ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

Ристо Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески

Скопје, 2022

Ристо Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески

ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

Скопје, 2022

Рецензент:
Д-р Зоран Мисајлески,
Градежен факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 220 геометриски задачи кои се задавани на математички натпревари, почнувајќи од регионално до национално ниво. Задачите се поделени во пет глави и тоа:

1. Триаголник,
2. Четириаголник,
3. Примена на тригонометријата,
4. Неравенства и
5. Дополнителни задачи.

Првите две глави содржат задачи за кои може да се каже дека, со исклучок на неколку задачи, се до ниво на Јуниорската балканска олимпијада, па затоа истите може да се користат за подготовка на завршните натпревари на учениците до 15,5 години, односно за Јуниорската македонска и Јуниорската балканска математичка олимпијада. Се разбира, вакви и слични задачи се задаваат и на олимпијадите за учениците од средното образование (БМО, ИМО, ЕМК и слично), па затоа презентираните задачи се добродојдени и за учениците од средното образование.

Претходно кажаното важи за задачите содржани во четвртата глава, а додека задачите од третата и петтата глава исклучиво се наменети за учениците од средното образование. Имајќи предвид дека поголемиот дел од оваа книга е наменет за учениците до 15,5 години, во книгата се содржани мал број задачи за чие решавање се користи степен на точка, а не се содржани задачи кои се решаваат со теоремите на Ојлер, Птоломеј, Симсон, Стјуарт, Чева, Манелај, Паскал, Дезарг, Лајбниц, Карно и слично, како и задачи кои се решаваат со помош на пол и полари, хомотетија, инверзија, симетрија, ротација и слично. Една од причините за вквиот пристап е што во книгата [21], како и во статиите [5], [11], [14] - [20], [22]-[24] кои се јавно достапни и се наоѓаат на сајтот https://matematickitalent.mk се содржани голем број решени задачи од наведените области кои се на ниво на задачите кои се задаваат на националните и меѓународните математички олимпијади.

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодариме на рецензентот д-р Зоран Мисајлески чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надеваме дека оваа мала збирка решени задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за националните, така и за меѓународните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што рековме, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторите
мај, 2022 г.

1 ТРИАГОЛНИК

1. Дадени се триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ за кои е исполнето $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$, $\measuredangle BAC=\measuredangle B_1A_1C_1=60^\circ$ и $\measuredangle ABC+\measuredangle A_1B_1C_1=180^\circ$. Докажи дека
$$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{A_1C_1}}.$$

2. Во паралелограмот $ABCD$ со остар агол во темето A, кружницата која минува низ точките A,B и D ги сече правите BC и CD во точките K и L, соодветно. Во оваа кружница точката N е дијаметрално спротивна на точката A. Докажи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL.

3. Во остроаголниот триаголник ABC точките A_1 и B_1 се соодветно подножјата на висините повлечени од A и B, а H е ортоцентарот на триаголникот. Нека k_1 и k_2 се соодветно кружниците со центри B и H кои минуваат низ точката B_1. Тангентите повлечени од точката C на кружниците k_1 и k_2, различни од правата AC, ги допираат кружниците k_1 и k_2 во точките K и N, соодветно. Докажи дека правата KN минува низ точката A_1.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A, а M и N се соодветно подножјата на нормалите повлечени од D на AB и AC. Правата MN ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точките P и Q, а правата AD по втор пат ја сече k во точката R. Докажи дека D е центар на впишаната кружница на триаголникот PQR.

5. На страните на $\triangle ABC$ се дадени точките $A',A''\in BC$, $B',B''\in CA$ и $C',C''\in AB$. Докажи, ако $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште, тогаш отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.

6. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност таква што $\measuredangle ADB-\measuredangle ACB=90^\circ$ и $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.
а) Пресметај го збирот $\measuredangle DAC+\measuredangle DBC$.
б) Пресметај $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$.

7. Даден е триаголник ABC. Кружницата k_1 минува низ точките A и B и ја допира правата AC, а кружницата k_2 минува низ точките A и C и ја допира правата AB. Кружницата k_1 ја сече правата BC во точката D ($D \neq B$) и ја сече кружницата k_2 во точката E ($E \neq A$). Докажи дека правата DE ја полови отсечката AC.

8. Во остроаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето A, а P и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB и AC. Симетралите на $\measuredangle BDP$ и $\measuredangle CDQ$ ги сечат правите AB и AC во точките K и L, соодветно. Докажи дека центарот на впишаната кружница на триаголникот DPQ припаѓа на правата KL.

9. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D. Правата DH ја сече отсечката AC во точката P, а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

10. Даден е разностран $\triangle ABC$ со опишана кружница ω. Тангентата на ω во точката C ја сече правата AB во точката D. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правите AI и BI ја сечат симетралата на $\measuredangle BDC$ во точките Q и P, соодветно. Нека M е средината на отсечката PQ. Докажи дека правата MI го преполовува лакот ACB на ω.

11. Правата BD симетрала на агол во $\triangle ABC\,(D \in AC)$ и по втор пат ја сече опишаната кружница околу него Ω во точката E. Нека F е втората пресечна точка на Ω и кружницата со дијаметар DE. Докажи дека правата симетрична на BF во однос на BD минува низ средината на страната AC.

12. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини BD и CE. Точките S и T се симетрични на точката E во однос на страните AC и BC, соодветно. Опишаната кружница околу $\triangle CST$ има центар O и по втор пат ја сече правата AC во точката X. Докажи дека правите XO и DE се заемно нормални.

13. Во рамнината се дадени точки A и B, ($A \neq B$). Точката C се движи во рамнината така што $\measuredangle ACB = \alpha$, каде α е даден агол ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките D, E и F. Правите AI и BI ја сечат EF соодветно во точки M и N. Докажи дека:

а) Отсечката MN има константна должина.

б) Опишаната кружница околу $\triangle DMN$ минува низ фиксна точка.

14. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AB}=\overline{AC}$. Точката M е средина на пократкиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Правата низ M паралелна со AC ги сече правите BC и AB во точките D и E, соодветно. Правата низ D паралелна со AB ја сече AC во точката F. Докажи дека $\measuredangle MEF=90^\circ$.

15. Даден е триаголник ABC. Права која минува низ средината K на страната BC ги сече страната AB и полуправата AC во точките M и L, соодветно. Нека N е средината на отсечката LM. Правата AN пом втор пат ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точката S. Ако точките K,N,S се различни, докажи дека опишаната кружница околу триаголникот KNS ја допира правата BC.

16. Нека точката P припаѓа на внатрешноста на триагоникот ABC и е таква што $\measuredangle PAB=\measuredangle PCA$ и $\measuredangle PAC=\measuredangle PBA$. Ако D е средина на отсечката AB, докажи дека $\measuredangle APD=\measuredangle ACB$.

17. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB}=\overline{AC}$) е впишан во кружница ω. Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A. Точките I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_BI_C$ минува низ фиксна точка која не зависи од изборот на точката P.

18. Околу тапоаголен $\triangle ABC, \measuredangle ABC>90^\circ$, е опишана кружница Γ со центар O. Нека B_1 е пресечната точка на правата AB и тангентата на Γ во C, а O_1 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C$. Нека B_2 е внатрешна точка за отсечката BB_1 и нека права низ B_2 ја допира Γ во точката C_1 (поблиска до C). Нека O_2 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_2C_1$ и да претпоставиме дека $OO_2 \perp AO_1$. Докажи дека точките O,O_1,O_2,C_1 и C се конциклични (лежат на иста кружница).

19. Во триаголникот ABC точката O е центар на опишаната кружница, A' е подножјето на висината повлечена од темето A, а X е произволна точка на полуправата AA'. Симетралата на $\measuredangle BAC$ по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D. Точката M е средина на отсечката

DX, а N е точка на правата DX таква што $ON \| AD$. Докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle CAN$.

20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ABC > \measuredangle BCA$, T е средина на лакот BAC и I е центар на вписаната кружница. Точката E е таква што $\measuredangle AEI = 90^\circ$ и $AE \| BC$. Правата TE по втор ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P. Определи го $\measuredangle BAC$ ако се знае дека $\measuredangle ABC = \measuredangle IPB$.

21. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точки P, Q и R така што четириаголникот $AQPR$ е тетивен и $\overline{BR} = \overline{CQ}$. Тангентите на опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките B и C ги сечат правите PR и PQ во точките X и Y, соодветно. Докажи дека $\overline{PX} = \overline{PY}$.

22. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Нека $AD \perp BC$ и $DE \perp AC$ ($D \in BC, E \in AC$). Точката F припаѓа на отсечката DE. Докажи дека $AF \perp BF$ ако и само ако $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$.

23. Кружницата ω ја допира кружницата Ω одвнатре во точката T. Променливата тангента t на кружницата ω ја допира ω во точката S и ја сече кружницата Ω во точката P. Докажи дека центрите на опишаните кружници на сите можни триаголници PST лежат на фиксна кружница.

24. Во триаголникот ABC, симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точката C_1. Нормалата од C_1 на правата BC ја сече опишаната кружница на триаголникот во точката K (на спротивната страна на правата BC во однос на C_1). Нормалата од C на AK ја сече AB во точката L. Докажи дека средината на лакот AB (кој не ја содржи точката C) припаѓа на правата KL.

25. Кружницата со центар I ги допира страните BC, CA и AB на триаголникот ABC во точките D, E и F, соодветно. Тежишната линија повлечена од темето A ја сече EF во точката K. Докажи дека K припаѓа на правата DI.

26. Точката D припаѓа на страната AC на триаголникот ABC и е таква што $\overline{BD} = \overline{AC}$. Точката F е во внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\measuredangle ACF = \frac{1}{2}\measuredangle ADB$ и $\measuredangle CAF = \frac{1}{2}\measuredangle CDB$. Правата BF ја сече AC во точ-

ката E. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{CE}$.

27. Нека P е произволна точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC, а A_1, B_1, C_1 се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека тежиштето на триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи внатре во триаголникот ABC.

28. Даден е остроаголен триаголник ABC. Внатре во триаголникот е избрана точка M таква што $\measuredangle BMC = 180^\circ - \measuredangle BAC$. Правите BM и CM ги сечат спротивните страни на триаголникот ABC во точките D и E, соодветно. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот ADE минува низ фиксна точка (различна од A), независно од изборот на точката M.

29. Нека O е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC и нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците OAB и OAC, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците OAB и OAC по втор пат ја сечат страната BC во точките D и E, соодветно. Симетралата на страната BC ја сече страната AC во точката $F\,(F \neq A)$. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE припаѓа на AC ако и само ако точката F припаѓа на правата O_1O_2.

30. Нека O е центар на опишаната кружница на разностраниот триаголник ABC. Правата OA ги сече висините на триаголникот ABC повлечени од темињата B и C во точките P и Q, соодветно. Ако H е ортоцентарот на триаголникот ABC, докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQH лежи на тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето A.

31. Во $\triangle ABC$ медијаните AM_A, BM_B и CM_C се сечат во точката M. Кружницата Ω_A минува низ средината на отсечката AM и ја допира отсечката BC во точката M_A. Аналогно се дефинираат кружниците Ω_B и Ω_C. Докажи дека кружниците Ω_A, Ω_B и Ω_C минуваат низ иста точка.

32. Нека AA_1 и CC_1 се висините на разностраниот остроаголен $\triangle ABC$, H и O се соодветно неговиот ортоцентар и центарот на опишаната кружница, а B_0 е средината на страната AC. Правата BO ја сече страната AC во точката P, а правите BH и A_1C_1 се сечат во точката Q. Докажи дека правите HB_0 и

PQ се паралелни.

33. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ABC = 90^\circ$. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката D. Точките X и Z се центрите на вписаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, соодветно. Правата XZ ги сече правата AD во точката K и опишната кружница околу $\triangle ABC$ во точките U и V. Правата AD по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката Y, а точката M е средината на отсечката UV. Докажи дека $\overline{CY} = 2\overline{MK}$.

34. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини CK и AL, $K \in AB$ и $L \in BC$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ по втор пат ги сече правите CK и AL соодветно во точките F и D. Точката E припаѓа на помалиот лак AC, а правите BE и AC се сечат во точката N. Докажи дека, ако
$$\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BF}^2,$$
тогаш $\measuredangle KNB = \measuredangle BNL$.

35. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина AD, $D \in BC$ и центар I_a на припишаната кружница која ја допира страната BC. Точката K од продолжението на AB (B е меѓу A и K) е таква што $\measuredangle AKI_a = 90^\circ + \frac{3}{4}\measuredangle ACB$. Правата I_aK го сече продолжението на AD во точка L. Докажи дека правата DI_a е симетрала на $\measuredangle AI_aB$ ако и само ако должината на отсечката AL е еднаква на дијаметарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

36. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека M е произволна точка од страната AB, а N е средината на AC. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од темето A на правите MC и MN, соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQN припаѓа на фиксна права додека M се менува на страната AB.

37. Нека H и M се соодветно ортоцентарот и тежиштето на разностран $\triangle ABC$. Низ темињата A, B и C се повлечени прави нормални на AM, BM и CM, соодветно. Докажи, дека тежиштето на триаголникот формиран од овие прави лежи на правата MH.

38. Паралелограмот $ABCD$ е таков што $\measuredangle ABC < 90^\circ$ и $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точките E и F лежат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите

на ω во овие точки минуваат низ темето D. Притоа важи $\measuredangle EDA = \measuredangle FDC$. Определи го $\measuredangle ABC$.

39. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Точката I_1 е симетрична I во однос на правата BC. Опишаната кружница околу $\triangle BCI_1$ ја сече правата I_1I во точка P. Познато е дека P е надворешна точка за кружницата впишана во $\triangle ABC$. Нека X и Y се допирните точки на тангентите повлечени од P кон впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека отсечката XY се содржи во средната линија на $\triangle ABC$.

40. Во $\triangle ABC$ страните AB и BC се еднакви. Точката D припаѓа на внатрешноста на триаголникот и е таква што $\measuredangle ADC = 2\measuredangle ABC$. Докажи дека удвоеното растојание од B до симетралата на суплементните агли на $\measuredangle ADC$ е еднакво на $\overline{AD} + \overline{DC}$.

41. Даден е $\triangle ABC$. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, M е средината на страната AB, а S е средината на лакот ACB. Определи го $\measuredangle ACB$, ако $\overline{IS} = 2\overline{IM}$.

42. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата Ω минува низ точката A и нејзиниот центар е на висината $AH, H \in BC$ на $\triangle ABC$. Пресечните точки на Ω со отсечките AB и AC се соодветно точките P и Q при што важи $\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Точката K од опишаната кружница околу $\triangle OBC$ е во иста полурамнина со A во однос на правата BC и е таква што $\measuredangle BKA = \measuredangle CKA$. Докажи дека точката K припаѓа на кружницата Ω.

43. Нека CD е висина во $\triangle ABC$, при што $D \in AB$. Кружницата со центар C и радиус CD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките E и F. Ако правата EF ја преполовува отсечката CD, определи го $\measuredangle ACB$.

44. Впишаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните AC, BC, CA соодветно во точките M, N, P. Точките X и Y се соодветно на отсечките AM и BN при што $XY \parallel AB$ и ги сече MP и NP соодветно во точките K и L. Правата MK по втор пат ја сече k во точката D, а правата YD по втор пат ја сече k во точката Q. Докажи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.

45. Даден е $\triangle ABC$ во кој медијаните AA_1 и BB_1 се сечат во точката G. Ако

впишаната кружница во $\triangle ABC$ и впишаната кружница во $\triangle AGB$ ја допираат страната AB во иста точка, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

46. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Нека D е точка од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, различна од C таква што DI е симетрала на $\measuredangle ADB$. Ако $\overline{AD}+\overline{BD}=2\overline{DI}$, докажи дека $\overline{AC}=\overline{BC}$

47. Висините AH_1, BH_2 и CH_3 на остроаголниот $\triangle ABC$ се сечат во точката H. Над HH_1, HH_2 и HH_3 како над дијаметри соодветно се конструирани кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 и притоа $\omega_2 \cap \omega_3 = \{A_1, H\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{B_1, H\}$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C_1, H\}$. Докажи дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Надворешната симетрала на $\measuredangle BHC$ ги сече AB и AC во точките D и E, соодветно. Симетарлата на $\measuredangle BAC$ ја сече опишаната кружница околу $\triangle ADE$ во точка $K, K \neq A$. Докажи дека правата HK ја преполовува отсечката BC.

49. Нека F е точка од страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{AC}=\overline{BF}$. Докажи дека правата која минува низ средината на отсечката CF и е паралелна на симетралата на $\measuredangle ACB$ ја преполовува страната AB.

50. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$. На продолжението на AC преку темето C е избрана точка D таква што $\overline{AC}>\overline{CD}$. Симетралата на $\measuredangle BCD$ ја сече BD во точката N, а M е средина на BD. Тангентата во точката M на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ ја сече страната BC во точката P. Докажи дека точките A, P, M и N лежат на една кружница.

51. Нека D е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB. Нека I_1 и I_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle I_1I_2D$ ја допира AB.

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека H и G се соодветно ортоцентарот и тежиштето на $\triangle ABC$. Точката P е пресекот на медијаната низ B и висината низ A, а точката Q е пресек на медијаната низ C и висината низ B. Ако точките H, G, P и Q лежат на една кружница, докажи дека триаголникот формиран од медијаните на $\triangle ABC$ е сличен на $\triangle ABC$.

53. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB = 90^\circ$). Точката O од средната линија

MN (M е средина на AC, N е средина на BC) е таква што $\measuredangle AOC = 90^\circ$, а точката P од отсечката AO е таква што $\measuredangle ACP = \measuredangle BCO$. Докажи дека $\measuredangle ABP = \measuredangle CBO$.

54. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k_1. Кружницата k_2 ја допира k_1 во точката C и страната AB во точката T. Правата CT ја сече k_1 по вторпат во точката Q. Правата QN, $N \in k_2$, е тангента на k_2. Докажи дека кружницата опишана околу $\triangle ABN$ минува низ центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

55. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките M и N. Низ точка $A \in k_1$, надворешна за k_2, се повлечени правите AM и AN, кои k_2 по втор пат ја сечат во точките B и C, соодветно. Низ точка D од лакот BM на k_2, кој не ја сопдржи N, се повлечени правите DM и DN, кои k_1 по втор пат ја сечат во точките E и F, соодветно. Ако $\overline{AB} = \overline{ED}$ и $\overline{AC} = \overline{FD}$ докажи дека MN е симетрала на отсечката AD.

56. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната AB. Со P да ја означиме проекцијата на M врз страната $BC\,(P \in BC)$, а со N средината на MP. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $AP \perp CN$ и $\overline{AP} : \overline{CN} = 2\sqrt{3}$.

57. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC. Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

58. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник чии соодветни агли $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Докажи дека
$$a(a+b+c) = b(b+c).$$

59. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E соодветно на полуправите CB и CA такви што $\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и P е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C. Докажи дека правата DE ја преполовува отсечката HP.

60. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата k над дијаметар AB ги сече

страните AC и BC соодветно во точките M и N. Тангентите на кружницата k во точките M и N се сечат во точката P. Ако $\overline{CP}=\overline{MN}$, определи го $\measuredangle ACB$.

61. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle ACB=60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, ..., A_{2006}$ е определена со: $A_0=A$, A_1 е подножјето на нормалата од A_0 на правата BC, A_2 е подножјето на нормалата од A_1 на правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата од A_{2005} на правата AC. Аналогно се дефинира низата B_0, $B_1, ..., B_{2006}$: $B_0=B$, B_1 е подножјето на нормалата од B_0 на правата AC итн. Докажи дека правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако
$$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

62. Во $\triangle ABC, \overline{AB}>\overline{BC}$, за точката K од страната AB важи $\overline{AK}=\overline{BC}+\overline{BK}$. Правата l минува низ K и е нормална на AB. Докажи дека l, симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се сечат во една точка.

63. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој се повлечени висините BB_1 и CC_1 кон страните AC и AB ($B_1\in AC, C_1\in AB$). Нека M и N се соодветно средините на BB_1 и CC_1, $P=AM\cap CC_1$ и $Q=AN\cap BB_1$. Докажи дека

а) точките M, N, P и Q се конциклични,

б) ако точките B, C, P и Q се конциклични, тогаш $\triangle ABC$ е рамнокрак.

64. Во $\triangle ABC$, $\measuredangle ACB=60^\circ$ се повлечени симетралите на аглите AA_1 и BB_1 $(A_1\in BC, B_1\in AC)$. Правата A_1B_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките A_2 и B_2.

а) Докажи дека правата OI е паралелна на A_1B_1, каде O и I се центрите соодветно на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Ако R е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C, а P и Q се соодветно средините на A_1B_1 и A_2B_2, докажи дека $\overline{RP}=\overline{RQ}$.

65. Даден е $\triangle ABC\,(\overline{CA}\neq\overline{CB})$. Нека $CL\,(L\in AB)$ е симетралата на $\measuredangle ACB$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките M, N и P, а припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB ги

допира AB и продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките Q, K и T. Нека k_1, k_2 и k_3 се опишаните кружници соодветно околу $\triangle PKL, \triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Докажи дека втората пресечна точка на k_1 и k_2 припаѓа на правата CL.

б) Докажи дека кружниците k_1, k_2 и k_3 се сечат во една точка.

66. Симетралата на $\measuredangle BAC$ во $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точката E, а надворешната симетрала на $\measuredangle ACB$ ја сече полуправата BA во точката F. Ако должината на отсечката AF е еднаква на периметарот на $\triangle ACE$, определи го односот $\measuredangle BAC : \measuredangle ABC$.

67. Надвор од $\triangle ABC$ се конструирани $\triangle PAB$ и $\triangle QAC$ такви што $\overline{AP} = \overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{AC}$ и $\measuredangle BAP = \measuredangle CAQ$. Отсечките BQ и CP се сечат во точката R. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle BCR$, докажи дека правите AO и PQ се заемно нормални.

68. Во разностран остроаголен $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CL на $\measuredangle ACB$. Точките M, N и P се средини соодветно на страните AB, BC и CA, а точката T допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB. Опишаната кружница околу $\triangle NPL$ по втор пат ја сече CL во точката D. Ако L е средина на MT, определи го односот $\overline{CD} : \overline{DL}$.

69. Во $\triangle ABC$ отсечката $CL\,(L \in AB)$ е симетрала на $\measuredangle BCA$. Кружница која минува низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k околу $\triangle ABC$ по втор пат соодветно во точките M и N, при што A е меѓу M и B, а N е на лакот AB кој не ја содржи C. Аналогно, втора кружница низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k по втор пат во точки P и Q, при што B е меѓу P и A, а Q е на лакот AB кој не ја содржи C. Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

70. Нека AM е медијана на нерамностраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

71. Во остроаголен $\triangle ABC$ медијаната CM го дели $\measuredangle ACB$ во однос $2:1$, т.е. $\measuredangle ACM = 2\measuredangle MCB$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ со центар O по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle MOC$ во точката D. Докажи дека CD е симетрала на $\measuredangle ACM$.

2 ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Нека $ABCD$ е правоаголник со центар O и не е квадрат. Правата низ O, нормална на BD, ги сече правите AB и BC во точките E и F, соодветно. Нека M и N се средините на страните CD и AD, соодветно. Докажи дека $FM \perp EN$.

2. Кружница минува низ темињата A и B на тетивниот четириаголник $ABCD$ и ги сече неговите дијагонали AC и BD соодветно во точките E и F. Правите AF и BC се сечат во точката P, а правите BE и AD се сечат во точката Q. Докажи дека правите PQ и CD се паралелни.

3. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\overline{CD}>\overline{AB}+\overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle ABC > 120^\circ$.

4. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката P. Точката Q од отсечката BC е таква што $PQ \perp AC$. Докажи дека правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците APD и BQD е паралелна со правата AD.

5. Даден е ромб $ABCD$ и точки M и N соодветно на отсечките AB и BC такви што $\overline{DM}=\overline{MN}$. Правата DN ја сече AC во P, а правата DM ја сече AB во R. Докажи дека $\overline{DP}=\overline{PR}$.

6. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{BD}$ и $\measuredangle ABD=\measuredangle DBC$. Точката K на дијагоналата BD е таква што $\overline{BK}=\overline{BC}$. Докажи дека важи $\measuredangle KAD=\measuredangle KCD$.

7. За тетивниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\overline{AD}\cdot\overline{CD}$. Правите AD и BC се сечат во точката X, а правите AB и CD се сечат во точката Y. Точките E,F,G и H се средините на отсечките AB,BC,CD и DA, соодветно. Симетралата на $\measuredangle AXB$ ја сече отсечката EG во точката S, а симетралата на $\measuredangle AYD$ ја сече отсечката FH во точката T. Докажи дека правите ST и BD се паралелни.

8. Во внатрешноста на конвексен четириаголник $ABCD$ кој не е трапез е дадена точка X таква што $\measuredangle ADX = \measuredangle BCX < 90^\circ$ и $\measuredangle DAX = \measuredangle CBX < 90^\circ$. Ако симетралите на страните AB и CD се сечат во точката Y, докажи дека $\measuredangle AYB = 2\measuredangle ADX$

9. Даден е паралелограм $ABCD$. Произволна права p низ темето A ги сече полуправите BC и DC во точките X и Y соодветно. Нека K е центарот на припишаната кружница на триаголникот ABX наспроти темето A, а L е центарот на припишаната кружница на триаголникот ADY наспроти темето A. Докажи дека големината на $\measuredangle KCL$ не зависи од изборот на правата p.

10. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со $AD \| BC$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката M. Точките X и Y лежат на страната AB и се такви што $\overline{AX} = \overline{AM}$ и $\overline{BY} = \overline{BM}$. Нека Z е средината на XY и N е пресечната точка на CY и DX. Докажи дека правата ZN е паралелна на основите на трапезот.

11. Даден е остроаголен триаголник ABC во кој $\measuredangle BAC = \alpha$. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, H е негов ортоцентар и F е средина на страната AB. Точката P е во внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle APF = \alpha$ и $\measuredangle APB = 180^\circ - \alpha$. Докажи дека $\measuredangle HPO = 180^\circ - \alpha$.

12. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$. Точките M и N припаѓаат на страните CD и BC, соодветно и важи $\overline{DM} + \overline{BN} = \overline{MN}$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMN припаѓа на отсечката AC.

13. Точките A_1 и C_1 припаѓаат соодветно на страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$. Отсечките AC_1 и CA_1 се сечат во точката P, а опишаните кружници околу триаголниците AA_1P и CC_1P по втор пат се сечат во точка Q, внатрешна за триаголникот ACD. Докажи дека $\measuredangle PDA = \measuredangle QBA$.

14. Даден е триаголник ABC и во рамнината на овој триаголник паралелограм $ASCR$ со дијагонала AC. Нека правата која минува низ точката B и е паралелна со CS ги сече правите AS и CR соодветно во точките M и P, а правата која минува низ точката B и е паралелна со AS ги сече правите AR и CS соодветно во точките N и Q. Докажи дека правите RS, MN и PQ се сечат во една точка.

15. Во четириаголникот $ABCD$ е впишана кружница со центар O, при што $\overline{OA}=5, \overline{OB}=6, \overline{OC}=7$ и $\overline{OD}=8$. Ако M и N се соодветно средините на дијагоналите AC и BD, определи го односот $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$.

16. Точките M и N се соодветно на непаралелните страни AD и BC на трапезот $ABCD$ и се такви што дијагоналите на трапезот ја делат отсечката MN на три еднакви дела, но MN не е паралелна со AB. Определи го односот на основите на трапезот.

17. Даден е четириаголник $ABCD$ со $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$. Точката M на страната AB е таква што $\overline{AD} = \overline{AM}$. Полуправите DM и CB се сечат во точката N. Точките H и K се подножјата на нормалите соодветно повлечени од точките D и C на правите AC и AN. Докажи дека $\measuredangle MHN = \measuredangle MCK$.

18. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката E, точката M е средина на AE и точката N е средина на CD. Познато е дека дијагоналата BD е симетрала на $\measuredangle ABC$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако четириаголникот $MBCN$ е тетивен.

19. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q се средини на страните DA, AB, BC, CD, соодветно, а точката E епресекот на дијагоналите AC и BD. Кружниците опишани околу $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ се сечат во точката $F \neq E$. Докажи дека $EF \perp AC$.

20. Нека H е ортоцентарот, а O е центарот на опишаната кружница околу остраоголниот $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A и B, соодветно. Со K да ја означиме пресечната точка на правите OD и BE, а со L пресечната точка на правите OE и AD. Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците HKD и HLE, а M е средината на страната AB. Докажи дека точките K, L и M се колинеарни ако и само ако X е центар на кружницата опишана околу триаголникот EOD.

21. Нека P е точка на дијагоналата BD на паралелограмот $ABCD$ таква што $\measuredangle PCB = \measuredangle ACD$. Кружницата опишана околу триаголникот ABD ја сече правата AC во точките E и A. Докажи дека $\measuredangle AED = \measuredangle PEB$.

22. Во $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) впишаната кружница, со центар во точката I, ја допира страната BC во точката D. Нека M е средината на отсечката BC. Докажи дека нормалите повлечени од точките M и D соодветно на правите AI и MI се сечат на правата која ја содржи висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето A.

23. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) и нека F ($F \not\equiv A$) е точка на опишаната кружница околу овој триаголник за која важи $\measuredangle AFH = 90^\circ$. Точката K е централно симетрична слика на точката H во однос на точката B, точката P е таква што важи $\measuredangle PHB = \measuredangle PBC = 90^\circ$, а точката Q е подножје на нормалата повлечена од точката B на правата CP. Докажи дека правата HQ ја допира опишаната кружница околу $\triangle FHK$.

24. Нека $ABCD$ е правоаголник. Во појасот меѓу правите AB и CD определи множество точки од кои отсечките AB и CD се гледаат под ист агол.

25. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи
$$\measuredangle BAC = \measuredangle DAC = 55^\circ, \measuredangle DCA = 20^\circ, \measuredangle BCA = 15^\circ .$$
Определи ја големината на $\measuredangle DBA$.

26. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\measuredangle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A. Докажи дека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$ ако и само ако $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ$.

27. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се конструирани точки E и F такви што DE е симетрала на $\measuredangle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C нормална на DE ги сече страната AD во точката L и дијагоналата BD во точката H. Нека DE ја сече AC во точката N.

а) Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

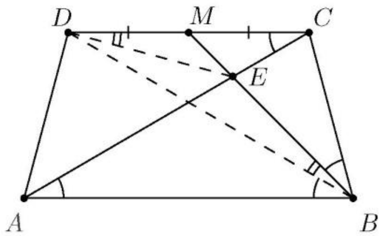
б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $ABCD$ е квадрат.

28. Точката M е средина на отсечката AB, а точката C е внатрешна за AB и $C \neq M$. Во едната полурамнина во однос на правата AB е конструирани рамнокраки триаголници ACK ($\overline{AK} = \overline{CK}$) и BCL ($\overline{BL} = \overline{CL}$), такви што K, C, L и M лежат на една кружница k. Докажи дека $KL \parallel AB$ или $KA \perp LB$.

29. Даден е правоаголен рамнокрак $\triangle ABC$ со хипотенуза AB. Точките P и Q од отсечката AB се такви што $\measuredangle PCQ = 45^\circ$ и P е меѓу A и Q. Опишаните кружници околу триаголниците ACQ и BCP по втор пат се сечат во точката R. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$ лежи на правата CR.

30. Даден е рамнокрак трапез $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Нека M е средината на CD и E е пресечната точка на AC и BM. Ако $\measuredangle MBC = \measuredangle ABD$, докажи дека $\overline{AD} = \overline{DE}$.



31. Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\measuredangle ACB = 90^\circ$, H е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C и O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Докажи дека, ако правите AO и DH се заемно нормални, тогаш $\overline{AC} = \overline{AD}$.

32. Точките A_1, B_1 и N се внатрешни соодветно за страните BC, CA и AB на остроаголниот $\triangle ABC$, при што четириаголникот A_1CB_1N е паралелограм, а четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен. Опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C$ по втор пат ја сече CN во точката M. Докажи дека правата A_1B_1 е заедничка тангента на кружниците опишани околу триаголниците AMN и BMN.

33. Впишаната кружница во остроаголниот $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките P и Q. Медијаната CM ја сече отсечката PQ во точката F. Докажи, дека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ ако и само ако BF е симетрала на $\measuredangle ABC$.

34. Во конвексен четириаголник $ABCD$ со I и J се означени центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, соодветно. Правата BI ги сече страната AD и опишаната кружница околу $\triangle ABD$ соодветно во точките M и P, а правата BJ ги сече страната CD и опишаната кружница околу $\triangle CBD$ соодветно во точките N и Q. Докажи дека $MN \parallel PQ$ ако и само ако $IJ \parallel PQ$.

35. Во остроаголен триаголник ABC со строго најмала страна BC, H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот AHC ја сече правата AB во точката $M \not\equiv A$, а опишаната кружница околу триаголникот AHB ја сече правата AC во точка

$N \neq A$. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот MNH лежи на правата OH.

36. Нека P е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC таква што $\measuredangle BAP = \measuredangle ACP$ и $\measuredangle CAP = \measuredangle ABP$. Нека M и N се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP, соодветно. Ако R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот AMN, докажи дека важи
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AP}}.$$

37. За точката D на страната BC на триаголникот ABC, со O_b и O_c да ги означиме центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACD, соодветно. Нека претпоставиме дека точките B, C, O_b, O_c припаѓаат на кружница со центар X. Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC, докажи дека $\measuredangle DAX = \measuredangle DAH$.

38. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\measuredangle ABF = \measuredangle DCE$, определи го $\measuredangle ABC$.

39. Даден е $\triangle ABC\,(\overline{AC} > \overline{BC})$ со средна отсечка MN ($M \in AC, N \in BC$). Симетралата на $\measuredangle B$ ја сече правата MN во точката P. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ја допира страната BC во точката Q. Нормалите во точките P и Q соодветно на MN и BC се сечат во точката R. Нека S е пресечната точка на правите AB и RN.
а) Докажи дека четириаголникот $PCQI$ е тетивен.
б) Изрази ја должината на отсечката BS преку должините a, b, c на страните на $\triangle ABC$.

40. На страната AB на $\triangle ABC$ зедмени се точки D и E, а на страната AC земена е точка F така што $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ и $\overline{AF} = \overline{AE}$. Ако $\measuredangle ACB = 3\measuredangle EFD$ определи го $\measuredangle ACB$.

41. Нека P е внатрешна точка за страната AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Околу $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ соодветно се опишани кружници k_1 и k_2, при што k_1 по втор пат ја сече BC во точката M, а k_2 по втор пат ја сече AC во точката

N. Тангентата на k_1 во P по втор пат ја сече k_2 во точката S, а тангентата на k_2 во точката P по втор пат ја сече k_1 во точката T. Познато е дека правите AT, BS и CP се сечат во една точка. Докажи дека точките S, M, N и T се колинеарни.

42. Точката M е средина на страната AB на $\triangle ABC$. Кружницата низ точките C и M, која ја допира страната AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q. Ако K и L се средините на отсечките CP и CQ докажи дека $\measuredangle CKM = \measuredangle CLM$.

43. Определи ги сите точки E во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со следново својство: за секои две заемно нормални прави низ E, кои четирите страни на квадратот ги сечат во внатрешни точки, три од тие точки се темиња на рамностран триаголник.

44. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средина на страната AB. Ако со P и R ги означиме соодветно центрите на припишаните кружници на $\triangle AMC$ соодветно кон страните AM и CM, а со Q и T центрите на припишаните кружници на $\triangle BMC$ соодветно кон страните BM и CM, докажи дека точките P, Q, R и T лежат на една кружница.

45. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $BD \perp AD$. Точките A_1 и A_2 се подножјата на нормалите повлечени од темето A кон правите CD и BC. Отсечката A_1A_2 ја сече AB во точка P, а $AC \cap BD = O$. Ако правите OP и AD се сечат во точката M, докажи дека точките A_1, O, A_2 и M лежат на една кружница.

46. Нека M и N се средини соодветно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точката P припаѓа на опишаната кружница k околу $\triangle CMN$, при што P и C се во различни полурамнини во однос на правата AB. Отсечката PA по втор пат ја сече k во точката M_1, а отсечката PB по втор пат ја сече k во точката N_1. Ако отсечките MM_1 и NN_1 се сечат во точката X, докажи дека $\measuredangle ACX = \measuredangle BCP$.

47. Во трапез $ABCD, AB \parallel CD$, впишаната кружница во $\triangle ABD$ ги допира страните AB и BD соодветно во точките M и N, а впишаната кружница во $\triangle ACD$ ги допира страните AC и DC соодветно во точките P и Q. Докажи дека пресечната точка на правите MN и PQ лежи на средната линија на

трапезот.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини AA_1, BB_1, CC_1 и ортоцентар H. Правата низ H паралелна на AB ги сече отсечките C_1B_1 и C_1A_1 соодветно во точките P и Q. Нека M е подножјето на нормалата повлечена од P на BB_1, а N е подножјето на нормалата повлечена од Q на AA_1. Со C_0 да ја означиме средината на MN. Аналогно ги дефинираме точките A_0 и B_0. Докажи дека правите AA_0, BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.

49. Точката K е внатрешна за паралелограмот $ABCD$ и е таква што средината M на страната BC е еднакво оддалечена од точките K и D, а средината N на страната CD е еднакво оддалечена од точките K и B. Точката P е средина на отсечката AK. Докажи дека $\measuredangle PBK = \measuredangle PDK$.

50. Даден е $\triangle ABC$ и произволна точка L, внатрешна за страната AB. Кружница низ точките A и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната AC во точката M. Аналогно, кружница низ точките B и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната BC во точката N. Симетралата на $\measuredangle ALM$ ја сече AC во точката P, а симетралата на $\measuredangle BLN$ ја сече BC во точката Q. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle MNL$ лежи на отсечката PQ.

51. Точките M, N, P, Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Точките F и G се тежишта соодветно на триаголниците BNP и PND. Отсечката MG ја сече FQ во точката K и $\overline{FK} = 6\,cm$. Докажи дека $\overline{KQ} = 9\,cm$.

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC, \overline{AC} \neq \overline{BC}$, со центар на опишаната кружница O. Права паралелна на AB ја допира опишаната кружница околу $\triangle AOB$ во точката T и ги сече продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките X и Y. Нека F е пресечната точка на правите BX и AY. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle FCT$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

53. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k со центар O, при што точката O е внатрешна за четириаголникот $ABCD$. Познато е дека производот на растојанијата од O до страните AB и CD е еднаков на производот на растојанијата од O до страните AD и BC. Тангентите на k во точките

B и D се сечат во точката P. Докажи дека растојанието од P до правата AC е двапати поголемо од растојанието од O до правата AC.

54. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ вписан во кружница k. Точката P од малиот лак AC на k е таква што $\measuredangle BAC = 2\measuredangle PBC$, а точката Q од малиот лак BC на k е таква што $\measuredangle ABC = 2\measuredangle QAC$. Правата низ средината на малиот лак BC и средината на тетивата PC ја сече правата BP во точката K. Правата низ средината на малиот лак AC и средината на тетивата QC ја сече правата AQ во точката T. Докажи дека $\overline{KT} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

55. Даден е трапез $ABCD$ со основи $AB \| CD$ и пресечна точка O на неговите дијагонали. Нека N, M, P, Q се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA на трапезот. Определи ја плоштината на трапезот ако
$$\overline{ON} = 14, \overline{OP} = \tfrac{13}{2}, \overline{OM} = 7, \overline{OQ} = \tfrac{15}{2}.$$

56. Околу кружница се опишани квадрат и триаголник. Докажи дека барем половина на периметарот на квадратот лежи во триаголникот.

57. На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точките A_1, B_1, C_1 така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка M. Докажи дека ако M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш M е тежиште и на $\triangle ABC$.

58. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека F е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот, а E е пресечната точка на правите AD и BC. Ако M и N се средините на отсечките AB и CD, докажи дека
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2}\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right|.$$

59. Во четириаголникот $ABCD$ таков што $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC > 180^\circ$ и вписана кружница со центар I. Низ I е повлечена права која ги сече страните AB и CD соодветно во точките X и Y така што $\overline{IX} = \overline{IY}$. Докажи дека
$$\overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{BX} \cdot \overline{CY}.$$

60. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Точките A_1, B_1, C_1, D_1 припаѓаат соодветно на отсечките AO, BO, CO, DO и се такви што $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$ и $\overline{BB_1} = \overline{DD_1}$. Нека M и N се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle AOB$ и

$\triangle COD$ и околу $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, а P и Q се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle C_1OD_1$ и околу $\triangle A_1OD_1$ и $\triangle B_1OC_1$. Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

61. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со висини CD, AE и BF. Точките E' и F' се симетрични на E и F во однос на точките A и B, соодветно. Точката C_1 припаѓа на полуправата CD и е таква што $\overline{DC_1} = 3\overline{CD}$. Докажи дека $\measuredangle E'C_1F' = \measuredangle ACB$.

62. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката M лежи на страната AB на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Точките I_1, I_2 и I_3 се центри на впишаните кружници околу $\triangle MBC, \triangle MCD$ и $\triangle MDA$, соодветно. Докажи дека точките M, I_1, I_2 и I_3 се конциклични.

63. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 90^\circ$, висина CH и медијана CM. Точката N од отсечката MH е таква што $\overline{MN} = \overline{NC}$ и $\overline{NH} = \overline{HB} + \overline{BC}$.
а) определи го $\measuredangle BAC$,
б) ако точката K од отсечката MC е таква што $KB \perp NC$, определи го $\measuredangle KNC$.

64. Даден е $\triangle ABC$ со центар J на припишаната кружница кон страната BC. Нека M е средина на страната AC и MJ ја сече страната BC во точката N. Ако $\overline{AB} = \overline{BN}$, тогаш $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ACB$. Докажи!

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, во кој впишаната кружница ги допира страните AB и BC соодветно во точките M и N. Симетралите на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BAC$ ја сечат правата MN соодветно во точките K и P. Ако $\overline{AC} = 2\overline{KP}$, определи го $\measuredangle ABC$.

66. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката D е средината на лакот AC од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката B. Нека точката P е проекцијата на D на правата AB, а точката M е средина на отсечката DP. Правата низ P, нормална на BM, ја сече правата BC во точката N. Докажи дека $\measuredangle NDB = 90^\circ$.

3 ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИЈАТА

1. Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен $\triangle ABC$. На страната BC е земена точка X таква што $\overline{AX}=\overline{BX}$ и $\overline{OX}=\overline{CX}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако радиусот ан опишаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R.

2. Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Точката M е средина на страната AB, Тангентата на k во A ја сече правата низ M нормална на AC во точката D. Тангентата на k во точката B ја сече правата низ M нормална на BC во точката E. Ако правата DE го дели $\triangle ABC$ на два дела со плоштини 1 и 3, определи го $\measuredangle ACB$.

3. Со O и I да ги означиме центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC, соодветно. Надворешно припишаната кружница ω_a ги допира продолженијата на страните AB и AC соодветно во точките K и M, а страната BC ја допира во точката N, Нека претпоставиме дека средината P на отсечката KM лежи на опишаната кружница на триаголникот ABC. Докажи дека точките O, I и N се колинеарни.

4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките X и Y. Точката K е средина на лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот (не ја содржи точката C). Познато е дека правата XY ја преполовува отсечката AK. Определи го $\measuredangle BAC$.

5. Дадени се кружници $k_1(O_1,R)$ и $k_2(O_2,r)$ такви што $R\geq r\sqrt{2}$ и
$$\overline{O_1O_2}=\sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}\ .$$
Од произволна точка $A\in k_1$ се повлечени тангенти $AB, AC\ (B,C\in k_2)$ на k_2, кои k_1 ја сечат соодветно во точките D и E. Докажи дека $\overline{BD}\cdot\overline{CE}=r^2$.

6. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O. Симетралата на CH ги сече страните AC и BC соодветно во точките X и Y. Правите XO и YO ја сечат страната AB соодветно во точките P и Q. Ако $\overline{XP}+\overline{YQ}=\overline{AB}+\overline{XY}$, определи го $\measuredangle OHC$.

7. Во остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ е впишана кружница k со центар I. Нека $CH, H \in AB$ и $CL, L \in AB$ се соодветно висината и симетралата на аголот повлечени од темето C, а точките A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB, соодветно. Ако допирната точка на k со страната AB е средина на отсечката HC_1, тогаш I е центар на опишаната кружница за $\triangle LA_1B_1$. Докажи!

8. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар O_1, која ги допира страните AB, BC и AC соодветно во точките C_1, A_1 и B_1. Припишаната кружница кон страната AB има центар O_2 и ги допира AB и продолженијата на страните AC и BC соодветно во точките C_2, B_2 и A_2. Нека O_1C_1 ја сече A_1B_1 во точката M, а O_2C_2 ја сече A_2B_2 во точката N. Докажи дека $\overline{C_1N} = \overline{C_2N}$.

9. Нека I и M се центарот на впишаната кружница и тежиштето на $\triangle ABC$, во кој $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Докажи дека $IM \perp AB$ ако и само ако $\overline{AC} + \overline{BC} = 3\overline{AB}$.

10. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4, \overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

11. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC. Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

12. Во $\triangle ABC$ со плоштина S точката H е ортоцентар, точките D, E, F се соодветно подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C, а точките P, Q, R се редоследно симетрични на темињата A, B, C во однос на правите BC, CA, AB, соодветно. Познато е дека триаголниците DEF и PQR имаат еднакви плоштини T и дека $T > \frac{3}{5}S$. Докажи дека $T = S$.

13. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокракиот $\triangle ABC$ со основа AB. Правата AO го сече кракот BC во точката D. Познато е дека

$\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се цели броеви, а $\overline{AO}-\overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

14. Во $\triangle ABC$ точките M и N лежат соодветно на страните BC и AC. Отсечките AM и BN се сечат во точката P. Опишаните кружници околу $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ по втор пат се сечат во центарот I на вписаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ја должината на отсечката IP ако $\measuredangle ACB = 45^\circ$ и $R_{ABC} = 1$.

15. Во кружница k со радиус 1 е впишан $\triangle ABC$. Точките I и I_a се соодветно центарот на впишаната кружница и центарот на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$. Правата BI ја сече AC во точка B_1, а правата AI ја сече BC во точка A_1. Правата B_1A_1 ја сече k во точки P и Q.
а) Докажи дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница.
б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$.

16. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја преполовува искршената линија составена од отсечките BA и AC.

17. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Над страната AB како над дијаметар е конструирана кружница k. Кружница внатрешно ги допира кружницата k во точката T и страните AN и AC. Тангентата на k во точката T ја сече страната BC во точката Q. Ако $\overline{AB} = 6$, определи ја должината на отсечката CQ.

18. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC. Нека точката $Q \in k$ е таква што $\measuredangle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle POB = 2\measuredangle PBO$.

19. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните AB и AC во точките P и Q, соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира впишаната кружница во триаголникот

ABC ако и само ако $\overline{AB}+\overline{AC}=3\overline{BC}$.

20. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со средини на страните BC, CA и AB соодветно M, N и P. Нека симетралите на AB и AC ја сечат полуправата AM соодветно во точките D и E, а правите BD и CE се сечат во точката F, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Докажи дека точките A, N, F и P се конциклични.

21. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CC_1 на $\measuredangle ACB, C_1 \in AB$. Точките $P \in C_1B,\ Q \in BC,\ R \in AC$ и $S \in AC_1$ се такви што
$$\overline{C_1P}=\overline{PQ}=\overline{QC} \text{ и } \overline{CR}=\overline{RS}=\overline{SC_1}.$$
Докажи дека CC_1 е симетрала на $\measuredangle SCP$.

22. Во $\triangle ABC$ е вписан петаголник $AMNPQ$ со еднакви должини на страни, при што $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се сечат во точката S, а со l ја означуваме симетралата на $\measuredangle MSQ$. Докажи дека $OI \parallel l$, каде O и I се соодветно центрите на опишаната и вписаната кружница во $\triangle ABC$.

23. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\measuredangle ACB = 45^\circ$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$ и $\overline{BM}=m$, каде M е средината на AC.
а) Ако $\alpha = \measuredangle BAC$, изрази го m како функција од $\operatorname{ctg}\alpha$.
б) Определи ги сите вредности на m, за кои $\measuredangle BAC$ е еднозначно определен.

24. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, а M и N се средините на страните AB и BC. Правата CO ја преполовува отсечката M. Определи ја најмалата можна вредност на $\measuredangle BAC$.

25. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD < 180^\circ$. Правите AB и CD се сечат во точката E. Докажи дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ ако и само ако е исполнето равенството
$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CE} - \overline{AB}\cdot\overline{AE}.$$

26. Даден е $\triangle ABC$ со симетрали на агли BM и CN ($M \in AC$, $N \in AB$). Полуправата MN ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D. Докажи дека
$$\frac{1}{\overline{BD}} = \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{CD}}.$$

27. Кружница низ темето C на $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката R и ги сече страните AC и BC соодветно во точките P и Q така што
$$\overline{AR}\cdot\overline{BR}=\overline{CR}^2 \text{ и } \overline{AP}\cdot\overline{BQ}=\overline{CP}\cdot\overline{CQ}.$$
Докажи дека CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

28. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ се повлечени тежишната линија AM и висината AH. На правите AB и AC се избрани точките Q и P соодветно при што $QM\perp AC$ и $PM\perp AB$. Опишаната кружница околу $\triangle PMQ$ по втор пата ја сече правата BC во точката X. Докажи дека $\overline{BH}=\overline{CX}$.

29. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB=90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP}=4$, $\overline{BP}=2$ и $\overline{CP}=1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

30. Даден е остроаголен $\triangle PBC$, $\overline{PB}\neq\overline{PC}$. Точките A и D припаѓаат соодветно на страните PB и PC, а точките M и N се соодветно средините на отсечките BC и AD. Правите AC и BD се сечат во точката O, и од точката O се повлечени нормали $OE\perp AB$, $E\in AB$ и $OF\perp CD$, $F\in CD$.

а) Докажи дека, ако точките A,B,C,D се конциклични, тогаш
$$\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM}.$$
б) Дали од
$$\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM},$$
следува дека точките A,B,C,D се конциклични?

31. Определи ја должината на страната на најмалиот рамностран триаголник во кој може да се постават три кружници со радиуси 2, 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки.

4 НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека во правоаголен триаголник важи $a+b<c+h$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h е должината на висината повлечена кон хипотенузата.

2. Нека a,b и c се страни на триаголник и

$$A=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \text{ и}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Докажи дека $AB\geq 9$.

3. Докажи го неравенството

$$(t_a^2+t_b^2+t_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\geq 27P^2,$$

каде h_a,h_b,h_c се должините на висините, t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии и P е плоштината на триаголникот ABC.

4. Нека t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии повлечени соодветно од темињата A,B,C во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$t_at_b+t_bt_c+t_ct_a<\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

5. На страната BC на триаголникот ABC се дадени точки D и E, при што D е меѓу B и E. Ако p_1 и p_2 се соодветно периметрите на триаголниците ABC и ADE, докажи дека $p_1>p_2+2\min\{\overline{BD},\overline{CE}\}$.

6. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната BC, а на страните AC и AB соодветно се земени точки E и F такви што $\overline{DE}=\overline{DF}$ и $\measuredangle EDF=\measuredangle BAC$. Докажи го неравенството

$$\overline{DE}\geq\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{4}.$$

7. Нека O е внатрешна точка на $\triangle ABC$ и нека AO,BO,CO ги сечат страните BC,CA,AB соодветно во точките A_1,B_1,C_1. Ако AA_1 е најдолга од отсечките AA_1,BB_1 и CC_1 докажи дека

$$\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}\le\overline{AA_1}.$$

8. Нека AM и BN ($M\in BC, N\in AC$) се симетрали соодветно на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ во $\triangle ABC$. Ако $AM\cap BN=I$, а опишаните кружници соодветно околу $\triangle ANI$ и $\triangle BMI$ по втор пат се сечат во точката L која припаѓа на страната AB, докажи дека плоштината на $\triangle MNL$ е помала или еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$.

9. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}=1$, $\measuredangle BAE=\measuredangle ABC$ $=120^\circ$, $\measuredangle CDE=60^\circ$ и $\measuredangle ADB=30^\circ$. Докажи дека плоштината на петаголникот $ABCDE$ е помала од $\sqrt{3}$.

10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на впишаната кружница r. Нека H е ортоцентарот, а A', B', C' се подножјата на висините h_a, h_b, h_c повлечени соодветно од темињата A, B, C. Да означиме $a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$. Нека d_a, d_b, d_c се растојанијата на ортоцентарот до страните BC, CA, AB, соодветно. Ако $a\ge b\ge c$ докажи дека:

а) $h_a\le h_b\le h_c$, б) $d_a\ge d_b\ge d_c$,

в) $\overline{AH}\le\overline{BH}\le\overline{CH}$, и г) $d_a+d_b+d_c\le 3r$.

11. Даден е триаголник ABC со страни a,b,c и плоштина S.

а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$.

б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$ докажи дека $S_1^2\ge\frac{S\sqrt{3}}{4}$.

12. Точката X припаѓа на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$ и е таква што дијагоналата BD ја преполовува отсечката CX, а дијагоналата AC ја преполовува отсечката DX. Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

13. Во триаголникот ABC симетралите на внатрешнисе агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E, соодветно. Докажи дека $\overline{DE}\le(3-\sqrt{8})(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$. Определи ги аглите на триаголникот за кој важи знак за равенство.

14. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната

кружница во триаголникот ABC, докажи дека

$$r^2 \le \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

15. Даден е трапез $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Ако R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ACD и BCD, докажи дека $4R_1R_2 \ge \overline{AB}^2$.

16. Низ пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник е повлечена произволна права. Докажи дека должината на делот на правата внатре во четириаголникот не е поголема од должината на барем една негова дијагонала.

17. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина S. Докажи дека

$$\overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BF} - \overline{DF}) + \overline{CE}(\overline{BD} + \overline{DF} - \overline{BF}) + \overline{AE}(\overline{BF} + \overline{DF} - \overline{BD}) \ge 2\sqrt{3}S. \quad (*)$$

18. Нека m_c и l_c се должините на медијаната и симетралата на аголот при темето C во $\triangle ABC$ со плоштина S. Ако $\gamma = \measuredangle BCA$, докажи дека

$$m_c l_c \ge S \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

19. Нека M е тежиште на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM \le \frac{2}{\sqrt{3}},$$

а) ако опишаната кружница околу $\triangle AMC$ ја допира правата AB,
б) за произволен $\triangle ABC$.

20. Симетралите на внатрешните агли при темињата A и B на $\triangle ABC$ ги сечат спротивните страни соодветно во точките D и E. Во четириаголникот $ABDE$ е вписан ромб така што на секоја страна на четириаголникот се наоѓа точно по едно теме на ромбот. Ако $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$, докажи дека барем еден агол на ромбот не е поголем од $\max\{\alpha, \beta\}$.

21. Нека M, N, P се произволни точки редоследно на страните BC, CA, AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\overline{NP} \ge \frac{1}{2}\overline{BC}, \quad \overline{PM} \ge \frac{1}{2}\overline{CA}, \quad \overline{MN} \ge \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Впишаната кружница на тангентниот петаголник $ABCDE$ ја допира страната BC во точката K. Ако $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$, докажи дека $\measuredangle EKB=90^{\circ}$.

2. Во тетивен петаголник $ABCDE$ важи $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{CD}=\overline{DE}$. Отсечките AD и BE се сечат во точката P, а отсечката BD ги сече CA и CE во Q и T, соодветно. Докажи дека триаголникот PQT е рамнокрак.

3. Во кружница е впишан конвексен петаголник $ABCDE$. Точките M и N се внатрешни соодветно за страните ED и CD. Отсечката MN ја сече AD во точката K и BD во точката L. Докажи дека, ако четириаголникот $ABLK$ е тетивен, тогаш и четириаголникот $ECNM$ е тетивен.

4. Даден е конвексен шестаголник. Нека s е збирот на должините на трите отсечки кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на шестаголникот. Докажи дека постои точка, внатрешна за шестаголникот, таква што збирот на растојанијата од неа до страните на шестаголникот е помал или еднаков на s.

5. Даден е конвексен шестаголник. Секоја од трите прави, кои ги поврзуваат средините на спротивните страни, го дели шестаголникот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека овие три прави се сечат во една точка.

6. Нека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во кружница, $AC\cap BE=H$, $AD\cap CE=I$, $BD\perp CF$ и $\overline{AI}=\overline{CI}$. Докажи дека $\overline{CH}=\overline{AH}+\overline{DE}$ ако и само ако $\overline{GH}\cdot\overline{BD}=\overline{BC}\cdot\overline{DE}$.

7. Езеро има форма на конвексен стоаголник $A_1A_2...A_{100}$ со центар на симетрија во точката O. На езерото се наоѓа остров $B_1B_2...B_{100}$, каде B_i е средина на отсечката OA_i. Островот е заграден со висок ѕид и преку ѕидот ништо не се гледа. Во две дијаметрално спротивни точки на брегот се наоѓаат двајца стражари. Докажи дека секоја точка на брегот ја гледа барем еден стражар.

8. На страната AB на $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB=50^{\circ}$ е земена произволна точка O. Опишаната кружнца k_1 околу $\triangle AOC$ ја сече отсечката BC во точката N.

Опишаната кружница k_2 околу $\triangle BOC$ ја сече отсечката AC во точката M. Правата ON ја сече k_2 во точката D, а правата OM ја сече k_1 во точка P. Правите PA и DB се сечат во точката Q. Определи ја големината на $\measuredangle AQB$

9. Нека AM е медијана на нерамностраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

10. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која минува низ точката P ја сече кружницата k во точките A и B. Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B и точката C на отсечката AB е таква што $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Докажи дека $\measuredangle MCN$ не зависи од изборот на правата s.

11. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ се земени точки M и N кои се еднакво оддалечени од нејзиниот центар. Низ M е повлечена тетива AB, а низ N е повлечена тетива AN така што важи
$$\frac{1}{\overline{MB}^2} + \frac{1}{\overline{NC}^2} = \frac{3}{\overline{MN}^2},$$
Определи го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N.

12. Нека ABC е правоаголен триаголник со катети $\overline{AC} = 1$ и $\overline{BC} = 2$. Низ точка A_1 од катетата BC, за која $\overline{A_1C} \neq \frac{1}{3}$, е повлечена права, паралелна на AB, која AC ја сече во точка B_1. Нека C_1 е подножјето на нормалата спуштена од B_1 на AB. Низ C_1 е повлечена права, паралелна на AC, која BC ја сече во точка A_2. Правата низ A_2 паралелна на AB, ја сече AC во точка B_2 итн. Пресметај

а) $\frac{3\overline{A_{n+1}C}-1}{3\overline{A_nC}-1}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{A_nB_nC_n}$.

13. Допирните точки на впишаната кружница во даден триаголник и неговите темиња го делат периметарот на триаголникот на шест отсечки. Избираме три од нив, кои формираат триаголник и за нив ја повторуваме постапката. Докажи дека, по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол 60° или агол помал од 1°.

14. Темињата на два квадрати со плоштини S и T лежат на страните на правоаголен $\triangle ABC$, при што три од нив лежат на хипотенузата AB со должина

природен број c. Дали е можно $\frac{S}{2}$ и $\frac{T}{2}$ да се заемно прости броеви:

а) за некој $c<70$, б) за некој $c>70$.

15. Даден е трапез $ABCD, BC \parallel AD$. Точката M е средина на основата BC, а точката P припаѓа на основата AD. Правата PM ја сече правата CD во точката Q така што C лежи меѓу Q и D. Нормалата на основите низ точката P ја сече правата BQ во точката K. Докажи дека $\measuredangle QBC = \measuredangle KDA$.

16. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC. Нека точката $Q \in k$ е таква што $\measuredangle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle POB = 2\measuredangle PBO$.

17. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = 2\overline{AD}$ и $\overline{AB} = \overline{AE}$, каде $E = AB \cap CD$. Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$.

18. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC, а k е опишаната кружница на триаголникот ABC. Кружница k_1 со центар I ги допира отсечките BD и CD и кружницата k, а кружница k_2 со центар J ги допира отсечките AD и CD и кружницата k. Ако точките A, B, I, J се конциклични, докажи дека D е допирната точка на припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето C.

19. Нека O е центарот на опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC. Точките P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC, и се такви што $\measuredangle BOP = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle COQ = \measuredangle ACB$. Докажи дека симетричната права на правата BC во однос на правата PQ ја допира опишаната кружница на триаголникот APQ.

20. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката L. Правите AD и BC се сечат во точката M, а правите AB и CD се сечат во точката N. Симетралата на $\measuredangle ALD$ ги сече страните AD и BC соодветно во точките P и Q, а симетралата на $\measuredangle ALB$ ги сече страните AB и CD соодветно во точките K и T. Докажи дека опишаните кружници околу $\triangle MPQ, \triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ се сечат во една точка.

21. Во рамнокрак триаголник ABC точката H е ортоцентар, а G е тежиште. Точките X, Y и Z се одбрани соодветно на страните BC, CA и AB така што $\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA$. Опишаните кружници околу триаголниците BXZ и CXY по втор пат се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle GPH = 90^\circ$.

22. Кружница k која минува низ темињата A и C на триаголникот ABC ја допира правата AB и по втор пат ја сече страната BC во точката P. Нека l е тангента на кружницата k во точката P. Симетралата на аголот во темето B ги сече правите l и AP во точките K и L, соодветно. Докажи дека $\measuredangle LAK = \measuredangle LCB$.

23. Даден е $\triangle ABC$ со центар I на впишаната кружница. Права l' ја допира впишаната кружница, а права $l \neq l'$ ги сече страните BC, CA и AB или нивните продолженија соодветно во точките A', B' и C'. Тангентата на впишаната кружница повлечена од точката A', различна од BC, ја сече правата l' во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

24. Даден петаголник со искршена линија која поврзува две негови темиња е поделен на два меѓусебно складни петаголници. Докажи дека почетниот петаголник има пар еднакви агли, а петаголниците на кои е поделен имаат по два пара паралелни страни.

25. Точките D, E и F припаѓаат соодветно на страните BA, CA и AB на $\triangle ABC$ и се такви што $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$. Докажи дека ако $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ имаат заеднички центар на опишаните кружници, тогаш $\triangle ABC$ е рамностран.

26. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со центар O, при што аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCD$ се остри. Нека $AB \cap CD = E$, P и R се подножјата на нормалите повлечени од E соодветно на правите BC и AD, $Q = EP \cap AD$ и $S = ER \cap BC$. Докажи дека правата EO ја преполовува отсечката QS.

27. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката H_1 е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_1 и AH_1. Точката O_1 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_1B_1H_1$. Точката H_2 е ортоцентар на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 се

симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_2 и AH_2. Точката O_2 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_2B_2H_2$. Правата O_1O_2 да ја означиме со l_{AB}. Аналогно се дефинираат правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA}. Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M, l_{BC} \cap l_{CD} = N, l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

28. Нека r и R се дијаметрите на вписаната и опишаната кружница на триаголникот ABC. Нека r_a е радиусот на кружницата γ_a која одвнатре ја допира опишаната кружница во точката A, а надворешно ја допира вписаната кружница. Аналогно се дефинираат r_b и r_c. Докажи го неравенството

$$\frac{R-r_a}{r+4r_a} + \frac{R-r_b}{r+4r_b} + \frac{R-r_c}{r+4r_c} \geq \frac{3R}{4r}.$$

29. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ се правилни седумаголници со плоштини S_A, S_B, S_C, за кои важи $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_3} = \overline{C_1C_4}$. Докажи дека

$$\frac{1}{2} < \frac{S_B+S_C}{S_A} < 2-\sqrt{2}.$$

30. Определи го најмалиот број m таков што со секои пет рамнострани триаголници со збир на плоштините m може да се покрие рамностран триаголник со плоштина 1.

31. Нека $A_0, A_1, ..., A_{2k}$, во овој редослед, се точки од кружница, кои кружницата ја делат $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови, кои наизменично се обоени со црвена и сина боја, така што бројот на црвените делови е за еден поголем од бројот на сините делови. Докажи дека плоштината на сината површина е поголема од плоштината на црвената површина.

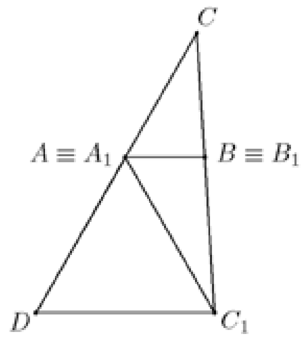
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1 ТРИАГОЛНИК

1. Дадени се триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ за кои е исполнето $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$, $\measuredangle BAC=\measuredangle B_1A_1C_1=60^\circ$ и $\measuredangle ABC+\measuredangle A_1B_1C_1=180^\circ$. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{A_1C_1}}.$$

Решение. Да ги залепиме двата триаголника по страните AB и A_1B_1, така што $A=A_1$ и $B=B_1$, а C и C_1 се од различни страни на AB. Од $\measuredangle ABC+\measuredangle A_1B_1C_1=180^\circ$ следува дека точките B,C и C_1 се колинеарни. Нека D е точка на правата CA таква што $C_1D\parallel AB$. Оттука добиваме $\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$. Бидејќи $\measuredangle DAC_1=\measuredangle AC_1D=60^\circ$, триаголникот ADC_1 е рамностран и горното равенство може да се запише како



$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}+\overline{AC_1}}{\overline{AC}}.$$

Ова равенство е еквивалентно на бараното равенство.

2. Во паралелограмот $ABCD$ со остар агол во темето A, кружницата која минува низ точките A,B и D ги сече правите BC и CD во точките K и L, соодветно. Во оваа кружница точката N е дијаметрално спротивна на точката A. Докажи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL.

Решение. Да означиме $\measuredangle BAC=\alpha$. Бидејќи

$$\measuredangle NKL=\measuredangle NDL=\measuredangle ADC-90^\circ=90^\circ-\alpha$$

и аналогно $\measuredangle NLK=90^\circ-\alpha$ следува $\overline{NK}=\overline{NL}$ и $\measuredangle KNL=2\alpha=2\measuredangle KCL$, што значи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL.

3. Во остроаголниот триаголник ABC точките A_1 и B_1 се соодветно подножјата на висините повлечени од A и B, а H е ортоцентарот на триаголникот. Нека k_1 и k_2 се соодветно кружниците со центри B и H кои минуваат низ точката B_1. Тангентите повлечени од точката C на кружниците k_1 и k_2,

различни од правата AC, ги допираат кружниците k_1 и k_2 во точките K и N, соодветно. Докажи дека правата KN минува низ точката A_1.

Решение. Точките K и N се симетрични на точката B_1 во однос на правите CH и CB (направи цртеж). Затоа $\overline{CK}=\overline{CN}$ и

$$\measuredangle KCN=\measuredangle KCA-\measuredangle NCA=2\measuredangle BCA-2\measuredangle HCA=2\measuredangle HCB$$

и

$$\measuredangle CKN=90^\circ-\measuredangle HCB=\measuredangle CBA=\measuredangle CB_1A_1=\measuredangle CKA_1,$$

а оттука следува колинеарноста на точките K,N,A_1.

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A, а M и N се соодветно подножјата на нормалите повлечени од D на AB и AC. Правата MN ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точките P и Q, а правата AD по втор пат ја сече k во точката R. Докажи дека D е центар на впишаната кружница на триаголникот PQR.

Решение. Од $\measuredangle OAM+\measuredangle AMN=\measuredangle DAN+\measuredangle ADN=90^\circ$ следува дека тетивата PM е нормална на OA, па затоа A е средина на лакот PQ (направи цртеж). Според тоа, RA е симетрала на $\measuredangle PRQ$.

Од $\measuredangle ABP=\measuredangle AQP=\measuredangle APM$ следува дека триаголниците ABP и APM се слични, па затоа $\overline{AP}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AM}=\overline{AD}^2$. Значи, $\overline{AD}=\overline{AP}=\overline{AQ}$, па затоа D е центар на впишаната кружница на $\triangle PQR$.

5. На страните на $\triangle ABC$ се дадени точките $A',A''\in BC$, $B',B''\in CA$ и $C',C''\in AB$. Докажи, ако $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште, тогаш отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.

Решение. Бидејќи $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште важи

$$\overrightarrow{A'A''}+\overrightarrow{B'B''}+\overrightarrow{C'C''}=\vec{0}.$$

Од друга страна

$$\overrightarrow{A'A''}=\alpha\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{B'B''}=\beta\overrightarrow{CA} \text{ и } \overrightarrow{C'C''}=\gamma\overrightarrow{AB}$$

за некои $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Тогаш

$$\vec{0}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{CA}+\gamma\overrightarrow{AB}=(\alpha-\gamma)\overrightarrow{BC}+(\beta-\gamma)\overrightarrow{CA},$$

па затоа $\alpha-\gamma=\beta-\gamma=0$, т.е. $\alpha=\beta=\gamma$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека A'' е меѓу A' и C, т.е. $\alpha\geq 0$. Тогаш $\beta\geq 0$, т.е. B'' е меѓу B' и A. Значи, отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.

6. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност таква што $\measuredangle ADB-\measuredangle ACB=90^\circ$ и $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.

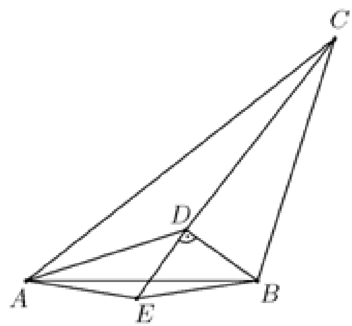
а) Пресметај го збирот $\measuredangle DAC + \measuredangle DBC$.

б) Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

Решение. а) Последователно добиваме:

$$\begin{aligned}\measuredangle DAC + \measuredangle DBC &= 180^\circ - \measuredangle ADC - \measuredangle ACD + 180^\circ - \measuredangle BDC - \measuredangle BCD \\ &= 360^\circ - (\measuredangle ADC + \measuredangle BDC) - \measuredangle ACB \\ &= \measuredangle ADB - \measuredangle ACB = 90^\circ.\end{aligned}$$

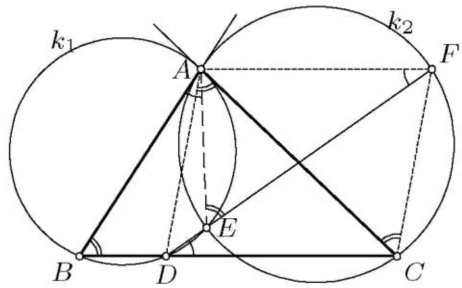
б) Нека E е внатрешна точка за $\measuredangle ADB$ таква што $\measuredangle BDE = 90^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{DE}$. Тогаш, $\measuredangle ADE = \measuredangle ACB$. Освен тоа $\overline{BD} = \overline{DE}$ и од условот $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ следува дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$, што значи дека $\triangle ACB \sim \triangle ADE$. Значи, $\measuredangle EAD = \measuredangle BAC$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, од каде добиваме дека $\triangle ABE \sim \triangle ACD$. Конечно,



$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}\sqrt{2}}{\overline{BD}} = \sqrt{2}.$$

7. Даден е триаголник ABC. Кружницата k_1 минува низ точките A и B и ја допира правата AC, а кружницата k_2 минува низ точките A и C и ја допира правата AB. Кружницата k_1 ја сече правата BC во точката D ($D \neq B$) и ја сече кружницата k_2 во точката E ($E \neq A$). Докажи дека правата DE ја полови отсечката AC.

Решение. Со F да ја означиме втората пресечна точка на правата DE и кружницата k_2. Тврдиме дека $ADCF$ е паралелограм, од каде веднаш слеува тврдењето на задачата.



Навистина, од својството меѓу тангентата и тетивата, во ориентирани агли имаме

$$\measuredangle AFE = \measuredangle BAE = \measuredangle CDE,$$

т.е $AF \parallel CD$, и слично од истото својство

$$\measuredangle ACF = \measuredangle AEF = \measuredangle ABD = \measuredangle CAD,$$

т.е. $CF \parallel AD$.

8. Во остроаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето A, а P и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB и AC. Симетралите на $\measuredangle BDP$ и $\measuredangle CDQ$ ги сечат правите AB и AC во точките K и L, соодветно. Докажи дека центарот на впишаната кружница на триаголникот DPQ припаѓа на правата KL.

Решение. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle DPQ$ (направи цртеж). Бидејќи

$$\measuredangle DSP = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle DQP = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle BDP = \measuredangle DKB,$$

четириаголникот $DKPS$ е тетивен, па затоа $\measuredangle DSK = \measuredangle DPK = 90^\circ$. Слично, $\measuredangle DSL = 90^\circ$, од што следува тврдењето на задачата.

9. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D. Правата DH ја сече отсечката AC во точката P, а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

Решение. Со R да го означиме центарот на ω и нека E е пресечната точка на правите BH и AC. Тогаш

$$\measuredangle RBD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle DRB = 90^\circ - \measuredangle DHB = 90^\circ - \measuredangle PHE = \measuredangle BPH = 180^\circ - \measuredangle APD.$$

Од друга страна

$$\measuredangle MQD = \tfrac{1}{2}\measuredangle AQD = \tfrac{1}{2}(360^\circ - 2\measuredangle APD) = 180^\circ - \measuredangle APD = \measuredangle RBD$$

од каде следува дека R лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

10. Даден е разностран $\triangle ABC$ со опишана кружница ω. Тангентата на ω во точката C ја сече правата AB во точката D. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правите AI и BI ја сечат симетралата на $\measuredangle BDC$ во точките Q и P, соодветно. Нека M е средината на отсечката PQ. Докажи дека правата MI го преполовува лакот ACB на ω.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека A лежи меѓу B и D. Правите AI и BI по втор пат ја сечат ω во точките A' и B', соодветно. Нека L е средината на лакот ACB. Тогаш важи

$$\measuredangle LA'A = \measuredangle LBA = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B}{2} = \measuredangle B'IA.$$

Според тоа, $LA' \parallel IB'$ и аналогно $LB' \parallel IA'$. Значи, четириаголникот $IA'LB'$ е паралелограм и LI ја преполовува $A'B'$. Ќе докажеме дека $PQ \parallel A'B'$. Имаме,

$$\measuredangle CDB = \measuredangle CAB - \measuredangle ACD = \measuredangle A - \measuredangle B .$$

Од друга страна

$$\measuredangle PQA = \measuredangle QAB - \measuredangle QDB = \frac{\measuredangle A}{2} - \frac{\measuredangle A - \measuredangle B}{2} = \frac{\measuredangle B}{2} = \measuredangle B'A'A$$

па затоа $PQ \parallel A'B'$. Тогаш LI минува низ M.

11. Правата BD симетрала на агол во $\triangle ABC\,(D \in AC)$ и по втор пат ја сече опишаната кружница околу него Ω во точката E. Нека F е втората пресечна точка на Ω и кружницата со дијаметар DE. Докажи дека правата симетрична на BF во однос на BD минува низ средината на страната AC.

Решение. *Прв начин*. Нека M е средина на AC, а F' и B' се вторите пресечни точки на правите BM и FM со Ω (направи цртеж). Бидејќи $AE = CE$, заклучуваме дека правата $l = ME$ е симетрала на отсечката AC. Значи, $\measuredangle EMD = 90^\circ$ и затоа M лежи на кружницата ω со дијаметар BD. Имаме,

$$\tfrac{1}{2} B'CE = \measuredangle B'FE = \measuredangle MFE = \measuredangle MDE = \measuredangle CDE = \tfrac{1}{2}(AB + AE) = \tfrac{1}{2} BAE ,$$

па затоа $B'CE = BAE$, т.е. точките B и B' се симетрични во однос на l. Последното значи дека $EF = EF'$, од каде добиваме $\measuredangle FBE = \measuredangle F'BE$. Според тоа, правата BF', која минува низ M, е симетрична на BF во однос на BE, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање добиваме дека ME е симетрала на AC и $M \in \omega$. Нека правата DF ја сече Ω по втор пат во точка G. Бидејќи $\measuredangle DFE = 90^\circ$, добоваме дека G е дијаметрално спротивна на E. Во случајов $M \in EG$. Значи, $\measuredangle FBE = \measuredangle FGE$.

Понатаму, EG е дијаметар, па затоа $\measuredangle GBE = 90^\circ$. Од $\measuredangle GDB = \measuredangle GMD = 90^\circ$ следува дека $GBDM$ е тетивен четириаголник (со дијаметар DG), па затоа $\measuredangle MBE = \measuredangle MBD = \measuredangle MGD = \measuredangle EGF$. Конечно, $\measuredangle FBE = \measuredangle FGE = \measuredangle MBE$, со што задачата е решена.

12. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини BD и CE. Точките S и T се симетрични на точката E во однос на страните AC и BC, соодветно. Опишаната кружница околу $\triangle CST$ има центар O и по втор пат ја сече правата AC во точката X. Докажи дека правите XO и DE се заемно нормални.

Решение. *Лема*. Даден е $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O. Точките D и E припаѓаат на страните AB и AC и се такви што точките D, E, C, B се концииклични. Тогаш правите AO и DE се заемно нормални.

Доказ. Од $\overline{AO} = \overline{BO}$ следува

$$\measuredangle DAO = \measuredangle BAO = 90^\circ - \tfrac{\measuredangle AOB}{2} = 90^\circ - \measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle ADE\,,$$

па затоа $\measuredangle DAO + \measuredangle ADE = 90^\circ$, од каде следува дека правите AO и DE се заемно нормални. ■

Со M и N да ги означиме пресечните точки на правите ET и BC, и на правите ES и AC, соодветно. Тогаш

$$\measuredangle ECN = \measuredangle EMN = \measuredangle KTS = \measuredangle NCS = \measuredangle XTS$$

и

$$\measuredangle EDB = \measuredangle NED = \measuredangle DSE = \measuredangle ECB = \measuredangle ENM = \measuredangle EST\,,$$

од каде следува дека точките S, D и T лежат на една права. Тогаш

$$\measuredangle ATD = \measuredangle XCS = \measuredangle DCE\,,$$

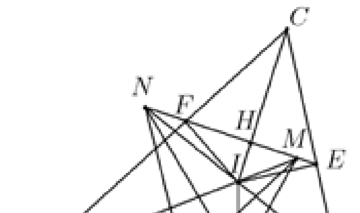
па значи точките T, C, D и E лежат на една кружница. Оттука заклучуваме дека правите XO и DE се заемно нормални.

13. Во рамнината се дадени точки A и B, ($A \neq B$). Точката C се движи во рамнината така што $\measuredangle ACB = \alpha$, каде α е даден агол ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Вишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките D, E и F. Правите AI и BI ја сечат EF соодветно во точки M и N. Докажи дека:

а) Отсечката MN има константна должина.

б) Опишаната кружница околу $\triangle DMN$ минува низ фиксна точка.

Решение. а) Од $\triangle AFM$ добиваме



$$\begin{aligned}\measuredangle AMF &= 180^\circ - (\measuredangle MFA + \measuredangle FAM)\\ &= 90^\circ - (\measuredangle EFI + \measuredangle FAM)\\ &= 90^\circ - (\measuredangle ECI + \measuredangle FAM)\\ &= 90^\circ - (\tfrac{\measuredangle C}{2} + \tfrac{\measuredangle A}{2}) = \tfrac{\measuredangle B}{2} = \measuredangle IBA.\end{aligned}$$

Исто така, важи $\measuredangle NIM = \measuredangle AIB$. Според тоа, $\triangle IMN \sim \triangle IBA$. Оттука, за $H = EF \cap IC$ имаме $\frac{\overline{MN}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IF}} = \sin\measuredangle EFI = \sin\frac{\alpha}{2}$ и затоа $\overline{MN} = \overline{BA}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \text{const}$.

б) Точките F и D се симетрични во однос на правата AM. Од $\triangle IMN \sim \triangle IBA$ следува дека $\measuredangle IMD = \measuredangle IBD$. Според тоа, четириаголникот $IMBD$ е тетивен, од каде добиваме $\measuredangle BMA = 90^\circ$. Ако P е средина на хипотенузата AB, тогаш

$$\measuredangle BPM = 2\measuredangle PAM = 2\measuredangle BAI = \measuredangle BAC\,.$$

Бидејќи точките E и D се симетрични во однос на правата BN, повторно до $\triangle IMN \sim \triangle IBA$ следува дека

$$\measuredangle MND = 2\measuredangle INM = 2\measuredangle IAB = \measuredangle BAC.$$

Според тоа, $\measuredangle MND = \measuredangle BPM = \measuredangle DPM$, што значи дека точките M, N, D и P лежат на една кружница, т.е. опишаната кружница околу $\triangle DMN$, која минува низ постојана точка, а тоа е средината на отсечката AB.

14. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AB} = \overline{AC}$. Точката M е средина на пократкиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Правата низ M паралелна со AC ги сече правите BC и AB во точките D и E, соодветно. Правата низ D паралелна со AB ја сече AC во точката F. Докажи дека $\measuredangle MEF = 90^\circ$.

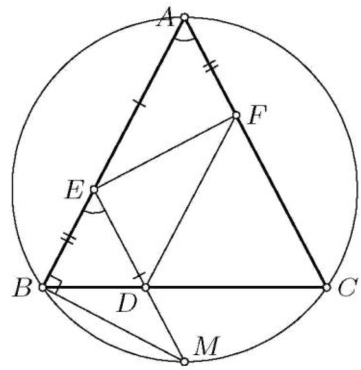
Решение. Четириаголникот $AEDF$ е паралелограм, па затоа $\measuredangle BEM = \measuredangle FAE$ и заради

$$\measuredangle EBD = \measuredangle ACB = \measuredangle EDB$$

важи

$$\overline{EB} = \overline{ED} = \overline{AF}.$$

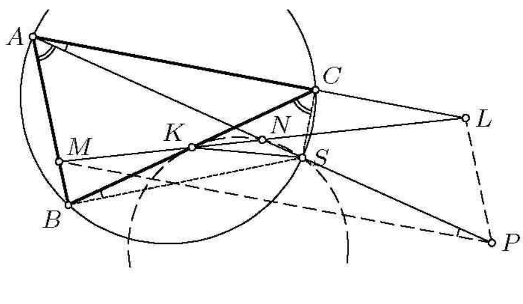
Понатаму, од $\measuredangle EMA = \measuredangle MAC = \measuredangle EAM$ следува $\overline{EM} = \overline{AE}$. Според тоа, триаголниците EBM и AFE се складни, па затоа важи



$$\measuredangle MEF = \measuredangle AFE = \measuredangle EBM = 90^\circ.$$

15. Даден е триаголник ABC. Права која минува низ средината K на страната BC ги сече страната AB и полуправата AC во точките M и L, соодветно. Нека N е средината на отсечката LM. Правата AN пом втор пат ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точката S. Ако точките K, N, S се различни, докажи дека опишаната кружница околу триаголникот KNS ја допира правата BC.

Решение. Од $\measuredangle KCL > \measuredangle KBM$ следува $\overline{KL} > \overline{KM}$, па точката N припаѓа на отсечката KL.



Нека P е точка таква што четириаголникот $ALPM$ е паралелограм. Бидејќи

$$\measuredangle SBC = \measuredangle SAC = \measuredangle MPA \text{ и } \measuredangle SCB = \measuredangle SAB = \measuredangle MAP,$$

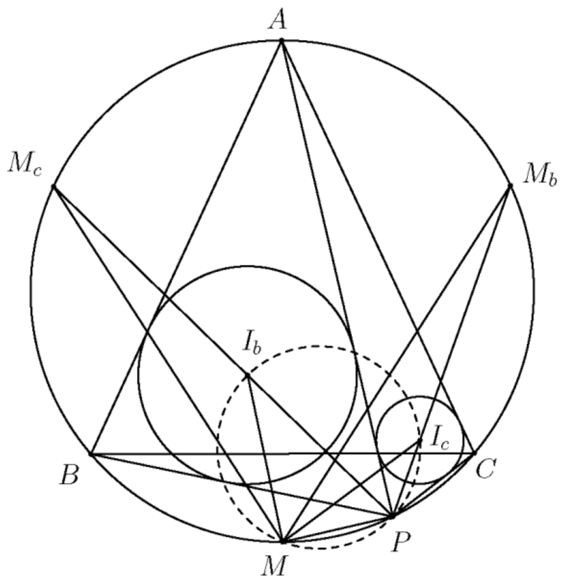
триаголниците SBC и MPA се слични. Во оваа сличност точките K и N си соодветствуваат една на друга, па затоа важи $\measuredangle SKC = \measuredangle MNA = \measuredangle KNA$, од што следува дека правата KC ја допира кружницата KNS.

16. Нека точката P припаѓа на внатрешноста на триагоникот ABC и е таква што $\measuredangle PAB = \measuredangle PCA$ и $\measuredangle PAC = \measuredangle PBA$. Ако D е средина на отсечката AB, докажи дека $\measuredangle APD = \measuredangle ACB$.

Решение. Нека Q е симетричната точка на точката P во однос на D. Од $\measuredangle QBA = \measuredangle PAB = \measuredangle PCA$ и $\measuredangle QAB = \measuredangle PBA = \measuredangle PAC$ следува дека триаголниците QAB и PAC се слични, па затоа $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и како $\measuredangle QAP = \measuredangle BAC$ добиваме дека триаголниците AQP и ABC се слични. Оттука следува $\measuredangle APD = \measuredangle APQ = \measuredangle ACB$.

17. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) е впишан во кружница ω. Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A. Точките I_B и I_C се центрите на вписаните кружници во триаголниците ABP и ACP, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_BI_C$ минува низ фиксна точка која не зависи од изборот на точката P.

Решение. Нека M е средината на лакот BC кој не ја содржи A. Ќе докажеме дека M го има саканото својство.



Од $\measuredangle MPA = 90^\circ$ и PA е симетрала на $\measuredangle I_B P I_C$ следува дека PM е надворешна симетрала на овој агол, па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{MI_B} = \overline{MI_C}$. Со M_B и M_C да ги означиме вторите пресечни точки на правите PI_B и PI_C со кружницата ω, соодветно. Тогаш

$$\overline{M_B I_B} = \overline{M_B B} = \overline{M_C C} = \overline{M_C I_C} \text{ и } \measuredangle I_B M_B M = \tfrac{PB}{2} = \measuredangle I_C M_C M .$$

Според тоа, $\triangle I_B M_B M \cong \triangle I_C M_C M$, од каде следува $\overline{MI_B} = \overline{MI_C}$.

18. Околу тапоаголен $\triangle ABC, \measuredangle ABC > 90^\circ$, е опишана кружница Γ со центар O. Нека B_1 е пресечната точка на правата AB и тангентата на Γ во C, а O_1 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C$. Нека B_2 е внатрешна точка за отсечката BB_1 и нека права низ B_2 ја допира Γ во точката C_1 (поблиска до C). Нека O_2 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_2C_1$ и да претпоставиме дека $OO_2 \perp AO_1$. Докажи дека точките O, O_1, O_2, C_1 и C се конциклични (лежат на иста кружница).

Решение. Од условот $OO_2 \perp AO_1$ и од $OO_2 \perp AC_1$ следува дека O_1 лежи на отсечката AC_1. Освен тоа, $\overline{OA} = \overline{OC_1}$, $\measuredangle OC_1A = \measuredangle OAO_1$ и $\measuredangle OCO_1 = \measuredangle OAO_1$, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OC}$ и $\overline{O_1A} = \overline{O_1C}$. Според тоа, $\measuredangle OC_1A = \measuredangle OCO_1$, што значи дека точките O, O_1, C_1 и C се конциклични.

Ќе докажеме дека $\measuredangle OO_1C_1 = \measuredangle OO_2C_1$. Последователно добиваме

$$\measuredangle C_1AB_2 = \tfrac{\pi - \measuredangle AO_1B_1}{2} = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle ACB_1 = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle BCA - \measuredangle B_1CB = \measuredangle ABC - \tfrac{\pi}{2},$$

$$\measuredangle B_2C_1A = \measuredangle B_2C_1B + \measuredangle BC_1A = \measuredangle C_1AB_2 + \measuredangle BCA = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle CAB,$$

и затоа

$$\measuredangle AB_2C_1 = \pi - \measuredangle B_2C_1A - \measuredangle C_1AB_2 = \pi + \measuredangle CAB - \measuredangle ABC .$$

Освен тоа, $\measuredangle B_1CB + \measuredangle BCA = \measuredangle B_1CO_1 + \measuredangle O_1CA$ и значи

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BCA = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle CAB + \measuredangle C_1AC,$$

од каде следува $\measuredangle ABC - \measuredangle CAB = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle C_1AC < \tfrac{\pi}{2}$. Според тоа, $\measuredangle AB_2C$ е тап агол и

$$\measuredangle OO_2C_1 = \measuredangle AB_2C_1 = \pi + \measuredangle CAB - \measuredangle ABC .$$

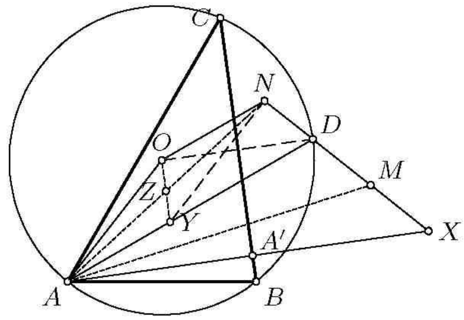
Од друга страна

$$\begin{aligned}\measuredangle OO_1C_1 &= \measuredangle C_1O_1C + \measuredangle CO_1O = 2\measuredangle C_1AC + \measuredangle CC_1O \\ &= 2\measuredangle C_1AC + \tfrac{\pi - \measuredangle COC_1}{2} = \tfrac{\pi}{2} + \measuredangle C_1AC \\ &= 2\measuredangle CAB + \measuredangle BCA = \pi + \measuredangle CAB - \measuredangle ABC.\end{aligned}$$

Значи, $\measuredangle OO_1C_1 = \measuredangle OO_2C_1$, од каде следува дека точките O, O_1, O_2 и C_1 се концикличини. Претходно докажавме дека точките O, O_1, C_1 и C, па заклучуваме дека точките O, O_1, O_2, C_1 и C се конциклични.

19. Во триаголникот ABC точката O е центар на опишаната кружница, A' е подножјето на висината повлечена од темето A, а X е произволна точка на полуправата AA'. Симетралата на $\measuredangle BAC$ по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D. Точката M е средина на отсечката DX, а N е точка на правата DX таква што $ON \parallel AD$. Докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle CAN$.

Решение. Нека Y точка на AD таква што $AONY$ е паралелограм, а Z е средина на отсечката OY (види цртеж).



Триаголниците OND и ADX имаат паралелни страни, па затоа се слични. Според тоа,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AO}}.$$

Бидејќи уште $\measuredangle OAY = \measuredangle DAX$, триаголниците AOY и AXD се слични. Оттука и триаголниците AZY и AMD се слични, па затоа важи $\measuredangle NAD = \measuredangle DAM$, односно $\measuredangle BAM = \measuredangle CAN$.

20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\measuredangle ABC > \measuredangle BCA$, T е средина на лакот BAC и I е центар на впишаната кружница. Точката E е таква што $\measuredangle AEI = 90^\circ$ и $AE \parallel BC$. Правата TE по втор ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P. Определи го $\measuredangle BAC$ ако се знае дека $\measuredangle ABC = \measuredangle IPB$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека AH, $H \in BC$ е висината повлечена од темето A (направи цртеж). Тогаш $AH \parallel IE$ и

$$\measuredangle AIE = \measuredangle AIH = \measuredangle IAB - \measuredangle IAH = \tfrac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta) = \tfrac{\beta-\gamma}{2}.$$

Бидејќи $\measuredangle APE$ е еднаков на половина од аголот над лакот AT, добиваме $\measuredangle APE = \frac{\beta-\gamma}{2}$, па затоа $\measuredangle APE = \measuredangle AIE$.

Од претходните разгледувања следува дека четириаголникот $APEI$ е тетивен и од $\measuredangle AEI = 90^\circ$ следува дека $\measuredangle API = 90^\circ$. Според условот $\measuredangle IPB = \beta$, па затоа $\measuredangle APB = 90^\circ + \beta$. Но, важи и $\measuredangle APB = 180^\circ - \gamma$, па затоа $\alpha = 90^\circ$.

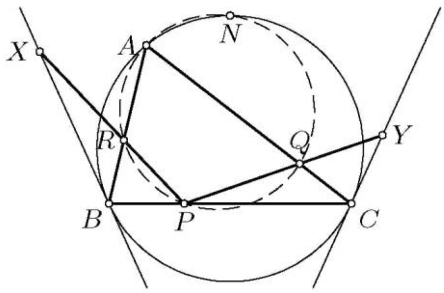
21. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точки P, Q и R така што четириаголникот $AQPR$ е тетивен и $\overline{BR} = \overline{CQ}$. Тангентите на опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките B и C ги сечат правите PR и PQ во точките X и Y, соодветно. Докажи дека $\overline{PX} = \overline{PY}$.

Решение. Од

$$\measuredangle BPR < 180^\circ - \measuredangle QPR = \measuredangle BAC,$$

следува дека точката X е на полуправата PR. Слично, точката Y е на полуправата PQ. Притоа важи

$$\measuredangle RBX = \measuredangle ACB = \measuredangle QCP \text{ и } \measuredangle BRX = \measuredangle PRA = \measuredangle PQC,$$



од што заедно со $\overline{BR} = \overline{CQ}$ се добива дека $\triangle BRX \cong \triangle CQP$. Според тоа, $\overline{BX} = \overline{CP}$. Слично $\overline{CY} = \overline{BP}$, па затоа триаголниците XBP и PCY се складни, од каде следува $\overline{PX} = \overline{PY}$.

Забелешка. Средината N на лакот BAC на опишаната кружница припаѓа на кружницата AQR и важи $\overline{NQ} = \overline{NR}$, а точките X и Y се симетрични во однос на правата NP.

22. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Нека $AD \perp BC$ и $DE \perp AC$ ($D \in BC, E \in AC$). Точката F припаѓа на отсечката DE. Докажи дека $AF \perp BF$ ако и само ако $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$.

Решение. Нека $AF \perp BF$. Тогаш четириаголникот $ABDF$ е тетивен и затоа $\measuredangle ABF = \measuredangle ADF$, $\measuredangle BAF = \measuredangle DAE$. Значи, $\measuredangle BAD = \measuredangle FAE$ и затоа $\triangle ABD \sim$

$\triangle AFE$, од каде следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}$. Од друга страна $\triangle ADE \sim \triangle DCE$ и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$. Од последните две равенства следува дека $\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$, односно $\overline{EF}\cdot\overline{DC}=\overline{BD}\cdot\overline{DE}$.

Обратно, нека $\overline{EF}\cdot\overline{DC}=\overline{BD}\cdot\overline{DE}$. Тогаш $\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$ и значи $\triangle ADE \sim \triangle DCE$, па затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$. На ист начин добиваме $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}$ и оттука $\triangle ABD \sim \triangle AFE$. Според тоа, $\measuredangle ABD=\measuredangle AFE$, па затоа четириаголникот $ABDF$ е тетивен. Последното значи $\measuredangle AFB=\measuredangle BDA$, од каде следува $AF\perp BF$.

23. Кружницата ω ја допира кружницата Ω одвнатре во точката T. Променливата тангента t на кружницата ω ја допира ω во точката S и ја сече кружницата Ω во точката P. Докажи дека центрите на опишаните кружници на сите можни триаголници PST лежат на фиксна кружница.

Решение. Со O, O_1 и U соодветно да ги означиме центрите на кружниците Ω, ω и опишаната кружница околу триаголникот PST, направи цртеж. Знаеме дека $OU\perp PT$ и $O_1U\perp ST$. Според тоа,

$$\measuredangle OUO_1=\measuredangle PTS=90^\circ-\measuredangle USP=\measuredangle O_1SU=\measuredangle OTU,$$

што значи дека триаголниците OUO_1 и OTU се слични. Конечно, важи $\overline{OU}^2=\overline{OO_1}\cdot\overline{OT}$, што е константа.

24. Во триаголникот ABC, симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точката C_1. Нормалата од C_1 на правата BC ја сече опишаната кружница на триаголникот во точката K (на спротивната страна на правата BC во однос на C_1). Нормалата од C на AK ја сече AB во точката L. Докажи дека средината на лакот AB (кој не ја содржи точката C) припаѓа на правата KL.

Решение. Од

$$\measuredangle CKC_1=90^\circ-\measuredangle BCK=90^\circ-\measuredangle LAK=\measuredangle CLC_1,$$

следува дека точките C, C_1, K, L се конциклични. Сега

$$\measuredangle AKL=90^\circ-\measuredangle KLC=90^\circ-\measuredangle KC_1C=\measuredangle C_1CB=\tfrac{1}{2}\measuredangle C=\tfrac{1}{2}\measuredangle AKB,$$

па затоа KL е симетрала на $\measuredangle AKB$ и минува низ средината на лакот AB.

25. Кружницата со центар I ги допира страните BC, CA и AB на триаголникот ABC во точките D, E и F, соодветно. Тежишната линија повлечена од темето A ја сече EF во точката K. Докажи дека K припаѓа на правата DI.

Решение. Нека DI ја сече EF во K' и нека правата низ K' паралелна со BC ги сече AB и AC во B' и C', соодветно (направи цртеж). Точките F, B', I, K' припаѓаат на кружницата со дијаметар IB', па затоа $\measuredangle B'IK' = \measuredangle AFK'$. Аналогно се добива $\measuredangle C'IK' = \measuredangle AEK' = \measuredangle AFK'$. Значи, триаголниците $B'IK'$ и $C'IK'$ се складни, па затоа $\overline{B'K'} = \overline{C'K'}$. Тоа значи дека K' припаѓа на тежишната линија низ темето A, па затоа $K' \equiv K$.

26. Точката D припаѓа на страната AC на триаголникот ABC и е таква што $\overline{BD} = \overline{AC}$. Точката F е во внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\measuredangle ACF = \frac{1}{2}\measuredangle ADB$ и $\measuredangle CAF = \frac{1}{2}\measuredangle CDB$. Правата BF ја сече AC во точката E. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{CE}$.
Решение. Од
$$\measuredangle ACF + \measuredangle CAF = \frac{1}{2}\measuredangle ADB + \frac{1}{2}\measuredangle CDB = 90^\circ$$
добиваме $\measuredangle AFC = 90^\circ$. Нека G е точка симетрична на точката A во однос на точката F. Тогаш $\measuredangle ACG = 2\measuredangle ACF = \measuredangle ADB$, па затоа $CG \parallel BD$. Понатаму, $\overline{CG} = \overline{AC} = \overline{BD}$, што значи дека $BDCG$ е паралелограм и $\overline{BG} = \overline{CD}$. Сега триаголниците AFE и GFB имаат еднакви агли и $\overline{AF} = \overline{FG}$, па затоа тие се складни. Оттука следува $\overline{AE} = \overline{BG} = \overline{CD}$, па затоа $\overline{AD} = \overline{CE}$.

27. Нека P е произволна точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC, а A_1, B_1, C_1 се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека тежиштето на триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи внатре во триаголникот ABC.
Решение. Со A', B', C' да ги означиме соодветно проекциите на точката P на страните BC, CA, AB, а со A_2, B_2, C_2 да ги означиме средините на отсечките B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, соодветно. Бидејќи $B'A_2 \parallel PC_1 \perp AC'$ и аналогно $C'A_2 \perp AB'$, точката A_2 е ортоцентар на триаголникот $AB'C'$. Притоа
$$\measuredangle AB'C' < \measuredangle AB'P = 90^\circ,$$
што значи дека триаголникот $AB'C'$ е остроаголен, па затоа точката A_2 припаѓа на неговата внатрешност. Значи, A_2 е во внатрешноста на триаголникот ABC. Аналогно точките B_2 и C_2 се во внатрешноста на $\triangle ABC$, а тежиштето на $\triangle A_1B_1C_1$ е во внатрешноста на $\triangle A_2B_2C_2$.

28. Даден е остроаголен триаголник ABC. Внатре во триаголникот е избрана точка M таква што $\measuredangle BMC = 180^\circ - \measuredangle BAC$. Правите BM и CM ги сечат

спротивните страни на триаголникот ABC во точките D и E, соодветно. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот ADE минува низ фиксна точка (различна од A), независно од изборот на точката M.

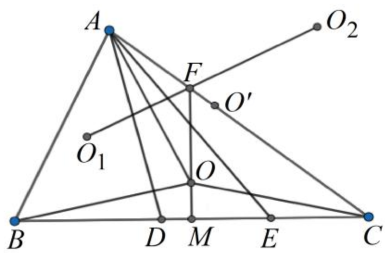
Решение. Од $\measuredangle BMC = \measuredangle BHC$, каде H е ортоцентарот на $\triangle ABC$, следува дека точката M припаѓа на кружницата BCH. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека M припаѓа на пократкиот лак BH. Нека кружницата над дијаметар AH по втор пат ја сече кружницата опишаната кружница околу $\triangle BCH$ во точката F (направи цртеж). Од

$$\measuredangle AFM = 90^\circ + \measuredangle HFM = \measuredangle BAC + \measuredangle ACH + \measuredangle HCM = 180^\circ - \measuredangle AEM$$

следува дека точките A, E, M, F лежат на иста кружница. Слично и точката D припаѓа на истата кружница, што значи дека опишаната кружница на триаголникот ADE секогаш минува низ точката F.

29. Нека O е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC и нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците OAB и OAC, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците OAB и OAC по втор пат ја сечат страната BC во точките D и E, соодветно. Симетралата на страната BC ја сече страната AC во точката $F\,(F \neq A)$. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE припаѓа на AC ако и само ако точката F припаѓа на правата O_1O_2.

Решение. Нека M е средина на BC и O' е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle O'AE &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - (360^\circ - 2\measuredangle ADE))\\ &= \measuredangle ADE - 90^\circ = 90^\circ - \measuredangle ADB\\ &= 90^\circ - \measuredangle AOB = 90^\circ - 2\measuredangle ACB.\end{aligned}$$

Оттука добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle CAE &= \measuredangle OAC - \measuredangle OAE = (90^\circ - \measuredangle ABC) - \measuredangle OCB\\ &= (90^\circ - \measuredangle ABC) - (90^\circ - \measuredangle BAC) = \measuredangle BAC - \measuredangle ABC.\end{aligned}$$

Значи, $O' \in AC$ ако и само ако $90^\circ - 2\measuredangle ACB = \measuredangle BAC - \measuredangle ABC$. Забележуваме дека

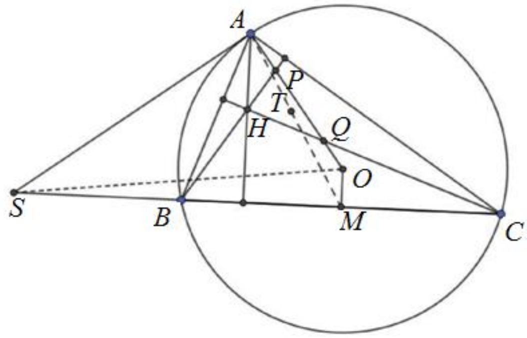
$$\begin{aligned}F \in O_1O_2 \Leftrightarrow \overline{AF} = \overline{OF} \quad &\Leftrightarrow \quad \measuredangle OAF = \measuredangle AOF &&\Leftrightarrow\\ &90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle AOC + \measuredangle COM - 180^\circ &&\Leftrightarrow\\ &90^\circ - \measuredangle ABC = 2\measuredangle ABC + \measuredangle BAC - 180^\circ &&\Leftrightarrow\\ &180^\circ - \measuredangle BAC - 3\measuredangle ABC = 90^\circ &&\Leftrightarrow\\ &\measuredangle BAC - \measuredangle ABC + 2\measuredangle ACB = 90^\circ\end{aligned}$$

Според тоа, $O' \in AC$ ако и само ако $F \in O_1O_2$.

30. Нека O е центар на опишаната кружница на разностраниот триаголник ABC. Правата OA ги сече висините на триаголникот ABC повлечени од темињата B и C во точките P и Q, соодветно. Ако H е ортоцентарот на триаголникот ABC, докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQH лежи на тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето A.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB}<\overline{AC}$. Имаме

$$\measuredangle PQH = 90^\circ - \measuredangle QAB = 90^\circ - \measuredangle OAB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \measuredangle ACB.$$



Слично, $\measuredangle QPH = \measuredangle ABC$. Значи, триаголниците ABC и HPQ се слични. Нека k и k_1 се кружниците опишани околу триаголниците ABC и HPQ, соодветно. Од $\measuredangle AHP = 90^\circ - \measuredangle HAC = \measuredangle ACB = \measuredangle HQP$ следува дека правата AH е тангента на кружницата k_1. Нека T е центарот на кружницата k_1 и нека правите AT и BC се сечат во точката M. Нека S е точка на правата BC таква што AS е тангента на кружницата k. На точката S за триаголникот ABC и соодветствува точката A за триаголникот HPQ, па затоа важи $\measuredangle OSM = \measuredangle OAT = \measuredangle OAM$. Според тоа, четириаголникот $SAOM$ е тетивен и како $AS \perp AO$ важи $\measuredangle OMS = 180^\circ - \measuredangle OAS = 90^\circ$. Последното значи дека точката M е ортогонална проекција на точката O на страната BC, па значи M е средина на отсечката BC. Значи, AM е тежишна линија и на неа лежи T, што и требаше да се докаже.

31. Во $\triangle ABC$ медијаните AM_A, BM_B и CM_C се сечат во точката M. Кружницата Ω_A минува низ средината на отсечката AM и ја допира отсечката BC во точката M_A. Аналогно се дефинираат кружниците Ω_B и Ω_C. Докажи дека кружниците Ω_A, Ω_B и Ω_C минуваат низ иста точка.

Решение. *Лема* 1. Надворешно за $\triangle ABC$ се конструирани $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ и

$\triangle A_1BC$. Ако збирот $\measuredangle BA_1C + \measuredangle AB_1C + \measuredangle AC_1B$ е делив со 180°, тогаш опишаните кружници околу $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ и $\triangle A_1BC$ се сечат во една точка.

Доказ. Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle A_1BC$ и $\triangle ABC_1$. Тогаш

$$\measuredangle(BX, XC) = \measuredangle(BA_1, A_1C) \text{ и } \measuredangle(AX, XB) = \measuredangle(AC_1, C_1B).$$

Затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle(AX, XC) &= \measuredangle(AX, XB) + \measuredangle(XB, XC)\\ &= \measuredangle(AC_1, C_1B) + \measuredangle(BA_1, A_1C)\\ &= \measuredangle(AB_1, B_1C),\end{aligned}$$

што значи дека лежи на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C$. ■

Да се вратиме на задачата. Нека K_A, K_B и K_C се соодветно средините на AM_A, BM_B и CM_C. Тогаш $M_CK_B \parallel AB$ и $K_BM_A \parallel MC$, како средни линии соодветно во $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$, па затоа $\measuredangle M_CK_BM_A = \measuredangle AMC$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle M_CK_AM_B = \measuredangle BMC$ и $\measuredangle M_AK_CM_B = \measuredangle BMA$. Тогаш

$$\measuredangle M_CK_AM_B + \measuredangle M_BK_CM_A + \measuredangle M_AK_BM_C = 360^\circ.$$

Согласно Лема 1, опишаните кружници околу триаголниците $M_CK_AM_B$, $M_BK_CM_A$ и $M_AK_BM_C$ имаат заедничка точка X. Од овие кружници имаме:

$$\begin{aligned}\measuredangle(K_BX, XM_B) &= \measuredangle(K_BX, XM_C) + \measuredangle(XM_C, XM_B)\\ &= \measuredangle(K_BM_A, M_AM_C) + \measuredangle(M_CK_A, K_AM_B)\\ &= \measuredangle(MC, CA) + \measuredangle(BM, MC)\\ &= \measuredangle(K_BM_B, AC),\end{aligned}$$

што значи дека X лежи на Ω_B. Аналогно се докажува дека таа лежи и на Ω_A и Ω_C.

32. Нека AA_1 и CC_1 се висините на разностраниот остроаголен $\triangle ABC$, H и O се соодветно неговиот ортоцентар и центарот на опишаната кружница, а B_0 е средината на страната AC. Правата BO ја сече страната AC во точката P, а правите BH и A_1C_1 се сечат во точката Q. Докажи дека правите HB_0 и PQ се паралелни.

Решение. Нека O_1 е средина на отсечката BH. Од $\measuredangle BA_1H = \measuredangle BC_1H = 90^\circ$ следува дека O_1 е центарот на кружницата која минува низ точките A_1, B, C_1 и H. Правоаголните триаголници BAA_1 и BCC_1 се слични, па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C_1B}}$. Последното значи дека триаголниците ABC и A_1BC_1 се слични.

Да забележиме дека, како BQ и BP, така и BO_1 и BO се парови соодветни отсечки во овие триаголници, па затоа $\frac{\overline{BO_1}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$ и затоа $OO_1 \parallel PQ$.

Нека B' е точката од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, дијаметрално спротивна на B. Тогаш O е средина на отсечката BB' и $\measuredangle BAB'=\measuredangle BCB'=90^\circ$. Имаме, $\measuredangle ACB'=\measuredangle BCB'-\measuredangle BCA=90^\circ-\measuredangle BCA=\measuredangle A_1AC$, па затоа $AA_1 \parallel CB'$. Аналогно се докажува дека $CC_1 \parallel AB'$. Според тоа, четириаголникот $AHCB'$ е паралелограм, B_0 е неговиот центар, па затоа лежи на дијагоналата HB'. Исто така OO_1 е средна линија во $\triangle BHB'$, па затоа $OO_1 \parallel HB_0$.

33. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ABC=90^\circ$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката D. Точките X и Z се центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, соодветно. Правата XZ ги сече правата AD во точката K и опишната кружница околу $\triangle ABC$ во точките U и V. Правата AD по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката Y, а точката M е средината на отсечката UV. Докажи дека $\overline{CY}=2\overline{MK}$.

Решение. Да ги означиме соодветно со T и S допирните точки на BC со впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, чии радиуси соодветно се r_1 и r_2 (направи цртеж). Лесно се докажува дека $\overline{DS}=\overline{DT}$. Бидејќи DX и DZ се симетрали на соседни агли, важи $\measuredangle XDZ=90^\circ$ и затоа

$$\overline{XZ}^2=\overline{XD}^2+\overline{DZ}^2=r_1^2+r_2^2+2\overline{DT}^2.$$

Од друга страна, од правоаголниот трапез $XTSZ$ имаме

$$\overline{XZ}^2=(r_1-r_2)^2+\overline{TS}^2.$$

Сега лесно добиваме дека $\overline{XZ}=r_1+r_2$, што значи дека впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ се допираат меѓусебно и до AD во точката K, и во случајов $XZ \perp AD$. Според тоа, $UV \parallel CY$.

Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, т.е. O е средина на AC. Тогаш $OM \perp UV$, бидејќи M е средина на UV и оттука $OM \perp CY$. Ако N е пресечната точка на OM и CY, тогаш $KYNM$ е правоаголник, N е средина на CY и $\overline{CY}=2\overline{NY}=2\overline{MK}$.

34. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини CK и AL, $K\in AB$ и $L\in BC$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ по втор пат ги сече правите CK и AL соодветно во точките F и D. Точката E припаѓа на помалиот лак AC, а

правите BE и AC се сечат во точката N. Докажи дека, ако

$$\overline{AF}^2+\overline{BD}^2+\overline{CE}^2=\overline{AE}^2+\overline{CD}^2+\overline{BF}^2,$$

тогаш $\measuredangle KNB=\measuredangle BNL$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Тогаш $BH\perp AC$ и точките F и D се симетрични на H во однос на AB и BC, соодветно. Според тоа, $\overline{AF}=\overline{AH}, \overline{CD}=\overline{CH}, \overline{BD}=\overline{BH}=\overline{BE}$. Оттука и од условот следува дека $\overline{AH}^2+\overline{CE}^2=\overline{CH}^2+\overline{AE}^2$. Лесно се докажува дека од последното равенство следува $HE\perp AC$, што значи дека точката E лежи на висината BH. Тогаш $BN\perp AC$ и равенството $\measuredangle KNB=\measuredangle BNL$ се симетрали на аглите чии темиња се подножните точки на висините во триаголникот.

35. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина AD, $D\in BC$ и центар I_a на припишаната кружница која ја допира страната BC. Точката K од продолжението на AB (B е меѓу A и K) е таква што $\measuredangle AKI_a=90^\circ+\frac{3}{4}\measuredangle ACB$. Правата I_aK го сече продолжението на AD во точка L. Докажи дека правата DI_a е симетрала на $\measuredangle AI_aB$ ако и само ако должината на отсечката AL е еднаква на дијаметарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека точката $Q\in AD$ е таква што $\overline{AQ}=2R$, D е меѓу A и Q. Нека I_aQ го сече продолжението на AB во точката P (направи цртеж). Не е тешко да се види дека равенството $\overline{AK}=2R$ е еквивалелнтно на $L\equiv Q$, кое пак е еквивалентно на $P\equiv K$, т.е. $\measuredangle API_a=90^\circ+\frac{3\gamma}{4}$.

Основен момент во решението е доказот на равенството $\measuredangle QI_aA=\measuredangle QAI_a$. Последното следува од сличноста $\triangle QI_aD\sim\triangle QAI_a$, за што е доволно да докажеме дека $\overline{QI_a}^2=\overline{QD}\cdot\overline{QA}=2R(2R-h_a)$.

Нека $I_aH\perp AC, H\in AC$. Тогаш $\overline{AH}=b+(p-b)=p$ и $\overline{AI_a}^2=p^2+r_a^2$. Нека точката $U\in AQ$ е таква што $I_aU\perp AU$. Тогаш $\overline{AU}=r_a+h_a$ и

$$\overline{UI_a}^2=\overline{AI_a}^2-\overline{AU}^2=p^2+r_a^2-(r_a+h_a)^2.$$

Освен тоа, $\overline{UQ}=\overline{AU}-\overline{AQ}=r_a+h_a-2R$ и затоа

$$\begin{aligned}\overline{QI_a}^2&=\overline{UI_a}^2+\overline{UQ}^2=p^2+r_a^2-(r_a+h_a)^2+(r_a+h_a-2R)^2\\&=p^2+r_a^2+4R^2-4R(r_a+h_a).\end{aligned}$$

Сега бараното равенство е еквивалентно на равенството

$$p^2+r_a^2=4Rr_a+2Rh_a.$$

Последното равенство лесно следува од формулите $S=(p-a)r_a$, $4RS=abc$, $2S=ah$ и Хероновата формула.

Имаме

$$\measuredangle I_aAD=\measuredangle I_aAB-\measuredangle DAB=\frac{\alpha}{2}-(90^\circ-\beta)=\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Според тоа, $\measuredangle QI_aD=\frac{\beta-\gamma}{2}$. Да означиме $\measuredangle DI_aA=\varphi$. Тогаш $\measuredangle QI_aA=\frac{\beta-\gamma}{2}+\varphi$ и од $\triangle PAI_a$ имаме $\measuredangle I_aPA=90^\circ+\gamma-\varphi$. Од

$$\measuredangle BAI_a+\measuredangle BI_aA=\measuredangle PBI_a=\frac{180^\circ-\beta}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

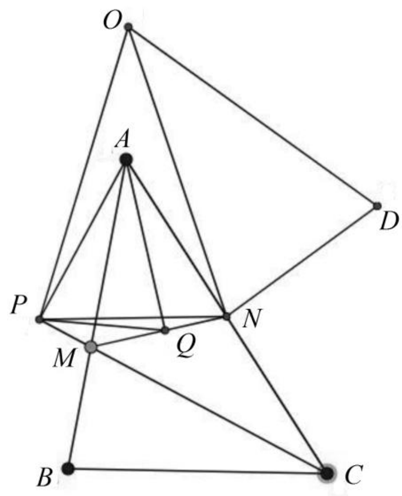
добиваме $\measuredangle BI_aA=\frac{\gamma}{2}$. Според тоа, условот DI_a е симетрала на $\measuredangle AI_aB$ е еквивалентен на $\varphi=\frac{\gamma}{4}$, што е еквивалентно на $\measuredangle API_a=90^\circ+\frac{3\gamma}{4}$.

36. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека M е произволна точка од страната AB, а N е средината на AC. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од темето A на правите MC и MN, соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQN припаѓа на фиксна права додека M се менува на страната AB.

Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$ и $\measuredangle ACM=x$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQN.

Нека точката D лежи на спротивната страна од точката B во однос на правата AC и е таква што $\measuredangle AND=2\alpha$ и $\overline{ND}=\frac{\overline{AC}}{2}$. Триаголникот APC е правоаголен, па затоа $\overline{NP}=\overline{NC}$, од што следува $\measuredangle ANP=2x$. Понатаму, важи

$$\begin{aligned}\measuredangle PQN&=180^\circ-\measuredangle PQM=180^\circ-\measuredangle PAM\\&=90^\circ+\measuredangle PMA=90^\circ+\measuredangle BMC\\&=90^\circ+\alpha+x.\end{aligned}$$



Според тоа, $\measuredangle PON=180^\circ-2\alpha-2x$, па затоа добиваме

$$\measuredangle ONP=\alpha+x,$$
$$\measuredangle ONA=\measuredangle ONP-\measuredangle ANP=\alpha-x,$$
$$\measuredangle OND=\alpha+x.$$

Понатаму, од

$$\overline{NP} = \overline{ND}, \overline{NO} = \overline{NO} \text{ и } \measuredangle ONP = \measuredangle OND$$

следува $\triangle OND \cong \triangle ONP$. Од ова следува

$\overline{OP} = \overline{OD} = \overline{ON}$, што значи дека O припаѓа на симетралата на отсечката ND, додека M се менува на страната AB.

37. Нека H и M се соодветно ортоцентарот и тежиштето на разностран $\triangle ABC$. Низ темињата A, B и C се повлечени прави нормални на AM, BM и CM, соодветно. Докажи, дека тежиштето на триаголникот формиран од овие прави лежи на правата MH.

Решение. Нека $A'B'C'$ е формираниот триаголник, а G е неговото тежиште. Ќе докажеме дека M е средина на отсечката GH.

Да го дополниме $\triangle BMC$ до паралелограм $BMCA_1$. Бидејќи отсечката MA_1 ја преполовува страната BC, добиваме дека A_1 лежи на правата AM при што $\overline{AM} = \overline{A_1M}$ (M ја дели тежишната линија во однос 2:1). Освен тоа, $BA_1 \parallel MC \perp A'B'$ и $CA_1 \parallel MB \perp A'C'$. Значи, BA_1 и CA_1 се висини во $\triangle BA'C$. Според тоа, A_1 е ортоцентар на $\triangle BA'C$, па затоа $A'A_1 \perp BC$.

Страните на $\triangle BA_1M$ се нормални на соодветните страни на $\triangle A'B'C'$, па затоа овие триаголници се слични и правите BC и AG, кои ги содржат соодветните тежишни линии, се заемно нормални. Значи, правата $A'G$ се совпаѓа со правата $A'A_1$. Нека G' е симетричната точка на H во однос на M. Бидејќи триаголниците AHM и $A_1G'M$ се симетрични во однос на M, добиваме $A_1G' \parallel AH \perp BC$. Според тоа, G' лежи на правата $A'G$. Аналогно добиваме дека G' лежи на правата $B'G$, т.е. G' се совпаѓа со G.

38. Паралелограмот $ABCD$ е таков што $\measuredangle ABC < 90^\circ$ и $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точките E и F лежат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ темето D. Притоа важи $\measuredangle EDA = \measuredangle FDC$. Определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека l е симетралата на $\measuredangle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω, правата l минува низ центарот O на ω (направи цртеж).

Да разгледаме симетрија во однос на l. Бидејќи $\measuredangle EDA = \measuredangle FDC$, полуправата DC се пресликува во полуправата DA. Бидејќи l минува низ O, кружницата ω се пресликува во самата себе. Според тоа сликата C' на C лежи на DA и на ω. Понатаму, од $\overline{AD} \neq \overline{DC}$ следува дека точките C' и A се различни.

Добиваме $\measuredangle DC'C = \measuredangle DCC'$. Бидејќи точките A, B, C, C' лежат на ω, имаме $\measuredangle DC'C = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Според тоа, $\triangle DCC'$ е рамностран, па затоа

$$\measuredangle ABC = \measuredangle CDC' = 60^\circ .$$

39. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Точката I_1 е симетрична I во однос на правата BC. Опишаната кружница околу $\triangle BCI_1$ ја сече правата I_1I во точка P. Познато е дека P е надворешна точка за кружницата впишана во $\triangle ABC$. Нека X и Y се допирните точки на тангентите повлечени од P кон впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека отсечката XY се содржи во средната линија на $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека A_1 и A_2 се соодветно допирните точки на страната BC со впишаната и припишаната кружница, а I_a е центарот на припишаната кружница кон страната BC. Бидејќи $\overline{BA_2} = \overline{CA_1}$, правите A_2I_a и A_1I се симетрични во однос на средината на BC (направи цртеж).

Од $\measuredangle IBI_1 = \measuredangle ICI_a = 90^\circ$ и од условот следува дека

$$\measuredangle BI_aC = 180^\circ - \measuredangle BIC = 180^\circ - \measuredangle BI_1C = \measuredangle BPC .$$

Тогаш споменатата симетрија ја пресликува точката I_a во точка P' која лежи на полуправата A_1I, за која важи $\measuredangle BP'C = \measuredangle BI_aC$. Според тоа, $P' \equiv P$ и точките I_a и P се симетрични во однос на средината на BC, па затоа $\overline{PA_2} = \overline{I_aA_2} = r_a$.

Очигледно $XY \perp PA_1$ и нека $Z = XY \cap PA_1$. Бидејќи $\triangle IXP \sim \triangle IZX$ имаме $\overline{IZ} \cdot \overline{IP} = \overline{IX}^2$, па затоа $\overline{IZ} = \frac{r^2}{r_a - r}$. Тогаш

$$\overline{A_1Z} = r + \frac{r^2}{r_a - r} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}} = \frac{1}{\frac{p}{S} - \frac{p-a}{S}} = \frac{S}{a} = \frac{h_a}{2} ,$$

од каде следува тврдењето на задачата.

40. Во $\triangle ABC$ страните AB и BC се еднакви. Точката D припаѓа на внатрешноста на триаголникот и е таква што $\measuredangle ADC = 2\measuredangle ABC$. Докажи дека удвоеното растојание од B до симетралата на суплементните агли на $\measuredangle ADC$ е еднакво на $\overline{AD} + \overline{DC}$.

Решение. Нека l е разгледуваната симетрала, K е проекцијата на B врз l, а B' и C' се симетричните точки соодветно на B и C во однос на l (направи цртеж). Тогаш $\overline{BB'} = 2\overline{BK}$, како удвоено растојание од B до l. Освен тоа, D лежи на отсечката AC' (бидејќи правите DA и DC се симетрични во однос на l) и $\overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC'} = \overline{AD} + \overline{DC}$. Понатаму, од истата симетрија добиваме $\measuredangle AC'B' = \measuredangle DC'B'$ и $\measuredangle BB'C' = \measuredangle B'BC$.

Нека отсечките BB' и AC' се сечат во точката O. Од правоаголниот триаголник OKD добиваме

$$\measuredangle BOC' = \measuredangle KOD = 90^\circ - \measuredangle KDO = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle CDC') = \tfrac{1}{2}\measuredangle ADC = \measuredangle ABC .$$

Значи,

$$\measuredangle ABB' = \measuredangle ABC - \measuredangle B'BC = \measuredangle BOC' - \measuredangle OB'C' = \measuredangle OC'B' .$$

Аналогно,

$$\measuredangle BOA = \measuredangle BOC' - \measuredangle ABO = \measuredangle ABC - \measuredangle ABO = \measuredangle B'BC = \measuredangle BB'C' .$$

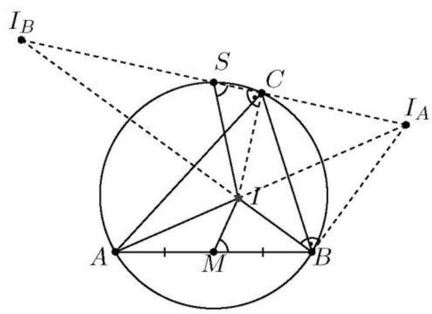
Бидејќи отсечките BC и $B'C'$ се симетрични, имаме $\overline{B'C'} = \overline{BC} = \overline{AB}$. Значи, триаголниците ABO и $B'C'O$ се складни. Затоа,

$$\overline{BB'} = \overline{BO} + \overline{OB'} = \overline{C'O} + \overline{OA} = \overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC} ,$$

што и требаше да се докаже.

41. Даден е $\triangle ABC$. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, M е средината на страната AB, а S е средината на лакот ACB. Определи го $\measuredangle ACB$, ако $\overline{IS} = 2\overline{IM}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите во триаголник. Бидејќи S е средина на лакот ACB, важи



$$\measuredangle ICS = \measuredangle ICA + \measuredangle ACS$$
$$= \tfrac{\gamma}{2} + (90^\circ - \tfrac{\gamma}{2}) = 90^\circ ,$$

па затоа правата CS е надворешна симетрала за $\measuredangle ACB$ (симетрала на надворешниот агол за триаголникот во темето C). Според тоа, пресечните точки I_A и I_B на правите AI и BI со правата CS се центрите на припишаните кружници за $\triangle ABC$ кон страните BC и AC, соодветно.

Од $\measuredangle I_A I_B I = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle IAB$ и $\measuredangle I_B I_A I = \frac{\beta}{2} = \measuredangle IBA$ следува дека $\triangle II_B I_A \sim \triangle IAB$. Освен тоа, $\measuredangle BSC = \alpha = 2\measuredangle SI_B B$, т.е. S е средина на хипотенузата во правоаголниот триаголник $I_A I_B B$.

Според тоа, IS и IM се соодветно медијани во слични триаголници. Но, според условот $\overline{IS} = 2\overline{IM}$, па затоа $\overline{II_A} = 2\overline{IB}$, од каде следува $\measuredangle II_A B = \frac{\gamma}{2}$ $= 30^\circ$ и следствено $\measuredangle ACB = 30^\circ$.

42. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата Ω минува низ точката A и нејзиниот центар е на висината $AH, H \in BC$ на $\triangle ABC$. Пресечните точки на Ω со отсечките AB и AC се соодветно точките P и Q при што важи

$\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Точката K од опишаната кружница околу $\triangle OBC$ е во иста полурамнина со A во однос на правата BC и е таква што $\measuredangle BKA = \measuredangle CKA$. Докажи дека точката K припаѓа на кружницата Ω.

Решение. Ако S е центарот на Ω, тогаш $\measuredangle SAB = 90^\circ - \beta$, од што следува $\measuredangle AQP = \beta$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ и $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$. Од $\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$ наоѓаме $\frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$, па затоа

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}}. \tag{1}$$

Бидејќи $\measuredangle BKC = \measuredangle BOC = 2\alpha$, добиваме $\measuredangle AKB = \measuredangle AKC = 180^\circ - \alpha$. Значи, $\measuredangle BAK + \measuredangle ABK = \alpha$, па затоа $\measuredangle ABK = \measuredangle CAK$. Според тоа, $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ и добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}$. Од последното равенство и од (1) следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}}$, па затоа $\triangle APK \sim \triangle CQK$. Оттука $\measuredangle APK = \measuredangle CQK$, т.е. точките A, P, K, Q лежат на една кружница.

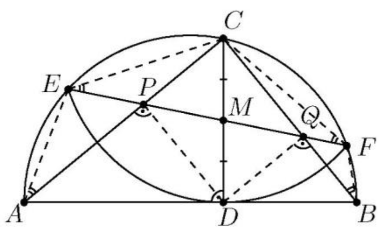
43. Нека CD е висина во $\triangle ABC$, при што $D \in AB$. Кружницата со центар C и радиус CD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките E и F. Ако правата EF ја преполовува отсечката CD, определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека правата EF ги сече CA, CB и CD во точките P, Q и M, соодветно. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Од

$$\measuredangle CAE = \tfrac{1}{2}\measuredangle COE = \tfrac{1}{2}\measuredangle COF = \measuredangle CEF = \measuredangle CEP$$

следува дека $\triangle CAE \sim \triangle CEP$. Затоа

$$\overline{CP} \cdot \overline{CA} = \overline{CE}^2 = \overline{CD}^2,$$



од што следува $DP \perp CA$. Аналогно $DQ \perp CB$, па затоа точките D, Q, C и P лежат на кружница со дијаметар CD. Но, според условот на задачата M е средина на CD, т.е. M е центарот на оваа кружница, што значи дека PQ е нејзин дијаметар, односно $\measuredangle ACB = \measuredangle PCQ = 90^\circ$.

44. Вписаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните AC, BC, CA соодветно во точките M, N, P. Точките X и Y се соодветно на отсечките AM и BN при што $XY \parallel AB$ и ги сече MP и NP соодветно во точките K и L. Правата MK по втор пат ја сече k во точката D, а правата YD по втор пат ја сече

k во точката Q. Докажи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.

Решение. Од $YL \parallel PB$ следува дека $\triangle LYN \sim \triangle PBN$, од каде добиваме $\overline{YL} = \overline{YN}$. Освен тоа, $\overline{YN}^2 = \overline{YD} \cdot \overline{YQ}$, т.е. $\overline{YL}^2 = \overline{YD} \cdot \overline{YQ}$. Ова равенство заедно со $\measuredangle DYL = \measuredangle LYQ$ означува дека $\triangle YDL \sim \triangle YLQ$. Според тоа

$$\measuredangle QLK = \measuredangle QDL = \measuredangle QDM = \measuredangle QPK,$$

што значи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.

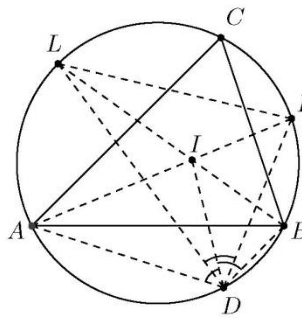
45. Даден е $\triangle ABC$ во кој медијаните AA_1 и BB_1 се сечат во точката G. Ако впишаната кружница во $\triangle ABC$ и впишаната кружница во $\triangle AGB$ ја допираат страната AB во иста точка, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Нека D е допирната точка на AB со двете кружници. Од тоа што D е допирната точка на AB и впишаната кружница во $\triangle AGB$ имаме $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}+\overline{AG}-\overline{BG}}{2}$, а од тоа што D е допирната точка на AB и впишаната кружница во $\triangle ABC$ имаме $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$. Од овие равенства добиваме $\overline{AG} - \overline{BG} = \overline{AC} - \overline{BC}$ и следствено $\overline{A_1G} - \overline{B_1G} = \overline{CB_1} - \overline{CA_1}$, па значи еднакви се и периметрите на $\triangle B_1GC$ и $\triangle A_1GC$. Понатаму, $P_{B_1GC} = \frac{1}{6} P_{ABC} = P_{A_1GC}$. Тогаш или $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ или $\triangle B_1CG \cong \triangle A_1GC$ (еднакви периметри и плоштини и една заедничка страна). Втората складност не е можна, бидејќи од неа $\overline{B_1G} = \overline{CA_1}$ и $\overline{A_1G} = \overline{CB_1}$ и за поголемата од двете страни, да кажеме $\overline{CA_1} \geq \overline{CB_1}$ добиваме $\overline{BB_1} = 3\overline{B_1G} = 3\overline{CA_1} = \overline{CB} + \overline{CA_1} \geq \overline{CB} + \overline{CB_1}$, што противречи на неравенството на триаголник за $\triangle CBB_1$. Според тоа, $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ и $\overline{AC} = 2\overline{B_1C} = 2\overline{A_1C} = \overline{BC}$.

46. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Нека D е точка од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, различна од C таква што DI е симетрала на $\measuredangle ADB$. Ако $\overline{AD} + \overline{BD} = 2\overline{DI}$, докажи дека $\overline{AC} = \overline{BC}$

Решение. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и правите AI и BI по втор пат ја сечат k во точките K и L, соодветно. Од условот на задачата следува дека

$$\measuredangle ADI = \measuredangle BDI = \frac{1}{2} \measuredangle ADB = \measuredangle LDK.$$



Но, $\measuredangle DAI = \measuredangle DLK$ и $\measuredangle DBI = \measuredangle DKL$ и затоа $\triangle ADI \sim \triangle LDK \sim \triangle IDB$. Затоа

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{BD}}, \text{ т.е. } \overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{DI}^2 .$$

Конечно, $\overline{AD}+\overline{BD}=2\overline{DI}$ и $\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{DI}^2$, па затоа $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{DI}$. Последното значи дека точките C,I и D се колинеарни и како $\measuredangle ADI=\measuredangle BDI$ заклучуваме дека $\overline{AC}=\overline{BC}$.

47. Висините AH_1, BH_2 и CH_3 на остроаголниот $\triangle ABC$ се сечат во точката H. Над HH_1, HH_2 и HH_3 како над дијаметри соодветно се конструирани кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 и притоа $\omega_2 \cap \omega_3 = \{A_1, H\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{B_1, H\}$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C_1, H\}$. Докажи дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Ако опишеме кружница околу четириаголникот BCH_2H_3 добиваме дека $\measuredangle H_2H_3C=\measuredangle H_2BC=90^\circ-\measuredangle ACB$. Од опишаната кружница околу четириаголникот BH_1HH_2 добиваме дека $\measuredangle H_1H_3C=\measuredangle H_1AC=90^\circ-\measuredangle ACB$ т.е. H_3C е симетрала на $\measuredangle H_1H_3H_2$. Точката B_1 лежи на отсечката H_1H_3 бидејќи $\measuredangle HB_1H_3=90^\circ$ и $\measuredangle HB_1H_1=90^\circ$. Аналогно, точката A_1 лежи на отсечката H_2H_3. Тетивите HA_1 и HB_1 се еднакви, бидејќи соодветствуваат на еднакви лаци. Сега $\triangle A_1HH_3 \cong \triangle B_1HH_3$ и отсечката A_1B_1 е паралелна на страната AB. Аналогно, отсечката B_1C_1 е паралелна на страната BC и отсечката C_1A_1 е паралелна на страната CA. Оттука лесно следува дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Надворешната симетрала на $\measuredangle BHC$ ги сече AB и AC во точките D и E, соодветно. Симетарлата на $\measuredangle BAC$ ја сече опишаната кружница околу $\triangle ADE$ во точка $K, K \neq A$. Докажи дека правата HK ја преполовува отсечката BC.

Решение. Нека P и Q се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата B и C, соодветно. Од $\measuredangle QHD=\measuredangle CHE=\measuredangle PHE$ следува дека $\measuredangle ADH=\measuredangle AEH$ и $\triangle ADE$ е рамнокрак. Според тоа, AK е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Така $\measuredangle KDA=\measuredangle KEA=90^\circ$, од каде следува $KD \parallel HQ$ и $KE \parallel HP$.

Повлекуваме права низ B паралелна на HQ и со L да ја означиме точката во која оваа права ја сече HK. Од Талесовата теорема имаме

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DQ}}.$$

Од друга страна од $\triangle HBQ \sim \triangle HCP$ следува

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{EP}},$$

па затоа $\frac{\overline{KL}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{EP}}$. Според тоа, $CL\,||\,EK\,||\,PH$, па затоа четириаголникот $NBLC$ е паралелограм, од каде следува дека HL ја полови BC.

49. Нека F е точка од страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{AC}=\overline{BF}$. Докажи дека правата која минува низ средината на отсечката CF и е паралелна на симетралата на $\measuredangle ACB$ ја преполовува страната AB.

Решение. Нека M е средина на CF, E е средина на AF и N е средина на AB. Ќе докажеме дека NM е паралелна на симетралата на $\measuredangle ACB$. Бидејќи EM е средна линија во $\triangle AFC$ и EN е средна линија во $\triangle ABF$, од $\overline{AC}=\overline{BF}$ следува $\overline{EM}=\overline{EN}$. Полуправите EN и CB се еднакво насочени, а полуправите EM и CA се спротивно насочени, па затоа $\measuredangle MEN=$ $180^\circ-\measuredangle ACB$. Сега, од рамнокракиот $\triangle MNE$ добиваме $\measuredangle EMN=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$. Но, $\measuredangle EMB=\measuredangle ACB$, па така $\measuredangle NMB=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$ и MN е паралелна на симетралата на $\measuredangle ACB$.

50. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$. На продолжението на AC преку темето C е избрана точка D таква што $\overline{AC}>\overline{CD}$. Симетралата на $\measuredangle BCD$ ја сече BD во точката N, а M е средина на BD. Тангентата во точката M на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ ја сече страната BC во точката P. Докажи дека точките A, P, M и N лежат на една кружница.

Решение. Од условот следува дека $\measuredangle MAD=\measuredangle PMB=\varphi$. Во точката D повлекуваме права l паралелна на AB. Нека $l\cap BC=Q$, T е средината на AQ и BT ја сече l во точката K. Од причини на симетрија следува дека $\measuredangle KBQ=\varphi$. Освен тоа $\frac{\overline{KQ}}{\overline{QD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{QD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{BN}}$, па затоа $BK\,||\,QN$, што значи $\measuredangle CQN=\varphi$.

Бидејќи $\measuredangle QAD=\measuredangle QBD=\psi$ од причини на симетрија добиваме $\measuredangle QAM=$ $\measuredangle QND=\varphi+\psi$. Значи, Q, A, M и N лежат на една кружница. Бидејќи $\measuredangle PMB=\varphi=\measuredangle NQB$, точките Q, M, N и P лежат на една кружница. Според тоа, точките A, P, M и N лежат на една кружница.

51. Нека D е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB. Нека I_1 и I_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle I_1I_2D$ ја допира AB.

Решение. Со P и Q да ги означиме допирните точки на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ со страните AD и BD, соодветно. Тогаш

$$\overline{DP} = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DA} - \overline{AC}) = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DB} - \overline{BC}) = \overline{DQ}$$

и затоа впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ се допираат до CD во една иста точка. Останува да забележиме дека $\measuredangle I_2 I_1 D = \measuredangle DI_1 P = \measuredangle I_2 DQ$, со што доказот е завршен.

Забелешка. Точно е поопштото тврдење, дека ако D е произволна точка од страната AB, тогаш кружницата опишана околу $\triangle I_1 I_2 D$ минува низ постојана точка, а тоа е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB. На читателот за вежба му препорачуваме да го докаже ова тврдење.

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека H и G се соодветно ортоцентарот и тежиштето на $\triangle ABC$. Точката P е пресекот на медијаната низ B и висината низ A, а точката Q е пресек на медијаната низ C и висината низ B. Ако точките H, G, P и Q лежат на една кружница, докажи дека триаголникот формиран од медијаните на $\triangle ABC$ е сличен на $\triangle ABC$.

Решение. Бидејќи H, G, P и Q лежат на една кружница, важи $\measuredangle BPH = \measuredangle CQH$. Според тоа, $\measuredangle GBC = \measuredangle GCA$, па затоа $\triangle BB_1C \sim \triangle CGB_1$, каде B_1 е средината на AC. Оттука следува $\overline{B_1G} \cdot \overline{B_1B} = \overline{B_1C}^2$ или $\frac{1}{3} m_b^2 = (\frac{b}{2})^2$. Ако искористиме дека $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, од последното равенство следува дека $a^2 + c^2 = 2b^2$. Сега, од формулите за медијаните пресметуваме

$$m_a = \frac{c\sqrt{3}}{2}, m_b = \frac{b\sqrt{3}}{2}, m_c = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

53. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB = 90^\circ$). Точката O од средната линија MN (M е средина на AC, N е средина на BC) е таква што $\measuredangle AOC = 90^\circ$, а точката P од отсечката AO е таква што $\measuredangle ACP = \measuredangle BCO$. Докажи дека $\measuredangle ABP = \measuredangle CBO$.

Решение. Бидејќи OM е медијана на правоаголниот $\triangle AOC$, имаме $\measuredangle OAC = \measuredangle AOM$. Оттука и од $MN \parallel AB$ следува $2\measuredangle OAM = \measuredangle OMC = \measuredangle BAC = \alpha$. Според тоа, $\measuredangle OAC = \measuredangle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Значи, $\measuredangle BCO = 90^\circ - \measuredangle ACO = \measuredangle OAC = \frac{\alpha}{2}$ и од условот следува $\measuredangle ACP = \frac{\alpha}{2}$.

Од $\measuredangle ACP = \measuredangle PAC = \frac{\alpha}{2}$ следува дека $\triangle APC$ е рамнокрак. Значи, PM е медијана и висина, т.е. $PM \perp AC$, па затоа $PM \parallel BC$.

Нека правата MP ја сече AB во точката K. Тогаш MK е средна линија во $\triangle ABC$. Освен тоа $\triangle AKP \sim \triangle CNO$. Следствено $\triangle ABP \sim \triangle CBO$, бидејќи $\measuredangle BAP$

$=\measuredangle BCO=\frac{\alpha}{2}$ и од $\frac{\overline{AP}}{\overline{AK}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{CN}}$ следува $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}$. Од последната сличност добиваме $\measuredangle ABP=\measuredangle CBO$.

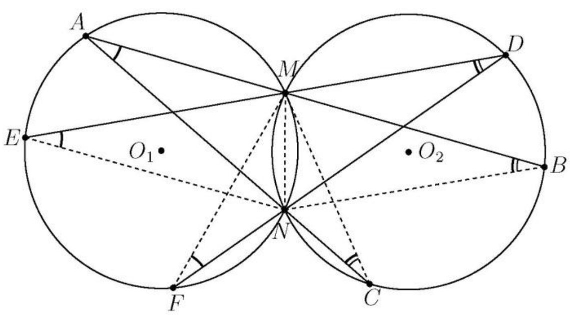
54. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k_1. Кружницата k_2 ја допира k_1 во точката C и страната AB во точката T. Правата CT ја сече k_1 по вторпат во точката Q. Правата QN, $N\in k_2$, е тангента на k_2. Докажи дека кружницата опишана околу $\triangle ABN$ минува низ центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Со пресметување на $\measuredangle ACB$ преку лаци во k_2, се добива дека лаците во таа кружница кои соодветствуваат на $\measuredangle ACT$ и на $\measuredangle BCT$ се еднакви, т.е. CT е симетрала на $\measuredangle ACB$. Тогаш Q е средина на лакот AB од k_1 и $\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QI}$, каде I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека $\overline{QN}=\overline{QI}$, од каде ќе следува тврдењето на задачата.

Имаме, $\overline{QN}^2=\overline{QT}\cdot\overline{QC}$ и останува да ги изразиме $\overline{QT}$ и $\overline{QC}$. Бидејќи $\triangle ATC\sim\triangle QCB$ важи $\overline{QC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{QB}}{\overline{AT}}$ и од $\triangle BTQ\sim\triangle CTA$ имаме $\overline{QT}=\frac{\overline{AT}\cdot\overline{QB}}{\overline{AC}}$. Ако ги помножиме последните две равенства добиваме $\overline{QN}=\overline{QI}$.

55. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките M и N. Низ точка $A\in k_1$, надворешна за k_2, се повлечени правите AM и AN, кои k_2 по втор пат ја сечат во точките B и C, соодветно. Низ точка D од лакот BM на k_2, кој не ја содржи N, се повлечени правите DM и DN, кои k_1 по втор пат ја сечат во точките E и F, соодветно. Ако $\overline{AB}=\overline{ED}$ и $\overline{AC}=\overline{FD}$ докажи дека MN е симетрала на отсечката AD.

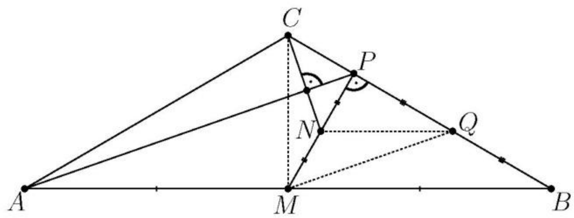
Решение. Имаме $\measuredangle MAN=\measuredangle MEN=\measuredangle MFN$ како периферни агли над лакот MN во k_1. Аналогно $\measuredangle MBN=\measuredangle MDN=\measuredangle MCN$ и од $\overline{AB}=\overline{ED}$ и $\overline{AC}=\overline{FD}$ добиваме дека $\triangle ABN\cong\triangle EDN$ и $\triangle ACM\cong\triangle FDM$



Според тоа, $\overline{AN}=\overline{EN}$ и $\overline{AM}=\overline{FM}$. Од $\overline{AN}=\overline{EN}$ следува $\measuredangle NAE=\measuredangle NEA$. Имаме $\measuredangle NAE=\measuredangle EMN$ како периферни агли над ист лак EN и аналогно $\measuredangle NEA=\measuredangle NMB$, т.е. $\measuredangle EMN=\measuredangle NMB$. Од $\overline{AM}=\overline{FM}$ следува $\measuredangle MAF=\measuredangle MFA$. Понатаму, $\measuredangle MFA=\measuredangle MNA$ и $\measuredangle MAF=\measuredangle MND$, т.е. $\measuredangle MNA=\measuredangle MND$. Според тоа, $\triangle ANM\cong\triangle DNM$, т.е. $\overline{AN}=\overline{DN}$ и $\overline{AM}=\overline{DM}$, па затоа MN е симетрала на отсечката AD.

56. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната AB. Со P да ја означиме проекцијата на M врз страната $BC\,(P\in BC)$, а со N средината на MP. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $AP\perp CN$ и $\overline{AP}:\overline{CN}=2\sqrt{3}$.

Решение. Со Q да ја означиме средината на отсечката BP. Тогаш MQ е средна линија во $\triangle ABP$, т.е. $MQ\parallel AP$, $\overline{MQ}=\frac{1}{2}\overline{AP}$ и од условот следува дека $MQ\perp CN$ и $\overline{MQ}:\overline{CN}=\sqrt{3}$. Според тоа, N е ортоцентар на $\triangle MQC$ и $NQ\perp CM$. Но, NQ е средна линија во $\triangle MBP$, т.е. $AB\parallel NQ\perp CM$, па затоа $\triangle ABC$ е рамнокрак. Останува да забележиме дека $\triangle MQP\sim\triangle CNP$, т.е.



$$\overline{MP}:\overline{CP}=\overline{MQ}:\overline{CN}=\sqrt{3},$$

па затоа $\measuredangle MCP=60^\circ$, што значи $\measuredangle ACB=120^\circ$ и $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=30^\circ$.

57. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M\neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC. Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P\neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

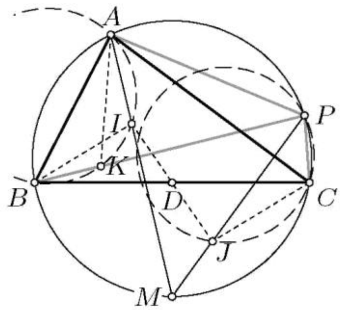
Решение. Ќе работиме со ориентирани агли по модул 180°. Бидејќи $\overline{JC}=\overline{BI}$ и

$$\measuredangle JPC=\measuredangle MAC=\measuredangle BAI,$$

опишаните кружници околу триаголниците JPC и ABI се складни. Нека K е точка на полуправата PB таква што $\overline{PK}=\overline{PA}$. Бидејќи

$$\measuredangle AKB=180^\circ-\measuredangle PKA=90^\circ+\frac{1}{2}\measuredangle APK$$

$$=90^\circ+\frac{1}{2}\measuredangle ACB=\measuredangle AIB,$$



точката K лежи на кружницата ABI. Оттука

$$\measuredangle IKP = \measuredangle IAB = \measuredangle MAB = \measuredangle MPK,$$

т.е. $BI \parallel CJ$, па затоа $\measuredangle BIK = \measuredangle CJP$. Според тоа, тетивите BK и PC во кружниците BAI и JPC се еднакви, т.е.

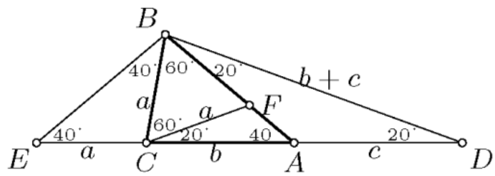
$$\overline{PB} = \overline{PK} \pm \overline{KB} = \overline{PA} \pm \overline{PC}.$$

58. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник чии соодветни агли $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Докажи дека

$$a(a+b+c) = b(b+c).$$

Решение. Нека A,B,C се соодветните темиња на триаголникот, D и E се точки на правата AC такви што $D-A-C-E$, $\overline{AD} = c$ и $\overline{CE} = a$, и F е точка на отсечката AB таква да $\triangle BCF$ е рамностран. Тогаш

$\measuredangle BDA = 20^\circ, \measuredangle BEC = 40^\circ, \measuredangle ACF = 20^\circ,$

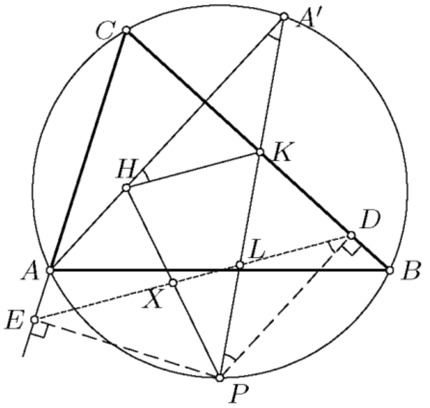


па затоа триаголниците BDE и FCA се слични. Бидејќи $\overline{BD} = \overline{CD} = b+c$ и $\overline{DE} = a+b+c$ добиваме $\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b}$, од каде следува тврдењето на задачата.

59. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E соодветно на полуправите CB и CA такви што $\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и P е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C. Докажи дека правата DE ја преполовува отсечката HP.

Решение. Нека Z е точка на полуправата CB таква што $\overline{CZ} = \overline{CA}$. Од складноста на триаголниците PCZ и PCA следува $\overline{PZ} = \overline{PA} = \overline{PB}$, а исто така важи $\overline{BD}=\overline{DZ}=\frac{|\overline{CB}-\overline{CA}|}{2}$ и

$$\measuredangle PBD=180^\circ-\measuredangle PAC=180^\circ-\measuredangle PZC=\measuredangle PZD.$$



Оттука следува дека триаголниците PZD и PBD се складни, па затоа $PD\perp BC$, а оттука и $PE\perp AC$.

Нека A' е симетричната точка на H во однос на правата BC и нека правата PA' ги сече BC и DE соодветно во точките K и L, а правата PH ја сече DE во точката X. Од $AA'\parallel DP$ следува

$$\measuredangle DPL=\measuredangle DPA'=\measuredangle PA'A=\measuredangle PCE=\measuredangle PDL,$$

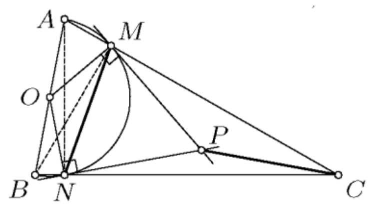
па затоа $\overline{LP}=\overline{LD}$, што значи дека L е средина на хипотенузата PK на правоаголниот триаголник PDK. Освен тоа, од $\measuredangle PDL=\measuredangle PA'A=\measuredangle KHA'$ и $AA'\parallel DP$ следува $DE\parallel KH$. Според тоа, LX е средна линија во триаголникот PKH, па е X средина на отсечката PH.

Забелешка. Познато е и поопшто тврдење, со практично ист доказ: ако P е точка на опишаната кружница на $\triangle ABC$ и H е ортоцентар на $\triangle ABC$, тогаш Симсоновата права на точката P ја преполовува отсечката PH.

60. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата k над дијаметар AB ги сече страните AC и BC соодветно во точките M и N. Тангентите на кружницата k во точките M и N се сечат во точката P. Ако $\overline{CP}=\overline{MN}$, определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Со O да ја означиме средината на страната AB. Имаме $\overline{MP}=\overline{NP}$, а освен тоа важи

$$\measuredangle MON=2\measuredangle MAN=2(90^\circ-\measuredangle ACB),$$



па затоа $\measuredangle MPN=2\measuredangle ACB$, што значи дека P е центар на опишаната кружница околу триаголникот MCN. Според тоа, $\overline{MN}=\overline{CP}=\overline{MP}=\overline{CP}$, т.е. триаголникот MNP е рамностран и затоа $\measuredangle MPN = 60^\circ$. Значи, $\measuredangle ACB = 30^\circ$.

61. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, ..., A_{2006}$ е определена со: $A_0 = A$, A_1 е подножјето на нормалата од A_0 на правата BC, A_2 е подножјето на нормалата од A_1 на правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата од A_{2005} на правата AC. Аналогно се дефинира низата B_0, $B_1, ..., B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е подножјето на нормалата од B_0 на правата AC итн. Докажи дека правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

Решение. Последователно имаме $\overline{CA_1} = \frac{1}{2}\overline{CA_0}, \overline{CA_2} = \frac{1}{4}\overline{CA_0}$ итн. Јасно е дека $\overline{CA_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CA_0} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CA}$ и аналогно $\overline{CB_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CB}$. Од обратната теорема на Талес следува $A_{2006}B_{2006} \parallel AB$, при што $\overline{A_{2006}B_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{AB}$. Правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако четириаголникот $ABB_{2006}A_{2006}$ е тетивен. Последното редоследно е еквивалентно со

$$\overline{AB} + \overline{A_{2006}B_{2006}} = \overline{AA_{2006}} + \overline{BB_{2006}}$$

$$\overline{AB} + \frac{1}{2^{2006}}\overline{AB} = \frac{2^{2006}-1}{2^{2006}}(\overline{AC} + \overline{BC})$$

$$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

62. Во $\triangle ABC, \overline{AB} > \overline{BC}$, за точката K од страната AB важи $\overline{AK} = \overline{BC} + \overline{BK}$. Правата l минува низ K и е нормална на AB. Докажи дека l, симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се сечат во една точка.

Решение. Нека C' е точка од полуправата AB таква што $\overline{BC} = \overline{BC'}$. Тогаш симетралата на надворешниот агол во темето B е симетрала на CC'. Бидејќи $\overline{AK} = \overline{BC} + \overline{BK} = \overline{BC'} + \overline{BK} = \overline{KC'}$, заклучуваме дека l е симетрала на AC'. Добивме дека l, симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се симетрали на страните на $\triangle AC'C$, па затоа тие се сечат во центарот на опишаната кружница околу овој триаголник.

63. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој се повлечени висините BB_1 и CC_1 кон страните AC и AB ($B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Нека M и N се соодветно сре-

дините на BB_1 и CC_1, $P=AM\cap CC_1$ и $Q=AN\cap BB_1$. Докажи дека

а) точките M,N,P и Q се конциклични,

б) ако точките B,C,P и Q се конциклични, тогаш $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. а) Имаме $\triangle ACC_1\cong\triangle ABB_1$, па затоа AN и AM се соодветни медијани во складни триаголници. Оттука

$$\measuredangle ANC_1=\measuredangle AMB_1 \quad\Rightarrow\quad \measuredangle QNB=\measuredangle PMQ,$$

т.е. точките M,N,P и Q се конциклични.

б) Ако точките B,C,P и Q се конциклични, тогаш $\measuredangle QCP=\measuredangle QBP$. Но, $\measuredangle ACC_1=\measuredangle ABB_1$, па затоа

$$\measuredangle QCA=\measuredangle PBA. \tag{1}$$

Од друга страна, од $\triangle ACC_1\cong\triangle ABB_1$ имаме

$$\measuredangle CAQ=\measuredangle CAN=\measuredangle BAM=\measuredangle BAP. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $\triangle ACQ\cong\triangle ABP$, па затоа

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

од каде добиваме $\overline{AC}=\overline{AB}$.

64. Во $\triangle ABC$, $\measuredangle ACB=60^\circ$ се повлечени симетралите на аглите AA_1 и BB_1 $(A_1\in BC, B_1\in AC)$. Правата A_1B_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките A_2 и B_2.

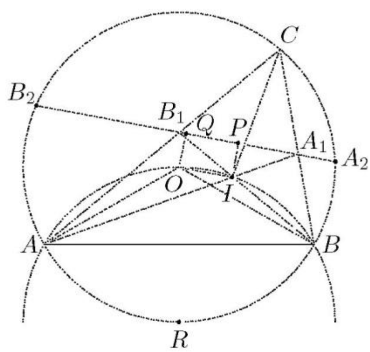
а) Докажи дека правата OI е паралелна на A_1B_1, каде O и I се центрите соодветно на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Ако R е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C, а P и Q се соодветно средините на A_1B_1 и A_2B_2, докажи дека $\overline{RP}=\overline{RQ}$.

Решение. а) Од $\measuredangle AOB=2\gamma=120^\circ$ и

$$\measuredangle AIB=180^\circ-\tfrac{\alpha+\beta}{2}=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

следува дека точките A,O,I и B се конциклични. Од $\measuredangle RIA=\measuredangle RAI=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ имаме $\overline{RI}=\overline{RA}$ и аналогно $\overline{RI}=\overline{RB}$, па затоа центарот на кружницата низ точките A, O,I и B е точката R. Од рамнокракиот $\triangle AOB$ добиваме $\measuredangle BAO=30^\circ$ и затоа



$\measuredangle OIB_1=30^\circ$. Бидејќи $\measuredangle AIB=120^\circ$, заклучуваме дека околу IA_1CB_1 може да се опише кружница, па затоа $\measuredangle IB_1A_1 = \measuredangle ICA_1 = 30^\circ$ и $\measuredangle IA_1B_1 = \measuredangle ICB_1 = 30^\circ$. Сега, од $\measuredangle OIB_1 = \measuredangle IB_1A_1$ следува $OI \parallel A_1B_1$.

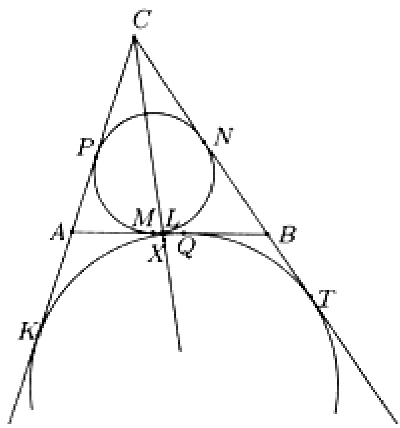
б) Бидејќи $OQ \perp A_2B_2$, $IP \perp A_2B_2$ и $OI \parallel A_2B_2$, заклучуваме дека $OIPQ$ е правоаголник и симетралата на OI се совпаѓа со симетралата на PQ. Бидејќи симетралата на OI минува низ R, заклучуваме дека R лежи на симетралата на PQ, т.е. $\overline{RP} = \overline{RQ}$.

65. Даден е $\triangle ABC$ $(\overline{CA} \neq \overline{CB})$. Нека CL $(L \in AB)$ е симетралата на $\measuredangle ACB$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките M, N и P, а припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB ги допира AB и продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките Q, K и T. Нека k_1, k_2 и k_3 се опишаните кружници соодветно околу $\triangle PKL, \triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Докажи дека втората пресечна точка на k_1 и k_2 припаѓа на правата CL.

б) Докажи дека кружниците k_1, k_2 и k_3 се сечат во една точка.

Решение. а) При осна симетрија со оска на симетрија правата CL точките P и N се симетрични, а исто така и точките K и T. Според тоа, кружниците k_1 и k_2 се симетрични, од каде што следува тврдењето.



б) Нека X е втората пресечна точка на k_3 и правата CL. Согласно а) доволно е да докажеме дека k_1 минува низ X, што е еквивалентно на $\overline{CL} \cdot \overline{CX} = \overline{CP} \cdot \overline{CK}$. При стандардните ознаки за елементи на триаголник, ако го искористиме равенството $\overline{CL} \cdot \overline{LX} = \overline{ML} \cdot \overline{LQ}$ и формулата за должина на симетрала на агол $\overline{CL}^2 = ab - \overline{AL} \cdot \overline{BL}$, последователно добиваме

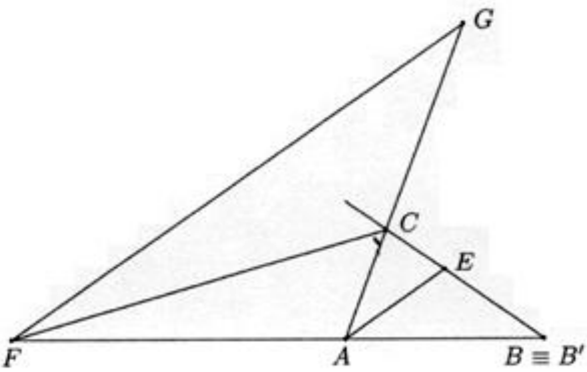
$$\overline{CL} \cdot \overline{CX} = \overline{CP} \cdot \overline{CK} \quad \Leftrightarrow$$
$$\overline{CL} \cdot (\overline{CL} + \overline{LX}) = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$
$$\overline{CL}^2 + \overline{ML} \cdot \overline{LQ} = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$
$$\overline{CL}^2 + (\overline{LA} - (s-a))(\overline{LB} - (s-a)) = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$
$$\overline{CL}^2 + \overline{LA} \cdot \overline{LB} - c(s-a) + (s-a)^2 = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$

$$ab - cs + ac + s^2 - 2as + a^2 = s^2 - sc \qquad \Leftrightarrow$$
$$a(a+b+c) = 2as,$$

кое очигледно е точно.

66. Симетралата на $\measuredangle BAC$ во $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точката E, а надворешната симетрала на $\measuredangle ACB$ ја сече полуправата BA во точката F. Ако должината на отсечката AF е еднаква на периметарот на $\triangle ACE$, определи го односот $\measuredangle BAC : \measuredangle ABC$.

Решение. Нека G е точка од полуправата AC таква што $\overline{AG} = \overline{AF}$. Тогаш
$$\measuredangle AGF = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \delta.$$



Нека B' е точка од полуправата EB таква што $\overline{EB'} = \overline{AE}$. Тогаш $\overline{CB'} = \overline{CG}$ и бидејќи $\measuredangle FCB' = \measuredangle FCG$, добиваме $\triangle FCB' \cong \triangle FCG$. Според тоа, $\measuredangle CB'F = \delta$. Ако B' е меѓу E и B, тогаш $\measuredangle CB'F < \measuredangle CB'A = \measuredangle EAB' < \delta$, што е противречност. Ако пак B е меѓу E и B', тогаш $\measuredangle CB'F > \measuredangle CB'A = \measuredangle EAB' > \delta$, што повторно е противречност. Значи, $B' = B$ и важи $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$.

67. Надвор од $\triangle ABC$ се конструирани $\triangle PAB$ и $\triangle QAC$ такви што $\overline{AP} = \overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{AC}$ и $\measuredangle BAP = \measuredangle CAQ$. Отсечките BQ и CP се сечат во точката R. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle BCR$, докажи дека правите AO и PQ се заемно нормални.

Решение. Нека S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ACQ$, а M и N се средини соодветно на CQ и CR. Точките S, M, N и C лежат на една кружница. Имаме
$$\measuredangle ASO = \measuredangle QCP,\ \measuredangle RSO = \measuredangle BQC,\ \measuredangle SOR = \measuredangle CBQ.$$

Оттука следува дека $\triangle ORS \sim \triangle BCQ$, па затоа

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{SO}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{SO}}{\overline{PC}}.$$

Од горните равенства следува дека $\triangle AOS \sim \triangle QPC$ и бидејќи $OS \perp PC$ и $AS \perp QC$, добиваме дека $AO \perp QP$.

68. Во разностран остроаголен $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CL на $\measuredangle ACB$. Точките M, N и P се средини соодветно на страните AB, BC и CA, а точката T допирната точка на вписаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB. Опишаната кружница околу $\triangle NPL$ по втор пат ја сече CL во точката D. Ако L е средина на MT, определи го односот $\overline{CD}:\overline{DL}$.

Решение. *Прв начин*. Нека K е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C и I е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$. Тогаш $MK \perp AM$ и $\triangle MKL \cong \triangle TIL$ ($\measuredangle KML = \measuredangle ITK = 90^\circ$, според условот $\overline{ML}=\overline{MT}$ и $\measuredangle KLM = \measuredangle ILT$ како накрсни агли). Според тоа, $\overline{KM}=\overline{IT}=\overline{IF}$, каде F е допирната точка на вписаната кружница со страната AC.

Бидејќи $\measuredangle KAM = \measuredangle KCB = \measuredangle ICP$, важи $\triangle MKA \cong \triangle FIC$, па затоа $\overline{CI}=\overline{AK}$. Познато е дека $\overline{KA}=\overline{KB}=\overline{KI}$, па затоа $\overline{CI}=\overline{KA}=\overline{KB}=\overline{KI}$, т.е. I е средина на CK.

Бидејќи IP е средна линија во $\triangle AKC$, важи $\overline{IP}=\frac{1}{2}\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{IK}=\overline{IL}$ и аналогно $\overline{IN}=\overline{IL}$. Според тоа, $\overline{IP}=\overline{IN}=\overline{IL}$, т.е. I е центар на опишаната кружница околу $\triangle NPL$. Тогаш DI е дијаметар во таа кружница и $\overline{DI}=\overline{IL}=\overline{LK}$. Оттука и од $\overline{CI}=\overline{IK}$ следува $\overline{CD}=\overline{DI}$, па затоа $\overline{CD}:\overline{DL}=1:2$.

Втор начин. Од својството на симетралата на агол следува $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}$, па затоа $\overline{AL}=\frac{bc}{a+b}$ и $\overline{BL}=\frac{ac}{a+b}$. Бидејќи $\overline{AM}=\frac{c}{2}, \overline{BT}=\frac{a+c-b}{2}$, добиваме дека условот $\overline{ML}=\overline{LT}$ е еквивалентен на $\overline{AL}-\overline{AM}=\overline{BL}-\overline{BT}$. Со замена со соодветните изрази добиваме

$$(b-a)(b+a-2c)=0,$$

па како $\triangle ABC$ е разностран имаме $c=\frac{a+b}{2}$. Тогаш $\overline{AL}=\frac{b}{2}$ и $\overline{BL}=\frac{a}{2}$. Тоа значи дека $\triangle ALP$ и $\triangle BLN$ се рамнокраки и симетралите на аглите AI и BI се симетрали на отсечките PL и LN. Според тоа, I е центар на опишаната кружница околу $\triangle PLN$, т.е. $\overline{ID}=\overline{IL}$.

Од својството на симетралата AI на $\measuredangle CAL$ во $\triangle ALC$ следува $\overline{CI}:\overline{IL}=\overline{AC}:\overline{AL}=2:1$. Сега од $\overline{ID}=\overline{IL}$ и $\overline{CI}:\overline{IL}=2:1$ следува $\overline{CD}=\overline{DI}=\overline{IL}$, па затоа $\overline{CD}:\overline{DL}=1:2$.

69. Во $\triangle ABC$ отсечката $CL\,(L \in AB)$ е симетрала на $\measuredangle BCA$. Кружница која минува низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k околу $\triangle ABC$ по втор пат соодветно во точките M и N, при што A е меѓу M и B, а N е на лакот AB кој не ја содржи C. Аналогно, втора кружница низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k по втор пат во точки P и Q, при што B е меѓу P и A, а Q е на лакот AB кој не ја содржи C. Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

Решение. Нека K е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C. Тогаш K припаѓа на правата CL, $\measuredangle MNC = \measuredangle MLC$ и $\measuredangle KNC = \measuredangle BLC$, па затоа

$$\measuredangle MNC + \measuredangle KNC = \measuredangle MLC + \measuredangle BLC = 180^\circ,$$

т.е. точките M, N и K се колинеарни. Аналогно се докажува дека точките Q, P и K се колинеарни. Сега, од

$$\overline{KN} \cdot \overline{KM} = \overline{KL} \cdot \overline{KC} = \overline{KP} \cdot \overline{KQ}$$

следува дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

70. Нека AM е медијана на нерамностраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

Решение. Нека N и K се средините на страните AC и AB, соодветно, а T е пресечната точка на KO и AM. Јасно, $G \in NM$ и $\overline{NG} : \overline{GM} = 1:2$ и точката O е ортоцентар на $\triangle MNK$. Нека S е пресечната точка на AM и KN. Тогаш S е средина на отсечката KN, т.е. MS е медијана за $\triangle MNK$ ($AKMN$ е паралелограм).

Имаме, $OG \perp AM$ ако и само ако точката T е ортоцентар на $\triangle GOM$. Последното е еквивалентно со $GT \perp OM$ или со $GT \parallel NK$. Тоа е точно тогаш и само тогаш, кога $\overline{MT} : \overline{TS} = 2:1$ или кога T е тежиште на $\triangle MNK$. Така $OG \perp AM$ важи само ако тежиштето T на $\triangle MNK$ лежи на неговата висина KO или ако $\overline{KM} = \overline{KN}$, што е еквивалентно на $\overline{CA} = \overline{CB}$.

71. Во остроаголен $\triangle ABC$ медијаната CM го дели $\measuredangle ACB$ во однос $2:1$, т.е. $\measuredangle ACM = 2\measuredangle MCB$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ со центар O по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle MOC$ во точката D. Докажи дека CD е симетрала на $\measuredangle ACM$.

Решение. Прво, да забележиме дека

$$\measuredangle COM = \measuredangle COA + \measuredangle AOM = 2\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha + \beta > 180^\circ - \alpha .$$

Следствено, точките D и O се во различни полурамнини во однос на CM, бидејќи во спротивен случај $\measuredangle COM = \measuredangle CDM < \measuredangle CDB = 180^\circ - \alpha < \measuredangle COM$, што не е можно. Имаме

$$\measuredangle MDO = \measuredangle MCO = \measuredangle ACO - \measuredangle ACM = 90^\circ - \beta - \frac{2\gamma}{3}$$

и

$$\measuredangle CDM = 180^\circ - \measuredangle COM = 180^\circ - 2\beta - \gamma .$$

Според тоа, $\measuredangle ODC = \measuredangle CDM - \measuredangle MDO = 90^\circ - \beta - \frac{\gamma}{3}$. Но, $\overline{OD} = \overline{OC}$, како радиуси во кружница и затоа $\measuredangle OCD = \measuredangle ODC$, а оттука

$$\measuredangle DCA = \measuredangle OCA - \measuredangle OCD = 90^\circ - \beta - (90^\circ - \beta - \frac{\gamma}{3}) = \frac{\gamma}{3} = \frac{1}{2}\measuredangle MCA.$$

Следствено, CD е симетрала на $\measuredangle ACM$.

2 ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Нека $ABCD$ е правоаголник со центар O и не е квадрат. Правата низ O, нормална на BD, ги сече правите AB и BC во точките E и F, соодветно. Нека M и N се средините на страните CD и AD, соодветно. Докажи дека $FM \perp EN$.

   Решение. Нека P е средината на BC, а Q е пресечната точка на правите CD и EF. Тогаш $MP \parallel BD$ (средна линија во $\triangle BCD$), па затоа $MP \perp FQ$. Бидејќи $EP \perp MC$, заклучуваме дека Q е ортоцентар во $\triangle MPF$ и затоа $FM \perp PQ$. Од друга страна $\triangle NOE \cong \triangle POQ$, па затоа $NE \parallel PQ$. Следствено $FM \perp EN$.

2. Кружница минува низ темињата A и B на тетивниот четириаголник $ABCD$ и ги сече неговите дијагонали AC и BD соодветно во точките E и F. Правите AF и BC се сечат во точката P, а правите BE и AD се сечат во точката Q. Докажи дека правите PQ и CD се паралелни.

   Решение. Со $\measuredangle(a,b)$ ќе го означуваме аголот меѓу правите a и b. Од условот на задачата следува дека
   $$\measuredangle(FA,AE) = \measuredangle(FB,BE) \text{ и } \measuredangle(DA,AC) = \measuredangle(DB,BC).$$
   Ако ги одземеме овие две равенства добиваме $\measuredangle(DA,AF) = \measuredangle(EB,BC)$, од каде следува $\measuredangle(QA,AP) = \measuredangle(QB,BP)$, т.е. точките A,Q,P и D се конциклични. Тогаш, $\measuredangle(AB,BP) = \measuredangle(AQ,QP)$.

   Од друга страна, повторно од условот имаме $\measuredangle(AB,BP) = \measuredangle(AQ,CD)$ и затоа $\measuredangle(AQ,CD) = \measuredangle(AQ,QP)$, што значи дека $CD \parallel PQ$.

3. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{CD} > \overline{AB} + \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle ABC > 120^\circ$.

   Решение. Нека претпоставиме дека $\measuredangle ABC \leq 120^\circ$. Нека точката X од отсечката CD е таква што $\overline{DX} = \overline{AB} = \overline{AD}$. Очигледно $\measuredangle ADX \geq 60^\circ$. Сега $\triangle ADX$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle AXD \leq 60^\circ$.

   Бидејќи $\overline{CX} = \overline{CD} - \overline{DX} = \overline{CD} - \overline{AB} > \overline{BC}$, во $\triangle BCX$ имаме $\measuredangle CBX > \measuredangle CXB$. Понатаму, во рамнокракиот $\triangle ADX$ најголема страна е AX, па затоа $\overline{AX} > \overline{AB}$ и во $\triangle ABX$ имаме $\measuredangle ABX \geq \measuredangle AXB$. Сега добиваме

$$120^\circ \geq \measuredangle ABC = \measuredangle CBX + \measuredangle ABX > \measuredangle CXB + \measuredangle AXB = \measuredangle AXC,$$

па затоа $\measuredangle AXD \leq 60^\circ$, што е противречност.

4. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката P. Точката Q од отсечката BC е таква што $PQ \perp AC$. Докажи дека правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците APD и BQD е паралелна со правата AD.

Решение. Нека точката $T \in QP$ е таква што $DT \perp DA$. Од $\measuredangle APT = 90^\circ = \measuredangle ADT$ следува дека точките A, P, D и T се конциклични. Според тоа, центарот на кружницата ω_1, опишана околу $\triangle APD$ лежи на симетралата l на отсечката DT.
Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle QBD = \measuredangle PAD$. Четириаголникот $APDT$ исто така е тетивен, па затоа $\measuredangle PAD = \measuredangle QTD$. Значи, $\measuredangle QBD = \measuredangle PAD = \measuredangle QTD$, што значи дека точките B, Q, D и T се конциклични. Според тоа, центарот на кружницата ω_2, опишана околу $\triangle BQD$ исто така лежи на симетралата l на отсечката DT. Според тоа, l минува низ центрите на ω_1 и ω_2. Бидејќи $l \perp DT$ и $AD \perp DT$, добиваме $l \parallel AD$, што и требаше да се докаже.

5. Даден е ромб $ABCD$ и точки M и N соодветно на отсечките AB и BC такви што $\overline{DM} = \overline{MN}$. Правата DN ја сече AC во P, а правата DM ја сече AB во R. Докажи дека $\overline{DP} = \overline{PR}$.

Решение. Точката M е пресек на симетралата на $\measuredangle DCN$ и страната DN, па затоа таа лежи на опишаната кружница на $\triangle CDN$, т.е. четириаголникот $CDMN$ е тетивен (направи цртеж). Сега $\measuredangle RMN = \measuredangle DCN = 180^\circ - \measuredangle RBN$, па затоа точките B, R, M, N се конциклични. Освен тоа

$$\begin{aligned}180^\circ - \measuredangle MPN &= \measuredangle CMN + \measuredangle DNM = \measuredangle CDN + \measuredangle DCM \\ &= \measuredangle CDN + \measuredangle MCN = \measuredangle CDM = \measuredangle MBC,\end{aligned}$$

па затоа точката P припаѓа на кружницата $BRMN$. Сега од

$$\measuredangle APR = \measuredangle MBR = \measuredangle ADM$$

заклучуваме дека P е на опишаната кружница околу $\triangle ADR$, и тоа бидејќи $\measuredangle DAP = \measuredangle PAR$ таа е средина на лакот DR, од каде што следува $\overline{DP} = \overline{PR}$.

6. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC$. Точката K на дијагоналата BD е таква што $\overline{BK} = \overline{BC}$. Докажи дека важи $\measuredangle KAD = \measuredangle KCD$.

Решение. Нека точката E на страната AB е таква што $\overline{BE}=\overline{BC}$, направи цртеж. Тогаш рамнокраките триаголници EBK и KBC се складни (по две еднави страни и агол меѓу нив). Според тоа, $\overline{EK}=\overline{KC}$ и

$$\measuredangle AEK=180^\circ-\measuredangle BEK=180^\circ-\measuredangle BKC=\measuredangle CKD.$$

Освен тоа, $\overline{KD}=\overline{BD}-\overline{BK}=\overline{BA}-\overline{BE}=\overline{EA}$. Значи, триаголниците AEK и DKC се складни, па затоа $\measuredangle KCD=\measuredangle EKA$. Понатаму, бидејќи триаголниците BEK и BAD се рамнкраки, важи $\measuredangle BEK=90^\circ-\frac{1}{2}\measuredangle EBD=\measuredangle BAD$. Според тоа, $AD\parallel EK$, па затоа $\measuredangle KAD=\measuredangle EKA=\measuredangle KCD$.

7. За тетивниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\overline{AD}\cdot\overline{CD}$. Правите AD и BC се сечат во точката X, а правите AB и CD се сечат во точката Y. Точките E,F,G и H се средините на отсечките AB,BC,CD и DA, соодветно. Симетралата на $\measuredangle AXB$ ја сече отсечката EG во точката S, а симетралата на $\measuredangle AYD$ ја сече отсечката FH во точката T. Докажи дека правите ST и BD се паралелни.

Решение. Од $\triangle XBA\sim\triangle XDC$ следува $\measuredangle CXG=\measuredangle AXE$, па бидејќи XS го полови $\measuredangle AXB$, заклучуваме дека XS е симетрала на $\measuredangle GXE$. Според тоа

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{XG}}{\overline{XE}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{SE}}.$$

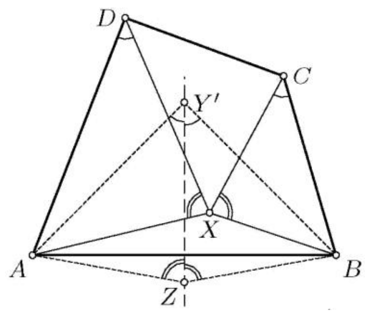
Аналогно YT е симетрала на $\measuredangle FYH$ и

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{YF}}{\overline{YH}}=\frac{\overline{FT}}{\overline{TH}}.$$

Сега од $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$ следува дека $\frac{\overline{GC}}{\overline{SE}}=\frac{\overline{FT}}{\overline{TH}}$, што заедно со $FG\parallel EH$ дава $TS\parallel FG\parallel EH$. Конечно, од $FG\parallel BD$ заклучуваме дека $ST\parallel BD$, што и требаше да се докаже.

8. Во внатрешноста на конвексен четириаголник $ABCD$ кој не е трапез е дадена точка X таква што $\measuredangle ADX=\measuredangle BCX<90^\circ$ и $\measuredangle DAX=\measuredangle CBX<90^\circ$. Ако симетралите на страните AB и CD се сечат во точката Y, докажи дека $\measuredangle AYB=2\measuredangle ADX$

Решение. Според условот на задачата триаголниците ADX и BCX се слични и спротивно ориентирани. Нека Y' и Z се точки на симетралата на отсечката AB такви што триаголниците $AY'Z$ и ADX се слични и исто ориентирани. Тогаш триаголниците $BY'Z$ и BCX се слични и исто ориентирани. Исто така,



од $\frac{\overline{AD}}{\overline{AY'}}=\frac{\overline{AX}}{\overline{AZ}}$ и $\measuredangle DAY'=\measuredangle XAZ$ следува $\triangle ADY'\sim\triangle AXZ$, па затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}}=\frac{\overline{DY'}}{\overline{XZ}}$. Аналогно важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}=\frac{\overline{CY'}}{\overline{XZ}}$. Сега од $\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}$ следува $\overline{CY'}=\overline{DY'}$, што значи дека Y' припаѓа на симетралата на отсечката CD, па затоа $Y'\equiv Y$.

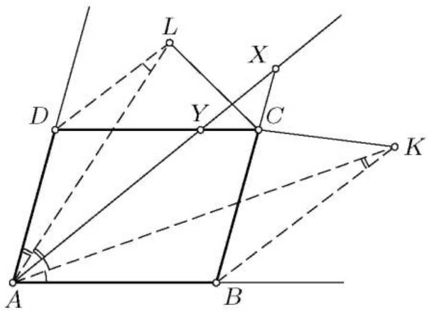
Значи, $\measuredangle AYB=2\measuredangle AYZ=2\measuredangle ADX$, што и требаше да се докаже.

9. Даден е паралелограм $ABCD$. Произволна права p низ темето A ги сече полуправите BC и DC во точките X и Y соодветно. Нека K е центарот на припишаната кружница на триаголникот ABX наспроти темето A, а L е центарот на припишаната кружница на триаголникот ADY наспроти темето A. Докажи дека големината на $\measuredangle KCL$ не зависи од изборот на правата p.

Решение. Да означиме

$\measuredangle BAK=\measuredangle KAX=x$ и

$\measuredangle XAL=\measuredangle LAD=y$.



Од $\measuredangle KBC=\measuredangle CDL=\frac{1}{2}\measuredangle BAD=x+y$ следува $\measuredangle AKB=x+y-\measuredangle BAK=y$ и аналогно $\measuredangle DLA=x$. Според тоа, $\triangle ABK\sim\triangle LDA$. Од оваа сличност следува $\frac{\overline{KB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{DL}}$, т.е. $\frac{\overline{KB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DL}}$, што заедно со условот $\measuredangle KBC=\measuredangle CDL$ дава $\triangle KBC\sim\triangle CDL$. Оттука следува

$$\measuredangle LCD+\measuredangle BCK=\measuredangle CKB+\measuredangle BCK=180^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BAD,$$

па затоа

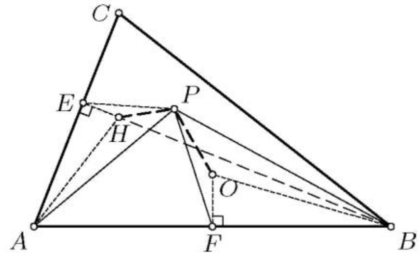
$$\measuredangle KCL=360^\circ-(180^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BAD)-\measuredangle DCB=180^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BAD.$$

10. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со $AD\,||\,BC$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката M. Точките X и Y лежат на страната AB и се такви што $\overline{AX}=\overline{AM}$ и $\overline{BY}=\overline{BM}$. Нека Z е средината на XY и N е пресечната точка на CY и DX. Докажи дека правата ZN е паралелна на основите на трапезот.

Решение. Нека точката $Z'\in AB$ е таква што $NZ'\,||\,AD$. Ќе докажеме дека $Z'\equiv Z$. Од сличноста $\triangle YCB\sim\triangle YNZ'$ следува дека $\frac{\overline{YZ'}}{\overline{Z'N}}=\frac{\overline{YB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$ и аналогно $\frac{\overline{XZ'}}{\overline{Z'N}}=\frac{\overline{XA}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}$. Освен тоа, бидејќи $\triangle MBC\sim\triangle MAD$ имаме $\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}$. Според тоа, $\frac{\overline{YZ'}}{\overline{Z'N}}=\frac{\overline{XZ'}}{\overline{Z'N}}$, па затоа $\overline{XZ'}=\overline{Z'Y}$, т.е. $Z'\equiv Z$.

11. Даден е остроаголен триаголник ABC во кој $\measuredangle BAC=\alpha$. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, H е негов ортоцентар и F е средина на страната AB. Точката P е во внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle APF=\alpha$ и $\measuredangle APB=180^\circ-\alpha$. Докажи дека $\measuredangle HPO=180^\circ-\alpha$.

Решение. Со E да го означиме подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето B. Бидејќи



$$\measuredangle AEH=\measuredangle BFO=90^\circ \text{ и}$$
$$\measuredangle AHE=\measuredangle BCA=\measuredangle BOF,$$

важи $\triangle AEH\sim\triangle BFO$. Понатаму, бидејќи $\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FE}$, добиваме

$$\measuredangle AEF=\measuredangle FAE=\measuredangle APF,$$

што значи дека четириаголникот $AEPF$ е тетивен и оттука

$$\measuredangle AEP=180^\circ-\measuredangle PFA=\measuredangle BFP.$$

Освен тоа,

$$\measuredangle EPF=180^\circ-\measuredangle FAE=180^\circ-\alpha=\measuredangle APB,$$

па затоа $\measuredangle EPA=\measuredangle EPB$. Според тоа, $\triangle AEP\sim\triangle BFP$.

Значи, четириаголниците $AEHP$ и $BFOP$ се слични, па затоа $\measuredangle FPO=\measuredangle EPH$. Оттука следува $\measuredangle HPO=\measuredangle EPF=180^\circ-\alpha$.

12. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB}=\overline{AD}$. Точките M и N припаѓаат на страните CD и BC, соодветно и важи $\overline{DM}+\overline{BN}=\overline{MN}$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMN припаѓа на отсечката AC.

Решение. На продолжението на отсечката CD преку точката D земаме точка K така што $\overline{DK}=\overline{BN}$. Од $\overline{KD}=\overline{BN}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\measuredangle KDA=\measuredangle NBA$ следува дека триаголниците KDA и NBA се складни. Според тоа,

$$\overline{KA}=\overline{NA},\ \overline{KM}=\overline{DK}+\overline{DM}=\overline{BN}+\overline{DM}=\overline{NM},$$

па затоа триаголниците KMA и NMA се складни. Оттука $\measuredangle MAN=\frac{1}{2}\measuredangle DAB$.

Нека O и C се пресечните точки на отсечката AC со кружницата опишана околу триаголникот MNC. Од

$$\measuredangle MCO=\measuredangle DCA=\measuredangle BCA=\measuredangle NCO,$$

следува $\overline{MO}=\overline{NO}$. Освен тоа,

$$\measuredangle MON=180^\circ-\measuredangle MCN=180^\circ-\measuredangle DCB=\measuredangle DAB=2\measuredangle MAN.$$

Од ова равенство и $\overline{MO}=\overline{NO}$ следува дека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот AMN.

13. Точките A_1 и C_1 припаѓаат соодветно на страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$. Отсечките AC_1 и CA_1 се сечат во точката P, а опишаните кружници околу триаголниците AA_1P и CC_1P по втор пат се сечат во точка Q, внатрешна за триаголникот ACD. Докажи дека $\measuredangle PDA = \measuredangle QBA$.

Решение. Со ω_A и ω_C да ги означиме соодветно опишаните кружници околу $\triangle AA_1P$ и $\triangle CC_1P$. Нека полуправите AQ и CQ ги сечат страните CD и AD соодветно во точките C_2 и A_2.

Бидејќи $AB \| CD$ и AA_1PQ е тетивен четириаголник, добиваме дека

$$\measuredangle PCC_2 = 180^\circ - \measuredangle AA_1P = \measuredangle AQP = 180^\circ - \measuredangle PQC_2 .$$

Значи, четириаголникот $CPQC_2$ е тетивен, што значи дека C_2 лежи на ω_C. Аналогно A_2 лежи на ω_A.

Понатаму, бидејќи $AB \| CD$ и AA_1PA_2 е тетивен четириаголник, добиваме

$$\measuredangle A_2PC = 180^\circ - \measuredangle A_1PA_2 = \measuredangle A_1AA_2 = 180^\circ - \measuredangle A_2DC .$$

Значи, четириаголникот A_2PCD е тетивен, од каде следува

$$\measuredangle PDA = \measuredangle PDA_2 = \measuredangle PCA_2 = \measuredangle PCQ .$$

Аналогно добиваме дека четириаголникот BA_1QC е тетивен, па затоа

$$\measuredangle QBA = \measuredangle QCA_1 = \measuredangle PCQ .$$

Оттука

$$\measuredangle PDA = \measuredangle PCQ = \measuredangle QBA .$$

14. Даден е триаголник ABC и во рамнината на овој триаголник паралелограм $ASCR$ со дијагонала AC. Нека правата која минува низ точката B и е паралелна со CS ги сече правите AS и CR соодветно во точките M и P, а правата која минува низ точката B и е паралелна со AS ги сече правите AR и CS соодветно во точките N и Q. Докажи дека правите RS, MN и PQ се сечат во една точка.

Решение. Да означиме $\overline{AM} = x, \overline{AN} = y, \overline{AR} = b$ и $\overline{AS} = a$, (направи цртеж). Нека $MN \cap RS = T$. Ќе докажеме дека точката P припаѓа на правата TQ. Доволно е да докажеме дека правата TQ ја сече правата CP во точка V таква што $\overline{CV} = a - x$, од каде ќе следува $\overline{RV} = x$ и како $\overline{RP} = x$, добиваме $V \equiv P$.

Нека $MN \cap RC = U$. Триаголникот AMN е сличен со триаголникот URN, па затоа $x : y = \overline{UR} : (b - y)$, т.е. $\overline{UR} = \frac{x(b-y)}{y}$. Нека $RS \cap BN = X$ и $\overline{NX} = z$.

Од Талесовата теорема следува $z : \overline{UR} = (a - z) : \overline{RV}$, па затоа

$$\overline{RV} = \frac{\overline{UR} \cdot (a-z)}{z} = \frac{x(b-y)(a-z)}{zy}. \qquad (1)$$

Сега од повторно од Талесовата теорема добиваме $\frac{\overline{AS}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{NR}}$, односно $\frac{a}{z} = \frac{b}{b-y}$, па затоа $a(b-y) = bz$, т.е. $(a-z)(b-y) = zy$. Конечно, од (1) и последното равенство следува $\overline{RV} = x$.

15. Во четириаголникот $ABCD$ е впишана кружница со центар O, при што $\overline{OA} = 5, \overline{OB} = 6, \overline{OC} = 7$ и $\overline{OD} = 8$. Ако M и N се соодветно средините на дијагоналите AC и BD, определи го односот $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$.

Решение. Нека впишаната кружница ги допира AB, BC, CD, DA соодветно во точките E, F, G, H и нека P, Q, R, S се соодветно средините на отсечките HE, EF, FG, GH (направи цртеж). Четириаголникот $PQRS$ е паралелограм, па затоа PR и QS имаат заедничка средина K. Точкта P припаѓа на OA и $\triangle OAE \sim \triangle OEP$, па затоа $\frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}}$, т.е. $\overline{OP} = \frac{r^2}{\overline{OA}}$, каде r е радиусот на впишаната кружница. Аналогно $\overline{OR} = \frac{r^2}{\overline{OC}}$, па затоа $\frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2}$, т.е. $\triangle ORP \sim \triangle OAC$ со коефициент на сличност $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2}$. Затоа, $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2} \overline{OK}$. Аналогно, $\overline{ON} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OD}}{r^2} \overline{OK}$, па затоа $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{\overline{OB} \cdot \overline{OD}} = \frac{48}{35}$.

16. Точките M и N се соодветно на непаралелните страни AD и BC на трапезот $ABCD$ и се такви што дијагоналите на трапезот ја делат отсечката MN на три еднакви дела, но MN не е паралелна со AB. Определи го односот на основите на трапезот.

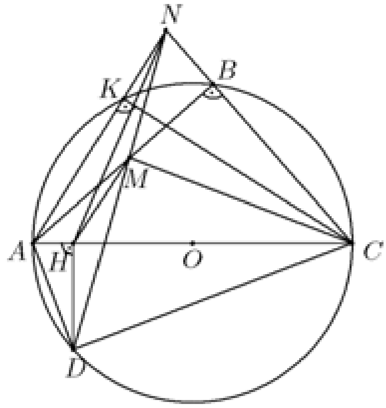
Решение. Нека дијагоналите AB и CD соодветно ја сечат отсечката MN во точките P и Q, со распоред $M-P-Q-N$ (направи цртеж). Ако означиме $\overline{AM} = \lambda \overline{AD}$ и $\overline{BN} = \mu \overline{BC}$, добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{P_{ABC}}{P_{BCD}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ANC}} \cdot \frac{P_{ANC}}{P_{AMC}} \cdot \frac{P_{AMC}}{P_{BCD}} = \frac{2\lambda}{1-\mu}.$$

Аналогно, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2\mu}{1-\lambda}$, од каде добиваме $\frac{2\lambda}{1-\mu} = \frac{2\mu}{1-\lambda}$, т.е. $\lambda(1-\lambda) = \mu(1-\mu)$, па како $\lambda \neq \mu$, мора да е $\lambda = 1-\mu$, односно $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$.

17. Даден е четириаголник $ABCD$ со $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$. Точката M на страната AB е таква што $\overline{AD} = \overline{AM}$. Полуправите DM и CB се сечат во точката

N. Точките H и K се подножјата на нормалите соодветно повлечени од точките D и C на правите AC и AN. Докажи дека $\measuredangle MHN = \measuredangle MCK$.



Решение. Да означиме $\measuredangle BAD = 2\alpha$. Тогаш од рамнокракиот $\triangle AMD$ следува $\measuredangle ADM = 90^\circ - \alpha$ и затоа $\measuredangle CDN = \alpha$. Освен тоа, $\measuredangle BMN = 90^\circ - \alpha$ и од правоаголниот $\triangle MNB$ добиваме $\measuredangle ANC = \alpha$. Значи, $\triangle DNC$ е рамнокрак и $\overline{CN} = \overline{CD}$. Од Евклидовите теореми следува

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC},$$

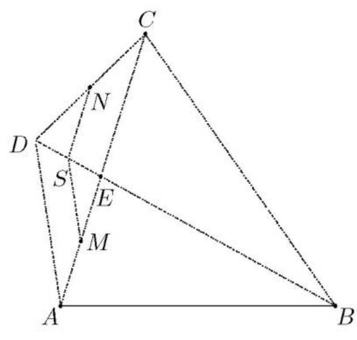
па затоа $\frac{\overline{AM}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$, т.е. $\triangle AHM \sim \triangle AMC$, од каде добиваме $\measuredangle CHM = \measuredangle CMB$.

Аналогно од $\overline{CN}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CA}$ следува $\measuredangle CHN = \measuredangle CNA$.

Ако T е пресечната точка на AB и CK, тогаш $\measuredangle CTB = \measuredangle CNA$, како агли со заемно нормални краци. Според тоа, $\measuredangle CHN = \measuredangle CTB$ и

$$\measuredangle MHN = \measuredangle CHN - \measuredangle CHM = \measuredangle CTB - \measuredangle CMN = \measuredangle MCK.$$

18. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката E, точката M е средина на AE и точката N е средина на CD. Познато е дека дијагоналата BD е симетрала на $\measuredangle ABC$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако четириаголникот $MBCN$ е тетивен.



Решение. Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Од $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$ следува дека $\overline{AD} = \overline{CD}$. Нека S е средината на DE. Бидејќи SM и SN се средни линии соодветно во $\triangle DEA$ и $\triangle DEC$ имаме

$$\overline{SM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = \overline{CN}$$

и $SN \parallel AC$. Според тоа, четириаголникот $MCNS$ е рамнокрак трапез, па затоа е тетивен. Од друга страна, имаме $\measuredangle MSB = \measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, што значи дека четириаголникот $MBCS$ е тетивен. Според тоа, точките M, B, C, N и S лежат на една кружница, т.е. четириаголникот $MBCN$ е тетивен.

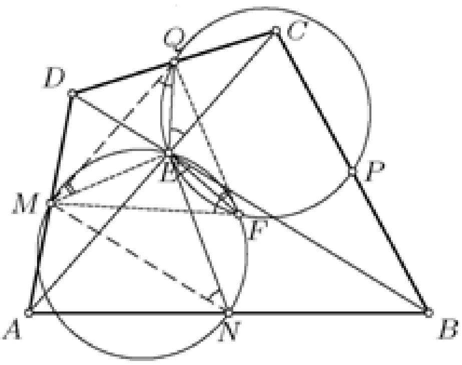
Нека четириаголникот $MBCN$ е тетивен и втората пресечна точка на правата BD и кружницата опишана околу $\triangle ABC$ да ја означиме со D_1. Ќе докажеме дека $D \equiv D_1$. Нека точката D_1 е меѓу B и D (случајот кога D е меѓу B и

D_1 се разгледува аналогно). Ако N_1 е средината на CD_1, како погоре се докажува дека четириаголникот $MBCN_1$ е тетивен. Според тоа, точките M, B, C, N и N_1 лежат на една кружница. Но, ако $D \not\equiv D_1$ последното не е можно, бидејќи тогаш N_1 лежи на средната отсечка низ N во $\triangle CDE$, што значи дека N_1 е внатрешна за $\triangle MCN$.

19. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q се средини на страните DA, AB, BC, CD, соодветно, а точката E епресекот на дијагоналите AC и BD. Кружниците опишани околу $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ се сечат во точката $F \neq E$. Докажи дека $EF \perp AC$.

Решение. *Прв начин*. Триаголниците EAB и EDC се слични, па затоа се слични и триаголниците EBN и ECQ. Затоа за ориентирани агли важи

$$\measuredangle MFE = \measuredangle MNE = \measuredangle BEN = \measuredangle QEC = \measuredangle EQM .$$



Аналогно важи $\measuredangle QFE = \measuredangle EMQ$, од каде што следува дека F е ортоцентар на $\triangle EMQ$. Значи, $EF \perp QM \parallel AC$.

Втор начин. Разгледуваме транслација τ за вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Важи $\tau(M) = Q$ и $\tau(N) = P$. Да означиме $\tau(E) = E'$. Од сличноста на триаголниците AED и BEC следува $\triangle AEM \sim \triangle BEP$, па затоа

$$\measuredangle QE'E = \measuredangle EMQ = \measuredangle MEA = \measuredangle BEP = \measuredangle QPE ,$$

па точката E' лежи на кружницата PEQ. Според тоа,транслацијата τ ја пресликува кружницата MEN во кружницата PEQ. Затоа правата која ги поврзува нивните центри е паралелна со AC, од каде следува тврдењето на задачата.

20. Нека H е ортоцентарот, а O е центарот на опишаната кружница околу остраоголниот $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A и B, соодветно. Со K да ја означиме пресечната точка

на правите OD и BE, а со L пресечната точка на правите OE и AD. Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците HKD и HLE, а M е средината на страната AB. Докажи дека точките K,L и M се колинеарни ако и само ако X е центар на кружницата опишана околу триаголникот EOD.

Решение. Ако X е центар на опишаната кружница околу $\triangle ODE$, тогаш

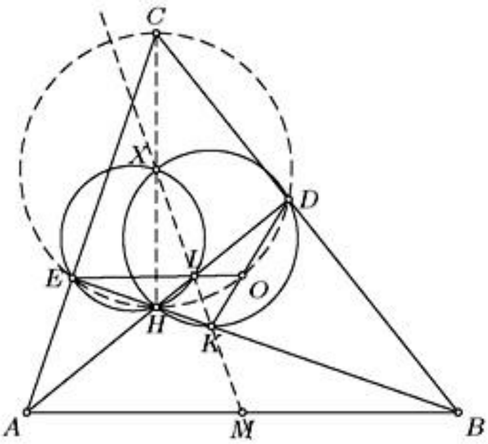
$$\begin{aligned} 90^\circ - \measuredangle KDE &= 90^\circ - \measuredangle ODE = \measuredangle XEO \\ &= \measuredangle XEL = \measuredangle XHD = \measuredangle XKD \end{aligned}$$

(сите агли се ориентирани), па затоа $XK \perp DE$. Аналогно $XL \perp DE$, т.е. K и L лежат на симетралата на отсечката DE, па затоа $DEHO$ е рамнокрак трапез, што значи дека D,E,O,H лежат на една кружница.

Од друга страна, ако O лежи на кружницата HDE, значи на кружницата над дијаметар CH, периферните агли над EH и OD се еднакви ($\measuredangle ECH = \measuredangle OCD$), па $DEHO$ е рамнокрак трапез и оттука $\overline{DL} = \overline{EL}$. Сега, имаме

$$\measuredangle EXH = \measuredangle ELH = 2\measuredangle EDH$$

и аналогно $\measuredangle DXH = 2\measuredangle DEH$, па затоа X е центар на кружницата $DEHO$. Според тоа, X е центар на кружницата ODE ако и само ако D,E,O,H лежат на една кружница.



Ако точките D,E,O,H лежат на една кружница, тогаш точките K,L и M лежат на симетралата на отсечката DE, со што едната импликација на задачата е докажана.

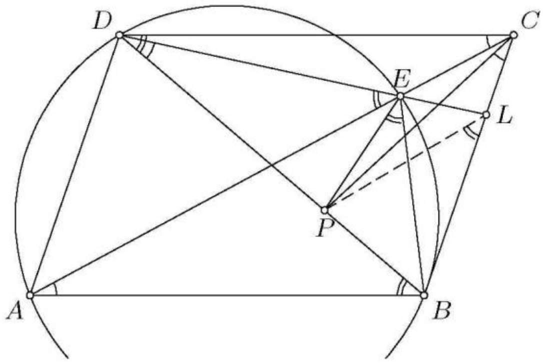
Сега да претпоставиме дека O лежи надвор од кружницата $CDHE$ (случајот кога O е внатре во кружницата се разгледува на ист начин). Бидејќи $CO \perp DE$ важи $\overline{DL} > \overline{LE}$ и $\overline{EK} > \overline{KD}$, т.е. K и L лежат на различни страни на симетралата на отсечката DE, а M припаѓа на оваа симетрала. Според тоа, ако K,L и M се колинеарни, M мора да се наоѓа меѓу K и L. Следува дека една од точките K и L е надвор од $\triangle ABC$, а другата внатре во триаголникот. Меѓутоа, кога O е надвор од четириаголникот $ABDE$, двете точки K и L се надвор од триаголникот, а во спротивно двете се внатре во триаголникот. Ова е противречност со претпоставката дека M лежи на правата KL, со што е докажана другата импликација.

21. Нека P е точка на дијагоналата BD на паралелограмот $ABCD$ таква што $\measuredangle PCB = \measuredangle ACD$. Кружницата опишана околу триаголникот ABD ја сече правата AC во точките E и A. Докажи дека $\measuredangle AED = \measuredangle PEB$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме кога $\measuredangle BAC \leq 90^\circ$. Другиот случај се докажува аналогно. Нека правите DE и BC се сечат во точката L. Четириаголникот $CDPL$ е тетивен бидејќи $\measuredangle PDL = \measuredangle PCL$, од каде добиваме

$$\measuredangle PLE = \measuredangle PCD = \measuredangle BCA = \measuredangle DAC = \measuredangle DBE = \measuredangle PBE,$$

па затоа и четириаголникот $BPEL$ е тетивен.



Од тетивноста на овие четириаголници конечно добиваме

$$\measuredangle PEB = \measuredangle PLB = \measuredangle PDC = \measuredangle DBA = \measuredangle DEA.$$

22. Во $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) впишаната кружница, со центар во точката I, ја допира страната BC во точката D. Нека M е средината на отсечката BC. Докажи дека нормалите повлечени од точките M и D соодветно на правите AI и MI се сечат на правата која ја содржи висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето A.

Решение. Нека нормалите од M и D повлечени соодветно на AI и MI се сечат во точката S и нека J е точката во која правата MI ја сече висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Доволно е да се докаже дека $\overline{AJ} = \overline{ID}$. Навистина, тогаш ќе следува дека четириаголникот $AJDI$ е паралелограм, па затоа ќе важи $MS \perp DJ$. Така D е ортоцентар на $\triangle MSJ$ и оттука $JS \perp MD$, т.е. $AS \perp BC$.

Нека H е подножјето на висината повлечена од темето A, а F е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ со страната BC. Ако $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ и $\overline{AB} = c$, тогаш

$$\overline{BF} = \frac{ac}{b+c},\ \overline{BD} = \frac{a-b+c}{2} \text{ и } \overline{BH} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a},$$

па затоа

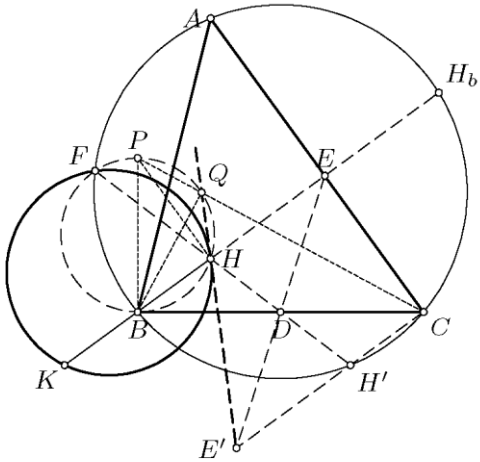
$$\overline{FH} = \overline{BF} - \overline{BH} = \frac{|b-c|((b+c)^2-a^2)}{2a(b+c)} \text{ и } \overline{FD} = \overline{BF} - \overline{BD} = \frac{|b-c|(b+c-a)}{2(b+c)}.$$

Според тоа, $\frac{\overline{AJ}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FH}} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{\overline{ID}}{\overline{AH}}$, од каде следува $\overline{AJ} = \overline{ID}$.

23. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) и нека F ($F \not\equiv A$) е точка на опишаната кружница околу овој триаголник за која важи $\measuredangle AFH = 90^\circ$. Точката K е централно симетрична слика на точката H во однос на точката B, точката P е таква што важи $\measuredangle PHB = \measuredangle PBC = 90^\circ$, а точката Q е подножје на нормалата повлечена од точката B на правата CP. Докажи дека правата HQ ја допира опишаната кружница околу $\triangle FHK$.

Решение. *Прв начин*. Нека E е подножјето на висината повлечена од темето B, а H' и E' се соодветно точките симетрични на точките H и E во однос на средината D на страната BC. Бидејќи $\measuredangle AFH' = 90^\circ$, точките H', D, H и F се колинеарни. Со H_b да ја означиме точката симетрична на H во однос на AC. Точките H' и H_b припаѓаат на опишаната кружница Ω на триаголникот ABC бидејќи важи

$$\measuredangle AH_bC = \measuredangle AHC = 180^\circ - \measuredangle ABC \text{ и } \measuredangle BH'C = \measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC.$$



Од $\overline{FH} \cdot \overline{HH'} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}$ следува дека $\triangle FHB \sim \triangle H_bHH'$. Оттука триаголниците FHB и EHD се слични, а при оваа сличност на точката K и соодветствува точката H'. Според тоа, $\triangle FHK \sim \triangle EHH'$, па како $EHE'H'$ е паралелограм важи $\measuredangle KFH = \measuredangle HEH' = \measuredangle KHE'$, што значи дека правата HE' ја допира кружницата FHK.

Конечно, четириаголниците $BE'CQ$ и $BPQH$ се тетивни, па затоа важи

$$\measuredangle BQE' = \measuredangle BCE' = \measuredangle CBH = \measuredangle BPH = \measuredangle BQH ,$$

па затоа точките Q, H и E' се колинеарни, со што доказот е завршен.

Втор начин. Точките H и Q лежат на кружницата γ со дијаметар BP. Исто така,

$$\measuredangle BFH = \measuredangle BFA - 90^\circ = 90^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle CBE = \measuredangle BPH ,$$

па затоа и точката F припаѓа на γ. Според тоа,

$$\measuredangle FBK = 180^\circ - \measuredangle HBF = \measuredangle FQH .$$

Нека D е средина на страната BC, а H' е симетричната точка на точката H во однос на D. Бидејќи D е центар на опишаната кружница на $\triangle BQC$, важи

$$\overline{DQ}^2 = \overline{DB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DH}' \cdot \overline{DF} = \overline{DH} \cdot \overline{DF} ,$$

па затоа $\triangle DHF \sim \triangle DQF$ и $\triangle DHB \sim \triangle DBF$. Според тоа,

$$\frac{\overline{FQ}}{\overline{QH}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BK}} .$$

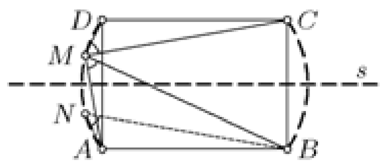
Значи, триаголниците FQH и FBK се слични, па затоа

$$\measuredangle FKH = \measuredangle FKB = \measuredangle FHQ ,$$

што значи дека HQ ја допира кружницата FHK.

24. Нека $ABCD$ е правоаголник. Во појасот меѓу правите AB и CD определи множество точки од кои отсечките AB и CD се гледаат под ист агол.

Решение. Сите точки на симетралата s на отсечката BC го задоволуваат условот на задачата. Нека претпоставиме дека за точката $M \notin s$ важи $\measuredangle AMB = \measuredangle CMD$. Нека N е симетричната точка на M во однос на s. Тогаш $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB$, па точките A, B, M, N лежат на иста кружница. Оваа кружница ги содржи и точките C и D, па тоа е опишаната кружница k околу правоаголникот $ABCD$. Јасно, сите точки на лаците BC и DA на кружницата k го задоволуваат условот на задачата. Според тоа, бараното геометриско место е унијата на овие два лаци и правата s.

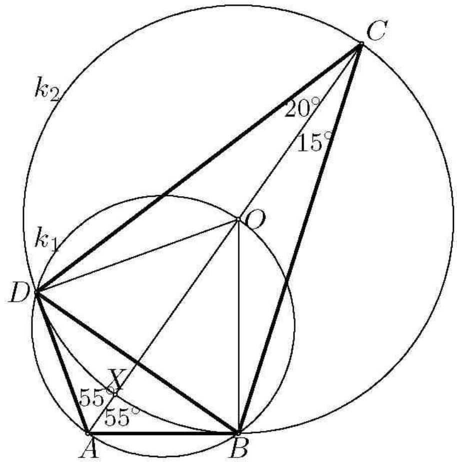


25. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\measuredangle BAC = \measuredangle DAC = 55^\circ, \measuredangle DCA = 20^\circ, \measuredangle BCA = 15^\circ .$$

Определи ја големината на $\measuredangle DBA$.

Решение. Нека O е пресечнатѕа точка на опишаната кужница на $\triangle ABD$ (k_1) и правата AC. Тогаш $\overline{BO} = \overline{DO}$ (тетиви над исти агли во k_1) и



$$\measuredangle BOD = 180^\circ - \measuredangle BAD = 70^\circ .$$

Значи, кружницата со центар O и радиус OD (k_2) минува низ точката B и како $\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle BOD$ таа минува и низ точката C (според теоремата за централен и периферен агол).

Нека X е пресечната точка на правата AC и k_2. Тогаш $\measuredangle DBA = \measuredangle DOA$ (агли на AD во k_1), т.е.

$$\measuredangle DBA = \measuredangle DOX = 2\measuredangle DCX = 2\measuredangle DCA = 40^\circ ,$$

($\measuredangle DOX$ е два пати поголем од $\measuredangle DCX$ како централен и периферен агол во k_2).

26. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\measuredangle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A. Докажи дека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$ ако и само ако $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ$.

Решение. $\Rightarrow$: Нека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB = \varphi$ и I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABH$. Тогаш $\measuredangle AHI = \frac{1}{2}\measuredangle AHB = 45^\circ$ и $\measuredangle AIL = 180^\circ - \measuredangle AIB = 45^\circ$. Оттука

$$\begin{aligned}\measuredangle LAI + \measuredangle LHI &= (180^\circ - \measuredangle ALI - \measuredangle AIL) + (\measuredangle AHL + \measuredangle AHI)\\ &= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ.\end{aligned}$$

Според тоа, четириаголникот $AIHL$ е тетивен, па затоа $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме $\measuredangle BAC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \measuredangle ABC)$. Ако во последното равенство замениме $\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB$, добиваме $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ$.

$\Leftarrow$: Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите во $\triangle ABC$. Нека

$\alpha = 90^\circ + \gamma$. Тогаш лесно се покажува дека AL е надворешна симетрала на агол за $\triangle ABH$. Според тоа, L е центар на припишаната кружница за $\triangle ABH$ кон страната AH. Сега имаме $\measuredangle AHL = \frac{1}{2}\measuredangle CHA = 45^\circ$. Од друга страна

$$\measuredangle ALB = 180^\circ - \measuredangle BAL - \measuredangle ABL = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}$$
$$= 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ.$$

Според тоа, $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$.

27. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се конструирани точки E и F такви што DE е симетрала на $\measuredangle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C нормална на DE ги сече страната AD во точката L и дијагоналата BD во точката H. Нека DE ја сече AC во точката N.

а) Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $ABCD$ е квадрат.

Решение. а) Нека $M \in DE \cap CL, K \in DF \cap CL$. Тогаш DM е висина и симетрала на агол во $\triangle LKD$, па затоа $\overline{DK} = \overline{DL}$. Понатаму, $\triangle LKD \sim \triangle CKF$, па затоа $\overline{KF} = \overline{CF}$. Конечно, $\overline{AE} = \overline{DF} - \overline{CF} = \overline{DF} - \overline{KF} = \overline{DK} = \overline{DL}$.

б) Од сличностите $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim \triangle LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ следува

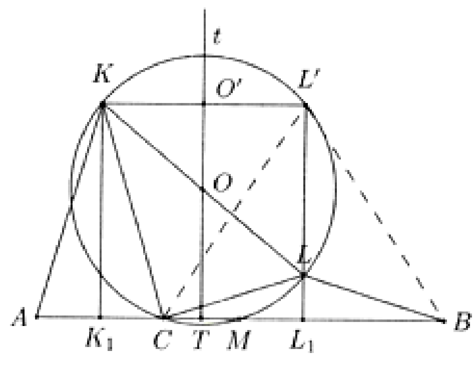
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{BC}}.$$

Бидејќи $\overline{AE} = \overline{DL}$, добиваме $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Од б) следува дека $ABCD$ е ромб, па затоа $DB \perp AC$, што значи дека H е ортоцентар во $\triangle DNC$. Оттука $HN \perp DC$, па затоа $AD \perp DC$ и $ABCD$ е квадрат.

28. Точката M е средина на отсечката AB, а точката C е внатрешна за AB и $C \neq M$. Во едната полурамнина во однос на правата AB е конструирани рамнокраки триаголници ACK $(\overline{AK} = \overline{CK})$ и BCL $(\overline{BL} = \overline{CL})$, такви што K, C, L и M лежат на една кружница k. Докажи дека $KL \parallel AB$ или $KA \perp LB$.

Решение. Нека K_1 и L_1 се средините на AC и BC. Тогаш $KK_1 \parallel LL_1$, т.е. KK_1L_1L е трапез. Нека T е средината на CM и $\overline{AC} < \overline{BC}$. Тогаш



.

$$\overline{CM}=\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{2},\ \overline{CT}=\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{4},$$
$$\overline{K_1T}=\frac{\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{4}=\frac{\overline{BC}+\overline{AC}}{4},$$
$$\overline{L_1T}=\frac{\overline{BC}}{2}-\frac{\overline{BC}-\overline{AC}}{4}=\frac{\overline{BC}+\overline{AC}}{4}.$$

Според тоа, T е средина на K_1L_1. Нека t е средната линија на KK_1L_1L $(T\in t, t\perp K_1L_1)$. Од T е средина на тетивата CM и $t\in CM$, следува дека t е дијаметар на k.

Ако $t\cap KL=O$, тогаш O е средина на тетивата KL. Според тоа, имаме две можности:

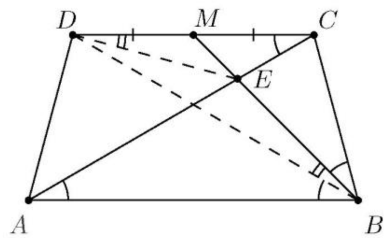
1) $t\perp KL$ и тогаш $KL\parallel AB$,

2) KL е дијаметар на k. Тогаш $\measuredangle KCL=90^\circ$ и $\measuredangle KCA+\measuredangle LCB=90^\circ$. Но, $\measuredangle KAC=\measuredangle KCA$ и $\measuredangle LBC=\measuredangle LCB$, па затоа $\measuredangle KAC+\measuredangle LBC=90^\circ$, т.е. $KA\perp LB$.

29. Даден е правоаголен рамнокрак $\triangle ABC$ со хипотенуза AB. Точките P и Q од отсечката AB се такви што $\measuredangle PCQ=45^\circ$ и P е меѓу A и Q. Опишаните кружници околу триаголниците ACQ и BCP по втор пат се сечат во точката R. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$ лежи на правата CR.

Решение. Четириаголникот $ARQC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle QRC=45^\circ$ и аналогно $\measuredangle PRC=45^\circ$. Нека S е втората пресечна точка на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и правата CR. Од $\measuredangle QRC=\measuredangle PRC=45^\circ$ следува дека $\overline{SP}=\overline{SQ}$ и $\measuredangle PSQ=90^\circ$. Според тоа, S лежи на симетралата на отсечката PQ и $\measuredangle PSQ=90^\circ$. Ако O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$, тогаш O лежи на симетралата на отсечката PQ и $\measuredangle POQ=90^\circ$, како централен агол. Според тоа, точките S и O се совпаѓаат.

30. Даден е рамнокрак трапез $ABCD\,(AB\parallel CD)$. Нека M е средината на CD и E е пресечната точка на AC и BM. Ако $\measuredangle MBC=\measuredangle ABD$, докажи дека $\overline{AD}=\overline{DE}$.



Решение. Од условот следува дека

$$\measuredangle MBC=\measuredangle ABD=\measuredangle BAC=\measuredangle ACD$$

и затоа $\triangle MBC\sim\triangle MCE$. Според тоа,

$$\overline{MD}^2=\overline{MC}^2=\overline{ME}\cdot\overline{MB}$$

и затоа $\triangle MBD\sim\triangle MDE$. Добивме дека

$\measuredangle MBD = \measuredangle MDE$. Конечно,

$$\measuredangle AED = \measuredangle ACD + \measuredangle MDE = \measuredangle MBC + \measuredangle MBD = \measuredangle CBD = \measuredangle CAD,$$

па затоа $\triangle AED$ е рамнокрак, со што доказот е завршен.

31. Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\measuredangle ACB = 90^\circ$, H е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C и O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Докажи дека, ако правите AO и DH се заемно нормални, тогаш $\overline{AC} = \overline{AD}$.

Решение. Имаме

$$90^\circ = \measuredangle OAH + \measuredangle AHD = 90^\circ - \measuredangle ADB + \measuredangle AHD.$$

Според тоа, $\measuredangle ADB = \measuredangle AHD$ и $\triangle ADB \sim \triangle AHD$. Оттука следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, па затоа $\overline{AD}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2$, т.е. $\overline{AC} = \overline{AD}$.

32. Точките A_1, B_1 и N се внатрешни соодветно за страните BC, CA и AB на остроаголниот $\triangle ABC$, при што четириаголникот A_1CB_1N е паралелограм, а четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен. Опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C$ по втор пат ја сече CN во точката M. Докажи дека правата A_1B_1 е заедничка тангента на кружниците опишани околу триаголниците AMN и BMN.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Означуваме $\measuredangle ACN = \varphi$ и $\measuredangle BCN = \psi$. Тогаш од условот на задачата следува $\measuredangle MA_1B_1 = \varphi$ и $\measuredangle MB_1A_1 = \psi$, како и $\measuredangle MNA_1 = \varphi$ и $\measuredangle MNB_1 = \psi$.

Имаме $\measuredangle ANC = \beta + \psi$ како надворешен за $\triangle BCN$. Освен тоа, бидејќи четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен важи $\measuredangle B_1A_1C = \alpha$, па затоа

$$\measuredangle MA_1B = 180^\circ - (\measuredangle MA_1B_1 + \measuredangle B_1A_1C) = 180^\circ - (\alpha + \varphi) = \beta + \gamma - \varphi = \beta + \psi = \measuredangle ANC$$

Според тоа, четириаголникот NBA_1M е тетивен. Оттука и од $\measuredangle MNA_1 = \measuredangle MA_1B_1 = \varphi$ следува дека правата A_1B_1 е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BMN$.

Аналогно се докажува дека четириаголникот NMB_1A е тетивен и дека правата A_1B_1 е тангента на опишаната кружница околу $\triangle AMN$.

33. Впишаната кружница во остроаголниот $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките P и Q. Медијаната CM ја сече отсечката PQ во точката F. Докажи, дека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ ако и само ако BF е симетрала на $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ и впишаната кружница во $\triangle ABC$ е со центар I и ја допира страната BC во точката K. Тогаш $\triangle CMB$ и $\triangle KPB$ се рамнокраки и нивните основи CM и KP се паралелни. Точките C, Q и K лежат на кружницата со дијаметар CI и бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle QFC = \measuredangle QPK &= 180^\circ - (\measuredangle APQ + \measuredangle BPK)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle ABC)\\ &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle ACB\end{aligned}$$

и $\measuredangle QKC = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ACB$ следува дека точката F лежи на истата кружница. Тогаш $IF \perp CM$ и од $BI \perp CM$ следува дека B, I и F се колинеарни, т.е. BF е симетрала на $\measuredangle ABC$.

Нека BF е симетрала на $\measuredangle ABC$, т.е. точките B, I и F се колинеарни. Имаме $\measuredangle KQP = \measuredangle KPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle BIK$, што значи дека четириаголникот $FIKQ$ е вписан во кружницата со дијаметар CI. Тогаш $\measuredangle IFC = 90^\circ$ и BF истовремено е нормална на KP и CM, т.е. $KP \| CM$. Според тоа, $\overline{CM} = \overline{CB}$ и $\overline{AB} = 2\overline{BC}$.

34. Во конвексен четириаголник $ABCD$ со I и J се означени центрите на вписаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, соодветно. Правата BI ги сече страната AD и опишаната кружница околу $\triangle ABD$ соодветно во точките M и P, а правата BJ ги сече страната CD и опишаната кружница околу $\triangle CBD$ соодветно во точките N и Q. Докажи дека $MN \| PQ$ ако и само ако $IJ \| PQ$.

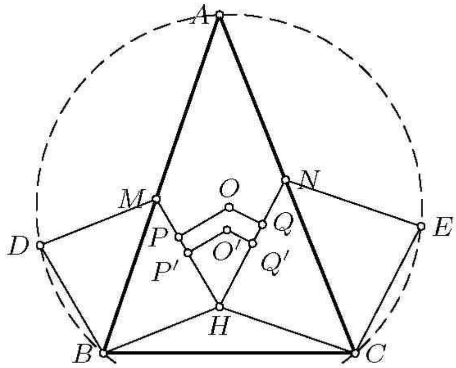
Решение. Имаме: $\overline{BM}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{DB} - \overline{AM}\cdot\overline{DM},\quad \overline{BM}\cdot\overline{PM} = \overline{AM}\cdot\overline{DM}$, па затоа

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{DB}}{\overline{AM}\cdot\overline{DM}} - 1 = (\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}})^2 - 1.$$

Аналогно, $\frac{\overline{BN}}{\overline{QN}} = (\frac{\overline{DB}}{\overline{DN}})^2 - 1$ и затоа $MN \| PQ$ ако и само ако $\frac{\overline{BM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{QN}}$ ако и само ако $\overline{DM} = \overline{DN}$. Понатаму, да забележиме дека $\overline{IP} = \overline{DP}$ и $\overline{JQ} = \overline{DQ}$. Освен тоа, $\triangle DPM \sim \triangle BPD$ и $\triangle DQN \sim \triangle BQD$. Затоа $IJ \| PQ$ ако и само ако $\frac{\overline{IP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{JQ}}{\overline{BQ}}$ ако и само ако $\frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{BQ}}$ ако и само ако $\frac{\overline{DM}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{BD}}$ ако и само ако $\overline{DM} = \overline{DN}$.

35. Во остроаголен триаголник ABC со строго најмала страна BC, H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот AHC ја сече правата AB во точката $M \not\equiv A$, а опишаната кружница околу триаголникот AHB ја сече правата AC во точка $N \not\equiv A$. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот MNH лежи на правата OH.

Решение. Нека O' е центар на кружницата MNH, P и P' се соодветно подножјата на нормалите повлечени од O и O' на HM, а Q и Q' се соодветно подножјата на нормалите повлечени од O и O' на HN (цртеж десно). Доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{HP'}}{\overline{HP}} = \frac{\overline{HQ'}}{\overline{HQ}}$.



Нека D и E се симетричните точки на точката H во однос на AB и AC, соодветно.
Точките D и E припаѓаат на опишаната кружница на триаголникот ABC. Бидејќи $\measuredangle HMB = \measuredangle HCA = \measuredangle HBM$, важи $\overline{HM} = \overline{HB}$, па затоа $HBDM$ е ромб. Аналогно $HCEN$ е ромб и притоа $HDBM \sim HCEN$, бидејќи важи $\measuredangle BHM = \measuredangle CHN = 2\measuredangle A$. Понатаму, бидејќи $OP \perp BD$ и $OQ \perp CE$, точките P и Q припаѓаат на симетралите на отсечките BD и CE, соодветно. Точките P' и Q' се средини на отсечките HM и HN, соодветно. Според тоа, на точките P, P' во ромбот $HBDM$ соодветствуваат точките Q, Q' во ромбот $HCEN$, па затоа важи $\frac{\overline{HP'}}{\overline{HP}} = \frac{\overline{HQ'}}{\overline{HQ}}$.

36. Нека P е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC таква што $\measuredangle BAP = \measuredangle ACP$ и $\measuredangle CAP = \measuredangle ABP$. Нека M и N се центрите на вписаните кружници во триаголниците ABP и ACP, соодветно. Ако R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот AMN, докажи дека важи

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AP}}.$$

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот AMN. Тогаш $\measuredangle MON = 2\measuredangle MAN = \measuredangle BAC$. Бидејќи PM и PN се соодветно симетрали на $\measuredangle APB$ и $\measuredangle APC$, важи

$$\measuredangle MPN = \measuredangle APB = 180^\circ - \measuredangle ABP - \measuredangle BPA = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

што значи дека четириаголникот $OPMN$ е тетивен. Од $\overline{OM} = \overline{ON}$ следува дека PO е симетрала на $\measuredangle MPN$, па оттука следува дека точката O лежи на отсечката PA. Исто така, бидејќи M и N се центри на вписаните кружници на сличните триаголници APB и CPA, важи $\overline{MP}:\overline{NP}=\overline{AP}:\overline{BP}$. Бидејќи $\measuredangle MPN=\measuredangle APB$, заклучуваме дека триаголниците NPM, APB и CPA се слични, од каде што следува $\measuredangle BAP=\measuredangle MNP=\measuredangle MOP$, па затоа важи $MO \parallel AB$ и $NO \parallel CA$. Со E да ја означиме пресечната точка на правите PM и AB, а со r радиусот на вписаната кружница во триаголникот ABP. Сега

$$\frac{\overline{AP}}{R}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{EP}}{\overline{EM}}=\frac{P_{\triangle APB}}{P_{\triangle AMB}}=\frac{r(\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{AB})}{r\overline{AB}}=1+\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=1+\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}},$$

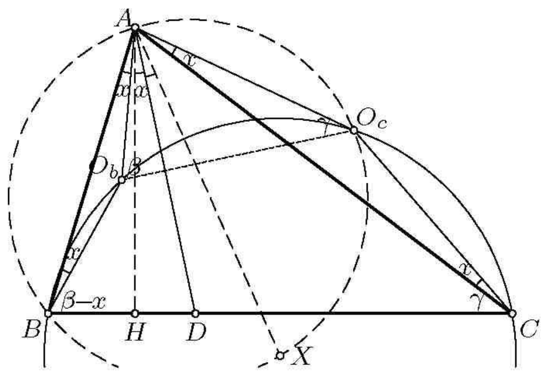
од каде добиваме $\frac{1}{R}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AP}}$.

37. За точката D на страната BC на триаголникот ABC, со O_b и O_c да ги означиме центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACD, соодветно. Нека претпоставиме дека точките B, C, O_b, O_c припаѓаат на кружница со центар X. Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC, докажи дека $\measuredangle DAX=\measuredangle DAH$.

Решение. Аглите на триаголникот ги означуваме вообичаено α, β, γ. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката D е меѓу точките H и C. Бидејќи $x=\measuredangle O_bAB=\measuredangle O_cAC=90^\circ-\measuredangle ADB$, триаголниците AO_bB и AO_cC се слични и еднакво ориентирани. Оттука следува $\measuredangle O_bAO_c=\alpha$ и $\frac{\overline{AO_b}}{\overline{AO_c}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, па затоа $\triangle AO_bO_c \sim \triangle ABC$. Бидејќи четириаголникот BCO_cO_b е тетивен, добиваме

$$\begin{aligned}180^\circ &= \measuredangle O_bBC+\measuredangle CO_cO_b \\ &= (\beta-x)+\measuredangle CO_cA-\measuredangle O_bO_cA \\ &= (\beta-x)+(180^\circ-2x)-\gamma.\end{aligned}$$

Според тоа, $\measuredangle HAD=x=\frac{\beta-\gamma}{3}$.



Понатаму,

$$\measuredangle BXO_C = 2\measuredangle BCO_C = 2(\gamma + x)$$

и $\measuredangle O_C AB = \alpha + x$, од каде добиваме

$$\measuredangle BXO_C + \measuredangle O_C AB \ = 2\gamma + \alpha + 3x = 180^\circ ,$$

т.е. четириаголникот $ABXO_C$ е тетивен. Сега,

$$\measuredangle BAX = \measuredangle BO_C X = 90^\circ - \measuredangle BCO_C = 90^\circ - \gamma - x$$

и

$$\measuredangle DAX = \measuredangle BAX - \measuredangle BAD = (90^\circ - \gamma - x) - (90^\circ - \beta + x) = x = \measuredangle HAD .$$

38. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\measuredangle ABF = \measuredangle DCE$, определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Бидејќи точката D е надворешна за ω, заклучуваме дека $\measuredangle ABC$ е остар. Нека A' е втората пресечна точка на DC и ω. Бидејќи $\overline{AC} < \overline{BC}$, имаме $\measuredangle DCA = \measuredangle CAB > \measuredangle CBA = \measuredangle DA'A$ и затоа C е меѓу D и A'. Сега од $180^\circ - \measuredangle ECA' = \measuredangle ECD = \measuredangle ABF$ следува дека лаците ACF и ECA' се еднакви.

Нека l е симетралата на $\measuredangle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω, правата l минува низ центарот O на ω.

Да разгледаме симетрија во однос на l . Бидејќи l минува низ O, кружницата ω се пресликува во самата себе. Од $ACF = ECA'$ следува дека A се пресликува во A'. Оттука $\measuredangle DAA' = \measuredangle DA'A$. Од друга страна, A' припаѓа на ω, па затоа $\measuredangle AA'C = \measuredangle ABC = \measuredangle ADA'$. Според тоа, $\triangle DAA'$ е рамностран и затоа $\measuredangle ABC = 60^\circ$

39. Даден е $\triangle ABC\ (\overline{AC} > \overline{BC})$ со средна отсечка MN ($M \in AC, N \in BC$). Симетралата на $\measuredangle B$ ја сече правата MN во точката P . Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ја допира страната BC во точката Q . Нормалите во точките P и Q соодветно на MN и BC се сечат во точката R . Нека S е пресечната точка на правите AB и RN .

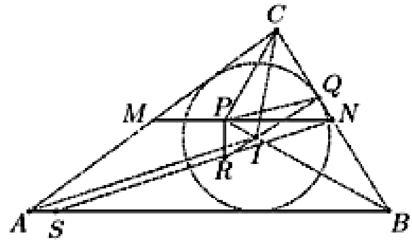
а) Докажи дека четириаголникот $PCQI$ е тетивен.

б) Изрази ја должината на отсечката BS преку должините a,b,c на страните на $\triangle ABC$.

Решение. а) Очигледно

$$\measuredangle ABP = \measuredangle BPN = \measuredangle PBN = \frac{\beta}{2} .$$

Според тоа, $\overline{BN}=\overline{CN}=\overline{PN}$, па затоа $\measuredangle BPC=90^\circ$. Но, $\measuredangle CQI=90^\circ$, па затоа четириаголникот $PCQI$ е тетивен.



б) Имаме,

$$\measuredangle PCI=\measuredangle PCB-\measuredangle ICB=(90^\circ-\tfrac{\beta}{2})-\tfrac{\gamma}{2}=\tfrac{\alpha}{2}.$$

Бидејќи $\measuredangle RPN=\measuredangle IQN=90^\circ$, четириаголникот $RPQN$ е тетивен. Оттука и од а) добиваме

$$\measuredangle NSB=\measuredangle PNR=\measuredangle PQR=\measuredangle PCI=\tfrac{\alpha}{2}.$$

Според тоа, AI и SN се паралелни, па затоа $\frac{\overline{BS}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{BL}}$, каде L е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ со BC. Заменувајќи во горното равенство добиваме $\frac{\overline{BS}}{c}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}}$, т.е. $\overline{BS}=\frac{b+c}{2}$.

40. На страната AB на $\triangle ABC$ зедмени се точки D и E, а на страната AC земена е точка F така што $\overline{AD}=\overline{AC},\ \overline{BE}=\overline{BC}$ и $\overline{AF}=\overline{AE}$. Ако $\measuredangle ACB=3\measuredangle EFD$ определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Од $\overline{AD}=\overline{AC},\ \overline{BE}=\overline{BC}$ и $\overline{AF}=\overline{AE}$ следува дека четириаголникот $EDCF$ е рамнокрак трапез, па затоа е тетивен. Значи,

$$\begin{aligned}\measuredangle EFD=\measuredangle ECD&=180^\circ-\measuredangle ADC-\measuredangle BEC\\&=180^\circ-90^\circ+\tfrac{1}{2}\measuredangle A-90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle B\\&=90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle ACB.\end{aligned}$$

Добиваме, $\measuredangle ACB=3\measuredangle EFD=270^\circ-\frac{3}{2}\measuredangle ACB$, па така $\frac{5}{2}\measuredangle ACB=270^\circ$, т.е. $\measuredangle ACB=108^\circ$

41. Нека P е внатрешна точка за страната AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Околу $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ соодветно се опишани кружници k_1 и k_2, при што k_1 по втор пат ја сече BC во точката M, а k_2 по втор пат ја сече AC во точката

N. Тангентата на k_1 во P по втор пат ја сече k_2 во точката S, а тангентата на k_2 во точката P по втор пат ја сече k_1 во точката T. Познато е дека правите AT, BS и CP се сечат во една точка. Докажи дека точките S, M, N и T се колинеарни.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите во $\triangle ABC$. Нека AT, BS и CP се сечат во точката Q. Имаме $\measuredangle CPS = \measuredangle CBS = \alpha$ и $\measuredangle CPT = \measuredangle CAT = \beta$. Затоа $\measuredangle BAQ = \measuredangle ABQ = \gamma$ и значи $\measuredangle AQB = 180^\circ - 2\gamma$.

Бидејќи $\frac{PBS}{2} = \measuredangle PCS = \measuredangle ABQ = \gamma$ и аналогно $\measuredangle PCT = \gamma$, добиваме $\measuredangle TCP = 2\gamma$, што значи дека четириаголникот $TQSC$ е тетивен. Оттука следува $\measuredangle QST = \measuredangle QTS = \gamma$. Освен тоа, од $B, C, S, N \in k_2$ следува $\measuredangle NSB = \measuredangle NCB = \gamma$ и затоа N припаѓа на правата ST. Аналогно се докажува дека M припаѓа на правата ST.

42. Точката M е средина на страната AB на $\triangle ABC$. Кружницата низ точките C и M, која ја допира страната AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q. Ако K и L се средините на отсечките CP и CQ докажи дека $\measuredangle CKM = \measuredangle CLM$.

Решение. Нека D е точка на полуправата CM таква што $\overline{CM} = \overline{MD}$. Тогаш MK е средна линија во $\triangle CPD$ и ML е средна линија во $\triangle CQD$. Според тоа, $\measuredangle CKM = \measuredangle CPD$ и $\angle CLM = \measuredangle CQD$ и доволно е да докажеме дека $\triangle APD \sim \triangle BQD$. Да забележиме дека $\measuredangle PAD = \measuredangle QBD$ како спротивни агли во паралелограмот $ADBC$. Освен тоа, $\overline{AM}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AC}$ и $\overline{BM}^2 = \overline{BQ} \cdot \overline{BC}$, па затоа

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BD}}.$$

Според тоа, $\triangle APD \sim \triangle BQD$, од каде што следува тврдењето на задачата.

43. Определи ги сите точки E во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со следново својство: за секои две заемно нормални прави низ E, кои четирите страни на квадратот ги сечат во внатрешни точки, три од тие точки се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Нека E е точка со саканото својство. Да разгледаме две заемно нормални прави MN и KL низ E, така што $MN \parallel BC$. Тогаш две соседни страни на четириаголникот $KMLN$ се еднакви, што значи дека E ја преполовува или MN или KL. Ако тоа е KL, тогаш очигледно E не може да ја преполовува MN и нека $\overline{EN} < \overline{EM}$. Во овој случај $\measuredangle KNL$ е тап и рамностраниот триаголник е $\triangle KML$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{KL} = \overline{MN}$, триаголниците MLN

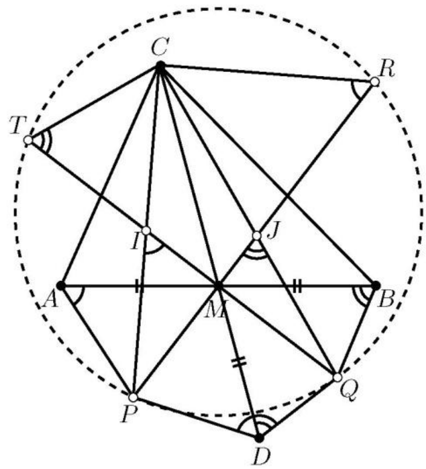
и MKN се рамнокраки со агол при основата 75°, па затоа $\measuredangle KLN=\measuredangle LKN =15^\circ$. Лесно се докажува дека $\triangle KLN\cong\triangle CDE$, од каде следува дека E е теме на рамнокрак триаголник со основа CD и агол при основата 15°.

Од претходните разгледувања следува дека само E и трите темиња на аналогните триаголници при другите три страни на квадратот може да го имаат саканото својство.

Нека сега E е една од овие четири точки, на пример врвот на рамнокракиот триаголник со основа CD и агол при основата 15°. Нека $PQ\perp RS$, при што точките P,Q,R и S се внатрешни соодветно за страните AB,BC,CD и DA на квадратот $ABCD$. Бидејќи четириаголникот $PBRE$ е тетивен, имаме $\measuredangle PRQ=\measuredangle PBE=60^\circ$. Аналогно $\measuredangle PSR=60^\circ$, што значи дека $\triangle PRS$ е рамностран.

44. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средина на страната AB. Ако со P и R ги означиме соодветно центрите на припишаните кружници на $\triangle AMC$ соодветно кон страните AM и CM, а со Q и T центрите на припишаните кружници на $\triangle BMC$ соодветно кон страните BM и CM, докажи дека точките P,Q,R и T лежат на една кружница.

Решение. Нека I и J се центрите на впишаните кружници соодветно на $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$, а D е точка на полуправата CM таква што $\overline{MD}=\overline{MA}=\overline{MB}$. Бидејќи четириаголниците $APMI$ и $CRMI$ се тетивни (во кружници со дијаметри PI и RI соодветно) и освен тоа $\triangle AMP\cong\triangle DMP$, добиваме $\measuredangle MDP=\measuredangle MAP=\measuredangle MIP=\measuredangle MRC$. Значи, четириаголникот $CPDR$ е тетивен. Аналогно, и четириаголникот $CQDT$ е тетивен. Затоа



$$\overline{MP}\cdot\overline{MR}=\overline{MD}\cdot\overline{MC}=\overline{MQ}\cdot\overline{MT},$$

т.е. точките P,Q,R и T лежат на една кружница, со што задачата е решена.

45. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $BD\perp AD$. Точките A_1 и A_2 се подножјата на нормалите повлечени од темето A кон правите CD и BC. Отсечката A_1A_2 ја сече AB во точка P, а $AC\cap BD=O$. Ако правите OP и

AD се сечат во точката M, докажи дека точките A_1, O, A_2 и M лежат на една кружница.

Решение. Бидејќи AA_2BD е правоагоник, важи $\overline{A_2B} = \overline{AD} = \overline{BC}$ и затоа B е средина на A_2C. Но, $BP \| CA_1$, па затоа BP е средна линија во $\triangle CA_1A_2$. Четириаголникот AA_2CA_1 е тетивен со центар O (средина на хипотенузата AC во $\triangle ACA_1$ и $\triangle ACA_2$), па затоа OP е симетрала на A_1A_2, $\triangle MA_2O \cong \triangle MA_1O$ и

$$\measuredangle MA_1O = \measuredangle MA_2O.$$

Останува да докажеме дека овие агли се прави, за што е доволно да докажеме дека четириаголникот MA_2OD е тетивен и затоа $\measuredangle MA_2O = 180^\circ - \measuredangle MDO = 90^\circ$. Нека $\measuredangle DCB = \alpha$. Ако искористиме дека четириаголникот PA_2BO е тетивен (спротивни прави агли), добиваме $\measuredangle MOA_2 = \measuredangle ABA_2 = \measuredangle DCB = \alpha$. Од друга страна, DB е висина и медијана во $\triangle A_2CD$, па затоа овој триаголник е рамнокрак и како $AD \| BC$ добиваме $\measuredangle MDA_2 = \measuredangle DA_2C = \measuredangle DCA_2 = \alpha$. Од равенството $\measuredangle MOA_2 = \alpha = \measuredangle MDA_2$ следува дека четириаголникот MA_2OD е тетивен и задачата е решена.

46. Нека M и N се средини соодветно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точката P припаѓа на опишаната кружница k околу $\triangle CMN$, при што P и C се во различни полурамнии во однос на правата AB. Отсечката PA по втор пат ја сече k во точката M_1, а отсечката PB по втор пат ја сече k во точката N_1. Ако отсечките MM_1 и NN_1 се сечат во точката X, докажи дека $\measuredangle ACX = \measuredangle BCP$.

Решение. Нека $NN_1 \cap AB = X_1$. Од $\measuredangle N_1X_1B = \measuredangle N_1CM$ следува дека четириаголникот N_1X_1CB е тетивен. Оттука добиваме $\measuredangle BN_1C = \measuredangle BX_1C$, па затоа $\measuredangle AM_1C = \measuredangle AX_1C$, т.е. четириаголникот AM_1X_1C е тетивен. Значи,

$$\measuredangle X_1M_1C = \measuredangle X_1AC = \measuredangle MNC = \measuredangle MM_1C,$$

т.е. M_1, X_1 и M лежат на една права и значи $X \equiv X_1$.

Нека BP по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката K. Сега имаме $\measuredangle ACK = \measuredangle ABK = \measuredangle XCN_1$ (бидејќи четириаголникот N_1XCB е тетивен) и $\measuredangle KCP = \measuredangle BCN_1$. Од последните две равенства следува бараното равенство $\measuredangle ACX = \measuredangle BCP$.

47. Во трапез $ABCD, AB \| CD$, впишаната кружница во $\triangle ABD$ ги допира страните AB и BD соодветно во точките M и N, а впишаната кружница во

$\triangle ACD$ ги допира страните AC и DC соодветно во точките P и Q. Докажи дека пресечната точка на правите MN и PQ лежи на средната линија на трапезот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABD$ и симетралата на $\measuredangle BAC$ нека ја сече правата MN во точка S. Бидејќи

$$\measuredangle ASM = \measuredangle BMN - \measuredangle BAO,$$

добиваме $\measuredangle ASM = \frac{1}{2}\measuredangle ADB$. Според тоа, точките O, S, N и D лежат на една кружница. Тогаш $\measuredangle DSA = \measuredangle DNO = 90^\circ$. Бидејќи $ABCD$ е трапез, следува дека DS е симетрала на $\measuredangle ADC$.

На ист начин докажуваме дека симетралите на $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BAC$ се сечат на PQ. Според тоа, S е пресечната точка на правите MN и PQ. Ако T е средина на AD, тогаш $\measuredangle TSA = \measuredangle TAS = \measuredangle SAB$, што значи дека $ST \parallel AB$. Бидејќи T е средина на AD и $ST \parallel AB$, заклучуваме дека точката S лежи на средната линија на трапезот.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини AA_1, BB_1, CC_1 и ортоцентар H. Правата низ H паралелна на AB ги сече отсечките C_1B_1 и C_1A_1 соодветно во точките P и Q. Нека M е подножјето на нормалата повлечена од P на BB_1, а N е подножјето на нормалата повлечена од Q на AA_1. Со C_0 да ја означиме средината на MN. Аналогно ги дефинираме точките A_0 и B_0. Докажи дека правите AA_0, BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.

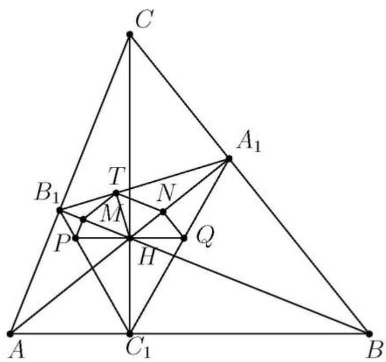
Решение. Со T да го означиме подножјето на нормалата повлечена од H на A_1B_1. Бидејќи

$$\measuredangle HPB_1 = \measuredangle BC_1B_1 = \pi - \gamma = \measuredangle A_1HB_1$$

и

$$\measuredangle HB_1P = \frac{\pi}{2} - \beta = \measuredangle HA_1B_1,$$

добиваме дека $\triangle HPB_1 \sim \triangle A_1HB_1$. Тогаш PM и HT се соодветни елементи во овие два слични триаголника, па затоа $\frac{\overline{HM}}{\overline{MB_1}} = \frac{\overline{A_1T}}{\overline{TB_1}}$. Тоа значи дека $MT \parallel HA_1$.



На иста начин добиваме дека $\triangle HQA_1 \sim \triangle B_1HA_1$ и дека $NT \parallel HB_1$. Според тоа, $MTNH$ е паралелограм, т.е. C_0 е средина на отсечката HT. Аналогно докажуваме дека A_0 и B_0 се средини на соодветните нормали HR на B_1C_1 и HS на A_1C_1.

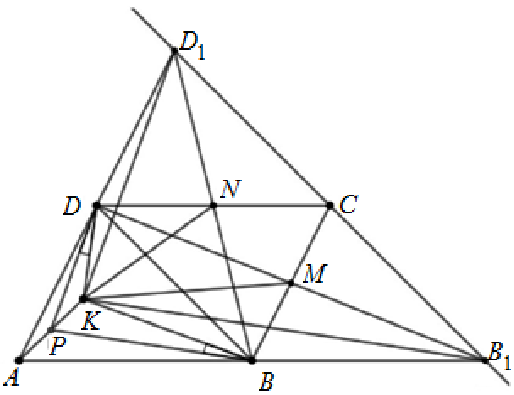
Бидејќи B_1RHT е тетивен, имаме

$$\measuredangle B_1RT = \measuredangle B_1HT = \frac{\pi}{2} - \measuredangle HB_1T = \beta = \measuredangle AB_1C_1,$$

па затоа $TR \parallel AC$. Аналогно се докажува дека $TS \parallel BC$ и $RS \parallel AB$. Според тоа, страните на $\triangle A_0B_0C_0$ се паралелни со страните на $\triangle ABC$. Оттука следува дека правите AA_0, BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.

49. Точката K е внатрешна за паралелограмот $ABCD$ и е таква што средината M на страната BC е еднакво оддалечена од точките K и D, а средината N на страната CD е еднакво оддалечена од точките K и B. Точката P е средина на отсечката AK. Докажи дека $\measuredangle PBK = \measuredangle PDK$.

Решение. Низ темето C на паралелограмот повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD која ги сече правите AB и AD во точките B_1 и D_1, соодветно. Според тоа, четириаголниците BB_1CD и BCD_1D се паралелограми и DB е средна отсечка во $\triangle AB_1D_1$. Значи, точките B_1, M и D се колинеарни, во $\triangle KB_1D$ медијаната е $\overline{KM} = \overline{MD} = \overline{MB_1}$ и затоа $\measuredangle B_1KD = 90^\circ$.



Слично, $\measuredangle D_1KB = 90^\circ$ и затоа $\measuredangle D_1KB = \measuredangle B_1KD$. Понатаму, PB е средна линија во $\triangle AB_1K$ и PD е средна линија во $\triangle AKD_1$, па тие соодветно се паралелни на KB_1 и KD_1. Според тоа, $\measuredangle D_1KD = \measuredangle PDK$ и $\measuredangle B_1KB = \measuredangle PBK$, па затоа $\measuredangle PBK = \measuredangle PDK$.

50. Даден е $\triangle ABC$ и произволна точка L, внатрешна за страната AB. Кружница низ точките A и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната AC во точката M. Аналогно, кружница низ точките B и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната BC во точката N. Симетралата на $\measuredangle ALM$ ја сече AC во точката P, а симетралата на $\measuredangle BLN$ ја сече BC во точката Q. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle MNL$ лежи

на отсечката PQ.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle MLC = \measuredangle BAC$ и $\measuredangle NLC = \measuredangle ABC$. Затоа $\measuredangle ACB + \measuredangle MLN = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $MLNC$ е тетивен. Понатаму, $\measuredangle CPL = \measuredangle BAC + \frac{1}{2}\measuredangle ALM$ како надворешен за $\triangle ALP$ и $\measuredangle CLP = \measuredangle CLM + \frac{1}{2}\measuredangle ALM$, па затоа $\measuredangle CPL = \measuredangle CLP$ и следствено $\overline{CP} = \overline{CL}$. Аналогно $\overline{CQ} = \overline{CL}$, т.е. P, Q и L лежат на кружница со центар C.

Од $\measuredangle PML + \measuredangle QNL = 180^\circ$ следува дека кружниците опишани околу триаголниците PML и QNL по втор пат се сечат во точка од отсечката PQ. Ако таа точка е I, имаме $\measuredangle LPI = \measuredangle LMI$. Од друга страна, $\measuredangle LNM = \measuredangle LCN = 2\measuredangle LPQ$. Според тоа, $\measuredangle LMI = \frac{1}{2}\measuredangle LMN$, т.е. MI е симетрала во $\triangle MNL$. Аналогно се гледа дека NI е симетрала во $\triangle MNL$ и затоа I е центар на впишаната кружница во $\triangle MNL$.

51. Точките M, N, P, Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Точките F и G се тежишта соодветно на триаголниците BNP и PND. Отсечката MG ја сече FQ во точката K и $\overline{FK} = 6\,cm$. Докажи дека $\overline{KQ} = 9\,cm$.

Решение. На отсечката FQ да избереме точка L таква што $\overline{QL} = \frac{3}{5}\overline{QF}$. Доволно е да докажеме дека L припаѓа на MG, бидејќи ќе следува $L \equiv K$. Навистина

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} &= \overrightarrow{MQ} + \tfrac{3}{5}\overrightarrow{QF} = \overrightarrow{MQ} + \tfrac{3}{5}\overrightarrow{QM} + \tfrac{3}{5}\overrightarrow{MF} = \tfrac{2}{5}\overrightarrow{MQ} + \tfrac{3}{5}\overrightarrow{MF} \\ &= \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MD} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MB} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MN} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MP} = \tfrac{3}{5}\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Во последното равенство искористивме дека

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},\ \overrightarrow{MC} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})$$

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC, \overline{AC} \neq \overline{BC}$, со центар на опишаната кружница O. Права паралелна на AB ја допира опишаната кружница околу $\triangle AOB$ во точката T и ги сече продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките X и Y. Нека F е пресечната точка на правите BX и AY. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle FCT$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AC} > \overline{BC}$. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Бидејќи четириаголникот $ATBO$ е тетивен и точките O и T се во различни полурамнини во однос на AB, добиваме дека

$$\measuredangle XTA = \measuredangle TAB = \measuredangle BTY = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\gamma)}{2} = \gamma .$$

Но, $\measuredangle ABT = \measuredangle BTY = \measuredangle TAB$ (накрсни агли за паралелни прави), па затоа OT е симетрала на AB. Од претпоставката дека $\overline{AC} > \overline{BC}$, следува дека X и F се во едната полурамнина во однос на OT, а C и Y се во другата полурамнина во однос на OT. Ќе докажеме дека OT е симетрала на $\measuredangle FTC$. Навистина, $\measuredangle BTY = \gamma = \measuredangle XCB$, па затоа четириаголнмикот $XTBC$ е тетивен и $\measuredangle BCT = \measuredangle BXT$, а $\measuredangle CXB = \measuredangle CTB$. Аналогно, четириаголникот $AFTX$ е тетивен и $\measuredangle BCT = \measuredangle YAT$. Според тоа, четириаголникот $AFTX$ е тетивен и $\measuredangle ATF = \measuredangle AXF = \measuredangle CTB$, т.е. $\measuredangle FTO = \measuredangle OTC = \frac{\measuredangle FTC}{2}$.

Сега ќе докажеме дека $\measuredangle ACF = \measuredangle BCT$, што ќе значи дека симетралата на $\measuredangle TCF$ се совпаѓа со симетралата на $\measuredangle BCA$. Тогаш центарот на впишаната кружница во $\triangle TCF$ е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ и симетралата на AB, која точка е средина на лакот AB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Со тоа задачата ќе биде решена. За последниот чекор да искористиме дека, бидејќи четириаголникот $AFTX$ е тетивен имаме $\measuredangle AFX = \measuredangle ATX = \gamma$, па затоа четириаголникот $AFBC$ исто така е тетивен. Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle ACF &= 180^\circ - \measuredangle AXF - \measuredangle AFX - \measuredangle CFA \\ &= 180^\circ - \measuredangle CTB - \measuredangle ABT - \measuredangle CBA = \measuredangle BCT,\end{aligned}$$

со што задачата е решена.

53. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k со центар O, при што точката O е внатрешна за четириаголникот $ABCD$. Познато е дека производот на растојанијата од O до страните AB и CD е еднаков на производот на растојанијата од O до страните AD и BC. Тангентите на k во точките B и D се сечат во точката P. Докажи дека растојанието од P до правата AC е двапати поголемо од растојанието од O до правата AC.

Решение. Нека A_1 и C_1 се дијаметрално спротивните точки на A и C, соодветно. Тогаш

$$\overline{BA_1} \cdot \overline{DC_1} = \overline{BC_1} \cdot \overline{DA_1} \qquad (1)$$

(BA_1 е двапати поголема од растојанието од O до AB и аналогно за преостанатите точки).

Нека P_1 е пресечната точка на тангентата на k во точката D и правата A_1C_1. Од $\triangle A_1P_1D \sim \triangle DP_1C_1$ добиваме

$$\frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{P_1D}} = \frac{\overline{A_1D}}{\overline{C_1D}} .$$

По квадрирање и замена $\overline{P_1D}^2=\overline{P_1A_1}=\overline{P_1C_1}$, добиваме

$$\frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{P_1C_1}}=(\frac{\overline{A_1D}}{\overline{C_1D}})^2. \quad (2)$$

Аналогно, ако P_2 е пресечната точка на тангентата на k во точката B и правата A_1C_1 добиваме

$$\frac{\overline{P_2A_1}}{\overline{P_2C_1}}=(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{C_1B}})^2. \quad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) следува $P_1\equiv P_2\equiv P$. Конечно, тврдењето следува од правоаголникот AC_1A_1C.

54. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ впишан во кружница k. Точката P од малиот лак AC на k е таква што $\measuredangle BAC=2\measuredangle PBC$, а точката Q од малиот лак BC на k е таква што $\measuredangle ABC=2\measuredangle QAC$. Правата низ средината на малиот лак BC и средината на тетивата PC ја сече правата BP во точката K. Правата низ средината на малиот лак AC и средината на тетивата QC ја сече правата AQ во точката T. Докажи дека $\overline{KT}=\overline{AC}+\overline{BC}$.

Решение. Нека N е средина на лакот BC. Тогаш од условот на задачата следува дека лаците PC,CN и NB се еднакви, од каде лесно следува дека четириаголникот $PCNB$ е рамнокрак трапез, па затоа неговите дијагонали PN и BC се еднакви. Сега од $KP\,||\,CN$ и од тоа што KN ја преполовува CP следува дека четриаголникот $CKPN$ е паралелограм. Од досега изнесеното следува $\overline{CK}=\overline{PN}=\overline{BC}$. Аналогно се докажува дека $\overline{CT}=\overline{AC}$.
Од паралелограмот $CKPN$ и условот имаме $\measuredangle KCP=\measuredangle CPN=\measuredangle CPB$, што значи дека CK е тангента на k. Аналогно се докажува дека CT е тангента на k. Според тоа, точките C,K,T во овој редослед лежат на една права и затоа $\overline{KT}=\overline{KC}+\overline{CT}=\overline{AC}+\overline{BC}$.

55. Даден е трапез $ABCD$ со основи $AB\,||\,CD$ и пресечна точка O на неговите дијагонали. Нека N,M,P,Q се соодветно средините на страните $AB,BC,$ CD,DA на трапезот. Определи ја плоштината на трапезот ако

$$\overline{ON}=14, \overline{OP}=\tfrac{13}{2}, \overline{OM}=7, \overline{OQ}=\tfrac{15}{2}.$$

Решение. Нека $NQ\cap CD=E$ и $NP\cap CD=F$. Од $\triangle ANQ\cong\triangle DEQ$ следува дека точката Q е средина на EN и дека плоштините на двата триаголника се еднакви. Аналогно, точката P е средина на NF и плоштините на $\triangle NBP$ и $\triangle FCP$ се еднакви. Оттука следува

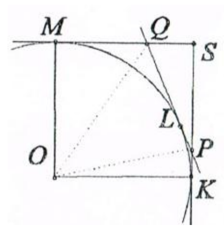
$$P_{ABCD}=P_{ANQ}+P_{NBP}+P_{QNPCD}=P_{DEQ}+P_{FCP}+P_{QNPCD}=P_{EFN}\,.$$

Според тоа, задачата ја сведовме на определување на плоштината на $\triangle EFN$. Сега NM е медијана во $\triangle EFN$, точката O лежи на неа (Зошто?) и ја дели во однос $2:1$, сметајќи од темето на триаголникот. Според тоа, точката O е тежиште за $\triangle EFN$. Значи, точката O лежи и на медијаните EP и FQ и важи $\overline{EO}=2\overline{OP}=13$ и $\overline{FO}=2\overline{OQ}=15$. Нека O' е точка на правата MN таква што $\overline{OM}=\overline{O'M}$ и M е меѓу O и O'. Четириаголникот $FO'EO$ е паралелограм и $\overline{FO'}=\overline{EO}=13$. Исто така $P_{EFN}=6P_{FMO}=3P_{FO'O}$, од каде користејќи ја Хероновата формула добиваме

$$P_{ABCD}=P_{EFN}=3P_{FO'O}=3\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=252.$$

56. Околу кружница се опишани квадрат и триаголник. Докажи дека барем половина на периметарот на квадратот лежи во триаголникот.

Решение. Сметаме дека радиусот на кружницата е еднаков на 1.



Да разгледаме теме на квадратот кое е надворешно за триаголникот. На цртежот тоа е темето S, а правата PQ содржи страна на триаголникот. Ќе го оцениме збирот $\overline{SQ}+\overline{SP}$. Периметарот на $\triangle PSQ$ е еднаков на $\overline{SK}+\overline{SM}=2$. Тогаш збирот $\overline{SQ}+\overline{SP}$ е најголем кога $\overline{PQ}$ е најмала. Освен тоа, плоштината на $OKPQM$ е еднаква на $\frac{1}{2}(\overline{MQ}+\overline{QL}+\overline{LP}+\overline{PK})\cdot 1=\overline{PQ}$. Оваа плошптина е еднаква на разликата на плоштините на $OKSM$ и $\triangle PSQ$. Според тоа, таа е минимална кога $\triangle PSQ$ има максимална плоштина. Но, периметарот на $\triangle PSQ$ е константен, па затоа неговата плоштина е најголема кога впишаната во него кружница има најголем можен радиус. Последното е исполнето само кога впишаната кружница во $\triangle PSQ$ се допира до дадената кружница (со центар O), т.е. кога L лежи на SO. Но, тогаш $\triangle PSQ$ е рамнокрак правоаголем триаголник со висина кон хипотенузата $\overline{SO}-\overline{OL}=\sqrt{2}-1$. Тоа значи дека $\overline{PQ}=2(\sqrt{2}-1)$ е најмалата вредност на $\overline{PQ}$, а

$$2-2(\sqrt{2}-1)=2(2-\sqrt{2})$$

е наголемата вредност на $\overline{SQ}+\overline{SP}$.

Јасно, најмногу три од темињата на квадратот може да се надворешни за триаголникот. Според тоа, делот од периметарот на квадратот кој е надворешен за триаголникот нема да надминува

$$3\cdot 2(2-\sqrt{2})=6(2-\sqrt{2})<6\cdot 0{,}6<4\,.$$

Со тоа задачата е решена бидејжи периметарот на квадратот е 8.

57. На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точките A_1, B_1, C_1 така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка M. Докажи дека ако M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш M е тежиште и на $\triangle ABC$.

Решение. Нека M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$. На полуправата MA конструираме точка A_2 така што $B_1A_1C_1A_2$ е паралелограм. Аналогно ги конструираме точките B_2 и C_2. Бидејжи $A_1C_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1B_3$, добиваме дека точките A_2, C_1, B_2 лежат на една права и C_1 е средина на A_2B_2. Истото важи и за точките A_2, B_1, C_2 и C_2, A_1, B_2. Ќе докажеме дека $A_2 = A, B_2 = B, C_2 = C$, со што задачата е решена.

Да претпоставиме дека $A_2 \neq A$ и нека A е меѓу A_2 и M. Тогаш C_2 е меѓу C и M, B лежи меѓу B_2 и M, па затоа A_2 е меѓу A и M, што е противречност.

58. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека F е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот, а E е пресечната точка на правите AD и BC. Ако M и N се средините на отсечките AB и CD, докажи дека

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2}\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right|.$$

Решение. Нека $\measuredangle AEB = \gamma, \overline{EC} = c, \overline{ED} = d, \vec{i} = \frac{1}{c}\overrightarrow{EC}$ и $\vec{j} = \frac{1}{d}\overrightarrow{ED}$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = k$. Значи, $\overrightarrow{EA} = kc\vec{j}$ и $\overrightarrow{EB} = kd\vec{i}$. Бидејќи $F \in AC$ и $F \in BD$, постојат реални броеви x и y такви што

$$\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{EA} + (1-x)\overrightarrow{EC} = xkc\vec{j} + (1-x)c\vec{i}$$

и

$$\overrightarrow{EF} = y\overrightarrow{EB} + (1-y)\overrightarrow{ED} = ykd\vec{i} + (1-y)d\vec{j}.$$

Ако во последните две равенства ги изедначиме коефициентите пред $\vec{i}$ и $\vec{j}$ добиваме $xkc = (1-y)d$ и $ykd = (1-x)c$, од каде наоѓаме $x = \frac{kd-c}{(k^2-1)c}$. Според тоа,

$$\overrightarrow{EF} = \frac{k}{k^2-1}((kd-c)\vec{j} + (kc-d)\vec{i})$$

и тогаш

$$\overline{EF}^2 = \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2((kd-c)^2 + (kc-d)^2 + 2(kd-c)(kc-d)\cos\gamma).$$

Од друга страна

$$\overrightarrow{MN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB})=\tfrac{1}{2}((d-kc)\vec{j}+(c-kd)\vec{i})$$

и затоа

$$\overline{MN}^2=\tfrac{1}{4}((kd-c)^2+(kc-d)^2+2(kd-c)(kc-d)\cos\gamma)\,.$$

Според тоа,

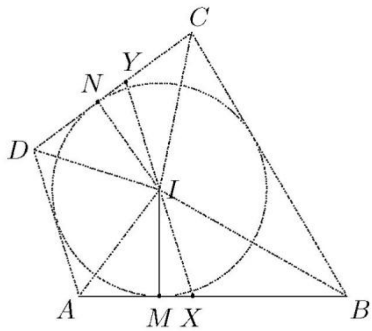
$$\frac{\overline{MN}^2}{\overline{EF}^2}=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{k^2-1}{k}\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(k-\tfrac{1}{k}\right)^2,$$

односно

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{EF}}=\frac{1}{2}\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}-\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}\right|.$$

59. Во четириаголникот $ABCD$ таков што $\measuredangle BAD+\measuredangle ADC>180^\circ$ и впишана кружница со центар I. Низ I е повлечена права која ги сече страните AB и CD соодветно во точките X и Yтака што $\overline{IX}=\overline{IY}$. Докажи дека

$$\overline{AX}\cdot\overline{DY}=\overline{BX}\cdot\overline{CY}\,.$$



Решение. Нека M и N се допирните точки на впишаната кружница соодветно со страните AB и CD. Од условот

$$\measuredangle BAD+\measuredangle ADC>180^\circ$$

следува дека $AB \nparallel CD$ и $\measuredangle MIN<180^\circ$. Освен тоа, од $\overline{IM}=\overline{IN}$, $\measuredangle IMX=\measuredangle INY$ и $\overline{IX}=\overline{IY}$ следува дека $\triangle IMX\cong\triangle INY$, па затоа $\measuredangle IXM=\measuredangle IYN$. Ако $X\in BM$ и $Y\in DN$ (или $X\in AM$ и $Y\in CN$), тогаш од $\measuredangle IXM=\measuredangle IYN$ следува $AB\parallel CD$, што не е точно. Значи, положбата на точките X и Y е како на цртежот. Од четириаголникот $AXYD$ имаме

$$\measuredangle AXI=\measuredangle DYI=180^\circ-\tfrac{\measuredangle A}{2}-\tfrac{\measuredangle D}{2},$$

од каде наоѓаме $\measuredangle AIX=\frac{\measuredangle D}{2}$ и $\measuredangle DIY=\frac{\measuredangle A}{2}$. Според тоа, $\triangle AIX\sim\triangle ICY$, т.е. $\overline{AX}\cdot\overline{DY}=\overline{IY}\cdot\overline{IX}$. Аналогно $\overline{BX}\cdot\overline{CY}=\overline{IY}\cdot\overline{IX}$. Конечно, $\overline{AX}\cdot\overline{DY}=\overline{BX}\cdot\overline{CY}$.

60. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Точките A_1,B_1,C_1,D_1 припаѓаат соодветно на отсечките AO,BO,CO,DO и се такви што $\overline{AA_1}=\overline{CC_1}$ и $\overline{BB_1}=\overline{DD_1}$. Нека M и N се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ и околу $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, а P и Q се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle C_1OD_1$ и околу $\triangle A_1OD_1$ и

$\triangle B_1OC_1$. Докажи дека точките M,N,P и Q лежат на една кружница.

Решение. *Прв начин*. Од условот имаме $\measuredangle MAC=\measuredangle MBD$ и $\measuredangle MCA=\measuredangle MDB$. Според тоа, $\triangle MAC\sim\triangle MBD$. Нека X и Y се соодветно средините на AC и BD. Тогаш од горната сличност следува дека $\measuredangle MXC=\measuredangle MYD$. Последното означува дека M лежи на опишаната кружница околу $\triangle OXY$. Аналогно се докажува дека и N лежи на истата кружница.

Бидејќи X и Y се соодветно средини и на A_1C_1 и B_1D_1, горните размислувања за четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ докажуваат дека P и Q лежат на кружницата опишана околу $\triangle OXY$.

Втор начин. Низ темињата A и C повлекуваме прави нормални на AC, а низ темињата B и D повлекуваме прави нормални на BD. Овие четири прави определуваат паралелограм во кој точките M и N се подножја на нормалите повлечени од O на неговите дијагонали. Според тоа, точките M и N припаѓаат на кружницата со дијаметар OT, каде T е пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот. Аналогно се гледа дека и точките P и Q припаѓаат на истата кружница (точките O и T се исти за четириаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$).

61. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со висини CD, AE и BF. Точките E' и F' се симетрични на E и F во однос на точките A и B, соодветно. Точката C_1 припаѓа на полуправата CD и е таква што $\overline{DC_1}=3\overline{CD}$. Докажи дека $\measuredangle E'C_1F'=\measuredangle ACB$.

Решение. Нека точките M,N,P и Q се избрани така што четириаголниците $CEAM, CFBN, CEE'P$ и $CFF'Q$ се правоаголници. Со C' да ја означиме средината на CC_1, $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle ABC=\beta$ и $\measuredangle ACB=\gamma$. Јасно, $\triangle ABC\cong\triangle AC'B$ и $\triangle AMC\sim\triangle BNC$. Исто така

$$\begin{aligned}\measuredangle MAC' &= 360^\circ-\measuredangle MAC-\measuredangle BAC-\measuredangle BAC'\\ &= 360^\circ-\gamma-2\alpha=\gamma+2\beta=\measuredangle NBC+\measuredangle ABC+\measuredangle ABC'\\ &= \measuredangle NBC'.\end{aligned}$$

Но, $\frac{\overline{MA}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}$, па од горното равенство следува $\triangle MAC'\sim\triangle NBC'$. Според тоа, $\measuredangle AC'M=\measuredangle BC'N$ и затоа $\measuredangle MC'N=\gamma$. Ги разгледуваме средните линии во $\triangle CPC_1$ и $\triangle CQC_1$ и добиваме дека $MC'\parallel PC_1$ и $NC'\parallel QC_1$. Оттука следува дека $\measuredangle PC_1Q=\gamma$.

Забележуваме дека $BN\parallel F'Q, \overline{BN}=\overline{F'Q}, NC'\parallel QC_1, 2\overline{NC'}=\overline{QC_1}, AM\parallel E'P,$ $\overline{AM}=\overline{E'P}, MC'\parallel PC_1$ и $2\overline{MC'}=\overline{PC_1}$. Оттука и од $\triangle MAC'\sim\triangle NBC'$ следува дека $\triangle PE'C_1 \sim \triangle QF'C_1$. Според тоа, $\measuredangle PC_1E' = \measuredangle QC_1F'$. Оттука и од веќе докажаното равенство $\measuredangle PC_1Q = \gamma$ добиваме $\measuredangle E'C_1F' = \gamma$.

62. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката M лежи на страната AB на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Точките I_1, I_2 и I_3 се центри на впишаните кружници околу $\triangle MBC, \triangle MCD$ и $\triangle MDA$, соодветно. Докажи дека точките M, I_1, I_2 и I_3 се конциклични.

Решение. *Лема*. Нека I е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$ и нека точките P и Q лежат на правите AB и AC, соодветно. Тогаш точките A, I, P и Q се конциклични ако и само ако

$$\overline{BP}^* + \overline{CQ}^* = \overline{BC},$$

каде $\overline{BP}^* = \overline{BP}$ ако P припаѓа на полуправата BA и на $-\overline{BP}$ во спротивен случај, и аналогно за $\overline{CQ}^*$.

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога P и Q лежат на отсечките AB и AC, соодветно. Сите останати случаи се разгледуваат аналогно.

Да претпоставиме дека точките A, I, P и Q се конциклични. Нека D и E се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle ABC$ соодветно со AB и AC. Имаме $\measuredangle PIQ = 180^\circ - \alpha$, па затоа $\measuredangle DIP = \measuredangle EIQ$, и следствено $\triangle DIP \cong \triangle EIQ$. Оттука $\overline{DP} = \overline{EQ}$ и $\overline{BP} + \overline{CQ} = \overline{BD} + \overline{CE} = \overline{BC}$, што и требаше да се докаже.

Обратната насока на тврдењето се докажува со истите расудувања, но во обратен редослед. ■

Нека опишаната кружница околу $\triangle MI_1I_3$ по втор пат ги сече правите AB, CM и DM во точките P, Q и R. Согласно лемата $\overline{BP}^* + \overline{CQ}^* = \overline{BC}$ и $\overline{DR}^* + \overline{AP}^* = \overline{DA}$. Според тоа,

$$\overline{CQ}^* + \overline{DR}^* = \overline{BC} + \overline{DA} - \overline{BP}^* - \overline{AP}^* = \overline{BC} + \overline{DA} - \overline{AB}.$$

Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, последниот израз е еднаков на $\overline{CD}$ и сега тврдењето на задачата следува од лемата.

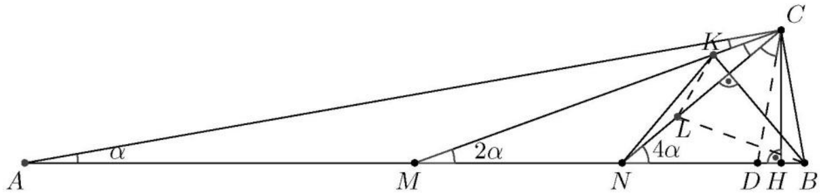
63. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 90^\circ$, висина CH и медијана CM. Точката N од отсечката MH е таква што $\overline{MN} = \overline{NC}$ и $\overline{NH} = \overline{HB} + \overline{BC}$.

а) определи го $\measuredangle BAC$,

б) ако точката K од отсечката MC е таква што $KB \perp NC$, определи го $\measuredangle KNC$.

Решение. а) Нека D е точка од отсечката NH таква што $\overline{ND} = \overline{BC}$. Тогаш

$\overline{DH}=\overline{HB}$ и $\triangle DHC \cong \triangle BHC$. Тогаш $\overline{DC}=\overline{BC}=\overline{ND}$ и од својствата на медијаната имаме $\overline{CM}=\overline{AM}=\overline{BM}$. Ако $\measuredangle BAC=\measuredangle ACM=\alpha$, тогаш $\measuredangle CMB=2\alpha$, како надворешен агол. Затоа $\measuredangle MCN=2\alpha$ и $\measuredangle CNB=4\alpha$ како надворешен агол, $\measuredangle NCD=4\alpha$ и $\measuredangle CDB=8\alpha$ како надворешен агол. Според тоа, $\measuredangle ABC=8\alpha$ и $9\alpha=90^\circ$, т.е. $\alpha=10^\circ$.



б) Нека L е точка од отсечката CN таква што $\measuredangle CBL=60^\circ$. Тогаш $\triangle BCL$ е рамностран и $K\in s_{CL}$. Така $\measuredangle KLC=\measuredangle KCL=\measuredangle NMC$, па затоа четириаголникот $LKMN$ е тетивен. Имаме, $\triangle BLM \cong \triangle CLM$, па затоа

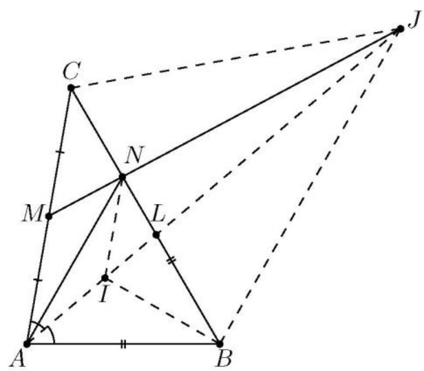
$$\measuredangle KNC=\tfrac{1}{2}LK=\measuredangle LMN=\tfrac{1}{2}\measuredangle BMC=10^\circ.$$

64. Даден е $\triangle ABC$ со центар J на припишаната кружница кон страната BC. Нека M е средина на страната AC и MJ ја сече страната BC во точката N. Ако $\overline{AB}=\overline{BN}$, тогаш $\measuredangle BAC=2\measuredangle ACB$. Докажи!

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Од $\overline{AM}=\overline{CM}$ следува $P_{ANJ}=P_{CNJ}$. Тогаш

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NL}}=\frac{P_{CNJ}}{P_{LNJ}}=\frac{P_{ANJ}}{P_{LNJ}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{LJ}}$$
$$=\frac{P_{ABJ}}{P_{LBJ}}=\frac{\overline{AB}\cdot r_a}{\overline{BL}\cdot r_a}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BL}},$$

каде r_a е радиусот на припишаната кружница кон страната BC. Значи, $\frac{\overline{CN}}{\overline{NL}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BL}}$, од што следува $AC \parallel IN$.



Од друга страна, BI е симетрала на агол на рамнокракиот $\triangle ANB$ и затоа I лежи на симетралата на AN, но CI е симетрала на $\measuredangle ACB$, т.е. I лежи на опишаната кружница околу $\triangle ANC$. Според тоа, $ACNI$ е трапез кој е вписан во кружница, па затоа тој е рамнокрак и $\measuredangle BAC=2\measuredangle IAC=2\measuredangle ACB$.

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, во кој впишаната кружница ги допира страните AB и BC соодветно во точките M и N. Симетралите на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BAC$ ја сечат правата MN соодветно во точките K и P. Ако $\overline{AC}=2\overline{KP}$, определи

го $\measuredangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Бидејќи

$$\measuredangle APM = \measuredangle BMN - \measuredangle MAP = (90^\circ - \tfrac{\beta}{2}) - \tfrac{\alpha}{2} = \tfrac{\gamma}{2} = \measuredangle ICB,$$

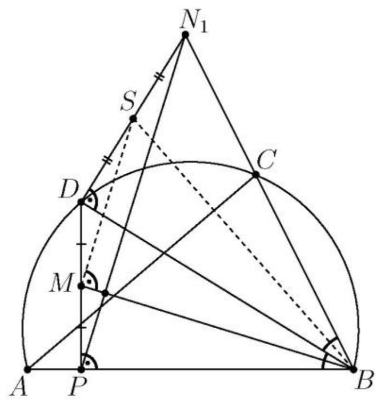
четириаголникот $IPNC$ е тетивен. Тогаш $\measuredangle IPC = \measuredangle INC = 90^\circ$. Од $\measuredangle APM = \frac{\gamma}{2} = \measuredangle ICA$ следува дека и четириаголникот $AKPC$ е тетивен, па затоа важи $\measuredangle AKC = \measuredangle APC = 90^\circ$.

Нека S е средината на страната AC. Тогаш PS и KS се медијани соодветно во правоаголните триаголници APC и AKC и затоа $\overline{KS} = \overline{PS} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Оттука и од условот $\overline{AC} = 2\overline{KP}$ следува дека $\triangle KPS$ е рамностран.

Бидејќи $\measuredangle CSP = \alpha$ како надворешен за размнокракиот $\triangle APS$ и аналогно $\measuredangle ASK = \gamma$, добиваме $60^\circ = \measuredangle KSP = 180^\circ - (\measuredangle ASK + \measuredangle CSP) = \beta$.

66. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката D е средината на лакот AC од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката B. Нека точката P е проекцијата на D на правата AB, а точката M е средина на отсечката DP. Правата низ P, нормална на BM, ја сече правата BC во точката N. Докажи дека $\measuredangle NDB = 90^\circ$.

Решение. Нека правата низ D, нормална на BD ја сече правата BC во точката N_1. Ќе докажеме дека $PN_1 \perp BM$ од каде ќе следува дека $N \equiv N_1$.



Со S да ја означиме средината на отсечката DN_1. Од $\measuredangle DBP = \measuredangle N_1BD$ и $\measuredangle DPB = \measuredangle BN_1D = 90^\circ$ следува $\triangle BDP \sim \triangle BN_1D$. Тогаш $\measuredangle BMP = \measuredangle BSD$, т.е. четириаголникот $SDMB$ е тетивен и $\measuredangle BMS = \measuredangle BDS = 90^\circ$. Останува да забележиме дека MS е средна линија во $\triangle PN_1D$, т.е. $MS \parallel PN_1$ и затоа $PN_1 \perp BM$.

3 ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИЈАТА

1. Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен $\triangle ABC$. На страната BC е земена точка X таква што $\overline{AX}=\overline{BX}$ и $\overline{OX}=\overline{CX}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако радиусот ан опишаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle ABC$ е остроаголен, добиваме $\measuredangle AOC=2\beta$ и од условот дека радиусот на опипшаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R добиваме $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin 2\beta}$, т.е. $\sin\beta=\sin 2\beta$, од каде наоѓаме $\beta=60^\circ$.

Бидејќи $\measuredangle AOC=2\beta$ и $\measuredangle AXC=\measuredangle ABX+\measuredangle BAX=2\beta$, следува дека четириаголникот $AOXC$ е тетивен. Сега од $\overline{OX}=\overline{CX}$ следува дека AX е симетрала на $\measuredangle OAC$. Според тоа, $\measuredangle OAC=2\measuredangle XAC=2(\alpha-\beta)$ и бидејќи важи $\measuredangle OAC=90^\circ-\beta$, наоѓаме $2\alpha-120^\circ=30^\circ$, т.е. $\alpha=75^\circ$. Конечно, $\gamma=45^\circ$.

2. Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Точката M е средина на страната AB, Тангентата на k во A ја сече правата низ M нормална на AC во точката D. Тангентата на k во точката B ја сече правата низ M нормална на BC во точката E. Ако правата DE го дели $\triangle ABC$ на два дела со плоштини 1 и 3, определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. За аглите во $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Нека AA' и BB' се висини во триаголникот. Точките A,B,A',B' лежат на кружница со центар M. Имаме $\overline{AM}=\overline{A'M}$, па така

$$\measuredangle MA'A=\measuredangle MAA'=90^\circ-\beta=\measuredangle ADM,$$

бидејќи $\measuredangle DAC=\beta$ како периферен агол. Значи, точката A' лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMD$. Имаме

$$\measuredangle MA'D=180^\circ-\measuredangle BAD=\gamma$$

и

$$\measuredangle MA'B'=180^\circ-\measuredangle MA'B-\measuredangle B'A'C=180^\circ-\alpha-\beta=\gamma,$$

па така D припаѓа на правата $A'B'$. Аналогно и E припаѓа на правата $A'B'$. Според тоа, $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C$, па затоа

$$\sin\gamma=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\sqrt{\frac{P_{A'B'C}}{P_{ABC}}}=\frac{1}{2} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2},$$

во зависност кој дел има поголема плоштина. Значи, $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 60^\circ$.

3. Со O и I да ги означиме центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC, соодветно. Надворешно припишаната кружница ω_a ги допира продолженијата на страните AB и AC соодветно во точките K и M, а страната BC ја допира во точката N, Нека претпоставиме дека средината P на отсечката KM лежи на опишаната кружница на триаголникот ABC. Докажи дека точките O, I и N се колинеарни.

Решение. Ако $\overline{AB} = \overline{AC}$, тогаш тврдењето е тривијално, па затоа да претпоставиме дека $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, т.е. KM не е паралелна со BC. Со R да го означиме радиусот на опишаната кружниц, а со I_a и r_a центарот и радиусот на ω_a. Од $\overline{AK} = \overline{AM}$ следува дека правата AP е симетрала на $\measuredangle BAC$, па затоа P е средина на лакот BC на опишната кружница. Тогаш $\overline{PI} = \overline{PI_a}$, па затоа P е центар на кружницата $BICI_a$ над дијаметарот II_a. Оттука следува $\overline{PI_a} = \overline{PB} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Од друга страна $\measuredangle I_aKP = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle I_aPK = 90^\circ$, па затоа $\overline{PI_a} = r_a \sin\frac{\alpha}{2}$. Оттука следува $r_a = 2R$, т.е. $\overline{NI_a} = 2\overline{PO}$. Бидејќи $I_aN \parallel PO$, добиваме дека отсечката PO е средна линија на триаголникот II_aN,што значи дека O е средина на отсечката IN.

4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките X и Y. Точката K е средина на лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот (не ја содржи точката C). Познато е дека правата XY ја преполовува отсечката AK. Определи го $\measuredangle BAC$.

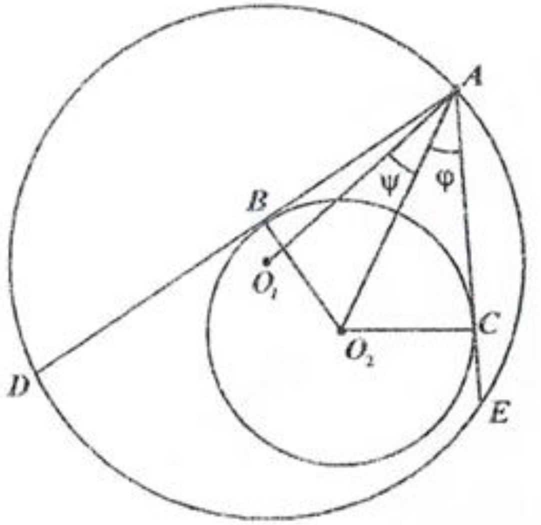
Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница и отсечките XY и AI се сечат во точката S. Познато е дека $\overline{KI} = \overline{KA}$, т.е. висината KT на $\triangle AKI$ е и негова тежишна линија. Бидејќи $XY \perp AI$, добиваме $XY \parallel KT$, а бидејќи XY ја преполовува страната AK, добиваме дека XY е средна линија во $\triangle AKT$. Значи, $\frac{\overline{AS}}{\overline{ST}} = \frac{1}{3}$. Притоа XS е висина во правоаголниот $\triangle AXI$, па затоа $\frac{\overline{AS}}{\overline{ST}} = (\frac{\overline{AX}}{\overline{XI}})^2$. Од последните две равенства добиваме $\operatorname{tg}\measuredangle XAI = \frac{\overline{XI}}{\overline{AX}} = \sqrt{3}$, па затоа $\measuredangle XAI = 60^\circ$ и $\measuredangle BAC = 2XAI = 120^\circ$.

5. Дадени се кружници $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, r)$ такви што $R \geq r\sqrt{2}$ и

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}\ .$$

Од произволна точка $A\in k_1$ се повлечени тангенти $AB, AC\,(B,C\in k_2)$ на k_2, кои k_1 ја сечат соодветно во точките D и E. Докажи дека $\overline{BD}\cdot\overline{CE}=r^2$.

Решение. Нека $\overline{O_1O_2}=d$. Лесно се гледа дека $r+d<R$, т.е. дека k_2 лежи во k_1. Нека $\overline{AO_2}=t$, $\measuredangle O_2AC=\varphi$ и $\measuredangle O_1AO_2=\psi$. Тогаш од рамнокракиот $\triangle AO_1E$ имаме $\overline{AE}=2R\cos(\varphi+\psi)$. Следствено



$$\overline{EC}=\overline{AE}-\overline{AC}=2R\cos(\varphi+\psi)-\sqrt{t^2-r^2}\,. \qquad (1)$$

Од друга страна $\measuredangle BAO_1=|\varphi-\psi|$ и аналогно добиваме

$$\overline{BD}=2R\cos(\varphi-\psi)-\sqrt{t^2-r^2}\,. \qquad (2)$$

Од $\triangle O_1O_2A$ и $\triangle ACO_2$ имаме

$$\cos\psi=\frac{R^2+t^2-d^2}{2Rt} \qquad (3)$$

и

$$\sin\varphi=\frac{r}{t},\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{t^2-r^2}}{t}\,. \qquad (4)$$

Ако ги искористиме формулите

$$\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)=\cos^2\psi-\sin^2\varphi$$

и

$$\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)=2\cos\psi\cos\varphi,$$

од (1), (2), (3) и (4) добиваме

$$\overline{BD}\cdot\overline{CE}=\frac{(R^2+t^2-d^2)^2}{t^2}-\frac{4R^2r^2}{t^2}-\frac{2(R^2+t^2-d^2)(t^2-r^2)}{t^2}+t^2-r^2\,,$$

од каде добиваме

$$\overline{BD}\cdot\overline{CE}-r^2=R^4+d^4-2d^2(R^2+r^2)-2R^2r^2$$

и ако искористиме дека $d=\sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}$ добиваме дека десната страна во горното равенство е еднаква на 0, па затоа $\overline{BD}\cdot\overline{CE}=r^2$.

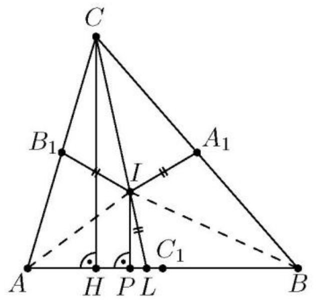
6. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O. Симетралата на CH ги сече страните AC и BC соодветно во точките X и Y. Правите XO и YO ја сечат страната AB соодветно во точките P и Q. Ако $\overline{XP}+\overline{YQ}=\overline{AB}+\overline{XY}$, определи го $\measuredangle OHC$.

Решение. Нека N и M се соодветно средините на CH и AC. За $\triangle CYO$ и $\triangle CNM$ имаме $\measuredangle OCY=\measuredangle MCB$ и $\frac{\overline{CY}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{CM}}$ (следува од сличноста на $\triangle CYN$ и $\triangle COM$), па затоа $\triangle CYO\sim\triangle CNM$. Според тоа, $\measuredangle CYO=\measuredangle CNM$. Бидејќи MN е средна линија во $\triangle AHC$, важи $\measuredangle CHA=180^\circ-\beta$, т.е. $\measuredangle BYQ=\beta$, од каде следува $\overline{YQ}=\overline{BQ}$. Аналогно $\overline{XP}=\overline{AP}$.

Од условот $\overline{XP}+\overline{YQ}=\overline{AB}+\overline{XY}$ следува $\overline{XY}=\overline{QP}$ и како $XY\parallel PQ$, заклучуваме дека $QPYX$ е паралелограм. Бидејќи O е пресечна точка на дијагоналите на овој паралелограм, добиваме дека растојанието од O до XY е еднакво на растојанието од O до AB, кое е $R\cos\gamma$. Бидејќи $HN\perp XY$ и $\overline{XN}=R\cos\gamma$, заклучуваме дека $\measuredangle OHC=90^\circ$.

7. Во остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{BC}>\overline{AC}$ е впишана кружница k со центар I. Нека $CH, H\in AB$ и $CL, L\in AB$ се соодветно висината и симетралата на аголот повлечени од темето C, а точките A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC, CA и AB, соодветно. Ако допирната точка на k со страната AB е средина на отсечката HC_1, тогаш I е центар на опишаната кружница за $\triangle LA_1B_1$. Докажи!

Решение. Допирната точка на k со страната AB да ја означиме со P. При стандардните ознаки за триаголник имаме



$$\overline{AC_1}=\tfrac{c}{2},\ \overline{AH}=b\cos\alpha \text{ и } \overline{AP}=\tfrac{b+c-a}{2}.$$

Бидејќи P е средина на HC_1 добиваме

$\overline{AC_1}-\overline{AP}=\overline{AP}-\overline{AH}$, па затоа

$$a-b=\tfrac{c}{2}-b\cos\alpha.$$

Но, $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, па затоа $a+b=2c$. Ос последното равенство наоѓаме $\overline{AL}=\frac{cb}{a+b}=\frac{b}{2}$ и $\triangle ALI\cong\triangle AB_1I$. Аналогно, $\triangle BLI\cong\triangle BA_1I$. Според тоа, $\overline{AIl}=\overline{IB_1}=\overline{IA_1}$.

8. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар O_1, која ги допира страните AB, BC и AC соодветно во точките C_1, A_1 и B_1. Припишаната кружница кон страната AB има центар O_2 и ги допира AB и продолженијата на страните AC и BC соодветно во точките C_2, B_2 и A_2. Нека O_1C_1 ја сече A_1B_1 во точката M, а O_2C_2 ја сече A_2B_2 во точката N. Докажи дека $\overline{C_1N}=\overline{C_2N}$.

Решение. Ако $\overline{AC}=\overline{BC}$, тогаш од $\overline{AB_1}=\overline{AB_2}=\overline{BA_1}=\overline{BA_2}$ следува дека отсечката AB е средна линија во трапезот $B_2A_2A_1B_1$. Тогаш точките C_1 и C_2 се совпаѓаат и C_1 е средина на MN.

Нека $\overline{AC}>\overline{BC}$ и да ги означиме пресечните точки на AB со A_1B_1 и A_2B_2 соодветно со P и Q. Од $A_1B_1\parallel A_2B_2$ следува дека $\measuredangle APB_1=\measuredangle BQA_2$ и $\measuredangle AB_1P+\measuredangle BA_2Q=180^\circ$. Сега, од $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\overline{BC_1}=\overline{BA_2}$ следува дека

$$\overline{AP}=\frac{\overline{AB_1}\sin\psi}{\sin\varphi}=\frac{\overline{BA_2}\sin(180^\circ-\psi)}{\sin\varphi}=\overline{BQ},$$

па затоа $\overline{PC_1}=\overline{QC_2}$. Според тоа, $\triangle PC_1N=\triangle QC_2N$, т.е. $\overline{C_1N}=\overline{C_2N}$.

9. Нека I и M се центарот на впишаната кружница и тежиштето на $\triangle ABC$, во кој $\overline{AC}\neq\overline{BC}$. Докажи дека $IM\perp AB$ ако и само ако $\overline{AC}+\overline{BC}=3\overline{AB}$.

Решение. Нека D и E се проекциите на C и I на правата AB, а F е средината на страната AB. Тогаш

$$IM\perp AB \iff ME\parallel CD \iff \overline{FD}=3\overline{FE}. \tag{1}$$

Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Можеме да сметаме дека $a<b$. Тогаш

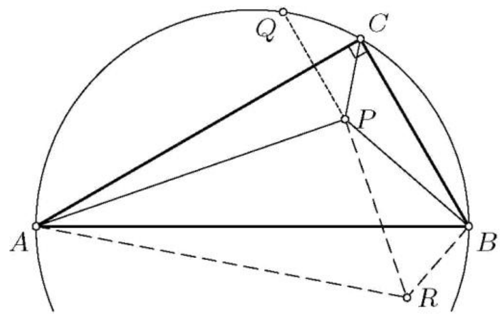
$$\overline{FE}=\overline{AE}-\overline{AF}=\tfrac{b+c-a}{2}-\tfrac{c}{2}=\tfrac{b-a}{2}. \tag{2}$$

$$\overline{FD}=\overline{AD}-\overline{AF}=b\cos\alpha-\frac{c}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}-\frac{c}{2}=\frac{b^2-a^2}{2c}. \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $IM\perp AB$ ако и само ако $a+b=3c$.

10. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB=90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP}=4, \overline{BP}=2$ и $\overline{CP}=1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Да означиме $\alpha=\measuredangle BAC$. Нека R е точка таква што триаголниците ARB и APC се слични и еднакво ориентирани (види цртеж). Од $\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и $\measuredangle RAP=\measuredangle BAC$ следува $\triangle ARP\sim\triangle ABC$. Според тоа,



$$\overline{BR}=\overline{CP}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\cos\alpha},\ \overline{RP}=\overline{AP}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=4\operatorname{tg}\alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle BRP=\measuredangle ARB-\measuredangle ARP=\measuredangle AQC-\measuredangle ABC=2\alpha.$$

Сега од косинусната теорема за $\triangle BPR$ следува

$$4=\overline{BP}^2=\overline{BR}^2+\overline{RP}^2-2\overline{BR}\cdot\overline{RP}\cos 2\alpha=\frac{1+16\sin^2\alpha-8\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

па затоа

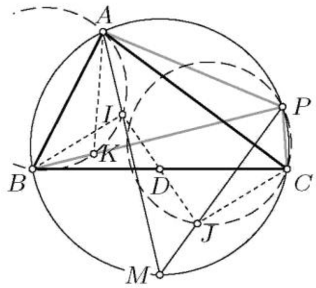
$$16x^3+20x^2-8x-3=0,$$

каде $x=\sin\alpha$. Решенијата на последната равенка се $x\in\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\}$, при што само $x=\frac{1}{2}$ има смисла. Значи, $\alpha=30^\circ$ и аглите на триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

11. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M\neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC. Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P\neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

Решение. При распоред како на цртежот, тврдењето $\overline{PB}-\overline{PC}=\overline{PA}$ е еквивалентно на

$$\sin\measuredangle BMP - \sin\measuredangle CMP = \sin\measuredangle IMP .$$



Бидејќи $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI}$ доволно е да се докаже дека $S_{BMP} - S_{CMP} = S_{IMP}$. Но,

$$\begin{aligned} S_{BMP} &= S_{BMDP} + S_{DMP} \\ &= S_{CMDP} + S_{DMP} \ , \\ &= S_{CMP} + 2S_{DMP} \end{aligned}$$

па затоа

$$S_{BMP} - S_{CMP} = 2S_{DMP} = S_{IMP} ,$$

со што доказот е завршен.

12. Во $\triangle ABC$ со плоштина S точката H е ортоцентар, точките D, E, F се соодветно подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C, а точките P, Q, R се редоследно симетрични на темињата A, B, C во однос на правите BC, CA, AB, соодветно. Познато е дека триаголниците DEF и PQR имаат еднакви плоштини T и дека $T > \frac{3}{5}S$. Докажи дека $T = S$.

Решение. Нека α, β, γ се аглите на $\triangle ABC$, а R е радиусот на неговата опишана кружница. Триаголниците CDE и CAB се слични со коефициент на сличност $\cos\gamma$, па затоа $P_{CDE} = S\cos^2\gamma$. Аналогно $P_{AEF} = S\cos^2\alpha$ и $P_{BFD} = S\cos^2\beta$. Затоа

$$P_{DEF} = | S - S\cos^2\alpha - S\cos^2\beta - S\cos^2\gamma | = S\,|\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2| .$$

Од друга страна важи

$$\begin{aligned} P_{PQR} &= P_{ABC} + P_{ABR} + P_{BCP} + P_{CAQ} - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP} \\ &= 4S - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP} . \end{aligned}$$

Понатаму,

$$P_{RAQ} = \tfrac{1}{2}\overline{AQ}\cdot\overline{AR}\sin 3\alpha = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha) = (3 - 4\sin^2\alpha)S .$$

Аналогно имаме

$$P_{PBR}=(3-4\sin^2\beta)S \text{ и } P_{QCP}=(3-4\sin^2\gamma)S,$$

па затоа

$$P_{PQR}=S\,|\,4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)-5\,|.$$

Да означиме $x=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$. Од $P_{PQR}=P_{DEF}=T$ следува дека $|x-2|=|4x-5|$, па затоа $x\in\{1,\frac{7}{5}\}$. За $x=\frac{7}{5}$ добиваме $T=|\frac{7}{5}-2|S=\frac{3}{5}S$, што противречи на условот на заадачата. Според тоа, $x=1$ и $T=S$.

13. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокракиот $\triangle ABC$ со основа AB. Правата AO го сече кракот BC во точката D. Познато е дека $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се цели броеви, а $\overline{AO}-\overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

Решение. Да означиме $\overline{AO}=R, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ и $\overline{OD}=d$. Бидејќи CO е симетрала на агол во $\triangle ACD$, добиваме

$$\frac{d}{R}=\frac{c}{b+c}.$$

Од друга страна, ако правата AO ја сече опишаната кружница во точката E, тогаш од својствата на секантите AE и BC следува дека

$$(R+d)(R-d)=bc.$$

Ако во последното равенство замениме $d=\frac{cR}{b+c}$, добиваме

$$R^2=\frac{(b+c)^2c}{b+2c}.$$

Нека

$$k=\mathrm{NZD}(b,c,R),\ m=\mathrm{NZD}(\tfrac{b}{k},\tfrac{c}{k}),\ R_1=\frac{R}{k},\ b_1=\frac{b}{km},\ c_1=\frac{c}{km}.$$

Тогаш

$$R_1^2=\frac{m^2(b_1+c_1)^2c_1}{b_1+2c_1}.$$

Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(m,R_1)=1 \text{ и } \mathrm{NZD}(b_1+2c_1,b_1+c_1)=\mathrm{NZD}(b_1+2c_1,c_1)=\mathrm{NZD}(b_1,c_1)=1,$$

добиваме $R_1^2=(b_1+c_1)^2c_1$ и $m^2=b_1+2c_1$. Според тоа, c_1 е точен квадрат, на пример $c_1=n^2$. Тогаш

$$c=kmc_1=kmn^2,\ b=kmb_1=km(m^2-2n^2) \text{ и } R=kR_1=kn(m-n^2).$$

Бидејќи $1>\sin\measuredangle BAC=\frac{b+c}{2R}=\frac{m}{2n}$, добиваме $n\sqrt{2}<m<2n$ (обратно, при овој услов триаголникот постои и е остроаголен, т.е. правата AO го сече кракот BC). Во случајов $n\geq 2$. Бидејќи $R-c=kn(m^2-n^2-mn)$ е прост број следува дека n е прост број, $k=1$ и $m^2-n^2-mn=1$, т.е.

$$(m-1)(m+1)=n(m+n).$$

Имаме две можности.

1) $m-1=nl$ и тогаш $l(nl+2)=nl+1+n$, т.е. $n=\frac{1-2l}{l^2-l-1}$. Последниот број е негативен за $l\geq 2$. Значи, $l=1$ и оттука $n=1$, што е противречност.

2) $m+1=nl$ и тогаш $l(nl-2)=nl-1+n$, т.е. $n=\frac{2l-1}{l^2-l-1}$. Последниот број не надминува 1 за $l\geq 3$, а за $l=1$ е еднаков на -1. Значи, $l=2$ и оттука

$$n=R-c=3, m=5, b=35, c=45.$$

14. Во $\triangle ABC$ точките M и N лежат соодветно на страните BC и AC. Отсечките AM и BN се сечат во точката P. Опишаните кружници околу $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ по втор пат се сечат во центарот I на впишаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ја должината на отсечката IP ако $\measuredangle ACB=45^\circ$ и $R_{ABC}=1$.

Решение. Имаме

$$\measuredangle ANI=\measuredangle API=180^\circ-\measuredangle MPI=\measuredangle MBI=\tfrac{1}{2}\beta,$$

па затоа $\triangle AIN\cong\triangle AIB$. Според тоа, $\overline{AN}=\overline{AB}$ и $AI\perp BN$. Аналогно се докажува дека $BI\perp AM$, што значи дека I е ортоцентар на $\triangle ABP$.

Бидејќи

$$\measuredangle APB=\measuredangle API+\measuredangle BPI=\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha),$$

добиваме

$$\overline{PI}=2R_{ABP}\cos\measuredangle APB=2R_{ABP}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}=2R_{ABP}\sin\tfrac{\gamma}{2}.$$

Од друга страна $R_{ABP}=R_{ABI}=2R_{ABC}\sin\frac{\gamma}{2}$. Според тоа,

$$\overline{PI}=4R_{ABC}\sin^2\tfrac{\gamma}{2}=2-\sqrt{2}.$$

15. Во кружница k со радиус 1 е впишан $\triangle ABC$. Точките I и I_a се соодветно центарот на впишаната кружница и центарот на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$. Правата BI ја сече AC во точка B_1, а правата AI ја сече BC во точка A_1. Правата B_1A_1 ја сече k во точки P и Q.

а) Докажи дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница.

б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$.

Решение. а) Од $\measuredangle IBI_a=\measuredangle ICI_a=90^\circ$ следува дека четириаголникот IBI_aC е тетивен. Според тоа,

$$\overline{A_1I}\cdot\overline{A_1I_a}=\overline{A_1B}\cdot\overline{A_1C}. \qquad (1)$$

Точките P,B,Q и C припаѓаат на k, па затоа

$$\overline{A_1P}\cdot\overline{A_1Q}=\overline{A_1B}\cdot\overline{A_1C}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\overline{A_1P}\cdot\overline{A_1Q}=\overline{A_1I}\cdot\overline{A_1I_a},$$

што значи дека точките I,I_a,P и Q лежат на една кружница.

б) Од а) имаме дека точките I,I_a,P и Q лежат на една кружница. Аналогно се докажува дека точките I,I_b,P и Q лежат на една кружница (I_b е центар на припишаната кружница кон страната AC на $\triangle ABC$). Според тоа, го бараме радиусот на опишаната кружница околу $\triangle II_aI_b$.

Ќе користиме, дека ако S е средината на лакот BC, тогаш $\overline{SI}=\overline{SI_a}=\overline{SB}$. За радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$ имаме

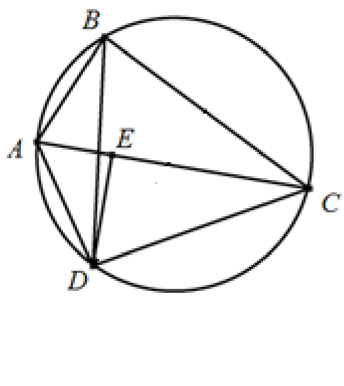
$$2r=\frac{\overline{II_a}}{\sin\measuredangle II_bI_a}=\frac{\overline{II_a}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\overline{SB}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=4R_{ABC}=4.$$

Според тоа, бараниот радиус е $r=2$.

16. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB}<\overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја преполовува искршената линија составена од отсечките BA и AC.

Решение. Треба да докажеме $\overline{EC}=\overline{AB}+\overline{AE}$. Нека $\gamma=\measuredangle BCD$. Од правоаголниот триаголник EAD и синусната теорема за триаголникот ADB следува

$$\overline{AE}=\overline{AD}\cos\gamma=2R\sin\measuredangle ACD\cos\gamma. \tag{1}$$



Од правоаголниот триаголник EDC и синусната теорема за триаголникот BDC следува

$$\overline{EC}=\overline{CD}\cos\measuredangle ACD=2R\sin\gamma\cos\measuredangle ACD. \tag{2}$$

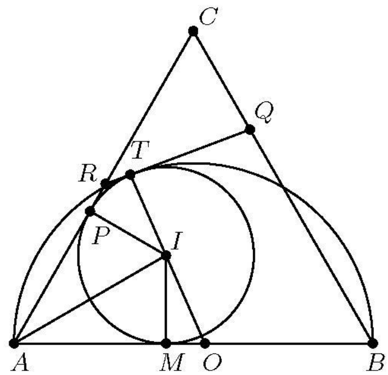
Од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}\overline{EC}-\overline{AE}&=2R(\sin\gamma\cos\measuredangle ACD-\sin\measuredangle ACD\cos\gamma)\\&=2R\sin(\gamma-\measuredangle ACD)\\&=2R\sin\measuredangle ACB=\overline{AB}.\end{aligned}$$

17. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Над страната AB како над дијаметар е конструирана кружница k. Кружница внатрешно ги допира кружницата k во точката T и страните AN и AC. Тангентата на k во точката T ја сече страната BC во точката Q. Ако $\overline{AB}=6$, определи ја должината на отсеч-

ката CQ.

Решение. Средината на AB да ја означиме со O, допирните точки на кружницата $k'(I,r)$ со AB и AC да ги означиме со M и P, соодветно и нека $TQ\cap AC=R$.



Имаме

$\overline{AM}=r\sqrt{3},\overline{OM}=3-r\sqrt{3},\overline{OI}=3-r$

и од правоаголниот $\triangle OMI$ наоѓаме

$$r^2+(3-r\sqrt{3})^2=(3-r)^2,$$

т.е.

$$r=2\sqrt{3}-2.$$

Ако $\overline{RC}=x$, тогаш

$$\overline{RT}=\overline{RP}=6-x-r\sqrt{3}=2\sqrt{3}-x$$

и степенот на точката R во однос на кружницата k' е

$$(3-x)(6-x)=(2\sqrt{3}-x)^2,$$

па затоа $x=\frac{18+8\sqrt{3}}{11}$. Ако $\measuredangle OIM=\varphi$, тогаш

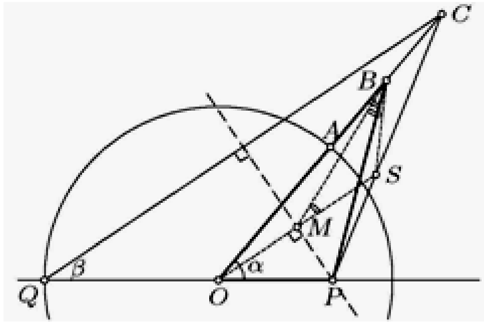
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4} \text{ и } \measuredangle ORC=60^\circ-\varphi.$$

Од синусната теорема за $\triangle RQC$ дбиваме

$$\overline{CQ}=x\frac{\sin(60^\circ-\varphi)}{\sin(60^\circ+\varphi)}=x\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{18+8\sqrt{3}}{11}\cdot\frac{4\sqrt{3}-(3-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})}=2.$$

18. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A\in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA}=\overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC. Нека точката $Q\in k$ е таква што $\measuredangle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle POB=2\measuredangle PBO$.

Решение. *Прв начин*. Нека S е точка на отсечката CP таква што $\overline{PS}=\overline{PO}$, а M е средина на отсечката OS. Тогаш



$$\overline{CS}=\overline{QO}=\overline{CA} \text{ и } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{CS}}{\overline{CO}}=\frac{1}{2}$$

следува $\triangle CBS\sim\triangle CSO$ и оттука

$$\overline{SB}=\tfrac{1}{2}\overline{OS}=\overline{SM}$$

и

$$\measuredangle SOP = \measuredangle OSP = 180^\circ - \measuredangle CSO = 180^\circ - \measuredangle CBS = \measuredangle OBS .$$

Според тоа, PS и PO се тангенти на опишаната кружница на $\triangle BSO$, а BP е негова симедијана. Сега важи

$$\measuredangle OBP = \measuredangle MBS = \frac{180^\circ - \measuredangle BSM}{2} = \frac{\measuredangle CSB + \measuredangle OSP}{2} = \frac{\measuredangle COS + \measuredangle SOP}{2} = \frac{\measuredangle BOP}{2} .$$

Втор начин. Да означиме $\measuredangle POC = \alpha$, $\measuredangle OQC = \beta$ и $\overline{OA} = 1$. Доволно е да докажеме дека

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = 1 + 2\cos\alpha .$$

Според синусната теорема имаме

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\sin\measuredangle OCQ}{\sin\measuredangle OQC} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta} = \sin\alpha \operatorname{ctg}\beta - \cos\alpha ,$$

т.е. $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ и оттука

$$\sin\beta\cos\beta = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \frac{2\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{5+4\cos\alpha} .$$

Понатаму, бидејќи

$$\overline{QC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \text{ и } \overline{QP} = \frac{\overline{QC}}{2\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\beta\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha}$$

имаме

$$\overline{OP} = 1 - \overline{QP} = 1 - \frac{5+4\cos\alpha}{2+4\cos\alpha} = \frac{3}{2+4\cos\alpha} .$$

Конечно, од $\overline{OB} = \frac{3}{2}$ следува $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = 1 + 2\cos\alpha$.

19. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните AB и AC во точките P и Q, соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира впишаната кружница во триаголникот ABC ако и само ако $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{BC}$.

Решение. *Прв начин*. Означуваме:

$$\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = b, \measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle CBA = \beta, \measuredangle ACB = \gamma \text{ и } \overline{IP} = \overline{IQ} = r .$$

Нека $CK \cap BL = \{D\}$, направи цртеж. Од

$$\measuredangle BKL = \measuredangle BKP = 180^\circ - \measuredangle BPK - \measuredangle KBP = \measuredangle APK - \measuredangle KBP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} ,$$

т.е. $\measuredangle IKL = \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle IKQ + \measuredangle QCI = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, следува дека четириаголникот $IKQC$ е тетивен, при што $\measuredangle IKC = \measuredangle IQC = 90^\circ$. Аналогно се добива дека $\measuredangle ILB = 90^\circ$. Сега, $\measuredangle BKC = \measuredangle BLC = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $CBLK$ е тетивен, а како $\measuredangle ILD=\measuredangle DKI=90^\circ$ заклучуваме дека и четириаголникот $ILDK$ е тетивен (дијаметрите на кружниците опишани околу четириаголниците $CBLK$ и $ILDK$ се отсечките BC и ID, соодветно). Од синусната теорема за $\triangle LDK$ следува

$$\overline{KL}=\overline{ID}\sin\measuredangle LDK=\overline{ID}\cos\measuredangle LCK\,.$$

Слично, од $\triangle CLK$ следува $\overline{LK}=a\sin\measuredangle LCK$, па затоа $\overline{ID}=a\operatorname{tg}\measuredangle LCK$. Од $\triangle CBK$ добиваме $\measuredangle ICK=90^\circ-\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}$, т.е. $\measuredangle LCK=\frac{\alpha}{2}$, што значи дека $\overline{ID}=a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Исто така, имаме дека

$$r=\overline{AQ}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, што значи ако и само ако $a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, т.е. ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме истите ознаки како и при првиот начин на решавање, при што се s ќе го означиме полупериметарот на $\triangle ABC$. Слично како во првиот начин на решавање докажуваме $\measuredangle IKC=\measuredangle ILB=90^\circ$, како и тоа дека четириаголникот $DKIL$ е тетивен. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката R. Да забележиме дека I е ортоцентар на $\triangle CBD$, па затоа $DI\perp BC$, т.е. точките D,I,R се колинеарни. Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, т.е. $\overline{RD}=2r$. Од

$$\measuredangle KDI=\measuredangle KLI=\measuredangle KBC=\measuredangle IBR$$

следува дека правоаголните триаголници CRD и IRB се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RD}}=\frac{\overline{IR}}{\overline{BR}}\,,$$

т.е.

$$\overline{DR}\cdot r=\overline{DR}\cdot\overline{IR}=\overline{BR}\cdot\overline{CR}=(s-b)(s-c),$$

па затоа $\overline{RD}=2r$ ако и само ако

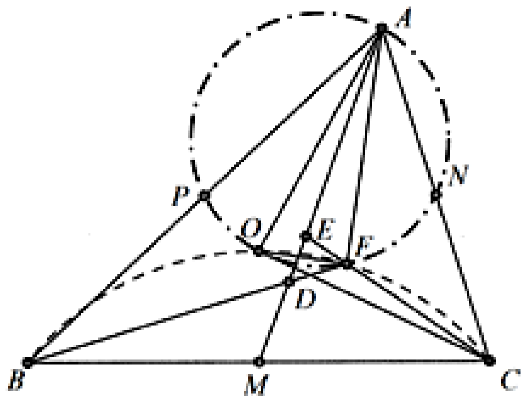
$$(s-b)(s-c)=2r^2=\frac{2P^2}{s^2}=\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\,,$$

односно ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

20. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со средини на страните BC,CA и AB соодветно M,N и P. Нека симетралите на AB и AC ја сечат полуправата AM соодветно во точките D и E, а правите BD и CE се сечат во точката F, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Докажи дека точките A,N,F и P се концикличи.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека $\measuredangle AFO = 90^\circ$, од каде заради $\measuredangle APO = \measuredangle ANO = 90^\circ$ следува дека точките A, O, N, F и P лежат на кружница со дијаметар AO. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AB} > \overline{AC}$, при што ја добиваме конфигурацијата прикажана на цртежот подолу. Триаголниците ADB и AEC се рамнокраки со $\overline{AD} = \overline{BD}$ и $\overline{AE} = \overline{CE}$, соодветно. Да означиме

$$\measuredangle ABD = \measuredangle BAD = x \text{ и } \measuredangle CAE = \measuredangle ACE = y \text{, т.е. } x + y = \measuredangle BAC.$$



Од синусната теорема за $\triangle ABF$ и $\triangle ACM$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{BM}}{\sin x} = \frac{\overline{AB}}{\sin \measuredangle BMA} \text{ и } \frac{\overline{CM}}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\sin \measuredangle CMA}.$$

Ако ги поделиме овие равенства и искористиме дека $\sin \measuredangle BMA = \sin \measuredangle CMA$, добиваме $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Од синусната теорема за $\triangle ABF$ и $\triangle ACF$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{AF}}{\sin x} = \frac{\overline{AB}}{\sin \measuredangle AFB} \text{ и } \frac{\overline{AF}}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\sin \measuredangle AFC}.$$

Оттука $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\overline{AC} \sin \measuredangle AFB}{\overline{AB} \sin \measuredangle AFC}$ и затоа $\sin \measuredangle AFB = \sin \measuredangle AFC$.

Бидејќи $\measuredangle ADF$ е надворешен за за $\triangle ADB$ имаме $\measuredangle EDF = 2x$ и аналогно $\measuredangle DEF = 2y$. Според тоа,

$$\measuredangle EDF = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\measuredangle BAC.$$

Тогаш $\measuredangle BFC = 2\measuredangle BAC = \measuredangle BOC$ и четириаголникот $BOFC$ е тетивен. Освен тоа,

$$\measuredangle AFB + \measuredangle AFC = 360^\circ - 2\measuredangle BAC > 180^\circ$$

и значи

$$\measuredangle AFB = \measuredangle AFC = 180^\circ - \measuredangle BAC.$$

Тогаш од тетивниот четриаголник $BOFC$ и рамнокракиот $\triangle BOC$ имаме

$$\measuredangle OFB = \measuredangle OCB = 90^\circ - \measuredangle BAC .$$

Според тоа,

$$\measuredangle AFO = \measuredangle AFB - \measuredangle OFB = (180^\circ - \measuredangle BAC) - (90^\circ - \measuredangle BAC) = 90^\circ .$$

21. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CC_1 на $\measuredangle ACB, C_1 \in AB$. Точките $P \in C_1B,\ Q \in BC, R \in AC$ и $S \in AC_1$ се такви што

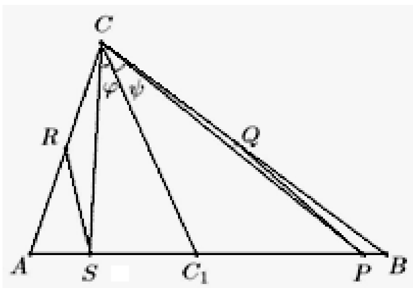
$$\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC} \text{ и } \overline{CR} = \overline{RS} = \overline{SC_1} .$$

Докажи дека CC_1 е симетрала на $\measuredangle SCP$.

Решение. Да означиме

$$\measuredangle SCC_1 = \varphi, \measuredangle PCC_1 = \psi \text{ и } \measuredangle PC_1C = \delta .$$

Од $\triangle PQC$ имаме $\cos(\frac{\gamma}{2} - \psi) = \frac{\overline{CP}}{2\overline{CQ}}$, а од синусната теорема за $\triangle PC_1C$ добиваме $\frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}} = \frac{\sin\delta}{\sin\psi}$.



Бидејќи $\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC}$, од горните равенства добиваме

$$\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \psi)\sin\psi = \tfrac{\sin\delta}{2} .$$

Аналогно, од $\triangle SCR$ и $\triangle SC_1C$ добиваме дека важи

$$\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \varphi)\sin\varphi = \tfrac{\sin\delta}{2} .$$

Според тоа,

$$\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \varphi)\sin\varphi = \cos(\tfrac{\gamma}{2} - \psi)\sin\psi ,$$

па затоа $\sin\frac{\gamma}{2} + \sin(2\varphi - \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\gamma}{2} + \sin(2\psi - \frac{\gamma}{2})$, т.е. $2\varphi + 2\psi - \gamma = 180^\circ$ или $\varphi = \psi$. Бидејќи $\gamma > \varphi + \psi$, добиваме $2\varphi + 2\psi - \gamma < \gamma < 180^\circ$, т.е. првото равенство не е можно. Значи, $\varphi = \psi$, што значи дека CC_1 е симетрала на $\measuredangle SCP$.

22. Во $\triangle ABC$ е впишан петаголник $AMNPQ$ со еднакви должини на страни, при што $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се сечат во точката

S , а со l ја означуваме симетралата на $\measuredangle MSQ$. Докажи дека $OI \parallel l$, каде O и I се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

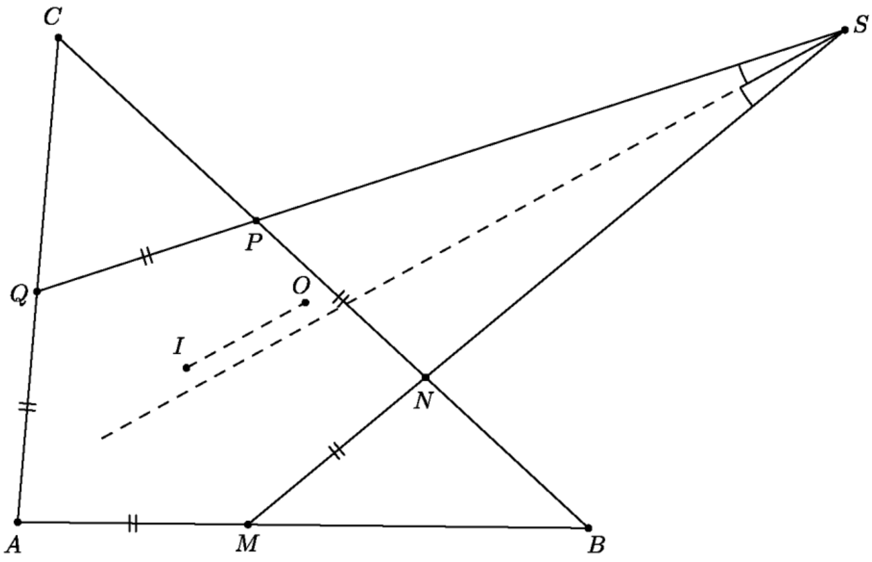
Решение. Со $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ да ги означиме соодветно $\measuredangle BAC, \measuredangle ABC, \measuredangle ACB,$ $\measuredangle MNB$ и $\measuredangle CPQ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека должината на страната на $AMNPQ$ е еднаква на 1. Го разгледуваме случајот во кој $\overline{AB} < \overline{BC}$.

Тогаш

$$\overline{BN} = (c-1)\cos\beta + \cos\delta \text{ и } \overline{CP} = (b-1)\cos\gamma + \cos\varepsilon.$$

Но, $a = 1 + \overline{BN} + \overline{CP}$, што е еквивалентно $\cos\delta + \cos\varepsilon = \cos\beta + \cos\gamma - 1$. Од синусната теорема за $\triangle BNM$ следува $\frac{c-1}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin\beta}$, а од истата теорема за $\triangle CPQ$ добиваме $\frac{b-1}{\sin\varepsilon} = \frac{1}{\sin\gamma}$. Од последните две равенства го добиваме равенството $\sin\varepsilon - \sin\delta = \sin\beta - \sin\gamma$. Според тоа,

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon-\delta}{2} = \frac{\sin\varepsilon - \sin\delta}{\cos\varepsilon + \cos\delta} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma - 1}.$$



Понатаму, l зафаќа агол од $90^\circ - \frac{\varepsilon-\delta}{2}$ со правата BC. Нека φ е остриот агол меѓу правите IO и BC. Тогаш $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r - R\cos\alpha}{\frac{1}{2}(b-c)}$.

Ќе докажеме дека $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon-\delta}{2}$, од каде ќе следува дека $OI \parallel l$. Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{r - R\cos\alpha}{\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma - 1}{\sin\beta - \sin\gamma}.$$

Имаме, $b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$ и последното равенство се сведува на $\frac{r}{R}+1=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. Конечно, ако ја искористиме добро познатата формула $r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ со соодветни трансформации добиваме дека е точно претходното равенство.

23. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\measuredangle ACB=45^\circ$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$ и $\overline{BM}=m$, каде M е средината на AC.

а) Ако $\alpha=\measuredangle BAC$, изрази го m како функција од $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Определи ги сите вредности на m, за кои $\measuredangle BAC$ е еднозначно определен.

Решение. Ќе ги бараме оние вредности на m за кои $\alpha\in(0,135^\circ)$ е еднозначно определен.

а) Од синусната теорема следува $\overline{BC}=2\sin\alpha$, а $\overline{AC}=2\sin(45^\circ+\alpha)$. Сега, од формулата за должината на медијаната наоѓаме

$$m^2=\overline{BM}^2=\frac{2\overline{AB}^2+2\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{4}=1+2\sin^2\alpha-\sin^2(45^\circ+\alpha).$$

Ако ставиме $\operatorname{ctg}\alpha=t$, тогаш $t\in(-1,+\infty)$ и од идентитетите

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+t^2} \text{ и } \sin(45^\circ+\alpha)=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}=\frac{(t+1)^2}{2(t^2+1)},$$

по замената и средувањето на изразот добиваме

$$m=\sqrt{\frac{t^2-2t+5}{2(t^2+1)}}.$$

б) Изразот по а) е еквивалентен на изразот

$$(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2=0.$$

Нека $f(t)=(1-2m^2)t^2-2t+5-2m^2$. Бројот на различните агли $\measuredangle BAC$ соодветствува на бројот на решенијата на равенката $f(t)=0$ во интервалот $t\in(-1,+\infty)$. Така, задачата се сведува на наоѓање на вредностите на параметарот m за кои равенката $f(t)=0$ има единствено решение $t\in(-1,+\infty)$. Ако функцијата е линеарна, тогаш $1-2m^2=0$, па $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и единствено решение е $t=2>-1$. Ако

$$D=1-(5-2m^2)(1-2m^2)=0,$$

тогаш $m^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, па $m=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$, при што и во двата случаи двојниот корен на равенката е во саканиот интервал. Ако пак $D>0$, тогаш потребно и доволно е да биде исполнето

$$(1-2m^2)f(-1)\le0, \text{ т.е. } (8-2m^2)(1-2m^2)\le0,$$

од каде добиваме $m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$. Конечно, аголот $\measuredangle BAC$ е еднозначно определен ако и само ако $m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 2] \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$.

24. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, а M и N се средините на страните AB и BC. Правата CO ја преполовува отсечката M. Определи ја најмалата можна вредност на $\measuredangle BAC$.

Решение. Ако $K = CO \cap MN$, тогаш

$$\frac{\overline{MK}}{\sin\measuredangle MOK} = \frac{\overline{MO}}{\sin\measuredangle MKO} = \frac{\overline{NK}}{\sin\measuredangle NOK} = \frac{\overline{NO}}{\sin\measuredangle NKO}$$

и затоа

$$1 = \frac{\overline{MK}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{NO}} \cdot \frac{\sin\measuredangle MOK}{\sin\measuredangle NOK} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Бидејќи $\alpha > \beta$ и $\gamma < 90^\circ$, добиваме $\alpha > 45^\circ$. Ако $\alpha < 75^\circ$, следува дека $\sin 2\beta = 2\sin 2\alpha > 1$, што е противречност. Значи, $\alpha \geq 75^\circ$. За $\alpha = 75^\circ$ добиваме $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$. Лесно се проверува дека триаголникот со овие агли ги задоволува условите на задачата.

25. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD < 180^\circ$. Правите AB и CD се сечат во точката E. Докажи дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ ако и само ако е исполнето равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

Решение. Ставаме $\measuredangle ABC = \beta, \measuredangle ADC = \delta, \measuredangle BAC = \varphi$ и $\measuredangle CAD = \psi$ (види цртеж). Од условот на задачата следува дека точката A е меѓу точките E и B и точката D е меѓу точките E и C. Освен тоа,

$$\measuredangle AEC = 180^\circ - (\beta + \measuredangle ECB) = 180^\circ - \beta - (360^\circ - \beta - \varphi - \psi - \delta) = \varphi + \psi + \delta - 180^\circ.$$

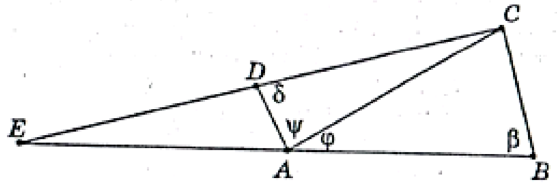
Ако последователно ја примениме синусната теорема на триаголниците ACD, ACE, ABC и повторно на ACE добиваме

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\psi}{\sin\delta}, \\
\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle EAC}{\sin\measuredangle AEC} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin(\varphi+\psi+\delta-180^\circ)} = -\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi+\delta)}, \\
\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta}, \\
\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin\measuredangle ACE}{\sin\measuredangle AEC} = -\frac{\sin(\psi+\delta)}{\sin(\varphi+\psi+\delta)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Оттука, ако ги искористиме (1) добиваме дека равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CE} - \overline{AB}\cdot\overline{AE}$$

последователно е еквивалентно на равенствата



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - 1 = 0$$

$$-\frac{\sin\psi}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi+\delta)} + \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\psi+\delta)}{\sin(\varphi+\psi+\delta)} - 1 = 0,$$

$$\sin(\beta+\varphi)\sin(\psi+\delta)\sin\delta - \sin\psi\sin\varphi\sin\beta - \sin\delta\sin\beta\sin(\varphi+\psi+\delta) = 0.$$

Ако прво ги искористиме тригонометриските формули за производ на синуси, потоа тригонометриските формули за разлика на косинуси, па за разлика на синуси и на крајот за разлика на косинуси, добиваме дека последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\sin(\beta-\delta)\sin(\psi+\delta)\sin\varphi = 0\,.$$

Јасно, $\sin\varphi \neq 0$ и $\sin(\psi+\delta) \neq 0$, па затоа последното равенство е еквивалелнтно со равенството $\sin(\beta-\delta) = 0$, т.е. со равенството $\beta = \delta$.

26. Даден е $\triangle ABC$ со симетрали на агли BM и CN ($M \in AC$, $N \in AB$). Полуправата MN ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{BD}} = \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{CD}}\,.$$

Решение. Нека A_1, B_1 и C_1 се соодветно ортогоналните проекции на D врз правите BC, CA и AB (направи цртеж). Од $\triangle DAB_1$ и синусната теорема следува

$$\overline{DB_1} = \overline{DA}\sin\measuredangle DAB_1 = \overline{DA}\sin\measuredangle DAC = \frac{\overline{DA}\cdot\overline{DC}}{2R}\,,$$

(R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$). Аналогно,

$$\overline{DA_1} = \frac{\overline{DB}\cdot\overline{DC}}{2R} \text{ и } \overline{DC_1} = \frac{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}{2R}\,.$$

Равенството кое треба да го докажеме е еквивалентно на равенството

$$\overline{AD}\cdot\overline{CD} = \overline{BD}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BD}\,,$$

т.е. треба да докажеме дека

$$\overline{DB_1} = \overline{DA_1} + \overline{DC_1}\,. \tag{1}$$

Со m да го означиме растојанието од M до AB и BC, а со n растојанието од N до AC и BC. Нека $\frac{\overline{DM}}{\overline{MN}} = x$ ($x > 1$). Тогаш

$$\frac{\overline{DB_1}}{n}=x, \frac{\overline{DC_1}}{m}=x-1 \text{ и } \frac{\overline{DA_1}-m}{n-m}=x .$$

Оттука

$$\overline{DB_1}=nx, \overline{DC_1}=m(x-1) \text{ и } \overline{DA_1}=nx-m(x-1)=\overline{DB_1}-\overline{DC_1} ,$$

со е докажано равенството (1).

27. Кружница низ темето C на $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката R и ги сече страните AC и BC соодветно во точките P и Q така што

$$\overline{AR}\cdot\overline{BR}=\overline{CR}^2 \text{ и } \overline{AP}\cdot\overline{BQ}=\overline{CP}\cdot\overline{CQ} .$$

Докажи дека CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

Решение. Ставаме $\measuredangle BAC=\alpha, \measuredangle ABC=\beta, \measuredangle ACR=\varphi$ и $\measuredangle BCR=\psi$. Тогаш $\measuredangle ARP=\varphi$ и $\measuredangle BRD=\psi$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\overline{AP}}{\overline{RP}}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ и $\frac{\overline{CP}}{\overline{RP}}=\frac{\sin(\alpha+2\varphi)}{\sin\varphi}$, па затоа $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha+2\varphi)}$. Аналогно, $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}=\frac{\sin^2\psi}{\sin\beta\sin(\beta+2\psi)}$.

Затоа

$$\overline{AP}\cdot\overline{BQ}=\overline{CP}\cdot\overline{CQ} \iff \sin^2\varphi\sin^2\psi=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi) .$$

На сличен начин следува дека

$$\overline{AR}\cdot\overline{BR}=\overline{CR}^2 \iff \sin\varphi\sin\psi=\sin\alpha\sin\beta .$$

Значи,

$$\sin\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi) ,$$

т.е.

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi)-\cos(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi) .$$

Бидејќи $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi)=360^\circ$, важи

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi) ,$$

т.е.

$$\sin(\alpha-\beta+\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi)=0 .$$

Според тоа, $\alpha+\varphi=\beta+\psi=90^\circ$ или $\varphi=\psi$, т.е. CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

28. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ се повлечени тежишната линија AM и висината AH. На правите AB и AC се избрани точките Q и P соодветно при што $QM\perp AC$ и $PM\perp AB$. Опишаната кружница околу $\triangle PMQ$ по втор пата ја сече правата BC во точката X. Докажи дека $\overline{BH}=\overline{CX}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека $PM\cap AB=\{Z\}$, $QM\cap AC=\{Y\}$ и опишаната кружница ω околу $\triangle PMQ$ по втор пат ја сече правата AB во точката T (направи цртеж).

Имаме, $\measuredangle PMQ = 180^\circ - \alpha$ и како четириаголникот $MQTP$ е тетивен добиваме $\measuredangle ATP = \alpha = \measuredangle PAT$. Оттука $\overline{PT} = \overline{PA}$ и $\overline{AT} = 2\overline{AZ}$. Според тоа,

$$\overline{BT} = \overline{AT} - \overline{AB} = 2\overline{AZ} - \overline{AB} = \overline{AB} - 2\overline{BZ} = c - a\cos\beta .$$

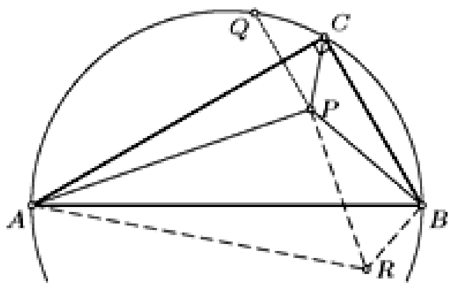
Од друга страна, од синусната теорема за $\triangle BQM$, во кој $\measuredangle BQM = 90^\circ - \alpha$ и $\measuredangle BMQ = 90^\circ - \gamma$, добиваме $\overline{BQ} = \frac{\overline{BM}\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

Понаааму,од степенот на точката B во однос на кружницата ω добиваме $\overline{BX}\cdot\overline{BM} = \overline{BQ}\cdot\overline{BT}$, па затоа $\overline{BX} = \frac{\cos\gamma(c - a\cos\beta)}{\cos\alpha}$. Бидејќи $\overline{CH} = b\cos\gamma$ и $\overline{BH} = \overline{CX}$ ако и само ако $\overline{BX} = \overline{CH}$, бараното равенство е еквивалентно со равенството $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$. Последното равенство следува од косинусната теорема, т.е. од равенствата

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ и } \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} .$$

29. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC $(\measuredangle ACB = 90^\circ)$ земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4, \overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Да означиме $\alpha = \measuredangle BAC$. Нека R е точка таква што триаголниците ARB и APC се слични и еднакво ориентирани (цртеж десно). Од $\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и $\measuredangle RAP = \measuredangle BAC$ следува $\triangle ARP \sim \triangle ABC$. Според тоа,



$$\overline{BR} = \overline{CP}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\overline{RP} = \overline{AP}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 4\operatorname{tg}\alpha \text{ и}$$

$$\measuredangle BRP = \measuredangle ARB - \measuredangle ARP = \measuredangle AQC - \measuredangle ABC = 2\alpha .$$

Сега од косинусната теорема за $\triangle BPR$ следува

$$4 = \overline{BP}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{RP}^2 - 2\overline{BR}\cdot\overline{RP}\cos 2\alpha = \frac{1+16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

па затоа $16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0$, каде $x = \sin\alpha$. Решенијата на последната равенка се $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$, при што само $x = \frac{1}{2}$ има смисла. Значи, $\alpha = 30^\circ$ и аглите на триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

30. Даден е остроаголен $\triangle PBC, \overline{PB} \neq \overline{PC}$. Точките A и D припаѓаат соодветно на страните PB и PC, а точките M и N се соодветно средините на отсечките BC и AD. Правите AC и BD се сечат во точката O, и од точката O се повлечени нормали $OE \perp AB, E \in AB$ и $OF \perp CD, F \in CD$.

а) Докажи дека, ако точките A, B, C, D се конциклични, тогаш

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Дали од

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM},$$

следува дека точките A, B, C, D се конциклични?

Решение. а) Со Q и R да ги означиме средините на OB и OC (направи цртеж). Лесно се гледа дека $\overline{EQ} = \frac{\overline{OB}}{2} = \overline{RM}$ и аналогно $\overline{MQ} = \overline{RF}$. Освен тоа,

$$\measuredangle EQM = \measuredangle EQO + \measuredangle OQM = 2\measuredangle EBO + \measuredangle OQM$$

и аналогно

$$\measuredangle MRF = 2\measuredangle FCO + \measuredangle ORM.$$

Од условот следува

$$\measuredangle EBO = \measuredangle FCO = \frac{AD}{2} \text{ и } \measuredangle OQM = \measuredangle ORM$$

(четириаголникот $MROQ$ е паралелограм). Затоа $\measuredangle EQM = \measuredangle MRF$, па како $\overline{EQ} = \overline{RM}$ и $\overline{MQ} = \overline{RF}$ добиваме $\triangle EQM \cong \triangle MRF$. Според тоа, $\overline{EM} = \overline{FM}$. Аналогно се докажува дека $\overline{EN} = \overline{FN}$ и затоа важи

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Да означиме $\overline{OA} = 2a, \overline{OB} = 2b, \overline{OC} = 2c, \overline{OD} = 2d$, $\measuredangle OAB = \alpha$, $\measuredangle OBA = \beta$, $\measuredangle ODC = \gamma$ и $\measuredangle OCD = \delta$. Имаме

$$\cos\measuredangle EQM = \cos(\measuredangle EQO + \measuredangle OQM) = \cos(2\beta + \measuredangle AOB) = -\cos(\alpha - \beta).$$

Тогаш од косинусната теорема за $\triangle EQM$ добиваме

$$\overline{EM}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha - \beta).$$

Оттука и од аналогните изрази за $\overline{EN}^2$, $\overline{FN}^2$ и $\overline{FM}^2$, добиваме дека равенството $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$ е еквивалентно со равенството

$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos(\gamma - \delta))(b^2 + c^2 + 2bc\cos(\alpha - \beta)) =$$
$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos(\alpha - \beta))(b^2 + c^2 + 2bc\cos(\gamma - \delta))$$

т.е. со равенството

$$(ab - cd)(ac - bd)(\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta)) = 0.$$

Бидејќи $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, од равенството $\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$ следува дека се можни два случаја: кога $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ (тоа значи дека точките A, B, C, D

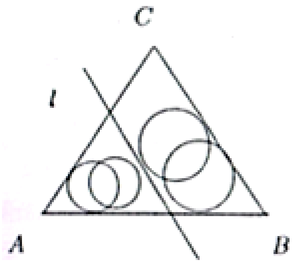
се конциклични) и кога $\alpha=\delta$ и $\beta=\gamma$ (тоа значи $AB \| CD$, што не е можно). Равенството $ac-bd=0$ значи дека точките A, B, C, D се конциклични, а од равенството $ab-cd=0$ следува $AD \| BC$.

Од претходните разгледувања следува, дека кога $AD \| BC$ добиваме

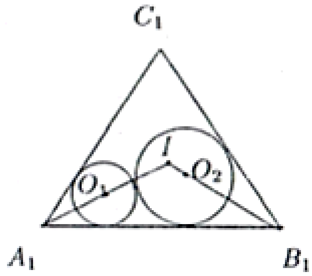
$$\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM},$$

но притоа не е можно точките A, B, C, D да се концклични, бидејќи тогаш $\overline{PB}=\overline{PC}$. Според тоа, од равенството $\overline{EM}\cdot\overline{FN}=\overline{EN}\cdot\overline{FM}$ не следува дека точките A, B, C, D се конциклични.

31. Определи ја должината на страната на најмалиот рамностран триаголник во кој може да се постават три кружници со радиуси 2, 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки.



Решение. Нека во рамностран $\triangle ABC$ се поставени две кружници со радиуси 3 и 4, кои немаат заеднички внатрешни точки. Јасно, постои права l која ги разделува, т.е. кружниците лежат во различни полурамнини во однос на l (цртеж лево). Оваа права го дели триаголникот на триаголник и четириаголник или на два триаголника. И во двата случаја секоја од кружниците може да се премести во фигурата која ја содржи така што кружницата ќе се допре до две страни на $\triangle ABC$. Јасно, новите две кружници немаат заеднички внатрешни точки. Нека овие кружници се впишани соодветно во $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$.



Ја преместуваме страната BC паралелно на самата себе кон темето A, додека кружницата впишана во $\measuredangle B$ не се допре до кружницата впишана во $\measuredangle A$ (цртеж десно). Добиваме рамностран $\triangle A_1B_1C_1$ со помала страна, во кој се поставени две кружници со радиуси 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки. Нека $\overline{A_1B_1}=x$, I е центар на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$, а O_1 и O_2 се центрите на двете кружници. Тогаш

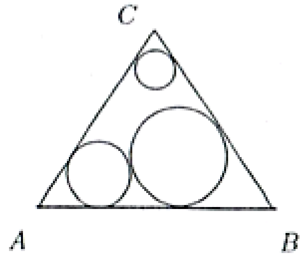
$$\overline{A_1I}=\overline{B_1I}=\tfrac{x}{\sqrt{3}},\ \overline{A_1O_1}=6,\ \overline{B_1O_2}=8.$$

Бидејќи кружницата со радиус 4 се содржи во $\triangle A_1B_1C_1$, добиваме $O_2 \in IB_1$. Затоа $\overline{B_1O_2}<\overline{IB_1}$, т.е. $x \geq 8\sqrt{3}$. Од друга страна

$$\overline{O_1I}=\tfrac{x}{\sqrt{3}}-6,\ \overline{O_2I}=\tfrac{x}{\sqrt{3}}-8,\ \overline{O_1O_2}=7$$

и од косинусната теорема за $\triangle O_1O_2I$ следува

$$(\frac{x}{\sqrt{3}}-6)^2+(\frac{x}{\sqrt{3}}-8)^2+(\frac{x}{\sqrt{3}}-6)(\frac{x}{\sqrt{3}}-8)=49.$$



Бидејќи $x\geq 8\sqrt{3}$, од последната равенка добиваме $x=11\sqrt{3}$. Според тоа, $\overline{AB}\geq 11\sqrt{3}$. Од друга страна во рамностран $\triangle ABC$ со страна $11\sqrt{3}$ може да се поставаат три кружници со радиуси 2, 3 и 4 (без заеднички внатрешни точки) ако кружниците ги впишеме во трите агли на триаголникот (цртеж десно).

4 НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека во правоаголен триаголник важи $a+b<c+h$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h е должината на висината повлечена кон хипотенузата.

Решение. Имаме:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c^2+2ch$$
$$< c^2+2ch+h^2 = (c+h)^2,$$

па затоа $a+b<c+h$.

2. Нека a,b и c се страни на триаголник и

$$A = \frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \text{ и}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Докажи дека $AB \geq 9$.

Решение. Од

$$(a+b-c)(b+c-a) = b^2-(c-a)^2 \leq b^2$$

и аналогните неравенства добиваме

$$B \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Освен тоа,

$$A-(a+b+c) = \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува:

$$AB \geq (a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}) \geq 9.$$

3. Докажи го неравенството

$$(t_a^2+t_b^2+t_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \geq 27P^2,$$

каде h_a,h_b,h_c се должините на висините, t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии и P е плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\; t_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4},\; t_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4},$$

тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}(t_a^2+t_b^2+t_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)&=\tfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\\&\geq\tfrac{3}{4}(ah_2+bh_b+ch_c)^2\\&=\tfrac{3}{4}(3\cdot 2P)^2=27P^2.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако a^2,b^2,c^2 и h_a^2,h_b^2,h_c^2 се пропорционални, што значи ако и само ако триаголникот е рамностран.

4. Нека t_a,t_b,t_c се должините на тежишните линии повлечени соодветно од темињата A,B,C во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$t_at_b+t_bt_c+t_ct_a<\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

Решение. *Лема*. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник, тогаш важи

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca). \tag{1}$$

Доказ. Од неравенството на триаголник следува

$$a(b+c-a)>0,\ b(c+a-b)>0,\ c(a+b-c)>0.$$

Сега, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (1). ■

Прв начин. Ако тежишната линија t_a ја продолжиме два пати, тогаш од соодветниот паралелограм добиваме $2t_a<b+c$, т.е. $t_a<\frac{b+c}{2}$. Аналогно се добива $t_b<\frac{c+a}{2}$ и $t_c<\frac{a+b}{2}$. Сега, од последните три неравенства и од лемата следува

$$\begin{aligned}t_at_b+t_bt_c+t_ct_a&<\tfrac{ab+ac+bc+b^2}{4}+\tfrac{ab+ac+bc+a^2}{4}+\tfrac{ab+ac+bc+b^2}{4}\\&=\tfrac{3}{4}(ab+bc+ca)+\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\leq\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Втор начин. Ќе користиме

$$t_a^2=\tfrac{b^2+c^2}{2}-\tfrac{a^2}{4},\ t_b^2=\tfrac{c^2+a^2}{2}-\tfrac{b^2}{4},\ t_c^2=\tfrac{a^2+b^2}{2}-\tfrac{c^2}{4}. \tag{2}$$

Како и во првиот начин на решавање имаме $t_a<\frac{b+c}{2}$, $t_b<\frac{c+a}{2}$ и $t_c<\frac{a+b}{2}$, од каде следува $t_a+t_b+t_c<a+b+c$. Последното неравенство го квадрираме и ако ги искористиме равенствата (2), по средувањето на десната страна добиваме

$$\tfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}+2(t_at_b+t_bt_c+t_ct_a)<a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

па ако ја искористиме лемата добиваме

$$t_at_b+t_bt_c+t_ct_a<\tfrac{a^2+b^2+c^2}{8}+ab+bc+ca<\tfrac{5}{4}(ab+bc+ca).$$

5. На страната BC на триаголникот ABC се дадени точки D и E, при што D е меѓу B и E. Ако p_1 и p_2 се соодветно периметрите на триаголниците ABC и ADE, докажи дека $p_1>p_2+2\min\{\overline{BD},\overline{CE}\}$.

Решение. Со p_{XYZ} ќе го означуваме периметарот на $\triangle XYZ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BD} < \overline{CE}$. Нека A' и D' се симетричните точки соодветно на точките A и D во однос на средината на страната BC (направи цртеж). Бидејќи $p_{ADD'} \geq p_{ADE}$, доволно е да докажеме дека важи $p_{ABC} > p_{ADD'} + 2\overline{BD}$, што е еквивалентно со

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{AD} + \overline{AD'}, \text{ т.е. } \overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AD} + \overline{DA'}.$$

Последното неравенство следува од неравенствата

$$\overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AK} + \overline{KA'} > \overline{AD} + \overline{DA'},$$

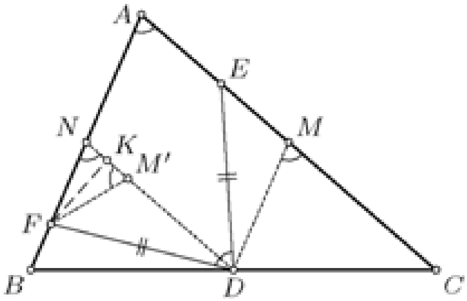
каде K е пресекот на правите $A'D$ и AB.

6. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната BC, а на страните AC и AB соодветно се земени точки E и F такви што $\overline{DE} = \overline{DF}$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$. Докажи го неравенството

$$\overline{DE} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} \leq \overline{AC}$. Нека M и N се средините на страните AC и AB, соодветно, а M' е точка на отсечката DN таква што $\overline{DM'} = \overline{DM}$. Бидејќи $\measuredangle M'DF = \measuredangle MDE$, триаголниците DME и MDE се складни, па затоа важи

$$\measuredangle FM'N = 180^\circ - \measuredangle DM'F = 180^\circ - \measuredangle DME = \measuredangle BAC = \measuredangle FNM',$$



што значи дека триаголникот $FM'N$ е рамнокрак. Средината K на отсечката $M'N$ истовремено е подножје на нормалата повлечена од точката F на $M'N$, па затоа

$$\overline{DF} \geq \overline{DK} = \frac{\overline{DM'} + \overline{DN}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

7. Нека O е внатрешна точка на $\triangle ABC$ и нека AO, BO, CO ги сечат страните BC, CA, AB соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Ако AA_1 е најдолга од отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 докажи дека

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} \leq \overline{AA_1}.$$

Решение. Односот на плоштините на триаголниците OBC и ABC е еднаков на односот на нивните висини повлечени од O и A, а тој е еднаков на $x=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}}$. Слично, $y=\frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}}=\frac{P_{AOC}}{P_{ABC}}$ и $z=\frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}}=\frac{P_{AOB}}{P_{ABC}}$. Јасно, $x+y+z=1$, па затоа

$$\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=x\overline{AA_1}+y\overline{BB_1}+z\overline{CC_1}\le(x+y+z)\overline{AA_1}=\overline{AA_1}\ .$$

8. Нека AM и BN ($M\in BC, N\in AC$) се симетрали соодветно на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ во $\triangle ABC$. Ако $AM\cap BN=I$, а опишаните кружници соодветно околу $\triangle ANI$ и $\triangle BMI$ по втор пат се сечат во точката L која припаѓа на страната AB, докажи дека плоштината на $\triangle MNL$ е помала или еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Од $\measuredangle CNI=\measuredangle ALI$, $\measuredangle CMI=\measuredangle BLI$ и $\measuredangle ALI+\measuredangle BLI=180^\circ$ следува дека четириаголникот $NICM$ е тетивен. Затоа

$$180^\circ=\gamma+\measuredangle NIM=\gamma+90^\circ+\tfrac{1}{2}\gamma=\tfrac{3}{2}\gamma+90^\circ,\ \text{т.е. } \gamma=60^\circ.$$

Сега,

$$\measuredangle CNM=\measuredangle CNB-\measuredangle MNB=\alpha+\tfrac{1}{2}\beta-30^\circ=\tfrac{1}{2}\alpha+30^\circ$$

и $\measuredangle LNM=\measuredangle LNI+\measuredangle MNI=\frac{1}{2}\alpha+30^\circ$. Според тоа, $\measuredangle CNM=\measuredangle LNM$ и аналогно $\measuredangle CNM=\measuredangle LNM$, т.е. $\triangle LNM\cong\triangle CMN$. Добиваме

$$\frac{P_{LMN}}{P_{ABC}}=\frac{P_{CMN}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}}{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}=\frac{\frac{ab}{b+c}\frac{ab}{a+c}}{ab}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\ .$$

Треба да докажеме дека

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\le\frac{1}{4},\ \text{т.е. } (a+c)(b+c)\ge 4ab.$$

Бидејќи $a+c\ge2\sqrt{ac}$ и $b+c\ge2\sqrt{bc}$ доволно е да докажеме дека $c^2\ge ab$. Од косинусната теорема и неравенството $a^2+b^2\ge2ab$ имаме

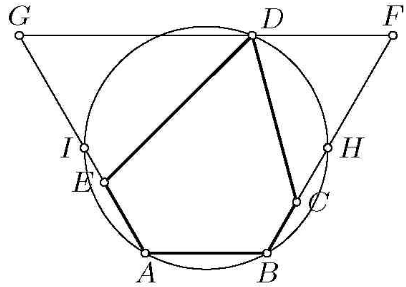
$$c^2=a^2+b^2-ab\ge ab\ ,$$

со што задачата е решена.

9. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}=1$, $\measuredangle BAE=\measuredangle ABC=120^\circ$, $\measuredangle CDE=60^\circ$ и $\measuredangle ADB=30^\circ$. Докажи дека плоштината на петаголникот $ABCDE$ е помала од $\sqrt{3}$.

Решение. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABD$ и l е правата низ D паралелна со AB. Радиусот на кружницата k е 1. Полуправите BC и AE ја сечат k во точките H и I, а правата l во точките F и G, соодветно. Триаголниците FCD и CDE се слични бидејќи важи

$$\measuredangle CFD = \measuredangle DGE = 60^\circ \text{ и } \measuredangle FCD = 120^\circ - \measuredangle CDF = \measuredangle GDE .$$



Да го означиме со $k = \frac{\overline{FC}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{GE}}$ коефициентот на сличност, со h растојанието од точката D до HI и $x = \overline{FD}, y = \overline{GD}$. Лесно се пресметува дека $x + y = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ и $xy = \frac{4}{3}h^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ (производот xy е степенот на точката F во однос на k и е еднаков на $\overline{OF}^2 - 1$, каде O е центарот на кружницата k). Така добиваме

$$P_{ABFG} = \frac{1}{2}(1 + x + y)(\frac{\sqrt{3}}{2} + h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + 2h + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$P_{FCD} + P_{CDE} = \frac{1}{2}(x \cdot \overline{FC} + y \cdot \overline{GE})\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy(k + \frac{1}{k}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}xy = \frac{2}{\sqrt{3}}h^2 + h,$$

па затоа

$$P_{ABCDE} = P_{ABFG} - (P_{FCD} + P_{CDE}) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + h + \frac{3\sqrt{3}}{4} = f(h).$$

Квадратната функција $f(h)$ достигнува максимум $f_{\max} = \sqrt{3}$ за $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, со што е докажано дека $P_{ABCDE} \leq \sqrt{3}$. Знак за равенство важи ако и само ако $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $k = 1$. Тогаш, бидејќи без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{DA} \geq \overline{DB}$, точката D ќе биде симетрична на точката B во однос на HI, па затоа триаголникот ADG ќе биде рамностран и ќе важи $\overline{FC} = \overline{GD} = \overline{GA} = \overline{FB}$, што не е можно бидејќи во таков случај точките B и C би се совпаѓале. Затоа важи $P_{ABCDE} < \sqrt{3}$.

10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на впишаната кружница r. Нека H е ортоцентарот, а A', B', C' се подножјата на висините h_a, h_b, h_c повлечени соодветно од темињата A, B, C. Да означиме $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$. Нека d_a, d_b, d_c се растојанијата на ортоцентарот до страните BC, CA, AB, соодветно. Ако $a \geq b \geq c$ докажи дека:

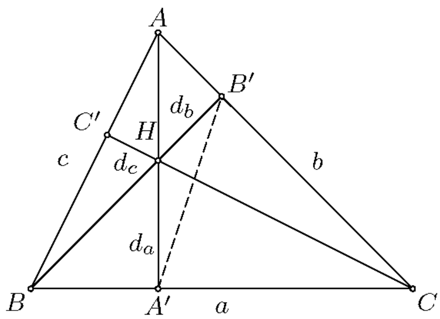
а) $h_a \le h_b \le h_c$, б) $d_a \ge d_b \ge d_c$,

в) $\overline{AH} \le \overline{BH} \le \overline{CH}$, и г) $d_a + d_b + d_c \le 3r$.

Решение. а) Од $a \ge b \ge c$ следува $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{c}$. Според тоа, $\frac{2P}{a} \le \frac{2P}{b} \le \frac{2P}{c}$, т.е. $h_a \le h_b \le h_c$. Равенства важат ако и само ако важат во почетните неравенства $a \ge b \ge c$.

в) Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BC'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CC'}^2 = a^2 - h_c^2 \ge b^2 - h_c^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CC'}^2 = \overline{AC'}^2.$$



Според тоа,

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{C'H}^2 \le \overline{BC'}^2 + \overline{C'H}^2 = \overline{BH}^2,$$

па затоа $\overline{AH} \le \overline{BH}$. Аналогно се докажува дека $\overline{BH} \le \overline{CH}$.

б) Имаме, $\measuredangle A'HC = 90^\circ - \measuredangle HCA' = \measuredangle CBC' = \beta$. Понатаму, четириаголникот $A'CB'H$ е тетивен, па затоа $\measuredangle A'B'C = \beta$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle B'A'C = \alpha$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, па како $a \ge b$ добиваме дека $\overline{B'C} \ge \overline{A'C}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle A'HC$ и $\triangle B'HC$ следува

$$d_a^2 = \overline{A'H}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{A'C}^2 \ge \overline{HC}^2 - \overline{B'C}^2 = \overline{B'H}^2 = d_b^2,$$

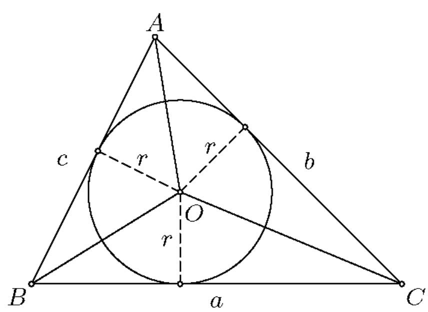
од каде добиваме $d_a \ge d_b$. Аналогно се докажува дека $d_b \ge d_c$. Знак за равенство важи ако и само ако во почетните неравенства важи знак за равенство.

г) Имаме, $2P = (a+b+c)r$ и бидејќи

$$2P = ad_a + bd_b + cd_c,$$

заради $a \ge b \ge c$ и $d_a \ge d_b \ge d_c$ од неравенството на Чебишев следува

$$(a+b+c)r = ad_a + bd_b + cd_c$$
$$\ge \frac{(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)}{3},$$



па затоа $d_a + d_b + d_c \le 3r$. Равенство во неравенството на Чебишев важи ако и само ако $a = b = c$ или $d_a = d_b = d_c$ што е само во случај на рамностран триаголник.

11. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c и плоштина S.

а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$ докажи дека $S_1^2 \ge \frac{S\sqrt{3}}{4}$.

Решение. а) Од $\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ и аналогните две неравенства следува дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Според Хероновата формула плоштината на триаголникот со страни $a = y + z,\ b = z + x, c = x + y$ е

$$S = \sqrt{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}\ .$$

Така

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{xy + yz + zx}\ ,$$

па неравенството се сведува на

$$xy + yz + zx \ge \sqrt{3xyz(x+y+z)}\ ,$$

т.е. на неравенството

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge xyz(x+y+z)\ .$$

Последното неравенство следува од очигледното неравенство

$$(xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \ge 0\ .$$

12. Точката X припаѓа на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$ и е таква што дијагоналата BD ја преполовува отсечката CX, а дијагоналата AC ја преполовува отсечката DX. Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Решение. Бараната најмала вредност е 2.

Прво ќе докажеме дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \ge 2$. Нека дијагоналите се сечат во точката O, $C_1 = DX \cap AC$ и $D_1 = CX \cap BD$. Тоа значи дека CC_1 и DD_1 се тежишни линии во $\triangle CDX$, а точката O е тежиште на овој триаголник. Според тоа, X, O и средината X_1 на CD лежат на една права и важи $\overline{OX} = 2\overline{OX_1}$.

Нека Y е средината на AB. Бидејќи $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ и OY и OX_1 се соодветни тежишни линии во овие триаголници следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OX_1}} = \frac{2\overline{OY}}{\overline{OX}}\ ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Од горната сличност следува дека $\measuredangle AOY = \measuredangle DOX_1 = \measuredangle BOX$, т.е. полуправите OY и OX се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle AOB$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AO} \geq \overline{BO}$. Тогаш важи $\measuredangle AOY \leq \frac{1}{2} \measuredangle AOB$ и важи $\overline{AX} > \overline{AY}$. Според тоа,

$$\measuredangle OXY = \measuredangle BOX + \measuredangle ABO \leq \measuredangle AOY + \measuredangle BAO = \measuredangle OYX ,$$

од каде следува $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Конфигурација при која се достигнува равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$ се добива од рамностраниот $\triangle ABE$, во кој C, D, X се средините на страните BE, AE, AB, соодветно.

13. Во триаголникот ABC симетралите на внатрешнисе агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E, соодветно. Докажи дека $\overline{DE} \leq (3-\sqrt{8})(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$. Определи ги аглите на триаголникот за кој важи знак за равенство.

Решение. Нека права која минува низ средината M на отсечката DE ги сече страните CB и CA во точките P и Q соодветно (направи цртеж). Ќе докажеме дека $\overline{DE} < \overline{PQ}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{CA} \leq \overline{CB}$. Лесно се докажува дека $\measuredangle CDE > \measuredangle CPQ$, па затоа на отсечката MP постои точка P' таква што $\measuredangle MP'D = \measuredangle MEQ$. Точките D, E, P', Q припаѓаат на некоја кружница со центар O и радиус r, при што $OM \perp DE$. Ако N е подножјето на нормалата повлечена од O на $P'Q$, тогаш важи $\measuredangle ONM = 90^\circ$, па затоа $\overline{ON} \leq \overline{OM}$ и оттука

$$\overline{DE}^2 = 4(r^2 - \overline{OM}^2) \leq 4(r^2 - \overline{ON}^2) = \overline{P'Q}^2 \leq \overline{PQ}^2 .$$

Сега да ја пресметаме $\overline{PQ}$. Ако означиме $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, тогаш $\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{a}{a+c}, \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{b}{b+c}$ и $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}(\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}})$, па затоа $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c})$. Бидејќи

$$(a+c)(2a+c) = 2a^2 + 3ac + c^2 \geq (3+\sqrt{8})ac$$

и аналогно

$$(b+c)(2b+c) \geq (3+\sqrt{8})bc ,$$

добиваме

$$\overline{DE} \leq \overline{PQ} \leq \frac{1}{2}(\frac{2b+c}{3+\sqrt{8}} + \frac{2a+c}{3+\sqrt{8}}) = (3-\sqrt{8})(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}) .$$

Знак за равенство важи ако и само ако $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, т.е. ако аглите се $45, 45^\circ, 90^\circ$.

14. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, докажи дека

$$r^2 \leq \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$. Јасно,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c.$$

Имаме $P = sr$, $s-a = r_a, s-b = r_b, s-c = r_c$, па од Хероновата формула следува

$$r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c}.$$

Конечно, од неравенствата меѓу средините следува

$$r^2 = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c} \leq \frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{9}.$$

15. Даден е трапез $ABCD\,(AB \| CD)$. Ако R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ACD и BCD, докажи дека $4R_1R_2 \geq \overline{AB}^2$.

Решение. Радиусот на опишаната кружница околу $\triangle XYZ$ ќе го означуваме со R_{XYZ}. Имаме $2R_{ACD} = \frac{\overline{AC}}{\sin\measuredangle ADC}$ и $2R_{BCD} = \frac{\overline{BD}}{\sin\measuredangle BCD}$, па затоа

$$4R_{ACD}R_{BCD} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\sin\measuredangle ADC \sin\measuredangle BCD} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\sin\measuredangle ABC \sin\measuredangle BAD} = 4R_{ABC}R_{ABD} \geq \overline{AB}^2,$$

бидејќи $2R_{ABC}, 2R_{ABD} \geq \overline{AB}$.

16. Низ пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник е повлечена произволна права. Докажи дека должината на делот на правата внатре во четириаголникот не е поголема од должината на барем една негова дијагонала.

Решение. Нека O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ и нека права низ O ги сече AB и CD во точките X и Y, соодветно (направи цртеж). Да означиме $\measuredangle AOX = \measuredangle COY = \alpha$ и $\measuredangle BOX = \measuredangle DOY = \beta$. Имаме $P_{AOX} = \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OX}\sin\alpha, P_{BOX} = \frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OX}\sin\beta$ и $P_{AOB} = P_{AOX} + P_{BOX} = \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin(\alpha+\beta)$. Оттука добиваме

$$\overline{OX} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin(\alpha+\beta)}{\overline{OA}\sin\alpha + \overline{OX}\sin\beta} \leq \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}(\sin\alpha+\sin\beta)}{\overline{OA}\sin\alpha + \overline{OB}\sin\beta} \leq \frac{\overline{OA}\sin\beta + \overline{OB}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

Слично важи $\overline{OY} \leq \frac{\overline{OC}\sin\beta + \overline{OD}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$, па затоа

$$\overline{XY} \leq \frac{\overline{AC}\sin\beta + \overline{BD}\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta} \leq \max\{\overline{AC}, \overline{BD}\}.$$

17. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина S. Докажи дека

$$\overline{AC}(\overline{BD}+\overline{BF}-\overline{DF})+\overline{CE}(\overline{BD}+\overline{DF}-\overline{BF})+\overline{AE}(\overline{BF}+\overline{DF}-\overline{BD})\geq 2\sqrt{3}S. \quad (*)$$

Решение. *Лема*. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB соодветно во точките X, Y и Z. Тогаш постои точка O за која се исполнети неравенствата

$$\overline{OA}\leq\frac{2\overline{AY}}{\sqrt{3}}, \overline{OB}\leq\frac{2\overline{BZ}}{\sqrt{3}}, \overline{OC}\leq\frac{2\overline{CX}}{\sqrt{3}}.$$

Доказ. Да означиме $\overline{CX}=x, \overline{AY}=y, \overline{BZ}=z$. Јасно, постои реален број r таков што трите кружници со центри во точките A, B, C и радиуси соодветно ry, rz, rx имаат заедничка точка, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Нека O е една таква заедничка точка, т.е. $\overline{OA}=ry, \overline{OB}=rz$ и $\overline{OC}=rx$. Доволно е да докажеме дека $r\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Барем еден од аглите $\measuredangle AOB, \measuredangle BOC, \measuredangle COA$ е поголем или еднаков на 120°. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\measuredangle BOC\geq 120^\circ$. Тогаш

$$-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ\geq\cos\measuredangle BOC=\frac{r^2(x^2+z^2)-(x+z)^2}{2xzr^2}.$$

Ако допуштиме дека $r>\frac{2}{\sqrt{3}}$ го добиваме неравенството

$$2xz>x^2+z^2,$$

кое не е точно. Според тоа, $r\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ и точката O го има саканото својство. ■

Сега од лемата применета за $\triangle BDF$ добиваме

$$\overline{AC}(\overline{BD}+\overline{BF}-\overline{DF})=2\overline{AC}\cdot\overline{BZ}\geq\sqrt{3}\overline{AC}\cdot\overline{BO}\geq 2\sqrt{3}S_{ABCD}$$

и аналогно

$$\overline{CE}(\overline{BD}+\overline{DF}-\overline{BF})\geq 2\sqrt{3}S_{CDEO} \text{ и } \overline{AE}(\overline{BF}+\overline{DF}-\overline{BD})\geq 2\sqrt{3}S_{DEAO}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (*).

18. Нека m_c и l_c се должините на медијаната и симетралата на аголот при темето C во $\triangle ABC$ со плоштина S. Ако $\gamma=\measuredangle BCA$, докажи дека

$$m_c l_c\geq S\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Имаме

$$m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4},$$

$$l_c^2=\frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2-c^2), .$$

$$S\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$$

Според тоа,

$$m_c^2 l_c^2 - S^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{((a+b)^2-c^2)(4ab((a+b)^2+(a-b)^2-c^2)-(a+b)^2((a+b)^2-c^2))}{16(a+b)^2}$$

$$= \frac{((a+b)^2-c^2)(a-b)^2(c^2-(a-b)^2)}{16(a+b)^2} = (\tfrac{a-b}{a+b})^2 S^2 \geq 0.$$

19. Нека M е тежиште на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

а) ако опишаната кружница околу $\triangle AMC$ ја допира правата AB,

б) за произволен $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Нека G е средината на страната AB.

а) Од условот следува дека

$$(\tfrac{c}{2})^2 = \overline{GA}^2 = \overline{GM} \cdot \overline{GC} = \tfrac{1}{3} m_c^2 = \tfrac{1}{12}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

т.е. $a^2 + b^2 = 2c^2$. Сега, од формулите за медијаните добиваме $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ и $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. Затоа

$$A = \sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM = \frac{P}{bm_a} + \frac{P}{am_b} = \frac{(a^2+b^2)\sin\gamma}{\sqrt{3}ab}.$$

Од косинусната теорема добиваме

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = 4ab\cos\gamma.$$

Затоа, $A = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

б) Постојат две кружници низ C и M кои се допираат до правата AB. Допирните точки да ги означиме со A_1 и B_1, при што A_1 лежи на полуправата GA, а B_1 на полуправата GB. Бидејќи G е средина на A_1B_1 и $\overline{CM} : \overline{MG} = 2:1$ точката M е тежиште на $\triangle A_1B_1C$. Освен тоа, јасно е дека

$$\measuredangle CAM \leq \measuredangle CA_1M \text{ и } \measuredangle CBM \leq \measuredangle CB_1M.$$

Да претпоставиме дека $\measuredangle CA_1M \leq 90^\circ$ и $\measuredangle CB_1M \leq 90^\circ$. Тогаш од а) следува дека

$$\sin\measuredangle CAM + \sin\measuredangle CBM \leq \sin\measuredangle CA_1M + \sin\measuredangle CB_1M \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Останува да го разгледаме случајот кога $\measuredangle CA_1M > 90^\circ$ и $\measuredangle CB_1M \leq 90^\circ$ (двата агли не може да се истовремено тапи). Од $\triangle CA_1M$ следува дека $\overline{CM}^2 > \overline{CA_1}^2 + \overline{A_1M}^2$, т.е.

$$\tfrac{1}{9}(2b_1^2+2a_1^2-c_1^2)>b_1^2+\tfrac{1}{9}(2b_1^2+2c_1^2-a_1^2),$$

(a_1,b_1,c_1 се страните на $\triangle A_1B_1C$). Од а) имаме $a_1^2+b_1^2=2c_1^2$, па горното неравенство е еквивалентно на неравенството $a_1^2>7b_1^2$. Сега, од а) имаме

$$\sin\measuredangle CB_1M=\frac{b_1\sin\gamma_1}{a_1\sqrt{3}}=\frac{b_1}{a_1\sqrt{3}}\sqrt{1-(\frac{a_1^2+b_1^2}{4a_1b_1})^2}\ .$$

Ако ставиме $\frac{b_1^2}{a_1^2}=x$, бидејќи $x<\frac{1}{7}$, добиваме дека

$$\sin\measuredangle CB_1M=\frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{14x-x^2-1}<\frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{2-\frac{1}{49}-1}=\frac{1}{7}\ .$$

Според тоа,

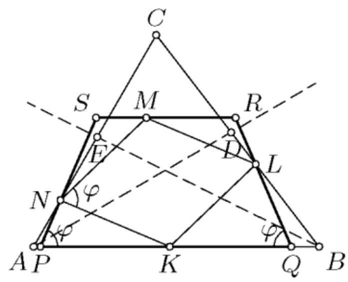
$$\sin\measuredangle CAM+\sin\measuredangle CBM<1+\sin\measuredangle CB_1M<1+\tfrac{1}{7}<\tfrac{2}{\sqrt{3}}\ .$$

20. Симетралите на внатрешните агли при темињата A и B на $\triangle ABC$ ги сечат спротивните страни соодветно во точките D и E. Во четириаголникот $ABDE$ е вписан ромб така што на секоја страна на четириаголникот се наоѓа точно по едно теме на ромбот. Ако $\measuredangle BAC=\alpha$ и $\measuredangle ABC=\beta$, докажи дека барем еден агол на ромбот не е поголем од $\max\{\alpha,\beta\}$.

Решение. Нека $KLMN$ е ромб со $K\in AB$, $L\in BD$ и $N\in EA$. Да го разгледаме трапезот $PQRS$, $P,Q\in AB$, $PQ\parallel RS$ и

$$\measuredangle PQR=\measuredangle QPS=\measuredangle KNM=\varphi$$

таков што K,L,M,N се на PQ,QR,RS,SP, соодветно. Нека $\varphi>\alpha,\beta$. Тогаш R и S лежат надвор од $\triangle ABC$.



Бидејќи

$\measuredangle SNM=\measuredangle 180^\circ-\varphi-\measuredangle NMS=\measuredangle RML$ и $\measuredangle LRM=\measuredangle MSN$ триаголниците LRM и MSN се складни, па затоа $\overline{LR}=\overline{MS}$. Слично, ако Q' е точка на AB таква што $\measuredangle LQ'B=\varphi$, тогаш $\triangle LRM\cong\triangle KQ'L$, па затоа $\overline{MR}=\overline{LQ'}=\overline{LQ}$. Според тоа, $\overline{RQ}=\overline{RL}+\overline{LQ}=\overline{SM}+\overline{MR}=\overline{RS}$.

Сега, $d(R,AB)=\overline{RQ}\sin\varphi>\overline{RS}\sin\alpha>d(R,AC)$ и слично $d(S,AB)>d(S,BC)$, што значи дека точките R и S лежат соодветно над правите AD и BE, т.е. во полурамнините во кои е C. Оттука следува дека двете точки лежат над правата DE. Последното не е можно, бидејќи RS и DE се сечат во M.

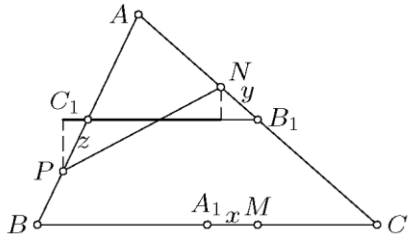
21. Нека M,N,P се произволни точки редоследно на страните BC,CA,AB на

остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\overline{NP} \geq \frac{1}{2}\overline{BC}, \quad \overline{PM} \geq \frac{1}{2}\overline{CA}, \quad \overline{MN} \geq \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето не е точно за некои M, N, P. Нека A_1, B_1, C_1 се соодветно средините на страните BC, CA, AB. Нека

$$x = \overline{BM} - \overline{BA_1}, y = \overline{CN} - \overline{CB_1}, z = \overline{AP} - \overline{AC_1}.$$



Должината на проекцијата NP на B_1C_1 е еднаква на

$$p_a = \overline{B_1C_1} + z\cos B - y\cos C,$$

па од

$$p_a \leq \overline{NP} < \overline{B_1C_1}$$

следува $\frac{z}{\cos C} < \frac{y}{\cos B}$.

Аналогно се докажува

$$\frac{y}{\cos B} < \frac{x}{\cos A} \text{ и } \frac{x}{\cos A} < \frac{z}{\cos C},$$

што не е можно.

5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Впишаната кружница на тангентниот петаголник $ABCDE$ ја допира страната BC во точката K. Ако $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$, докажи дека $\measuredangle EKB=90^\circ$.

   Решение. Нека O е центар на кружницата, а J,L,M,N се соодветно допирните точки со страните AB,CD,DE,EA (направи цртеж). Од условот на задачата следува $\overline{AN}=\overline{AJ}=\overline{CK}=\overline{CL}$ и $\overline{BJ}=\overline{BK}=\overline{DL}=\overline{DM}$, па затоа $ANOJ\cong CKOL$ и $BJOK\cong DLOM$. Понатаму, бидејќи $\triangle EOM\cong\triangle EON$ имаме
   $$\measuredangle EOK=\measuredangle EON+\measuredangle NOJ+\measuredangle JOK=\measuredangle EOM+\measuredangle LOK+\measuredangle MOL,$$
   па затоа $\measuredangle EOK=180^\circ$, т.е. $EO\perp BC$.

2. Во тетивен петаголник $ABCDE$ важи $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{CD}=\overline{DE}$. Отсечките AD и BE се сечат во точката P, а отсечката BD ги сече CA и CE во Q и T, соодветно. Докажи дека триаголникот PQT е рамнокрак.

   Решение. Од $\measuredangle PET=\measuredangle BEC=\measuredangle ADB=\measuredangle PTC$ следува дека точките P,E,D и T се концикlични (направи цртеж). Затоа важи $\measuredangle PTQ=\measuredangle PED=\measuredangle BED$. Аналогно $\measuredangle PQT=\measuredangle BAD=\measuredangle BED$, па затоа $\overline{PQ}=\overline{PT}$.

3. Во кружница е впишан конвексен петаголник $ABCDE$. Точките M и N се внатрешни соодветно за страните ED и CD. Отсечката MN ја сече AD во точката K и BD во точката L. Докажи дека, ако четириаголникот $ABLK$ е тетивен, тогаш и четириаголникот $ECNM$ е тетивен.

   Решение. Имаме $\measuredangle MNC=\measuredangle DLN+\measuredangle LDN=\measuredangle MLB+\measuredangle BDC$ како надворешен агол за $\triangle LND$. Ако искористиме дека четириаголниците $ABLK$ и $ABCD$ се тетивни добиваме
   $$180^\circ-\measuredangle KAB+\measuredangle BAC=180^\circ-\measuredangle KAC=180^\circ-\measuredangle DEC.$$
   Според тоа, четириаголникот $ECNM$ е тетивен.

4. Даден е конвексен шестаголник. Нека s е збирот на должините на трите отсечки кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на шестаголникот. Докажи дека постои точка, внатрешна за шестаголникот, таква што збирот на растојанијата од неа до страните на шестаголникот е помал или еднаков на s.

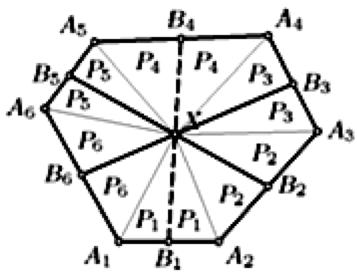
   Решение. Нека дијагоналите AD,BE,CF при нивното пресекување формираат триаголник KMN. Ќе докажеме дека центарот I на впишаната кружница во $\triangle KMN$ го има саканото својство.

Средините на AB и DE да ги означиме со X и Y, соодветно. Нека правата определена од симетралата на $\measuredangle MKN$ ги сече страните AB и DE во точките X_1 и Y_1, соодветно. Тогаш аглите $\measuredangle XX_1K$ и $\measuredangle YY_1K$ не се остри (тоа следува од познатиот факт дека во триаголник симетралата на аголот лежи меѓу медијаната и висината повлечени од истото теме како и симетралата на аголот). Според тоа, проекцијата на отсечката XY на правата X_1Y_1 ја покрива отсечката X_1Y_1, што значи $\overline{XY} \geq \overline{X_1Y_1}$. Од друга страна, збирот на растојанијата од I до страните AB и CD е помал или еднаков на $\overline{X_1Y_1}$. Оттука и од аналогните факти за другите два пара спротивни страни следува тврдењето на задачата.

5. Даден е конвексен шестаголник. Секоја од трите прави, кои ги поврзуваат средините на спротивните страни, го дели шестаголникот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека овие три прави се сечат во една точка.

Решение. Со $A_1, A_2, ..., A_6$ да ги означиме темињата на шестаголникот, а со B_i средината на страната A_iA_{i+1}, $i = 1, 2, ..., 6$, $A_7 = A_1$. Нека X е пресечната точка на правите B_2B_5 и B_3B_6. Од условот дека правите B_2B_5 и B_3B_6 ја полoват плоштината на шестаголникот соодветно добиваме

$P_6 + P_1 = P_3 + P_4$ и $P_1 + P_2 = P_4 + P_5$.



Ако ги собереме овие равенства добиваме

$$P_2 + P_3 = P_5 + P_6,$$

што значи дека линијата B_1XB_4 ја преполовува плоштината на шестаголникот, но како и правата B_1B_4 ја преполовува плоштината на шестаголникот, заклучуваме дека $X \in B_1B_4$.

6. Нека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во кружница, $AC \cap BE = H$, $AD \cap CE = I$, $BD \perp CF$ и $\overline{AI} = \overline{CI}$. Докажи дека $\overline{CH} = \overline{AH} + \overline{DE}$ ако и само ако $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$.

Решение. Од $\overline{AI} = \overline{CI}$, следува $\measuredangle ACI = \measuredangle CAI$, т.е. $\measuredangle ACE = \measuredangle CAD$. Четириаголникот $ACDE$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CAD = \measuredangle CED$. Според тоа, $\measuredangle ACE = \measuredangle CED$, т.е. $AC \| DE$.

Нека $\overline{CH} = \overline{AH} + \overline{DE}$. Нека A' е точка на полуправата CA таква што $\overline{CA'} = \overline{DE}$. Од $AC \| DE$ следува дека $A'CDE$ е паралелограм и затоа $\measuredangle AA'E = \measuredangle ACD$. Тогаш $\measuredangle AA'E = \measuredangle A'AE$ (бидејќи $\measuredangle ACD = \measuredangle CAE$). Сега од $\overline{AH} = \overline{CH} - \overline{DE} = \overline{CH} - \overline{CA'} = \overline{HA'}$ следува дека H е средина на основата AA' на рамнокракиот $\triangle EAA'$. Според тоа, $EH \perp AA'$, па затоа $\measuredangle BHC = 90^\circ = \measuredangle BGC$. Последното значи дека точките B, C, H и G се конциклични.

Нека $BG \cap CH = K$. Од $\triangle BKC \sim \triangle HKG$ следува $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Од друга страна, од $DE \| KH$ имаме $\triangle BDE \sim \triangle BKH$. Според тоа, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Сега од последните две равенства следува $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$, т.е. $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$.

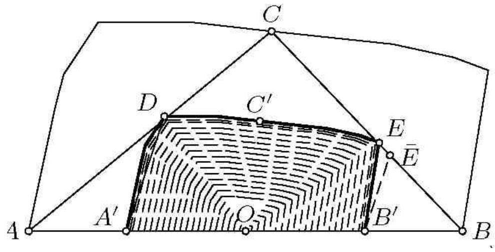
Нека $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$. Оттука и од $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$ следува дека $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Нека полуправата KD ја сече опишаната кружница околу $\triangle BHC$ во точката G'. Тогаш $\triangle BKC \sim \triangle HKG'$, па затоа $\frac{\overline{BC}}{\overline{G'H}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Бидејќи $\measuredangle HKD > 90^\circ$ и G лежи на отсечката KD, следува дека $G = G'$. Според тоа, точките B, C, H, G се конциклични и затоа $\measuredangle BHC = \measuredangle BGC = 90^\circ$. Од $AC \| DE$ следува дека $\measuredangle DEH = 90^\circ$. Нека D' е подножјето на нормалата од D на правата AC. Бидејќи H е подножјето на нормалата од E на AC, добиваме дека

$$\overline{CH} = \overline{CD'} + \overline{D'H} = \overline{CD'} + \overline{DE} = \overline{AH} + \overline{DE}.$$

7. Езеро има форма на конвексен стоаголник $A_1A_2...A_{100}$ со центар на симетрија во точката O. На езерото се наоѓа остров $B_1B_2...B_{100}$, каде B_i е средина на отсечката OA_i. Островот е заграден со висок ѕид и преку ѕидот ништо не се гледа. Во две дијаметрално спротивни точки на брегот се наоѓаат двајца стражари. Докажи дека секоја точка на брегот ја гледа барем еден стражар.

Решение. Нека стражарите се во точките A и B. Да претпоставиме дека ниту еден од нив не ја гледа точката C на броегот, бидејќи истата за стражарите A и B соодветно е скриена со точките на островот D и E. Со A', B', C' да ги означиме средините на отсечките OA, OB, OC, соодветно.

Исто така нека E е точка на отсечката BC таква што $B'E \| A'D$. Од $\measuredangle B'A'D + \measuredangle A'B'E \le 180^\circ$, следува дека E припаѓа на отсечката BE. Точката C' лежи внатре или на границата на $\triangle CDE$, па затоа таа е внатре или на границата на $\triangle CDE$. Да означиме



$$\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}, \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}=k \text{ и } \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}=l .$$

Тогаш

$$\overrightarrow{CC'}=\tfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\tfrac{1}{4k}\overrightarrow{CD}+\tfrac{1}{4l}\overrightarrow{CE},$$

па затоа C' е во внатрешноста или на границата на $\triangle CDE$ ако и само ако $k,l\geq 0$ и $\frac{1}{4k}+\frac{1}{4l}\leq 1$, т.е. $k+l\leq 4kl$. Од друга страна

$$\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{DC}=(\tfrac{3}{4}-k)\vec{a}+\tfrac{1}{4}\vec{b}$$

е паралелен со $\overrightarrow{EB'}=\frac{1}{4}\vec{a}+(\frac{3}{4}-l)\vec{b}$, па затоа

$$(\tfrac{3}{4}-k)(\tfrac{3}{4}-l)=\tfrac{1}{16}, \text{ т.е. } 2-3(k+l)+4kl=0,$$

од каде што следува

$$k+l\leq 1 \text{ и } 4kl-(k+l)=2(k+l)-2\leq 0 .$$

Затоа единствена можност е горните неравенства да се равенства, па затоа $k=l=\frac{1}{2}$, но тогаш делот од островот над правата AB е четириаголникот $A'DEB'$, што противречи на претпоставката дека многуаголникот е стоаголник.

8. На страната AB на $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB=50^\circ$ е земена произволна точка O. Опишаната кружнца k_1 околу $\triangle AOC$ ја сече отсечката BC во точката N. Опишаната кружница k_2 околу $\triangle BOC$ ја сече отсечката AC во точката M. Правата ON ја сече k_2 во точката D, а правата OM ја сече k_1 во точка P. Правите PA и DB се сечат во точката Q. Определи ја големината на $\measuredangle AQB$

Решение. Од вписаниот во k_1 петаголник $AONCP$ имаме

$$\measuredangle DNC=\measuredangle OAC=\measuredangle OPC=\alpha \text{ и } \measuredangle APO=\measuredangle ACO .$$

Од вписаниот во k_2 петаголник $MOBDC$ имаме

$$\measuredangle PMC=\measuredangle OBC=\measuredangle ODC=\beta \text{ и } \measuredangle BDO=\measuredangle BCO .$$

Сега, од $\triangle MCP$ и $\triangle NCD$ следува дека

$$\measuredangle MCP=\measuredangle NCD=\gamma=50^\circ .$$

Во четириаголникот $PQDC$ имаме

$$\measuredangle QPC+\measuredangle PCD+\measuredangle QDC=\alpha+\measuredangle APO+3\gamma+\beta+\measuredangle BDO$$
$$=280^\circ+\measuredangle ACO+\measuredangle BCO$$
$$=280^\circ+\gamma=330^\circ,$$

па затоа $\measuredangle AQB=360^\circ-330^\circ=30^\circ$.

9. Нека AM е медијана на нерамностраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG\perp AM$ ако и само ако $\overline{CA}=\overline{CB}$.

Решение. Нека во правоаголен координатен систем со единечни вектори $\vec{i}$ и $\vec{k}$ темињата на $\triangle ABC$ се $A(0,0), B(a,0)$ и $C(b,c)$. Тогаш

$$\overrightarrow{AG}=\tfrac{a+3b}{6}\vec{i}+\tfrac{c}{2}\vec{k} \text{ и } \overrightarrow{AO}=\tfrac{a}{2}\vec{i}+\tfrac{b^2+c^2-ab}{2c}\vec{k},$$

па затоа

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO}=\tfrac{3b-2a}{6}\vec{i}+\tfrac{ab-b^2}{2c}\vec{k}.$$

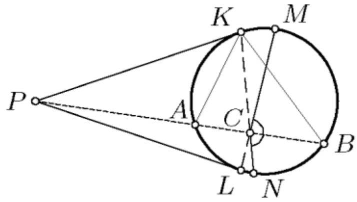
Освен тоа, $\overrightarrow{AM}=\tfrac{a+b}{2}\vec{i}+\tfrac{c}{2}\vec{k}$, па затоа

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OG}=\tfrac{(3b-2a)(a+b)+3(ab-b^2)}{12}=\tfrac{2ab-b^2}{6}.$$

Според тоа, $OG\perp AM$ ако и само ако $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{OG}=0$, ако и само ако $a=2b$ ако и само ако $\overline{CA}=\overline{CB}$.

10. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која минува низ точката P ја сече кружницата k во точките A и B. Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B и точката C на отсечката AB е таква што $\overline{PC}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$. Докажи дека $\measuredangle MCN$ не зависи од изборот на правата s.

Решение. Нека PK и PL се тангенти на кружницата k, при што K и M се на иста страна од правата s (види цртеж).



Триаголниците PAK и PKB се слични и $\overline{PC}=\overline{PK}$, па затоа

$$\measuredangle PKN=\tfrac{1}{2}(\measuredangle PKA+\measuredangle PKB)=\tfrac{1}{2}(\measuredangle PKA+\measuredangle PAK)$$
$$=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\measuredangle APK)=\measuredangle PKC,$$

т.е. точките K,C,N се колинеарни. Аналогно точките L,C,M се колинеарни, па затоа

$$\measuredangle MCN=\measuredangle KCL=\measuredangle KCP+\measuredangle PCL=\tfrac{1}{2}(360^\circ-\measuredangle KPC-\measuredangle CPL)=180^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle KPL,$$

што не зависи од изборот на правата s.

11. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ се земени точки M и N кои се еднакво оддалечени од нејзиниот центар. Низ M е повлечена тетива AB, а низ N е повлечена тетива AN така што важи

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2},$$

Определи го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N.

Решение. Нека O е центарот на кружницата и нека PQ е дијаметарот на кој лежат точките M и N ($M\in PO, N\in QO$). Да означиме $x=\overline{MO}=\overline{NO},$ $0\le x\le\sqrt{5}$. Тогаш

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)=5-x^2.$$

Аналогно $\overline{NA}\cdot\overline{NB}=5-x^2$. Оттука добиваме

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(5-x^2)^2}.$$

Од формулите за медијаната AO во $\triangle MNA$ имаме

$$5=\overline{AO}^2=\tfrac{1}{2}(2(\overline{MA}^2+\overline{NA}^2)-4x^2),$$

т.е. $\overline{MA}^2+\overline{NA}^2=2(5+x^2)$. Затоа, бидејќи $\overline{MN}^2=4x^2$ добиваме

$$\frac{3}{4x^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2}=\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{2(5+x^2)}{(5-x^2)^2},$$

т.е. $x^4+14x^2-15=0$, од каде наоѓаме $(x^2+15)(x^2-1)=0$, односно $x^2=1$. Конечно, $x=1$ е бараното растојание.

12. Нека ABC е правоаголен триаголник со катети $\overline{AC}=1$ и $\overline{BC}=2$. Низ точка A_1 од катетата BC, за која $\overline{A_1C}\neq\frac{1}{3}$, е повлечена права, паралелна на AB, која AC ја сече во точка B_1. Нека C_1 е подножјето на нормалата спуштена од B_1 на AB. Низ C_1 е повлечена права, паралелна на AC, која BC ја сече во точка A_2. Правата низ A_2 паралелна на AB, ја сече AC во точка B_2 итн. Пресметај

а) $\frac{3\overline{A_{n+1}C}-1}{3\overline{A_nC}-1}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}P_{A_nB_nC_n}$.

Решение. а) Нека $\overline{A_nC}=x_n$. Тогаш од $\triangle A_nB_nC\sim\triangle BAC$ следува дека

$\overline{B_nC} = \frac{x_n}{2}$. Бидејќи $\triangle AB_nC_n \sim \triangle ABC$, добиваме дека $\overline{AC_n} = \frac{2-x_n}{2\sqrt{5}}$. Оттука $\overline{A_{n+1}C} = x_{n+1} = \frac{2-x_n}{5}$. Според тоа, $3x_{n+1} - 1 = \frac{1-3x_n}{5}$, т.е. $\frac{3x_{n+1}-1}{3x_n-1} = -\frac{1}{5}$.

б) Бидејќи $\overline{A_nB_n} = \frac{\sqrt{5}}{2}x_n, \overline{B_nC_n} = \frac{2-x_n}{\sqrt{5}}$ и $A_nB_n \perp B_nC_n$, добиваме

$$P_{A_nB_nC_n} = \frac{x_n(2-x_n)}{4}.$$

Според а) $x_n - \frac{1}{3}$ е геометриска прогресија со количник $-\frac{1}{5}$, па затоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$. Конечно, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{A_nB_nC_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n(2-x_n)}{4} = \frac{5}{36}$.

13. Допирните точки на впишаната кружница во даден триаголник и неговите темиња го делат периметарот на триаголникот на шест отсечки. Избираме три од нив, кои формираат триаголник и за нив ја повторуваме постапката. Докажи дека, по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол 60° или агол помал од 1°.

Решение. Нека претпоставиме дека никогаш не се добива триаголник со две еднакви страни. Нека страните на триаголникот Δ_n пред $n-$тата операција се $a_n < b_n < c_n$, $2s_n = a_n + b_n + c_n$ и $d_n = \frac{c_n - a_n}{s_n}$. Тогаш Δ_{n+1} има страни $s_n - c_n < s_n - b_n < s_n - a_n$ и $d_{n+1} = 2d_n$. Според тоа, $0 < d_1 = \frac{d_n}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$, за секој n, што е противречност.

Значи, пред некоја операција, за која ќе земеме дека е прва се добива триаголник со две еднакви страни. Да претпоставиме дека никогаш не се добива рамностран триаголник. Тогаш Δ_n има страни a_n, a_n, c_n, а страните на Δ_{n+1} се $s_n - a_n, s_n - a_n, s_n - c_n$ или $s_n - a_n, s_n - c_n, s_n - c_n$. Тогаш $d_{n+1} > d_n$, па во првиот случај имаме $d_{n+1} = 2d_n$. Ако овој случај се среќава бесконечно многу пати, тогаш како погоре доаѓаме до противречност.

Затоа може да сметаме дека од самиот почеток го имаме вториот случај, т.е. страните на триаголникот Δ_{n+1} се $s_n - a_n, s_n - c_n, s_n - c_n$. Тогаш за $q_n = \frac{a_n}{c_n}$ имаме $q_{n+1} = 2q_n - 1$, па затоа $q_{n-1} = 2^{n-1}(q_1 - 1)$. Значи, $q_1 > 1$ и $q_n \to \infty$. Последното значи дека за аголот γ_n меѓу краците на Δ_n важи $\gamma_n \to 0$, што значи дека по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол помал од 1°.

14. Темињата на два квадрати со плоштини S и T лежат на страните на правоаголен $\triangle ABC$, при што три од нив лежат на хипотенузата AB со должина

природен број c. Дали е можно $\frac{S}{2}$ и $\frac{T}{2}$ да се заемно прости броеви:

а) за некој $c<70$, б) за некој $c>70$.

Решение. Можно е и во двата случаја.

Нека $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $DEGF$ е квадрат со страна $m=\sqrt{S}$, каде $D,E\in AB, F\in BC, G\in AC$. Од $\triangle AGD\sim\triangle GFC\sim\triangle ABC$ следува $\overline{AG}=\frac{mc}{a}, \overline{CG}=\frac{mb}{c}$, па затоа $b=\frac{mc}{a}+\frac{mb}{c}$, т.е. $m=\frac{abc}{ab+c^2}$.

Можеме да сметаме дека другиот квадрат со страна $n=\sqrt{T}$ е $OMCN$, каде $O\in AB$, $M\in BC, N\in AC$. Од $\triangle AON\sim\triangle OBM\sim\triangle ABC$ следува $\overline{AO}=\frac{nc}{a}$, $\overline{BO}=\frac{nc}{b}$, па затоа $c=\frac{nc}{a}+\frac{nc}{b}$, т.е. $n=\frac{ab}{a+b}$. Тогаш

$$\frac{1}{S}-\frac{1}{T}=\frac{(ab+c^2)^2-(ac+bc)^2}{(abc)^2}=\frac{1}{c^2}.$$

Ако $S=2s$ и $T=2t$, тогаш $c^2=\frac{2st}{t-s}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(s,t)=1$, лесно се гледа дека $t-s=2$ или $t-s=1$. Во првиот случај добиваме дека $c=0$, што не е можно, а во вториот случај ја добиваме равенката $(2s+1)^2-2c^2=1$. Ова е равенка на Пел и како што е познато, таа во множеството природни броеви има бесконечно многу решенија, при што првите четири се (1,2), (8,12), (49,70) и (288,408).

Останува да видиме за кои решенија можеме да конструираме $\triangle ABC$. Од $m=\frac{abc}{ab+c^2}$ и $n=\frac{ab}{a+b}$ следува

$$ab=\frac{mc^2}{c-m},\ a+b=\frac{mc^2}{(c-m)n}.$$

Овој систем има решение во множеството позитивни броеви ако $\frac{mc^2}{c-m}\geq 4n^2$. Бидејќи $n^2=\frac{c^2m^2}{c^2-m^2}$, лесно се добива дека $a^2+b^2=c^2$. Освен тоа, $c>m$ и условот $\frac{mc^2}{c-m}\geq 4n^2$ го добива обликот $c\geq 3m$, т.е. $2s(s+1)=c^2\geq 18s$ и значи $s\geq 8$.

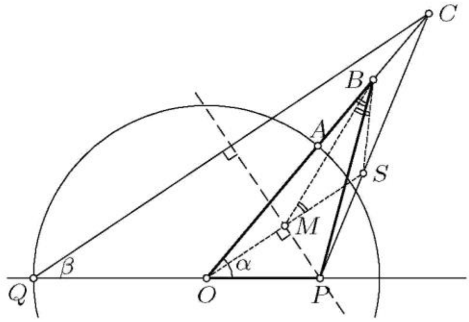
15. Даден е трапез $ABCD, BC\parallel AD$. Точката M е средина на основата BC, а точката P припаѓа на основата AD. Правата PM ја сече правата CD во точката Q така што C лежи меѓу Q и D. Нормалата на основите низ точката P ја сече правата BQ во точката K. Докажи дека $\measuredangle QBC=\measuredangle KDA$.

Решение. Со X да ја означиме пресечната точка на правите AD и BQ. Тогаш од теоремата на Штајнер за трапезот $XBCD$ следува дека P е средина на XD. Според тоа, K лежи на симетралата на XD и $\measuredangle KDA=\measuredangle KXD$.

Останува да забележиме дека од $BC \parallel XD$ следува $\measuredangle QBC = \measuredangle KXD$.

16. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC. Нека точката $Q \in k$ е таква што $\measuredangle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle POB = 2\measuredangle PBO$.

Решение. *Прв начин.* Нека S е точка на отсечката CP таква што $\overline{PS} = \overline{PO}$, а M е средина на отсечката OS. Тогаш



$$\overline{CS} = \overline{QO} = \overline{CA} \text{ и } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{CO}} = \frac{1}{2}$$

следува $\triangle CBS \sim \triangle CSO$ и оттука

$$\overline{SB} = \tfrac{1}{2}\overline{OS} = \overline{SM}$$

и

$$\measuredangle SOP = \measuredangle OSP = 180^\circ - \measuredangle CSO = 180^\circ - \measuredangle CBS = \measuredangle OBS.$$

Според тоа, PS и PO се тангенти на опишаната кружница на $\triangle BSO$, а BP е негова симедијана. Сега важи

$$\measuredangle OBP = \measuredangle MBS = \tfrac{180^\circ - \measuredangle BSM}{2} = \tfrac{\measuredangle CSB + \measuredangle OSP}{2} = \tfrac{\measuredangle COS + \measuredangle SOP}{2} = \tfrac{\measuredangle BOP}{2}.$$

Втор начин. Ќе го користиме познатото тврдење дека во $\triangle ABC$ важи $\alpha = 2\beta$ ако и само ако $a^2 = b^2 + bc$. Ако означиме $\overline{OA} = r$ и $\overline{PC} = x$, тогаш доволно е да докажеме дека

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{PO} \cdot \overline{OB} = (x-r)^2 + \tfrac{3r}{2}(x-r) = x^2 - \tfrac{1}{2}rx - \tfrac{1}{2}r^2.$$

Последното непосредно следува од теоремата на Стјуарт за $\triangle OPC$ бидејќи

$$\overline{PB}^2 = \tfrac{1}{4}(x-r)^2 + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{r}{2} \cdot \tfrac{3r}{2} = x^2 - \tfrac{1}{2}rx - \tfrac{1}{2}r^2.$$

17. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = 2\overline{AD}$ и $\overline{AB} = \overline{AE}$, каде $E = AB \cap CD$. Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$.

Решение. Нека $\overline{BE} = 2\overline{AB} = 2a$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\overline{CD} = d$, $\overline{BD} = 2\overline{AD} = 2c$ и $\overline{DE} = x$. Од теоремата на Стјуарт за $\triangle BCE$ и отсечката BD и за $\triangle EAC$ и отсечката AD имаме

$$(x+d)(2c)^2 = d(2a)^2 + xb^2 - xd(x+d),$$
$$(x+d)c^2 = da^2 + xb^2 - xd(x+d).$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, потоа од првото равенство го одземеме второто помножено со 4, по делењето со 3 и $3x\neq 0$ ги добиваме равенствата

$$(x+d)c^2=da^2,$$
$$b^2=d(x+d).$$

Последните равенства ги множиме и добиваме

$$(x+d)c^2b^2=d^2a^2(x+d)\text{, т.е. } c^2b^2=d^2a^2.$$

Конечно, бидејќи $a,b,c,d>0$ добиваме

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=\frac{ad}{bc}=1.$$

18. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC, а k е опишаната кружница на триаголникот ABC. Кружница k_1 со центар I ги допира отсечките BD и CD и кружницата k, а кружница k_2 со центар J ги допира отсечките AD и CD и кружницата k. Ако точките A,B,I,J се конциклични, докажи дека D е допирната точка на припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето C.

Решение. Нека O е центарот на кружницата k, точките P,Q,R соодветно се допирните точки на k_1 со AB,k,CD, а K,L,M се соодветно допирните точки на k_2 со AB,k,CD. Ќе докажеме дека концикличноста на точките A,B,I,J повлекува $IJ\parallel AB$. Нека претпоставиме дека правите IJ и AB се сечат во точката T. Бидејќи $\overline{TI}\cdot\overline{TJ}=\overline{TA}\cdot\overline{TB}=\overline{TL}\cdot\overline{TQ}$, заклучуваме дека точките I,J,L,Q се концициклични, па од $\overline{OL}=\overline{OQ}$ следува $\overline{OI}=\overline{OJ}$, т.е. $IJ\parallel KL$, што не е можно. Значи, $IJ\parallel AB$, па затоа кружниците k_1 и k_2 се складни и $\overline{AK}=\overline{BP}$.

Од Кејсиевата теорема за точките A,B,C и кружницата k_1 следува

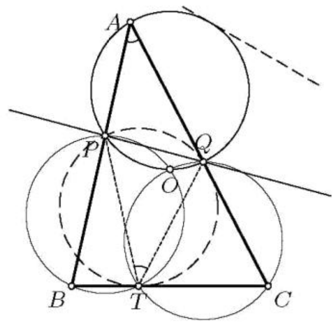
$$\overline{AB}\cdot\overline{CR}+\overline{AC}\cdot\overline{BP}=\overline{BC}\cdot\overline{AP},$$

па како $\overline{CR}=\overline{CD}-\overline{BD}+\overline{BP}$ и $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}$, од претходното равенство следува $\overline{BP}=\frac{\overline{AB}(\overline{BC}+\overline{BD}-\overline{CD})}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}$. Слично имаме $\overline{AK}=\frac{\overline{AB}(\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{CD})}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}$, па затоа со замена во $\overline{AK}=\overline{BP}$ добиваме $\overline{BC}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{AD}$, т.е. D е допирна точка на припишаната кружница.

19. Нека O е центарот на опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC. Точките P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC, и се такви што $\measuredangle BOP=\measuredangle ABC$ и $\measuredangle COQ=\measuredangle ACB$. Докажи дека симетричната

права на правата BC во однос на правата PQ ја допира опишаната кружница на триаголникот APQ.

Решение. Аглите на $\triangle ABC$ ги означуваме вообичаено со α, β, γ. Од



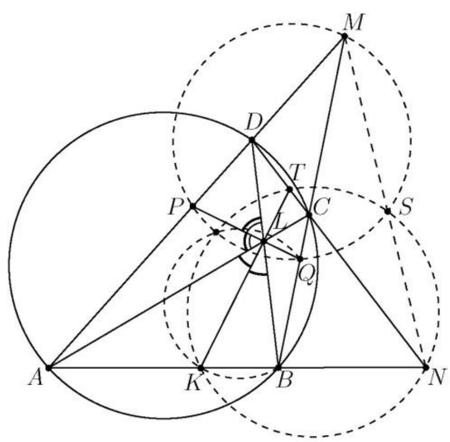
$$\measuredangle POQ = 360^\circ - \measuredangle BOP - \measuredangle COQ - \measuredangle BOC$$
$$= 180^\circ - \alpha,$$

следува дека точките A, B, O, Q се конциклични. Нека точката $T \neq C$ на правата BC е таква што $\overline{PT} = \overline{PB}$. Од $\measuredangle BTP = \measuredangle BOP$ следува дека точките O, P, B, T се концициклични, па затоа O е точката на Микел за P, Q, T. Оттука следува дека и точките O, Q, C, T се концициклични, па затоа $\measuredangle PTQ = \measuredangle BOC - \measuredangle BAC = \alpha$. Според тоа, кружницата PQT е симетрична на кружницата APQ во однос на правата PQ.

Останува да забележиме дека правата BC ја допира кружницата PQT. Навистина, $\measuredangle PQT = \measuredangle AOC - \measuredangle ABC = \beta = \measuredangle PTB$. Оттука непосредно следува тврдењето на задачата.

20. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката L. Правите AD и BC се сечат во точката M, а правите AB и CD се сечат во точката N. Симетралата на $\measuredangle ALD$ ги сече страните AD и BC соодветно во точките P и Q, а симетралата на $\measuredangle ALB$ ги сече страните AB и CD соодветно во точките K и T. Докажи дека опишаните кружници околу $\triangle MPQ, \triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ се сечат во една точка.

Решение. Нека S е точката на Микел за четириаголникот $ABCD$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, следува дека S припаѓа на MN.



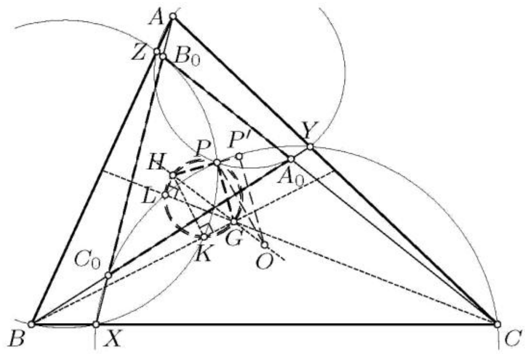
Сега $\triangle SAD \sim \triangle SBC$ и од $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}$ (следува од својството на симетралата на агол) добиваме

$$\measuredangle SPQ = \measuredangle SAB \measuredangle = \measuredangle MAB = \measuredangle MPQ.$$

Тоа значи дека опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ минува низ точката S. Аналогно се докажува дека и опишаната кружница околу $\triangle NTK$ минува низ S. Сега тврдењето следува од $\triangle NBM$ и точките S,K и Q на неговите страни.

21. Во рамнокрак триаголник ABC точката H е ортоцентар, а G е тежиште. Точките X,Y и Z се одбрани соодветно на страните BC,CA и AB така што $\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA$. Опишаните кружници околу триаголниците BXZ и CXY по втор пат се сечат во точката P. Докажи дека $\measuredangle GPH = 90^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Според теоремата на Микел точката P исто така припаѓа на опишаната кружница на $\triangle AYZ$. Нека O е центарот и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Понатаму, да означиме



$\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA = \theta,$

$BY \cap CZ = \{A_0\},$

$CZ \cap AX = \{B_0\},$

$AX \cap BY = \{C_0\}.$

Бидејќи

$$\measuredangle B_0A_0C_0 = \measuredangle CA_0Y = 180^\circ - \theta - \measuredangle ACZ = \measuredangle BAC$$

и слично $\measuredangle A_0B_0C_0 = \measuredangle ABC$, следува дека $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC$. Уште повеќе, $\measuredangle APA_0 = 180^\circ - \measuredangle AZA_0 = 180^\circ - \theta$ и слични $\measuredangle BPB_0 = \measuredangle CZP_0 = 180^\circ - \theta$, па затоа P е центар на ротациона хомотетија χ која $\triangle ABC$ го пресликува во $\triangle A_0B_0C_0$.

Бидејќи $\measuredangle BA_0C = \measuredangle BHC = 180^\circ - \measuredangle BAC$, точката A_0 припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот BHC, а неговиот радиус е

$$\frac{\overline{BC}}{2\sin\measuredangle BHC} = \frac{\overline{BC}}{2\sin\measuredangle BAC} = R.$$

Сега, од $\measuredangle HCA_0 = |90^\circ - \theta|$ следува дека $\overline{A_0H} = 2R\cos\theta$. Аналогно се добива $\overline{B_0H} = \overline{C_0H} = 2R\cos\theta$, што значи дека H е центарот на опишаната кружница околу $\triangle A_0B_0C_0$, а коефициентот на ротационата хомотетија е $2\cos\theta$.

Ротационата хомотетија χ ја пресликува точката O во H, па затоа $\overline{PH} = 2\overline{PO}\cos\theta$. Понатаму, точките H,G,O лежат на Ојлеровата права и $\overline{HO} = \frac{3}{2}\overline{HG}$. Нека P' е точка на полуправата HP таква што $\overline{HP'} = \frac{3}{2}\overline{HP}$. Тогаш $PG \parallel P'O$ и $\overline{PP'} = \overline{PO}\cos\theta = \overline{PO}\cos\measuredangle P'PO$, па затоа е точно равенството $\measuredangle GPH = \measuredangle OP'H = 90^\circ$.

Втор начин. Нека K е подножјето на нормалата повлечена од точката H на правата BC. Ако D е точка таква што $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\measuredangle HAD = \measuredangle HCD = \measuredangle HKD = 90^\circ$, па затоа точката K припаѓа на кружницата $AHCD$. Точката $CZ \cap AX = \{B_0\}$ исто така припаѓа на оваа кружница бидејќи

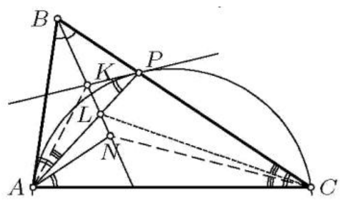
$$\measuredangle AB_0C = \measuredangle AXC + \measuredangle XCB_0 = \measuredangle CZB + \measuredangle BCZ = 180^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle AHC.$$

Понатаму,

$$\measuredangle KB_0X = 180^\circ - \measuredangle KB_0A = \measuredangle KCA = \measuredangle KDA = \measuredangle KBX,$$

што значи дека точката X припаѓа на опишаната кружница k_b на $\triangle BKB_0$. Аналогно $Z \in k_b$. Според тоа, кружницата k_b се совпаѓа со опишаната кружница околу $\triangle BXZ$, а на неа лежи точката P. Значи, точката P припаѓа на кружницата BXK. Слично, P припаѓа на кружницата CXL, каде L е подножјето на нормалата повлечена од H на CG. Сега според теоремата на Микел за $\triangle BCG$ точката P исто така припаѓа на кружницата GKL, а нејзиниот радиус е GH.

22. Кружница k која минува низ темињата A и C на триаголникот ABC ја допира правата AB и по втор пат ја сече страната BC во точката P. Нека l е тангента на кружницата k во точката P. Симетралата на аголот во темето B ги сече правите l и AP во точките K и L, соодветно. Докажи дека $\measuredangle LAK = \measuredangle LCB$.



Решение. Триаголниците BPA и BAC се слични и нека при таа сличност на точката K во $\triangle BPA$ и соодветствува точката N во $\triangle BAC$. Тогаш N е на симетралата на $\measuredangle B$ и $\measuredangle NAC = \measuredangle KPA = \measuredangle PCA = \measuredangle PAB = \measuredangle LAB$. Според тоа точките N и L се изогонално спрегнати во $\triangle ABC$, па затоа $\measuredangle LAK = \measuredangle NCA = \measuredangle LCB$.

23. Даден е $\triangle ABC$ со центар I на впишаната кружница. Права l' ја допира впишаната кружница, а права $l \neq l'$ ги сече страните BC, CA и AB или нивните продолженија соодветно во точките A', B' и C'. Тангентата на впишаната кружница повлечена од точката A', различна од BC, ја сече правата l' во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

Решение. Секаде во решението поимите пол и полара се однесуваат на точката I и впишаната кружница k во $\triangle ABC$.

Нека D, E и F се допирните точки на k со страните BC, CA и AB, соодветно. Нека P и Q се соодветно половите на l' и l (т.е. P е допирната точка на l' и k). Бидејќи $A' = l \cap BC$, нејзината полара е правата која минува низ половите на l и BC, т.е. правата DQ.

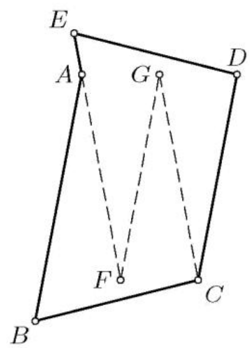
Ако D' е допирната точка на k и $A'A_1$, тогаш D' е полот на правата $A'A_1$. Затоа D' лежи на правата DQ, т.е. DD' минува низ Q. Аналогно се дефинираат и точките E' и F', така што EE' и FF' исто така минуваат низ Q.

Точките P и D' се полови на правите l' и $A'A_1$. Следствено правата PD' е полара на точката $A_1 = A'A_1 \cap l'$. Правата EF е полара на A и следствено пол на правата AA_1 е точката $PD' \cap EF$.

Од досега изнесеното и аналогните заклучувања за правите BB_1 и CC_1 следува дека е доволно да докажеме дека точките $PD' \cap EF$, $PE' \cap FD$ и $PF' \cap DE$ лежат на една права (половите лежат на една права ако и само ако поларите се сечат во една точка). Всушност секои две од овие точки лежат на една права со Q. Последното следува од теоремата на Пап, на пример, од тројките P, D, E и F, E', D' следува дека точките $PD' \cap EF$, $PE' \cap FD$ и $Q = DD' \cap EE'$ лежат на една права.

24. Даден петаголник со искршена линија која поврзува две негови темиња е поделен на два меѓусебно складни петаголници. Докажи дека почетниот петаголник има пар еднакви агли, а петаголниците на кои е поделен имаат по два пара паралелни страни.

Решение. Нека $ABCDE$ е дадениот петаголник. Јасно, дадената искршена линија мора да поврзува две несоседни темиња, да кажеме A и C. Бидејќи двата дела на кои петаголникот е поделен имаат по пет страни, искршената линија се состои од три отсечки (да кажеме $AFGC$), а една нејзина страна е на продолжението на страната на петаголникот (да кажеме F е на продолжението на EA).



Меѓу аглите на петаголниците $ABCGF$ и $CDEFG$ има најмалку два, но најмногу три конкавни: по еден во F и G и уште најмногу еден меѓу аглите B, C, D и E на почетниот петаголник.

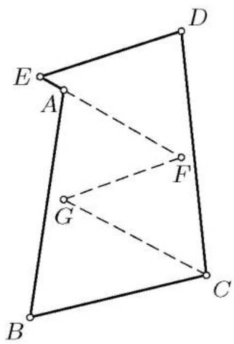
Според тоа, петаголниците $ABCGF$ и $CDEFG$ имаат по еден конкавен агол, и тоа во темињата F и G, не задолжително во овој редослед. Значи изометријата $\mathfrak{I}$ која го пресликува петаголникот $ABCGF$ во петаголникот

$CDEFG$ го пресликува темето F во G или обратно. Можни се следниве случаи:

1) $\Im(F)=G, \Im(G)=F$. Тогаш $ABCGF \cong CDEFG$, па затоа $\overline{AF}=\overline{CG}$ и $\overline{CG}=\overline{EF}$, што не е можно.

2) $\Im(F)=G, \Im(G)=C$. Тогаш $ABCGF \cong FEDCG$ и
$$\measuredangle AFG = \measuredangle FGC = \measuredangle GCD,$$
па затоа $EF \parallel GC$ и $FG \parallel CD$. Исто така, $\measuredangle ABC = \measuredangle FED = \measuredangle AED$.

3) $\Im(G)=F, \Im(F)=E$. Тогаш $ABCGF \cong DCGFE$, па триаголниците BCG, CGF и GFE се складни. Следува дека точките $B<G<E$ се колинеарни, но тогаш отсечката BA ја сече отсечката FG, што не е можно.



25. Точките D, E и F припаѓаат соодветно на страните BA, CA и AB на $\triangle ABC$ и се такви што $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$. Докажи дека ако $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ имаат заеднички центар на опишаните кружници, тогаш $\triangle ABC$ е рамностран.

Решение. Ќе користиме комплексни броеви, при што со малите букви ќе ги означиме афиксите на соодветните точки. Нека заедничкиот центар на опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ е координатниот почеток. Тогаш
$$|a|=|b|=|c| \tag{1}$$
и
$$|d|=|e|=|f|. \tag{2}$$
Од друга страна, ако $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=k\neq 0$, тогаш $\frac{b-d}{d-c}=k$, т.е. $d=\frac{b+kc}{a+k}$. Аналогно $e=\frac{c+ka}{1+k}$ и $f=\frac{a+kb}{1+k}$. Ако замениме во (2) и ги искористиме (1), добиваме
$$a\bar{b}+b\bar{a}=b\bar{c}+c\bar{b}=c\bar{a}+a\bar{c}.$$
Оттука со повторна примена на (1), следува дека $|a-b|=|b-c|=|c-a|$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

26. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со центар O, при што аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCD$ се остри. Нека $AB \cap CD = E$, P и R се подножјата на нормалите повлечени од E соодветно на правите BC и AD, $Q = EP \cap AD$ и $S = ER \cap BC$. Докажи дека правата EO ја преполовува отсечката QS.

Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу $\triangle AED$ и $\triangle CEB$, соодветно. Имаме,
$$\measuredangle BEP = 90^\circ - \measuredangle PBE = 90^\circ - \measuredangle ADE = \measuredangle DER.$$

Според тоа, висината ER во $\triangle AED$ е изогонална на правата EQ (т.е. ER и EQ се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle AED$), што значи дека $O_1 \in EQ$ (Докажи!). Аналогно $O_2 \in ES$.

Од $\triangle AED \sim \triangle CEB$ следува $\overline{EO_1} : \overline{EQ} = \overline{EO_2} : \overline{ES}$. Оттука $\triangle EO_1O_2 \sim \triangle EQS$ и затоа $O_1O_2 \parallel QS$. Според тоа, точките E, K и M лежат на една права, каде K и M се средините соодветно на QS и O_1O_2.

Сега ќе докажеме дека O лежи на истата права, со што задачата ќе биде решена. Бидејќи O_1 и O се центрите на опишаните кружници околу $\triangle AED$ и $ABCD$, важи $OO_1 \perp AD$. Бидејќи $O_2 \in ES \perp AD$, добиваме $OO_1 \parallel EO_2$. Аналогно $OO_2 \parallel EO_1$. Според тоа, OO_1EO_2 е паралелограм и затоа средината M на O_1O_2 е средина и на OE. Во случајот заклучуваме дека O припаѓа на правата EM.

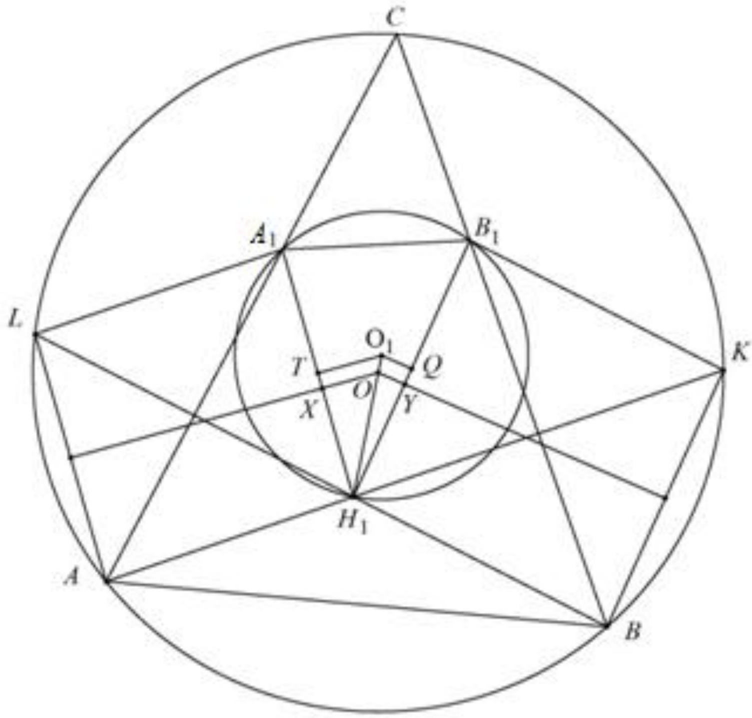
27. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката H_1 е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_1 и AH_1. Точката O_1 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_1B_1H_1$. Точката H_2 е ортоцентар на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_2 и AH_2. Точката O_2 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_2B_2H_2$. Правата O_1O_2 да ја означиме со l_{AB}. Аналогно се дефинираат правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA}. Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M, l_{BC} \cap l_{CD} = N, l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

Решение. *Лема*. Точката O_1 лежи на правата H_1O, каде O е центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Односот во кој O_1 ја дели H_1O зависи само од $\measuredangle ACB$.

Доказ. Нека K и L се пресечните точки на AH_1 и BH_1 со опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Бидејќи H_1 и L се симетрични во однос на AC, заклучуваме дека четириаголникот H_1ALA_1 е ромб, па затоа $\measuredangle AH_1A_1 = 2\measuredangle AH_1L = 2\gamma$. Аналогно H_1BKB_1 е ромб и $\measuredangle BH_1B_1 = 2\gamma$. Според тоа, ромбовите H_1ALA_1 и H_1BKB_1 се слични, од каде добиваме

$$\frac{\overline{H_1T}}{\overline{H_1X}} = \frac{\overline{H_1Q}}{\overline{H_1Y}} = \frac{1}{1+2\cos 2\gamma}.$$

Последното равенство означува дека O_1 лежи на правата H_1O и односот во кој O_1 ја дели H_1O зависи само од $\measuredangle ACB$. ■



Јасно е дека CH_1H_2D е паралелограм (следува од $\overline{CH_1} = \overline{CH_2} = 2R\cos\gamma$) и O_1 и O_2 се хомотетични соодветно на H_1 и H_2 во однос на O. Според лемата коефициентите на двете хомотетии се еднакви (бидејќи зависат само од γ). Според тоа, $O_1O_2 \parallel H_1H_2 \parallel CD$, т.е. правата l_{AB} е паралелна со CD. Добивме дека страните на $MNPQ$ се паралелни со страните на $ABCD$, што значи дека четириаголникот $MNPQ$ е тетивен.

28. Нека r и R се дијаметрите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот ABC. Нека r_a е радиусот на кружницата γ_a која одвнатре ја допира опишаната кружница во точката A, а надворешно ја допира впишаната кружница. Аналогно се дефинираат r_b и r_c. Докажи го неравенството

$$\frac{R-r_a}{r+4r_a} + \frac{R-r_b}{r+4r_b} + \frac{R-r_c}{r+4r_c} \geq \frac{3R}{4r}.$$

Решение. Со S да го означиме центарот на кружницата γ_a, а со S и O центрите на впишаната и опишаната кружница, соодветно. Точката S_a припаѓа на отсечката OA, па од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{SS_a}^2 = \frac{r_a}{R}\overline{SO}^2 + \frac{R-r_a}{R}\overline{SA}^2 - r_a(R-r_a).$$

Бидејќи $\overline{SS_a}=r+r_a$ и според теоремата на Ојлер $\overline{SO}^2=R^2-2Rr$, добиваме

$$R(r+r_a)^2=r_a(R^2-2Rr)+(R-r_a)\overline{SA}^2-r_a(R-r_a),$$

од каде по средувањето добиваме

$$r_a=\frac{R(\overline{SA}^2-r^2)}{\overline{SA}^2+4Rr},\ \frac{R-r_a}{r+4r_a}=\frac{Rr}{\overline{SA}^2}.$$

Аналогни изрази се добиваат за r_b и r_c, со што даденото неравенство се сведува на

$$\frac{r^2}{\overline{SA}^2}+\frac{r^2}{\overline{SB}^2}+\frac{r^2}{\overline{SC}^2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3}{4},$$

што е еквивалентно со

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}.$$

Последното неравенство се докажува едноставно

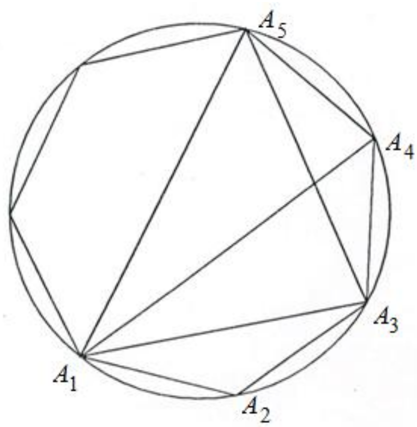
$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma&=2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma\\&\leq2\sin\tfrac{\gamma}{2}+\cos\gamma\\&=1+2\sin\tfrac{\gamma}{2}-2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}\leq\tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

29. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ се правилни седумаголници со плоштини S_A,S_B,S_C, за кои важи $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_3}=\overline{C_1C_4}$. Докажи дека

$$\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}.$$

Решение. Нека

$$\overline{A_1A_2}=a,\ \overline{A_1A_3}=b,\ \overline{A_1A_4}=c.$$



Од теоремата на Птоломеј за четириаголникот $A_1A_3A_4A_5$ следува дека

$$ab+ac=bc\text{, т.е. }\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=1.$$

Бидејќи $\triangle A_1A_2A_3\sim\triangle B_1B_2B_3$, добиваме $\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{a}{b}$ и затоа $\overline{B_1B_2}=\frac{a^2}{b}$. Аналогно $\overline{C_1C_2}=\frac{a^2}{c}$. Според тоа,

$$\frac{S_B+S_C}{S_A}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}.$$

Имаме $\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}>\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+\frac{a}{c})^2=\frac{1}{2}$, бидејќи $\frac{a}{b}\neq\frac{a}{c}$. Од друга страна

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}=(\frac{a}{b}+\frac{a}{c})^2-\frac{2a^2}{bc}=1-\frac{2a^2}{bc}. \qquad (1)$$

Од синусната теорема следува дека

$$\frac{a^2}{bc}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{1}{4\cos\frac{2\pi}{7}(1+\cos\frac{2\pi}{7})}.$$

Бидејќи $\cos\frac{2\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме

$$\frac{a^2}{bc}>\frac{1}{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}=\sqrt{2}-1.$$

Оттука и од (1) следува десното неравенство кое требаше да го докажеме.

30. Определи го најмалиот број m таков што со секои пет рамнострани триаголници со збир на плоштините m може да се покрие рамностран триаголник со плоштина 1.

Решение. Ќе докажеме дека $m=2$. Прво ќе докажеме дека $m\geq 2$. Доволно е за секој $s\in(0,1)$ да најдеме пет рамнострани триаголници со збир на плоштините поголем од $2s$, кои не може да покријат рамностран $\triangle ABC=\Delta$ со плоштина 1. Нека $A_1B_1C_1$ е рамностран триаголник со плоштина $\frac{1+s}{2}$ и темињата му се на соодветните страни на Δ. Нека за определеност земеме $2\overline{BA_1}<\overline{BC}$. Очигледно постојат три рамнострани триаголници кои не може да ја покријат било која од отсечките BA_1, CB_1 и AC_1. Тогаш овие триаголници и два рамнострани триаголници Δ_1 и Δ_2 со плоштина s не може да го покријат Δ. Во спротивно Δ_1 и Δ_2 треба да покријат точки од горните три отсечки и затоа еден од нив, на пример Δ_1, ќе покрие точки од две од нив, да кажеме $D\in A_1B$ и $E\in B_1C$. Бидејќи $P_{A_1B_1C_1}\geq\frac{1}{3}$, важи $\measuredangle A_1B_1C_1\geq 90^\circ$ (Докажи!), па затоа страната на Δ_1 е барем $\overline{DE}\geq\overline{A_1B_1}$. Според тоа, $P_{\Delta_1}\geq P_{A_1B_1C_1}$, што е противречност.

Ќе докажеме дека меѓу секои пет рамнострани триаголници со плоштини a^2, b^2, c^2, d^2 и e^2, за кои $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=2$ има четири кои може да го покријат Δ. Нека $a\geq b\geq c\geq d\geq e>0$. Ако $a\geq 1$, тогаш триаголникот со плоштина a^2 го покрива Δ. Во спротивен случај $b+c>1$. Последното е очигледно ако $c>\frac{1}{2}$, а во спротивно

$$b^2=2-a^2-c^2-d^2-e^2>1-3c^2\geq(1-c)^2.$$

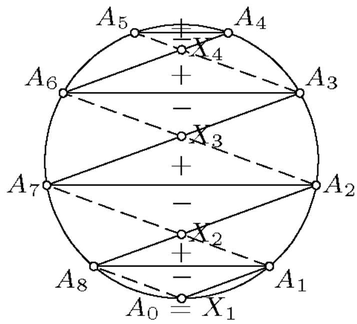
Тогаш триаголниците со плоштини a^2, b^2 и c^2, поставени стандардно во темињата на Δ, ќе се сечат по парови. Тие нема да го покриваат Δ ако

$f=2-a-b-c>0$ и преостанува рамностран триаголник со плоштина f^2. Треба да покажеме дека $d\geq f$. Последното е очигледно ако $d>\frac{1}{2}$ (бидејќи $a,b,c\geq d$), а во спротивно од $a,b,c<1$ следува дека

$$d\geq 2d^2\geq d^2+e^2=2-a^2-b^2-c^2>2-a-b-c=f\,.$$

31. Нека $A_0,A_1,...,A_{2k}$, во овој редослед, се точки од кружница, кои кружницата ја делат $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови, кои наизменично се обоени со црвена и сина боја, така што бројот на црвените делови е за еден поголем од бројот на сините делови. Докажи дека плоштината на сината површина е поголема од плоштината на црвената површина.

Решение. За $j=1,2,...,2k+1$, $j-$тиот дел P_j се состои од триаголникот $A_0A_{j-1}A_j$, каде $A_{2k+1}=A_0$, и кружен отсечок со плоштина S со централен агол $\frac{2\pi}{2k+1}$.



Според тоа,

$$\begin{aligned}P_{2i-1}-P_{2i}&=P_{A_0A_{2i-2}A_{2i-1}}-P_{A_0A_{2i-1}A_{2i}}\\&=P_{A_{i-1}A_iA_{2k+2-i}}-P_{A_{i-1}A_iA_{2k+1-i}}\\&=P_{X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}}-P_{X_iA_iA_{2k+1-i}}\\&=P_{X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}}-P_{X_{i+1}A_iA_{2k+1-i}}\,,\end{aligned}$$

каде $X_i=A_{i-1}A_{2k+1-i}\cap A_iA_{2k+2-i}$. Со собирање за $i=1,2,...,k$ добиваме

$$D=P_1-P_2+...+P_{2k-1}-P_{2k}+P_{2k+1}=S-P_{X_kA_kA_{k+1}}\,.$$

Ако тангентите на кружницата во точките A_k и A_{k+1} се сечат во точката T, тогаш $S<P_{TA_kA_{k+1}}=P_{X_kA_kA_{k+1}}$. Значи, $D<0$, што и требаше да се докаже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 (Second Edition), Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
2. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
3. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K.: Geometry of complex numbers, Arhimed, Sofia, 2015
4. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
5. Аневска, К., Малчески, Р. (2022). Примена на централната ротација во рамнината, Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
6. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
7. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
8. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2006-2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
9. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
10. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
11. Говска, В., Малчески, Р. (2022). Инверзијата во олимписки задачи, Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
12. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2020
13. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
14. Малчески, А., Малчески, Р. (2018). Теорема на Чева, Сигма, Скопје
15. Малчески, Р. (1999). Теорема на Менелај, Сигма, Скопје
16. Малчески, Р. (2022). Теорема на Менелај (втор дел), Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
17. Малчески, Р. (2022). Теорема на Чева (втор дел), Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk
18. Малчески, Р. (2022). Хомотетија (втор дел), Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk

19. Малчески, Р., Аневска, К. (2014). Хомотетија, Сигма, Скопје, https://matematickitalent.mk
20. Малчески, Р., Аневска, К. (2018). Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје
21. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т.: Математички талент С4 (збирка задачи за II година, втор дел), Армаганка, Скопје , 2019
22. Малчески, Р.: Дваесет и пет избрани задачи од геометриски неравенства, Математички талент, https://matematickitalent.mk
23. Малчески, Р.: Примена на синусната и косинусната теорема, Математички талент, https://matematickitalent.mk
24. Малчески, С., Малчески, Р. (2022): Степенот на точка во олимписки задачи, Математички талент, Скопје, https://matematickitalent.mk