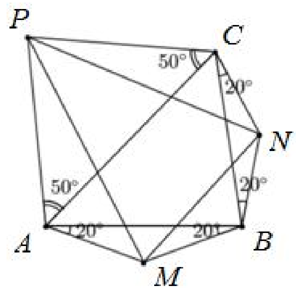
што значи дека и H' припаѓа на ω, со што тврдењето е докажано.

64. Над страните на триаголникот ABC надвор од него се конструирани триаголниците AMB, BNC и CPA, така што

$$\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = \measuredangle NBC = \measuredangle NCB = 20^\circ \text{ и } \measuredangle PAC = \measuredangle PCA = 50^\circ.$$

Определи ги аглите на $\triangle MNP$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\triangle ABC$ е позитивно ориентиран. Ротацијата $^\circ_1$ околу M за агол -140° ја пресликува A во B, а ротацијата $^\circ_2$ околу N за агол -140° ја пресликува B во C. Значи композицијата $^\circ_2 \circ {}^\circ_1$ ја пресликува A во C.



За дадена права g, нека $\pm_g$ е осната симетрија со оска на симетрија g. Конструираме точка Q таква што $\measuredangle QMN = \measuredangle QNM = 70^\circ$ и $\triangle MNQ$ е позитивно ориентиран. Тогаш

$$^\circ_2 \circ {}^\circ_1 = \pm_{QN} \circ \pm_{MN} \circ \pm_{MN} \circ \pm_{QM} = \pm_{QN} \circ \pm_{QM} = {}^\circ(Q, 80^\circ).$$

Бидејќи $^\circ(Q,80^\circ) = {}^\circ_2 \circ {}^\circ_1$ ја пресликува A во C, заклучуваме дека триаголникот ACQ е позитивно ориентиран, $\overline{QA} = \overline{QC}$ и $\measuredangle AQC = 80^\circ$.

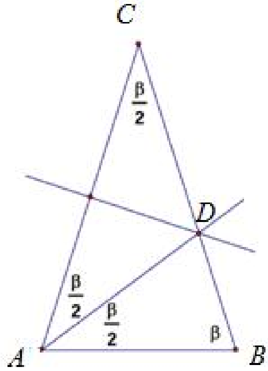
Според тоа, $Q \equiv P$ и добиваме $\measuredangle PMN = \measuredangle PNM = 70^\circ$ и $\measuredangle MPN = 40^\circ$.

65. Во рамнокрак $\triangle ABC$ симетралата на кракот AC и симетралата на $\measuredangle BAC$ се сечат во точка D која припаѓа на кракот BC. Определи ја големината на $\measuredangle CDA$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC =$. Понатаму, AD е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \frac{}{2}.$$

Но, точката D припаѓа на симетралата на кракот AC, па затоа $\overline{AD} = \overline{CD}$, т.е. триаголникот CAD е рамнокрак, со основа AC.



Значи, $\measuredangle CAD = \measuredangle DAC = \frac{\ }{2}$. Според тоа, за збирот на аглите на $\triangle ABC$ добиваме

$$+ \quad + \frac{\ }{2} = 180^\circ \text{, т.е. } \quad = 72^\circ .$$

Конечно, од $\triangle CAD$ наоѓаме

$$\measuredangle CDA = 180^\circ - 2 \cdot \frac{\ }{2} = 180^\circ - \quad = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ .$$

66. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = \frac{7}{2}\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCA = \frac{3}{2}\measuredangle CAB$. Симетралата на страната AC ги сече симетралата AD на $\measuredangle CAB$ и страната AB во точките M и K, соодветно. Докажи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак и пресметај го периметарот на четириаголникот $BCMK$, ако важи $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$.

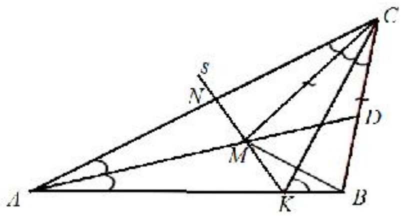
Решение. Од условот на задачата следува

$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180^\circ$,

$\frac{7}{2}\measuredangle CAB + \frac{3}{2}\measuredangle CAB + \measuredangle CAB = 180^\circ$,

$6\measuredangle CAB = 180^\circ$,

$\measuredangle CAB = 30^\circ$,



па затоа $\measuredangle BCA = 45^\circ$, $\measuredangle ABC = 105^\circ$. Понатаму, $M, K \in s$, па затоа важи $\overline{AM} = \overline{CM}$ и $\overline{AK} = \overline{CK}$, т.е. триаголниците ACM и ACK се рамнокраки. Тоа значи дека $\measuredangle KAC = \measuredangle ACK = 30^\circ$. Понатаму, бидејќи AM е симетрала на $\measuredangle CAK$, добиваме дека $\measuredangle KAM = \measuredangle MAC = 15^\circ$. Но, $\triangle ACM$ е рамнокрак па затоа важи $\measuredangle ACM = \measuredangle CAM = 15^\circ$, од што следува дека

$$\measuredangle MCK = \measuredangle ACK - \measuredangle ACM = 15^\circ$$

и затоа

$$\measuredangle KCB = \measuredangle ACK - \measuredangle MCK = 15^\circ .$$

Сега, од $\triangle BCK$ следува

$$\measuredangle BKC = 180^\circ - (\measuredangle KBC + \measuredangle BCK) = 180^\circ - (105^\circ + 15^\circ) = 60^\circ ,$$

а од правоаголниот $\triangle KCN$ следува

$$\measuredangle MKC = \measuredangle NKC = 180^\circ - (\measuredangle KNC + \measuredangle NCK) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ .$$

Понатаму, од

$$\measuredangle MKC = \measuredangle BKC = 60^\circ,\ \measuredangle MCK = \measuredangle BCK = 15^\circ \text{ и } \overline{KC} = \overline{KC}$$

следува дека $\triangle MKC \cong \triangle BKC$. Од докажаната складност следува $\overline{MC} = \overline{BC}$, што значи дека $\triangle BCM$ е рамнокрак.

Од условот на задачата иимаме $\overline{AM} + \overline{MK} = 6\,cm$, па како $\overline{AM} = \overline{CM}$, добиваме $\overline{CM} + \overline{MK} = 6\,cm$. Конечно, од $\triangle MKC \cong \triangle BKC$ следува

$$L_{BCMK} = \overline{CM} + \overline{MK} + \overline{KB} + \overline{BC} = 2(\overline{CM} + \overline{MK}) = 12\,cm.$$

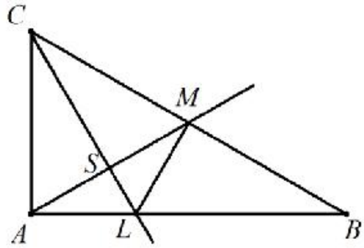
67. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC$. Нека L е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB и нека $P_{\triangle ALC} : P_{\triangle LBC} = 1:2$, каде $P_{\triangle ALC}$ и $P_{\triangle LBC}$ се соодветно плоштините на $\triangle ALC$ и $\triangle LBC$. Определи ги големините на аглите на $\triangle ABC$

Решение. За аглите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Тогаш $\sim = \measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC = 3\ \ $ Нека M е точка на BC таква што $\measuredangle BAM = \ \ $. Значи, $\triangle ABM$ е рамнокрак и важи $\overline{MA} = \overline{MB}$. Понатаму,

$$\measuredangle MAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAM = 2\ \ \text{ и}$$

$$\measuredangle AMC = \measuredangle BAM + \measuredangle ABM = 2\ \ ,$$

што значи $\triangle AMC$ е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{MC}$.



Нека S е пресекот на AM и CL. Сега CS е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $\triangle AMC$ е рамнокрак со врв C, па затоа CS е висина во овој триаголник, што значи дека CL е симетрала на страната AM во $\triangle AMC$, па затоа и во $\triangle AML$. Тоа значи дека $\triangle AML$ е рамнокрак, односно $\overline{AL} = \overline{ML}$.

Понатаму, $\overline{AC} = \overline{MC}$, $\overline{AL} = \overline{ML}$ и $\overline{CL} = \overline{CL}$, па затоа $\triangle ALC \cong \triangle MLC$, односно $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle MLC}$. Од последното равенство и од условот на задачата следува

$$2P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle LMC} = P_{\triangle LBM} + P_{\triangle ALC},$$

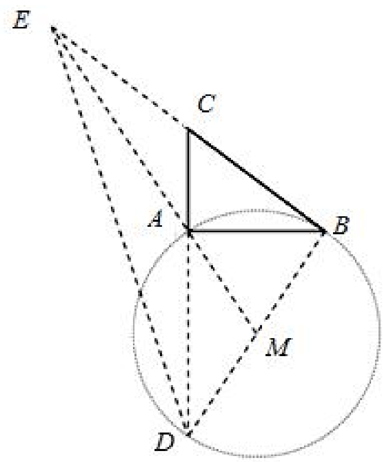
т.е. $P_{\triangle ALC} = P_{\triangle LBM}$, па затоа $P_{\triangle LBM} = P_{\triangle MLC}$. Но, во триаголниците LBC и LMC висините повлечени од темето L се еднакви, па од последното равенство следува дека соодветните основи се еднакви, т.е. $\overline{MB} = \overline{MC}$. Значи, $\overline{AC} = \overline{MC} = \overline{MB} = \overline{MA}$, т.е. $\triangle AMC$ е рамностран. Според тоа, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACM = \measuredangle MAC = 60^\circ$, па како $\measuredangle MAC = 2\ \ $, добиваме $\ \ = 30^\circ$ и конечно $\sim = 3\ \ = 90^\circ$.

68. Даден е $\triangle ABC$. На правата AC е избрана точка D таква што $\overline{CD}=3\overline{CA}$ (точката A е меѓу точките C и D), а на правата BC е избрана точка E, различна од B, таква што $\overline{CE}=\overline{BC}$. Ако $\overline{BD}=\overline{AE}$, докажи дека $\measuredangle BAC=90^\circ$.

Решение. Точката C е средина на BE, па затоа во $\triangle BED$ отсечката DC е тежишна линија и како по услов $\overline{CD}=3\overline{CA}$, заклучуваме дека A е тежиште на $\triangle BED$. Нека $M=BD\cap AE$. Тогаш EM е тежишна линија во $\triangle BED$, па затоа M е средина на отсечката BD. Имаме

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AE}}{2}=\frac{\overline{BD}}{2}=\overline{BM}=\overline{DM},$$

што значи дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$.



Според тоа, $\measuredangle BAD=90^\circ$, како периферен агол над дијаметар, па затоа $\measuredangle BAC=90^\circ$.

69. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Кружницата k со дијаметар AC по втор пат ја сече страната AB во точката D, а тангентата на кружницата k во точката D ја сече страната BC во точката E. Кружницата опишана околу триаголникот CDE ја сече страната AB во точките D и F. Определи го односот на плоштините на триаголниците ABC и BEF.

Решение. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle CDA=90^\circ$, т.е. CD е висината повлечена на хипотенузата AB. Нека P е средина на страната AC (направи цртеж). Тогаш DP е радиус на кружницата k и е нормален на тангентата DE. Понатаму,

$$\measuredangle PAE+\measuredangle PDE=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $APDE$ е тетивен. Значи, на кружницата опишана околу триаголникот CDE припаѓа точката P, а на неа припаѓа и точката F. Оттука следува дека $\measuredangle FEC=\measuredangle FDC=90^\circ$, па е $\measuredangle FPC=180^\circ-\measuredangle FEC=90^\circ$. Значи, четириаголникот $PFEC$ е правоаголник. Сега, P е средна на страната AC, а $PFEC$ е правоаголник, па затоа PF и EF се средни линии, т.е. E и F се редоследно средини на отсечките BC и AB. Затоа плоштината на триаголникот BEF е еднаква на четвртина од плоштината на триаголникот ABC, т.е. бараниот однос е 4:1.

70. Нека ABC е триаголник со тап агол во темето C и k е кружница со дијаметар AB. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече кружницата k во точка $D\,(D \neq A)$, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече кружницата k во точка $E\,(E \neq B)$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките F и G, соодветно. Докажи дека точките D, E, F и G лежат на една права.

Решение. Пресекот на правите AD и BE е центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$ (направи цртеж). Аглите $\measuredangle AEI = \measuredangle AEB$ и $\measuredangle AGI$ се прави. Затоа четириаголникот $AIGE$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle BEG = \measuredangle IEG = \measuredangle IAG = \measuredangle DAC = \measuredangle DAB = \measuredangle BED,$$

од што следува дека точките E, G и D лежат на ста права. Аналогно се докажува дека точките E, F и D лежат на иста права. Конечно, од претходно докажаното следува дека точките D, E, F и G лежат на една права.

71. Нека I е центар на впишаната кружница, а A' и B' се редоследно средините на страните BC и AC на дадениот триаголник ABC. Со M и N да ги означиме средините на оние лаци AC и BC на опишаната кружница на триаголникот ABC кои го содржат преостанатото теме на траголникот. Ако точките M, I, N се колинеарни, докажи дека важи $\measuredangle AIB' = \measuredangle BIA' = 90^\circ$.

Решение. Прво ќе докажеме дека секогаш важи $MN \perp CI$. Нека K е пресечната точка на MN и CI (направи цртеж). Со непосредни пресметувања со перифериските агли се добива

$$\measuredangle CNK = \measuredangle CNM = \measuredangle CAM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle AMC = 90^\circ - \frac{}{2},$$

$$\measuredangle NCK = \measuredangle NCI = \measuredangle NCB - \measuredangle BCI = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle BNC - \frac{¥}{2} = 90^\circ - \frac{\sim}{2} - \frac{¥}{2} = \frac{}{2},$$

што значи дека триаголникот CNK е правоаголен. Условот за колинеарност на точките M, I, N всушност значи дека дека $K \equiv I$, т.е. $\measuredangle CIM = \measuredangle CIN = 90^\circ$. Бидејќи $MB' \perp AC$ и $NA' \perp BC$, добиваме дека четириаголниците $CA'IN$ и $CB'IM$ се тетивни, со опишани кружници чии дијаметри се соодветно отсечките CN и CM . Сега имаме

$$\measuredangle CIA' = \measuredangle CNA' = \frac{\sim}{2} \text{ и } \measuredangle CIB' = \measuredangle CMB' = \frac{}{2},$$

па тврдењето на задачата непосредно следува од познатите релации

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\sim}{2} \text{ и } \measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{}{2}. ,$$

2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Триаголник ABC со $\measuredangle ACB = 45^\circ$ е впишан во кружница k. Тангентите на k во точките A и B се сечат во точката D. Права низ D, паралелна со AC ја сече BC во точката M. Определи го $\measuredangle AMC$.

   Решение. Имаме
   $$45^\circ = \measuredangle ACB = \measuredangle BAD = \measuredangle BMD,$$
   од каде што следува дека четириаголникот $BMAD$ е тетивен (направи цртеж). Оттука следува дека
   $$\measuredangle CAM = \measuredangle AMD = \measuredangle ABD = 45^\circ$$
   и затоа $\measuredangle AMC = 90^\circ$.

2. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ е дадено $\measuredangle CBD = \measuredangle CAB$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle BDA$. Докажи дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

   Решение. Од $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ имаме
   $$\measuredangle ABD + \measuredangle DBC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \measuredangle ABD + \measuredangle BDA + \measuredangle DAC + \measuredangle CAB,$$
   па затоа
   $$\measuredangle DBC + \measuredangle BCA = \measuredangle ADB + \measuredangle DAC.$$
   Конечно, ако го искористиме условот, добиваме
   $$\measuredangle DBC + \measuredangle ABD = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC,$$
   односно $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

3. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ се исполнети равенствата $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD}$ и $\measuredangle ABC + \measuredangle BAD = 120^\circ$. Докажи, дека симетралите на $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ се сечат на отсечката AB.

   Решение. Нека симетралите на $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ се сечат во точката M. Лесно се покажува дека $\triangle MAD \cong \triangle MCD \cong \triangle MCB$. Од друга страна $\measuredangle CMD = 60^\circ$ (Зошто?) и затоа
   $$\measuredangle BMA = \measuredangle BMC + \measuredangle CMD + \measuredangle DMA = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ,$$
   што значи дека точката M припаѓа на отсечката AB.

4. Страните BC и AD на четириаголникот $ABCD$ се паралелни, а него-

вите дијагонали се сечат во точката O. Ако $\overline{CD}=\overline{AO}$, $\overline{BC}=\overline{OD}$ и CA е симетрала на $\measuredangle BCD$, определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Од $BC \parallel AD$ следува $\measuredangle BCO=\measuredangle CAD$, па затоа $\triangle ACD$ е рамнокрак. Значи, $\overline{AO}=\overline{CD}=\overline{AD}$ и $\triangle AOD$ исто така е рамнокрак. Според тоа, $\measuredangle ADO=\measuredangle AOD$ и повторно од $BC \parallel AD$ добиваме $\measuredangle CBO=\measuredangle COB$ и затоа $\overline{CB}=\overline{CO}$. Според тоа, $\overline{DO}=\overline{OC}=\overline{BC}$, што значи дека $\triangle COD$ е рамнокрак. Ако $\measuredangle BCO=\sim$, тогаш

$$\measuredangle CBO=\measuredangle COB=2\measuredangle OCD=2\sim$$

и од $\triangle COB$ наоѓаме $\sim=36^\circ$. Значи, $\triangle BCD$ е рамнокрак и $\overline{AD}=\overline{CD}$ $=\overline{BD}$, т.е. $\triangle ABD$ ерамнокрак. Тогаш $\measuredangle ABD=\frac{180^\circ-72^\circ}{2}=54^\circ$, па затоа $\measuredangle ABC=54^\circ+72^\circ=126^\circ$.

5. На симетралите на страните AB и BC на $\triangle ABC$ се избрани точки P и Q при што P е надворешна, а Q е внатрешна за $\triangle ABC$. Ортогоналните проекции на P и Q врз страната AC се означени соодветно со M и N. Ако $2\overline{MN}=\overline{AC}$, докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle PBQ$.

Решение. Со O да го означиме центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека точките K и L се средините на страните AB и BC, соодветно. Имаме $KL \parallel MN$ и $2\overline{MN}=\overline{AC}=2\overline{KL}$, т.е. $\overline{MN}=\overline{KL}$, што значи дека четириаголникот $KMNL$ е паралелограм (направи цртеж). Освен тоа, A,M,K,L и N,C,L,Q лежат на една кружница. Тогаш

$$\measuredangle PBA=\measuredangle PAB=\measuredangle PMK=\measuredangle QNL=\measuredangle QLC=\measuredangle QBL.$$

Според тоа,

$$\measuredangle PBQ= \quad =180^\circ-\measuredangle POQ,$$

што значи дека четириаголникот $POQB$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

6. Точката X е во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ и е таква што ABX и CDX се рамнострани триаголници. Ако P,Q и R се соодветно средините на BC,DX и AX, да се определи $\measuredangle RPQ$.

Решение. Нека M и N се средините на CX и BX, соодветно. Триаголниците PMQ, RNP и RQX имаат по две еднакви страни и аголот меѓу овие две страни. Според признакот САС тие се складни. Оттука следува дека триаголникот PQR е рамностран, па затоа $\measuredangle RPQ = 60^\circ$.

7. Квадрат е поделен на 16 правоаголници со три хоризонтални прави (паралалени на една од неговите страни) и три вертикални прави (паралелни на другата страна) . Докажи, дека ако периметрите на сите 16 правоаголници се цели брови и должината на страната на квадратот не е цел број, тогаш таа е дропка со именител 2 или 4.

   Решение. Ќе докажеме дека периметарот на квадратот е цел број. Периметарот на квадратот е еднаков на збирот на периметрите на четирите правоаголници, кои ги сече една од дијагоналите на квадратот. Според тоа, приметарот на квадратот е цел број. Значи, ако должината на страната на квадратот е a, тогаш $4a$ е цел број, од каде што следува тврдењето на задачата.

8. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точките M и N припаѓаат соодветно на страните AB и BC и се такви што отсечките AN и CM ја делата плоштната на четириаголникот на два еднакви дела. Докажи, дека MN ја полови BD.

   Решение. Ако T е средина на BD, тогаш бидејќи $P_{ATCD} = P_{ANCD}$ заклучуваме дека $P_{ACT} = P_{ANC}$. Според тоа, $TN \| AC$ и аналогно $MT \| AC$. Последното значи дека M, N и T се колинеарни, т.е. MN ја полови BD.

9. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 20\,cm$ и $\overline{BC} = 12\,cm$. На правата BC е избрана точка Z таква, што $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B. Нека E е внатрешна точка за правоаголникот, која се наоѓа на растојание $6\,cm$ како од страната AB, така и од страната AD. Ако правата EZ ги сече AB и CD соодветно во точките X и Y, определи ја плоштината на четириаголникот $AXYD$.

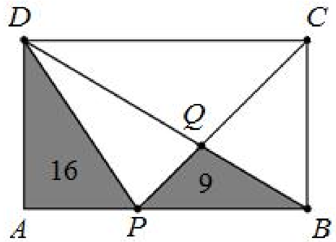
   Решение. Од $\overline{CZ} > 8\,cm$ и C е меѓу Z и B, следува дека X е меѓу A и B. Точката E е на растојание $6\,cm$ од страната AB, а Y е на растојание $12\,cm$ од AB, па затоа $P_{AXE} = \frac{1}{2} P_{AXY}$. Аналогно наоѓаме

$P_{DYE}=\frac{1}{2}P_{DXY}=\frac{1}{2}P_{DAY}$. Добиваме

$$P_{AXE}+P_{DYE}=\frac{1}{2}P_{AXY}+\frac{1}{2}P_{DAY}=\frac{1}{2}P_{AXYD}.$$

Според тоа, $P_{AXYD}=2P_{AED}=72\ cm^2$.

10. Даден е правоаголник $ABCD$. На стра-ната AB е избрана точка P, а пресечната точка на PC и BD е означена со Q. Ако плоштината на $\triangle APD$ е 16, а плоштината на $\triangle PBQ$ е 9, определи ја плоштината на дадениот правоаголник.



Решение. Плоштината на триаголникот BQC да ја означиме со x. Лесно се гледа, дека плоштината на триаголникот PQD е еднаква на x. Бидејќи BD ја полови плоштината на правоаголникот, добиваме $16+9+x=x+P_{DQC}$, па затоа $P_{DQC}=25$. Понатаму, $\frac{P_{DQP}}{P_{DBP}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{BQ}}=\frac{P_{DQC}}{P_{DBC}}$, т.е. $\frac{x}{9}=\frac{25}{x}$, од каде добиваме $x=15$. Конечно, $P_{ABCD}=2(25+15)=80$.

11. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките M и N се на страната AB и се такви што $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$, а точките P и Q се на страната CD е се такви што $\overline{CP}=\overline{PQ}=\overline{QD}$. Докажи дека $P_{ABCD}=3P_{MNPQ}$.

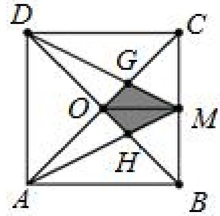
Решение. Јасно, $P_{MQD}=P_{MQP}$ и $P_{PNB}=P_{PNM}$, од што следува дека $P_{MBPD}=2P_{MNPQ}$. Понатаму,

$$P_{AMD}+P_{BCP}=\frac{1}{3}P_{ABD}+\frac{1}{3}P_{DBC}=\frac{1}{3}P_{ABCD}.$$

Затоа $P_{MBPD}=\frac{2}{3}P_{ABCD}$, што значи

$$2P_{MNPQ}=\frac{2}{3}P_{ABCD}\text{, т.е. } P_{ABCD}=3P_{MNPQ}.$$

12. Нека M е средината на страната BC на квадратот $ABCD$, цртеж десно. Колкав дел од плоштината на квадратот е обоен?



Решение. Нека плоштината на квадратот е S.

Бидејќи $P_{AMD}=\frac{1}{2}S$ и $P_{DMC}=\frac{1}{4}S$, односно $P_{AMD}=2P_{DMC}$, заклучуваме дека $\overline{AG}=2\overline{GC}$. Тоа значи дека $\overline{GC}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ и како $\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, заклучуваме дека

$$\overline{OG}=\overline{OC}-\overline{GC}=\frac{1}{2}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{1}{6}\overline{AC}=\frac{1}{3}\overline{OC}.$$

Затоа,

$$P_{OGM}=\frac{1}{3}P_{OMC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}P_{OBC}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{1}{24}S.$$

Оттука следува дека плоштината на обоената површина е $\frac{1}{12}S$.

13. Точката M е средина на страната AB на триаголникот ABC. Правата CM ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P, а точката Q е симетрична на P во однос на M. Правата BQ ја сече страната AC во точката R. Ако $CRMB$ е тетивен четириаголник, определи го $\measuredangle BRC$.

Решение. Бидејќи M е средина на AB и PQ, четириаголникот $APBQ$ е паралелограм. Затоа $\measuredangle PBM=\measuredangle QAB$. Од $\measuredangle RCM=\measuredangle RBM$ и $\measuredangle ACP=\measuredangle ABP$, следува дека $\measuredangle QBA=\measuredangle PBM=\measuredangle QAB$. Во $\triangle ABQ$ важи $\overline{QB}=\overline{QA}$ и M е средина на AB, па затоа $RM\perp AB$. Според тоа, $\measuredangle BRC=\measuredangle BMC=90^\circ$.

14. Околу триаголникот ABC е опишана кружница k. Висината повлечена од темето C ги сече AB и k соодветно во точките D и E, а симетралата на $\measuredangle ACB$ ги сече AB и k соодветно во точките F и G. Правата DG ја сече k во точка H, а правата FH ја сече k во точка I. Докажи дека триаголниците AIG и BEG се складни.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle FCH&=\measuredangle GCH=\measuredangle GAH=\measuredangle GAB+\measuredangle BAH=\measuredangle GCB+\measuredangle BGH\\&=\measuredangle GCA+\measuredangle BGH=\measuredangle GBA+\measuredangle BGH=\measuredangle GBD+\measuredangle BGD\\&=180^\circ-\measuredangle GDB=180^\circ-\measuredangle EDH,\end{aligned}$$

што значи дека четириаголникот $CFDH$ е тетивен (направи цртеж). Оттука следува

$$\measuredangle GCE=\measuredangle FCD=\measuredangle FHD=\measuredangle IHG,$$

што значи $\overset{\frown}{EG}=\overset{\frown}{IG}$. Но, CG е симетрала на $\measuredangle ACB$, па затоа важи

$\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{BG}$. Сега од последните две равенства следува $\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{BE}$. Конечно, $\overline{IG} = \overline{GE}, \overline{AG} = \overline{BG}, \overline{AI} = \overline{BE}$, па од признакот ССС следува дека триаголниците AIG и BEG се складни.

15. Правоаголник е поделен на девет правоаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Во секој од деветте правоагоници е запишан периметарот изразен во сантиметри, но два од запишаните броеви не се точни. Определи го периметарот на големиот правоаголник.

14	7	27
8	4	24
21	14	37

Решение. За полесно работење дадените периметри да ги означиме со буквите $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, како што е прикажано на цртежот десно.

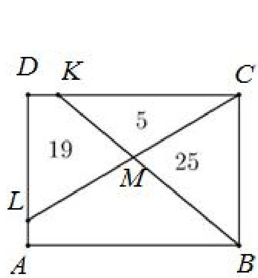
a	b	c
d	e	f
g	h	k

Бидејќи $c + e = b + f$, заклучуваме дека два од овие броеви се неточни или сите четири се точни.

1) Ако два од броевите b, c, e, f се неточни, тогаш броевите a, d, g, h, k се точни. Но, тогаш од $d + k = f + g$ следува дека и бројот f е точен. Аналогно добиваме, дека b е точен, а c и e не се точни. Според тоа, периметарот на големиот правоаголник е
$$L = b + f + g = 7 + 24 + 21 = 52\ cm.$$

2) Ако сите четири броја b, c, e, f се точни, тогаш од $a + e \neq b + d$ и $e + k \neq f + h$, следува дека еден од броевите a и d не е точен и еден од броевите h и k не е точен. Но, тоа значи дека g е точен, па затоа периметарот на големиот правоаголник е
$$L = c + e + g = 7 + 24 + 21 = 52\ cm.$$

16. На страните CD и DA на правоаголникот $ABCD$ соодветно се избрани точките K и L.



а) Докажи, дека
$$P_{BCL} : P_{BCK} = P_{LCD} : P_{LCK}.$$

б) Нека отсечките BK и CL се сечат во точката M (цртеж десно). Ако плоштината на

$\triangle CKM$ е 5, плоштината на $\triangle BCM$ е 25 и плоштината на четириаголникот $DLMK$ е 19, определи ја плоштината на четириголникот $ABML$.

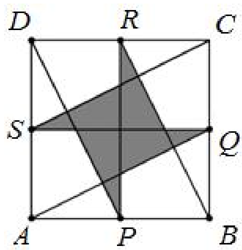
Решение. а) Имаме:

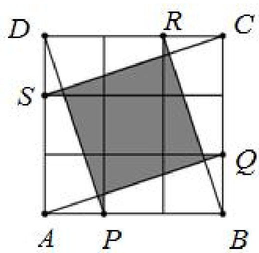
$$P_{BCL} : P_{BCK} = \overline{CD} : \overline{CK} = P_{LCD} : P_{LCK} .$$

б) Имаме, $P_{KML} : P_{BML} = P_{KMC} : P_{BMC} = 5 : 25 = 1 : 5$, па затоа можемЕ да означиме $P_{KML} = x$ и $P_{BML} = 5x$. Од докажаната под а) пропорција следува $(25+5x):30 = 24:(5+x)$, од каде добиваме $(5+x)^2 = 144$, односно $x = 7$. Според тоа, $P_{BCL} = 35 + 25 = 60$, па оттука добиваме $P_{ABCD} = 2 \cdot 60 = 120$, што значи $P_{ABML} = 120 - (19 + 5 + 25) = 71$.

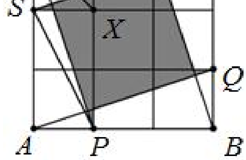
17. Даден е квадрат $ABCD$ со страна n, каде n е природен број. На страните AB, BC, CD, DA соодветно се избрани точки P, Q, R, S, така што $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = 1$. Определи ја плоштината на обоениот дел од квадратот при

а) $n = 2$, б) $= 3$.





Решение. а) Ако O е центарот на квадратот, тогаш од еднаквоста на плоштините на триаголниците ROB и RQB следува дека RB ја полови OQ. Понатаму, обоениот дел од квадратот се состои од четири правоаголни триаголници со катети 1 и $\frac{1}{2}$, па затоа нејзината плоштина е $P = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = 1$.

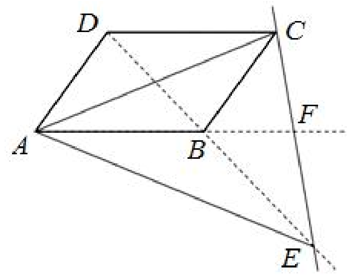


б) Обоената фигура се состои од квадрат со страна 1 и четири правоаголни триаголници со катети 2 и $\frac{2}{3}$ (бидејќи плоштината на $\triangle DSP$ е два пати помала од плоштината на $\triangle DXP$, заклучуваме дека отсечката DP ја дели отсечката SX во однос $1:2$). Значи, плоштината на обоената фигура е $P=1+4\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot 2}{2}=\frac{11}{3}$.

18. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека E е точка на полуправата DB таква што AB е симетрала на $\measuredangle CAE$ и нека $F=CE\cap AB$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1.$$

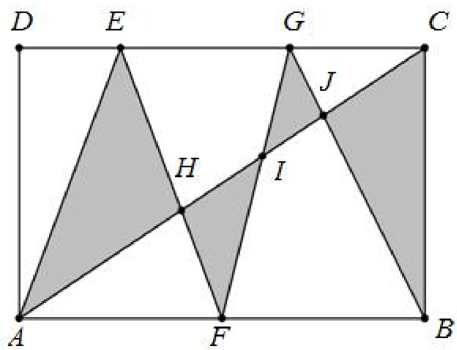
Решение. Отсечките BF и DC се паралелни, па од Талесовата теорема за пропорционални отсечки следува $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BF}}$ и бидејќи $\overline{AB}=\overline{DC}$, добиваме дека



$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}. \qquad (1)$$

Полуправата AF е симетрала на $\measuredangle CAE$, па од својството на симетралата следува $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1+\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$. Од последното равенство следува $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$, па ако се земе предвид равенството (1), доби-ваме $1+\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$, односно $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=1$, што и требаше да се докаже.

19. Даден е правоаголник $ABCD$. Точката F е средина на страната AB, а точките E и G припаѓаат на страната CD, како на цртежот десно. Плоштината на триаголникот BCJ е еднаква на 12, а плоштините на преостанатите обоени триаголници (во некој редослед) се 2,4; 4,8 и 14,4. Определи ја плоштината на дадениот правоаголник.



Решение. Лесно се докажува, дека збирот на плоштините на двата обоени триаголника над дијагоналата е еднаков на збирот на плоштините на другите два триаголника. Оттука следува дека

$$P_{IJG}=2,4\,;\ P_{HIF}=4,8 \text{ и } P_{AHE}=14,4\,.$$

Ако плоштината на AHF е x (како и плоштината на FBH), тогаш плоштините на AIF и FBI се еднакви на $4,8+x$. Сега, плоштината на HBI е еднаква на $2(4,8+x)-2x=9,6$.

Бидејќи плоштината на AFE е $14,4+x$ и е еднаква на плоштината на FBG, која е $4,8+x+2,4+P_{BIJ}$, добиваме $P_{BIJ}=7,2$.

Понатаму, од $P_{GIJ}:P_{BIJ}=P_{HIG}:P_{BHI}$, добиваме $P_{HIG}=3,2$.

Во триаголникот ABG точката I припаѓа на тежишната линија GF, па затоа плоштините на триаголниците AIG и BIG се еднакви и се 9,6. Значи, $P_{AHG}=9,6-3,2=6,4$.

Од $P_{AHB}:P_{BIH}=P_{AHG}:P_{GHI}=2$, добиваме дека $P_{AHB}=19,2$.

Конечно,

$$P_{ABCD}=2(19,2+9,6+7,2+12)=96\,.$$

20. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ и точка P внатре во него таква, што $\measuredangle PAB=\measuredangle PBC=\measuredangle PCD=\measuredangle PDA$. Правите AD и BC се сечат во точката Q, а правите AB и CD се сечат во точката R. Докажи, дека аголот меѓу правите PQ и PR е еднаков на аголот меѓу правите AC и BD.

Решение. Нека $\measuredangle PAB=\measuredangle PBC=\measuredangle PCD=\measuredangle PDA=\sim$ и нека $\measuredangle A>\measuredangle B$. Четириаголникот $PBDQ$ е тетивен, па затоа $\measuredangle DPQ=\measuredangle DBQ=\measuredangle DBC$. Аналогно, $\measuredangle RPA=\measuredangle RCA=\measuredangle DCA$. Освен тоа

$$\measuredangle DPA=180^\circ-\measuredangle BAD=\measuredangle DCB\,.$$

Сега, добиваме

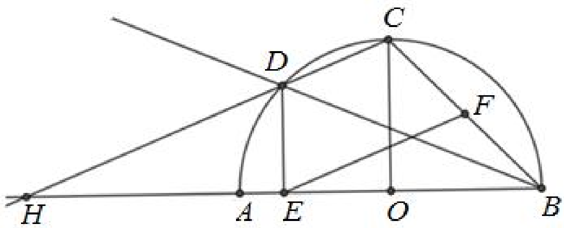
$$\measuredangle DPR=\measuredangle DCB-\measuredangle DCA=\measuredangle ACB \text{ и } \measuredangle DPQ=\measuredangle CBD\,.$$

Конечно, точноста на тврдењето на задачата следува од последните две равенства.

21. Дадена е полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точката од k таква што $CO\perp AB$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече k во точката D. Нека E е точката од AB таква што $DE\perp AB$ и нека F е средината на CB. Докажи дека четириаголникот $EFCD$ е тетивен.

Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен. Нека $CD\cap AB=\{H\}$. Од

$$\measuredangle AED = \measuredangle ADB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle DAE = \measuredangle DAB$$



следува дека $\triangle ADE \sim \triangle ABD$. Од тетивноста на четириаголникот $ABCD$ следува $\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle ABC = 135^\circ$ т.е. $\measuredangle HDA = 45^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB = \measuredangle DBC + \measuredangle CAB = 22^\circ 30' + 45^\circ = 67^\circ 30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle HAD = 180^\circ - \measuredangle DAB = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30',$$

односно

$$\measuredangle AHD = 180^\circ - (\measuredangle HAD + \measuredangle HDA) = 180^\circ - 157^\circ 30' = 22^\circ 30'$$

т.е. $\triangle HDB$ е рамнокрак. Бидејќи $\triangle HDB$ е рамнокрак и $DE \perp AB$ следува дека E е средина на HB. Но, E е средина на HB и F е средина на CB, па затоа EF е средна линија во $\triangle HBC$ т.е. $EF \parallel HC$ т.е. $EF \parallel CD$. Значи, четириаголникот $EFCD$ е трапез. Понатаму, $EF \parallel HC$ следува $\measuredangle FEB = \measuredangle CHB = 22^\circ 30'$. Од $DE \perp AB$ имаме

$$\measuredangle DEF = 90^\circ - \measuredangle FEB = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle EFB = 180^\circ - (\measuredangle FEB + \measuredangle EBF) = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30',$$

т.е.

$$\measuredangle CFE = 180^\circ - \measuredangle EFB = 67^\circ 30'.$$

Конечно, $EFCD$ е рамнокрак трапез, од каде следува тврдењето.

22. Во трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Правата низ O, паралелна со AD, ја сече AB во точката M, а правата низ O, паралелна со BC, ја сече AB во точката N. Докажи, дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.

Решение. Во трапезот $ABCD$ имаме $P_{AOD} = P_{BOC}$. Во трапеззот $AMOD$ имаме $P_{AOD} = P_{AMD}$ и во трапезот $NBCO$ имаме $P_{BOC} = P_{BNC}$. Според тоа, $P_{AMD} = P_{BNC}$. Бидејќи во овие триаголници висините соодветни кон страните AM и BN се еднакви, заклучуваме дека

$\overline{AM} = \overline{BN}$.

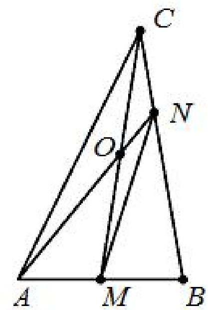
23. а) Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O. Докажи дека $\frac{P_{ABC}}{P_{ADC}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{DO}}$.

б) На страните AB и BC на триаголникот ABC се избрани соодветно точки M и N така, што $\overline{AB} = 2\overline{AM}$ и $\overline{BC} = 3\overline{CN}$. Отсечките CM и AN се еднакви и се сечат во точката O . Ако $\overline{AO} = 6\,cm$, да се определи должината на отсечката CO .

Решение. а) Ако h и t се растојанијата до BD соодветно од точките A и C , тогаш

$$P_{ABC} = P_{ABO} + P_{BCO} = \frac{1}{2}\overline{BO}(h+t),$$

$$P_{ADC} = P_{ADO} + P_{DCO} = \frac{1}{2}\overline{DO}(h+t),$$



од каде следува саканото равенство.

б) Бидејќи

$$P_{AMC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \text{ и}$$

$$P_{CMN} = \frac{1}{3}P_{BMC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{6}P_{ABC},$$

добиваме $P_{AMC} = 3P_{CMN}$, па од а) следува $\overline{AO} = 3\overline{ON}$. Оттука $\overline{AN} = 8\,cm$. Од друга страна,

$$P_{ANC} = \frac{1}{3}P_{ABC} \text{ и}$$

$$P_{AMN} = \frac{1}{2}P_{ABN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}P_{ABC} = \frac{1}{3}P_{ABC},$$

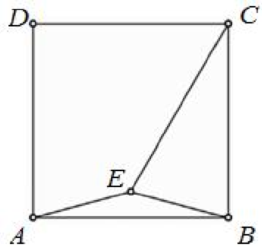
па затоа $P_{ANC} = P_{AMN}$ и од а) следува дека $\overline{CO} = \overline{OM}$,т.е. $\overline{CO} = \frac{1}{2}\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AN} = 4\,cm$.

24. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата на агол AP , ($P \in BC$). Точката M припаѓа на отсечката AP , а точката N е симетрична на M во однос на средината на BC . Правата CN ја сече правата AB во точката E (B е меѓу A и E), а правата BN ја сече правата AC во точката D (C е меѓу A и D). Докажи дека $\overline{CD} = \overline{BE}$.

Решение. Четириаголникот $MBNC$ е паралелограм, па затоа важи $MB \,||\, NE$, од каде што следува $P_{MBE} = P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{MBNC}$. Аналогно, од

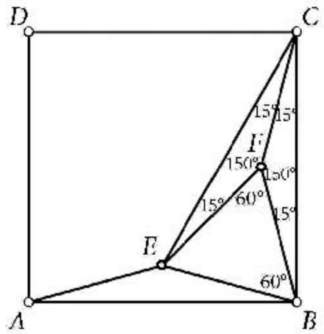
$MC \parallel BD$ следува $P_{MCD} = P_{MBC} = \frac{1}{2} P_{MBNC}$. Според тоа, $P_{MBE} = P_{MCD}$ и како M е точка на симетралата на агол, добиваме $\overline{CD} = \overline{BE}$.

25. Даден е квадрат $ABCD$ и во него точка E таква што $\measuredangle BAE = \measuredangle EBA = 15^\circ$. Определи го $\measuredangle ECB$.



Решение. Нека F е точка во внатрешноста на квадратот $ABCD$ таква што важи

$$\measuredangle CBF = \measuredangle FCB = 15^\circ.$$



Од признакот АСА следува дека триаголниците ABE и BCF се складни рамнокраки триаголници со основи AB и BC. Тоа значи дека $\overline{BE} = \overline{BF}$ и

$$\measuredangle FBE = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ,$$

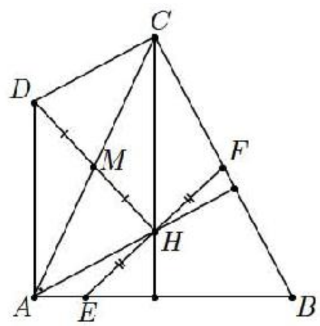
што значи дека триаголникот EBF е рамностран (цртеж лево). Оттука следува дека $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{EF}$, што значи дека и триаголникот CEF е рамнокрак, а за неговите агли важи $\measuredangle CFE = 360^\circ - \measuredangle EFB - \measuredangle BFC = 150^\circ$ и $\measuredangle FEC = \measuredangle ECF = 15^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle ECB = \measuredangle ECF + \measuredangle FCB = 30^\circ.$$

26. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H и средина M на страната AC. Низ H е повлечена права, нормална на MH, која ги сече страните AB и BC во точките E и F, соодветно. Докажи, дека $\overline{HE} = \overline{HF}$.

Решение. Нека D е симетричната точка на H во однос на M. Тогаш четириаголникот $DAHC$ е паралелограм, па затоа $DA \parallel CH$ и $DC \parallel AH$, што значи $DA \perp AB$ и $DC \perp BC$. Оттука следува дека четириаголниците $AEHD$ и $DHFC$ се тетивни, па затоа

$$\measuredangle DEH = \measuredangle DAH = \measuredangle DCH = \measuredangle DFH.$$

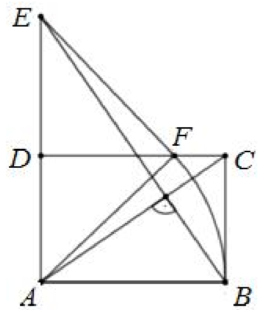


Според тоа, $\triangle EFD$ е рамнокрак и DH е неговата висина повлечена кон основата EF, па затоа $\overline{HE} = \overline{HF}$.

27. Даден е правоаголник $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$. Нормалата повлечена од B на дијагоналата AC ја сече правата AD во точката E, а кружницата со центар $k(A, \overline{AB})$ ја сече страната CD во точката F. Докажи дека $AF \perp EF$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$. Триаголниците ABE и BCA се правоаголни и важи $\measuredangle BAC = \measuredangle AEB$ (агли со нормални краци), па затоа тие се слични. Според тоа, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$, т.е. $\overline{AE} = \frac{a^2}{b}$. За правоаголниот триаголник AFD имаме $\overline{AF} = a, \overline{AD} = b$, па затоа $\overline{DF} = \sqrt{a^2 - b^2}$. Сега, од триаголникот DFE, во кој

$$\overline{ED} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{a^2}{b} - b = \frac{a^2 - b^2}{b},$$



добиваме

$$\overline{EF}^2 = (\tfrac{a^2-b^2}{b})^2 + \sqrt{a^2 - b^2}^2$$
$$= (a^2 - b^2)\frac{a^2-b^2+b^2}{b^2} = \frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2}.$$

Затоа,

$$\overline{EF}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2} + a^2 = \frac{a^4-a^2b^2+a^2b^2}{b^2}$$
$$= (\tfrac{a^2}{b})^2 = \overline{AE}^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникт AFE е правоаголен, т.е. $AF \perp EF$.

28. Дијагоналите во правоаголникот $ABCD$ имаат должина d. Од темето D кон дијагоналата AC спуштена е нормала која што ја сече AC во точка E. Од точката E спуштаме нормали кон страните AB и BC, кои ги сечат AB и BC во точките F и G, соодветно. Ако $\overline{EF} = 1, \overline{EG} = n$, докажи дека $d^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} + 1$.

Решение. Нека $\overline{AF} = x$. Тогаш $\overline{AE} = \sqrt{x^2 + 1}$. Нека правата EG ја сече страната AD на правоаголникот $ABCD$ во точка H. Тогаш триаголникот EDH е правоаголен и за него важи

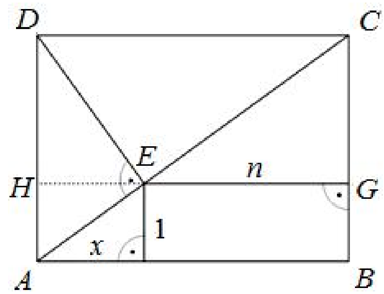
$$\overline{DE}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HE}^2 = \overline{DH}^2 + x^2 .$$

Од правоаголниот триаголник AED имаме

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - (x^2+1) = (\overline{DH} + \overline{HA})^2 - (x^2+1)$$
$$= (\overline{DH}+1)^2 - (x^2+1).$$

Од последните две равенства добиваме

$$\overline{DH}^2 + x^2 = (\overline{DH}+1)^2 - (x^2+1)$$



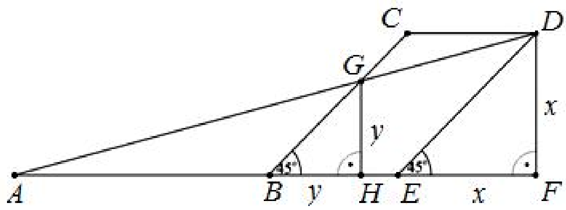
и оттука наоѓаме $\overline{DH} = x^2$. Тогаш и $\overline{CG} = x^2$ и од сличноста на правоаголните триаголници AFE и EGC следува $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{n}$, т.е. $n = x^3$. Од правоаголниот триаголник ABC следува

$$d^2 = (x+x^3)^2 + (1+x^2)^2 = (1+x^2)^2(1+x^2) = (1+x^2)^3 .$$

Според тоа, $d^{\frac{2}{3}} = 1 + x^2 = n^{\frac{2}{3}} + 1$.

29. За да стаса од дома до најблиската продавница, Кристијан се движи по обележана патека: оди 200 метри на исток, потоа 150 метри на североисток и уште 100 метри на исток (насоката северо-исток е одредена со симетралата на аголот формиран од насоките север и исток). Кристијан сакал да го скрати својот пат и почнал да се движи низ паркот по права линија, директно од неговиот дом кон продавницата. Точно кога ја пресретнал обележаната патека, сретнал еден дедо, се засрамил од неговиот прекорен поглед, па одлучил да продолжи да оди по обележаната патека до продавницата. За колку Кристијан го скратил патот од дома до продавницата?

Решение. Нека $\overline{AB} = 200\, m$, $\overline{BC} = 150\, m$ и $\overline{CD} = 100\, m$ се деловите од вообичаената патека од домот на Кристијан до продавницата. Тогаш $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 135^\circ$ и $AB \parallel CD$. Нека E е точка на правата AB таква што $DE \parallel CB$ и F е точка на правата AB таква што $DF \perp AB$. Тогаш четириаголникот $BEDC$ е паралелограм и $\measuredangle FED = \measuredangle EBC = 45^\circ$ па триаголникот DFE е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $\overline{ED} = \overline{BC} = 150\, m$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот DFE следува $\overline{EF}^2+\overline{DF}^2=\overline{ED}^2$. Потоа од $\overline{EF}=\overline{DF}=x$ добиваме $x^2+x^2=150^2$, па затоа $\overline{EF}=\overline{DF}=x=\frac{150}{\sqrt{2}}=75\sqrt{2}\ m$.



Нека G е пресечната точка на AD и BC. Треба да ја пресметаме разликата на должината на искршената линија формирана од отсечките AB и BG и должината на отсечката AG. Нека H е точка на правата AB таква што $EH\perp AB$. Тогаш триаголникот BHG е рамнокрак правоаголен со краци $\overline{BH}=\overline{CG}=y$. Од сличноста $\triangle AHG\sim\triangle AFD$ имаме

$$\overline{AH}:\overline{HG}=\overline{AF}:\overline{FD},\text{ т.е. }(200+y):y=(200+100+75\sqrt{2}):75\sqrt{2},$$

па затоа $y=50\sqrt{2}\ cm$. Од Питагоровата теорема за триаголникот BHG следува

$$\overline{BG}^2=\overline{BH}^2+\overline{GH}^2=(50\sqrt{2})^2+(50\sqrt{2})^2=10000,$$

па затоа $\overline{BG}=100\ m$. Понатаму, од Питагоровата теорема за триаголникот AHG имаме

$$\overline{AG}^2=\overline{AH}^2+\overline{GH}^2=(200+50\sqrt{2})^2+(50\sqrt{2})^2=50000+20000\sqrt{2},$$

па затоа $\overline{AG}=100\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. Конечно, Кристијан својот пат го скратил за

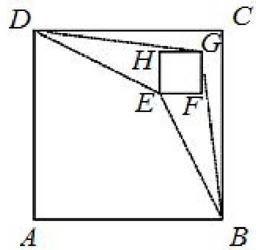
$$200+100-100\sqrt{5+2\sqrt{2}}=100(3-\sqrt{5+2\sqrt{2}})\ m.$$

30. Квадрат $EFGH$ со страна 2 е поставен во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со страна 7 така, што страните на двата квадрати се паралелни. Потоа темињата B и D се поврзани со темињата E и G со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Докажи дека збирот на плоштините на четириаголниците $BGFE$ и $DEHG$ не зависи од положбата на квадратот $EFGH$.

Решение. Ако ги повлечеме отсечките BF и DH, тогаш двата конкавни четириаголника ги делиме на четири триаголника. Притоа имаме

$$P_{BFE}+P_{DHG}=\frac{2\cdot(7-2)}{2}=5 \text{ и}$$

$$P_{DHE}+P_{BFG}=\frac{2\cdot(7-2)}{2}=5,$$



па затоа $P_{BGFE}+P_{DEHG}=10$, т.е. збирот на плоштините на четириаголниците $BGFE$ и $DEHG$ не зависи од положбата на квадратот $EFGH$.

31. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките K, L, M се средини соодветно на страните AB, CD, DA. Отсечката BM ги сече CK и AL соодветно во точките P и Q. Плоштината на четриаголникот $AKPQ$ е 12.

а) Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$.

б) Ако N е средина на BC и отсечката DN ги сече AL и CK соодветно во точките R и S, определи ја плоштината на $PQRS$.

Решение. а) Имаме $AK \parallel LC$ и $\overline{AK}=\overline{LC}$, па затоа $AKCL$ е паралелограм, т.е. $AL \parallel KC$, направи цртеж. Затоа $P_{KPQ}=P_{KPA}=P_{KPB}$, т.е. P е средина на отсечката BQ. Според тоа, KP е средна линија во триаголникот AQB, па затоа $P_{AKQB}=3P_{KPB}$, од каде добиваме $P_{KPB}=4$ и $P_{ABQ}=16$.

Бидејќи $\frac{\overline{BQ}}{\overline{MQ}}=\frac{P_{ABL}}{P_{AML}}=\frac{\frac{1}{2}P_{ABCD}}{\frac{1}{8}P_{ABCD}}=4$, добиваме $P_{AMQ}=\frac{1}{4}P_{ABQ}=4$. Значи,

$P_{ABM}=P_{AMQ}+P_{ABQ}=20$ и конечно, $P_{ABCD}=4P_{ABM}=80$.

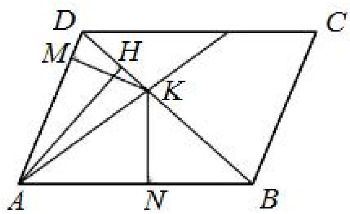
б) Имаме $P_{AKCL}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=40$, па затоа

$$P_{PQRS}=P_{AKCL}-2P_{AKPQ}=40-2\cdot 12=16.$$

32. Даден е паралелограм *ABCD*. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече страната *DC* во точка *L*, а дијагоналата *BD* во точка *K*, таква што $\overline{DK}:\overline{KB}=3:4$. Пресметај ја должината на отсечката *LC*, ако периметарот на паралелограмот е 28.

Решение. *AL* е симетрала на $\measuredangle DAB$ па важи

$$\measuredangle DAL=\measuredangle LAB=\measuredangle ALD$$



(последните два агли се еднакви како

наизменични агли при трансверзала AL), од каде $\triangle ALD$ е рамнокрак. Да означиме

$$\overline{DL}=\overline{AD}=b \text{ и } \overline{AB}=\overline{DC}=a.$$

За плоштините на триаголниците на цртежот имаме

$$P_{\triangle AKD}:P_{\triangle ABK}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{MK}}{2}:\frac{\overline{AB}\cdot\overline{NK}}{2}=b:a,$$

каде MK, NK се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK}=\overline{NK}$ затоа што точката K, како точка од симетралата на $\measuredangle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот. Од друга страна,

$$P_{\triangle AKD}:P_{\triangle ABK}=\frac{\overline{DK}\cdot\overline{AH}}{2}:\frac{\overline{BK}\cdot\overline{AH}}{2}=\overline{DK}:\overline{BK}=3:4.$$

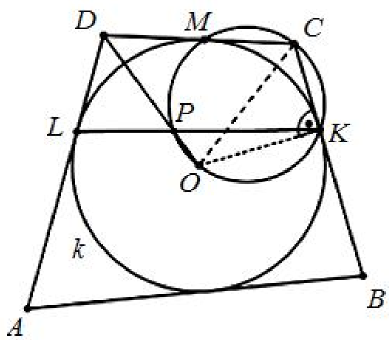
Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме дека важи $b:a=3:4$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b)=28$, со замена, имаме $b=6, a=8$. Конечно, $\overline{LC}=a-b=2$.

33. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и $k(O,r)$ е неговата впишана кружница, која ги допира страните BC и AD во точките K и L, соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар OC минува низ пресекот на правите KL и OD.

Решение. Правата KC е тангента на k, па затоа важи

$$\measuredangle KOL=2\measuredangle LKC. \qquad (1)$$

Понатаму, ако M е допирната точка на CD со k, тогаш $\triangle LOD\cong\triangle MOD$ и $\triangle KOC\cong\triangle MOC$, па затоа точни се равенствата



$$\begin{aligned}\measuredangle KOL&=\measuredangle KOM+\measuredangle LOM\\&=2\measuredangle COM+2\measuredangle MOD\\&=2\measuredangle COD.\end{aligned} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\measuredangle COP=\measuredangle COD=\measuredangle LKC=\measuredangle CKP$, што значи дека точките C,O,P,K се концициклични, т.е. припаѓаат на иста кружница k'. Конечно, од $\measuredangle OKC=90^\circ$ следува дека OC е дијаметар на k', што и требаше да се докаже.

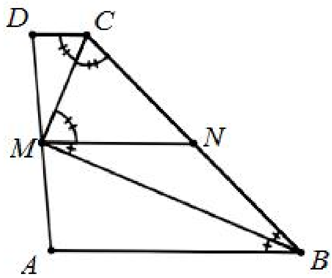
34. Околу триаголник ABC е опишана кружница k. Симетралата на

$\measuredangle BAC$ ја сече k во точката L. Нека K е точката на правата низ L, паралелна со AC, која е еднакво оддалечена од A и C. Ако M е средината на AB, докажи дека четириаголникот $AMKL$ е рамнокрак трапез.

Решение. Нека LK по втор пат ја сече k во точката T. Трапезот $ACTL$ е тетивен, што значи дека е рамнокрак. Според тоа, K е средина на TL. Понатаму, $\measuredangle BAL = \measuredangle CAL = \measuredangle ALT$, од каде следува дека $\overline{AT} = \overline{BL}$, т.е. $ATBL$ е тетивен трапез. Понатаму, Ако M е средината на AB и K е средина на TL, па затоа средна линија на $ATBL$ припаѓа на правата MK, т.е. $MK \parallel AL$. Конечно, од $\measuredangle BAL = \measuredangle ALT$ и $MK \parallel AL$ следува дека четириаголникот $AMKL$ е рамнокрак трапез.

35. Симетралата на аголот ABC и симетралата на аголот BCD во трапез $ABCD$, се сечат во точка M на кракот AD на трапезот. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако се познати $\overline{MB} = p$, $\overline{MC} = q$ и висината на трапезот h (h е растојанието меѓу основите AB и CD на трапезот).

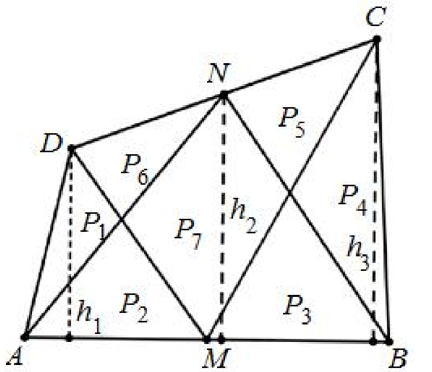
Решение. Нека $\measuredangle ABM = \varphi, \measuredangle DCM = \psi$, т.е. $\measuredangle ABC = 2\varphi, \measuredangle BCD = 2\psi$. Тогаш од $2\varphi + 2\psi = 180^\circ$ следува дека $\varphi + \psi = 90^\circ$, па затоа триаголникот BCM е правоаголен и имаме $\overline{BC} = \sqrt{p^2 + q^2}$. Нека N е средина на BC, тогаш $\overline{NM} = \overline{NC} = \overline{NB}$. Сега $\measuredangle CMN = \measuredangle MCN$ и оттука $\measuredangle CMN = \measuredangle MCD$, па затоа $MN \parallel DC \parallel AB$. Бидејќи N е средина на BC, следува M е средина на AD. Јасно, MN е средна линија во трапезот и оттука $P = \overline{MN} \cdot h = \frac{\overline{BC}}{2} \cdot h = \frac{h\sqrt{p^2+q^2}}{2}$.



36. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle CDM} = P_{\square ABCD}.$$

Решение. Отсечките AN, BN, CM и DM го делат четириаголникот на шест триаголници со плоштини $P_1, P_2, ..., P_6$, и еден четириаголник со плоштина P_7 (види цртеж). Нека висината на триаголникот AMD спуштена кон AM е h_1, висината на триаголникот ABN спуштена кон AB е h_2 и висината на триаголникот MBC спуштена кон MB е h_3. Тогаш добиваме трапез со основи h_1 и h_3 и средна линија h_2, па затоа $h_2 = \frac{h_1+h_3}{2}$. Имаме



$$\begin{aligned}P_{\triangle ABN} &= P_2 + P_3 + P_7 = \frac{\overline{AB}\cdot h_2}{2} \\ &= \frac{\overline{AB}\cdot\frac{h_1+h_3}{2}}{2} = \frac{\overline{AB}\cdot\frac{h_1}{2}}{2} + \frac{\overline{AB}\cdot\frac{h_3}{2}}{2} \\ &= \frac{\overline{AM}\cdot h_1}{2} + \frac{\overline{MB}\cdot h_3}{2} \\ &= P_{\triangle AMD} + P_{\triangle MBC} \\ &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4.\end{aligned}$$

Според тоа,

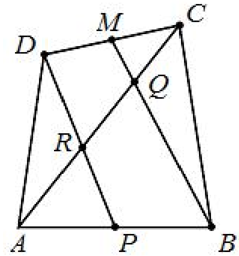
$$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle CDM} = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + (P_5 + P_6 + P_7) = P_{\square ABCD},$$

што и требаше да се докаже.

37. Даден е четириаголник $ABCD$. Точките P и M се средини соодветно на страните AB и CD, Дијагоналата AC ја сече DP во точката R и ја сече BM во точката Q. Ако $\frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}} = \frac{3}{8}$, определи го односот $\frac{\overline{DR}}{\overline{RP}}$.

Решение. Да означиме

$$P_{DMA} = P_{MCA} = a \text{ и } P_{APC} = P_{BPC} = b.$$



Во четириаголникот $ABCM$ имаме $\frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}} = \frac{3}{8}$, па затоа $\frac{P_{ACM}}{P_{ABC}} = \frac{3}{8}$, т.е. $\frac{a}{2b} = \frac{3}{8}$. Значи, $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. Во четириаголникот $APCD$ имаме $\frac{\overline{DR}}{\overline{RP}} = \frac{P_{ACD}}{P_{APC}} = \frac{2a}{b} = \frac{3}{2}$.

38. Во внатрешноста на триаголникот ABC, за кој $\measuredangle ABC = 45^\circ$ е избрана точка D таква, што $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 45^\circ$. АКо $\overline{BD} = 6\,cm$, определи ја плоштината на четириаголникот $ADCB$.

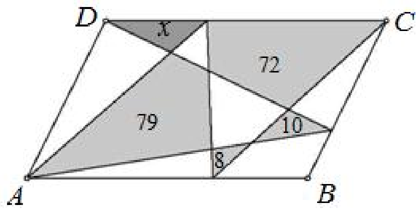
Решение. Нека P е пресечната точка на правата AD со страната BC. Тогаш $\triangle APB$ и $\triangle CDP$ се рамнокраки правоаголни триаголници, па затоа

$$P_{APB}=\frac{1}{2}\overline{BP}^2 \text{ и } P_{CDP}=\frac{1}{2}\overline{DP}^2 .$$

Според тоа, од последните две равенства и Питагоровата теорема за $\triangle BDP$ следува

$$P_{ADCB}=P_{APB}+P_{CDP}=\frac{1}{2}\overline{BP}^2+\frac{1}{2}\overline{DP}^2=\frac{1}{2}\overline{BD}^2=18\,cm^2 .$$

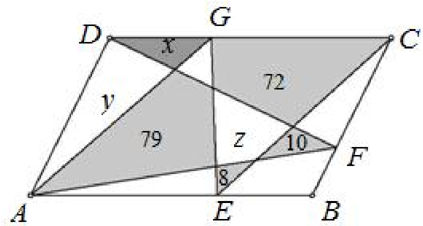
39. Во паралелограмот $ABCD$ се дадени плоштините на два четириаголника и два триаголника (цртеж десно). Определи ја плоштината на триаголникот означен со x.



Решение. На дадениот паралелограм да ги означиме точките E,F,G кои припаѓаат на страните на паралелограмот и со y и z да ги означиме плоштините на фигурите како на цртежот десно. Лесно се гледа дека плоштината на триаголникот AFD е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот $ABCD$, па затоа

$$\frac{1}{2}P_{ABCD}=y+79+z+10 .$$

Понатаму, збирот на плоштините на триаголниците AGD и EGC е еднаков на половина од плоштината на паралелограмот $ABCD$, па затоа



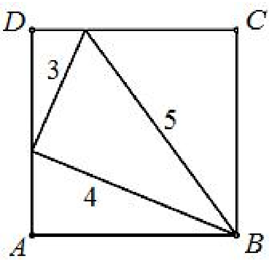
$$\frac{1}{2}P_{ABCD}=y+x+8+z+72 .$$

Сега, од (1) и (2) следува

$$y+79+z+10=y+x+8+z+72 ,$$

од каде добиваме $x=9$.

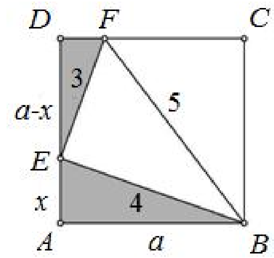
40. Во квадрат $ABCD$ е впишан триаголник со должини на страни 3, 4 и 5 (цртеж десно). Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.



Решение. Впишаниот триаголник да го означиме со EBF (цртеж лево). За страните на триаголникот EBF важи

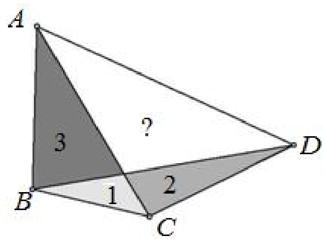
$$3^2+4^2=9+16=25=5^2 ,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека тој е правоаголен.



Триаголниците EFD и BEA се правоаголни и важи $\measuredangle BEA = \measuredangle EFD$ (агли со нормални краци), па од признакот АА следува дека тие се слични. Понатаму, од сличноста на овие триаголници следува $\frac{a}{4} = \frac{a-x}{3}$, од каде добиваме $x = \frac{a}{4}$. Сега од Питагоровата теорема применета на $\triangle ABE$ следува $x^2 + a^2 = 4^2$, од каде добиваме $\frac{a^2}{16} + a^2 = 16$, односно $a^2 = \frac{256}{17}$. Конечно, $P_{ABCD} = a^2 = \frac{256}{17}$.

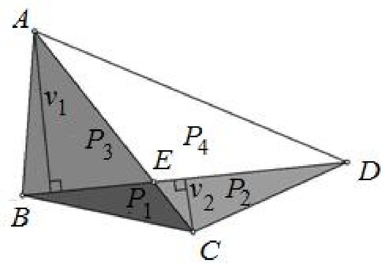
41. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, кој со своите дијагонали е поделен на четири триаголници. За трите триаголници се познати плоштините (цртеж десно). Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.



Решение. Со E да го означиме пресекот на дијагоналите, а со P_1, P_2, P_3, P_4 плоштините на триаголниците BCE, CDE, BEA, DAE, соодветно (цртеж десно). Имаме:

$$P_1 = \frac{\overline{BE} \cdot v_2}{2}, P_2 = \frac{\overline{DE} \cdot v_2}{2},$$

$$P_3 = \frac{\overline{BE} \cdot v_1}{2}, P_4 = \frac{\overline{DE} \cdot v_1}{2},$$



па затоа

$$P_1 \cdot P_4 = \frac{\overline{BE} \cdot v_2}{2} \cdot \frac{\overline{DE} \cdot v_1}{2} = P_2 \cdot P_3,$$

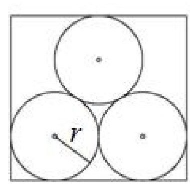
од каде добиваме

$$P_4 = \frac{P_2 \cdot P_3}{P_1} = 6.$$

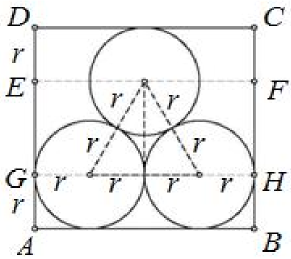
Конечно, за плоштината на четириаголникот добиваме

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 12.$$

42. Определи ја плоштината на четириаголникот прикажан на цртежот десно, ако сите впишани кружници имаат радиус еднаков на r.



Решение. Дадениот четириаголник да го означиме со $ABCD$, како што е прикажано на цртежот долу лево. Тогаш центрите на трите впишани кружници се темиња на рамностран триаголник со страна $2r$, па затоа неговата висина е еднаква на $\frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Низ центрите на кружниците повлекуваме отсечки GH и EF паралелни на страната AB. Јасно,



$$\overline{AB} = \overline{GH} = 4r,$$

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HF} + \overline{FC} = r + r\sqrt{3} + r = r(2+\sqrt{3}).$$

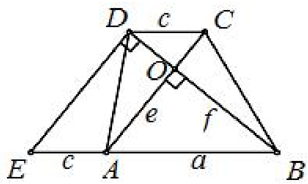
Конечно, за плоштината на четириаголникот добиваме

$$P = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4r \cdot r(2+\sqrt{3}) = 4r^2(2+\sqrt{3}).$$

43. Во трапезот $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под прав агол. Докажи дека

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2.$$

Решение. *Прв начин*. Низ темето D повлекуваме права паралелна на AC која правата AB ја сече во точката E. Тогаш $\triangle ABD$ е правоаголен со катети $\overline{BD}$ и $\overline{ED} = \overline{AC}$ и хипотенуза



$$\overline{EB} = \overline{EA} + \overline{AB} = \overline{CD} + \overline{AB},$$

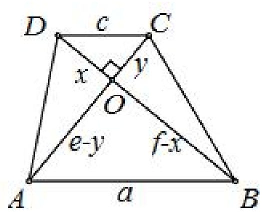
па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2.$$

Втор начин. Нека точката O е пресекот на дијагоналите,

$$\overline{AB} = a, \overline{CD} = c, \overline{AC} = e, \overline{BD} = f,$$

$$\overline{DO} = x, \overline{CO} = y, \overline{AO} = e - y, \overline{BO} = f - x.$$



Триаголниците ABO и DCO се слични, па затоа важи

$$(e-y):y = (f-x):x = a:c,$$

од каде добиваме

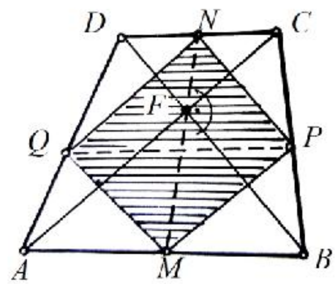
$$ce = (a+c)y \text{ и } cf = (a+c)x.$$

Понатаму, ако ги квадрираме последните две равенства и добиените равенства ги собереме, добиваме

$$c^2(e^2+f^2)=(x^2+y^2)(a+c)^2.$$

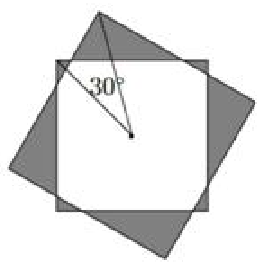
Но, триаголникот DCO е правоаголен, што значи $c^2=x^2+y^2$, па од последното равенство добиваме $e^2+f^2=(a+c)^2$, што и требаше да се докаже.

44. Во четириаголникот $ABCD$ точките M,P,N,Q се средини соодветно на страните AB,BC,CD,DA. Ако $\overline{MN}=\overline{PQ}$, докажи дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.



Решение. Бидејќи P и N се средини на BC и CD, отсечката PN е средна линија на $\triangle BCD$, па затоа $PN \parallel BD$. Аналогно, $MQ \parallel BD$, $MP \parallel AC$ и $QN \parallel AC$. Значи, $PN \parallel QM$ и $MP \parallel QN$, т.е. четириаголникот $MPNQ$ е паралелограм. Според условот на задачата $\overline{MN}=\overline{PQ}$, т.е. дијагоналите на паралелограмот $MPNQ$ се еднакви, па затоа тој е правоаголник., т.е. $MP \perp PN$. Но, $MP \parallel AC$ и $PN \parallel QM$, па од $MP \perp PN$ следува $AC \perp BD$, што и требаше да се докаже.

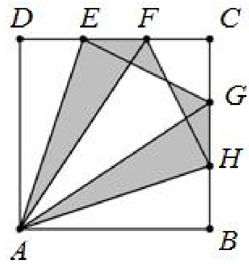
45. На цртежот десно двата квадрати имаат заеднички центар. Ако должината на страната на едниот квадрат е 1, определи ја должината на страната на другиот квадрат така, што збирот на плоштините на обоените триаголници е најмал.



Решение. Отсечките, на кои е поделена страната на единичниот квадрат од пресечните точки со другиот квадрат се со должини $x, 1-x-x\sqrt{3}, x\sqrt{3}$. Обоените триаголници се слични и бараниот минимум се достигнува, кога збирот на квадратите на нивните хипотенузи е минимален, што значи дека бараме минимум на $4x^2+(1-x-x\sqrt{3})^2$. Тој се достигнува за $x=\frac{1+3\sqrt{3}}{26}$ и страната на вториот квадрат е еднаква на $\frac{2+6\sqrt{3}}{13}$.

46. Определи ја плоштината на обоениот дел од квадратот $ABCD$ (цртеж десно), ако

$$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FC}=\overline{CG}=\overline{GH}=\overline{HB}=1.$$



Решение. Нека EG ги сече AF и FH соодветно во точките I и K. Тогаш

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IF}}=\frac{P_{AGE}}{P_{FGE}}=\frac{9-(3+1{,}5+1)}{0{,}5}=7.$$

Значи, $\frac{P_{AEI}}{P_{AFE}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{AF}}=\frac{7}{8}$, т.е. $P_{AEI}=\frac{7}{8}P_{AFE}=\frac{21}{16}$.

Од друга страна во триаголникот EHC отсечките EG и HF се тежишни линии, па затоа $P_{EFK}=\frac{1}{6}P_{EHC}=\frac{1}{3}$. Конечно, плоштината на обоенот дел од квадратот е еднаква на

$$2(P_{AEI}+P_{EFK})=2\cdot(\tfrac{1}{3}+\tfrac{21}{16})=\tfrac{79}{24}.$$

47. Во конвексен четириаголник $ABCD$ аглите во темињата A и C се еднакви и симетралата на аголот во темето B минува низ средината на страната CD. Ако $\overline{CD}=3\overline{AD}$, определи го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Решение. Нека M е средината на CD и E е симетричната точка на C во однос на BM. Бидејќи BM е симетрала на $\measuredangle ABC$, заклучуваме дека $E\in AB$. Имаме $\overline{MD}=\overline{MC}$ и од симетријата $\overline{MC}=\overline{ME}$, од каде следува дека $\triangle DEC$ е правоаголен. Од $BM\perp EC$ сега добиваме $BM\,||\,ED$. Освен тоа, $\measuredangle BEM=\measuredangle BCM=\measuredangle BAD$ и затоа $AD\,||\,EM$. Триаголниците BEM и EAD имаат соодветни паралелни страни, па затоа тие се слични. Според тоа,

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{\overline{AD}}=\frac{3}{2}\text{ и }\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{AE},\ \overline{AB}=\frac{5}{2}\overline{AE},$$

па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\frac{5}{3}$.

48. Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен триаголник со $\measuredangle ACB=60^\circ$, во кој отсечките $AP\ (P\in BC)$ и $BQ\ (Q\in AC)$ се висини. Определи ја плоштината на четириаголникот $CPOQ$.

Решение. Ќе ги користиме вообичаените ознаки за триаголникот. За $\triangle ABO$ имаме $\overline{AO}=\overline{BO}=R$ и $\measuredangle AOB=2\measuredangle ACB=120^\circ$, па затоа

$c = R\sqrt{3}$. Од правоаголните триаголници APC и BQC, во кои $\measuredangle CAP = \measuredangle CBQ = 30^\circ$ имаме $\overline{CP} = \frac{b}{2}$ и $\overline{CQ} = \frac{a}{2}$. Сега, триаголниците PQC и ABC имаат заеднички агол и $\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$, што значи дека тие се слични. Оттука следува дека $\overline{PQ} = \frac{c}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ и $\measuredangle CPQ = \sim$. Нека K е пресечната точка CO и PQ. Бидејќи $\measuredangle BOC = 2\sim$, добиваме $\measuredangle OCB = \measuredangle OBC = 90^\circ - \sim$ и $\measuredangle CPQ = \sim$, па затоа $\measuredangle CKP = 90^\circ$, т.е. $CO \perp PQ$. Понатаму, $\overline{CK} < \overline{CP} = \frac{\overline{CA}}{2} < R = \overline{CO}$, што значи дека точката K е меѓу C и O, па затоа четириаголникот $CPOQ$ е конвексен со заемно нормални дијагонали. Конечно,

$$P_{CPOQ} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{CO}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

49. Во остраоголен $\triangle ABC$ се повлечени висините AH_a и BH_b, а точката M е средина на страната AB. Околу $\triangle AMH_a$ и $\triangle BMH_b$ се опишани кружници кои по втор пат се сечат во точката P. Докажи дека точката P припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Нека X е пресечната точка на k_{AMH_a} и k_{ABC}. Тогаш

$\measuredangle AXH_a = \measuredangle BMH_a = 180^\circ - 2$ и $\measuredangle AXC = 180^\circ -$, па затоа

$$\measuredangle H_a XC = 180^\circ - \quad - (180^\circ - 2 \quad) = \quad .$$

Бидејќи $\measuredangle H_a H_b C =$, заклучуваме дека X е пресечна точка на k_{ABC} и $k_{H_a H_b C}$.

Нека Y е пресечната точка на k_{BMH_b} и k_{ABC}. Тогаш $\measuredangle AYB = ¥$ и

$\measuredangle H_b YB = \measuredangle AMH_b = 180^\circ - 2\sim$, па затоа

$$\measuredangle AYH_b = \measuredangle AYB - \measuredangle H_b YB = ¥ - (180^\circ - 2\sim) = \sim - \quad .$$

Од $\measuredangle AYC = 180^\circ -$ сега добиваме

$$\measuredangle H_b YC = 180^\circ - \quad - (\sim - \quad) = 180^\circ - \sim .$$

Бидејќи $\measuredangle H_b H_a C = \sim$, заклучуваме дека четириаголникот $H_b H_a CY$ е тетивен и Y е пресечната точка на k_{ABC} и $k_{H_a H_b C}$.

Според тоа, $X \equiv Y \equiv P$, т.е. P припаѓа на опишаната кружница околу

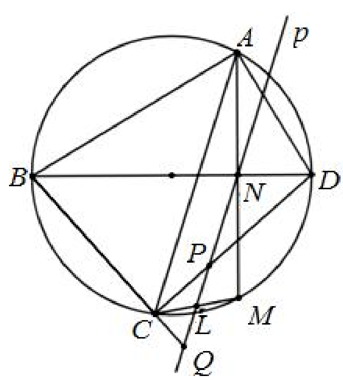
$\triangle ABC$.

50. Рамностран $\triangle ABC$ е вписан во квадрат со страна 1 (секое теме на триаголникот е на некоја страна на квадратот). Определи ја најмалата и најголемата можна вредност на должината на страната на $\triangle ABC$.

Решение. Јасно, секое теме на $\triangle ABC$ лежи на различна страна на квадратот. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\triangle ABC$ е вписан во квадратот $MNPQ$ при што $A \in MQ$, $B \in NP$ и $C \in PQ$. Ако точката T е средината на страната AB, тогаш од $\measuredangle CTB = \measuredangle BPC = \measuredangle CTA = \measuredangle CQA = 90^\circ$ следува дека четириаголниците $CTBP$ и $ATCQ$ се тетивни. Според тоа, $\measuredangle TPC = \measuredangle TBC = 60^\circ$ и $\measuredangle TQC = \measuredangle TAC = 60^\circ$, што значи дека точката T е третото теме на рамностраниот триаголник со страна PQ, односно дека сите вписани рамнострани триаголници со темиња на страните NP, PQ и QM минуваат низ точката T. Според тоа, бидејќи $A \in MQ$ и $B \in NP$, должината на страната AB е најмала кога $AB \parallel MN$ и тогаш $\overline{AB} = 1$, а е најголема кога $A \equiv M$ или $B \equiv N$ и тогаш лесно се пресметува дека $\overline{AB} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

51. Четириаголникот $ABCD$, чии дијагонали не се заемно нормални, е вписан во кружница со дијаметар BD. Нека M е симетричната точка на точката A во однос на правата BD и $\{N\} = AM \cap BD$. Нека p е правата низ N, паралелна со правата AC, и нека p ги сече правите CD и BC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека точките P, C, Q и M се темиња на правоаголник.

Решение. Нека p ја сече CM во точка L. Од $NL \parallel AC$ и N е средина на AM, следува дека NL е средна линија во триаголникот ACM, па затоа L е средина на CM. Од тоа што четириаголникот е тетивен, осната симетрија и теоремата за аглите на трансферзалата следува



$$\measuredangle PCL = \measuredangle DCM = \measuredangle DBM = \measuredangle DBA$$
$$= \measuredangle DCA = \measuredangle PCA = \measuredangle CPL,$$

што значи дека триаголникот CLP е рамнокрак и важи $\overline{CL} = \overline{LP}$. Од истите причини добиваме

$$\measuredangle LCQ = \measuredangle MCQ = 90^\circ - \measuredangle MCD = 90^\circ - \measuredangle MAD$$
$$= \measuredangle BDA = \measuredangle BCA = \measuredangle CQL,$$

па затоа и триаголникот CQL е рамнокрак и важи $\overline{CL} = \overline{LQ}$. Понатаму, од $\overline{CL} = \overline{LP}$ и $\overline{CL} = \overline{LQ}$ следува $\overline{LP} = \overline{LQ}$. Според тоа, дијагоналите на четириаголникот $PCQM$ се преполовуваат, што значи дека тој е паралелограм и како $\measuredangle PCQ = 90^\circ$, заклучуваме дека $PCQM$ е правоаголник.

52. На страните BC и AC на $\triangle ABC$ соодветно се избрани точки A' и B' и нека AA' и BB' се сечат во точката X. Ако $P_{ABX} = p$, $P_{A'B'X} = q$ и $P_{A'B'C} = r$, изрази ја плоштината на $\triangle ABC$ преку p, q и r,

Решение. Нека $P_{AXB'} = u$ и $P_{BXA'} = v$. Тогаш од триаголниците $BB'C$ и ABC имаме

$$\frac{q+v}{r} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = \frac{p+v}{u+q+r}.$$

Од последното равенство добиваме

$$qu + q^2 + qr + vu + vq = pr.$$

Понатаму, од четириаголникот $ABA'B'$ следува $pq = uv$, па затоа од горното равенство добиваме

$$qu + q^2 + qr + pq + vq = pr,$$
$$q(u + q + r + p + v) = pr,$$
$$qP_{ABC} = pr,$$
$$P_{ABC} = \frac{pr}{q}.$$

53. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC се избрани точки D, E, F, соодветно, така што четириаголникот $CEFD$ е паралелограм. Нека $O = AD \cap BE$, $M = AD \cap EF$, $N = DF \cap BE$. Докажи дека триаголникот DEO и четириаголникот $FNOM$ имаат еднакви плоштини.

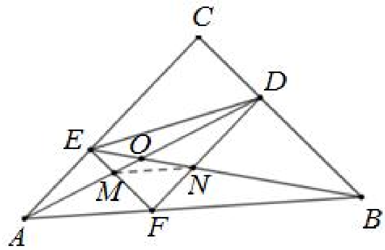
Решение. Од $EF \,||\, CB$ следува $P_{BED} = P_{BMD}$, па затоа

$$P_{DEO} = P_{BED} - P_{BOD} = P_{BMN} - P_{BOD} = P_{BMO}.$$

Слично, од $CA \,||\, DF$ следува $P_{ADE} = P_{ANE}$, па затоа

$$P_{DEO} = P_{ADE} - P_{AOE} = P_{ANE} - P_{AOE} = P_{ANO}.$$

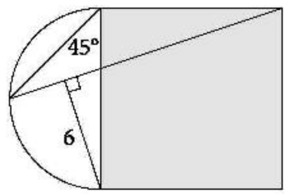
Според тоа, $P_{BMO} = P_{ANO}$, од што следува $P_{BMN} = P_{AMN}$. Но триаголниците AMN и BMN имаат заедничка страна и еднакви плоштини, па затоа нивните висини повлечени соодветно од темињата A и B се еднакви, што значи дека $MN \parallel AB$.



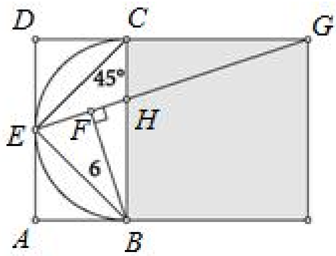
Но, тоа значи дека $P_{FNM} = P_{AMN}$, па затоа

$$P_{FNOM} = P_{FNM} + P_{MNO} = P_{ANM} + P_{MNO} = P_{ANO} = P_{DEO}.$$

54. Според податоците дадени на цртежот десно, пресметај ја плоштината на засенчениот квадрат.



Решение. Дадениот цртеж да го дополниме како што е прикажано подолу. Отсечките BF и EG се заемно нормални, што значи дека $\measuredangle HBF = \measuredangle DGE$, како агли со нормални краци. Според тоа, правоаголните триаголници BHF и GED се слични.

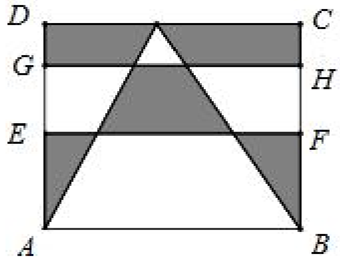


Понатаму, од $\measuredangle ECB = 45^\circ$ следува дека $\overline{ED} = \overline{DC} = r$ и $\overline{CD} = \overline{CB} = 2r$, каде r е должината на радиусот на дадената полукружница. Сега, од $\triangle BHF \sim \triangle GED$ следува дека $\frac{\overline{FH}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DG}}$, па затоа $\frac{\overline{FH}}{6} = \frac{r}{3r}$, т.е. $\overline{FH} = 2$. Понатаму, од Питагоровата теорема применета на $\triangle BHF$ следува

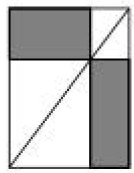
$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FH}^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}.$$

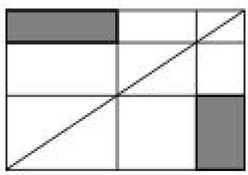
Имаме, $\triangle GHC \sim \triangle GED$, па затоа $\frac{\overline{CH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DG}}$, од каде добиваме дека $\overline{CH} = \frac{2r}{3}$. Понатаму, $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$, па затоа $2r = \sqrt{40} + \frac{2r}{3}$, односно $r = \frac{3\sqrt{40}}{4}$. Значи, $\overline{BC} = 2r = \frac{3\sqrt{40}}{2}$ и плоштината на осенчениот квадрат е $P = \overline{BC}^2 = (\frac{3\sqrt{40}}{2})^2 = \frac{9 \cdot 40}{4} = 90$.

55. Во правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно отсечките EF и GH се паралелни на страната AB, а точката P која припаѓа на страната CD е поврзана со темињата A и B. Ако плоштината на обоениот дел е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот $ABCD$, докажи дека $\overline{AE} = \overline{DG}$.



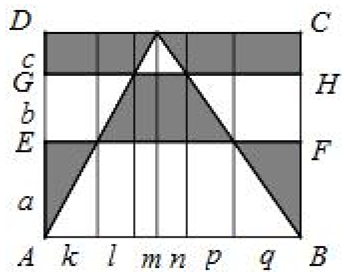
Решение. Ќе го искористиме познатото тврдење, дека ако низ произволна точка од дијагоналата на правоаголник повлечеме прави паралелни на неговите страни, тогаш тие од правоаголникот над и под дијагоналата отсекуваат правоаголници со еднакви плоштини (види цртеж десно).





Понатаму, непосредна последица од ова тврдење е илустрирана на цртежот лево. Имено, според горното тврдење горниот сив правоаголник и белиот правоаголник десно од него имаат еднаква плоштина на долниот сив правоаголник и белиот правоаголник над него. Но, според истото тврдење разгледуваните бели правоаголници имаат еднакви плоштини, па затоа и сивите правоаголници имаат еднакви плоштини.

Во дадениот правоаголник да повлечеме прави паралелни на страната AD низ пресечните точки на AP и BP со EF и GH и низ точката P (цртеж десно). Ќе ги користиме ознаките дадени на цртежот.



Секој обоен триаголник е складен со до него белиот триаголник, па затоа соодветните два триаголника имаат еднакви плоштини. Од горното својство следува дека $am = kc$, $an = qc$, $cl = bm$, $bn = cp$, $bk = al$ и $bq = ap$. Според тоа, вкупната плоштина на обоените многуаголници е еднаква на вкупната плоштина на белите многуаголници ако и само ако $bk + bq = bm + bn$, т.е. $k + q = m + n$. Но, $m = \frac{kc}{a}$ и $n = \frac{qc}{a}$, па од претходното равенство добиваме $k + q = (k+q)\frac{c}{a}$, односно $a = c$.

56. За конвексниот четириаголник $ABCD$ се исполнети равенствата $\overline{AB}+\overline{CD}=\sqrt{2}\,\overline{AC}$ и $\overline{BC}+\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{BD}$. Докажи дека $ABCD$ е паралелограм.

Решение. Нека A_1 е симетричната точка на A во однос на C, B_1 е симетричната точка на B во однос на средината на CD и D_1 е симетричната точка на на D во однос на средината на BC. Имаме $\overline{CD_1}=\overline{BD}=\overline{B_1C}$. Очигледно четириаголникот $A_1B_1AD_1$ е паралелограм. Понатаму, од неравенството на триаголник следува

$$\sqrt{2}\,\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{BD_1}\geq\overline{AD_1},\ \sqrt{2}\,\overline{BD}\geq\overline{AB_1}$$

и затоа важи

$$2\overline{AC}^2+2\overline{BD}^2\geq\overline{AD_1}^2+\overline{AB_1}^2.$$

Но, во паралелограмот $A_1B_1AD_1$ имаме

$$\overline{AA_1}=2\overline{AC},\ \overline{B_1D_1}=2\overline{CD_1}=2\overline{BD}$$

и од равенството на паралелограм следува

$$2\overline{AC}^2+2\overline{BD}^2=\overline{AD_1}^2+\overline{AB_1}^2.$$

Според тоа, насекаде важи знак за равенство, од што следува тврдењето на задачата.

57. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница k. Точките K и L се соодветно допирните точки на k со страните AB и CD. Впишаната кружнца μ во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките M и N. Докажи, дека правите MN и KL се сечат на правата која минува низ центрите на k и μ.

Решение. Нека I е центарот на μ. Тогаш BI минува низ центарот на k. Нека $BI\cap MN=R$. Имаме

$$\measuredangle BIC=90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle BAC=\measuredangle MNC,$$

при што второто равенство следува од $\overline{AM}=\overline{AN}$. Според тоа, четириаголникот $IRNC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BRC=\measuredangle INC=90^\circ$.

Нека O е центарот на k. Сега, ако $AB\,||\,CD$, тогаш $\measuredangle BOC=90^\circ$ и затоа $O\equiv R$. Освен тоа, K,O,L лежат на една права и следствено разгледуваните прави се сечат во центарот на k.

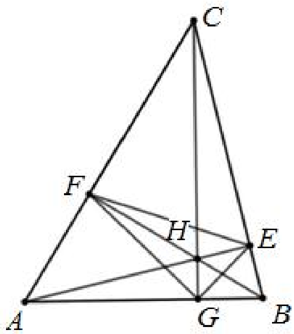
Во спротивно, нека $AB\cap CD=T$ (без ограничување на општоста можеме да земеме дека A е меѓу B и T) и $BO\cap KL=S$. Со аналогни расудувања за $\triangle BCT$ и k се добива $\measuredangle BSC = 90^\circ$. Оттука добиваме $S \equiv R$ и тврдењето следува.

58. Во остроаголниот триаголник ABC, точките E, F, G се подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Ако $\overline{AB} = \overline{CH}$, докажи дека

$$P_{AGF} \cdot \overline{BC}^2 + P_{BEG} \cdot \overline{AC}^2 = P_{CFF} \cdot \overline{AB}^2,$$

каде $P_{AGF}, P_{BEG}, P_{CFF}$ се плоштините на триаголниците AGF, BEG, CFE, соодветно.

Решение. Триаголниците ABF и HCF се складни (тие се правоаголни, имаат еднакви хипотенузи $\overline{AB} = \overline{CH}$ и $\measuredangle ABF = \measuredangle HCF = 90^\circ - \sim$). Затоа $\overline{BF} = \overline{CF}$, па од правоаголниот триаголник CFB следува ¥ $= 45^\circ$ и $\measuredangle CBF = 45^\circ$. Од тетивниот четириаголник $FGBC$ следува дека $\measuredangle FGC = \measuredangle FBC = 45^\circ$, а од тетивниот четириаголник $HGBE$ следува $\measuredangle HGE = \measuredangle HBE = 45^\circ$, па затоа $\measuredangle FGE = 90^\circ$. Од правоаголниот триаголник FGE следува $\overline{FG}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{EG}^2$.



Од друга страна,

$$\measuredangle AFG = 90^\circ - \measuredangle GFB = 90^\circ - \measuredangle GCB = \quad \text{и} \; \measuredangle GAF = \measuredangle CAB = \sim,$$

па затоа $\triangle AGF \sim \triangle ACB$. Аналогно се докажува дека $\triangle BEG \sim \triangle BAC$ и $\triangle CFE \sim \triangle CBA$, па затоа точни се равенствата

$$\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{GF}^2}{\overline{BC}^2}, \frac{P_{BEG}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{EG}^2}{\overline{AC}^2} \text{ и } \frac{P_{CFE}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{FE}^2}{\overline{BA}^2}.$$

Значи,

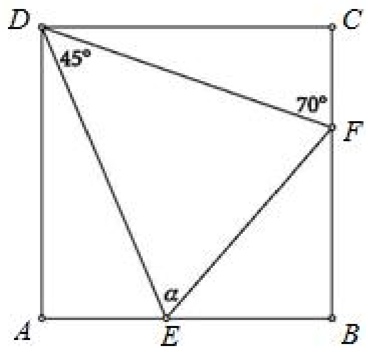
$$\overline{GF}^2 = \frac{P_{AGF}}{P_{ABC}} \overline{BC}^2, \overline{EG}^2 = \frac{P_{BEG}}{P_{ABC}} \overline{AC}^2 \text{ и } \overline{FE}^2 = \frac{P_{CFE}}{P_{ABC}} \overline{BA}^2.$$

Заменуваме во равенството $\overline{FG}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{EG}^2$ и го добиваме равенството

$$\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}} \cdot \overline{BC}^2 + \frac{P_{BEG}}{P_{ABC}} \cdot \overline{AC}^2 = \frac{P_{CFF}}{P_{ABC}} \cdot \overline{AB}^2,$$

кое е еквивалентно со бараното равенство.

59. Даден квадрат $ABCD$. Според означените елементи на цртежот десно определи го $\measuredangle FED$.



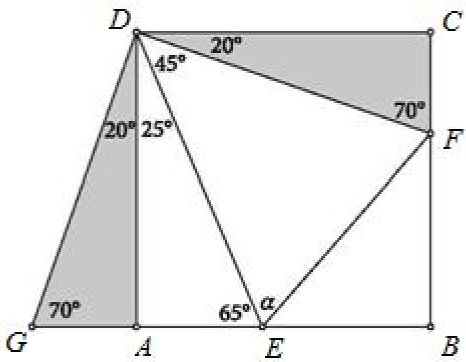
Решение. Имаме:

$\measuredangle FDC = 90^\circ - \measuredangle CDF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$,

$\measuredangle ADE = 90^\circ - \measuredangle EDF - \measuredangle FDC$

$= 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$,

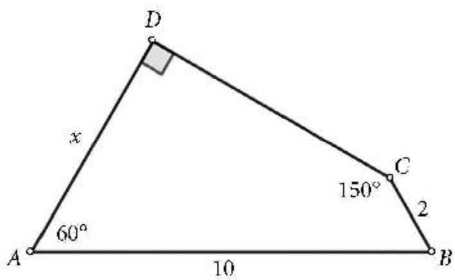
$\measuredangle DEA = 90^\circ - \measuredangle ADE = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.



Триаголникот DFC го ротираме околу темето D така што страната CD се пресликa во отсечката AD (цртеж лево).

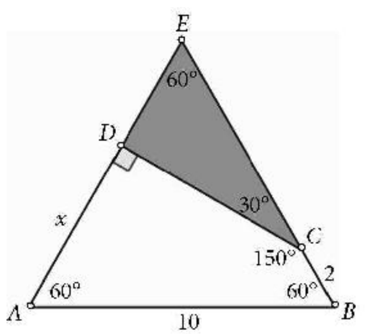
Триаголниците DFC и DGA се складни, што значи дека $\overline{DF} = \overline{DG}$. Исто така и триаголниците GED и FED се складни (признак САС). Оттука следува $\measuredangle FED = \measuredangle DEG = 65^\circ$.

60. Определи ја должината на страната AD на четириаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно.



Решение. Збирот на внатрешните агли на четириаголникот $ABCD$ е еднаков на 360°, па затоа

$\measuredangle CBA = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 60^\circ$.



Нека продолженијата на страните AD и BC се сечат во точката E (цртеж десно). Тогаш триаголникот ABE е рамнокрак со страна $\overline{AB} = 10$, па затоа $\overline{EC} = 8$. Но,

$\measuredangle ECD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, што значи дека триаголникот CED е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{ED}=\frac{\overline{EC}}{2}=4$. Конечно, $\overline{AD}=\overline{AE}-\overline{DE}=6$.

61. **(Втора теорема на Птоломеј).** Нека $ABCD$ е тетивен четиириаголник. Докажи дека

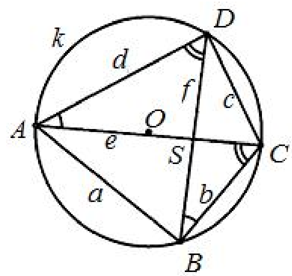
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Нека S е пресекот на дијагоналите AC и BD (цртеж долу). Тогаш

$$\measuredangle DAS=\measuredangle CBS \text{ и } \measuredangle ADS=\measuredangle BCS,$$

па затоа $\triangle ADS\sim\triangle BCS$. Според тоа, $\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$ и оттука следува

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{SB}}{\overline{BC}\cdot\overline{AB}} \text{ и } \frac{\overline{SD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}. \qquad (2)$$



Аналогно, од $\triangle ABS\sim\triangle CDS$ следува $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$,

односно

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}. \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) добиваме дека

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{SB}}{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

а оттука последователно добиваме

$$\frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\frac{\overline{SB}+\overline{SD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AB}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека R е радиусот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Имаме:

$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ADC}$$

и

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD},$$

па затоа

$$P_{ABCD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4R}+\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}}{4R}, \qquad (4)$$

$$P_{ABCD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{4R} + \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{4R}\,. \qquad (5)$$

Сега, од (4) и (5) последователно добиваме

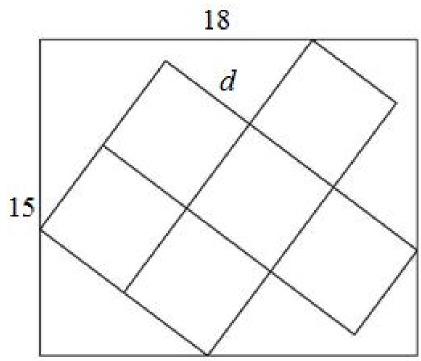
$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} + \overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD} = \overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD} + \overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD},$$

$$\overline{AC}\cdot(\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{AD}\cdot\overline{CD}) = \overline{BD}\cdot(\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}),$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

што и требаше да се докаже.

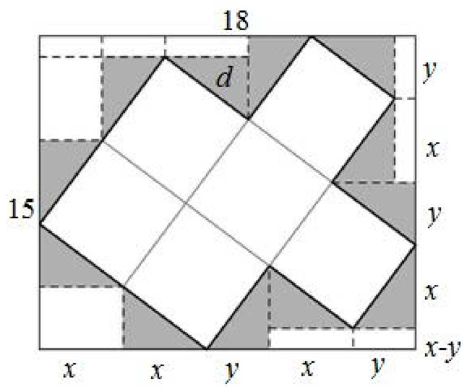
62. Во правоаголник со димензии 18×15 се впишани шест складни квадрати со должина на страна d, како што е прикажано на цртежот десно.



а) Определи ја должината на страната d.

б) Дали впишаните квадрати покриваат повеќе од 50% од плоштината на правоаголникот?

Решение. а) Фигурата која е добиена со впишување на шесте складни квадрати да ја дополниме со доцртување на дванаесет триаголници како што е прикажано на цртежот десно.



Катетите на овие триаголници се паралелни со страните на правоаголникот и нека пократката ја означиме со y, а подолгата ја означиме со x. Притоа, нивните хипотенузи се еднакви на страните на впишаните квадрати, па затоа нивните должини се еднакви на d. Од должините на страните на правоаголникот го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18, \\ 3x + y = 15, \end{cases}$$

од каде наоѓаме $y = 3,\ x = 4$. Сега, од Питагоровата теорема наоѓаме

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,.$$

б) Плоштината на дадениот правоаголник е

$$P = 18 \cdot 15 = 270,$$

а додека плоштината на шесте впишани квадрати е

$$P' = 6 \cdot 5^2 = 150.$$

Од

$$\frac{P'}{P} = \frac{150}{270} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

следува дека впишаните квадрати покриваат повеќе од 50% од плоштината на правоаголникот.

63. На страните AB и AC на остроаголниот триаголник ABC, со ортоцентар H и центар на опишана кружница O, редоследно се избрани точки P и Q такви што четириаголникот $APHQ$ е паралелограм. Докажи дека важи

$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PQ}}{\overline{QA}\cdot\overline{QO}} = 2.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $\overline{OP} = \overline{OQ}$. Нека правата која минува низ средината K на отсечката AH и е нормална на OK ги сече страните AB и AC соодветно во точките P' и Q'. Со M и N да ги означиме соодветно средините на страните AB и AC. Од

$$\measuredangle OMP' = \measuredangle OKP' = 90^\circ \text{ и } \measuredangle ONQ' = \measuredangle OKQ' = 90^\circ$$

следува дека четириаголниците $OMP'K$ и $ONQ'K$ се тетивни. Бидејќи отсечките MK и NK се средни линии на триаголниците ABH и ACH, важи $MK \parallel BH, NK \parallel CH$, т.е. $MK \perp AC, NK \perp AB$, па затоа

$$\measuredangle OP'K = \measuredangle OMK = \measuredangle BAC, \quad \measuredangle OQ'K = \measuredangle ONK = \measuredangle BAC.$$

Според тоа, триаголникот $OP'Q'$ е рамнокрак и K е средина на отсечката $P'Q'$, па затоа дијагоналите на четириаголникот $AP'HQ'$ се половат, т.е. тој е паралелограм. Оттука следува $P \equiv P'$ и $Q \equiv Q'$.

Понатаму, правоаголните триаголници BPH, CQH и OPK се слични, па затоа

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{OP}}, \quad \frac{\overline{CH}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{QH}}{\overline{QK}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{OQ}}.$$

Користејќи ги последните равенства и очигледните равенства

$$\overline{PK} = \overline{QK} = \frac{\overline{PQ}}{2}, \ \overline{AP} = \overline{QH} \text{ и } \overline{AQ} = \overline{PH},$$

непосредно добиваме

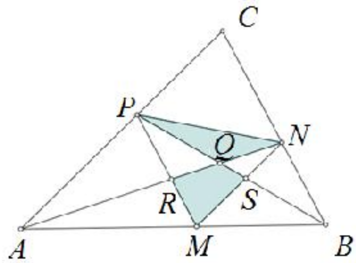
$$\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PQ}}{\overline{QA}\cdot\overline{QO}} = \frac{\overline{QC}\cdot\overline{PQ}}{\overline{PA}\cdot\overline{PO}} = 2\,.$$

64. Во $\triangle ABC$ точките M, N, P припаѓаат на сстраните AB, BC, CA соодветно и се такви што четириаголникот $CPMN$ е паралелограм. Ако $MP \cap AN = R,\ BP \cap MN = S,\ AN \cap BP = Q$ докажи, дека

$$P_{MRQS} = P_{NQP}$$

Решение. Ќе докажеме дека

$$P_{RMN} = P_{SNP}\,. \qquad (1)$$



Јасно,

$$\frac{P_{RMN}}{P_{PMN}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \qquad (2)$$

и

$$\frac{P_{SNP}}{P_{PMN}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}}\,. \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) следува (1), па затоа

$$P_{MRQS} = P_{RMN} - P_{QSN} = P_{SNP} - P_{QSN} = P_{NQP}\,.$$

65. Даден е триаголник ABC. Нека I е центарот на впишаната кружница, а A' и B' се редоследно средините на страните BC и AC на триаголникот ABC. Со M и N да ги означиме соодветно средините на оние лаци AC и BC на опишаната кружница околу триаголникот ABC кои го содржат преостанатото теме на триаголникот. Ако точките M, I, N се колинеарни, докажи дека важи

$$\measuredangle AIB' = \measuredangle BIA' = 90^\circ\,.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека важи $MN \perp CI$. Нека правите MN и CI се сечат во точката K. Со непосредно пресметување на перифериските агли добиваме

$$\measuredangle CNK = \measuredangle CNM = \measuredangle CAM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle AMC = 90^\circ - \frac{}{2}\,,$$

$$\measuredangle NCK = \measuredangle NCI = \measuredangle BCN - \measuredangle BCI = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle BNC - \frac{\text{¥}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{~}}{2} - \frac{\text{¥}}{2} = \frac{}{2}\,,$$

од каде следува дека триаголникот CNK е правоаголен. Условот за колинеарност на точките M, I, N всушност значи дека $K \equiv I$, т.е. $\measuredangle CIM = \measuredangle CIN = 90^\circ$. Бидејќи $MB' \perp AC$ и $NA' \perp BC$, добиваме дека четириаголниците $CA'IN$ и $CB'IM$ се тетивни, со опишани кружници чии дијаметри соодветно се CN и CM . Сега имаме

$$\measuredangle CIA' = \measuredangle CNA' = \frac{\sim}{2}, \quad \measuredangle CIB' = \measuredangle CMB' = \frac{}{2},$$

па тврдењето на задачата непосредно следува од познатите релации

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\sim}{2}, \quad \measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{}{2}.$$

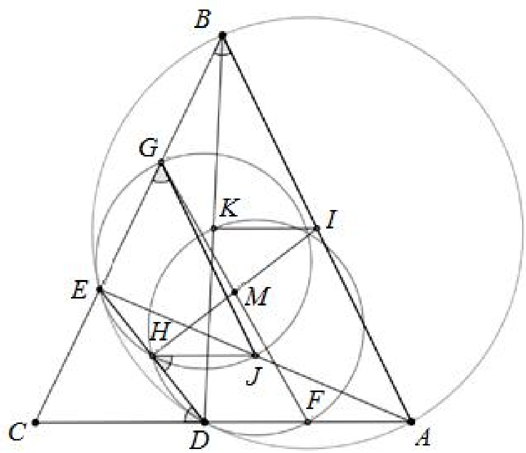
66. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC . На страните AC и BC соодветно се избрани точки D и E такви што $\overline{CD} = \overline{DE}$. Нека H, J и K се средини на DE, AE и BD, соодветно. Опишната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F , а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G . Правата низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I . Нека $IH \cap GF = M$. Докажи дека точките J, M и K се колинеарни.

Решение. Прво ќе докажеме дека четириаголникот $ABED$ е тетивен. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$, важи $\measuredangle ABC = 180^\circ - 2\measuredangle ACB$. Од условот на задачата имаме и дека $\overline{CD} = \overline{DE}$, па важи

$$\measuredangle CDE = 180^\circ - 2\measuredangle DCE = 180^\circ - 2\measuredangle ACB = \measuredangle ABC .$$

Според тоа, точките A, B, D, E лежат на една кружница.

Бидејќи K е средина на BD , правата низ K паралелна со AC е средна линија на триаголникот ABD, па затоа I е средина на AB.



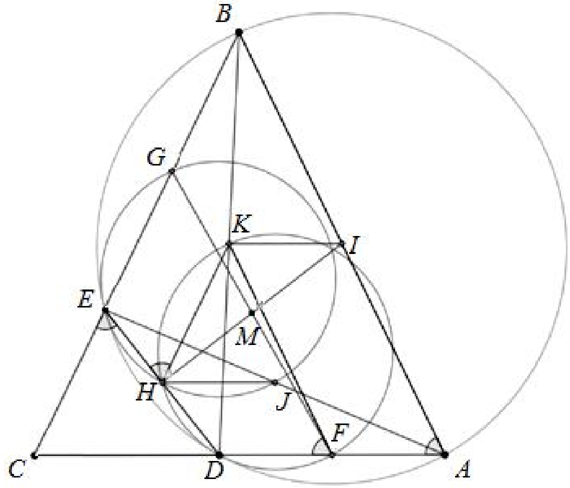
Ќе докажеме дека G е средина на BE, а F е средина на AD .

Четириаголникот $JGEH$ е тетивен, па имаме

$$\measuredangle JGE = 180^\circ - \measuredangle JHE = \measuredangle JHD.$$

Бидејќи H и J се средини на DE и AE, следува дека HJ е средна линија на триаголникот AED и затоа HJ е паралелна со AD. Од еднаквоста на аглите со паралелни краци добиваме

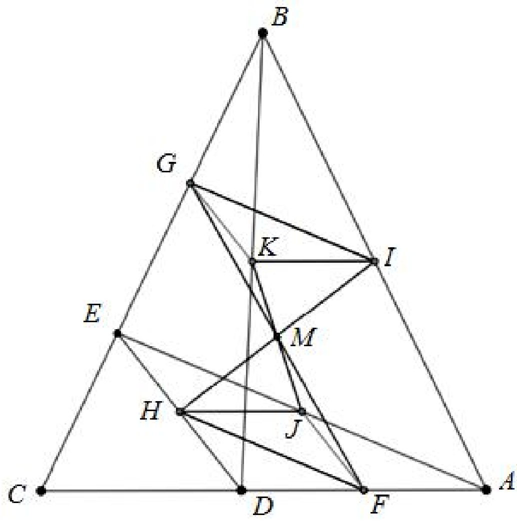
$$\measuredangle JHD = \measuredangle CDH = \measuredangle CDE = \measuredangle ABC .$$



Оттука следува дека JG е паралелна со AB. Бидејќи J е средина на AE и JG е средна линија на ABE, следува дека G е средина на BE. Аналогно од

$$\measuredangle KFD = \measuredangle KHE = \measuredangle CEH = \measuredangle CAB$$

следува дека KF е паралелна со AB. Бидејќи K е средина на BD и KF е средна линија на ABD, добиваме дека F е средина на AD.

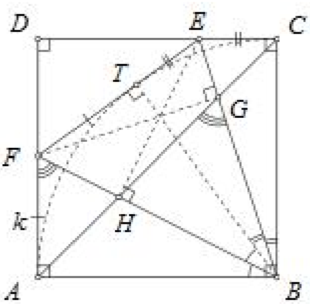


Понатаму, HJ е средна линија на AED, па затоа HJ е паралелна со AC и $\overline{HJ} = \frac{\overline{AD}}{2}$, додека KI е средна линија на ABD, па затоа KI е

паралелна со AC и $\overline{KI}=\frac{\overline{AD}}{2}=\overline{HJ}$. Според тоа, четириаголникот $HJIK$ е паралелограм и неговите дијагонали се половат.
Исто така, GK е средна линија на триаголникот DEB, а JF е средна линија на AED, па на сличен начин заклучуваме дека четириаголникот $JFKG$ е паралелограм. Тоа значи дека KJ и GF се половат, па оттука следува дека M е заедничка средина на KJ, IH и GF, што значи дека точките J,M и K се колинеарни.

67. Нека $ABCD$ е квадрат и k е кружница со центар во точката B и радиус $\overline{BA}$. Нека T е точка на кружницата k во внатрешноста на квадратот. Тангентата на кружницата k во точката T ги сече отсечките CD и DA редоследно во точките E и F. Нека G и H се редоследно пресеците на правите BE и BF со отсечката AC. Докажи дека правите BT, EH и FG се сечат во една точка.

Решение. Точките A,C и T лежат на кружницата k, а правите AD,CD и EF се тангенти на k во овие точки. Бидејќи B е центар, а EF е тангента во T, важи $BT\perp EF$.



Понатаму, A и T се допирните точки на тангентите повлечени на k од точката F, па затоа важи $\overline{AF}=\overline{FT}$. Според тоа, $\triangle ABF\cong\triangle TBF$. Аналогно $\overline{EC}=\overline{ET}$ и $\triangle BCE\cong\triangle BTE$. Да означиме $\measuredangle ABF=\measuredangle FBT=\sim$ и $\measuredangle CBE=\measuredangle EBT=\ $. Сега, од $\measuredangle ABC=2\sim+2\ $, следува $\sim+\ =45^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle AFB=90^\circ-\measuredangle ABF=90^\circ-\sim=45^\circ+\ .$$

Бидејќи $\measuredangle AGB$ е надворешен агол за $\triangle BCG$, важи

$$\measuredangle AGB=\measuredangle GBC+\measuredangle BCA=\ +45^\circ.$$

Значи, $\measuredangle AFB=\measuredangle AGB$ и бидејќи F и G се од иста страна на правата AB, заклучуваме дека точките A,B,F и G лежат на иста кружница, т.е. четириаголникот $ABGF$ е тетивен. Затоа важи

$$\measuredangle BGF=180^\circ-\measuredangle BAF=90^\circ.$$

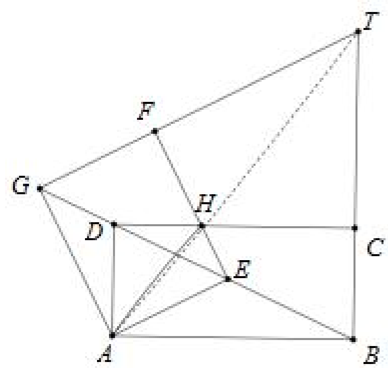
Значи, $FG\perp BE$. Аналогно се докажува дека четириаголникот $BCEH$ е тетивен и $EH\perp BF$.

Докажавме дека отсечките FG и EH се висини на $\triangle BEF$, а како BT е висина на овој триаголник, заклучуваме дека правите BT, EH и FG се сечат во една точка.

68. Нека $ABCD$ и $AEFG$ се правоаголници такви што B, E, D, G лежат на иста права распоредени во овој редослед. Нека точката T е пресек на правите BC и GF, а точката H е пресек на правите DC и EF. Докажи дека точките A, H и T се клинеарни.

Решение. Четириаголиците чии два спротивни агли се прави се тетивни. Такви се четириаголниците $AEHD$ и $ABTG$. Понатаму, од условот на задачата следува дека $AG \parallel EF$ и $AD \parallel BT$. Ако се искористи равенството на соодветните агли на трансферзалата на паралелни прави, тетивноста на двата четириаголници и колинеарноста на точките G, B, E, добиваме

$$\measuredangle TAD = \measuredangle ATB = \measuredangle AGB$$
$$= \measuredangle AGE = \measuredangle FEG$$
$$= \measuredangle HED = \measuredangle HAD.$$



Конечно, од равенството

$$\measuredangle TAD = \measuredangle HAD$$

следува дека полуправите AH и AT се совпаѓаат, што значи дека точките A, H и T се клинеарни.

69. Во координатната рамнина се дадени n еднакви квадрати, чии страни се паралелни со координатните оски. Ако за секои два од дадените квадрати постои точка, која е внатрешна за двата квадрати, докажи, дека сите n квадрати имаат заедничка точка.

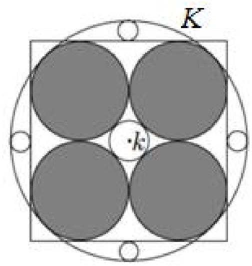
Решение. Нека претпоставиме дека сите квадрати се сместени во првиот квадрант и имаат должина на страна 1. Го наоѓаме квадратот P со долната страна најблиска до оската Ox и низ таа страна повлекуваме права p. Го наоѓаме квадратот Q со десната страна најдалеку од оската Oy и низ таа страна повлекуваме права q. Го наоѓаме квадратот R со левата страна најблиску до оската Oy и низ таа страна повлекуваме права r. Го наоѓаме квадратот S со горната страна најдалеку од оската Ox и низ таа страна повлекуваме права s. Ако повеќе квадрати имаат некое од горните четири својства, тогаш избираме еден од квадратите кои го имаат соодветното својство. Четирите прави p, q, r, s определуваат правоаголник T со центар во точката O, во кој се сместени сите дадени квадрати. Секоја од страните на правоаголникот T е со должина помала од 2, бидејќи во спротивно квадратите P и S или квадратите Q и R нема да имаат заедничка внатрешна точка. Останува да докажеме дека секој од дадените квадрати го содржи центарот O на правоаголникот T. Нека квадратот K не го содржи центарот O. Бидејќи должината на страната на K е 1, а секоја од страните на T е помала од 2, заклучуваме дека K не се содржи целосно во T, што е противречност.

70. Во координатна рамнина се дадени 28 правоаголници, секој од кои има страни паралелни со координатните оски. Секој од дадените правоаголници пресекува најмалку 21 од преостанатите 27 правоаглници. Докажи дека меѓу дадените правоаголници постои правоаголник кој ги пресекува преостанатите 27 правоаголници.

Решение. Со P да го означиме правоаголникот кој има горна страна најблиска до $x-$оската. Барем 21 правоаголник се сечат со правоаголникот P и најмногу 6 правоаголници не се сечат со P. Овие 6 правоаголници ги нарекуваме лоши под. Да го разгледаме правоаголникот D чија лева страна е најоддалечена од $y-$оската. Правоаголникот D сече најмалку 21 правоаголник и најмногу 6 правоаголници не се сечат со него. Овие 6 правоаголници ги нарекуваме лоши десно. Нека L е правоаголникот кој има десна страна најблиска до $y-$оската. Овој правоаголник сече најмалку 21 правоаголник и најмногу 6 правоаголници не се сечат со него. Овие 6 правоаголници да ги наречеме лоши леви. Нека T е правоаголникот кој има долна страна најоддалечена од $x-$оската. Овој правоаголник сече најмалку 21 правоаголник и најмногу 6 правоаголници не се сечат со него. Овие 6 правоаголници да ги наречеме лоши горни. Од $6+6+6+6=24<28$ следува дека постои правоаголник S кој не е лош во ниту една смисла, што значи дека го сече секој од избраните правоаголници P, D, L и T. Ќе докажеме дека правоаголникот S го сече секој од преостанатите 27 правоаголници. Земаме произволен правоаглник A и да претпоставиме дека правоаголниците A и S не се сечат. Според тоа, постои права s, на пример хоризонтална, која ги разделува двата правоаголници A и S. Очигледно правата s ги разделува правоаголниците S и T, бидејќи правоаголникот T има долна страна која е подалеку од x – оската од правоаголникот A. Последното значи дека правоаголник S е меѓу лошите горни правоаголници, што не е точно, бидејќи правоаголникот S е избран така та не е меѓу лошите правоаголници. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. КРУЖНИЦА И КРУГ

1. Даден е квадрат. Секој од четирите круга, обоени на цртежот, се допира до две страни на квадратот и до два обоени круга. Конструирани се кружници $k(O,r)$ и $K(O,R)$, кои соодветно се допираат надворешно и внатрешно до секој од обоените кругови, како и четири кружници со радиус t кои ја допираат кружницата K и една страна на квадратот во нејзината средина. Докажи дека $r=2t$.



Решение. Нека должинаа на страната на квадратот е еднаква на a. Од условот на задачата следува $r=R-\frac{a}{2}$ и $2t=R-\frac{a}{2}$, со што доказот е завршен.

2. Дадени се прави p и p', кои се сечат во точка A. Кружница k ја допира p во точката A и ја сече p' во точка C, а кружница k' ја допира p' во точката A и ја сече k во точка D. Кружниците k и k' по втор пат се сечат во точка B. Докажи, дека ако $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\sqrt{2}$, тогаш $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=2$.

Решение. Од $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, следуваат равенствата $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$, од каде добиваме $\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$. Ако ги помножиме последните две равенства, по средувањето добиваме

$$\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}=\overline{BD}\cdot\overline{AC}^2,\text{ т.е. }\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}=\sqrt{2}^2=2.$$

3. Дадени се кружници k_1 и k_2, кои немаат заеднички внатрешни точки. Правите A_1A_2, $A_1\in k_1$, $A_2\in k_2$ и B_1B_2, $B_1\in k_1$, $B_2\in k_2$ се соодветно заедничка надорешна и заедничка внатрешна тангента на кружниците. Докажи дека правите A_1B_1 и A_2B_2 се заемно нормални.

Решение. Нека K е пресечната точка на двете тангенти. Очигледно

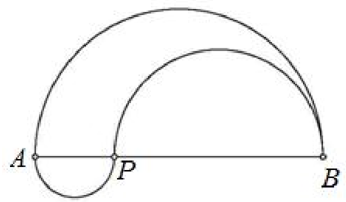
$\triangle A_1B_1K$ и $\triangle A_2B_2K$ се рамнокраки со основи A_1B_1 и A_2B_2, кои се нормални на симетралите на аглите при темето K. Сега тврдењето следува од фактот дека симетралите на аглите при темето K се заемно нормални.

4. Дадена е отсечка AB и на неа точка P. Над отсечките AB, AP и PB, како над дијаметри се конструирани полукружници. Пресметај го збирот на должините на трите полукружници.

Решение. Нека $\overline{AB}=d$, $\overline{AP}=d'$ и $\overline{PB}=d''$. Јасно, $d'+d''=d$, па затоа збирот на должините на добиените полукружници е

$$\frac{\text{®}d}{2}+\frac{\text{®}d'}{2}+\frac{\text{®}d''}{2}=\frac{\text{®}d}{2}+\frac{\text{®}(d'+d'')}{2}$$

$$=\frac{\text{®}d}{2}+\frac{\text{®}d}{2}=\text{®}d,$$



што значи дека тој е еднаков на должината на кружницата конструирана над отсечката AB како над дијаметар.

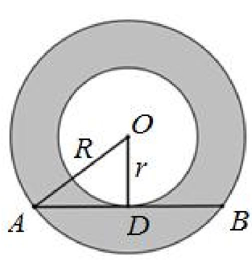
5. Нека се дадени две концентрични кружници и нека тетива на поголемата кружница што ја допира помалата кружница има должина $2\,cm$. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен!

Решение. Нека со точката O го означиме центарот на дадените кружници, со AB дадената тетива и со D ја означиме средината на AB.

Радиусите на кружниците се $R=\overline{OA}$ на поголемата и $r=\overline{OD}$ на помалата. Со примена на Питагоровата теорема за $\triangle ADO$ добиваме $R^2-r^2=\overline{AD}^2=1$.

Плоштината на прстенот е

$$P=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi=1\cdot\pi=\pi\,cm^2.$$



6. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$). Впишаната во триаголникот кружница k ја допира страната BC во точката E. Права низ A ја сече k во точките F и G. Правите EF и EG ја сечат AB соодветно во точките K и L. Докажи дека $\overline{KA}=\overline{BL}$.

Решение. Ќе го разгледаме случајот кога точката G е меѓу точките A

и F. Другиот случај се разгледува аналогно. Нека k ја допира AC во точката J (направи цртеж). Тогаш

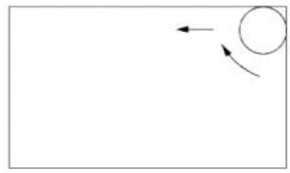
$$\measuredangle KAJ = \measuredangle BAC = \measuredangle EJC = \measuredangle EGC = 180^\circ - \measuredangle EFJ = 180^\circ - \measuredangle KFJ ,$$

што значи дека точките K, A, F и J лежат на една кружница. Затоа

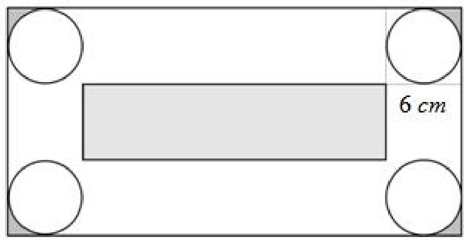
$$\measuredangle KJA = \measuredangle KFA = \measuredangle EFG = \measuredangle BEG = \measuredangle BEL .$$

Понатаму, $\overline{AJ} = \overline{BE}$ и $\measuredangle KAJ = \measuredangle LBE$, па од признакот АСА следува дека триагониците KAJ и LBE се складни, што значи $\overline{KA} = \overline{BL}$.

7. Круг со радиус $3\,cm$ од внатрешната страна на правоаголникот со должина $25\,cm$ и ширина $20\,cm$ се тркала по неговите страни (види цртеж). Одреди ја плоштината на оној дел од правоаголникот кој не се покрива при тркалањето на кругот.

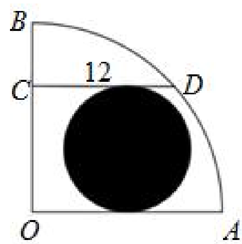


Решение. Јасно, при тркалањето на кругот нема да се покријат осенчените делови од аглите на правоаголникот. Понатаму, бидејќи дијаметарот на кругот е $6\,cm$, при неговото тркалање ќе се покријат сите останати точки од правоаголникот кои од неговите страни се на растојание помало или еднакво од $6\,cm$. Значи, при тркалањето на кругот нема да се покрие осенчениот правоаголник чии страни се еднакви на $25 - 2\cdot 6 = 13\,cm$ и $20 - 2\cdot 6 = 8\,cm$. Конечно, плоштината на непокриениот дел од правоаголникот ќе биде еднаква на



$$8\cdot 13 + 6^2 - ® \cdot 3^2 = 140 - 9® .$$

8. Пресметај ја плоштината на белиот дел од кружниот исечок,ако $\measuredangle AOB = 90^\circ$ и $CD \parallel OA$.



Решение. Радиусот на кружниот исечок да го означиме со R, а радиусот на црниот круг со r. Плоштината на кружниот исечок е еднаква на четвртина од плоштината на кругот со радиус R, т.е. е еднаква на $\frac{1}{4}® R^2$. Понатаму, плоштината на црниот круг е еднаква на $®r^2$, па затоа плоштината на белиот дел од дадената фигура е

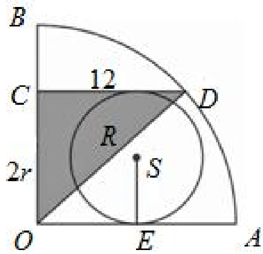
$$P = \frac{1}{4}® R^2 - ® r^2 .$$

Триаголникот OCD е правоаголен и важи

$$\overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CD}^2,$$

$$R^2 = (2r)^2 + 12^2,$$

$$R^2 = 4r^2 + 144.$$

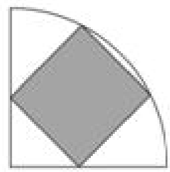


Сега, од $P = \frac{1}{4}® R^2 - ® r^2$ следува

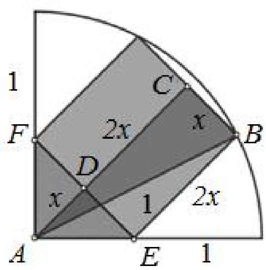
$$P = \frac{1}{4}® (4r^2 + 144) - ® r^2$$

$$= ® r^2 + 36® - ® r^2 = 36® .$$

9. На цртежот десно кружниот исечок има радиус 1. Определи ја плоштината на квадратот.



Решение. Да означиме како на долниот цртеж лево. Триаголникот AEF е рамнокрак правоаголен, а AD е висината повлечена кон неговата хипотенуза. Ако $\overline{AD} = x$, тогаш $\overline{FD} = \overline{DE} = x$, па затоа $\overline{EF} = 2\overline{DE} = 2x$. Значи должините на страните на квадратот се $2x$.

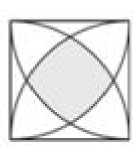


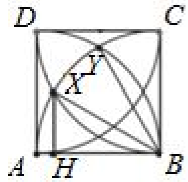
Според тоа, $\overline{CD} = 2x$, па затоа $\overline{AC} = 3x$. Понатаму, триаголникот ABC е правоаголен со катети $\overline{AC} = 3x$ и $\overline{BC} = x$, а неговата хипотенуза AB е еднаква на радиусот на кружниот исечок, т.е. $\overline{AD} = 1$. Сега, од Питагоровата теорема следува $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, односно $(3x)^2 + x^2 = 1^2$, од каде добиваме $x^2 = \frac{1}{10}$.

Конечно, плоштината на квадратот е

$$P = (2x)^2 = 4x^2 = \frac{2}{5} .$$

10. Во квадрат со должина на страна 1 се конструирани четири лаци со центри во темињата на квадратот, цртеж десно. Определи ја плоштината на осенчениот дел од квадратот.

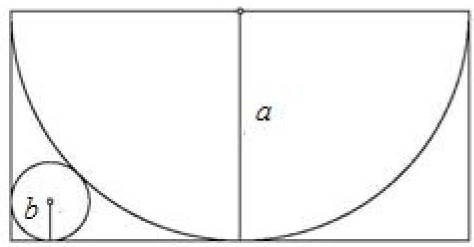




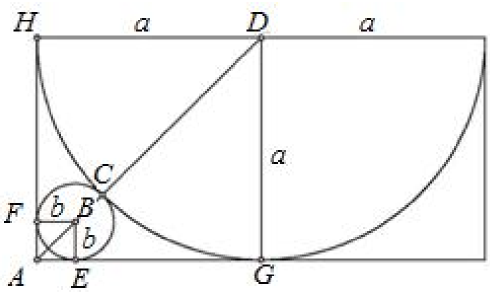
Решение. Ќе ги користиме ознаките на точките прикажани на цртежот десно. Лесно се докажува дека $\overline{XH}=\frac{1}{2}$ и $\measuredangle XBA=30^\circ$. Плоштината на отсечокот определен со лакот $\widehat{BX}$ е $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$, плоштината на исечокот XBY е еднаква на $\frac{\pi}{12}$, а плоштината на отсечокот определен од лакот $\widehat{BD}$ е $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. Конечно, за плоштината на осенчената фигура имаме:

$$2(\tfrac{\pi}{12}+2(\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{\sqrt{3}}{4}))-2(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2})=\tfrac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}.$$

11. На цртежот десно се дадени правоаголник во кој е впишан полукруг со радиус a и круг со радиус b. Определи го количникот $\frac{a}{b}$.



Решение. Дадениот цртеж да го дополниме како што е прикажано на долниот лев цртеж. Имаме квадрат $AGDH$ со страна со должина a и квадрат $AEBF$ со страна со должина b. Понатаму, за дијагоналата на квадратот $AGDH$ имаме $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$, од каде добиваме

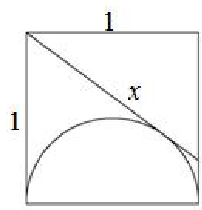


$$a\sqrt{2}=b\sqrt{2}+b+a,$$

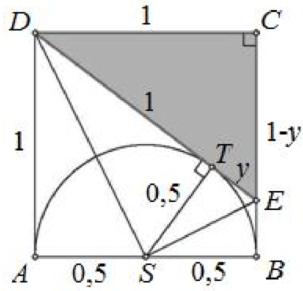
односно

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}.$$
$$=3+2\sqrt{2}.$$

12. Даден е квадрат со страна 1, во чија внатрешност над една страна е конструирана полукружница и од едно од спротивните темиња е повлечена тангента на полукружницата (цртеж десно). Определи ја должината x на делот од тангентата кој е внатре во квадратот.



Решение. Нека дадениот квадрат е $ABCD$, над страната AB е конструирана полукружница со центар S, а од темето D е повлечена тангента кон неа која полукружницата ја допира во точката T, а страната BC ја сече во точката E (цртеж лево).

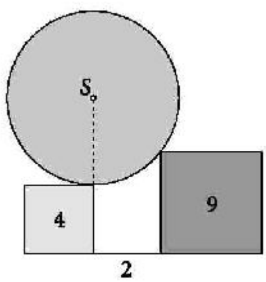


Страната DA е тангента на полукружницата, па затоа од еднаквоста на тангентните отсечки повлечени од точката D добиваме $\overline{DT} = \overline{DA} = 1$. Понатаму, повторно од еднаквоста на тангентните отсечки, но сега повлечени од точката E следува дека $\overline{ET} = \overline{BB} = y$, па затоа $\overline{CE} = 1 - y$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle ECD$ следува $\overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CD}^2$, од каде последователно добиваме

$$(1+y)^2 = 1^2 + (1-y)^2,$$
$$1 + 2y + y^2 = 1 + 1 - 2y + y^2,$$
$$4y = 1,$$
$$y = \tfrac{1}{4}.$$

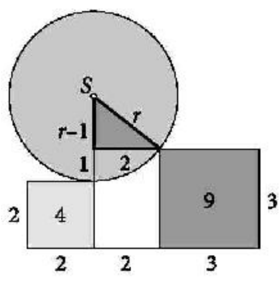
Конечно, $x = \overline{DE} = 1 + y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

13. Определи ја плоштината на кругот даден на цртежот десно, кој во темиња ги допира дадените квадрати, за кои се дадени нивните плоштини и растојанието меѓу нив.



Решение. Од дадените податоци следува дека должината на страната на малиот квадрат е $a = 2$, а должината на страната на големиот квадрат е $b = 3$.

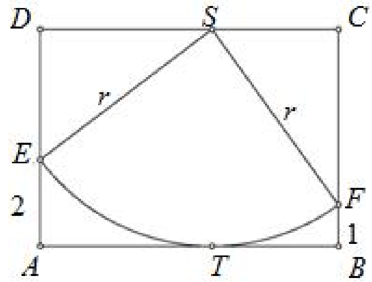
Ја продолжуваме горната страна на големиот квадрат и го поврзуваме неговото горно лево теме, како што е прикажано на цртежот десно. Притоа добивме правоаголен триаголник со страни $r, r-1$ и 2, па од Питагоровата теорема следува



$$r^2 = (r-1)^2 + 2^2,$$

од каде добиваме $r^2 = r^2 - 2r + 1 + 4$, т.е. $r = \frac{5}{2}$. Според тоа, плоштината на дадениот круг е $P = ® r^2 = \frac{25®}{4}$.

14. Во правоаголникот $ABCD$ е впишана четвртина од круг со центар S, како што е прикажано на цртежот десно. Определи го радиусот r на кругот.



Решение. Централниот агол на четвртината од кругот е прав агол, па затоа $\measuredangle ESF = 90^\circ$.

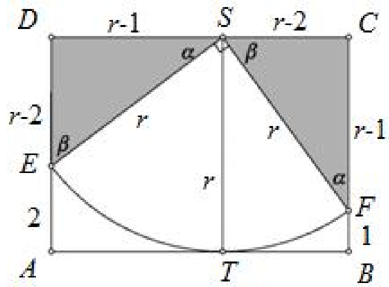
Страната AB го допира кружниот лак, па затоа $ST \perp AB$. Според тоа $AD \| ST \| BC$, па затоа важи $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{ST} = r$. Оттука следува дека

$$\overline{ED} = r - 2 \text{ и } \overline{CF} = r - 1.$$

Понатаму, лесно се докажува дека според признакот АСА триаголниците ESD и SFC се складни, па затоа

$$\overline{SC} = r - 2 \text{ и } \overline{SD} = r - 1.$$

Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle ESD$ следува



$$\overline{ED}^2 + \overline{DS}^2 = \overline{ES}^2,$$

$$(r-2)^2 + (r-1)^2 = r^2,$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0,$$

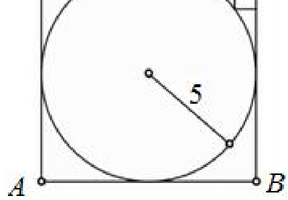
$$r^2 - 5r - r + 5 = 0$$

$$r(r-5) - (r-1) = 0,$$

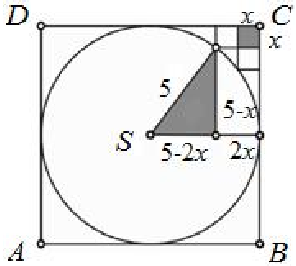
$$(r-5)(r-1) = 0.$$

Од последната равенка наоѓаме $r = 5$ или $r = 1$ и како $r > 1$ (Зошто?), добиваме $r = 5$.

15. Во квадрат $ABCD$ е впишана кружница со радиус 5. Меѓу квадратот и кружницата се впишани три складни квадрати, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на секој од овие квадрати.



Решение. Со x да ја означиме должината на страните на малите квадрати. Цртежот ќе го дополниме со правоаголен триаголник чии крајни точки на хипотенузата се центарот на кружницата и едно теме на мал квадрат кое припаѓа на кружницата, а катетите се паралелни на страните на квадратот (цртеж лево) . Со примена на Питагоровата теорема на доцртаниот триаголник, добиваме



$$(5-2x)^2+(5-x)^2=5^2,$$
$$25-20x+x^2+25-10x+x^2=25,$$
$$x^2-6x+5=0,$$
$$x^2-5x-x+5=0,$$
$$x(x-5)-(x-5)=0,$$
$$(x-5)(x-1)=0,$$
$$x=5 \;\vee\; x=1.$$

Јасно, $x=5$ не е решение на задачата (Зошто?), па затоа $x=1$ и плоштината на секој од малите квадрати е $P=x^2=1$.

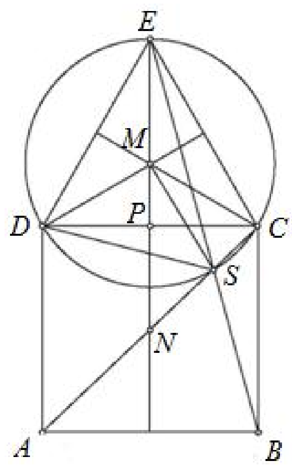
16. Над страната CD во надворешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран $\triangle CDE$. Нека M е центарот на опишаната кружница околу $\triangle CDE$, а точката S е пресекот на правите BE и AC. Докажи дека $\triangle CMS$ е рамнокрак.

Решение. *Прв начин*. Триаголниците BSC и DSC се осносиметрични во однос на правата AC, па затоа важи

$$\measuredangle SBC=\measuredangle SDC\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од $\overline{EC}=\overline{BC}$ следува дека $\triangle EBC$ е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle SBC=\measuredangle SEC\,. \qquad (2)$$



Сега, од (1) и (2) следува $\measuredangle SEC=\measuredangle SDC$, што значи дека точките S,C,E,D лежат на една кружница, односно дака точката S припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle CDE$. Оттука следува дека $\overline{MC}=\overline{MS}$, т.е. $\triangle CMS$ е рамнокрак.

Втор начин. Имаме $\measuredangle DCB=90^\circ$, $\measuredangle ACB=\measuredangle BAS=45^\circ$ и $\measuredangle ECD=60^\circ$. Според тоа, $\measuredangle ECB=90^\circ+60^\circ=150^\circ$ и како $\triangle EBC$ е рамнокрак, важи

$$\measuredangle CBE = \measuredangle BEC = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle CSE$ е надворешен за $\triangle BSC$, па затоа

$$\measuredangle CSE = \measuredangle CBS + \measuredangle SCB = \measuredangle CBE + \measuredangle SCB = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ = \measuredangle CDE .$$

Од последното равенство следува дека точките S, C, E, D лежат на една кружница, односно дека точката S припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle CDE$. Оттука следува дека $\overline{MC} = \overline{MS}$, т.е. $\triangle CMS$ е рамнокрак.

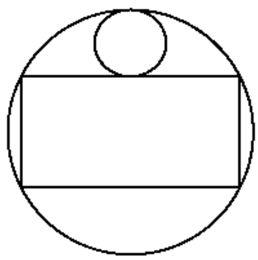
Трет начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{CE} = \overline{DE} = 1$. Сега последователно добиваме

$$\overline{EP} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \overline{PN} = \tfrac{1}{2}, \overline{ME} = \overline{MC} = \tfrac{2}{3}\overline{EP} = \tfrac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\overline{NM} = \overline{MP} + \overline{PN} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3+\sqrt{3}}{6} \text{ и } \overline{NE} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1+\sqrt{3}}{2} .$$

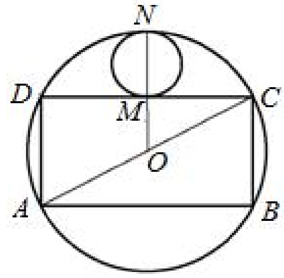
Бидејќи $NE \parallel BC$, $S \in AC, S \in BE$, од Талесовата теорема и од претходните равенства следува $\frac{\overline{NS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{CB}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ME}}$, па затоа $MS \parallel EC$. Оттука, од Талесовата теорема следува $\frac{\overline{MS}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{NE}}$ и затоа $\overline{MS} = \frac{\overline{NM}}{\overline{NE}} \cdot \overline{EC} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \overline{MC}$, што значи дека $\triangle CMS$ е рамнокрак.

17. Во една кружница е впишан правоаголник, а во еден од кружните отсечоци е впишана најголема можна кружница, која допира една страна на правоаголникот и ја допира од внатре поголемата кружница, како на цртежот. Радиусот на помалата кружница е 3 единици, а големата кружница има радиус $r > 3$. Познато е дека правоаголникот има плоштина $P = 72\sqrt{2}$ квадратни единици. Одреди го радиусот r на поголемата кружница.



Решение. Нека страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ и $\overline{BC} = \overline{AD} = b$. Има-ме $r = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = \frac{b}{2} + 6$, од каде

$$b = 2(r-6) . \qquad (1)$$



Триаголникот ABC е правоаголен, па од Питагоровата теорема имаме

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 . \qquad (2)$$

Сега, равенството (1) го заменуваме во равенството (2) и добиваме

$$a^2 = 4r^2 - 4(r-6)^2 = 48(r-3) .$$

За поедноставно, ќе го пресметаме квадратот на плоштината на правоаголникот:

$$P^2 = a^2 b^2 = 48(r-3)\cdot 4(r-6)^2 = 192(r-3)(r-6)^2 ,$$

па затоа

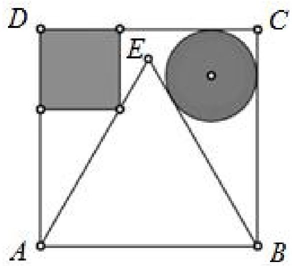
$$192(r-3)(r-6)^2 = (72\sqrt{2})^2 .$$

По средувањето на изразот добиваме

$$(r-3)(r-6)^2 = 54 .$$

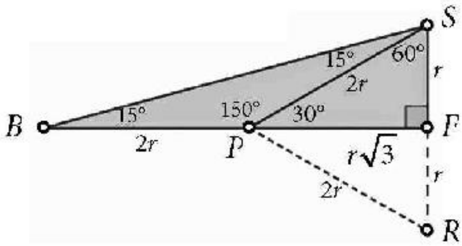
Ако воведеме смена $x = r-3$ равенката преминува во облик $x(x-3)^2 = 54$, односно $x^3 - 6x^2 + 9x - 54 = 0$. Со групирање, левата страна ја разложуваме на множители $x^2(x-6) + 9(x-6) = 0$, од каде $(x-6)(x^2+9) = 0$. Бидејќи $x^2 + 9 > 0$, следи дека $x - 6 = 0$, односно $x = 6$, па $r - 3 = 6$, од каде $r = 9$ единици.

18. Над страната AB во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABE. Меѓу квадратот и триаголникот се впишани помал квадрат кај кој едно теме е на страната на триаголникот и круг кој допира две страни на квадратот и една страна на триаголникот (цртеж десно). Која фигура има поголема плоштина, малиот квадрат или кругот?



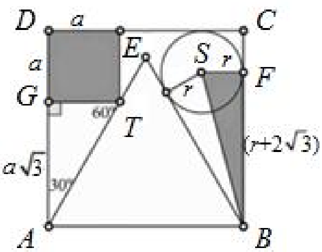
Решение. Нека r е радиусот на впишаната кружница која страната BC ја допира во точката F. Имаме,

$$\measuredangle CBE = 90^\circ - \measuredangle EBA$$
$$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



Центарот на кружницата S ле-жи на симетралата на овој агол бидејќи кружницата ги допира двата негови крака, па затоа $\measuredangle FBS = 15^\circ$. Вториот остар агол на правоаголниот триа-голник SBF е $\measuredangle BSF = 75^\circ$ (цр-теж десно).

Нека R е симетричната точка на центарот S во однос на точката F и $P \in BF$ е таква што $\measuredangle SPF = 60^\circ$. Тогаш аглите на $\triangle PRS$ се еднакви на 60°, што значи дека тој е рамностран со страна $2r$, а неговата висина е $\overline{PF} = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Понатаму, $\measuredangle BSP = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$, па затоа $\triangle SBP$ е рамнокрак со основа SB и краци $\overline{BP} = \overline{PS} = 2r$. Оттука добиваме $\overline{BF} = \overline{BP} + \overline{PF} = (2+\sqrt{3})r$.



Од претходните разгледувања следува дека должината на страната на почетниот квадрат е

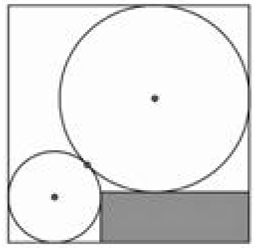
$$\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = (3+\sqrt{3})r .$$

Од друга страна, ако со a ја означиме должината на страната на малиот квадрат, од триаголникот ATG, кој е половина од рамностран триаголник, добиваме $\overline{AG} = a\sqrt{3}$, што значи дека $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{AG} + \overline{GD} = (1+\sqrt{3})a$. Според тоа, $(3+\sqrt{3})r = (1+\sqrt{3})a$, од каде добиваме

$$a = \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} r = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{1+\sqrt{3}} r = \sqrt{3} r .$$

Конечно, плоштината на малиот квадрат е $P = 3r^2$, а плоштината на кругот е $P' = ® r^2$, па како $3 < ®$, заклучуване дека $P < P'$, т.е. плоштината на кругот е поголема од плоштината на малиот квадрат.

19. Определи ја плоштината на засенчениот правоаголник на цретежот десно, ако плоштината на помалиот круг е еднаква на $2®$, плоштината на поголемиот круг е еднаква на $8®$, а круговите ги допираат страните на квадратот и страните на правоаголникот како што е прикажано на цртежот.



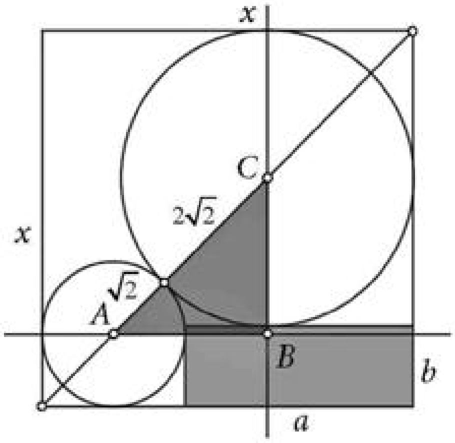
Решение. Радиусот на малиот круг да го означиме со r, а на големиот круг со R. Од условот на задачата следува

$$® r^2 = 2® \text{ и } ® R^2 = 8® ,$$

од каде добиваме

$$r = \sqrt{2} \text{ и } R = 2\sqrt{2} .$$

Со A и C да ги означиме центрите на круговите и да повлечеме заемно нормални прави низ центрите кои се сечат во точката B (цртеж десно). Триаголникот ABC рамнокрак правоаголен со хипотенуза



$$\overline{AC} = r + R = 3\sqrt{2} ,$$

па затоа

$$\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2} = \overline{BC}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} ,$$

т.е.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 3 .$$

Сега, должините на страните на правоаголникот да ги означиме со a и b, а должината на страната на квадратот со x. Тогаш

$$x = r + \overline{AB} + R = \sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3 ,$$

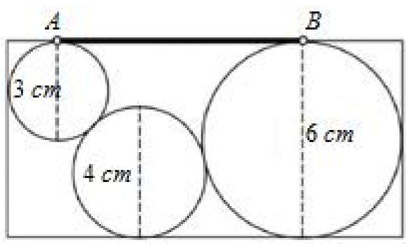
$$a = x - 2r = 3\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} ,$$

$$b = x - 2R = 3\sqrt{2} + 3 - 4\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} .$$

Според тоа, за плоштината на правоаголникот добиваме

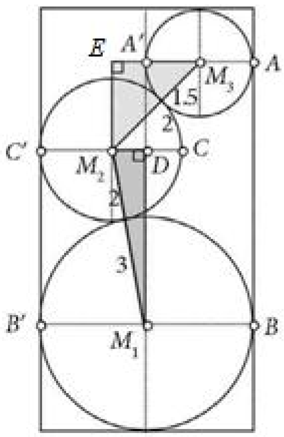
$$P = ab = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7 .$$

20. Користејќи ги податоците на цртежот десно, определи ја должината на отсечката AB.



Решение. Дадениот цртеж да го дополниме како што е прикажано на долниот лев цртеж. Јасно, триаголникот M_1M_2D е правоаголен и притоа важи:

$$\overline{M_2D} = \overline{M_1B'} - \overline{M_2C'} = 1\,cm .$$



Понатаму, $\overline{M_1M_2}=2+3=5\,cm$, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{M_1D}=\sqrt{\overline{M_1M_2}^2-\overline{M_2D}^2}=2\sqrt{6}\ cm.$$

Сега, триаголникот M_2M_3E е правоаголен и притоа важи

$$\overline{M_3E}=\overline{M_2D}+\overline{M_3A'}=2,5\,cm$$

и $\overline{M_2M_3}=2+1,5=3,5\,cm$, па повторно од Питагоровата теорема следува

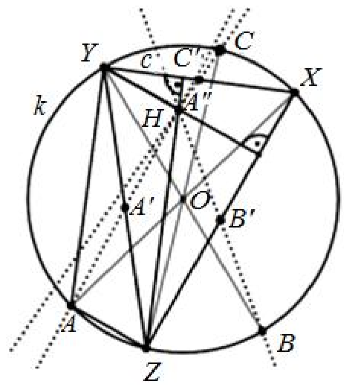
$$\overline{M_2E}=\sqrt{\overline{M_2M_3}^2-\overline{M_3E}^2}=\sqrt{6}\ cm.$$

Конечно,

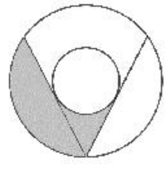
$$\overline{AB}=\overline{M_1D}+\overline{M_2E}=2\sqrt{6}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}\ cm.$$

21. На кружница k се избрани три точки A,B,C и нека X,Y,Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки во k. Нека A',B',C' се средините на тетивите YZ,ZX,XY соодветно. Докажи дека правите AA',BB',CC' се сечат во една точка.

Решение. Со A'' ја означуваме сликата на точката A при централна симетрија во однос на A'. Тогаш $YAZA''$ е четириаголник чии дијагонали се половат во пресечната точка A'; па значи $YAZA''$ е паралелограм. Според тоа, $A''Y\,||\,AZ$ и $A''Z\,||\,AY$. Бидејќи $\measuredangle XYA=\measuredangle XZA=90°$, следува дека $A''Y\perp AZ$ и $A''Z\perp XY$. Значи A'' се совпаѓа со ортоцентарот H на триаголникот XYZ. Слично, правите BB' и CC' минуваат низ точката H.

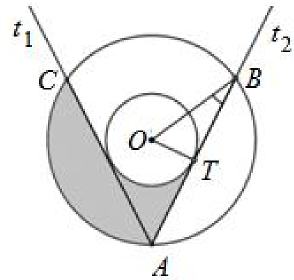


22. Радиусите на концентричните кружници кои формираат кружен прстен прикажан на цртежот десно имаат должини r и $2r$. Одреди го односот на плоштините на осенчениот и неосенченит дел од кружниот прстен.



Решение. Нека A,B и C се заеднички точки на поголемата кружница и тангентите t_1 и t_2 на помалата кружница и нека T е точка во која t_1 ја допира помалата кружница. Бидејќи $\overline{OB} = 2\overline{OT}$, важи $\measuredangle OBT = 30°$, па според тоа $\measuredangle BAC = 60°$. Имено,

$$\measuredangle BAC = \measuredangle OAB + \measuredangle OAC = 2\measuredangle OAB$$
$$= 2\measuredangle OAT = 2\measuredangle OBT.$$

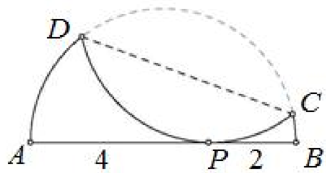


Да забележиме дека при првото равенство е искористено дека правата OA е оска на симетрија на целата геометриска конфигурација. Од истата симетрија имаме дека $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Значи, триаголникот ABC е рамностран, па отсечоците на поголемиот круг се еднакви. Со оглед на тоа што T е средна точка на отсечката AB, заклучуваме дека помалата кружница е впишана во траголникот ABC.

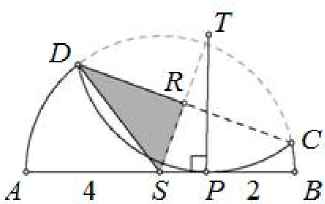
Следствено, обоениот дел на кружниот прстен е третина од целиот прстен, па плоштиите на обоениот и необоениот дел на овој прстен се однесуваат како 1:2.

23. Определи ја должината на тетивата CD по која е превиткан полукругот како што е прикажано на цртежот десно.



Решение. Од условот на задачата имаме $\overline{AP} = 4$, $\overline{PB} = 2$, па затоа $\overline{AB} = 6$.

Центарот на кружницата да го означиме со S и во точката P да повлечеме нормала на дијаметарот AB, која со симетралата на тетивата CD се сече во точката T (цртеж десно).



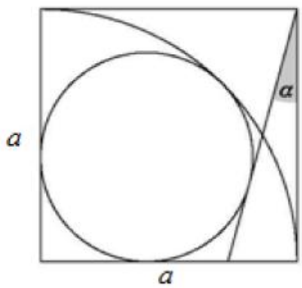
Сега, центарот на кружницата која го содржи лакот $\overset{\frown}{CPD}$ лежи на нормалата на AB во точката P и на симетралата на CD, што значи дека тоа е точката T. Тоа значи, дека $\overline{TP} = \overline{SA} = \frac{\overline{AB}}{2} = 3$ и како $\overline{PS} = \overline{SB} - \overline{SP} = 1$, од Питагоровата теорема, применета на $\triangle SPT$, добиваме

$$\overline{ST} = \sqrt{\overline{SP}^2 + \overline{PT}^2} = \sqrt{10}.$$

Понатаму, бидејќи кружниот лак $\overset{\frown}{CPD}$ е добиен со превиткување на кружницата по тетивата CD, тој е симетричен во однос на тетивата, па затоа неговата средина T е симетрична на S во однос на тетивата CD. Оттука следува дека $\overline{SR} = \frac{\overline{ST}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Значи,

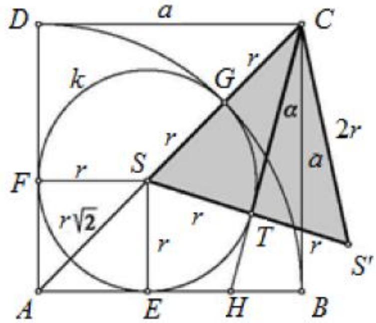
$$\overline{CD} = 2\overline{DR} = 2\sqrt{\overline{SD}^2 - \overline{SR}^2} = 2\sqrt{3^2 - (\tfrac{\sqrt{10}}{2})^2} = \sqrt{26}\ .$$

24. На цртежот десно е даден квадрат со должина на страна a, во кој е впишана четвртина кружница, а потоа во неа е впишана кружница. На кружницата од спротивното теме е повлечена тангента која со страната на квадратот зафаќа агол $\sim$.



Определи го аголот $\sim$.

Решение. Квадратот да го означиме со $ABCD$, впишаната кружница со $k(S,r)$. Јасно, центарот S на k припаѓа на дијагоналата AC на квадратот и нека пресечната точка на дијагоналата AC и кружницата k ја означиме со G. Поната-му, со T да ја означиме допирната точка на тангентата и кружницата и нека тангентата CT ја сече страната на квадратот AB во точката H, а E и F се допирните точки на k соодветно со страните AB и AD.



Четириаголникот $AESF$ е квадрат со страна r, па затоа $\overline{AS} = r\sqrt{2}$. Понатаму, $\overline{AG} = \overline{AS} + \overline{SG} = r(\sqrt{2}+1)$ и како $\overline{AG} = a$, добиваме дека важи $a = r(\sqrt{2}+1)$. Според тоа,

$$\overline{AC} = a\sqrt{2} = r(\sqrt{2}+1)\sqrt{2} = 2r + r\sqrt{2}\ ,$$

па затоа

$$\overline{GC} = \overline{AC} - \overline{AG} = 2r + r\sqrt{2} - (r + r\sqrt{2}) = r\ .$$

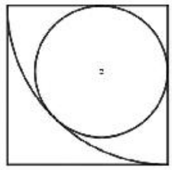
Нека S' е симетричната точка на S во однос на T. Имаме, $\overline{SC} = \overline{S'C} = 2r = \overline{SS'}$, што значи дека триаголникот $SS'C$ е рамностран,т.е. $\measuredangle SCS' = 60^\circ$. Но, $\measuredangle ACB = 45^\circ$, па затоа

$$\measuredangle BCS' = \measuredangle SCS' - \measuredangle ACB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ ,$$

од каде добиваме

$$\sim\ = \measuredangle TCB = \measuredangle TCS' - \measuredangle BCS' = \frac{1}{2}\measuredangle SCS' - \measuredangle BCS' = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ .$$

25. Во квадрат со страна $2\,cm$ е впишан четвртина од круг, а потоа е впишан круг како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на овој круг.



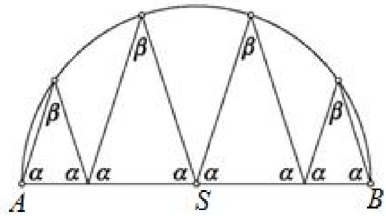
Решение. Страната на квадратот е $a = 2\,cm$ и нека радиусот на впишаниот круг е r. Вд претходната задача докажавме дека $a = r(\sqrt{2}+1)$, од каде добиваме

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}-1)\ cm .$$

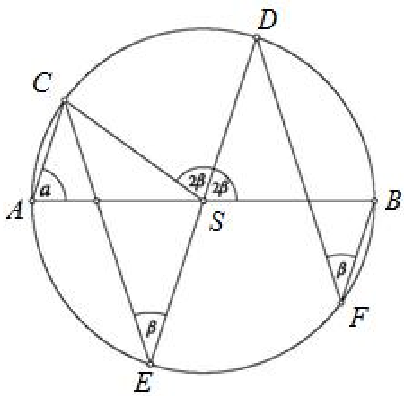
Конечно, плоштината на впишаниот круг е

$$P = ® r^2 = ® (\sqrt{2}-1)^2 = (3-2\sqrt{2})®\ cm^2 .$$

26. Над отсечката AB како над дијаметар е нацртана полукружница, во која се впишани четири рамнокраки триаголници чии основи лежат на дијаметарот AB и агли при основата еднакви на $\sim$ (цртеж десно). Определи го аголот $\sim$.



Решение. Темето на триаголникот на полукружницата кое е најблиску до точката A да го означиме со C, а темето на третиот триаголник да го означиме со D. Потоа полукружницата симетрично да ја пресликаме во однос на дијаметарот AB, при што врвовите на вториот и четвртиот триаголник, гледано од лево кон десно, се пресликуваат во точките E и F. Така го добиваме цртежот десно. Сега, ако се искористи дека централниот агол над тетивата е два пати поголем од соодветниот периферен агол добиваме дека



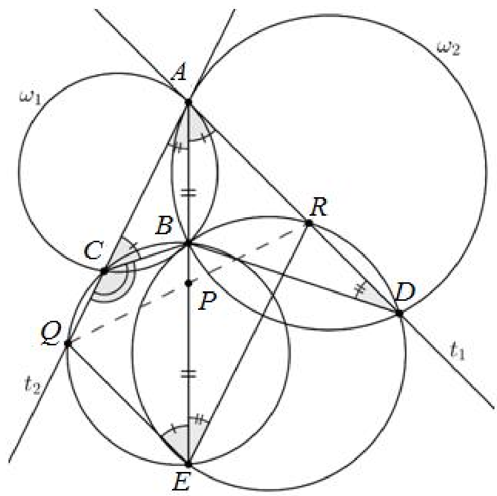
$$\measuredangle BSC = 2\measuredangle BAC = 2\sim ,\ \ \measuredangle DSC = 2\measuredangle DEC = 2\quad ,\ \ \measuredangle DSB = 2\measuredangle DFB = 2\quad ,$$

па затоа

$$2\sim\ = \measuredangle BSC = \measuredangle DSC + \measuredangle BSD = 2\ \ \ + 2\ \ \ = 4\ \ \ ,\ \text{т.е.}\ \sim\ = 2\ \ \ .$$

Според тоа, $2\sim + \ \ \ = 180^\circ$, па затоа $4\ \ \ +\ \ \ = 180^\circ$,т.е. $\ \ \ = 36^\circ$ и оттука $\sim\ = 72^\circ$.

27. Кружниците μ_1 и μ_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на μ_1 и μ_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на μ_1 и t_2 е C, а вториот пресек на μ_2 и t_1 е D. На полуправата AB, по B, дадени се точки P и E, така што $\overline{AE} = 2\cdot\overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P, Q и R се колинеарни.



Решение. Од својството за агол меѓу тангентата t_1 и тетивата AB во μ_1 имаме

$$\measuredangle BCA = \measuredangle BAD .$$

Од тетивниот четириаголник $BCQE$ имаме

$$\measuredangle QEB + \measuredangle QCB = 180^\circ .$$

Значи,

$$\begin{aligned}\measuredangle QEA &= \measuredangle QEB\\ &= 180^\circ - \measuredangle QCB\\ &= \measuredangle BCA = \measuredangle BAD\\ &= \measuredangle EAR,\end{aligned}$$

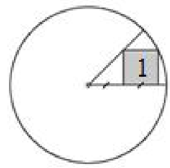
па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $QE \parallel AR$. Од својството за агол меѓу тангентата t_2 и тетивата AB во μ_2 имаме $\measuredangle ADB = \measuredangle BAC$. Од тетивниот четириаголник $BRDE$ имаме $\measuredangle REB = \measuredangle RDB$. Значи,

$$\measuredangle REA = \measuredangle REB = \measuredangle RDB = \measuredangle ADB = \measuredangle BAC = \measuredangle EAQ ,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $RE \parallel AQ$.

Значи, четириаголникот $AQER$ е паралелограм. Од $\overline{AE} = 2\cdot\overline{AP}$, добиваме $\overline{AE} = \overline{PE}$, т.е. P е средина на дијагоналата AE во паралелограмот $AQER$. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат во пресечната точка, добиваме дека P мора да е средина и на другата дијагонала QR, т.е. $P \in QR$. Значи, точките P, Q и R се колинеарни.

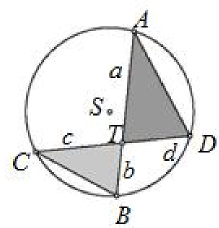
28. Според податоците дадени на цртежот десно пресметај ја плоштината на кругот, ако плоштината на квадратот е еднаква на 1.



Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

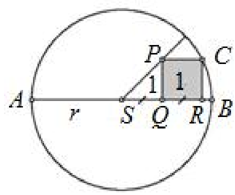
Лема. Нека AB и CD се тетиви на кружницата k, кои се сечат во точката T. Ако точката T ја дели тетивата AB на делови со должини a и b, а тетивата CD на делови со должини c и d, тогаш $ab = cd$.

Доказ. Да ги разгледаме триаголниците ATD и CTB. Имаме, $\measuredangle DTA = \measuredangle BTC$, како накрсни агли и $\measuredangle TAD = \measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \measuredangle TCB$, како агли над иста тетива. Сега, од признакот за сличност на триаголници АА, следува дека $\triangle ATD \sim \triangle CTB$. Според тоа, $\frac{\overline{AT}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{BT}}$, т.е. $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$, па затоа $ab = cd$. ■

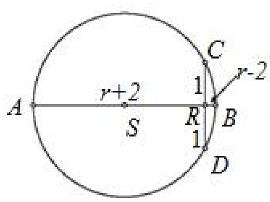


Да се вратиме на задачата.

Да ги воведеме ознаките како што е прикажано на цртежот десно.



Тогаш, од условот на задачата следува дека $\overline{SQ} = \overline{QR} = \overline{RC} = 1$, $\overline{AR} = r + 2$ и $\overline{BR} = r - 2$.



Нека D е симетричната точка на точката C во однос на дијаметарот AB (види цртеж лево). Тогаш $\overline{CR} = \overline{DR} = 1$, па од лемата следува $\overline{AR} \cdot \overline{RB} = \overline{CR} \cdot \overline{RD}$, од каде последователно добиваме

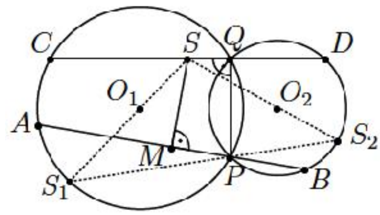
$$(r+2)(r-2) = 1 \cdot 1,$$
$$r^2 - 4 = 1,$$
$$r^2 = 5.$$

Конечно, плоштината на кругот е $P = ® r^2 = 5®$.

29. Две кружници се сечат во точки P и Q. На кружниците да се опре-

делат точки A и B, такви што точката P лежи на отсечката AB и производот $\overline{AP}\cdot\overline{PB}$ ќе има најголема можна вредност.

Решение. Нека двете кружници се k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 соодветно и нека $A\in k_1$ и $B\in k_2$. Низ точката Q повлекуваме права нормална на PQ, која по втор пат ги сече k_1 и k_2 соодветно во точките C и D. Отсечките CP и DP се дијаметри на k_1 и k_2, па затоа $\measuredangle CAP=\measuredangle DBP=90^\circ$, што значи дека четириаголникот $ABDC$ е правоаголен трапез и симетралата на AB минува низ средината S на CD, која не зависи од изборот на точките A и B. Ако M е средина на AB, тогаш



$$\begin{aligned}\overline{AP}\cdot\overline{PB}&=(\overline{AM}+\overline{MP})(\overline{BM}-\overline{MP})\\&=(\overline{BM}+\overline{MP})(\overline{BM}-\overline{MP})\\&=\overline{BM}^2-\overline{PM}^2\\&=(\overline{BS}^2-\overline{SM}^2)-(\overline{PS}^2-\overline{SM}^2)\\&=\overline{BS}^2-\overline{PS}^2,\end{aligned}$$

па затоа производот $\overline{AP}\cdot\overline{PB}$ ќе има најголема можна вредност кога $\overline{BS}$ има најголема можна вредност. Со S_1 и S_2 да ги означиме пресечните точки на полуправите SO_1 и SO_2 со кружниците k_1 и k_2, соодветно (види цртеж). Имаме,

$$\overline{BS}\le\overline{BO_2}+\overline{O_2S}=\overline{S_2O_2}+\overline{O_2S}=\overline{S_2S},$$

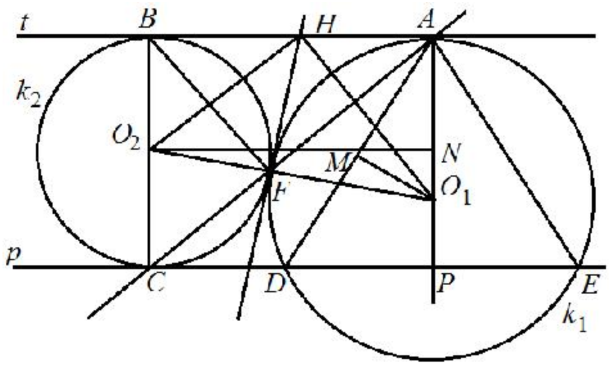
па затоа најголемата можна вредност за $\overline{AP}\cdot\overline{PB}$ се достигнува кога $B\equiv S_2$ и во овој случај $A\equiv S_1$ (Зошто?).

30. Кружниците k_1 и k_2 надворешно се допираат во точката F. Права t ги допира кружниците k_1 и k_2 во точките A и B, соодветно. Права p паралелна на правата t ја допира кружницата k_2 во точката C и ја сече кружницата k_1 во точките D и E.

а) Докажи дека точките A, F и C лежат на иста права.

б) Докажи дека точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BDE.

Решение. Прво, да забележиме дека правата p ја сече кружницата k_1 во две точки ако и само ако радиусот на кружницата k_1 е поголем од радиусот на кружницата k_2. Нека O_1 и O_2 се центрите, а r_1 и r_2 се радиусите на кружниците k_1 и k_2, соодветно.



Нека заедничката тангента на двете кружници низ точката F ја сече правата AB во точката H. Имаме $\measuredangle O_1AH = 90^\circ = \measuredangle O_1FH$, $\overline{AO_1} = \overline{FO_1}$ и $\overline{O_1H} = \overline{O_1H}$, што значи дека триаголниците AHO_1 и FHO_1 се складни. Затоа $\overline{AH} = \overline{FH}$. На ист начин се докажува дека $\overline{BH} = \overline{FH}$. Сега, од $\overline{AH} = \overline{FH} = \overline{BH}$ следува

$$\begin{aligned}180^\circ &= \measuredangle BAF + \measuredangle ABF + \measuredangle AFB \\ &= \measuredangle BAF + \measuredangle ABF + \measuredangle AFH + \measuredangle BFH \\ &= \measuredangle BFH + \measuredangle AFH + \measuredangle AFH + \measuredangle BFH, \\ &= 2(\measuredangle AFH + \measuredangle BFH) \\ &= 2\measuredangle AFB,\end{aligned}$$

па заклучуваме дека $\measuredangle AFB = 90^\circ$. Понатаму, t и p се паралелни тангенти, па како правите O_2B и O_2C се нормални на нив следува дека отсечката BC е дијаметар на k_2. Сега, од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle CFB = 90^\circ$. Според тоа,

$$\measuredangle AFC = \measuredangle AFB + \measuredangle BFC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

што значи дека A, F и C лежат на една права, со што е докажано тврдењето а).

Симетралата на отсечката DE минува низ точката O_1 и е нормална на p, па е нормална и на правата t и минува низ точката A. Затоа $\overline{AD} = \overline{AE}$. Треба уште да докажеме дека $\overline{AD} = \overline{AB}$. Нека N е подножјето на нормалата повлечена од точката O_2 на правата AO_1. Од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник O_1O_2N следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{O_2N}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1N}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 .$$

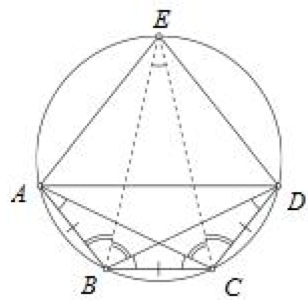
Нека P е средина на отсечката DE, а M е средина на отсечката AD. Од сличноста на правоаголните триаголници APD и AMO_1 (заеднички агол во темето A) следува

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} ,$$

од каде, бидејќи $\overline{AO_1} = r_1, \overline{AP} = \overline{BC} = 2r_2$ и $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ дпбиваме дека $\overline{AD}^2 = 4r_1r_2$. Според тоа, $\overline{AD} = \overline{AB}$, со што е докажано и тврдењето б).

31. На кружница се дадени точки A, B, C, D такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Нека симетралите на $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ABD$ се сечат во точката E. Ако правите AE и CD се паралелни, определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Имаме, $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC = x$, па затоа рамнокраките триаголници ABC и BCD се складни. Понатаму, од складноста следува $\overline{AC} = \overline{BD}$, па затоа тетивниот четириаголник $ABCD$ е рамнокрак трапез.



Сега, имаме $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 180^\circ - 2x$ и затоа $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 180^\circ - 3x$, од каде следува $\measuredangle EBC = \measuredangle ECB = 90^\circ - \frac{x}{2}$ и затоа $\measuredangle BEC = x$. Според тоа, точката E припаѓа на кружницата на која се точките A, B, C и D.

Меѓутоа, важи $\measuredangle ADC = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC = \measuredangle ACB + \measuredangle BDC = x + x = 2x$ и $\measuredangle ECD = \frac{1}{2}\measuredangle ACD = 90^\circ - \frac{3}{2}x$. Бидејќи $AE \,||\, CD$, тетивниот четириаголник $ACDE$ исто така е рамнокрак трапез и имаме $\measuredangle ADC = \measuredangle ECD$, од каде добиваме $7x = 180^\circ$. Конечно, $\measuredangle ABC = \frac{5}{7}\cdot 180^\circ$.

4. НЕРАВЕНСТВА

1. На страните AC и BC на триаголникот ABC соодветно се избрани точки B' и A'. Ако AA' и BB' се сечат во точката X, докажи, дека:

   а) $P_{XA'B'} < P_{ABX}$,

   б) $P_{XA'B'} < P_{CB'A'}$.

   Решение. а) Бидејќи висината повлечена од B кон AC е подолга од висината повлечена од A' кон AC, добиваме дека $P_{ABB'} > P_{AA'B'}$. Ако од двете страни на ова неравенсвто одземеме $P_{AXB'}$ го добиваме саканото неравенство.

   б) Повлекуваме права низ B' паралелна со XA' и права низ A' паралелна со XB'. Овие две прави се сечат во точка X' од внатрешноста на $\triangle B'A'C$. Бидејќи $\triangle B'A'X \cong \triangle A'B'X'$ и $P_{B'A'X'} < P_{B'A'C}$, следува дека $P_{XA'B'} < P_{CB'A'}$.

2. Даден е правоаголен $\triangle ABC, (\measuredangle ACB = 90^\circ)$. Точките P и Q на страната BC и точките R и S на страната CA се такви што $\measuredangle BAP = \measuredangle PAQ = \measuredangle QAC$ и $\measuredangle ABS = \measuredangle SBR = \measuredangle RBC$. Ако T е пресечната точка на AP и BS, докажи дека $120^\circ < \measuredangle RTB < 150^\circ$.

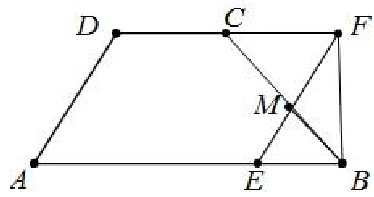
   Решение. Нека $\measuredangle BAP = \sim$, $\measuredangle ABS =$ и $AQ \cap BR = H$. Тогаш $\sim + \quad = 30^\circ$ и T е центар на впишаната кружница за $\triangle ABH$. Тогаш $\measuredangle AHB = 180^\circ - 2(\sim + \quad) = 120^\circ$ и HT е симетрала на $\measuredangle AHB$. Според тоа, $\measuredangle RHT = \measuredangle AHT = \measuredangle THB = \measuredangle BHQ = 60^\circ$, па затоа $\triangle ARH \cong \triangle ATH$, $\triangle BQH \cong \triangle BTH$ и $\measuredangle RTH = 30^\circ$. Добиваме

   $$\measuredangle RTB = \measuredangle RTH + \measuredangle HTB = 30^\circ + \measuredangle HBQ = 30^\circ + 90^\circ + \sim = 120^\circ + \sim .$$

   Но, $0 < \sim < 30^\circ$, па затоа $120^\circ < \measuredangle RTB < 150^\circ$.

3. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD, $AB > CD$. На страната BC е одбрана точка M, така што $BM < MC$. Докажи дека

   $$P_{\triangle AMD} > P_{\triangle AMB} + P_{\triangle CMD}.$$



Решение. Низ точката M ќе повлечеме права паралелна со кракот AD и ќе ги означиме со E и F пресечните точки со AB и CD, соодветно. За трапезот $CFBE$, важи дека

$$P = P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CME},$$

бидејќи

$$P_{\triangle FMB} = P_{\triangle CBF} - P_{\triangle CMF}, \quad P_{\triangle CME} = P_{\triangle CFE} - P_{\triangle CMF} \quad \text{и} \quad P_{\triangle CBF} = P_{\triangle CFE}.$$

Од $\overline{BM} < \overline{CM}$ следува дека

$$P = P_{\triangle BMF} < P_{\triangle CMF} \text{ и } P_{\triangle BME} < P_{\triangle CME} = P.$$

Следува $P_{\triangle BME} < P_{\triangle CMF}$. Од паралелограмот $AEFD$ имаме

$$P_{\triangle AMD} = \tfrac{1}{2} P_{AEFD} \text{ или } P_{\triangle AMD} = P_{\triangle AEM} + P_{\triangle DFM}.$$

Но,

$$P_{\triangle AEM} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} \text{ и } P_{\triangle DFM} = P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF}.$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P_{\triangle AMD} &= P_{\triangle ABM} - P_{\triangle BEM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} \\ &= P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM} + P_{\triangle CMF} - P_{\triangle BME} \\ &> P_{\triangle ABM} + P_{\triangle DCM}. \end{aligned}$$

4. Докажи, дека за секој $\triangle ABC$ е точно неравенството

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \geq 2\overline{BC} \cdot m_A,$$

каде m_A е должината на тежишната линија повлечена кон страната BC.

Решение. Од равенството

$$m_A^2 = \tfrac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \tfrac{\overline{BC}^2}{4}$$

и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средна следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \tfrac{4m_A^2 + \overline{BC}^2}{2} \geq \sqrt{4m_A^2 \cdot \overline{BC}^2} = 2\overline{BC} \cdot m_A.$$

5. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека a и b се две соседни страни на правоаголникот, а c е страната на квадратот. Докажи дека

$$a + b - c > R\sqrt{2},$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

Решение. Да забележиме дека

$$c=\sqrt{ab} \text{ и } R\sqrt{2}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} .$$

Задачата се сведува на докажување на следново тврдење: За произволни и различни $a,b>0$ важи неравенството

$$a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} .$$

Ставајќи $c=\sqrt{ab}$ и $d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, имаме $ab=c^2$ и $a^2+b^2=2d^2$.

Според тоа,

$$(a+b)^2=2(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2\geq(c+d)^2 ,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Според тоа,

$$a+b\geq c+d$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c=d$. Останува да забележиме дека равенството $c=d$ е еквивалентно со равенството $a=b$. Навистина,

$$c=d \quad\Leftrightarrow\quad 2ab=a^2+b^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=(a-b)^2 .$$

6. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник, докажи дека

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3 . \qquad (1)$$

Решение. Ставаме $b+c-a=x,\ c+a-b=y,\ a+b-c=z$. Бидејќи a,b,c се должини на страни на триаголник, важи $x>0, y>0, z>0$. Понатаму, $a=\frac{y+z}{2}, b=\frac{z+x}{2}, c=\frac{x+y}{2}$, па ако замениме во (1) добиваме дека даденото неравенсвто е еквивалентно со неравенството

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geq 3 ,$$

т.е. со неравенството

$$(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})\geq 6 ,$$

кое непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, односно ако и само ако $a=b=c$, т.е. триаголникот е рамностран.

7. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи ги нера-

венствата

$$\sqrt{2}(a+b+c) \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c)\,. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\tfrac{a+b}{\sqrt{2}} \le \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \tfrac{b+c}{\sqrt{2}} \le \sqrt{b^2+c^2}\ ,\ \tfrac{c+a}{\sqrt{2}} \le \sqrt{c^2+a^2}\ .$$

Ако ги собереме горните три неравенства, го добиваме левото неравенство во (1). Од друга страна, од $|a-b|<c$ последователно следува

$$(a-b)^2 < c^2,$$
$$a^2+b^2 < c^2+2ab,$$
$$\sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{c^2+2ab}.$$

Ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства и го искористиме неравенсвтото меѓу аритметичката и квадратната средина, добиваме

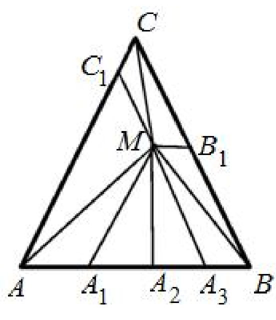
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} &< \sqrt{c^2+2ab}+\sqrt{b^2+2ca}+\sqrt{a^2+2bc}\\ &\le \sqrt{3((c^2+2ab)+(b^2+2ca)+(a^2+2ba))}\\ &= \sqrt{3(a+b+c)^2} = \sqrt{3}(a+b+c),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

8. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Докажи дека

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2 < 2\overline{AB}^2\,.$$

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се точки на страните AB, BC, CA, соодветно такви што $MA_1 \parallel CA$, $MB_1 \parallel AB$ и $MC_1 \parallel BC$. Да означиме $\overline{MA_1}=x$, $\overline{MB_1}=y$ и $\overline{MC_1}=z$.



Четириаголникот C_1AA_1M е рамнокрак трапез, бидејќи $MA_1 \parallel CA$, а од $MC_1 \parallel BC$ следува

$$\measuredangle MC_1A = \measuredangle BCA = 60^\circ = \measuredangle A_1AC_1\,.$$

Затоа важи $\overline{AA_1}=\overline{MC_1}=z$. Нека A_2 и A_3 се точки на страната AB такви што $MA_2 \perp AB$ и $MA_3 \parallel BC$. Тогаш триаголникот MA_2A_3 е рамностран и важи $\overline{A_1A_3} = \overline{MA_1} = x$ и $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{MA_1} = \frac{x}{2}$. Понатаму, четириаголникот A_3BB_1M е паралелограм, па затоа $\overline{A_3B} = \overline{MB_1} = y$. Според тоа,

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_3B} = x + y + z\ .$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{MA}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2$$
$$= (z + \tfrac{x}{2})^2 + x^2 - (\tfrac{x}{2})^2 = z^2 + zx + x^2.$$

Аналогно се докажува дека

$$\overline{MB}^2 = x^2 + xy + y^2 \text{ и } \overline{MC}^2 = z^2 + zy + y^2\ .$$

Конечно,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = z^2 + zx + x^2 + x^2 + xy + y^2 + y^2 + yz + z^2$$
$$= 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) - 3(xy + yz + zx)$$
$$< 2(x + y + z)^2 = 2\overline{AB}^2,$$

што и требаше да се докаже.

9. Четириаголникот $ABCD$ е вписан во кружница со радиус 1. Определи ја најголемата можна вредност на производот

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}\ .$$

Решение. Да означиме $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d, \overline{AC} = e, \overline{BD} = f$. Од теоремата на Птоломеј имаме

$$ac + bd = ef\ .$$

Понатаму, од неравенството меѓу средините следува

$$ef = ac + bd \geq 2\sqrt{abcd}\ ,$$

односно $(ef)^2 \geq 4abcd$. Ако последното неравенство го помножиме со ef иземеме предвид дека дијагоналите e и f се помали или еднакви на дијаметарот на кружницата, добиваме

$$4abcdef \leq e^3 f^3 \leq 2^3 \cdot 2^3 = 64\ ,$$

односно $abcdef \leq 16$. Знак за равенство важи ако и само ако $e = f = 2$ и $ac = bd$, т.е. ако и само ако четириаголникот е квадрат. Значи, бараната најголема можна вредност е 16.

10. Нека a,b,c се должините на страните и m_a, m_b, m_c се должините на соодветните тежишни линии на $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} < 1 .$$

Решение. Нека T е тежиште на $\triangle ABC$ (види цртеж). Тогаш

$$\overline{AC_1} = \overline{BC_1} = \frac{c}{2}, \overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \frac{a}{2}, \overline{CB_1} = \overline{AB_1} = \frac{b}{2},$$

$$\overline{AT} = \frac{2}{3}m_a, \overline{BT} = \frac{2}{3}m_b, \overline{CT} = \frac{2}{3}m_c .$$

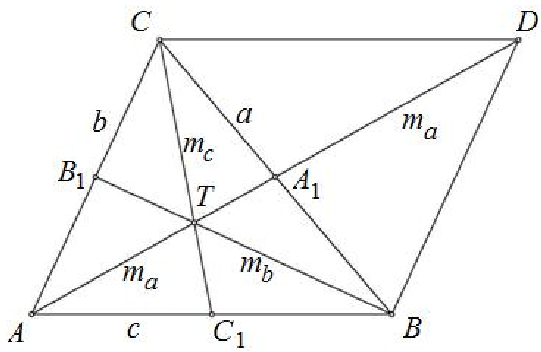
Од неравенството на триаголник за триаголниците ABT, ACT, BCT, следува

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c , \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a , \frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_a > b .$$

Ако ги собереме последните три неравенства, добиваме

$$2(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c) > a+b+c,$$

т.е. $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} > \frac{3}{4}$.



Тежишната линија AA_1 ја продолжуваме преку точката A_1 до точка D така што $\overline{AD} = 2m_a$. Четириаголникот $ABDC$ е паралелограм со страни $\overline{AB} = c, \overline{BD} = b$. Сега, од неравенството за триаголник, применето на $\triangle ABD$ следува $2m_a < b+c$ и аналогно се докажува дека $2m_b < c+a$, $2m_c < a+b$. Ако ги собереме последните три неравенства, добиваме

$$2m_a + 2m_b + m_c < (b+c) + (c+a) + (a+b),$$

$$m_a + m_b + m_c < a+b+c,$$

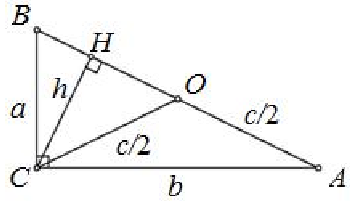
$$\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} < 1,$$

со што задачата е решена.

11. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C, хипотенуза c и висина повлечена кон хипотенузата h. Докажи дека

$$\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geq\frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. При ознаки како на цртежот десно имаме



$$\overline{CO}=\overline{AO}=\overline{BO}=\frac{c}{2} \text{ и } \overline{CO}\geq\overline{CH},$$

па затоа $c\geq 2h$. Од последното неравенство следува $c-2h\geq 0$ и $c-\frac{h}{2}>0$, па ако ги помножиме овие две неравенства, го добиваме неравенството $(c-2h)(c-\frac{h}{2})\geq 0$, кое е еквивалентно со неравенството $c^2+h^2\geq\frac{5}{2}ch$. Ако последното неравенство го поделиме со ch, го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $c=2h$, т.е. ако и само ако ABC е рамнокрак правоаголен триаголник.

Втор начин. Од $c\geq 2h$ следува $h\leq c-h$ и $c\leq 2(c-h)$. Ако ги помножиме последните две неравенства, го добиваме неравенството $ch\leq 2(c-h)^2$, кое е еквивалентно со неравенството $5ch\leq 2c^2+2h^2$. Ако последното неравенство го поделиме со $2ch$, го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $c=2h$, т.е. ако и само ако ABC е рамнокрак правоаголен триаголник.

Трет начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{c}{2h}+\frac{2h}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{2h}\cdot\frac{2h}{c}}=2. \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството $c\geq 2h$ следува $\frac{c}{2h}\geq 1$ и $-\frac{h}{c}\geq-\frac{1}{2}$, па од неравенството (2), добиваме

$$\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geq 2-\frac{h}{c}+\frac{c}{2h}\geq 2-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $c=2h$.

Четврт начин. Имаме, $(c-2h)^2\geq 0$, т.е. $c^2+h^2\geq 4ch-3h^2$. Понатаму, од $c\geq 2h$ следува $-h\geq-\frac{c}{2}$, па затоа $-3h^3\geq-\frac{3}{2}ch$. Според тоа,

$$c^2+h^2\geq 4ch-3h^2\geq 4ch-\frac{3}{2}ch=\frac{5}{2}ch.$$

Конечно, ако последното неравенство го поделиме со ch, го добиваме неравенството (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $c=2h$.

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со катети a и b, хипотенуза c и радиус на впишаната кружница r. Докажи дека

а) $a < \frac{r}{2}$, б) $r \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$.

Решение. За плоштината на $\triangle ABC$ имаме $P = \frac{ab}{2}$ и $P = \frac{a+b+c}{2}r$, па затоа $r(a+b+c) = ab$, односно $r = \frac{ab}{a+b+c}$. Понатаму, $a+b-c > 0$, па од последното равенство и Питагоровата теорема следува

$$r = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b-c}{a+b-c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{2ab},$$

т.е.

$$r = \frac{a+b-c}{2}. \qquad (1)$$

а) Од (1) и од $b < c$ непосредно следува

$$r = \frac{a+b-c}{2} < \frac{a+c-c}{2} = \frac{a}{2}.$$

б) Имаме, $(a-b)^2 \geq 0$, па затоа $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Сега, од последното неравенство и од Питагоровата теорема следува

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) = 2c^2,$$

од каде добиваме

$$a + b \leq c\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Понатаму, од (1) и (2) следува

$$r = \frac{a+b-c}{2} \leq \frac{1}{2}(c\sqrt{2} - c) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c.$$

Јасно, во неравенството (2) знак за равенство важи ако и само ако правоаголниот $\triangle ABC$ е рамнокрак, што значи дека во последното неравенство важи знак за равенство ако и само ако правоаголниот $\triangle ABC$ е рамнокрак. Понатаму, од

$$2 < \frac{9}{4} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} < \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$$

и од последното неравенство следува дека $r < \frac{c}{4}$.

13. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи го неравенството

$$3(a^3b + b^3c + c^3a) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3) \geq 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Решение. Ставаме $x = \frac{a+b-c}{2}, y = \frac{a+c-b}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}$ и добиваме $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y = a, x + z = b, y + z = c$. Сега даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3\sum_{cyc}(x+y)^3(x+z)+2\sum_{cyc}(x+y)(x+z)^3 \geq 5\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2 .$$

По ослободувањето од заградите добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3(x^3y+y^3z+z^3x)+2(xy^3+yz^3+zx^3)\geq 5xyz(x+y+z) .$$

Последното неравенство го делиме со $xyz>0$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$3(\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y})+2(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y})\geq 5(x+y+z) ,$$

кое следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц

Забелешка. Неравенството не важи за било кои позитивни реални броеви. На пример, тоа не важи за $a=\frac{1}{100}, b=1, c=\frac{5}{4}$.

14. Нека a,b,c се должините на страните и h_a,h_b,h_c се должините на соодветните висини на $\triangle ABC$. Докажи, дека

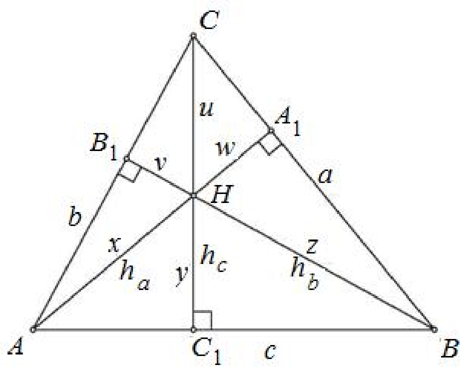
$$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1 .$$

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ (види цртеж). Од правоаголните триаголници $\triangle AA_1C, \triangle ABB_1, \triangle BCC_1$ следува

$$\overline{AA_1}<\overline{AC},\ \overline{BB_1}<\overline{AB}, \overline{CC_1}<\overline{BC} ,$$

т.е.

$$h_a<b, h_b<c, h_c<a .$$



Ако ги собереме последните три неравенства, добиваме

$$h_a+h_b+h_c<a+b+c \text{, т.е. } \frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1 .$$

При ознаки како на горниот цртеж имаме

$$h_a=x+w, h_b=v+z, h_c=y+u . \qquad (1)$$

Сега, од неравенството на триаголник следува

$$b=\overline{AC}=\overline{AB_1}+\overline{CB_1}<(\overline{HA}+\overline{HB_1})+(\overline{HB_1}+\overline{HC}) ,$$

т.е. $b<x+v+v+u$, и аналогно $c<x+y+y+z$, $a<z+w+w+u$. Ако

ги собереме последните три неравенства и ги искористиме неравенствата (1), последователно добиваме

$$a+b+c<2((x+w)+(z+v)+(y+u))$$

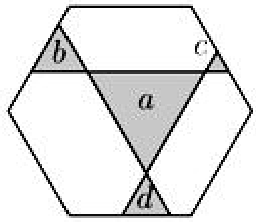
$$a+b+c<2(h_a+h_b+h_c),$$

$$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c},$$

со што задачата е решена.

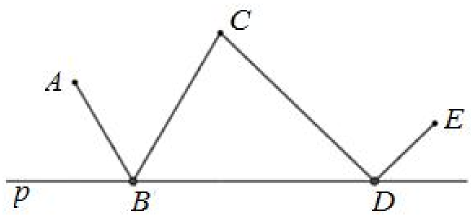
5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Правилен шестаголник, со прави паралелни на неговите страни е поделен на седум делови (три шестаголника и четири рамнострани триаголници, како што е прикажано на цртежот десно). Должините на страните на рамностраните триаголници се a, b, c и d. Определи ја должината на страната шестаголникот.



Решение. Бидејќи a е должината на страната на внатрешниот триаголник лесно се добива дека должината на страната на шестаголникот е еднаква на $\frac{2a+b+c+d}{3}$.

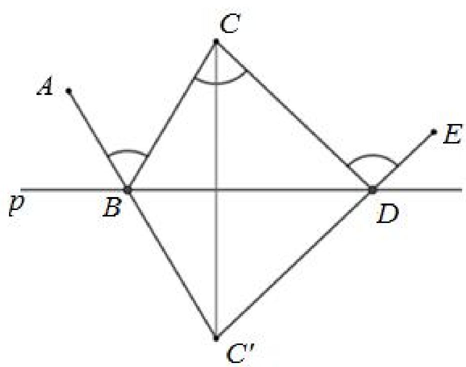
2. Искршената линија $L = ABCDE$ не преоѓа под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A, C и E, линијата L е со најмала можна должина



Докажи дека

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDE = 2\measuredangle BCD .$$

Решение. Нека C' е точката што е симетрична на C во однос на правата p. Тогаш B е пресечната точка на правите AC' и p. Слично, D е пресечната точка на правите EC' и p. Имено, во овој случај искршената линија $L = ABCDE$ има најмала должина:



$$\overline{BC} = \overline{BC'} \text{ и } \overline{DC} = \overline{DC'}.$$

Имаме:

$$\measuredangle C'BD + \measuredangle CBD + \measuredangle ABC = 180^\circ;$$

$$\measuredangle C'DB + \measuredangle BDC + \measuredangle CDE = 180^\circ$$

Од $\triangle BDC$ имаме: $\measuredangle CBD + \measuredangle BCD + \measuredangle BDC = 180^\circ$, па затоа

$$\measuredangle ABC + \measuredangle EDC = 2\measuredangle BCD .$$

3. Во кружница е впишан правилен дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$. Докажи, дека дијагоналите $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11}$ се сечат во една точка.

Решение. Во триаголникот $A_2A_4A_8$ дијагоналите $A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11}$ се симетрали на аглите, па затоа тие се сечат во една точка. Во триаголникот $A_3A_5A_{11}$ дијагоналите $A_1A_5, A_3A_8, A_4A_{11}$ се симетрали на аглите, па затоа тие се сечат во една точка. Според тоа, сите четири дијагонали $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11}$ се сечат во една точка.

4. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Точката M е средина на DE, X е пресечната точка на AC и BM, Y е пресечната точка на BF и AM, а Z е пресечната точка на AC и BF. Да се определи $P_{BXC} + P_{AYF} + P_{ABZ} - P_{MXZY}$.

Решение. Нека O е центарот на шестаголникот. Дадениот израз е еднаков на $P_{ABF} + P_{ABC} - P_{ABM}$, направи цртеж. Но,

$$P_{ABF} = P_{ABC} = P_{ABO},$$

бидејќи правата на која лежат F, C, O е паралелна со AB. Нека N е пресечната точка на MO и AB. Тогаш N е средина на AM и O е средина на MN. Затоа $P_{ABM} = 2P_{ABO}$. Конечно,

$$\begin{aligned} P_{BXC} + P_{AYF} + P_{ABZ} - P_{MXZY} &= P_{ABF} + P_{ABC} - P_{ABM} \\ &= P_{ABO} + P_{ABO} - 2P_{ABO} = 0. \end{aligned}$$

5. Од средината на секоја страна на остроаголен триаголник ABC со плоштина $10\,cm^2$ се повлечени нормали кон другите две страни на триаголникот. Пресечните точки на овие нормали заедно со средините на страните се темиња на шестаголник. Определи ја плоштината на овој шестаголник.

Решение. Нека A', B', C' се средините на страните $\triangle ABC$ и нека на опишаниот начин е добиен шестаголникот $A'C''B'A''C'B''$ (направи цртеж). Ги конструираме симетралите на страните на $\triangle ABC$ кои се сечат во точката O, која е внатрешна за шестаголникот чија плоштина треба да ја определиме. Со тоа шестаголникот е поделен на три паралелограми $C'B"A'O, A'C"B'O, B'A"C'O$ и јасно збирот на плоштините на овие три паралелограми е два пати поголем од плоштината на триаголникот $A'B'C'$, која е еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$, т.е.

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{4} P_{ABC} = \frac{5}{2} cm^2 .$$

Конечно,

$$P_{A'C"B'A"C'B"} = 2P_{A'B'C'} = 5\, cm^2 .$$

6. Дрвен квадар со рабови 72 *dm*, 96 *dm* и 120 *dm* е поделен на еднакви коцки, со најголем раб, пришто должината на работ е природен број. Добиените коцки се наредени една врз друга, во столб. Колку метри е висок така добиениот столб?

   Решение. Должината на работ на делбените коцки е еднаква на $\text{NZD}(72,96,120) = 24\, dm$. Според тоа, рабовите на квадарот се поделени на $72:24 = 3, 96:24 = 4$ и $120:24 = 5$ делови, што значи дека квадарот е поделен на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ коцки. Конечно, висината на добиениот столб е еднаква на $60 \cdot 24 = 1440\, dm = 144\, m$.

7. За $\triangle ABC$ симетричната права CG_c $(G_c \in AB)$ на медијаната CM_c во однос на симетралата на аголот CL_c ја нарекуваме симедијана на триаголникот низ темето C. Секој триаголник има три симедијани AG_a, BG_b и CG_c кои го определуваат симедијаниот $\triangle G_a G_b G_c$. Дали постои $\triangle ABC$ кој не е рамностран, а соодветниот симедијанен $\triangle G_a G_b G_c$ е рамностран.

   Решение. Симедијаниот триаголник на рамнокракиот $\triangle ABC$ со страни $\overline{CA} = \overline{CB} = 1, \overline{AB} = \sqrt{3}$ е рамностран.

8. На хоризонтална права која ја дели рамнината на горна и долна полурамнина, нацртана е отсечка AB со должина $72\, cm$. Користејќи ги крајните точки на отсечката, во горната полурамнина се нацртани правилен (рамностран) триаголник AM_1M_2 и правилен петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$, а во долната полурамнина се нацртани правилен

четириаголник (квадрат) $M_2M_3M_4M_5$ и правилен шестаголник $M_9M_{10}M_{11}\,M_{12}M_{13}B$. Притоа, M_2, M_5 и M_9 се на отсечката AB, точката M_2 е меѓу A и M_5 и точката M_9 е меѓу M_5 и B. Должините на страните на правилните многуаголници се однесуваат како соодветните броеви на нивните страни. Пресметај ја должината на искршената линија

$$L \equiv AM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B\,.$$

Решение. Нека страната на рамностраниот триаголникот AM_1M_2 ја означиме со a, страната на квадратот $M_2M_3M_4M_5$ со b, страната на правилниот петаголник $M_5M_6M_7M_8M_9$ со c и страната на правилниот шестаголник $M_9M_{10}M_{11}M_{12}M_{13}B$ со d.

Од условот на задачата следува дека $a:b:c:d=3:4:5:6$, односно

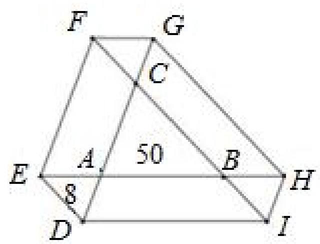
$$a=3k, b=4kc=5k, d=6k\,.$$

Имаме $72=a+b+c+d$, па затоа $72=3k+4k+5k+6k$, т.е. $k=4$.

Должината на искршената линија L е:

$$2a+3b+4c+5d=6k+12k+20k+30k=68k=68\cdot 4=272\ cm\,.$$

9. Даден е триаголник ABC со плоштина 50. На правата AC е избрана точка D како што е прикажано на цртежот десно. Правата низ D, паралалена со BC, ја сече правата AB во точката E. Правата низ E, паралелна на AC, ја сече правата BC во точката F. Правата низ F, паралелна со AB, ја сече правата AC во точката G. Правата низ G, паралелна со BC, ја сече правата AB во точката H. Правата низ H, паралелна со AC, ја сече правата BC во точката I.



а) Докажи, дека правата DI е паралелна на правата AB.

б) Ако плоштината на триаголникот ADE е 8, определи ја плоштината на шестаголникот $DEFGHI$.

Решение. а) Имаме

$$P_{DAB}\overset{DE||BC}{=}P_{EAC}\overset{AC||EF}{=}P_{FAC}\overset{FG||AB}{=}P_{GCB}\overset{HG||BC}{=}P_{HCB}\overset{HI||AC}{=}P_{IAB}\,.$$

Значи, плоштините на триаголиците DAB и IAB се еднакви, па како тие имаат заедничка страна, мора и висините над таа страна да се еднакви, од што следува дека правата DI е паралелна на правата AB.

б) Да ја означиме плоштината на шесте триаголници so ednakvi plo[tini од решението под а) со S. Од равенството

$$P_{EAC} : P_{ABC} = \overline{EA} : \overline{AB} = P_{EDA} : P_{DAB}$$

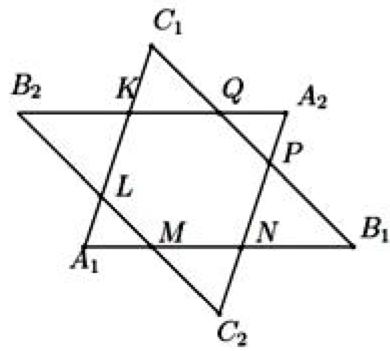
следува $S = 20$. Тогаш, од паралелограмот $DEFC$ следува

$$P_{ACF} = P_{EDC} = 28 .$$

Понатаму, од паралелограмот $EAGF$ следува $P_{FCG} = 8$. Продолжуваме аналогно и добиваме дека

$$P_{DEFGHI} = 50 + 6 \cdot 28 = 218 .$$

10. На цртежот десно триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни и соодветните страни им се паралелни. Познато е дека плоштините на триаголниците A_1LM, C_2MN и B_1NP се соодветно 1, 4 и 9. Определи ја плоштината на шестаголникот $KLMNPQ$.



Решение. Да го разгледаме трапезот A_1MKB_2. Триаголниците A_1LB_2 и MLK имаат еднакви плоштини, кои ги означуваме со x. Од односот на плоштините

$$1 : x = \overline{A_1L} : \overline{LK} = x : 9 ,$$

добиваме дека $x = 3$. На потполно идентичен начин добиваме, дека

$$P_{A_1MC_2} = 2 \text{ и } P_{B_1C_2N} = 6 .$$

Отсечките A_1B_1 и A_2B_2 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголникот $A_1B_1A_2B_2$ е паралелограм, што значи дека A_1B_2 и A_2B_1 исто така се паралелни и еднакви. Оттука лесно следува дека триаголниците A_1B_2L и A_2B_1P се складни. Аналогно се добива дека

$$\triangle B_1C_2N \cong \triangle B_2C_1K \text{ и } \triangle A_1C_2M \cong \triangle A_2C_1Q .$$

Од еднаквоста на соодветните страни лесно следува, дека

$$\triangle KQC_1 \cong \triangle MNC_2 , \triangle A_1ML \cong \triangle A_2QP \text{ и } \triangle B_1PN \cong \triangle B_2KL .$$

Оттука следува дека дијагоналата KN ја полови плоштината на шестаголникот $KLMNPQ$.

Од друга страна

$$P_{A_1MK} : P_{KMN} = \overline{A_1M} : \overline{MN} = P_{A_1MC_2} : P_{MNC_2} ,$$

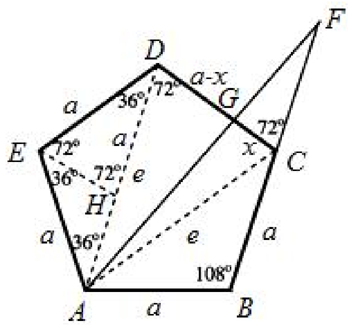
па затоа $P_{MNK} = 8$. Конечно,

$$P_{KLMNPQ} = 2(3+8) = 22 .$$

11. Страната $\overline{BC} = a$ на правилниот петаголник $ABCDE$ е продолжена преку темето C до точката F така што $\overline{CF} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Изрази ја должината на отсечката AF со помош на должината на страната a.

Решение. Да означиме $d = \overline{CF} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$, пресекот на AF и CD со G, $\overline{CG} = x$ и $\overline{AD} = e$. Тогаш $\overline{GD} = a - x$. Од $\triangle DAG \sim \triangle CFG$ следува $e:(a-x) = d:x$, па затоа

$$x = \frac{ad}{e+d} . \qquad (1)$$



Нека H е точка од дијагоналата AD таква што $\overline{DH} = a$. Тогаш $\overline{AH} = e - a$. Понатаму, од $\triangle ADE \sim \triangle EAH$ следува $e : a = a : (e-a)$, па затоа

$$e(e-a) = a^2 . \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека отсечката AF ја полови страната CD, за што е доволно да докажеме дека $e = d$. Од $d = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$ следува

$$d(d-a) = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\left(\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} - a\right) = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = a^2\frac{\sqrt{5}^2-1}{4} = a^2 .$$

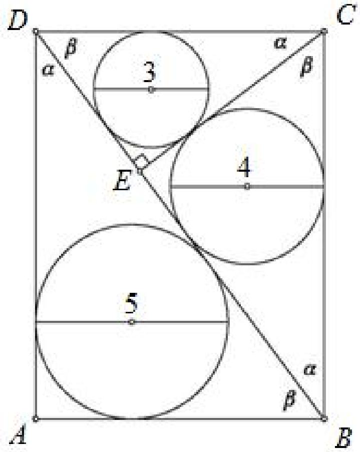
Сега, од последното равенство и од (2) следува $e(e-a) = d(d-a)$, од каде добиваме $(d-e)(d+e-a) = 0$. Бидејќи $d > a$ и $e > a$, од последното равенство следува $d = e$. Сега, од $d = e$ и сличноста $\triangle DAG \sim \triangle CFG$ следува $\triangle DAG \cong \triangle CFG$. Оттука заклучуваме дека отсечката AF ја полови страната CD. Понатаму, бидејќи AF ја полови CD и $\triangle DGA \cong \triangle CGA$ ($\overline{DA} = \overline{CA} = e$, $\measuredangle ADG = \measuredangle ACG = 72^\circ$ и $\overline{DG} = \overline{CG} = \frac{a}{2}$), следува $AF \perp CD$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот ACG следува

$$\overline{AF} = \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} .$$

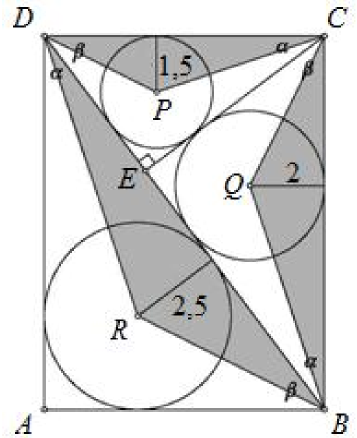
Конечно, од $\triangle DAG \cong \triangle CFG$ следува $\overline{AG} = \overline{GF}$, па затоа

$$\overline{AF} = 2\overline{AG} = a\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,.$$

12. Правоаголникот $ABCD$ со дијагоналата BD е поделен на два правоаголни триаголника. Висината CE повлечена кон страната BD го дели триаголникот BCD на два правоаголни триаголника (цртеж десно). Во триаголниците CDE, BCE и ABD се впишани кружници чии дијаметри се со должини 3, 4 и 5, соодветно. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Со P, Q и R да ги означиме центрите на впишаните кружници во триаголниците CDE, BCE и ABD, соодветно (цртеж десно). Од $\triangle CDE$ имаме $\measuredangle DCP = \frac{\sim}{2}$ и $\measuredangle PDC = \frac{}{2}$. До сличен заклучок се доаѓа и со разгледување на триаголниците BCE и ABD. Понатаму, за триаголниците CDP, BCQ и BDR важи



$$\measuredangle DCP = \measuredangle CBQ = \measuredangle RDB = \frac{\sim}{2}$$

и

$$\measuredangle PDC = \measuredangle QCB = \measuredangle RBD = \frac{}{2}\,.$$

Од горните равенства и од признакот за сличност АА следува дека $\triangle CDP \sim \triangle BCQ \sim \triangle DBR$, па затоа $\frac{\overline{CD}}{\frac{3}{2}} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{BD}}{\frac{5}{2}}$. Од последните равенства следува $\overline{CD} = \frac{3}{2}k$, $\overline{BC} = 2k$ и $\overline{BD} = \frac{5}{2}k$ за некој $k > 0$. Но, триаголникот ABD е правоаголен, па за радиусот на впишаната кружница важи $\frac{5}{2} = \frac{\overline{AB}+\overline{AD}-\overline{BD}}{2}$, од каде добиваме $5 = \frac{3}{2}k + 2k - \frac{5}{2}k$, т.е. $k = 5$. Според тоа, $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{15}{2}$ и $\overline{AD} = \overline{BC} = 10$, па затоа плоштината на четириаголникот $ABCD$ е $P = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 75$.

13. Плоштините на три ѕида на дрвен квадар изнесуваат $6dm^2;8dm^2$ и $12dm^2$. Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка така што едно нејзино теме се совпаѓа со темето на квадарот, при што страната на коцката е 25% од најмалата страна на квадарот. Пресметај:

а) го бројот на темиња, рабови и ѕидови на добиеното тело,

б) ги плоштината и волуменот на квадарот и телото,

в) процентот на плоштината и процентот на волуменот на телото во однос на соодветната мерка на квадарот.

Решение. а) Добиеното тело има 56 темиња; 84 рабови и 30 ѕидови. Нека a,b,c , ($a<b<c$) се димензиите на квадарот изразени во dm . Од $ab=6, ac=8, bc=12$ се добива

$$(abc)^2 = 576 \text{, т.е. } abc = 24 .$$

Значи $a=2dm, b=3dm, c=4dm$. Нека x е работ на коцката (во dm). Тогаш

$$x = \frac{25\cdot 2}{100} = 0,5dm .$$

б) Сега лесно се гледа дека

$$P_{kv} = 52dm^2 ,\ V_{kv} = 24dm^3 ,\ P_t = 52dm^2 \text{ и } V_t = 24 - 8\cdot 0,5^3 = 23dm^3 .$$

в) Јасно,

$$p_P = \frac{100P_t}{P_{kv}} = 100 \ \% \text{ и } p_V = \frac{100V_t}{V_{kv}} = \frac{2300}{24}\% .$$

14. Броевите 42, 48 и 82 се (во некој редослед) волуменот, плоштината и збирот на должините на сите рабови на правоаголен паралелопипед чии должини на рабови се цели броеви. Определи ги должините на рабовите на овој паралелопипед.

Решение. Со a,b,c да ги означиме должините на рабовите на паралелопипедот. Тогаш дадените броеви се

$$L = 4(a+b+c) ,\ P = 2(ab+bc+ca) \text{ и } V = abc .$$

Бидејќи должините на рабовите се цели броеви, заклучуваме дека $4\,|\,L$, па како од дадените броеви само 48 е делив со 4, добиваме дека $L=48$, што значи $a+b+c=12$. Ако $V=82$, тогаш должината на еден од рабовите ќе биде делива со 41, од што ќе следува $a+b+c>12$, што е противречност. Значи, $V=42$ и $P=82$. Сега, $ab+bc+ca=41$ и $abc=42$, па како $a+b+c=12$, со непосредна проверка лесно се добива дека единствени цели броеви a, b, c за кои се исполнети горните услови се броевите 2, 3, 7, во некој редослед.

15. Квадрат со страна 1 е обоен во три бои. Кој е најголемиот реален број a таков, што во квадратот секогаш може да се најдат две еднобојни точки на растојание поголемо или еднакво на a?

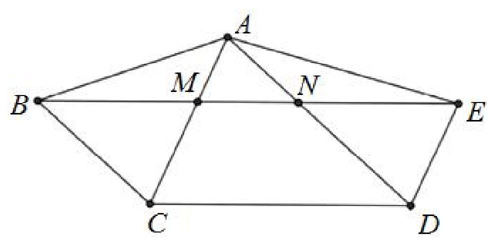
Решение. *Одговор*: $a=\sqrt{\frac{65}{64}}$.

Разгледај ги следниве случаи:

1) две спротивни темиња на квадратот $ABCD$ се обоени во една иста боја,
2) секои две спротивни темиња на квадратот $ABCD$ се обоени во различни бои:
   - сите четири темиња се обоени во две бои. Без ограничување на општоста, нека темињата A и B се бели, а C и D се црвени. Разгледај ги точките $M\in AD, \overline{AM}:\overline{MD}=1:3$ и $N\in BC$, $\overline{BN}:\overline{NC}=1:1$,
   - за секоја боја постои теме кое е обоено во таа боја. Без ограничување на општоста, нека темињата A и B се бели, C е црно и D е црвено. Разгледај ги точките $M\in AD, \overline{AM}:\overline{MD}=1:7$, $N\in BC, \overline{BN}:\overline{NC}=1:7$ и $P\in CD, \overline{CP}:\overline{PD}=1:1$.

16. Во петаголникот $ABCDE$ триаголниците ABC, BCD, CDE и DEA имаат еднакви плоштини. Правите AC и AD ја сечат BE во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{BM}=\overline{NE}$.

Решение. Од еднаквоста на плоштините на триаголниците ABC и BCD следува дека тие имаат еднакви висини спуштени од A и D кон заедничката страна BC. Затоа правите AD и BC се паралелни.



Слично, од еднаквоста на плоштините на триаголниците BCD и CDE, следува дека правите BE и CD се паралелни, а од еднаквоста на плоштините на триаголниците CDE и DEA следува дека правите AC и DE се паралелни. Од паралелноста на AD и BC и на BE и CD, добиваме дека четириаголникот $CDNB$ е паралелограм, а од паралелноста на BE и CD и на AC и DE, добиваме дека четириаголникот $CDEM$ е паралелограм. Од паралелограмот $CDNB$ следува дека $\overline{CD}=\overline{NB}$, а од паралелограмот $CDEM$ следува дека $\overline{CD}=\overline{EM}$. Затоа, $\overline{EM}=\overline{NB}$ и оттука имаме

$$\overline{NM}+\overline{MB}=\overline{EN}+\overline{NM},$$

односно $\overline{BM}=\overline{NE}$, што и требаше да се докаже

17. Во координатната рамнина е даден конвексен петаголник $ABCDE$ чии темиња се со целобројни координати. Докажи, дека во внатрешноста на петаголникот има точка со целобројни координати.

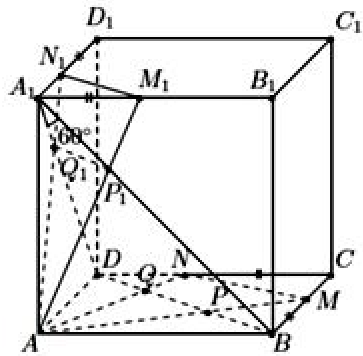
Решение. Во секој конвексен петаголник постојат два соседни агли чиј збир е поголем од 180°. Навистина, ако аглите последователно ги означиме со ~, ,¥,¢,¨ и збирот на секои два соседни агли е помал или еднаков на 180°, тогаш за збирот на аглите во петаголникот добиваме

$$\begin{aligned}2\cdot 540^\circ &= 2(\sim + \quad + ¥ + ¢ + ¨)\\ &\leq (\sim + \quad) + (\quad + ¥) + (¥ + ¢) + (¢ + ¨) + (¨ + \sim)\\ &\leq 5\cdot 180^\circ,\end{aligned}$$

што е противречност. Нека се тоа темњата A и B и нека, на пример, растојанието од темето E до страната AB не е поголемо од растојанието од темето C до страната AB. Тогаш во темето E повлекуваме права паралелна со AB, а во темето B права паралелна со AE. Пресекот на овие два прави е точката X, при што четириаголникот $ABXE$ е паралелограм. Јасно, X е внатрешна точка за петаголникот $ABCDE$ и е со целобројни координати. Докажи!

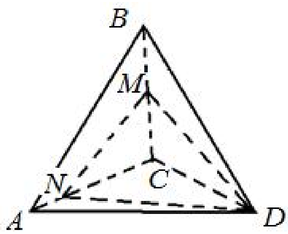
18. На страните BC и CD на квадрат $ABCD$ со страна 1 се избрани точки M и N, такви што $\overline{CM}+\overline{CN}=1$. Отсечките AM и AN ја сечат дијагоналата BD соодветно во точките P и Q. Докажи дека отсечките BP, PQ и QD се страни на триаголник, кај кој едниот агол е еднаков на 60°.

Решение. Конструираме коцка $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ и на рабовите A_1B_1 и A_1D_1 означуваме соодветно точки M_1 и N_1, такви што



$\overline{A_1M_1} = \overline{BM} = \overline{CN}$ и $\overline{A_1N_1} = \overline{DN} = \overline{CM}$. Нека $P = AM_1 \cap BA_1$ и $Q = AN_1 \cap DA_1$. Лесно се докажува дека $\overline{A_1P_1} = \overline{BP}$ и $\overline{A_1Q_1} = \overline{DQ}$. Освен тоа, $\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ}$ и $\triangle DBA_1$ е рамностран, т.е. $\measuredangle P_1A_1Q_1 = 60^\circ$. Со тоа доказот е завршен.

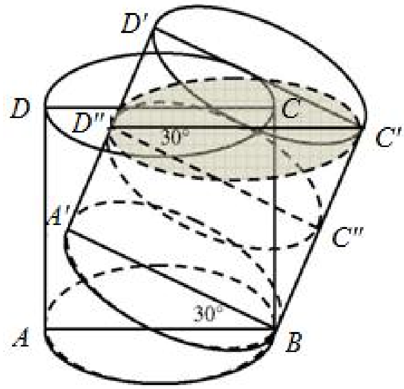
19. Низ центарот O на рамностраниот $\triangle ABC$ е повлечена права l, која ги сече страната CA во точка N и страната BC во точка M . Докажи дека од отсечките AM, BN, MN може да се конструира триаголник и за сите конструирани триаголници (кога правата l се менува) висината повлечена кон страната MN има иста должина.



Решение. Конструираме правилен тетраедар $ABCD$ со основа $\triangle ABC$. Произволната отсечка MN низ центарот O на $\triangle ABC$, определува $\triangle DMN$ со висина DO и висината на тетраедарот. Очигледно $\triangle DMN$ е бараниот триаголник, бидејќи

$$\overline{DM} = \overline{AM} \text{ и } \overline{DN} = \overline{BN} .$$

20. Дијаметарот на кружната основа на еден цилиндричен сад е еднаков на неговата висина. Садот се наоѓа на хоризонатална површина и е целосно наполнет со течност. Дали ако го навалиме садот така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, од садот ќе истече помалку или повеќе од третина од течноста во него? Образложи го одговорот.



Решение. Ако го навалиме цилиндричниот сад така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, тогаш по истекувањето, течноста ќе заземе хоризонтална положба $D”C’ \| AB$ (види цртеж). Количината на истечената течност е еднаква на половината од волуменот на цилиндарот со оскин пресек $D”C”C’D’$.

Нека $x=\overline{C''C'}$ е висината на овој цилиндар кој има еднаква основа со дадениот цилиндар, па $\overline{D''C''}=2R$, каде R е радиусот на на основата на дадениот цилиндар. Правоаголниот триаголник $C'C''D''$ е половина од рамностран триаголник, затоа што

$$\sphericalangle C'D''C''=\sphericalangle ABA'=30^\circ,$$

како агли со заемно паралелни краци, па затоа $\overline{D''C'}=2x$. Од Питагоровата теорема имаме

$$\overline{D''C''}^2+\overline{C''C'}^2=\overline{D''C'}^2,$$

односно

$$(2R)^2+x^2=(2x)^2,$$

од каде се добива $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$. Висината на дадениот цилиндар е $H=2R$, па неговиот волумен е $V=2\pi R^3$. Тогаш волуменот на истечената вода е

$$V_1=\frac{1}{2}\pi R^2x=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 2\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{6}V<\frac{1}{3}V,$$

односно од садот ќе истече помалку од третина од течноста

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Marić: Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka, Element, Zagreb, 1996
2. A. Marić: Trokut, Element, Zagreb, 2007
3. A. Muminagic, J. Carstensen: O jednom dobro poznatom zadatku, Matka, 119, 2021/2022
4. B. Pavković, D. Veljan: Elementarna matematika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
5. Đ. G. Marković: Geomtrijski poliformizam, 3 Makarije, Podgorica, 2006
6. D. Milošević: Četiri rešenja nejednakosti za pravokutni trokut, Matka, 118, 2021/2022
7. D. Milošević: Četiri rešenja zadatka od jednakokračnom trokutu, Matka, 111, 2019/2020
8. E. S. Loomis: The Pythagorean Proposition, NCTM, 1968
9. I. Ilišević: Dokazi nekih planimetrijskih činjenica koordinatnom metodom, Osječki matematički list, 12, 2012
10. J. Carstensen, A. Muminagic, P. Mladinic: Pravokutni trokut, HMD, Zagreb, 2001
11. M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, Lj. Petković, N. Lazarević: Geometrija za I razred matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1998
12. O. Bottema and all: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (Netherlands), 1969
13. R. Tošić, V. Petrović: Zbirka zadataka iz osnova geometrije, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990
14. Š. Arslanagic: Dokazi nekih tvrdnji vezanih za pravokutni trokut, Matka, 107, 2018/2019
15. Š. Arslanagić: Dvije nejadnakosti za trokut, Matka, 97, 2016/2017
16. Š. Arslanagic: Matematička čitanka 1, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009

17. Š. Arslanagić: Matematička čitanka 2, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010
18. Š. Arslanagić: Matematička čitanka, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008
19. Š. Arslanagić: Matematika za nadarene, Bosanska rijec, Sarajevo, 2005
20. Š. Arslanagić: Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006
21. Š. Arslanagić: Razni načini dokazivanja teorema iz geometrije, Matka, 108, 2018/2019
22. Š. Arslanagić: Više raznih dokaza jednog zadatka o kvadratu, Matka, 112, 2019/2020
23. Š. Arslanagić: Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematika učenika osnovnih škola u Federaciji Bosne I Hercegovine (1996-2008), Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006
24. S. Režek: Ovo zna svako dijete …, Matka, 113, 2020/2021
25. V. Stošić: Planimetrija, odabrani zadaci za osnovnu školu, Element, Zagreb ‘
26. Ž. Hanjš: Stewartov teorem, Matka, 82, 2012/2013
27. Z. Lobor: Trokut, četvorokut i krug , Matka,113-120, 2020/2021 I 2021/2022
28. А. Муминагиќ, Ј. Карстенсен: За една олимписка задача, Нумерус (Математички талент), Скопје
29. Г. Тренчевски: Геометрија за V одделение, Просветно дело, Скопје, 1977
30. Г. Тренчевски: Геометрија за VI одделение, Просветно дело, Скопје, 1980
31. Г. Тренчевски: Геометрија за VII одделение, Просветно дело, Скопје, 1980
32. Г. Тренчевски: Геометрија за VIII одделение, Просветно дело, Скопје, 1978
33. Д. Милошевиќ, К. Мишовски: Едно двојно неравенство за правоаголен триаголник, Нумерус (Математички талент), Скопје
34. К. Аневска, С. Малчески: Една теорема,многу начини на докажување, Нумерус (Математички талент), Скопје
35. К. Аневска: Неколку докази на Евклидовата теорема за катетата, Математички талент, Скопје
36. М. Попоска: Метод на плоштини, Математички талент, Скопје
37. Р. Малчески, К. Аневска: Теорема на Стјуарт, Сигма, 2018

38. Р. Малчески, К.Аневска: Неравенство на триаголник и неравенства за триаголник, Математички талент, Скопје
39. Р. Малчески, М. Попоска: Уште нешто за Питагоровата теорема, Математички талент, Скопје
40. Р. Малчески,В. Гоговска: Неравенства во правоаголен триаголник, Математики талент, Скопје
41. Р. Малчески: Подготвителни задачи за математички олимпијади – геометрија, Математички талент, Скопје
42. Р. Малчески: Признаци за паралелограми, Математички талент, Скопје
43. Р. Малчески: Примена на неравенствата меѓу средините во геометријата, Математички талент, Скопје
44. Р. Малчески: Равенство на паралелограм, Математички талент, Скопје
45. Р. Тошић: Бројне средине и трапез, Математички лист, Београд
46. Р. Тошић: О кружници уписаној у правоугли трогао, Математички лист, Београд
47. С. Брсаковска, С. Малчески: Некои последици од Питагоровата теорема, Нумерус (Математички талент), Скопје