Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2017.18 година

ИЗРАЧУНАВАЊЕ СУМЕ $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$

Драган Голубовић, Алексинац

Ако са $S(n)$ означимо збир првих n природних бројева, коришћењем следећег једноставног трика добијамо $S(n)$ у функцији од n. Наиме, тражену суму напишемо двапут, притом други пут „наопако“.

$$S(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$S(n) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Потом, саберемо леве и десне стране имајући у виду да је збир у свакој колони на десној страни једнак $n+1$. Отуда је $2S(n) = n(n+1)$, па је

$$S(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}. \qquad (1)$$

Шта ако нас интересује збир квадата првих n природних бројева, тј. сума $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$? Испоставиће се да ту помажу сума (1) за $S(n)$.

Кад у познати идентитет $(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$ редом стављамо $i = 1, 2, \ldots, n$, добијамо

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1.$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1.$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1.$$

$$\cdots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

Затим, саберемо леве и десне стране. Приметимо да се сви сабирци из прве колоне на десној страни, изузев 1^3, потиру с одговарајућим сабирцима на левој страни; онима у реду изнад. Тако добијамо

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2(n) + 3S_1(n) + n,$$

где је $S_1(n) = S(n)$. Одавде је

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)\right),$$

односно, након извршених операција и имајући у виду (1),

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

На сличан начин, користећи идентитет $(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ и формуле (1) и (2), добијамо да је

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Природно питање је:

„*Чему је једнако* $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ *за* $k \geq 1$? "

Општи случај се најчешће решава на начин сличан ономе за $k = 2$, односно $k = 3$. Базира се на специјаном случају биномне формуле, тј. идентитету

$$(i+1)^{k+1} = i^{k+1} + \binom{k+1}{1} i^k + \cdots + \binom{k+1}{k} i + 1.$$

Стављајући $i = 1, 2, \ldots, n$, добијамо

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 1^k + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot 1 + 1$$
$$3^{k+1} = 2^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 2^k + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot 2 + 1$$
$$4^{k+1} = 3^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot 3^k + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot 3 + 1$$
$$\cdots$$
$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} \cdot n^k + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot n + 1,$$

што након сумирања левих и десних страна даје

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k(n) + \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) + \binom{k+1}{k} S_1(n) + n.$$

Одатле, имајући у виду да је $\binom{k+1}{1} = k+1$, добијамо

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\Big((n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{2}S_{k-1}(n) - \binom{k+1}{k}S_1(n)\Big).$$

Уочава се да је при одређивању $S_k(n)$ је потребно познавати формуле за $S_{k-1}(n)$, $S_{k-2}(n)$, ... , $S_1(n)$. Притом је $S_1(n)$ квадратни полином по n без слободног члана, тј. чији је слободан члан 0. $S_2(n)$ је кубни, такође без слободног члана итд. Из последње једнакости, индукцијом по k, следи да је $S_k(n)$ полином степена $k+1$ без слободног члана. То значи да се проблем израчунавања суме $S_k(n)$ своди на одређивање коефицијената $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, таквих да је

$$S_k(n) = a_1 n^{k+1} + a_2 n^k + \cdots + a_k n^2 + a_{k+1} n\,.$$

Један од начина одређивања коефицијената $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ биће изложен у овом чланку.

Нека су i и k природни бројеви. Функција $d(i,k)$ је дефинисана са

$$d(i,k) = \frac{(i-1)^k + i^k}{2} - \left(i - \frac{1}{2}\right)^k. \tag{4}$$

Теорема 1. За природне бројеве n и m, где је $n \geq m$ и $n \geq 1$, важи идентитет

$$\sum_{i=1}^{2^n} i^k = \frac{1}{2}\left(2^{(k+1)n} + 2^{kn} - \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}} d(i,k)2^{(k+1)m}\right).$$

Доказ. Из (4) следи

$$d(i,k)2^{k+1} = 2^k\big((i-1)^k + i^k\big) - 2(2i-1)^k$$

$$= 2^{k+1}\big((i-1)^k + i^k\big) - 2^k\big((i-1)^k + i^k\big) - 2(2i-1)^k$$

$$= 2^{k+1}\big((i-1)^k + i^k\big) - \big(2^k(i-1)^k + (2i-1)^k\big) - \big(2^k i^k + (2i-1)^k\big)$$

$$= 2^{k+1}\big((i-1)^k + i^k\big) - \big((2i-2)^k + (2i-1)^k\big) - \big((2i-1)^k + (2i)^k\big).$$

Ако сумирамо по i ($i = 1,2,\dots,2^{n-m}$), добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^{n-m}} d(i,k)2^{k+1} = 2^{k+1} &\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\big((i-1)^k + i^k\big)\\ &- \sum_{i=1}^{2^{n-m}}\big((2i-2)^k + (2i-1)^k\big)\\ &- \sum_{i=1}^{2^{n-m}}\big((2i-1)^k + (2i)^k\big).\end{aligned} \tag{5}$$

Приметимо да је

$$\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((2i-2)^k+(2i-1)^k\right)=\left(1^k+2^k\right)+\left(3^k+4^k\right)+\cdots+$$

$$\left((2^{n-m+1}-2)^k+(2^{n-m+1}-1)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}(i-1)^k.$$

Слично је

$$\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((2i-1)^k+(2i)^k\right)=\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}i^k.$$

Замењујући у (5) добијамо

$$\sum_{i=1}^{2^{n-m}}d(i,k)2^{k+1}=2^{k+1}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}((i-1)^k+i^k)$$

$$-\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}(i-1)^k-\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}i^k$$

$$=2^{k+1}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}((i-1)^k+i^k)-\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}((i-1)^k+i^k).$$

Множењем леве и десне стране са $2^{(k+1)(m-1)}$ добијамо

$$\sum_{i=1}^{2^{n-m}}d(i,k)2^{(k+1)m}=\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)m}-$$

$$\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)(m-1)}.$$

То, након сумирања по m ($m=1,2,\ldots,n$), даје

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}d(i,k)2^{(k+1)m}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)m}-$$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m+1}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)(m-1)}.$$

После померања немог индекса m у другој суми на десној страни имамо

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}d(i,k)2^{(k+1)m}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)m}-$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}\left((i-1)^k+i^k\right)2^{(k+1)m}.$$

Прва и друга сума на десној страни имају по $n-1$ заједничких сабирака. Притом је у првој суми „вишак“ последњи (за $m=n$), а у другој први сабирак (за $m=0$). Отуда је

$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}((i-1)^k+i^k)2^{(k+1)m} - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{2^{n-m}}((i-1)^k+i^k)2^{(k+1)m} =$

$\sum_{i=1}^{1}((i-1)^k+i^k)2^{(k+1)n} - \sum_{i=1}^{2^n}((i-1)^k+i^k)2^0 =$

$2^{(k+1)n} - \sum_{i=1}^{2^n}\left((i-1)^k+i^k\right)$

Како је

$$\sum_{i=1}^{2^n}\left((i-1)^k+i^k\right) = \left(0^k+1^k\right)+\left(1^k+2^k\right)+\cdots+\left((2^n-1)^k+(2^n)^k\right)$$
$$= 2\sum_{i=1}^{2^n} i^k - 2^{kn},$$

следи

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}} d(i,k)2^{(k+1)m} = 2^{(k+1)n} - 2\sum_{i=1}^{2^n} i^k + 2^{kn},$$

односно

$$\sum_{i=1}^{2^n} i^k = \frac{1}{2}\left(2^{(k+1)n}+2^{kn}-\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}} d(i,k)2^{(k+1)m}\right), \qquad (6)$$

што је и требало да се докаже.

□

Сума на левој страни је заправо $S_k(2^n)$. Како је већ раније утврђено да је $S_k(n) = a_1n^{k+1}+a_2n^k+\cdots+a_kn^2+a_{k+1}n$, следи

$$S_k(2^n) = a_1(2^n)^{k+1}+a_2(2^n)^k+\cdots+a_k(2^n)^2+a_{k+1}2^n.$$

То значи да се одређивање коефицијента полинома $S_k(n)$ своди на одређивање коефицијента полинома $S_k(2^n)$.

У даљем тексту ћемо показати како формула (6) функционише у познатим случајевима $k = 1, 2, 3$.

1^0 $k = 1$. Тада је

$$d(i,1) = \frac{(i-1)+i}{2} - \left(i-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Замењујући у (5), добијамо

$$S_1(2^n) = \sum_{i=1}^{2^n} i = \frac{1}{2}\left(2^{2n}+2^n-\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{2^{n-m}} 0\cdot 2^{2m}\right) = \frac{1}{2}\cdot(2^n)^2+\frac{1}{2}\cdot 2^n.$$

Отуда је $S_1(n) = \frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$, што је заиста тачно.

2^0 $k = 2$. Сада је

$$d(i,2) = \frac{(i-1)^2+i^2}{2} - \left(i-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Замењујући у (5), добијамо

$$S_2(2^n) = \sum_{i=1}^{2^n} i^2 = \frac{1}{2}\left(2^{3n} + 2^{2n} - \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{2^{n-m}} \frac{1}{4} \cdot 2^{3m}\right).$$

Како сабирци у другој суми не зависе од i, имамо

$$\begin{aligned} S_2(2^n) &= \frac{1}{2}\left(2^{3n} + 2^{2n} - \sum_{m=1}^{n} 2^{n-m} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^{3m}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2^{3n} + 2^{2n} - \frac{1}{4} 2^n \sum_{m=1}^{n} 2^{2m}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

За израчунавање суме $\sum_{m=1}^{n} 2^{2m} = 2^2 + 2^4 + \ ... \ + 2^{2n}$ користићемо познату формулу за збир првих n чланова геометријског низа b, bq, … , bq^{n-1}, где је $q \neq 1$. Она гласи

$$\sum_{m=1}^{n} bq^{m-1} = b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{n-1} = b\,\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{8}$$

У нашем случају је $b = q = 2^2$, па имамо

$$\sum_{m=1}^{n} 2^{2m} = 2^2 + 2^4 + \ ... \ + 2^{2n} = 2^2\,\frac{(2^2)^n - 1}{2^2 - 1} = 4\,\frac{2^{2n} - 1}{3}. \tag{9}$$

Замењујући (9) у (7), добијамо

$$S_2(2^n) = \frac{1}{2}\left(2^{3n} + 2^{2n} - \frac{1}{4} 2^n \cdot 4\,\frac{2^{2n} - 1}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(2 \cdot (2^n)^3 + 3 \cdot (2^n)^2 + 2^n\right).$$

Стога је

$$S_2(n) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

што се поклапа с формулом (2).

3^0 $k = 3$. Сада имамо

$$d(i,3) = \frac{(i-1)^3 + i^3}{2} - \left(i - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} i - \frac{3}{8}.$$

Стављајући у (6), добијамо

$$S_3(2^n) = \sum_{i=1}^{2^n} i^3 = \frac{1}{2}\left(2^{4n} + 2^{3n} - \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{2^{n-m}} \left(\frac{3}{4} i - \frac{3}{8}\right) 2^{4m}\right). \tag{10}$$

Како је

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^{n-m}} \left(\frac{3}{4} i - \frac{3}{8}\right) 2^{4m} &= \frac{3}{8} \cdot 2^{4m} \sum_{i=1}^{2^{n-m}} (2i - 1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot 2^{4m}\left(2 \sum_{i=1}^{2^{n-m}} i - \sum_{i=1}^{2^{n-m}} 1\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 2^{4m} (2^{n-m} (2^{n-m} + 1) - 2^{n-m})$$

$$= \frac{3}{8} \cdot 2^{2n+2m},$$

из (10) следи

$$S_3(2^n) = \frac{1}{2} \left(2^{4n} + 2^{3n} - \sum_{m=1}^{n} \frac{3}{8} \cdot 2^{2n+2m} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2^{4n} + 2^{3n} - \frac{3}{8} \cdot 2^{2n} \sum_{m=1}^{n} 2^{2m} \right)$$

Користећи формулу (8), добијамо даље

$$S_3(2^n) = \frac{1}{2} \left(2^{4n} + 2^{3n} - \frac{3}{8} \cdot 2^{2n} \cdot 4 \cdot \frac{2^{2n}-1}{4-1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (2^n)^4 + \frac{1}{2} (2^n)^3 + \frac{1}{4} (2^n)^2.$$

Отуда је

$$S_3(n) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

што се слаже с формулом (3).

Напомена. Применом биномне формуле, из (4) лако добијамо

$$d(i,k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \right) \binom{k}{2} i^{k-2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \right) \binom{k}{3} i^{k-3} + \cdots + (-1)^k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \right) \binom{k}{k}$$

$$= \sum_{r=2}^{k} (-1)^r \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^r} \right) \binom{k}{r} i^{k-r}.$$

Из тога непосредно следи да је $d(i,k)$ полином по i степена $k-2$. То повлачи да су за сумирање $S_k(2^n)$ потребне формуле $S_1(2^{n-m})$, $S_2(2^{n-m})$, … , $S_{k-2}(2^{n-m})$.