36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци
3	1. Да ли је могуће саставити правоугаони рам од 99 дашчица дужина 1, 2, ..., 99?
	2. Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина
2	a) њихов највећи заједнички делилац помножен са 6;
2	b) њихов највећи заједнички делилац помножен са 5?
5	3. На страницама AB и BC квадрата $ABCD$ уочене су тачке K и L, редом, тако да је $KB = LC$. Нека је P тачка пресека дужи AL и CK. Доказати да су дужи DP и KL међусобно нормалне.
5	4. Током школске године, Андрија је бележио своје оцене из математике (које могу бити 2, 3, 4, или 5). Нову оцену коју треба да убележи назива ”неочекивана” ако се у дотадашњем списку оцена, та оцена појављивала мање пута од било које друге *могуће* оцене. (На пример, ако је забележио редом оцене: 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, неочекиване оцене су биле оне када је први пут добио 5 и када је по други пут добио 4). Испоставило се да је на крају године Андрија имао 40 оцена, при чему се свака могућа оцена појавила тачно 10 пута (у непознатом редоследу). Да ли је могуће одредити тачан број неочекиваних оцена које је Андрија добио?
	5. Дато је $N > 1$ правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да је однос дужина катета у сваком од N датих троуглова константан, ако је
2	a) $N = 2$;
3	b) N је произвољан природан број.

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

points	problems
	1. Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина
1	a) њихов највећи заједнички делилац помножен са 6;
2	b) њихов највећи заједнички делилац помножен са 5?
4	2. Темена троугла означена су са A, B и C у смеру кретања казаљки на часовнику, а одговарајући углови са α, β и γ. Троугао се ротира увек у смеру кретања казаљки на часовнику и то: око тачке A за угао α, затим око тачке B за угао β, затим око тачке C за угао γ, па поново око тачке A, итд. (ротација се увек врши у односу на тренутни положај темена). Доказати да се након шест оваквих ротација троугао враћа на почетну позицију.
5	3. Дато је 15 међусобно различитих целих бројева. Петар је записао све могуће суме од по седам бројева, док је Васа записао све могуће суме од по осам бројева. Да ли је могуће да су Петар и Васа записали исту колекцију бројева? (Сваки број који је записао Петар мора бити записан тачно толико пута и до стране Васе и обрнуто.)
5	4. Дато је N правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да су почетни троуглови међусобно слични.
5	5. На почетку се на столу налази гомила сребрних новчића и два празна списка. У сваком кораку могуће је или додати златни новчић и забележити тренутни број сребрних новчића на првом списку, или уклонити један сребрни новчић и забележити тренутни број златних новчића на другом списку. Након неколико корака, на столу су остали само златни новчићи. Доказати да су у том тренутку суме бројева на првом и другом списку биле једнаке.

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци	
4	1.	Квадратна табла подељена је на $n \times n$ поља. У половини поља уписан је знак $+$, а у другој половини знак $-$. Доказати да постоје две врсте или две колоне у којима је уписан једнак број плусева.
5	2.	Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао.
6	3.	Да ли је могуће поделити све позитивне делиоце броја 100! (укључујући 1 и 100!) у два скупа са једнаким бројем елемената, таква да је производ елемената у првом скупу једнак производу елемената у другом скупу.
7	4.	На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, ..., 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, ..., 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био.
8	5.	У правоуглом троуглу конструисана су два подударна круга који се међусобно додирују и сваки од њих додирује хипотенузу и једну катету. Нека су M и N додирне тачке кругова и хипотенузе. Доказати да средина дужи MN припада симетрали правог угла овог троугла.
8	6.	Природан број називамо *равним* ако су му све цифре једнаке (рецимо, 4, 111, 999999). Доказати да се сваки n-тоцифрени број може представити као сума не више од $n+1$ равних бројева.
	7.	Паукова мрежа изгледа као табла са 100×100 чворова (односно 99×99 поља). У ову мрежу ухватило се 100 мува, у 100 различитих чворова. Паук, који се на почетку налази у угаоном чвору, креће се по мрежи прелазећи стално у суседни чвор, памтећи колико је корака направио и једући муве успут. Да ли паук може да поједе све муве у не више од
5	a)	2100 потеза;
5	b)	2000 потеза?

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени	задаци
4	1. Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао.
6	2. На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, ..., 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, ..., 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био.
6	3. Гриша је записао 100 бројева на табли и израчунао њихов производ. Затим је увећао сваки број за 1 и приметио да је производ свих бројева остао непромењен. Затим је нове бројеве увећао за 1 и производ је поново остао непромењен, итд. Поновио је ово k пута и сваки пут је производ бројева остао непромењен. Одредити највећу могућу вредност броја k.
7	4. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA и AB редом у A', B' и C'. Дужи AA', BB' и CC' имају заједничку тачку G. Нека су тачке C_A и C_B пресечне тачке круга описаног око $\triangle GA'B'$ са правама AC и BC, различите од B' и A'. Аналогно дефинишемо и тачке A_B, A_C, B_C, B_A. Доказати да тачке $C_A, C_B, A_B, A_C, B_C, B_A$ припадају истом кругу.
7	5. Петар је пребројао све могуће речи састављене од m слова из скупа $\{$Г, Р, А, Д$\}$, које садрже једнак број слова Г и Р. Васа је пребројао све могуће речи састављене од $2m$ слова из скупа $\{$Г, Р$\}$ које садрже једнак број слова Г и Р. Ко је добио већи број?
8	6. Несташни Коља има троугао састављен од жице чији су углови $x^\circ, y^\circ, z^\circ$. Сваку страницу овог троугла он је савио за 1 степен и на тај начин добио неконвексан шестоугао са угловима $(x-1)^\circ$, 181°, $(y-1)^\circ$, 181°, $(z-1)^\circ$, 181°. Доказати да тачке савијања деле странице почетног троугла у истом односу.
10	7. У једном краљевству однос вредности злата и платине одређује се помоћу два природна броја g и p на следећи начин: x грама злата вреде колико и y грама платине ако је $xg = yp$ (x и y не морају бити цели бројеви). Оног дана када је курс био $g = p = 1001$, Ризничари су најавили да ће се сваког наредног дана смањивати за 1 или g или p, тако да ће након 2000 дана и g и p бити једнаки јединици. Није познато којим редоследом ће се смањивати g и p. Банкар је на дан најаве поседовао један килограм злата и један килограм платине. Он жели да у наредним данима врши замену злата за платину и обрнуто (по важећем курсу у дану размене), тако да на крају заврши са барем два килограма злата и барем два килограма платине. Да ли он сигурно ово може да постигне?

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 1. Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, ..., 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

Е. В. Бакаев

2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

2 а) ровно в шесть раз;

2 б) ровно в пять раз?

И. Ф. Акулич

5 3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

Е. В. Бакаев

5 4. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

Е. В. Бакаев

5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если

2 а) $N = 2$;

3 б) N — любое натуральное число, большее 1.

Е. В. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
	1. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
1	а) ровно в шесть раз;
2	б) ровно в пять раз?
	И. Ф. Акулич
4	2. Вершины треугольника обозначены буквами A, B, C по часовой стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой стрелке: сначала вокруг вершины A на угол, равный $\angle A$, потом — вокруг вершины B на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (каждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займёт исходное положение.
	В. Расторгуев
5	3. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)
	И. И. Богданов
5	4. Даны N прямоугольных треугольников ($N > 1$). У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что все исходные треугольники подобны.
	Е. В. Бакаев
5	5. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
	Е. В. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Дана квадратная таблица. В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус, причем всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов. *Б. Р. Френкин*
5	2.	Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник. *Т. В. Казицына, Б. Р. Френкин*
6	3.	Можно ли все натуральные делители числа 100! (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы? *М. И. Малкин*
7	4.	На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту. *Е. В. Бакаев*
8	5.	Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника. *Е. В. Бакаев*
8	6.	Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел. *А. В. Шаповалов*
	7.	Паутина имеет вид клетчатой сетки 100×100 узлов (другими словами, это сетка 99×99 клеток). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 100 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Может ли паук гарантированно съесть всех мух, затратив не более
5	а)	2100 ходов;
5	б)	2000 ходов? *И. И. Богданов*

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Т. В. Казицына, Б. Р. Френкин

6 2. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

Е. В. Бакаев

6 3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

Г. А. Гальперин

7 4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке G. Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_C, B_A. Докажите, что точки A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B лежат на одной окружности.

А. А. Заславский

7 5. Петя посчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася посчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Г. А. Погудин

8 6. На столе лежал проволочный треугольник с углами $x°$, $y°$, $z°$. Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$, $181°$. Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

И. В. Митрофанов

10 7. В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xg = yp$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

И. И. Богданов

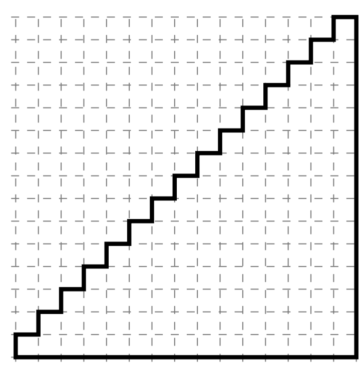
ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 1 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трех цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.) *Е. В. Бакаев*
4	2. На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом. *Е. В. Бакаев*
4	3. Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат? *Н. И. Авилов*
4	4. На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток. *Е. В. Бакаев*



баллы	задачи
5	5. Дано $2n+1$ чисел (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел? *И. Ф. Акулич*

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 1 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат? *Н. И. Авилов*
4	2. Ковер имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными. *И. Ф. Акулич*
4	3. Дано $2n+1$ чисел (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, $\ldots$, два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел? *И. Ф. Акулич*
5	4. Точки K и L делят медиану AM треугольника ABC на три равные части, точка K лежит между L и A. Отметили точку P так, что треугольники KPL и ABC подобны $\left(\frac{KP}{AB}=\frac{PL}{BC}=\frac{KL}{AC}\right)$, причем P и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AM. Докажите, что P лежит на прямой AC. *Е. В. Бакаев*
5	5. По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел. *Г. К. Жуков*

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку, соединяющему середины отрезков AE и BC.

Е. В. Бакаев

6 — 2. Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть — внутри. Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошел весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Е. В. Бакаев

3.

3 — а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?

4 — б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.

Е. В. Бакаев

4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника

4 — а) не превосходить девяти;

5 — б) не превосходить восьми?

Е. В. Бакаев

5.

3 — а) В таблицу $2\times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

6 — б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

А. В. Шаповалов

9 — 6. Внутри окружности расположен выпуклый равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обоих направлениях до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Фольклор, предложил Г. А. Гальперин

10 — 7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император в каком хочет порядке задает каждому волшебнику по вопросу (требующему ответа «да» или «нет») и слушает ответ, а после всех ответов одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И. В. Митрофанов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1.

2 а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?

3 б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.

Е. В. Бакаев

5 2. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, а на сторонах AB и AC — соответственно точки P и Q таким образом, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, попадает на описанную окружность треугольника ABC.

Ф. А. Ивлев

3.

2 а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

6 б) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

А. В. Шаповалов

8 4. Внутри окружности расположен выпуклый равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обоих направлениях до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Фольклор, предложил Г. А. Гальперин

10 5. Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но при этом у их произведения модули всех коэффициентов не больше 1?

А. Я. Канель-Белов

10 6. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И. В. Митрофанов

10 7. Как известно, если у четырехугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырехугольник — квадрат. А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид — куб? (Кубоид — это многогранник, у которого 6 четырехугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра).

М. А. Евдокимов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2015 г.

---

1. График квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X, Z, а ось ординат в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ.

Б. Френкин

2. Треугольники ABC и ADE таковы, что E лежит на луче AB, а D лежит на луче AC. Оказалось, что биссектрисы BX и DY этих треугольников перпендикулярны. Докажите, что XY параллельно EC.

В. Мокин

3. Изначально в бизнес-центре базировались 2^n фирм, каждая занимала некоторую площадь, все площади были различны. Каждый год фирмы объединялись в пары, и в каждой паре фирма с меньшей площадью присоединялась к фирме с большей. При этом ни в какой момент времени не было двух фирм с одинаковой площадью. Через n лет осталась одна фирма. Какое наименьшее место по площади (считая от меньшей к большей) эта фирма могла занимать вначале?

Б. Френкин

4. Дано натуральное число a. Докажите, что любое натуральное число n можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее $10a$, так, чтобы десятичная запись произведения начиналась на a.

Е. Бакаев

5. В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.

М. Евдокимов

6. Два дворца спорта набрали школьников в секции. В каждой секции первого дворца не меньше, чем по n детей, а в каждой секции второго — не меньше, чем по k детей. Оказалось, что каждый школьник посещает столько же секций в первом дворце, сколько и во втором. Кроме того, в любых двух секциях из разных дворцов есть не более одного общего школьника. Докажите, что в первый дворец попало не меньше nk детей.

Н. Верещагин, А. Ромащенко

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2015 г.

Решения задач

1. *График квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X, Z, а ось ординат в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ.*

Б. Френкин

Ответ. 90°.

Решение. *Пример.* Трёхчлен $x^2 - 1$.

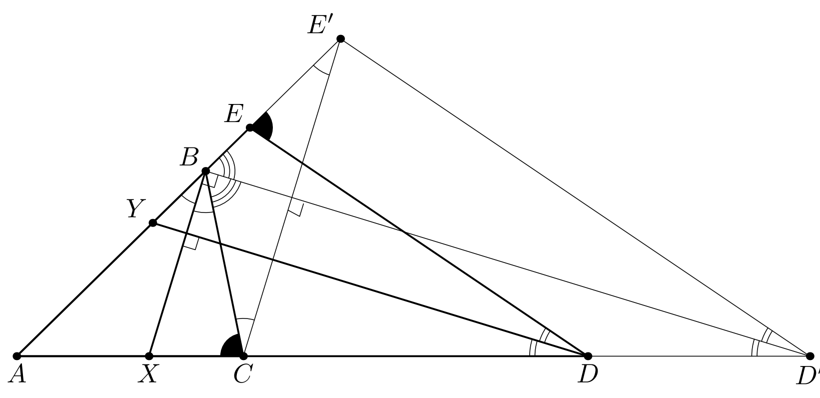
Оценка. Пусть O — начало координат, трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны r и s. Предположим, что угол XYZ тупой. Тогда $|OY|^2 < |OX||OZ|$, поскольку при прямом угле XYZ было бы равенство. Значит, $c^2 < |rs| = |c/a|$, но тогда $0 < |ac| < 1$, что противоречит целочисленности a и c.

Комментарий. Целочисленность b на самом деле не требуется.

2. *Треугольники ABC и ADE таковы, что E лежит на луче AB, а D лежит на луче AC. Оказалось, что биссектрисы BX и DY этих треугольников перпендикулярны. Докажите, что XY параллельно EC.*

В. Мокин

Решение 1. Выберем на лучах AC и AB точки D' и E' соответственно так, что $D'B \parallel DY$ и $D'E' \parallel DE$. Тогда $D'B \perp BX$, так что BD' — внешняя биссектриса в треугольнике ABC, то есть $\angle CBD' = \angle D'BE'$. Поскольку треугольники ADE и $AD'E'$ гомотетичны, прямая $D'B$ является биссектрисой последнего, так что $\angle BD'C = \angle BD'E'$. Значит, треугольники BCD' и $BE'D'$ симметричны относительно BD', откуда $BC = BE'$. Поэтому $\angle BCE' = \angle BE'C = \angle ABC/2 = \angle XBC$, то есть $BX \parallel CE'$. Значит, $\dfrac{AX}{AC} = \dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AY}{AE}$, откуда и следует требуемое.



Решение 2. Из данной перпендикулярности имеем $\angle ABX + \angle ADY + \angle BAD = \pi/2$; отсюда $\angle ABC + \angle ADE = 2(\angle ABX + \angle ADY) = \pi - 2\angle BAD$. Значит, $\angle ACB + \angle AED = (\pi - \angle ABC - \angle BAD) + (\pi - \angle ADE - \angle BAD) = \pi$. По теореме синусов получаем $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin ACB}{\sin BAD} = \dfrac{\sin AED}{\sin BAD} = \dfrac{AD}{DE}$. Значит, $\dfrac{AX}{XC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AY}{YE}$, откуда и следует требуемое.

3. *Изначально в бизнес-центре базировались 2^n фирм, каждая занимала некоторую площадь, все площади были различны. Каждый год фирмы объединялись в пары, и в каждой паре фирма с меньшей площадью присоединилась к фирме с большей. При этом ни в какой момент времени не* *было двух фирм с одинаковой площадью. Через n лет осталась одна фирма. Какое наименьшее место по площади (считая от меньшей к большей) эта фирма могла занимать вначале?*

Б. Френкин

Ответ: $n + 1$.

Решение. Занумеруем фирмы в порядке возрастания капиталов. Пусть фирма A из условия задачи получила номер $m < n + 1$. Так как она сохранилась на первом шаге, то к ней присоединилась некоторая фирма B с номером $k < m$. Было ещё не больше $m - 2$ пар, в которые вошли фирмы с номерами меньше m. В остальных парах обе фирмы были больше, чем A и B, поэтому у оставшихся фирм капитал получился больше, чем у A. Занумеруем фирмы снова, в порядке возрастания образовавшихся капиталов. Тогда фирма A получит номер не больше $m - 1$. Аналогично на каждом следующем шаге её номер убывает. Так как всего шагов $n \geq m$, то не позже чем на предпоследнем шаге A получит номер 1 и присоединится к другой фирме — противоречие.

Теперь построим один из возможных примеров, когда $(n + 1)$-я фирма (обозначим её F) присоединяет все остальные. Представим себе, что после каждого шага объединения общая площадь уменьшается в два раза. Это значит, что большей из двух фирм достаётся не сумма, а среднее арифметическое площадей. Ясно, что на каждом шаге будут оставаться те же фирмы, что и при исходной процедуре. Теперь отметим на числовой прямой положительное число f и будем считать, что это площадь фирмы F по окончании процесса. Отметим два числа g и h, симметричные относительно f. Можно считать, что это площади, занятые фирмой F и другой фирмой G перед последним объединением. Каждая из них есть среднее арифметическое площадей двух фирм перед предыдущим шагом. В качестве этих площадей выберем два числа, симметричных относительно g, и два симметричных относительно h. Одно из них — площадь f' фирмы F перед предпоследним шагом. Можно выбрать эти числа так, что два из них меньше f', а одно — больше. Повторим этот шаг, выбрав 8 чисел в качестве площадей фирм, существовавших перед предыдущим шагом. Можно выбрать их так, что площади трёх фирм будут меньше площади фирмы F, а остальные больше. Продолжая аналогично, получим в качестве исходных площадей фирм 2^n чисел, из которых только n меньше, чем исходная площадь фирмы F. Если все упомянутые числа выбирать достаточно близко друг от друга, то все они окажутся положительными, и мы получаем искомый пример.

4. *Дано натуральное число a. Докажите, что любое натуральное число n можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее $10a$, так, чтобы десятичная запись произведения начиналась на a.*

Е. Бакаев

Решение. Пусть k — наименьшее целое число такое, что $n \leq 10^k$, а d — наименьшее натуральное число такое, что $dn \geq 10^k a$ (иначе говоря, $k = \lceil \lg n \rceil$ и $d = \lceil 10^k a/n \rceil$). Тогда $(d - 1)n < 10^k a$, то есть $dn < 10^k a + n \leq 10^k(a + 1)$; это значит, что число dn начинается на a. Значит, если $d < 10a$, то d — требуемый множитель.

Предположим, что $d > 10a$. Из выбора d получаем, что $10^k a > 10an$, то есть $10^{k-1} > n$, что противоречит выбору k. Наконец, если $d = 10a$, то целое число $dn/10$ также начинается на a, то есть подходит число $d/10 = a < 10a$.

5. *В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.*

М. Евдокимов

Решение. Пусть радиусы шаров равны 1; рассмотрим куб, гомотетичный коробке с центром в её центре, грани которого отстоят от граней коробки на 1. Тогда центры трёх шаров лежат в нём, а попарные расстояния между ними не меньше 2. Если при этом ребро нового куба не короче, чем $\sqrt{2}$, то можно раскрасить его вершины в шахматном порядке и взять 4 шара с центрами в 4 чёрных вершинах. Они обладают всеми необходимыми свойствами.

Осталось показать, что в кубе с ребром, меньшим $\sqrt{2}$, нельзя выбрать три точки с попарными расстояниями хотя бы 2. Пусть такие три точки нашлись. Спроецируем эти точки на ось, параллельную ребру куба; максимальное расстояние между проекциями меньше $\sqrt{2}$ (то есть его квадрат меньше 2), а сумма двух других расстояний равна максимальному (и тогда сумма квадратов этих расстояний также меньше 2). Проделав такие рассуждения для всех трёх осей и применяя теорему Пифагора, получаем, что сумма квадратов попарных расстояний между точками меньше 12, то есть один из этих квадратов меньше 4. Противоречие.

6. *Два дворца спорта набрали школьников в секции. В каждой секции первого дворца не меньше, чем по n детей, а в каждой секции второго — не меньше, чем по k детей. Оказалось, что каждый школьник посещает столько же секций в первом дворце, сколько и во втором. Кроме того, в любых двух секциях из разных дворцов есть не более одного общего школьника. Докажите, что в первый дворец попало не меньше nk детей.*

Н. Верещагин, А. Ромащенко

Решение. Пусть в первом дворце a секций, а во втором — b секций. Пусть общее количество задействованных школьников равно s, и i-й школьник участвует в d_i секций первого дворца (и d_i секций второго). Тогда есть d_i^2 пар секций из разных дворцов таких, что i-й школьник ходит в обе секции пары. Поскольку в каждой из ab пар секций из разных дворцов не более одного общего школьника, получаем

$$ab \geq \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \geq \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^{s} d_i \right)^2 .$$

Просуммируем теперь количества школьников во всех секциях первого дворца, а также количества школьников во всех секциях второго дворца; в обоих случаях получится $\sum\limits_{i=1}^{s} d_i$. С другой стороны, в первом случае получается не меньше, чем an, а во втором — не меньше, чем bk. Значит,

$$ab \geq \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^{s} d_i \right)^2 \geq \frac{an \cdot bk}{s}.$$

Сокращая на ab, получаем $s \geq nk$, что и требовалось.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2015**

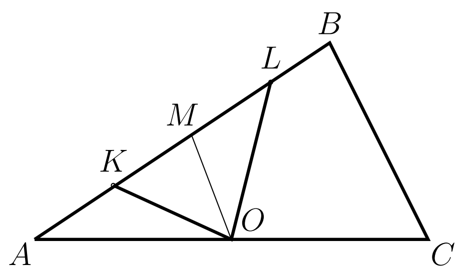
Problem 1. Is it possible to paint six faces of a cube into three colours so that each colour is present, but from any position one can see at most two colours?

Answer. Yes, it is possible.

Solution. Colour two opposite faces of the cube in red and blue, while the other faces in green. From any position one can not see red and blue faces at the same time. □

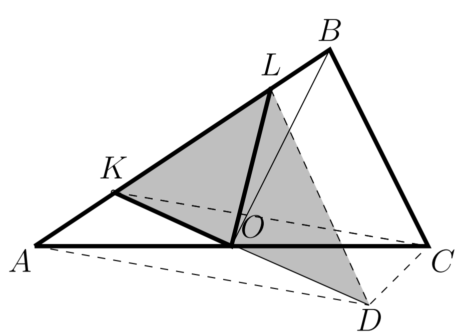
Problem 2. Points K and L are marked on side AB of triangle ABC so that $KL = BC$ and $AK = LB$. Given that O is the midpoint of side AC, prove that $\angle KOL = 90°$.

Solution 1. Let M be a midpoint of AB. Then $MO = 1/2BC = 1/2KL = KM = ML$. Therefore, points K, M, and O belong to a circle with radius KM and centre at M. Since KL is a diameter of this circle, $\angle KOL = 90°$.



□

Solution 2. Let us draw $LD \parallel BC$ and $CD \parallel AB$. Quadrilateral $AKCD$ is a parallelogram ($CD = LB = AK$ and $CD \parallel AK$). Then O, the midpoint of AC is the point of intersection of its diagonals and therefore $KO = OD$. Since the triangle KLD is isosceles ($LK = BC = LD$, its median LO is also an altitude. Hence $\angle KOL = 90°$.



□

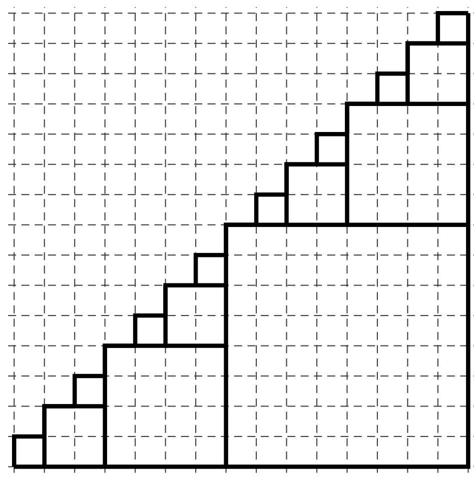
Problem 3. Pete summed up 10 consecutive powers of 2, starting from some power, while Basil summed up several consecutive positive integers starting from 1. Can they get the same result?

Answer. Yes, they can.

Solution. Indeed, let $2^{k+1} + \dots 2^{k+10} = 1 + 2 + \dots + n$. Simplifying we see that $2^{k+2}(2^{10} - 1) = n(n+1)$ holds for $n = 2^{10} - 1$ and $k = 8$. □

Problem 4. A figure, given on the grid, consists of a 15-step staircase and horizontal and vertical bases (see the figure). What is the least number of squares one can split this figure into? (Splitting is allowed only along the grid).

Solution. Note that each step's corner belongs to some square and no two corners belong to the same square. Therefore the number of squares is no less than 15. Example that splitting the figure into 15 squares can be achieved:



□

Problem 5. Among $2n + 1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers $1, 2, ..., n$ is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any $m = 1, \dots, n$ there are exactly m numbers between two m's?

Answer. For any n.

Solution. Observe that two sets of odd numbers, each set from from 1 to $2k + 1$ can be arranged according to the requirement with one empty space in the middle:

$$2k+1, 2k-1, \dots, 3, 1, \boxed{}, 1, 3, \dots, 2k-1, 2k+1$$

while two sets of even from from 1 to $2k$ can be arranged according to the requirement with two empty spaces in the middle:

$$2k, 2k-2, \dots, 2, 1, \boxed{}\boxed{}, 1, 2, \dots, 2k-2, 2k$$

(a) $n = 2k+1$. Consider the follow arrangement:

$$2k+1, 2k-1, \ldots, 3, 1, \boxed{2k}, 1, 3, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k-2, 2k-4 \ldots 2, \boxed{2k, 0}, 2, \ldots, 2k-2$$

Inserting two copies of $2k$ as shown, we see that for any $m \neq 2k$ requirement holds and we can check that it holds for $m = 2k$ as well.

Indeed,

$$1, 3, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k-2, 2k-4 \ldots 2,$$

includes $k+1$ of odd numbers and $k-1$ of even numbers, $2k$ numbers in total.

(b) $n = 2k$. In a similar way one can check that the following arrangement works:

$$2k-1, 2k-3, \ldots, 3, 1, \boxed{2k}, 1, 3, \ldots, 2k-1, 2k-2, 2k-4 \ldots 2, \boxed{0, 2k}, 2, \ldots, 2k-2$$

. $\square$

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2015**

Problem 1. Pete summed up 100 consecutive powers of 2, starting from some power, while Basil summed up several consecutive positive integers starting from 1. Can they get the same result?

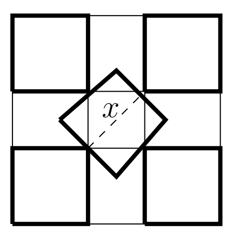
Answer. Yes, they can.

Solution. Indeed, let $2^{k+1} + \ldots 2^{k+100} = 1 + 2 + \cdots + n$. Simplifying we see that $2^{k+2}(2^{100} - 1) = n(n + 1)$ holds for $n = 2^{100} - 1$ and $k = 98$. $\square$

Problem 2. A moth made four small holes in a square carpet with a 275 cm side. Can one always cut out a square piece with a 1 m side without holes? (Consider holes as points).

Answer. One can always cut out a square piece with a 1 m side without holes.

Solution. On the picture one can see the positions of 5 non overlapping squares, four corner squares with side of 1 m and a central square with side $x = 0.75\sqrt{2} > 1$. Four moths can make holes in at most four of these pieces.



$\square$

Problem 3. Among $2n + 1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers $1, 2, ..., n$ is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any $m = 1, \ldots, n$ there are exactly m numbers between two m's?

Answer. For any n.

Solution. Observe that two sets of odd numbers, each set from from 1 to $2k + 1$ can be arranged according to the requirement with one empty space in the middle:

$$2k + 1, 2k - 1, \ldots, 3, 1, \boxed{}, 1, 3, \ldots, 2k - 1, 2k + 1$$

while two sets of even from from 1 to $2k$ can be arranged according to the requirement with two empty spaces in the middle:

$$2k, 2k - 2, \ldots, 2, 1, \boxed{}\boxed{}, 1, 2, \ldots, 2k - 2, 2k$$

(a) $n = 2k + 1$. Consider the follow arrangement:

$$2k{+}1, 2k{-}1, \ldots, 3, 1, \boxed{2k}, 1, 3, \ldots, 2k{-}1, 2k{+}1, 2k{-}2, 2k{-}4 \ldots 2, \boxed{2k, 0}, 2, \ldots, 2k{-}2$$

Inserting two copies of $2k$ as shown, we see that for any $m \neq 2k$ requirement holds and we can check that it holds for $m = 2k$ as well.

Indeed,

$$1, 3, \ldots, 2k-1, 2k+1, 2k-2, 2k-4 \ldots 2,$$

includes $k + 1$ of odd numbers and $k - 1$ of even numbers, $2k$ numbers in total.

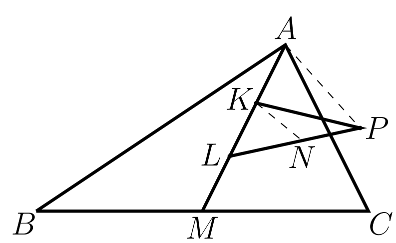
(b) $n = 2k$. In a similar way one can check that the following arrangement works:

$$2k-1, 2k-3, \ldots, 3, 1, \boxed{2k}, 1, 3, \ldots, 2k-1, 2k-2, 2k-4 \ldots 2, \boxed{0, 2k}, 2, \ldots, 2k-2$$

. □

Problem 4. Points K and L are marked on the median AM of triangle ABC, so that $AK = KL = LM$. Point P is chosen so that triangles KPL and ABC are similar $\left(\frac{KP}{AB} = \frac{PL}{BC} = \frac{KL}{AC}\right)$. Given that points P and C are on the same side of line AM, prove that point P lies on line AC.

Solution. Let KN be median of triangle LKP. Since triangles ABC and KPL are similar, triangles LKN and CAM are similar as well. If $\angle CAM = \alpha$, then $\angle LKN = \alpha$. On the other hand, triangles LKN and LAP are similar ($KN \parallel AP$ as a midline of triangle LAP). Therefore, $\angle LAP = \angle LKN = \alpha$. Hence $\angle LAC = \angle LAP$ and therefore P lies on the line AC.



□

Problem 5. 2015 positive integers are arranged in a circular order. The difference between any two adjacent numbers coincides with their greatest common divisor. Determine the maximal value of N which divides the product of all 2015 numbers, regardless of their choice.

Answer. $N = 3 \cdot 2^{1009}$.

Solution. Observe that in order to satisfy the assumptions the sequence of numbers cannot contain two adjacent odd numbers. Therefore it contains at least 1008 even numbers and the product of the numbers is divisible by 2^{1008}. Assume that the product of the numbers is not divisible by 2^{1009} (so that no even number is divisible by 4). By PHP there are two adjacent even numbers. Then their difference is divisible by 4. Therefore one of these even numbers must be divisible by 4. Contradiction.

Let us prove that the product of the numbers is divisible by 3. Assume that no number is divisible by 3 (so it equals 1 or 2 modulo 3.).

Moreover, reminders 1 and 2 must alternate (otherwise the difference is divisible by 3 and one of the numbers is divisible by 3). Since the total number of alternating objects must be even we got a contradiction.

Hence the product of the numbers is divisible by at least 3×2^{1009}.

Example that 3×2^{1009} is reached:

$$\underbrace{2,\ 1, 2,\ \ldots,\ 2,\ 1}_{1006\ \text{“2”},\ 1006\ \text{“1”}},\ 2,\ 3,\ 4$$

$\square$

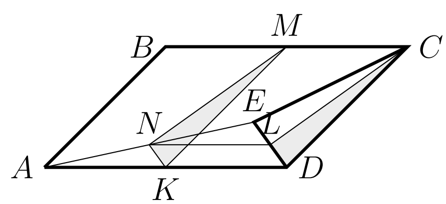
International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2015**

Problem 1. A point is chosen inside a parallelogram $ABCD$ so that $CD = CE$. Prove that the segment DE is perpendicular to the segment connecting the midpoints of the segments AE and BC.

Solution. Denote by M, N, K and L the midpoints of BC, AE, AD and ED respectively. Since triangle ECD is isosceles, the median CL is also an altitude and therefore $\angle CLD = 90°$. Since NK is the midline of triangle AED, NK is parallel to ED and $NK = LD$. Then triangles MKN and CDL are congruent. ($NK = LD, MK = CD$ and $\angle MKN = \angle CDL$, as angles between parallel sides). Hence, $\angle MNK = 90°$ implying that ED is perpendicular to MN.

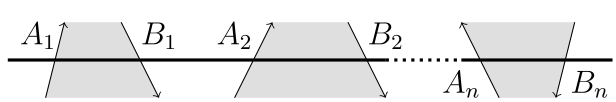


□

Problem 2. Area 51 has the shape of a non-convex polygon. It is protected by a chain fence along its perimeter and is surrounded by a minefield so that a spy can only move along the fence. The spy went around the Area once so that the Area was always on his right. A straight power line with 36 poles crosses this area so that some of the poles are inside the Area, and some are outside it. Each time the spy crossed the power line, he counted the poles to the left of him (he could see all the poles). Having passed along the whole fence, the spy had counted 2015 poles in total. Find the number of poles inside the fence.

Answer. 1.

Solution. Let $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$ be consecutive points where the power line enters and exits the Area; a Spy goes along the fence so that the Area is on his right. Let us orient the line so that when it enters the Area the Spy goes "up" and when it exits the Area, the Spy goes "down" (see the figure). Then passing through A_k and B_k (A_k and B_k are not necessary consecutive for the Spy) the Spy counts all poles to the left from A_k and all poles to the right of B_k, therefore he counts $36 - a_k$ poles (skipping the poles a_k between A_k and B_k). Then coming back to the point he started the Spy counts $36n - x = 2015$ poles where $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(0 \leq x \leq 36)$. Since$2016 = 2015 + 1$ is divisible by 36 this equation has an unique solution $x = 1$.



□

Problem 3. (a) The integers x, x^2 and x^3 begin with the same digit. Does it imply that this digit is 1?

(b) The same question for the integers $x, x^2, x^3, \dots, x^{2015}$.

Answer. No.

Solution. (a) *Example:* $x = 99$, $x^2 = 99^2 = 9801$, $x^3 = 99^3 = 970299$.

(b) *Solution (Ben Wei).* We use Bernoulli inequality $(1-\varepsilon)^k \geq (1 - k\varepsilon)$ for $0 < \varepsilon < 1$ and $k \geq 1$ (It can be proved by induction). Consider $x = 99999$ in the form $x = 10^5(1-\varepsilon)$ with $\varepsilon = 10^{-5}$. Then $x^k = 10^{5k}(1-\varepsilon)^k \geq 10^{5k}(1-k\varepsilon) \geq 0.9 \cdot 10^{5k}$.

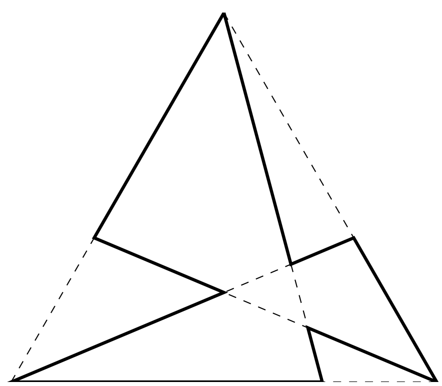
Therefore $10^{5k} > x^k \geq 0.9 \cdot 10^{5k}$ for all $k = 1, 2, \dots, 2015$, meaning that all given integers start with digit 9.

$\square$

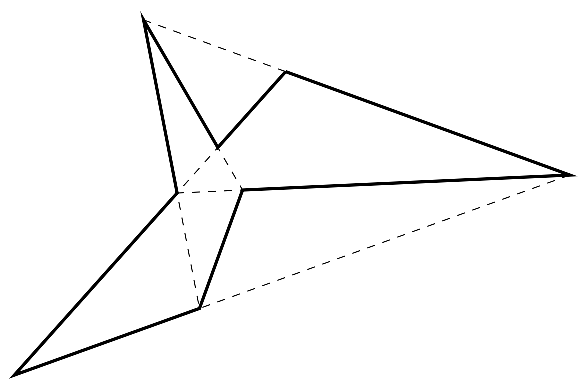
Problem 4. For each side of some polygon, the line containing it contains at least one more vertex of this polygon. Is it possible that the number of vertices of this polygon is

(a) ≤ 9?

(b) ≤ 8?



(a)



(b)

Solution (a) (Ben Wei), (b) (Halim Howard). $\square$

Problem 5. (a) A $2 \times n$-table (with $n > 2$) is filled with numbers so that the sums in all the columns are different. Prove that it is possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different.

(b) A 10×10-table is filled with numbers such that the sums in all the columns are different. Is it always possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different?

Solution. (a) (Dima Paramonov). If sums of the numbers in rows are different, then the statement holds. Assume that these sums are the same. If some column contains different numbers, then exchanging these numbers we satisfy the requirement. Assume that in each column the top and the bottom numbers are the same (so that both rows of the table are identical). We can always change the order of columns in the table so that $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$. Let us consider the following permutation which affects only the first three columns:

a_1	a_1	a_2	a_4	$\ldots$	a_k
a_2	a_3	a_3	a_4	$\ldots$	a_k

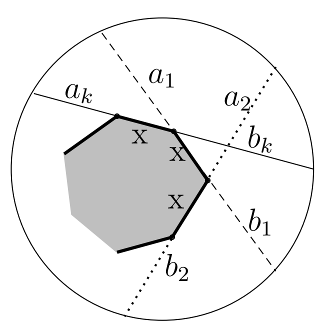
It is clear now that sums of the numbers in rows are different. Indeed, $a_1+a_1+a_2 < a_1+a_2+a_3$. Since $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < 2a_4 < \ldots . < 2a_k$, sums of the numbers in each column remain different.

(b) Counterexample (Sina Abbasi). Consider a 10×10 table, filled with "0"s and "1"s as follows: column i, $i = 1, ..., 9$ contains $i - 1$ of 1s, the last column is completely filled with 1swhile the remaining cells are filled with "0"s.

Since the total sum of elements in a table is the same no matter if it is calculated by columns or by rows and all possible values of sums in rows are between 0 and 10 (11 different values in total) we have: $0+1+2+3+4+5+6+7+8+10 = 0+1+2+\cdots+10-x$ where x is a value of sum in a row we must exclude (assuming that all other sums of the numbers in rows are different). Given that $0 \le x \le 10$, $x = 9$ is an unique solution. Therefore the possible values of sums in rows are $0, 1, \ldots, 8$ and 10. However the existence of a row with value 0 contradicts to the existence of a column with value 10. □

Problem 6. A convex N-gon with equal sides is located inside a circle. Each side is extended in both directions up to the intersection with the circle so that it contains two new segments outside the polygon. Prove that one can paint some of these new $2N$ segments in red and the rest in blue so that the sum of lengths of all the red segments would be the same as for the blue ones.

Combined solution of Victor Rong and Frieda Rong. Standing at some point inside of the polygon and looking towards its side x_i, $(i = 1, ..., k, |x_i| = x)$ denote the segments to the left and to the right of the side as a_i and b_i respectively.



Consequently applying Intersecting Chord Theorem to each vertex of the polygon we get

$$\begin{aligned}
a_1(x+b_1) &= b_k(a_k+x),\\
a_2(x+b_2) &= b_1(a_1+x),\\
a_3(x+b_3) &= b_2(a_2+x),\\
&\dots\\
a_k(x+b_k) &= b_{k-1}(a_{k-1}+x).
\end{aligned}$$

Summing up the equations and simplifying we get

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k.$$

By colouring a_i and b_i in red and blue we prove the statement. □

Problem 7. An Emperor invited 2015 wizards to a festival. Each of the wizards knows who of them is good and who is evil, however the Emperor doesn't know this. A good wizard always tells the truth, while an evil wizard can tell the truth or lie at any moment. The Emperor asks each wizard (in an order of his choice) a single question, maybe different for different wizards, and listens to the answer which is either "yes" or "no". Having listened to all the answers, the Emperor expels a single wizard through a magic door which shows if this wizard is good or evil. Then the Emperor repeats the procedure with the remaining wizards, and so on. The Emperor may stop at any moment, and after this the Emperor may expel or not expel a wizard. Prove that the Emperor can expel all the evil wizards having expelled at most one good wizard.

Solution of Sina Abbasi. Step 1. The Emperor lists all wizards $W_1, W_2, \ldots, W_N$ and asks everyone but W_1 if W_1 is evil (It does not no matter what he asks W_1).

- If all of them confirm that W_1 is evil, W_1 is expelled. If he occurs to be evil, the number of evil wizards is decreased by 1 (so the Emperor can start the next round). If W_1 occurs to be good then all the remaining wizards are evil, and they are expelled in next rounds one by one.

- If wizard W_i answers "no", then he is expelled. If he occurs to be evil the number of evil wizards is decreased by 1. If he occurs to be good we find one non-expelled good wizard (W_1) and we go to Step 2.

Step 2. Assume that all wizards are lined up, starting with good wizard W_1. The Emperor asks W_i ($i = 1, \ldots$) if W_{i+1} is evil (It does not no matter what he asks the last wizard). If W_i answers "yes", W_{i+1} is expelled and the Emperor can start the next round. If all wizards said "no", then all evil wizards are expelled and Emperor stops the trial. □

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2015**

Problem 1. (a) The integers x, x^2 and x^3 begin with the same digit. Does it imply that this digit is 1?

(b) The same question for the integers $x, x^2, x^3, \dots, x^{2015}$.

Answer. No.

Solution. (a) *Example:* $x = 99$, $x^2 = 99^2 = 9801$, $x^3 = 99^3 = 970299$.

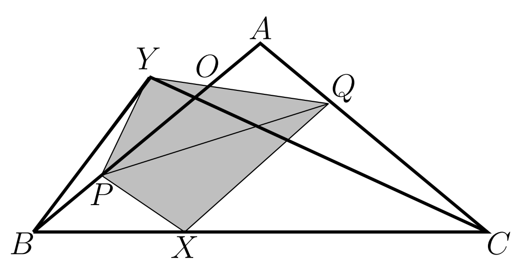
(b) *Solution (Ben Wei).* We use Bernoulli inequality $(1-\varepsilon)^k \geq (1-k\varepsilon)$ for $0 < \varepsilon < 1$ and $k \geq 1$ (It can be proved by induction). Consider $x = 99999$ in the form $x = 10^5(1-\varepsilon)$ with $\varepsilon = 10^{-5}$. Then $x^k = 10^{5k}(1-\varepsilon)^k \geq 10^{5k}(1-k\varepsilon) \geq 0.9 \cdot 10^{5k}$.

Therefore $10^{5k} > x^k \geq 0.9 \cdot 10^{5k}$ for all $k = 1, 2, \dots, 2015$, meaning that all given integers start with digit 9.

□

Problem 2. A point X is marked on the base BC of an isosceles triangle ABC, and points P and Q are marked on the sides AB and AC so that $APXQ$ is a parallelogram. Prove that the point Y symmetrical to X with respect to line PQ lies on the circumcircle of the triangle ABC.

Solution (Richard Chow). Consider triangles PYO and OAQ. Note that $\angle PYQ = \angle PXQ = \angle PAQ$ and $\angle YOP = \angle AOQ$. Then $\angle YPO = \angle AQO$ which implies that $\angle BPY = \angle YQC$. Since triangle ABC is isosceles and $PX \parallel AC$, triangle BPX is also isosceles and since $PX = PY$, triangle BPY is isosceles as well. In similar way we can rove that triangle YQC is also isosceles. Then triangles BPY and YQC are similar. If follows that $\angle BYC = \angle BAC$ and therefore quadrilateral $BYAC$ is cyclic.



□

Problem 3. (a) A $2 \times n$-table (with $n > 2$) is filled with numbers so that the sums in all the columns are different. Prove that it is possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different.

(b) A 100×100-table is filled with numbers such that the sums in all the columns are different. Is it always possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different?

Solution. (a) (Dima Paramonov). If sums of the numbers in rows are different, then the statement holds. Assume that these sums are the same. If some column contains different numbers, then exchanging these numbers we satisfy the requirement. Assume that in each column the top and the bottom numbers are the same (so that both rows of the table are identical). We can always change the order of columns in the table so that $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$. Let us consider the following permutation which affects only the first three columns:

a_1	a_1	a_2	a_4	$\ldots$	a_k
a_2	a_3	a_3	a_4	$\ldots$	a_k

It is clear now that sums of the numbers in rows are different. Indeed, $a_1+a_1+a_2 < a_1+a_2+a_3$. Since $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < 2a_4 < \ldots . < 2a_k$, sums of the numbers in each column remain different.

(b) Counterexample (Sina Abbasi). Consider a 100×100 table, filled with "0"s and "1"s as follows: column i, $i = 1, ..., 99$ contains $i - 1$ of 1s, the last column is completely filled with 1s while the remaining cells are filled with "0"s.

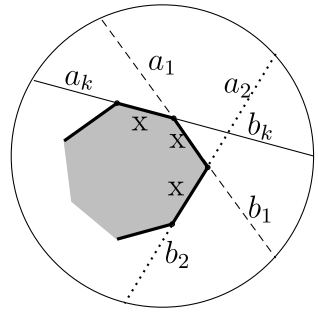
Since the total sum of elements in a table is the same no matter if it is calculated by columns or by rows and all possible values of sums in rows are between 0 and 100 (101 different values in total) we have: $0 + 1 + 2 + \cdots + 98 + 100 = 0 + 1 + 2 + \cdots + 100 - x$ where x is a value of sum in a row we must exclude (assuming that all other sums of the numbers in rows are different). Given that $0 \leq x \leq 100$, $x = 99$ is an unique solution. Therefore the possible values of sums in rows are $0, 1, \ldots, 98$ and 100. However the existence of a row with value 0 contradicts to the existence of a column with value 100. $\square$

Problem 4. A convex N-gon with equal sides is located inside a circle. Each side is extended in both directions up to the intersection with the circle so that it contains two new segments outside the polygon. Prove that one can paint some of these new $2N$ segments in red and the rest in blue so that the sum of lengths of all the red segments would be the same as for the blue ones.

Combined solution of Victor Rong and Frieda Rong. Standing at some point inside of the polygon and looking towards its side x_i, $(i = 1, ..., k, |x_i| = x)$ denote the segments to the left and to the right of the side as a_i and b_i respectively.

Consequently applying Intersecting Chord Theorem to each vertex of the polygon we get

$$
\begin{aligned}
a_1(x + b_1) &= b_k(a_k + x), \\
a_2(x + b_2) &= b_1(a_1 + x), \\
a_3(x + b_3) &= b_2(a_2 + x), \\
&\ldots \\
a_k(x + b_k) &= b_{k-1}(a_{k-1} + x).
\end{aligned}
$$



Summing up the equations and simplifying we get

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k.$$

By colouring a_i and b_i in red and blue we prove the statement. $\square$

Problem 5. Do there exist two polynomials with integer coefficients such that each polynomial has a coefficient with an absolute value exceeding 2015 but all coefficients of their product have absolute values not exceeding 1?

Answer. Yes, such two polynomials exist.

Solution of Central Committee. Let us call a polynomial $P(x)$ *simple* if every coefficient is either 0 or 1. Observe that if $P(x)$ is a simple polynomial of degree n then $(x^m + 1)P(x)$ with $m > n$ is also a simple polynomial. Therefore, starting with the polynomial $(x + 1)$ and multiplying it recursively 2016 times by polynomials in the form of $(x^m + 1)$ with increasing odd m we obtain a simple polynomial $f(x)$. Note that $f(x)$ is divisible by $g(x) = (x + 1)^{2017} = x^{2017} + 2017x^{2016} + \ldots$. (Indeed, $(x^m + 1)$ with odd m is divisible by $(x+1)$). Let $f(x) = g(x)h(x)$ where $h(x) = x^k + ax^{k-1} + \ldots$. Consider the second coefficient of $f(x)$. On one hand it equals to 0 or 1, on the other hand it equals to $2017 + a$. Thus, $a = 2017$ or $a = 2016$, in any case exceeding 2015. $\square$

Problem 6. An Emperor invited 2015 wizards to a festival. Each of the wizards knows who of them is good and who is evil, however the Emperor doesn't know this. A good wizard always tells the truth, while an evil wizard can tell the truth or lie at any moment. The Emperor gives each wizard a card with a single question, maybe different for different wizards, and after that listens to the answers of all wizards which are either "yes" or "no". Having listened to all the answers, the Emperor expels a single wizard through a magic door which shows if this wizard is good or evil. Then the Emperor makes new cards with questions and repeats the procedure with the remaining wizards, and so on. The Emperor may stop at any moment, and after this the Emperor may expel or not expel a wizard. Prove that the Emperor can expel all the evil wizards having expelled at most one good wizard.

Solution of Sina Abbasi. Step 1. The Emperor lists all wizards $W_1, W_2, \ldots, W_N$ and asks everyone but W_1 if W_1 is evil (It does not no matter what he asks W_1).

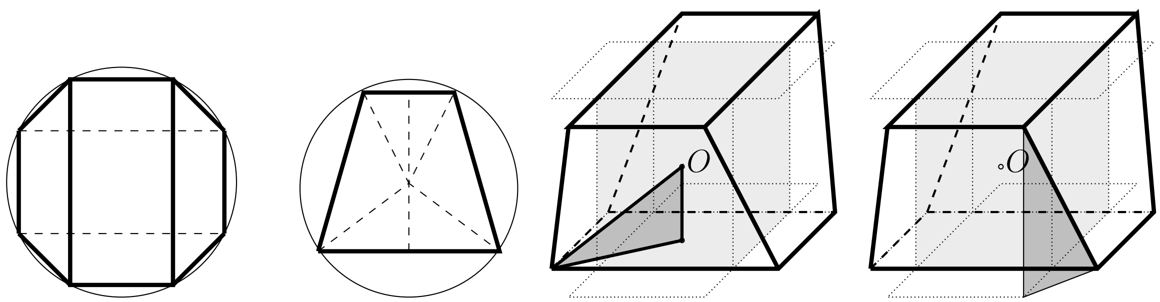
- If all of them confirm that W_1 is evil, W_1 is expelled. If W_1 occurs to be evil, the number of evil wizards is decreased by 1 (so the Emperor can start the next round). If W_1 occurs to be good then all the remaining wizards are evil, and they are expelled one by one in next rounds.

- If wizard W_i answers "no", then he is expelled. If W_i occurs to be evil the number of evil wizards is decreased by 1. If W_i occurs to be good we find one non-expelled good wizard (W_1) and we go to Step 2.

Step 2. Assume that all wizards are lined up, starting with good wizard W_1. The Emperor asks W_i ($i = 1, ...$) if W_{i+1} is evil (It does not no matter what he would ask the last wizard). If W_i answers "yes", W_{i+1} is expelled and the Emperor can start the next round. If all wizards said "no", then all evil wizards are expelled and Emperor stops the trial. □

Problem 7. It is well-known that if a quadrilateral has the circumcircle and the incircle with the same centre then the quadrilateral is a square. Is the similar statement true in 3 dimensions: namely, if a cuboid is inscribed into a sphere and circumscribed around a sphere and the centres of the spheres coincide, does it imply that the cuboid is a cube? (A cuboid is a polyhedron with 6 quadrilateral faces such that each vertex belongs to 3 edges.)

Answer. Such cuboid is not necessary a cube.



(a) top view (b) side view (c) (d)

Solution of Central Committee. Consider two 6×8 rectangles with a common centre. Rotate them ninety degrees about each other and shift at the at distance $4\sqrt{3}$ so that the line connecting their centres is perpendicular to both rectangles.

Let O be a midpoint of this line. Connecting the corresponding vertices of top and bottom rectangles we get a cuboid, with 8 vertices, 6 faces and three edges emitting from each vertex. The distance between O and each of eight vertices is the same, equaled to $R = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{37}$. Therefore the cuboid is inscribed into sphere with centre O and radius R.

Now observe that each of six faces of the cuboid (2 congruent rectangles and 4 congruent trapezoids) is inscribed in a circle of radius 5. Indeed, radius of the circle circumscribed about rectangle equals a half of it diagonal $\sqrt{6^2 + 8^2}/2 = 5$. A lateral side of the trapezoid equals to $\sqrt{48 + 2} = \sqrt{50}$ while a heigh of the trapezoid equals $\sqrt{50 - 1} = 7$. It is easy to check that such a trapezoid is also inscribed into a circle of radius 5. Since each face of the solid is inscribed in circles of equal radius, the centres of these circles ($O_i, i = 1, \ldots, 6$) are equidistant from O. This implies that a sphere with centre O and radius $r = OO_i$ touches each face at point O_i. □