Зоран Штерјов
Пробиштип

ЕДЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ

Со помош на неколку теореми и соодветни примери ќе покажеме како може својството монотоност на функции да се примени за решавање на некои видови равенки.

Дефиниција: Нека f е функција определена на интервалот $D \subseteq R$.

- Функцијата $f(x)$ е **строго монотоно растечка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) < f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.

- Функцијата $f(x)$ е **строго монотоно опаднувачка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.

Монотоноста на функциите може да се испита и со помош на изводи. Имено, диференцијабилната функција $f(x)$ строго монотоно расте на интервалот D ако и само ако $f'(x) > 0$, за секој $x \in D$, а строго монотоно опаѓа на D ако и само ако $f'(x) < 0$, за секој $x \in D$. Функцијата $f(x)$ е константна на D ако и само ако $f'(x) = 0$, за секој $x \in D$.

<u>Теорема 1</u>: Ако $f(x)$ е строго монотона функција (растечка или опаднувачка) на интервалот D, бројот c е константа и бројот $x = a$ е решение на равенката $f(x) = c$, тогаш бројот a е единствено решение на равенката.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D.

-Ако $x > a$, тогаш $f(x) > f(a) = c$, па за $x > a$ равенката нема решение.

-Ако $x < a$, тогаш $f(x) < f(a) = c$, па за $x < a$ равенката нема решение.

Значи $x = a$ е единствено решение на равенката. Аналогно се докажува кога $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција на интервалот D.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $a^x + b^x = (a+b)^x$, каде што $a, b \in R \setminus \{0,1\}$.

Решение: Едно очигледно решение е бројот $x = 1$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$\left(\tfrac{a}{a+b}\right)^x + \left(\tfrac{b}{a+b}\right)^x = 1.$$

Нека $f(x) = \left(\tfrac{a}{a+b}\right)^x + \left(\tfrac{b}{a+b}\right)^x$. При $a, b \in R \setminus \{0,1\}$, функцијата $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $x = 1$ е единствено решение на равенката.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $9^x - 1 = 2^x(3 + 3 \cdot 2^x + 2^{2x})$, каде што $x \in R$.

Решение: Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$9^x = 1 + 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{2x} + 2^{3x},$$

$9^x = (1 + 2^x)^3$, односно $9^{\frac{x}{3}} = 1 + 2^x$,

и ако ставиме $t = \frac{x}{3}$, тогаш равенката добива облик $9^t = 1 + 8^t$, односно

$$(\tfrac{1}{9})^t+(\tfrac{8}{9})^t=1 \qquad (*)$$

Едно очигледно решение на оваа равенка е бројот $t=1$. Нека $f(t)=(\tfrac{1}{9})^t+(\tfrac{8}{9})^t$, $f:R\to R^+$. Функцијата $f(t)$ е строго монотоно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $t=1$ е единствено решение на равенката (*). Тогаш $x=3$ е единствено решение на дадената равенка.

<u>Теорема 2</u>: Збир на две строго монотоно растечки (опаднувачки) функции е строго монотоно растечка (опаднувачка) функција.

Доказ: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно опаднувачки функции на интервалот D. Тогаш за нив важи дека $f'(x)<0$ и $g'(x)<0$. Ако ставиме $h(x)=f(x)+g(x)$, тогаш и $h'(x)<0$, што значи дека и нивниот збир е строго монотоно опаднувачка функција. Аналогно се докажува кога $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно растечки функции на интервалот D.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $2^x+3^x=7+2\sqrt{3^x}$, каде што $x\in R$.

Решение: Ако $x\le 0$, тогаш $2^x+3^x\le 1+1=2$, додека $7+2\sqrt{3^x}>7$, што значи дека за $x\le 0$ равенката нема решение. Нека $x>0$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$3^x-2\sqrt{3^x}+1+2^x=8,$$

$$(\sqrt{3^x}-1)^2+2^x=8, \text{ односно } ((\sqrt{3})^x-1)^2+2^x=8.$$

Нека $f(x)=(\sqrt{3^x}-1)^2$, $f:(0,\infty)\to R$ и $g(x)=2^x$, $g:(0,\infty)\to R$. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно растечки функции, па и нивниот збир $h(x)=f(x)+g(x)$ е строго монотоно растечка функција. Според *Теорема 1*, равенката $h(x)=8$ има единствено решение, и бидејќи $h(2)=8$, следува дека $x=2$ е единствено решение на дадената равенка.

<u>Теорема 3</u>: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка (опаднувачка) функција на интервалот D, а $g(x)$ е строго монотоно опаднувачка (растечка) функција на интервалот D. Ако $x=a$ е решение на равенката $f(x)=g(x)$, тогаш $x=a$ е единствено решение.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D, а $g(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција на интервалот D. Тогаш $-g(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D, па $f(x)-g(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D. Според *Теорема 1*, равенката $f(x)-g(x)=0$, т.е. $f(x)=g(x)$ има единствено решение.

❖***Пример:*** Реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{3}}(7+(\sqrt{2})^x)+0,5x=0,5\log_{\frac{1}{3}}(3+(\sqrt{2})^x+2^x).$$

Решение: Равенката ја трансформираме во облик

$$\log_{\frac{1}{3}}(7+(\sqrt{2})^x)+\log_{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{3})^{\frac{x}{2}}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3+(\sqrt{2})^x+2^x}\ ,$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(7+(\sqrt{2})^x)(\tfrac{1}{3})^{\frac{x}{2}}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3+(\sqrt{2})^x+2^x}\ ,$$

$$7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^x=\sqrt{3+\left(\sqrt{2}\right)^x+2^x}\ .$$

Нека $f,g:R\to R^+$, $f(x)=7(\frac{1}{\sqrt{3}})^x+(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^x$ и $g(x)=\sqrt{3+(\sqrt{2})^x+2^x}$. Тогаш последната равенка добива облик $f(x)=g(x)$ и има решение $x=2$. Бидејќи $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција, а $g(x)$ е строго монотоно растечка функција, според *Теорема 3* следува дека $x=2$ е единствено решение на равенката.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $10^x+11^x+12^x=13^x+14^x$ во множеството R.

Решение: Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(\tfrac{10}{13})^x+(\tfrac{11}{13})^x+(\tfrac{12}{13})^x=1+(\tfrac{14}{13})^x\ .$$

Нека $f(x)=(\frac{10}{13})^x+(\frac{11}{13})^x+(\frac{12}{13})^x$ и $g(x)=1+(\frac{14}{13})^x$, $f,g:R\to R^+$. Функцијата $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка, а функцијата $g(x)$ е строго монотоно растечка. Според *Теорема 3* равенката $f(x)=g(x)$ има единствено решение. Јасно е дека $f(2)=g(2)$, па $x=2$ е единствено решение. Навистина:

- ако $x<2$, тогаш $f(x)>f(2)$ и $g(x)<g(2)$, односно

$$g(x)<g(2)=f(2)<f(x)\ ,$$

па равенката нема решение помало од 2;

- ако $x>2$, тогаш $f(x)<f(2)$ и $g(x)>g(2)$, односно

$$f(x)<f(2)=g(2)<g(x)\ ,$$

па равенката нема решение поголемо од 2.

Значи $x=2$ е единствено решение на равенката.

<u>Теорема 4</u>: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотони функции (растечки или опаднувачки) на интервалот D. Тогаш $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција.

Доказ: Нека $x_1,x_2\in D$ и $x_1<x_2$. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно растечки функции на интервалот D, тогаш $f(x_1)<f(x_2)$ и $g(f(x_1))<g(f(x_2))$, односно $(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, што значи дека $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно опаднувачки функции на интервалот D, тогаш $f(x_1)>f(x_2)$ и $g(f(x_1))<g(f(x_2))$, односно повторно $(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, што значи дека $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција.

Забелешка: Ако $f(x)$ и $g(x)$ се функции со различна монотоност, тогаш $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $2^{\log_3 x} = -x+2$, $x \in R^+$.

Решение: Нека $f(x) = \log_3 x$, $f: R^+ \to R$, а $g(x) = 2^x$, $g: R \to R^+$. Бидејќи $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно растечки функции, според *Теорема 4* следува дека и $(g \circ f)(x) = 2^{\log_3 x}$ е строго монотоно растечка функција. Функцијата $h(x) = -x+2$, $h: R \to R$ е строго монотоно опаднувачка, па според *Теорема 3* равенката $(g \circ f)(x) = h(x)$ има единствено решение. Јасно е дека решение на равенката е бројот $x = 1$.

Пример: Да се реши равенката $\sqrt{x+5} - \sqrt[4]{20-x} = 1$ во множеството R.

Решение: Функцијата $f: [-5, \infty) \to R$, $f(x) = \sqrt{x+5}$ е строго монотоно растечка како композиција на две строго монотоно растечки функции. Функцијата $g: [-\infty, 20) \to R$, $g(x) = \sqrt[4]{20-x}$ е строго монотоно опаднувачка како композиција на една строго монотоно растечка функција и една строго монотоно опаднувачка функција. Добиваме дека функцијата $h: [-5, 20] \to R$, $h(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt[4]{20-x}$ е строго монотоно растечка како разлика меѓу строго монотоно растечка и строго монотоно опаднувачка функција. Бидејќи $x = 4$ е едно решение, според *Теорема 1* тоа е единствено решение.

Задачи за самостојна работа:

1. Да се реши равенката $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$.
2. Реши ја равенката $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6-2x$.
3. Да се реши равенката $2\log_3(ctgx) = \log_2(\cos x)$.
4. Реши ја равенката $(\frac{1}{2})^{\log_3 x} = x$.
5. Реши ја равенката $x^{\log_2 \sqrt{5}} = | x^{\log_2 3} - 2^{\log_2 x} |$.
6. Да се реши равенката $(2^{\log_5 x} + 3)^{\log_5 2} = x-3$.

Литература:

Gazeta matematika-SSM Romanija;
Revista matematika din Temisoara.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија