VIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Цената на некоја стока е намалена за 20%. За колку проценти треба да се зголеми намалената цена за да се добие првобитната?

2. Дадени се четири едноцифрени броја: a, b, c, d. При соодветно подредување се добиваат еден најголем и еден најмал четирицифрен број. Докажи дека разликата на тие четирицифрени броеви не е прост број.

3. Дадена е кружницата k (O, r) и една нејзина тетива AB. На правата AB е избрана точка C, така што $\overline{BC} = r$ и B е меѓу A и C. Правата CO ја сече кружницата во точката S којашто не ѝ припаѓа на отсечката CO. Докажи дека аголот AOS е трипати поголем од аголот ACS.

4. На полуправата MX, земени се по ред точките A, B и C, така што $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = 2a$ и $\overline{MC} = 3a$, каде што a е произволна отсечка. Во точката A е конструирана нормала на полуправата MX и на неа е избрана точката P, така што $\overline{AP} = a$. Пресекот на нормалата од B на PC нека е точката H. Докажи дека дека:

а) Четириаголникот ABHP е тетивен;

б) MP е тангента на кружницата опишана околу четириаголникот ABHP.

53. (1983.VII.1)

I. Цената на стоката нека е x динари. По намалувањето од 20%, таа ќе изнесува:

$$x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x \text{ динари.}$$

Нека е p процентот со кој треба да се зголеми намалената цена за да се добие првобитната, т.е. x. Ќе имаме:

$$\frac{4}{5}x + \frac{p}{100}\left(\frac{4}{5}x\right) = x$$

$$400 + 4p = 500$$
$$4p = 100$$
$$p = 25.$$

Одговор: 25%.

54. (1983.VII.2)

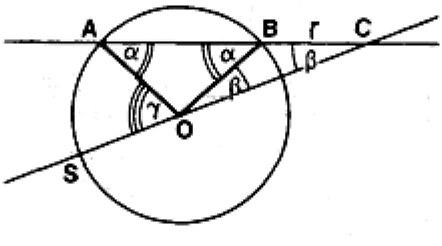
I. Да претпоставиме дека е:

$$a \leqslant b \leqslant c < d.$$

Тогаш најголемиот четирицифрен број е $\overline{dcba}$, а најмалиот $\overline{abcd}$. Нивната разлика е

$\overline{dcba} - \overline{abcd} = 1000d + 100c + 10b + a - 1000a - 100b - 10c - d = 999d + 90c - 90b - 999a = 9(111d + 10c - 10b - 111a).$

Бидејќи изразот во заградата не е нула, значи разликата на броевите е делива со 9, па не може да биде прост број.



Црт. 38

55. (1983.VII.3)

I. Триаголникот ABO е рамнокрак, па е

$\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \alpha$

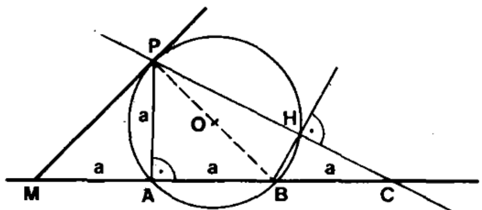
Исто и триаголникот OCB е рамнокрак, па е

$\measuredangle BOC = \measuredangle BCO = \beta$.

$\alpha = 2\beta$, бидејќи α е надворешен агол за Δ OCB, $\gamma = \alpha + \beta$, бидејќи γ е надворешен агол за Δ AOC. Тогаш е $\gamma = \alpha + \beta = 2\beta + \beta = 3\beta$, т.е. $\measuredangle AOS = 3\measuredangle ACS$, што требаше и да се докаже.

Забелешка: Оваа конструкција за поделбата на даден агол на три еднакви дела (во математиката е позната како проблем на трисекција на агол. Проблемот на трисекција на произволен агол денес е решен, т.е. докажано е дека не може произволен агол да се раздели на три еднакви дела конструктивно, т.е. само со употреба на линијар и шестар) е предложена од романскиот математичар Петре Немојану во 1932 год. на еден конгрес на математичарите.

56. (1983.VII.4(



Црт. 39

I.

а) Од самиот услов на задачата е $\measuredangle PAB = 90^{o}$ и $\measuredangle PHB = 90^{o}$, т.е. два спротивни агли во четириаголникот ABHP се прави, па тој е тетивен.

Центарот на опишаната кружница е средината O на отсечката BP.

б) За да покажеме дека MP е тангента на кружницата k(O, OP), доволно е да покажеме дека $OP \perp MP$. Триаголникот MBP е рамнокрак, со агли при основата од 45^{o}, па следува дека аголот при врвот е 90^{o}, т.е. $BP \perp MP$ или $OP \perp MP$, што требаше и да се докаже.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Скрати ја дропката

$$Q(x) = \frac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}$$

а потоа реши ја равенката $Q(x) = -2$.

2. Правата **p** минува низ точките **K** (2, –9) и **S** (–1, 9).

а) Напиши равенка на таа права;

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот образуван од таа права и координатните оски.

3. Во триаголникот ABC, со страна $\overline{AB} = 8$ cm и соодветна висина долга 6 cm, е впишан рамнокрак правоаголен триаголник, чијашто хипотенуза е паралелна со страната AB, а темето на правиот агол лежи на страната AB. Колкав дел, изразен во проценти, изнесува плоштината на правоаголниот триаголник од плоштината на триаголникот ABC.

4. Во триаголникот ABC е вписана кружница што страната AB ја допира во точката P. Ако е $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 2\overline{AP} \cdot \overline{PB}$, докажи дека $\triangle ABC$ е правоаголен.

57. (1983.VIII.1)

I. Имаме:

$$Q(x)=\frac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}=\frac{acx^2+ac+a^2x+c^2x}{acx^2-ac+a^2x-c^2x}=$$

$$=\frac{ax(cx+a)+c(a+cx)}{ax(cx+a)-c(a+cx)}=\frac{(a+cx)(ax+c)}{(a+cx)(ax-c)}=\frac{ax+c}{ax-c};$$

каде што $(a+cx\neq 0)$ и $(ax-c\neq 0)$.

Да ја решиме сега равенката $Q(x)=-2$

$$\frac{ax+c}{ax-c}=-2$$

$$ax+c=-2ax+2c$$

$$3ax=c$$

$$x=\frac{c}{3a}\qquad (3a\neq 0)$$

Одговор: $Q(x)=\dfrac{ax+c}{ax-c}$,

$x=\dfrac{c}{3a}$,

58. (1983.VIII.2)

I. Општиот облик на правата е

$$y = ax + b.$$

Правата минува низ точката K(2, − 9), тоа значи дека нејзините координати ќе ја задоволуваат равенката на правата, т.е.

$$-9 = a \cdot 2 + b.$$

Аналогно добиваме и за другата точка:

$$9 = a(-1) + b.$$

Сега треба да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} 2a + b = -9 \\ -a + b = 9. \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} 2a + b = -9 \\ a - b = -9 \end{cases}$$

$$3a = -18$$

$$a = -6$$

$$b = 9 + a = 9 - 6 = 3.$$

Равенката на правата гласи

$$y = -6x + 3.$$

Пресеците на оваа права со координатните оски се точките:

$$\begin{cases} y = -6x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

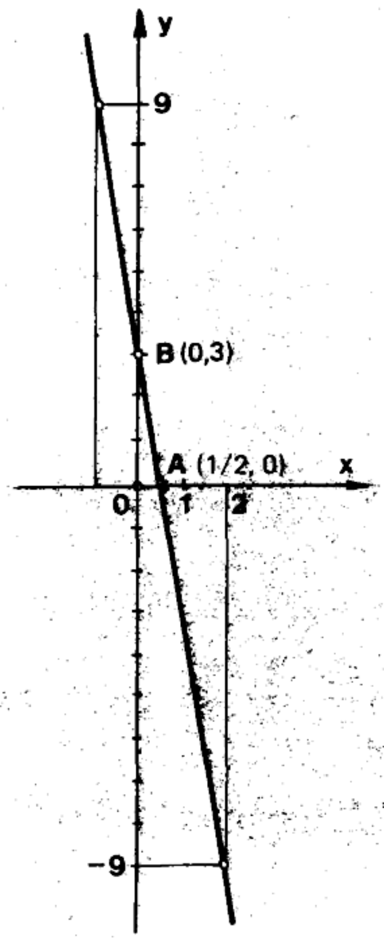
$$\begin{cases} y = -6x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 3).$$

Плоштината на триаголникот OAB е:

$$P = \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

Одговор: а) $y = -6x + 3$;

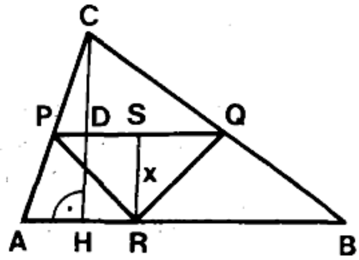
б) $P = \frac{3}{4}$ квадратни единици.



Црт. 40

59. (1983.VIII.3)

I. Нека е даден триаголникот ABC и нека е впишан во него триаголникот PQR, кој ги задоволува условите на задачата.



Црт. 41

Нека е $\overline{RS} = x$ висината во Δ PQR. Бидејќи PQR е рамнокрак правоаголен триаголник, имаме:

$$\overline{PQ} = 2x.$$

Понатаму, од сличноста на триаголниците ABC и PQC имаме:

$$\overline{AB} : \overline{CH} = \overline{PQ} : \overline{CD}$$
$$8 : 6 = 2x : (6 - x)$$
$$8(6 - x) = 6 \cdot 2x$$
$$48 - 8x = 12x$$
$$48 = 20x \Leftrightarrow x = \frac{12}{5} \text{ cm}.$$

Плоштините на Δ ABC и Δ PQR се респективно:

$$P_1 = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{RS} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{144}{25}.$$

Односот на плоштините е:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{144}{25}}{24} = \frac{144}{25 \cdot 24} = \frac{6}{25}.$$

Изразено во проценти, тоа е:

$$p = \frac{6}{25} \cdot 100 = 24.$$

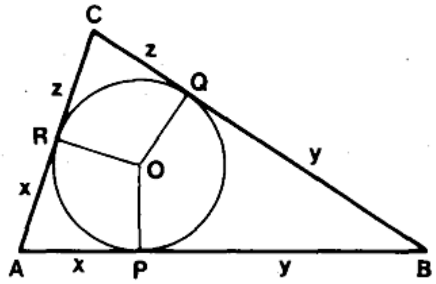
Одговор: $p = 24\%$

60. (1983.VIII.4)

I. За $\triangle$ ABC нека важи $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 2\overline{AP} \cdot \overline{PB}$ . . . (1). каде што P е допирната точка на страната AB со впишаната кружница.

Имаме:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{AR} = x \\ \overline{BP} &= \overline{BQ} = y \\ \overline{CQ} &= \overline{CR} = z \end{aligned}\right\} \text{ како тангентни отсечки.}$$



Црт. 42

Условот (1) можеме да го напишеме:

$$(x+z)(y+z) = 2xy \quad \text{или}$$
$$xy + xz + yz + z^2 = 2xy$$
$$xz + yz + z^2 = xy \ldots \qquad (2)$$

Ако $\triangle$ ABC е правоаголен, ќе важи:

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 = (x+y)^2 \quad \text{или}$$
$$x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$2xz + 2yz + 2z^2 = 2xy$$
$$xz + yz + z^2 = xy \ldots \qquad (3)$$

Поради еквивалентност на (2) и (3) следува тврдењето на задачата.

II. x, y, z нека се должини од претходното означување. Тогаш е:

$a = y + z, \quad b = x + z \quad$ и $\quad c = x + y.$

Од условот на задачата е:

$$(x+z)(y+z) = 2xy \ldots \qquad (4).$$

каде што $x + y + z = s$ — полупериметарот на триаголникот ABC.

Од $x + y + z = s \Rightarrow x + a = s \Rightarrow x = s - a.$

Од $x + y + z = s \Rightarrow y + b = s \Rightarrow y = s - b.$

Од $x + y + z = s \Rightarrow z + c = s \Rightarrow z = s - c.$

Од равенството (4) имаме:

$$b \cdot a = 2 \cdot (s-a)(s-b)$$

$$a \cdot b = 2\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)$$

$$ab = 2\,\frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2}$$

$$2ab = ab + ac - a^2 + bc + c^2 - ac - b^2 - bc + ab$$

или $\quad a^2 + b^2 = c^2.$

Од ова следува дека $\triangle$ ABC е правоаголен, со хипотенуза c и катети a и b.