Ристо Малчески

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Скопје, декември 2021

Рецензент
д-р Томи Димовски, доцент
Машински факултет, УКИМ, Скопје

СОДРЖИНА

Решенија на задачите

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Корените на оваа збирка задачи, како и на книгата Теорија на броеви од истиот автор се во далечната 1998 година, кога авторот направи неуспешен обид во коавторство со колеги од Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје да напише учебник по теорија на броеви за студентите од Институтот за математика. Овој обид заврши со оформување на нерецензирана скрупта која долги години беше основа за курсот Теорија на броеви при Природно-математичкиот факултет во Скопје. Предметнава збира задачи, како и книгата Теорија на броеви од истиот автор, суштински се разликува од споменатата скрипта, како по структура, така и по содржина.

Важен стимул за развојот, како на книгата Теорија на броеви, така и на оваа збирка задачи се повеќе од триесетте години кои авторот ги помина работејќи во Сојузот на математичарите на Македонија, особено во делот на националните и меѓународните натпревари кои СММ ги организираше во периодот од 1988-2019 година, како и во списанието Сигма. Притоа, во оформувањето на оваа збирка задачи важна улога имаа бројните статии на авторот, кои десетици години наназад се пишувани, пред сè за да се премости недостатокот на литература за работа со надарените ученици по математика во Република Македонија, како и задачите кои беа разработувани на подготовките на учениците за учество на меѓународните математички натпревари (JBMO, BMO, EGMO, IMO, EMC, MeMO и APMO).

Збирката содржи 30 параграфи и со исклучок на главата Квадратни полиња, во целост ги покрива содржините кои се предмет на разработка книгата Теорија на броеви. Во секој параграф се содржани задачи, кои се поврзани со темата која е предмет на разработка во тој параграф и со некои од претходните теми. Книгата вкупно содржи 941 решени задачи, чиј избор е направен од задачите кои изминатите години се задавани на JBMO, BMO, EGMO, IMO, APMO и на националните олимпијади на најдобро рангираните земји на IMO. Покрај тоа, книгава содржи и голем број задачи кои се предлагани на IMO, како и задачи од тестовите за селекција на екипите за учество на IMO и BMO на некои од најдобро рангираните земји на IMO. Притоа задачите не се подредени според тежина, па затоа често пати по исклучително тешка задача може да се сретнат една или повеќе полесни задачи.

Согласно содржините во книгата Теорија на броеви, збирката содржи класични теми од теоријата на броеви кои се присутни на националните и меѓународните натпревари по математика за учениците од средното образование. Меѓутоа, како и во книгата, така и во збирката се содржани теми кои ретко се среќаваат во задачите кои се задаваат на математичките олимпијади, како што се темите: Ферматови броеви, Функција на Мебиус, Нелинеарни конгруентни равенки и теорема на Лагранж, Цикломатични полиноми и теорема на Жигимонди, Квадратни остатоци и квадратен закон на реципроцитет, Деливост на биномните коефициенти (теоремите на Лукас и Кумер), Диофантови апроксимации и Теореми на Чебишев и Дирихле. Значително внимание, иако задачите не се одделени во посебен параграф е посветено на комбинаторните идеи за решавање задачи од теоријата на броеви, како и на функциите и функционалните равенки во множеството цели броеви, за чие решавање се користат знаењата од теоријата на броеви.

Збирката задачи е наменета пред се за ученииците кои се интересираат за изучување и применета на теоријата на броеви и тоа на ниво потребно за успешно учество на престижните меѓународни математички олимпијади. Затоа, пред да се пристапи кои совладување на содржините кои се предмет на разработка на оваа збирка е неопходно учениците да се стекнат со неопходните теориски знаења и техники за решавање на задачи на поелементарно ниво. Оттука, на читателите им препорачувам прво да ја проучат книгата Вовед во елементарна теорија на броеви ([114]), како и книгата Математички талент 26 – збирка задачи по елементарна теорија на броеви ([134]), која во целост соодвествува на споменатата книга, а потоа да преминат кон изучување на книгата Теорија на броеви ([132]).

Пожелно е оваа збирка задачи да ја совладаат и студенти од наставните групи по математика, кои во текот на својот работен век природно ќе се среќаваат со ученици надарени за математика, кои учествуваат на математичките натпревари. Исто така, се надевам дека, како од оваа збирка задачи, така и од претходно споменатите книги и другите збирки од сериите Математички талент, колегите од основното и средното образование ќе можат по сопствен избор да направат системи задачи за работа со своите ученици и за индивидуална работа со младите математички таленти.

При оформувањето на збиркава, важен допринос имаше колегата д-р Томи Димовски, кој со своите забелешки и предлози придонесе како да се намали бројот на грешките кои неминовно го пратат издавањето на секоја книга, така и да се подобрат решенијата на определен број задачи. Последното ми беше од посебна корист, бидејќи со тоа поголем број задачи станаа попристапни за учениците, особено на оние од помала возраст, за што на колегата д-р Томи Димовски посебно

му благодарам. Исто така, во оваа пригода сакам да му се заблагодарам и на колегата д-р Павел Димовски кој како рецензент на книгата Теорија на броеви имаше значително влијание и во оформувањето на оваа збирка задачи.

На крајот е наведена литературата која ја користев при пишувањето на оваа обемна збирка задачи. Во литературата, покрај книгите и статиите од други автори се наведени и моите книги и стручни статии од теорија на броеви, кои како што напоменав се резултат од мојата долгогодишна работа со надарените ученици за математика во Република Македонија.

За крај, и покрај вложениот напор, како од моја страна, така и од колегата д-р Томи Димовски, свесен сум дека се можни подобрувања на оваа збирка задачи, како и дека се присутни определен број грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе како за отстранување на грешките, така и за подобрување на структурата и содржината на оваа збирка задачи.

Скопје Авторот
јули, 2021 г.

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Со колку цифри е запишан бројот $2^{11213}-1$.

2. Пресметај колку цифри се потребни за да се запишат сите природни броеви од N до M, $(N<M)$, вклучувајќи ги N и M.

3. Со колку цифри е запишан бројот $2^{11212}(2^{11213}-1)$.

4. Дали постојат 10 различни цели броеви такви што збирот на било кои 9 од нив е точен квадрат?

5. Дадена е бесконечна аритметичка прогресија чии членови се природни броеви. Ако прогресијата содржи еден член кој е точен квадрат на природен број, тогаш таа содржи бесконечно многу точни квадрати на природни броеви. Докажи!

6. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ е природен број.

7. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постојат n по парови различни цели броеви чиј збир на квадрати е еднаков на збирот на кубовите.

8. Докажи, дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1,m_2,...,m_k$ (не задолжително различни) такви што
$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_k}).$$

9. Даден е природен број $n\geq 2$. Определи го најмалиот природен број m за кој постои низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n$, која ги задоволува условите:
   1) $a_1<a_2<...<a_n=m$;
   2) Сите $n-1$ броеви $\frac{a_1^2+a_2^2}{2},...,\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{2}$ се точни квадрати.

10. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви кои можат да се

запишат како разлика на кубови на два природни броја, но не можат да се заишат како збир на кубови на два природни броја.

11. Колку пати се среќава цифрата 5 во декадниот запис на бројот
$$S=1+10+19+37+...+10^{2021}?$$

12. Определи го најмалиот природен број n кој што ги има следниве својства:
а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,
б) ако цифрата на единиците се премести пред другите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n.

13. За целите броеви a, b, c и d се исполнети равенствата $|ac+bd|=|ad+bc|=1$. Докажи, дека $|a|=|b|=1$ или $|c|=|d|=1$.

14. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е квадрат на цел број.

15. Определи ги сите природни броеви n, $n\geq 1$ такви што бројот n^2+3^n е точен квадрат.

16. Дали постои природен број n, кој го има следново својство: збирот на цифрите на бројот n^2 е еднаков на 1000^2?

17. Броевите $1,2,...,2n$ се распоредени во две низи
$$a_1<a_2<...<a_n \text{ и } b_1>b_2>...>b_n.$$
Докажи, дека бројот $w=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ е точен квадрат.

18. Бројот $5^{1985}-1$ претстави го како производ на три природни броја секој од кои е поголем од 5^{100}.

19. Определи ги сите парови (x,y) различни природни броеви, такви што со замена на местата на последните две цифри на бројот x^2 се добива бројот y^2.

20. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = ... = S(n^2).$$

21. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}, a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}, m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k$, за произволен $k \in \mathbb{N}$.

22. Низата $\{a_n\}$ е определена со:
$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, \text{ за } n = 1, 2, ...$$
Изрази го $n-$от член.

23. Низата $\{c_n\}$ е зададена со
$$c_1 = a, c_2 = b, c_{n+2} = -(c_n + 2c_{n+1}), \text{ за } n = 1, 2, ...$$
Изрази го $n-$от член. Испитај ги случаите $a = 1$, $b = -1$ и $a = 1$, $b = -2$.

24. Низата $\{c_n\}$ е зададена со
$$c_1 = a, c_2 = b, c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n, \text{ за } n = 1, 2, ...$$
Изрази го $n-$от член.

25. Изрази го $n-$от член на низата $\{c_n\}$ зададена со
$$c_1 = a, c_2 = b, c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}, \text{ за } n = 1, 2, ...$$

26. Определи ги сите строго растечки аритметички прогресии составени од три членови на низата на Фибоначи $u_1 = u_2 = 1$ и $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, за $n = 1, 2, ...$. Докажи, дека не постои строго растечка аритметичка прогресија составена од четири членови на низата на Фибоначи.

27. Докажи, дека секој природен број може да се запише како збир на различни членови на низата на Фибоначи: $u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, за $n = 1, 2, ...$.

28. Множество од последователни природни броеви содржи точно 10 четврти степени и точно 100 кубови на природни броеви. Докажи, дека ова множество содржи барем 2000 точни квадрати на природни броеви.

29. Докажи го или негирај го тврдењето: ако за природните броеви $a_1, a_2, ..., a_k$ важи
$$a_1! \cdot a_2! \cdot ... \cdot a_k! = t^k,$$
каде t е некој природен број, тогаш $|a_i - a_j| \leq 1$ за секои $1 \leq i, j \leq k$.

30. Определи ги сите природни броеви n, $k_1, k_2, ..., k_n$ за кои важи
$$k_1 + ... + k_n = 5n - 4 \text{ и } \frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} = 1.$$

31. Дали постои пермутација $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$ на броевите 1, 2, ..., 2013 таква што $a_i - a_j \neq a_j - a_k$, за секои $1 \leq i < j < k \leq 2013$?

32. Нека $m, n \in \mathbb{N}$, $(1 \leq m \leq 1981, 1 \leq n \leq 1981)$ се такви што ја задоволуваат равенката
$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$
Определи ја најголемата вредност на збирот $m^2 + n^2$.

33. За природните броеви a, b, c, d важи $ad = bc$ и $a < b < c < d$. Докажи дека постои природен број n таков што $a < n^2 < d$.

34. Со $S(n)$ да го означиме збирот на цифрите на природниот број n запишан во декаден запис. За бројот m ќе велиме дека е лош ако не може да се претстави во обликот $m = n + S(n)$. Колку лоши броеви има, конечно или бесконечно многу?

35. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите во декаден запис на природниот број n. Определи ги сите природни броеви M такви што важи $S(kM) = S(M)$ за секој природен број $k \leq M$.

2. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги сите природни броеви N такви што $N=(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)$ каде a_i се цифрите на бројот N во неговиот декаден запис.

2. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се составени девет (не задолжително различни) деветцифрени броеви, при што секоја цифра во секој број е употребена точно по еднаш. На колку најмногу нули може да завршува збирот на овие девет броја?

3. Дали постои бесконечна низа природни броеви таква што за секој k збирот на секои k последователни броеви е делив со $k+1$?

4. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $(n+1)(n+2)...(n+n)$ е делив со 2^n, но не е делив со 2^{n+1}.

5. Докажи дека за секој природен број n барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

6. а) Нека $a_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,2,...,m$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека
$$6 \mid (a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1})$$
ако и само ако $6 \mid (a_1+a_2+...+a_m)$.
б) Нека $p>2$ е непарен природен број и n е природен број. Докажи дека p е делител на $1^{p^n}+2^{p^n}+...+(p-1)^{p^n}$.

7. За еден природен број ќе велиме дека е палиндром ако е еднаков на бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед, т.е. ако исто се чита како од лево на десно, така и од десно на лево. Определи ги најголемиот и најмалиот петцифрен палиндром кој е делив со 101.

8. За природниот број n со $P(n)$ да го означиме производот на сите позитивни делители на n. На пример, $P(20)=8000$, бидејќи позитивни делители на 20 се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20.
а) Определи ги сите природни броеви n такви што $P(n)=15n$.

б) Докажи дека не постои природен број n, таков што $P(n)=15n^2$.

9. Докажи дека сите членови на низата:

1007, 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ...

($n-$ тиот член на низата се добива така што меѓу 100 и 7 се запишани $n-1$ цифри еднакви на 1), се деливи со 53.

10. Меѓу броевите од облик $36^k-5^l, k,l\in\mathbb{N}$ одреди го најмалиот по апсолутна вредност.

11. Нека a е цел број. Докажи дека не постојат цели броеви b и c, $c>1$, за кои важи

$$(a+1)^2+(a+2)^2+...+(a+99)^2=b^c. \qquad (1)$$

12. Определи ги сите природни броеви n такви што збирот на цифрите на бројот $n!$ е еднаков на 9.

13. Ако природниот број n има непарен број различни природни делители, сметајќи ги 1 и самиот број, тогаш n е квадрат на природен број. Докажи!

14. Нека d и d', $d'>d$ се природни делители на природниот број n. Докажи, дека $d'>d+\frac{d^2}{n}$.

15. Нека $n>1$ е природен број и нека $d_1,d_2,...,d_k$ се сите позитивни делители на бројот n, при што

$$1=d_1<d_2<...<d_k=n.$$

Нека $D=\sum\limits_{i=1}^{k-1}d_id_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D<n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2.

16. Нека $n_1,n_2,\ldots,n_k$ се сите природни делители на n, различни од 1 и n. Докажи, дека

$$\frac{2}{\log_k n}(\log_k n_1+\log_k n_2+\ldots+\log_k n_k)=k.$$

17. Докажи дека 2014 е делител на 2012^9+2016^9.

18. Докажи, дека за ниту еден природен број m бројот $1978^m - 1$ не е делив со $1000^m - 1$

19. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $7^n - 1$ е делив со 6 и 8.

20. Докажи дека бројот $2^{147} - 1$ е делив со 343.

21. Докажи дека не постои природен број n таков што $6^n - 1$ е делител на $7^n - 1$.

22. Даден е природен број n. Природниот број $a > n^2$ е таков што меѓу броевите $a+1, a+2, ..., a+n$ има содржател на секој од броевите $n^2+1, n^2+2, ..., n^2+n$. Докажи дека $a > n^4 - n^3$.

23. На таблата се запишани четири по парови различни цели броеви, секој од кои има апсолутна вредност поголема од 10^6. Познато е дека не постои природен број поголем од 1, кој е делител на секој од четирите запишани броеви. Павел во тетратката ги запишал шесте збирови на паровите броеви запишани на таблата, потоа ги поделил овие шест збирови на три парови и ги помножил броевите од секој пар. Дали е можно овие три производи да се еднакви?

24. Определи ги сите природни броеви n такви што $8^n + n$ е делив со $2^n + n$.

25. Определи ги сите парови природни броеви a и b такви што $(a^3+b)(b^3+a)$ е степен на бројот 2.

26. Определи природни броеви a и b за кои:
1) производот $ab(a+b)$ не е делив со 7,
2) бројот $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ е делив со 7^7.

27. Природните броеви, m, n, k се такви што бројот m^n е делив со n^m, а бројот n^k е делив со k^n. Докажи, дека бројот m^k е делив со k^m.

28. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n \mid 2^n + 1$.

29. Ако за природниот број n важи $n\,|\,(2^n+2)$ и $(n-1)\,|\,(2^n+1)$, тогаш и за бројот $n_1=2^n+2$ важи $n_1\,|\,(2^{n_1}+2)$ и $(n_1-1)\,|\,(2^{n_1}+1)$. Докажи!

30. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n\,|\,(2^n+2)$.

31. Нека $m,n>1$ се природни броеви за кои важи $n\,|\,4^m-1$ и $2^m\,|\,n-1$. Докажи дека $n=2^m+1$.

32. Докажи дека за секој природен број n постои природен број k таков што 19^k-97 е делив со 2^n.

33. Ако $k>1$ е природен број, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $n\,|\,(k^n+1)$. Докажи!

34. Нека k е непарен природен број. Докажи, дека $2^{n+2}\,|\,(k^{2^n}-1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

35. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $(2^n-1)^2\,|\,(2^{(2^n-1)n}-1)$.

36. Нека a е природен број од облик $4s+1$. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ збирот

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}a+\binom{n}{5}a^2+\binom{n}{7}a^3+...$$

е делив со 2^{n-1}.

37. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$ се такви што $a^2+b^2=c^2$. Докажи дека за секој $k\geq 2$ броевите $E_k=a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}$ и $F_k=(ab)^{2^k}+(bc)^{2^k}+(ca)^{2^k}$ се деливи со бројот $D=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$.

38. Определи ја максималната вредност за k таква што меѓу k избрани броеви од $\{1,2,...,2n\}$ не постојат два такви што едниот од нив е делител на другиот.

39. Нека се a и b природни броеви, такви што a^2+b^2 е делив со $ab+1$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат на природен број.

40. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab=2^n-1$, докажи дека бројот $ab-(a-b)-1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

41. Определи ги сите природни броеви $n>1$ такви што $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ е природен број.

42. Определи ги сите природни броеви кои не може да се претставаат во облик

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}, \tag{1}$$

каде a и b се природни броеви.

43. Дадена е бесконечна строго мнотоно растечка низа природни броеви $x_1=1$, $x_2,x_3,\ldots$ таква што за секој природен број s важи $x_{s+1}-x_s\le 3$. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n за кои x_m е делител на x_n.

44. Определи ги сите природни броеви m и n такви што n^m-m е делител на бројот m^2+2m.

45. Определи природни броеви a, b и c такви, што

$$1\le a<b<c \text{ и } abc\,|\,ab+bc+ca+a+b+c.$$

46. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што $1<a<b<c$ и $abc-1$ е делив со $(a-1)(b-1)(c-1)$.

47. Даден е природен број a. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена на следниот начин: $a_0=a$, ако

$$a_n=c_0+10c_1+10^2c_2+\ldots+10^kc_k,\ c_i\in\{0,1,\ldots,9\},$$

тогаш

$$a_{n+1}=2c_0+c_1+10c_2+\ldots+10^{k-1}c_k.$$

Кои броеви во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се повторуваат бесконечно многу пати?

48. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви, што $m\,|\,(n^2+1)$ и $n\,|\,(m^2+1)$?

49. Определи ги сите природни броеви x и y такви што $y \mid x^2+1$ и $x^2 \mid y^3+1$.

50. Дадена е низата $x_1=1$, $x_2=4$ и $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n, n\geq 1$. Определи ги сите природни броеви m такви, што бројот $3x_n^2+m$ е точен квадрат за секој природен број n.

51. Определи ги сите природни броеви a, b и c, за кои е исполнето равенството $a!b!=a!+b!+c!$.

52. Определи го трицифрениот број n кој при делење со 11 дава број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на бројот n.

53. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што секој од броевите

$$ab-c, bc-a, ca-b$$

е степен на бројот 2.

54. а) Нека a, b и n се дадени природни броеви. Ако за секој природен број k, $k\neq b$ бројот k^n-a е делив со $k-b$, тогаш $a=b^n$. Докажи!
б) Природните броеви a и b се такви што за секој природен број n бројот $2^n a+b$ е точен квадрат. Докажи дека $a=0$.

55. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека постојат различни броеви $a,b,c\in\mathbb{N}$ такви што

$$n^2<a,b,c<n^2+n+3\sqrt{n} \text{ и } a \mid bc.$$

56. Докажи дека за било кои природни броеви a и b, бројот $(36a+b)(a+36b)$ не може да биде степен на бројот 2.

3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. На кружница се запишани 99 соседни броеви. Познато е дека секои два соседни броја се разликуваат за 1 или 2, или пак едниот е двапати поголем од другиот. Докажи дека, барем еден од броевите е делив со 3.

2. Докажи дека за секој природен број n постои $n-$цифрен број запишан само со непарни цифри и делив со 5^n.

3. Дали постои цел број чиј куб е еднаков на $3n^2+3n+7$, каде n е цел број?

4. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви кои не можат да се претстават како збир на кубови на два цели броја, но се збир на кубови на два рационални позитивни броја.

5. Докажи, дека секој природен број помал или еднаков на $n!$, може да се запише како збир на најмногу n по парови различни собирци, секој од кои е делител на бројот $n!$.

6. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви од облик $8k+1$, $k=0,1,2,...$ кои можат да се претстават во облик x^2-2y^2, каде x и y се природни броеви, а исто така има и бесконечно многу природни броеви кои не можат да се претстават во саканиот облик. Најди го најмалиот број кој не може да се претстави на бараниот начин.

7. Даден е бројот 2^k, $k>3$. Докажи дека со прераспоредување на цифрите на овој број не може да се добие број од видот 2^n, $n>k$.

8. Определи го најмалиот природен број m за кој 2^{2000} е делител на 2003^m-1.

9. а) Докажи дека постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $2^{1990}\mid(1989^n-1)$. Определи го најмалиот таков број n.
   б) Нека $m\geq 3$ е непарен природен број. Определи го најмалиот број n за кој $2^{1989}\mid(m^n-1)$.

10. Определи ги сите природни броеви n за кои $3|(2^n n+1)$.

11. Определи го максималниот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на даден природен број n.

12. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?

13. За секој природен број n нека a_n е бројот на точните квадрати меѓу броевите $2,9,16,...,7n+2$, а b_n е бројот на точните квадрати меѓу броевите $1,4,7,...,$ $3n+1$. Определи:
а) a_{1984},
б) најмал број n, за кој важи $b_n = a_{1984}$.

14. Низите $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ се определени со
$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, n \ge 2 \text{ и } y_1 = 1, y_2 = 7, y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, n \ge 2.$$
Докажи, дека освен бројот 1 овие низи немаат заеднички членови.

15. Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и при делење на $a^2 + b^2$ со $a+b$ се добива количник q и остаток r. Определи ги сите парови (a,b) за кои е $q^2 + r = 1977$.

16. Низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е определена со $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1,$ за $n = 2,3,4,...$. Докажи, дека a_{2013} не е делив со 4.

17. Најди бесконечна аритметичка прогресија, која се состои од природни броеви, има најмала разлика и не содржи ниту еден триаголен број $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n = 1,2,...$.

18. Определи растечка аритметичка прогресија со најмала разлика, чии членови се природни броеви и таква што ниту еден нејзин член не припаѓа на низата на Фибоначи.

19. Докажи дека за секој природен број n постои природен број N таков што за произволен природен број $b \in [2,1389]$ збирот на цифрите на N во броен систем со основа b е поголем од n.

20. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни видови монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат номинални вредности така што секоја сума од 1 до 6543 денари ќе може да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста номинална вредност.)

21. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

22. Во еден чекор тројката цели броеви (p,q,r) се заменува со тројката цели броеви $(r+5q, 3r-5p, 2q-3p)$. Дали по конечен број чекори на овој начин од тројката $(1,3,7)$ може да се добие тројката $(k,k+1,k+2)$?

4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Ако a и b се природни броеви и a^2+b^2-a е делив со $2ab$, тогаш a е точен квадрат. Докажи!

2. Нека n е природен број. Докажи, ако бројот
$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$
е природен, тогаш тој е точен квадрат.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои $13\,|\,n^2+3$ и $13\,|\,(n+1)^2+3$.

4. Нека n е природен број. Докажи дека најголемиот заеднички делител на броевите n^2+1 и $(n+1)^2+1$ е 1 или 5, при што е еднаков на 5 ако и само ако $n=5k+2, k\in\mathbb{N}$.

5. Нека a и b се два последователни природни броја и n е произволен природен број. Докажи дека $(an+b,bn+a)$ е непарен број.

6. Нека n е парен природен број. Определи ги сите заемно прости броеви a и b такви што $a+b\,|\,a^n+b^n$.

7. Дали постојат три природни броеви поголеми од еден такви што квадратот на секој од нив намален за 1 е делив со секој од преостанатите два броја.

8. Определи ги сите подредени тројки (m,n,p) позитивни рационални броеви такви што $m+\frac{1}{np}, n+\frac{1}{pm}, p+\frac{1}{mn}$ се цели броеви.

9. Нека m и n се природни броеви такви што
$$2001m^2+m=2002n^2+n\,.$$
Докажи дека $m-n$ е точен квадрат.

10. Ако a и b се решенија на равенката $x^2+px-1=0$, каде p е непарен број,

тогаш за секој ненегативен цел број n броевите a^n+b^n и $a^{n+1}+b^{n+1}$ се цели и заемно прости. Докажи!

11. Збирот на 49 природни броеви е еднаков на 999. Определи ја најголемата можна вредност на нивниот најголем заеднички делител.

12. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи
$$(a,b,c)=(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{b+c}{2},\tfrac{c+a}{2}).$$

13. Ако за рационалниот број x вредноста на изразот $2x^4+3x+1$ е цел број тогаш и x е цел број. Докажи!

14. Определи ги сите природни броеви n за кои дропката $\frac{5n+6}{8n+7}$ може да се скрати.

15. Низата $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со
$$t_1=2,\ t_{n+1}=t_n^2-t_n+1,\ \text{за}\ n\geq 1.$$
Докажи дека за $m\neq n$ броевите t_m и t_n се заемно прости.

16. Нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека членовите на низата $F_n=(2k)^{2^n}+1$, $n=1,2,3,...$ се по парови заемно прости броеви.

17. Докажи дека:
   a) Постои бесконечна растечка низа по парови заемно прости триаголни броеви, т.е. броеви од облик
   $$t_n=\frac{n(n+1)}{2},\ n=1,2,3,\dots.$$
   b) Постои бесконечна растечка низа по парови заемно прости тетраедарски броеви, т.е. броеви од облик
   $$T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ n=1,2,3,\dots.$$

18. Определи ги сите цели броеви n така што бројот $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ е рационален.

19. Нека a,b и c се природни броеви такви што барем еден од нив е заемно прост со останатите два. Докажи дека постојат природни броеви x,y и z такви што $x^a=y^b+z^c$.

20. Определи ги сите природни броеви n, за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се раздели на две множества такви што производот на сите елементи од едното множество е еднаков на производот на сите елементи од другото множество.

21. На табла се запишани 100 по парови различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{100}$. Потоа, под секој број a_i е запишан број b_i еднаков на збирот на a_i и најголемиот заеднички делител на останатите 99 почетни броеви. Колку најмногу по парови може да се различни меѓу броевите $b_1, b_2, ..., b_{100}$.

22. За секој ненегативен цел број n дефинираме $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, ..., A_{1999}$.

23. Нека $x, y \neq -1$ се цели броеви такви што $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ е цел број. Докажи дека бројот $x^4 y^{44} - 1$ е делив со $x+1$.

24. Нека c е ненегативен цел број. Дефинираме $a_n = n^2 + c$, $n \geq 1$. Нека d_n е најголемиот заеднички делител на a_n и a_{n+1}.

а) Ако $c = 0$, докажи дека $d_n = 1$ за секој $n \geq 1$.

б) Ако $c = 1$, докажи дека $d_n \in \{1, 5\}$ за секој $n \geq 1$.

в) Докажи дека $d_n \leq 4c+1$ за секој $n \geq 1$.

25. Нека a, b и c се природни броеви такви што $\frac{bc}{b+a}, \frac{ca}{c+a}$ и $\frac{ab}{a+b}$ се природни броеви. Докажи дека $(a, b, c) > 1$.

26. Нека a и b се различни природни броеви такви што бројот $a^2 + ab + b^2$ е делител на бројот $ab(a+b)$. Докажи дека $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

27. Нека m и n се природни броеви такви што $(m, n) = 1$. Пресметај

$$(5^n + 7^n, 5^m + 7^m).$$

28. Определи го најголемиот природен број n кој не може да се претстави како збир на три броја поголеми од 1 кои се по парови заемно прости.

29. Нека a е цел број. Докажи дека за секој реален број $x, x^2 < 3$, броевите $\sqrt{3-x^2}$ и $\sqrt[3]{a-x^3}$ не можат истовремено да бидат рационални броеви.

30. Нека a, m и n се природни броеви, при што n е непарен број. Докажи, дека $(a^n - 1, a^m + 1) \le 2$.

31. Докажи, дека бројот $a^{2^n} + 1$ е делител на бројот $a^{2^m} - 1$, за $m > n$, и дека за $a, m \in \mathbb{N}, m \ne n$ важи

$$(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = \begin{cases} 2, & \text{ако } a \text{ е непарен број.} \\ 1, & \text{ако } a \text{ е парен број.} \end{cases}$$

32. Нека $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ и $m, n \in \mathbb{N}$. Определи го $(a^m - 1, a^n - 1)$.

33. Нека a и b се заемно прости непарни природни броеви. Определи ги сите можни вредности на бројот $(2^a + 2^{\frac{a+1}{2}} + 1, 2^b + 2^{\frac{b+1}{2}} + 1)$.

34. Природните броеви m и n се такви што $(2m+1, 2n+1) = 1$. Определи ги сите вредности на

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1).$$

35. Нека a и b се природни броеви такви што $a! + b! \mid a!b!$. Докажи го неравенството $3a \ge 2b + 2$.

36. Нека a, b и c се природни броеви такви што барем еден од нив е заемно прост со останатите два. Докажи, дека постојат природни броеви x, y и z такви што $x^a = y^b + z^c$.

37. Нека $a, b, m, n \in \mathbb{N}$ и $(a, b) = 1, a > 1$. Ако $(a^n + b^n) \mid (a^m + b^m)$, тогаш $n \mid m$. Докажи!

38. Со $w(x)$ да го означиме најголемиот непарен делител на природниот број x. Ако a и b се заемно прости природни броеви такви што $a + w(b+1)$ и $b + w(a+1)$ се степени на бројот 2, тогаш и броевите $a+1$ и $b+1$ се степени на бројот 2. Докажи!

39. Определи аритметичка прогресија $ak+b$, $k=0,1,2,...$, каде $(a,b)=1$ која не содржи ниту еден член на низата на Фибоначи.

40. Нека $a_0,a_1,a_2,...$ е низа природни броеви таква што најголемиот заеднички делител на два нејзини последователни членови е поголем од претходниот член, односно $(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$. Докажи дека $a_n\geq 2^n$, за секој $n=0,1,2,...$.

41. Нека a,b,c и d се непарни природни броеви за кои:
(1) $0<a<b<c<d$,
(2) $ad=bc$ и
(3) $a+d=2^k$, $b+c=2^m$ за некои природни броеви k и n.
Докажи дека $a=1$.

42. Нека $n,p,q\in\mathbb{N}$ се такви што $n>p+q$ и $x_0,x_1,...,x_n$ се природни броеви кои ги задоволуваат условите:
а) $x_0=x_n$
b) за секој $i\in\mathbb{N}$ таков што $1\leq i\leq n$ важи или
$$x_i-x_{i-1}=p \text{ или } x_i-x_{i-1}=-q.$$
Докажи дека постои пар на индекси (i,j) таков што $i<j$, $(i,j)\neq(0,n)$ и $x_i=x_j$.

43. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков што $f(0)=f(1)=1$, a_0 е произволен цел број и нека низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е определена со
$$a_{n+1}=f(a_n),\ n=0,1,2,3,... . \qquad (1)$$
Докажи, дека ако $m\neq n$, тогаш $(a_m,a_n)=1$.

44. Најди алгоритам за наоѓање на сите парови природни броеви, такви што нивниот збир и производ се квадрати на природни броеви.

45. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се по парови заемно прости природни броеви. Докажи дека
$$[a_1,a_2,...,a_n]=a_1a_2...a_n.$$

46. Нека $a,b\in\mathbb{N}$. Докажи дека
$$[1,2,...,a,b,b+1,...,b+a-1]=[b,b+1,...,b+a-1].$$

47. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се природни броеви. Докажи дека

$$[a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{a}{d}, \qquad (1)$$

каде

$$a = a_1 a_2 ... a_n \text{ и } d = (\frac{a}{a_1}, \frac{a}{a_2}, ..., \frac{a}{a_n}).$$

48. Нека $1 = d_1 < ... < d_s = N$ се сите природни делители на природниот број $N > 1$. Определи ги сите природни броеви N за кои важи

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + ... + (d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

49. Докажи дека низата $2^n - 3$, $n = 2, 3, ...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

50. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n.$$

Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

51. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, ...$ е дефинирана со

$$a_1 = c,\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

52. Определи ги подредени парови природни броеви (m, n) такви што $\frac{n^3+1}{mn-1} \in \mathbb{N}$.

53. Нека $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажи, дека за секој природен број $m > 1$ броевите $m, f(m), f(f(m)), ...$ се по парови заемно прости.

54. Докажи, дека за секој природен број $n > 1$ постојат бесконечно многу природни броеви, кои се збир на два $n-$ти степени на природни броеви, но не се разлика на два $n-$ти степени на природни броеви.

55. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што

$$[m, n] + (m, n) = m + n.$$

Докажи дека еден од броевите е делител на другиот.

56. Определи ги сите природни броеви n кои можат да се запишат како
$$n=[a,b]+[b,c]+[c,a] \qquad (1)$$
каде $a,b,c\in\mathbb{N}$.

57. Определи ги сите природни броеви k, за кои равенката
$$[m,n]-(m,n)=k(m-n),$$
нема решенија $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, за $m\neq n$.

5. ПРОСТИ БРОЕВИ. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКАТА

1. Докажи, дека за секој природен број n постојат природни броеви $x>n$ и y такви што $x^x \mid y^y$, но $x \nmid y$.

2. Природниот број го нарекуваме *апсолутно прост*, ако тој е прост број и ако при секоја пермутација на неговите цифри се добива прост број. Докажи, дека во записот на апсолутно прост број не може да се содржат повеќе од 3 различни цифри.

3. Дали може ѕвездичките во изразот
$$[*,*,*]-[*,*,*]=2009$$
да се заменат со шест последователни природни броеви во некој редослед така што ќе се добие точно равенство?

4. Нека $a,b,c \in \mathbb{N}$. Докажи дека
$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}$$

5. Именителите на две нескратливи дропки се еднакви на 600 и 700. Определи ја најмалата можна вредност на именителот на нивниот збир запишан како нескратлива дропка.

6. Дали постои бесконечно множество од природни броеви такво што
а) било кој негов елемент не е k-ти степен, $k>1$ на природен број.
б) збирот на конечно многу од неговите елементи не е k-ти степен, $k>1$ на природен број,

7. Нека $p>5$ е прост број и $X=\{p-n^2 \mid n\in\mathbb{N}, n^2<p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y, такви што $x\neq 1$ и $x \mid y$.

8. Нека a е природен број поголем од 1. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот
$$n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$$
е делив со секој прост број помал од бројот a.

9. Нека $m,n,d\in\mathbb{N}$, $n>1$. Ако сите членови на аритметичката прогресија $m,m+d,m+2d,...,m+(n-1)d$ се прости броеви, тогаш разликата d на прогресијата е делива со сите прости броеви помали од n. Докажи!

10. Докажи дека за секој прост број p постојат цели броеви x и y такви што x^2+y^2+1 е делив со p.

11. Ако $a,b\in\mathbb{N}$ и $(a,b)=1$, тогаш за секој природен број m во аритметичката прогресија $ak+b, k=0,1,2,...$ постојат бесконечно многу членови заемно прости со m. Докажи!

12. Докажи дека во секоја аритметичка прогресија $ak+b,k=0,1,...$ каде $(a,b)=1$, $a,b\in\mathbb{N}$ постојат бесконечно многу по парови заемно прости броеви.

13. Определи прости броеви p,q и r за кои броевите $p(p+1)$, $q(q+1)$ и $r(r+1)$ формираат растечка аритметичка прогресија.

14. Дали постојат 14 последователни природни броеви секој од кои е делив со еден или повеќе прости броеви p, $2\le p\le 11$?

15. Природните броеви x,y,p,n и k се такви што $x^n+y^n=p^k$. Ако p е прост број и $n>1$ е непарен, тогаш n е степен на бројот p. Докажи!

16. Докажи, дека за секој $k\ge 3$ важи неравенството $p_{k+1}+p_{k+2}\le p_1p_2...p_k$, каде p_k е $k-$тиот по ред прост број.

17. Докажи, ако p_n е $n-$тиот прост број, тогаш

$$p_n<2^{2^n}. \tag{1}$$

18. Нека n и p се природни броеви, $k\ge 2$. Докажи, дека постојат n последователни природни броеви, секој од кои се разложува на производ од барем k прости множители.

19. Определи n природни по парови заемно прости броеви, при што збирот на било кои k различни броеви е сложен број.

20. Нека a,b,c и d се природни броеви и нека $p=a+b+c+d$. Докажи дека ако p е прост број, тогаш p не е делител на бројот $ab-cd$.

21. Нека $n\geq 2$ и p е прост број. Ако n е делител на $p-1$, а p е делител на n^3-1, докажи дека $4p-3$ е точен квадрат на природен број.

22. Природните броеви a,b,c се по парови различни и важи
$$a\,|\,b+c+bc,\ b\,|\,c+a+ca,\ c\,|\,a+b+ab.$$
Докажи дека најмалку еден од броевите a,b,c не е прост број.

23. Нека p е прост број поголем од 2. За $k=1,2,...,p-1$ да го означиме со a_k остатокот од делењето на бројот k^p со p^2. Докажи, дека
$$a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}=\frac{p^3-p^2}{2}. \qquad (1)$$

24. Нека p е прост број, $p\neq 3$ и нека a,b се цели броеви такви што $p\,|\,a+b$ и $p^2\,|\,a^3+b^3$. Докажи дека $p^2\,|\,a+b$ или $p^3\,|\,a^3+b^3$.

25. Определи ги сите природни броеви $a>1$ со следното својство: секој прост делител на a^6-1 е делител барем на еден од броевите: a^3-1 и a^2-1.

26. Нека p е прост број. Сите прости броеви помали или еднакви на p се поделени во две групи $a,b,...,c$ и $\alpha,\beta,...,\gamma$ така што бројот $x=ab...c-\alpha\beta...\gamma$ е поголем од 1 и е помал од p^2. Докажи, дека x е прост број!

27. Определи ги сите природни броеви n, за кои постои природен број k таков што
а) k има барем n различни прости делители;
б) постојат n различни позитивни делители на k, $x_1=1,x_2,x_3,...,x_n$ чиј збир е еднаков на k.

28. Определи ги сите прости броеви од облик T_n+1, каде $T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $n\in\mathbb{N}$.

29. Определи ги сите парови (a,b) од цели броеви такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

30. Природниот број n го нарекуваме *добар* ако и само ако постојат точно четири природни броеви k_1, k_2, k_3, k_4 такви што $n+k_i \mid n+k_i^2$, $i=1,2,3,4$.Докажи дека
а) 58 е добар број.
б) $2p$ е добар ако и само ако p и $2p+1$ се прости броеви ($p>2$).

31. Докажи дека секој сложен природен број може да се претстави во облик $xy+yz+zx+1$, каде x,y,z се природни броеви.

32. Докажи дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен.

33. Докажи дека постојат бесконечно многу непарни броеви $k>0$, за кои сите броеви од облик $2^{2^n}+k,\ n=1,2,...$ се сложени.

34. Докажи дека низата 2^n-3, $n=2,3,...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

35. Броевите 1117 и 1171 се прости, а броевите 1711 и 7111 се сложени ($29|1711$ и $13|7111$). Докажи дека за секој $n\geq 2$ меѓу броевите запишани со помош на n единици и една седумка има барем еден сложен број.

36. Нека a,b,c,d,r и f се природни броеви и нека $S=a+b+c+d+e+f$. Ако S е делител на броевите $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-fd$, тогаш S е сложен број. Докажи!

37. Нека a,b,c, $(a\neq c)$ се ненулти цели броеви такви што $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

38. Природните броеви $x,y>1$ се такви што x^2+xy-y е точен квадрат. Докажи дека $x+y+1$ е сложен број.

39. Природните броеви $a>b>1$ се такви што $b^2+a-1|a^2+b-1$. Докажи дека b^2+a-1 не е степен на прост број.

40. Определи ги сите прости броеви од облик $\frac{n(n+1)}{2}-1$ каде n е природен број.

41. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a>b>c>d$ и
$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c). \qquad (1)$$
Докажи, дека $ab+cd$ не е прост број.

42. Докажи дека за секој природен број m постојат бесконечно многу парови природни броеви (x,y) за кои се исполенти следните услови:
a) x и y се заемно прости броеви,
b) $y\,|\,x^2+m$,
c) $x\,|\,y^2+m$.

43. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот 2^n+1 е делив со n?

44. Нека n е парен природен број кој не е делив со точен квадрат, k е цел број, а p е прост број таков, што $p<2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n+k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a,b,c такви, што $n=ab+bc+ca$.

45. Докажи, дека ако природниот број n може да се претстави на два различни начина
$$n=la^2+mb^2,\ n=lc^2+md^2, \qquad (1)$$
каде l,m се природни броеви и a,b,c,d се цели броеви, тогаш n е сложен број. Претставувањата кои се разликуваат по знаците на a,b,c,d или нивниот редослед кога $l=m$, не ги сметаме за различни.

46. Испитај дали постои триаголник чија плоштина е 2004, а неговите страни имаат целобројни должини.

47. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

48. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви кои се помали од збирот на сите свои вистински делители, но не може да се запишат како збир на некои различни вистински делители.

49. Докажи, ако n е непарен број поголем од 1, тогаш броевите n и $n+2$ се и

двата прости ако и само ако бројот $(n-1)!$ не е делив ниту со n ниту со $n+2$.

50. Нека p е прост број и $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви такви што

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p,$$

за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот $a_n + a_{n+2}$.

51. Даден е природен број $k \geq 3$ и низа $a_k = 2k$ и

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}+1, \text{ ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ се заемно прости,} \\ 2n, \quad \text{во спротивен случај,} \end{cases}$$

за секој $n > k$. Докажи, дека разликата $a_n - a_{n-1}$ е прост број за бесконечно броеви многу n.

52. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

53. Докажи дека за природнот број $n > 1$ меѓу n и $2n$ постои барем еден прост број, ако и само ако за природниот број $n > 1$ разложувањето на бројот $n!$ на прости множители содржи барем еден прост множител на прв степен.

54. Нека a, m и n се природни броеви, каде a е парен и $m < n$. Докажи, дека еден од броевите $a^m + 1, a^{m+1} + 1, a^{m+2} + 1, ..., a^{m+n} + 1$ е заемно прост со секој од останатите броеви.

55. Докажи дека низата на Фибоначи $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ содржи бесконечна растечка низа по парови заемно прости членови.
..
56. Определи ги сите четирицифрени природни броеви m, помали од 2005, за кои постои природен број $n < m$ таков што $m - n$ има најмногу три природни делители и mn е точен квадрат.

57. Нека n е природен број. Докажи дека, ако $n^5 + n^4 + 1$ има точно 6 различни природни делители, тогаш $n^3 - n + 1$ е точен квадрат на природен број.

58. Нека $n \geq 2$ и $a_j = n! + j$, $j = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека за секој природен број

$k \in \{1, 2, ..., n\}$ постои барем еден прост број p, таков што $p \mid a_k$ и $p \nmid a_j$, $j \neq k$.

59. Докажи, дека природниот број $n > 3$ е прост ако и само ако постои $\alpha \in \mathbb{N}$ таков што
$$n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$$

60. Докажи, дека ако n е природен број за кој бројот $1 + 2^n + 4^n$ е прост, тогаш n е степен на бројот 3.

61. Определи ги сите аритметички прогресии во кои за секој $n \in \mathbb{N}$ збировите на првите n членови се точни квадрати.

62. Дали постои прост број $p \geq 5$ за кој равенката
$$2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0$$
има рационален корен.

63. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = 7$ и $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1}, n)$, за $n \geq 2$. Докажи дека за секој $n \geq 2$ разликата $a_n - a_{n-1}$ или е прост број или е единица.

64. За секои природни броеви $a > b > 1$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со равенството $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}, n \geq 1$. Определи го најмалиот природен број d таков, што за произволни a и b оваа низа не содржи повеќе од d последователни членови кои се прости броеви.

65. Природниот број N е собран со неговиот најголем делител, кој е помал од N , и е добиен степен на бројот 10. Определи ги сите такви природни броеви N.

66. Нека p е прост број. Определи ги сите природни броеви k такви што $\sqrt{k^2 - pk}$ е природен број.

67. Нека $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979 \mid p$.

68. а) Определи ги сите природни броеви n, $n \geq 3$ за кои постои множество од n последователни природни броеви со следното својство: најголемиот од

овие броеви е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите $n-1$ броеви.
б) За кои природни броеви n, $n\geq 3$ постои точно едно множество со ова својство?

69. Докажи, дека за секој природен број n бројот

$$\frac{(17+12\sqrt{2})^n-(17-12\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$$

е природен, но не е точен квадрат.

70. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$, $k\in\mathbb{N}_0$.

71. Докажи, дека за секој природен број n постојат бесконечно многу природни броеви m такви да $(n,2^m-1)=1$.

72. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што најголемиот прост делител на n^4+n^2+1 е еднаков на најголемиот прост делител на $(n+1)^4+(n+1)^2+1$.

73. Докажи, дека за секој природен број $a\geq 4$ постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на a^n-1, но не се деливи со квадрат на прост број.

74. За секој природен број a со $P(a)$ е означен најголемиот прост делител на a^2+1. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки од различни природни броеви a,b,c такви што $P(a)=P(b)=P(c)$.

75. Нека n е природен број и p е прост број. Докажи дека ако a,b,c се цели броеви такви што $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$, тогаш $a=b=c$.

76. Дадени се природните броеви $b,n>1$. Нека за секој $k>1$ постои цел број a_k таков што $b-a_k^n$ е делив со k. Докажи дека $b=A^n$ за некој цел број A.

77. Докажи дека за секој природен број n постојат n последователни природни броеви такви што ниту еден не е степен на прост број.

78. Определи ги сите природни броеви n, кои се деливи со сите природни броеви помали или еднакви на $\sqrt{n}$.

79. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со
а) 2, б) 3 и в) 2015?

80. Нека S_1 е низата природни броеви 1,2,3,.... Дефинираме низа S_{n+1}, $n=1,2,...$ со помош на низата S_n, зголемувајќи ги за еден сите членови на низата S_n кои се деливи со n. Така на пример, S_2 е низата 2,3,4,5,6,... , S_3 е низата 3,3,5,5,7,... . Докажи, дека во низата S_n точно првите $n-1$ членови се еднакви на n ако и само ако n е прост број.

81. Нека $a_1, a_2, ...$ е бесконечна низа природни броеви. Да претпоставиме дека постои природен број $N>1$ таков што за секој $n \geq N$ вредноста на изразот

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

е природен број. Докажи дека постои природен број M таков што $a_m = a_{m+1}$ за секој $m \geq M$.

82. Низата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ е определена со равенствата

$$a_1 = a,\ a_2 = b \text{ и } a_{n+1} = \frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}, \text{ за } n \geq 2,$$

каде a,b,c се реални броеви, $ab \neq 0$ и $c>0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако a,b и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ се цели броеви.

83. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни членови на низата $a_n = 2^n + 49$, $n=1,2,...$ за кои $a_n = pq$, $a_{n+1} = rs$, каде p,q,r,s се прости броеви такви што $p<q$, $r<s$ и $q-p=s-r$.

84. Нека $a>1$ е даден природен број. Низата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со

$$a_1 = 1,\ a_2 = a,\ a_{n+2} = aa_{n+1} - a_n, \text{ за } n \geq 1.$$

Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви такви што секој од нив е делител на барем еден член од дадената низа.

85. Низата $a_0, a_1, a_2, ...$ е зададена со равенствата $a_0 = 4, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.
а) Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви, кои се делители барем на еден член од низата $a_0, a_1, a_2, ...$.
б) Дали постојат бесконечно многу прости броеви, кои не се делители на ниту еден член на низата $a_0, a_1, a_2, ...$?

86. Даден е природен број p. Докажи дека ако бројот $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \le k \le \sqrt{\frac{p}{3}}$, тогаш $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \le k \le p - 2$.

87. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 6$ и $a_1, a_2, ..., a_k$ се природните броеви кои што се помали од n и се заемно прости со n. Докажи дека, ако
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} > 0,$$
тогаш n е или прост број или е степен на бројот 2.

88. Нека $k, m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $m + k + 1$ е прост број поголем од $n + 1$. Ако $C_s = s(s+1)$, докажи дека производот
$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)...(C_{m+n} - C_k)$$
е делив со производот $C_1 C_2 ... C_n$.

89. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $S_n = 1! + 2! + ... + n!$. Докажи, дека постои n за кој бројот S_n има прост делител поголем од 10^{2012}.

90. Дали постои бесконечно множество природни броеви $S, S \ne \mathbb{N}$ такво што за секој природен број $n \notin S$ точно n броеви од S се заемно прости со n?

91. Природните броеви $m \ge 3$ и n се такви што $n > m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$.

92. Дадени се природни броеви m и n. Докажи дека постои природен број c, за кој во декадниот запис на броевите cm и cn секоја ненулта цифра учествува еднаков број пати (колку во cm, толку во cn).

93. Позитивни рационални броеви a и b се запишани како децимални броеви.

Познато е дека најмалата периода и на двете дропки е со должина од 30 цифри, а во децималниот запис на бројот $a-b$ најмалата периода е со должина од 15 цифри. Кој е најмалиот природен број k за кој најмалиот период во децималниот запис на бројот $a+kb$ исто така може да е со должина од 15 цифри?

94. Докажи, дека сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 може да бидат наредени на кружница така што да нема соседни броеви кои се заемно прости.

95. Нека е даден природен број k поголем од 1. Докажи дека постои прост број p и строго растечка низа природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ така што сите членови од низата $p+ka_1, p+ka_2, ..., p+ka_n, ...$ се прости броеви.

96. а) Нека $(m,k)=1$. Докажи дека постојат природни броеви $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_k$ такви што секој производ $a_i b_j$, $i=1,2,...,m,$ $j=1,2,...,k$ при делење mk дава различен остаток.
б) Нека $(m,k)>1$. Докажи дека за било кои природни броеви $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_k$ може да се најдат два производи $a_i b_j$ и $a_s b_t$, $(i,j) \neq (s,t)$ коишто имаат еднаков остаток при делење со mk.

6. ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

1. а) Докажи, дека ако $m,n\in\mathbb{N}$, тогаш количникот при делењето на m со n е еднаков на $[\frac{m}{n}]$.

   б) Докажи, дека ако $a,b,c\in\mathbb{N}$, тогаш $[\frac{[\frac{c}{a}]}{b}]=[\frac{c}{ab}]$.

2. Докажи, дека за секој природен број $k\geq 2$ постои реален број $x\neq 0$ таков што $k=\frac{[x]\{x\}}{x}$.

3. Докажи дека $x+[\frac{n}{x}]\geq 2[\sqrt{n}]$, за секои $x,n\in\mathbb{N}$.

4. Докажи, дека ако $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ не е цел број, тогаш $\frac{p}{q}\geq[\frac{p}{q}]+\frac{1}{q}$.

5. Определи го бројот на природните броеви кои не се поголеми од 2021 и се такви што $[\sqrt{n}]\,|\,n$.

6. Дадени се првите N природни броеви. Колку броеви, најмалку треба да се изберат на произволен начин, така што меѓу избраните броеви постојат барем два од кои едниот е делив со другиот?

7. Определи ги сите природни броеви n за кои се исполнети следниве услови:
   1) количникот при делење на n со 9 е трицифрен број со еднакви цифри,
   2) количникот при делење на $n+36$ со 4 е четирицифрен број запишан цо цифрите 2, 0, 0 и 9 во некој редослед.

8. Кои членови на низата $a_n=[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$, $n\in\mathbb{N}$ се деливи со 7?

9. Нека $1<n_1<n_2<...<n_k<...$ е низа природни броеви која не содржи два последователни природни броја. Докажи, дека за секој $m\in\mathbb{N}$ меѓу броевите $n_1+n_2+...+n_m$ и $n_1+n_2+...+n_m+n_{m+1}$ постои број кој е точен квадрат.

10. Нека $k_i\in\mathbb{N}$, за $i=1,2,...,n$. Докажи, дека

$$[\frac{k_1+k_2+...+k_n}{n}]+n-1\leq k_1+k_2+...+k_n.$$

11. Докажи, дека за секој позитивен број x важи

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}]=[\sqrt{\sqrt{x}}].$$

12. Докажи дека за секој природен број $s>1$ постои природен број m_s таков, што за $n\geq m_s$ меѓу броевите n и $2n$ постои њјамлаку еден број кој е $s-$ти степен на природен број. Определи го најмалиот број m_s за $s=2$ и $s=3$.

13. Ако природните броеви x и y го задоволуваат равенството

$$[(4+2\sqrt{3})x]=[(4-2\sqrt{3})y],$$

докажи дека тие се со различна парност.

14. Докажи, дека за секој реален број a и за секој природен број n важи

$$n[a]\leq[na]\leq n[a]+n-1. \qquad (1)$$

15. Докажи, дека важи $[a[na]]+1=[na^2]$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. Определи ги сите позитивни реални броеви a такви, што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$[a[(a+1)n]]=n-1. \qquad (1)$$

17. Нека $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Докажи, дека $3\,|\,[a[an]]+n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

18. Нека x,y,z се произволни реални броеви. Докажи дека

$$x+[y+z]=y+[z+x]=z+[x+y] \qquad (1)$$

ако и само ако $\{x\}=\{y\}=\{z\}$.

19. а) Докажи дека, ако $(a,4)=1$, тогаш

$$[\frac{a}{4}]+[\frac{2a}{4}]+[\frac{3a}{4}]=\frac{3a-3}{2}.$$

б) Докажи дека

$$[\frac{4}{p}]+[\frac{6}{p}]+\ldots+[\frac{2(p-1)}{p}]=[\frac{p+1}{4}],$$

каде p е непарен прост број.

20. Ако за некој реален број x е исполенто равенството $\{8x\}=\{15x\}$, тогаш важи

$\{26x\}=\{75x\}$. Докажи!

21. Дали постои природен број n таков што дробниот дел на бројот $(2+\sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999?

22. Докажи, дека за секој природен број n, бројот $[(2-\sqrt{3})^n]$ е непарен природен број.

23. Докажи дека членовите на низата $\{10^n\sqrt{2}\}, n=0,1,2,...$ се по парови различни.

24. Нека $a_n=n\sqrt{5}-[n\sqrt{5}], n\in\mathbb{N}$. Определи го најмалиот и најголемиот број меѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{2009}$.

25. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со: $a_1=2$, $a_{n+1}=[\frac{3}{2}a_n]$, за $n=1,2,3,...$. Докажи, дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има бесконечно многу непарни и бесконечно многу парни броеви.

26. а) Дади пример на број a таков што $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$.

    б) Докажи, дека таков број a не може да биде рационален.

27. За три реални броја е познато дека дробниот дел на производот на било кои два од нив е еднаков на $\frac{1}{2}$. Докажи дека овие броеви се ирационални.

28. Нека a е позитивен, $\{a^{-1}\}=\{a^2\}$ и $2<a^2<3$. Определи ја вредноста на изразот $a^{12}-144a^{-1}$.

29. Нека n е природен број и x е позитивен реален број, таков што ниту еден од броевите $x,2x,...,nx$ и ниту еден од броевите $\frac{1}{x},\frac{2}{x},...,\frac{[nx]}{x}$ не е цел број. Докажи дека

$$[x]+[2x]+...+[nx]+[\tfrac{1}{x}]+[\tfrac{2}{x}]+...[\tfrac{[nx]}{x}]=n[nx]. \qquad (1)$$

30. Даден е природен број $n>1$. Определи го најголемиот m за кој може да се изберат n броеви од множеството $\{1,2,...,2n\}$ така што најмалиот заеднички содржател на секои два од избраните броја е поголем или еднаков на m.

31. Во множеството $\mathbb{R}$ реши ја равенката

$$[x[x]]=1. \qquad (1)$$

32. Определи го бројот на реални решенија на равенката

$$[\tfrac{a}{2}]+[\tfrac{a}{3}]+[\tfrac{a}{5}]=a.$$

33. Реши ја равенката

$$\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=x.$$

34. Реши ја равенката

$$[\tfrac{5+6x}{8}]=\tfrac{15x-7}{5}. \qquad (1)$$

35. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345. \qquad (1)$$

36. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x-y=2001 \\ [x]+[y]=2003. \end{cases}$$

37. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1,1 \\ y+[z]+\{x\}=2,2 \\ z+[x]+\{y\}=3,3. \end{cases}$$

38. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200, \\ \{x\}+y+[z]=190,1 \\ [x]+\{y\}+z=178,8 \end{cases}.$$

39. Реши ја равенката

$$x^2-2[x]+\{x\}=0.$$

40. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$4x^2-40[x]+51=0. \qquad (1)$$

41. Даден е природен број n. Определи го бројот на решенијата на равенката

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2$$

такви што $1 \le x \le n$.

42. Реши ја равенката:

$$x^3 - [x] = 4.$$

43. Дадени се равенките

$$[x]^3 + x^2 = x^3 + [x]^2 \text{ и } [x^3] + x^2 = x^3 + [x^2].$$

Докажи:

а) целите броеви се единствени решенија на првата равенка,

б) за втората равенка постои решение кое не е цел број.

44. Определи ги сите природни броеви n такви што $[\frac{n}{k} + k] = [2\sqrt{n}] + 1$, каде $k = [\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]$.

45. Определи ги сите реални броеви a такви што $4[an] = n + [a[an]]$, за секој природен број n.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои $n - [n\{n\}] = 2$.

47. Определи ги сите прости броеви p, за кои

$$[\frac{p^2+1}{2}] + [\frac{p^2+2}{3}] + [\frac{p^2+7}{8}] + [\frac{p^2+18}{24}]$$

е прост број.

48. Определи ги сите парови (a,b) реални броеви такви што важи

$$a[bn] = b[an], \tag{1}$$

за секој природен број n.

49. Нека n е фиксен природен број.

а) Определи ги целобројните решенија на равенката $\sum_{k=1}^{n} [\frac{x}{2^k}] = x - 1$.

б) Определи ги целобројните решенија на равенката $\sum_{k=1}^{n} [\frac{x}{2^k}] = x - m$, каде m е фиксен природен број.

50. Дали постои природен број n таков што секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се среќава еднаков број пати на позицијата 200 по децималната за-

пирка во броевите $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, ..., \sqrt{n+999}$.

51. Докажи, дека меѓу произволни 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \tfrac{5}{2}$$

важи за секој природен број n .

52. Определи го бројот на различните членови на конечната низа со општ член $[\frac{k^2}{1998}]$, каде $k = 1, 2, ..., 1997$.

53. Определи ги сите реални броеви $x > 1$ такви што $\sqrt[n]{[x^n]}$ е природен број за секој $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои е точно равенството

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + ... + [\sqrt[3]{n}] = 2n .$$

55. Определи го целиот дел на бројот

$$a_n = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + ... + \sqrt[3]{24}}} \text{ , (} n \text{ корени),}$$

каде $n \geq 1$

56. Колку од првите 1000 позитивни броеви можат да се запишат во облик $[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$, каде x е реален број?

57. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ го задоволува равенството

$$a_{n+2} = [\tfrac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\tfrac{2a_n}{a_{n+1}}] .$$

Докажи дека постои природен број m таков што $a_m = 4$ и $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

58. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека 2^n не е делител на $n!$.

59. Кој е степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на $p^n!$?

60. За природниот број n ќе велиме дека навидум е прост ако n е сложен број, но не е делив со 2, 3 или 5. Трите најмали навидум прости броеви се 49, 77 и 91. Постојат 168 прости броеви кои се помали од 1000. Колку навидум

прости броеви се помали од 1000?

61. На колку нули завршува бројот:
а) $1993!$ б) $2016!$

62. Ако $a+b+...+m \le n; n,a,b,...,m \in \mathbb{N}$, тогаш $\frac{n!}{a!b!\,...m!} \in \mathbb{N}$. Докажи!

63. Докажи дека $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$, за секои $m\,,n \in \mathbb{N}$.

64. Определи го n така што $n!$ завршува точно на 290 нули.

65. Докажи, дека $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ е природен број, за секои $a,b \in \mathbb{N}$.

66. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека $(n!)^{(n-1)!}$ е делител на $(n!)!$.

67. Со $(2m)!!$ го означуваме производот на сите парни броеви помали или еднакви на $2m$, а со $(2m+1)!!$ производот на сите непарни броеви помали или еднакви на $2m+1$, соодветно. Најди го степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на бројот
а) $(2m)!!$ б) $(2m+1)!!$

68. Пресметај го збирот

$$S_n = \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} [\tfrac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}].$$

69. Пресметај ги збировите
а) $\sum_{k=1}^{n^2+2n} k[\sqrt{k}]$, б) $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n-[\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

70. Докажи, дека

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \tfrac{1}{6}(n-1)n(4n+1),\text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

71. Нека $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот

$$[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+....$$

72. Нека $0 \le x < 1$. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k} = 1 - 2x .$$

73. Докажи дека за секој природен број k бројот

$$A = (k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

е природен број.

74. Определи го збирот на сите природни броеви помали или еднакви на даден природен број N, кои завршуваат на барем две еднакви цифри, различни од нула.

75. За секој реален број x докажи дека

$$[x] + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \ldots + \frac{[nx]}{n} \le [nx] . \qquad (1)$$

76. Определи ги сите природни броеви a и b такви што

$$[\tfrac{a^2}{b}] + [\tfrac{b^2}{a}] = [\tfrac{a^2+b^2}{ab}] + ab . \qquad (*)$$

77. Нека m е природен број и A_m е степенот на бројот 2 во каноничното разложување на $m!$. Докажи, дека во низата со општ член $a_n = [\frac{m}{2^n}]$ има точно $2[\frac{m}{2}] - A_m$ непарни членови.

78. Докажи дека за секој рационален број α секогаш може да се најде интервал $[c,d] \subset [0,1]$, кој не содржи ниту еден член на низата $a_n = \{\alpha n\}, n = 1,2,3,...$.

79. Докажи дека за секој ирационален број α во секој интервал $(c,d) \subset (0,1)$, има барем еден член на низата $a_n = \{\alpha n\}, n = 1,2,3,...$.

80. Докажи, дека во секој интервал $(c,d) \subset (0,1)$, има барем еден член на низата

$$a_n = \{\lg n\}, n = 1,2,3,... . \qquad (1)$$

81. Докажи, дека во секој интервал $(c,d) \subset (0,1)$ се содржат членови на низата $a_n = \{\sqrt{n}\}, n = 1,2,3,..$.

82. Низата $\{a_n\},\ n=1,2,\ ...$ е дефинирана со: n-тиот член на оваа низа е последната цифра на бројот $[\sqrt{10^n}]$, за $n=1,2,...$. Дали оваа низа е периодична?

83. Докажи дека низата броеви $[n\sqrt{2}]$, $n\in\mathbb{N}$ содржи бесконечно многу степени на бројот 2.

84. Докажи, дека за секој природен број $q\geq 2$ постои реален број α таков што во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$ се содржи барем еден член од низата $a_n=\{\alpha q^n\},\ n=1,2,3,...$.

85. Определи ги сите парови природни броеви (k,n) такви што важи

$$k!=(2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)...(2^n-2^{n-1}).$$

86. Даден е прост број $p>3$. Докажи, дека ако постои природен број k, за кој k^2+5 е делив со p, тогаш постојат природни броеви m и n, такви што $p^2=m^2+5n^2$.

87. Нека $p>5$ е прост број и $X=\{p-n^2 \mid n\in\mathbb{N}, n^2<p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y такви што $x\neq 1$ и $x\mid y$.
бидејќи во спротивно $m=2$ и $p=1+2^2=5$.

88. Докажи, дека за секој реален број $\alpha>0$ постојат бесконечно многу природни броеви n, такви што $n^2+1\mid[\alpha n]$.

89. Нека a,b и c се такви реални броеви, што $[an]+[bn]=[cn]$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека барем еден од броевите a и b е цел број.

90. Нека a е природен број и нека α_a е најголемиот непарен делител на a. Ставаме $s_b=\sum\limits_{a=1}^{b}\frac{\alpha_a}{a}$. Докажи, дека низата $\{\frac{s_b}{b}\}$ е конвергетна и одреди ја нејзината граница.

91. Докажи, дека за секој природен број n бројот $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ е делив со 10^n.

7. МУЛТИПЛИКАТИВНИ ФУНКЦИИ

1. Нека $\delta(n)$ е производот на различните природни делители на природниот број n, а $\tau(n)$ е нивниот број. Докажи дека $\delta(n)=n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

2. Нека $\delta(n)$ е производот на различните природни делители на природниот број n. Ако $\delta(n)=\delta(m)$, тогаш $m=n$. Докажи!

3. Нека
$$\lambda(n)=\begin{cases}1, & n=1\\(-1)^m, & n>1\end{cases}$$
каде m е бројот на простите делители на n, при што се броени повеќекратните појавувања на секој прост делител. Докажи дека $\lambda(n)$ е мултипликативна функција.

4. Нека
$$\pi(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број}\\ \log p, & \text{ако } n=p^s>1 \text{ е степен на прост број.}\end{cases}$$
Докажи дека функцијата $\pi(n)$ не е мултипликативна.

5. Докажи дека за секој природен број n точно е равенството
$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & \text{ако } n \text{ е точен квадрат,}\\(-1)^m, & \text{ако } n \text{ не е точен квадрат.}\end{cases}$$

6. Докажи дека за секој природен број n точно е равенството
$$\sum_{d|n}\pi(d)=\log n.$$

7. Нека n е природен број. За секој s со $\tau_s(n)$ го означуваме бројот на решенијата во множеството природни броеви на равенката $x_1x_2...x_s=n$. Докажи9 дека
а) $\tau_1(n)=1$,

б) $\tau_s(n)=\sum_{d|n}\tau_{s-1}(d)$,

в) ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на n, тогаш

$$\tau_s(n)=\binom{a_1+s-1}{a_1}\binom{a_2+s-1}{a_2}...\binom{a_k+s-1}{a_k}. \tag{1}$$

8. а) Ако g и $f*g$ се мултипликативни функции, тогаш и f е мултипликативна функција. Докажи!
   б) Ако g е мултипликативна функција, тогаш и нејзината конволуциска инверзија е мултипликативна функција. Докажи!

9. Докажи, дека аритметичката функција f е потполно мултипликативна ако и само ако $f*f=f\tau$.

8. ФУНКЦИИТЕ $\tau(n)$ И $\sigma(n)$

1. Колку делители има бројот 1200?

2. Определи го бројот на паровите природни броеви (m,k) за кои важи
$$20m = k(m-15k).$$

3. Определи го бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10}, 15^7, 18^{11}$.

4. Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако n е точен квадрат.

5. Определи ги сите природни броеви кои имаат точно шест делитили, чиј збир е еднаков на 3500.

6. Најди природен број кој е делив со 12 и има 14 делители.

7. Природниот број n има два прости делители, а бројот n^2 има вкупно 15 делители. Колку делители има бројот n^3?

8. Природниот број n има само три прости делители: 2, 3 и 5. Определи го бројот n ако
$$\tau(\tfrac{n}{2}) = \tau(n) - 30, \ \tau(\tfrac{n}{3}) = \tau(n) - 35 \text{ и } \tau(\tfrac{n}{5}) = \tau(n) - 42.$$

9. Определи ги сите решенија на равенката $\sigma(n) = 60$.

10. Определи го најмалиот број од облик $2^a p_1 p_2$, каде p_1 и p_2 се непарни прости броеви, чиј збир на делители е трипати поголем од самиот број.

11. Докажи, дека, за секој природен број $n \geq 2$ е исполнето равенството
$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} \left([\tfrac{n}{k}] - [\tfrac{n-1}{k}] \right).$$

12. Докажи, дека броевите $\tau(m^n)$ и n се заемно прости.

13. Определи ги сите природни броеви n такви што $n=2\tau(n)$

14. Определи ги сите природни броеви n за кои $8\tau(n^2)=27\tau(n)$.

15. Определи ги сите позитивни цели броеви k за кои постои позитивен цел број n, така што $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}=k$.

16. Меѓу сите бесконечни аритметички прогресии од различни природни броеви, за кои бројот на позитивните делители на секој член на прогресијата е делив со 1997, определи ја онаа прогресија чиј што 1997-ми член е најмал можен.

17. Низата природни броеви $a_1, a_2, ...$ го задоволува равенството

$$a_{n+1}=a_n+2\tau(n), \text{ за секој } n\geq 1.$$

Дали е можно два последователни членови на оваа низа да се точни квадрати?

18. Определи ги сите природни броеви d кои имаат точно 16 позитивни делители $d_1, d_2, ..., d_{16}$ такви што

$$1=d_1<d_2<...<d_{16}=d,\ d_6=18 \text{ и } d_9-d_8=17.$$

19. Определи ги сите природни бгроеви $n>1$ такви што производот на сите делители на бројот n е еднаков на n^3 .

20. Низата $f(1), f(2), f(3), ...$ е определена со формулата

$$f(n)=\tfrac{1}{n}([\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]).$$

а) Докажи дека $f(n+1)>f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n .

б) Докажи дека $f(n+1)<f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n .

21. Нека $(m,n)>1$.

а) Што е поголемо $\tau(mn)$ или $\tau(m)\tau(n)$?

б) Што е поголемо $\sigma(mn)$ или $\sigma(m)\sigma(n)$?

22. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви да $\sigma(n)=2n-1$.

23. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш $\sigma(n)\geq n+\sqrt{n}+1$.

24. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш
$$\sigma(n) \geq \tau(n)\sqrt{n} + (\sqrt{n} - 1)^2 .$$

25. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{3n}{4}$.

26. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:
$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} k[\tfrac{n}{k}], \tag{1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\tfrac{n}{k}]([\tfrac{n}{k}]+1). \tag{2}$$

27. Докажи дека цифра на единиците на парен совршен број секогаш е 6 или 8.

28. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека постојат природни броеви a и b такви што аритметичката средина од сите делители на бројот $n = p^a q^b$ е природен број.

29. За секој $n \in \mathbb{N}$ нека $f(n)$ е бројот на природните броеви $m, m \leq n$ за кои $\sigma(m)$ е непарен број. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $f(n) | n$.

30. Пермутацијата π на броевите од 1 до n ќе ја наречеме добра, ако множеството $\{\pi(k) - k \,|\, k = 1, 2, ..., n\}$ има два елементи. Докажи, дека бројот на добрите пермитации е еднаков на $\sigma(n) - \tau(n)$.

31. За природните броеви m и n ќе велиме дека се *пријателски* ако секој од нив е еднаков на збирот на вистинските делители на другиот број. Докажи, дека ако $p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^k - 1$ и $9 = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$ се прости броеви, тогаш $A = 2^k pq$ и $B = 2^k r$ се пријателски броеви.

9. ФУНКЦИЈА НА МЕБИУС

1. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\prod_{d|n} d^{\mu(d)}=\begin{cases}1, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број,}\\ p^{-1}, & \text{ако } n>1 \text{ е степен на простиот број } p.\end{cases} \qquad (1)$$

2. Нека

$$\pi(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број}\\ \log p, & \text{ако } n=p^s>1 \text{ е степен на прост број.}\end{cases}$$

Докажи дека ако $f(n)$ е аритметичка функција за која важи

$$\sum_{d|n} f(d)=\log n$$

за секој природен број n, тогаш $f(n)=\pi(n)$

3. Нека $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ и каноничното претставување на n е $n=p_1p_2...p_r$, r е парен број. Докажи, дека

$$\sum_{d}\mu(d)=0,$$

каде сумирањето е по сите делители d на n, кои се помали од $\sqrt{n}$.

4. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[\tfrac{n}{k}]=1.$$

5. Нека $\omega(n)$ е бројот на различните прости фактори на природниот број n. Докажи, дека

$$\sum_{d|n}\mu^2(d)=2^{\omega(n)}. \qquad (1)$$

6. Нека $f(n)$ е мултипликативна функција, $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$, а $\theta(n)$ го означува бројот на разложувањата на природниот број n како производ од заемно прости множители. Докажи, дека

$$\sum_{k^2|n} f(k)\tau(\tfrac{n}{k^2})=\sum_{k^2|n} g(k)\theta(\tfrac{n}{k^2}). \qquad (1)$$

10. ОЈЛЕРОВА ФУНКЦИЈА

1. Нека $a\in\mathbb{N}$ и p е прост број. Докажи дека $\varphi(p^a)=p^{a-1}\varphi(p)$.

2. Нека $m,a\in\mathbb{N}$. Докажи, дека $\varphi(m^a)=m^{a-1}\varphi(m)$.

3. Ако n е сложен природен број, тогаш $\varphi(n)\le n-\sqrt{n}$. Докажи!

4. Дадено е $\varphi(m)$. Пресметај $\varphi(2m)$.

5. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(3^m5^n)=600$.

6. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(n)=11424$, ако $n=p^2q^2$ и p и q се прости броеви.

7. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{2}$.

8. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{3}$.

9. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{2n}{3}$.

10. Реши ја равенката $\varphi(2n)=\varphi(3n)$.

11. Пресметај го збирот
$$\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^a),$$
каде p е прост број.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\tau(\varphi(3^k))=2^k$.

13. Определи ги сите природни броеви од облик $n=p^k$, $k\in\mathbb{N}$ и p е прост број такви што $\varphi(\tau(n))=\tau(\varphi(n))$.

14. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $(a,b)=d,\ [a,b]=m$. Докажи, дека

$$\varphi(ab)=d\varphi(m).$$

15. Нека $n=2^k+1$, k е природен број. Ако $\varphi(n)\,|\,(n-1)$, тогаш n е прост број. Докажи!

16. Докажи дека за секој природен број n постојат природни броеви

$$a_1<a_2<...<a_n$$

такви што

$$\varphi(a_1)>\varphi(a_2)>...>\varphi(a_n).$$

17. Определи ги сите природни броеви n, за кои бројот $\frac{n}{\varphi(n)}$ е исто така природен број.

18. Определи ги сите природни броеви n такви што $\varphi(\varphi(n))+\varphi(n)=n$.

19. Нека n е непарен природен број таков што броевите $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ се степени на бројот 2. Докажи, дека $n+1$ е степен на бројот 2 или $n+1=5$.

20. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека

$$\sum_d \mu(d)=0,$$

каде сумирањето е по сите природни броеви d (ако има такви), за кои $\varphi(d)=n$.

21. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[\tfrac{n}{k}]^2=2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)-1.$$

22. Функцијата $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со $\psi(n)=\sum_{k=1}^{n}(k,n)$.

а) Докажи дека $\psi(mn)=\psi(m)\psi(n)$, каде $m,n\in\mathbb{N}$ и $(m,n)=1$.

б) Докажи дека за секој природен број $a\in\mathbb{N}$ равенката $\psi(x)=ax$ има решение.

в) Определи ги природните броеви a такви што равенката $\psi(x)=ax$ има единствено решение.

23. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати по 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:
а) дадените броеви се 1 и 1000,
б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.

11. КОНГРУЕНЦИИ, ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1. Природниот број го нарекуваме *двоен број* ако неговиот декаден запис се состои од блок цифри. На пример, 360360 е двоен број додека 36036 не е двоен број. Докажи дека постојат бесконечно многу двојни броеви кои се точни квадрати.

2. Природните броеви m,n,k се такви што 5^n-2 и 2^k-5 се деливи со 5^m-2^m. Докажи дека $(m,n)=1$.

3. Докажи дека бројот $2^{2^n-1}-2^n-1$ е сложен за секој природен број $n>2$.

4. Нека претпоставиме дека множеството $\{1,2,...,1998\}$ е поделено на дисјунктни множества $\{a_i,b_i\}$, $1\le i\le 999$ и $|a_i-b_i|=1$ или $|a_i-b_i|=6$ за $1\le i\le 999$. Докажи дека збирот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ завршува на цифрата 9.

5. Нека $n\in\mathbb{N}$ и нека $a_1,a_2,...,a_k,(k\ge 2)$ се по парови различни природни броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1}-1)$ се деливи со n за секој $i\in\{1,2,...,k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1-1)$ не е делив со n.

6. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на p^4-1 за секој прост број $p>3$.

7. Нека $n\in\mathbb{N}$ е природен број таков што $n\,|\,((1^n+2^n+3^n+...+(n-1)^n)+1)$. Докажи, дека n нема делител кој е точен квадрат.

8. Докажи дека ниту еден број од облик $8k+3$или $8k+5$, $k\in\mathbb{Z}$ не може да се претстави во облик x^2-2y^2, каде $x,y\in\mathbb{Z}$.

9. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $b>2$. Докажи, дека 2^a+1 не е делив со 2^b-1.

10. Нека p е прост број. Докажи дека $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ за секој $k = 1, 2, ..., p-1$ и дека најголемиот заеднички делител на броевите $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, ..., \binom{p}{p-1}$ е еднаков на p.

11. Ако $p > 2$ е прост број и $x^p + y^p \equiv 0 \pmod{p}$, тогаш $x^p + y^p \equiv 0 \pmod{p^2}$. Докажи!

12. Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $a^{m^k} \equiv b^{m^k} \pmod{m^{k+1}}$, за секој $k \in \mathbb{N}_0$. Докажи!

13. Нека $a_i, i = 1, 2, ..., 1990$ се природни броеви за кои важи

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1989}^2 = a_{1990}^2. \qquad (1)$$

Докажи, дека барем два од овие броеви се парни.

14. Нека p е прост број. Докажи, дека може да се изберат p броеви помали од $2p^2$ такви што било кои две различни двојки броеви од избраните имаат различен збир.

15. Даден е 25-цифрен број без деветки во декадниот запис. Докажи дека можеме да зголемиме две негови еднакви цифри за 1 така што ќе добиеме број кој не е делив со 7.

16. За природниот број n со b_n да го означиме бројот на единиците во бинарниот запис на n. Ќе велиме дека бројот n е *посебен* ако $b_n \mid n$.

    а) Докажи дека не постојат 5 последователни посебни природни броеви.

    б) Постојат бесконечно многу тројки последователни посебни природни броеви.

17. Разгледуваме 70-цифрен број со својство секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 во декадниот запис на бројот се појавува по точно десет пати, а цифрите 0, 8 и 9 не се појавуваат во неговиот декаден запис. Докажи дека во множеството од сите такви броеви не постојат два броја така што едниот е делител на другиот.

18. Определи го најмалиот природен број M за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на M цели броеви.

19. Нека a и b се заемно прости природни броеви. Определи ги сите природни

броеви кои можат да бидат најголемиот заеднички делител на броевите $a+b$ и $\frac{a^{2005}+b^{2005}}{a+b}$.

20. Нека x и y се природни броеви за кои $3x+4y$ и $4x+3y$ се точни квадрати. Докажи дека x и y се деливи со 7.

21. Нека p е прост број од видот $4k+3$ и $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ се $p-1$ последователни природни броеви. Докажи, дека овие броеви не може да се поделат на две групи така да производот на броевите од едната група да е еднаков на производот од броевите на другата група.

22. Определи ги сите парови (n, p) природни броеви, такви што p е прост број, $n \leq 2p$ и $(p-1)^n + 1$ е делив со n^{p-1}.

23. Ако за некој цел број $k \geq 0$ важи $p^{k+1} \mid a^{p^k} + 1$, каде a е непарен број поголем од 1 и p е непарен прост број, тогаш $p^{k+2} \mid a^{p^k} + 1$. Докажи!

24. (Теорема на Рајтер). Ако a е природен број таков што $a+1$ не е степен на бројот 2, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $n \mid a^n + 1$. Докажи!

25. Докажи, дека за секој природен број $a > 1$ постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n \mid a^n + 1$.

26. (Теорема на Луивил). За секој прост број $p > 5$ и секој природен број m равенството $(p-1)! + 1 = p^m$ не е можно. Докажи!

27. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви q такви што за некој природен број $n < q$ важи $q \mid (n-1)! + 1$.

28. Нека p е непарен прост број. За секое $i = 1, 2, 3, ..., p-1$ со r_i го означуваме остатокот од делењето на i^p со p^2. Пресметај го збирот $r_1 + r_2 + ... + r_{p-1}$.

29. Нека λ е позитивниот корен на равенката $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = [\lambda x_n], \ n = 0,1,2,\dots.$$

Определи го остатокот од делењето на x_{1998} со 1998.

30. Нека $p > 2$ е прост број. Докажи, дека секој делител на бројот $2^p - 1$ е од облик $2kp + 1$, за некој $k \in \mathbb{N}$.

31. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви p од видот $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ такви што p е делител на $2^q - 1$ за некој прост број q.

32. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A. Определи го збирот на цифрите на бројот B.
(Сите броеви се запишани во декаден броен систем).

33. Нека X е множество кое што содржи 10000 цели броеви, кои што не се деливи со 47. Докажи, дека постои 2008-елементно подмножество Y од X такво што $a - b + c - d + e$ не е делив со 47, кога $a, b, c, d, e \in Y$.

34. Докажи, дека за секој природен број n, еден од броевите $3^{3n} + 2^{3n}$ и $3^{3n} - 2^{3n}$ е делив со 35.

35. а) Определи ги сите природни броеви n, такви што $7 \mid (2^n - 1)$.

    б) Докажи дека $7 \nmid (2^n + 1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

36. За природниот број n со d да го означиме најголемиот заеднички делител на сите броеви од видот $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$, $a \in \mathbb{N}$. Определи ги сите можни вредности на бројот d.

37. Определи ги сите парови на природни броеви (m, n) такви што
$$((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) > 1.$$

38. Реалните броеви a, b, c се такви што за секој природен број n бројот $a^n + b^n + c^n$ е цел број. Докажи дека постојат цели броеви p, q, r за кои a, b, c се корени на равеката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

39. Нека m, $m \geq 3$ е непарен природен број. Определи го најмалиот природен

број n таков што 2^{1989} е делител на m^n-1.

40. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со $a_0=0, a_1=1$ и $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$, за $n\geq 0$. Докажи дека $2^k\,|\,a_n$ ако и само ако $2^k\,|\,n$.

41. Низата $x_1,x_2,...$ е определена со $x_1=4$ и $x_{n+1}=x_1x_2...x_{n-1}x_n+5$ за $n\geq 1$. Определи ги сите парови од природни броеви (a,b) така што x_ax_b е точен квадрат.

42. Нека k е фиксен природен број и $m=4k^2-5$. Докажи, дека постојат природни броеви a и b такви што сите членови на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде $x_0=a$, $x_1=b$ и $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, $n=0,1,2,....$ се заемно прости со m.

43. Определи ги сите природни броеви n за кои 2^{n+1} е делител на $7^{n!}-3^{n!}$.

44. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n}+p^n$ има барем два различни прости делители.

45. Нека $a_1=1, a_2=3$ и $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, за секој $n=1,2,...$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

46. За секој природен број n збирот $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ е запишан како нескратлива дропка $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажи, дека 3 не е делител на p_{67}.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои $3\,|\,p_n$.

47. Нека a и b се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на $(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

48. Нека b,n се природни броеви. Нека претпоставиме дека за секој $k>1$, постои цел број a_k така што $b-a_k^n$ е делив со k. Докажи дека $b=A^n$, за некој природен број A.

49. Определи го најмалиот природен број k, таков што постојат цели броеви $x_1, x_2, ..., x_k$ за кои важи $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_k^3 = 2002^{2002}$.

50. Даден е прост број $p > 3$. Дали броевите $1, 2, ..., p-1$ можеме да ги поделиме (разбиеме) на две непразни множества така што збирот на броевите во едното и производот на броевите во другото множество да даваат ист остаток при делење со p?

51. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви и $a > 1$ е природен број таков што $a_1 a_2 ... a_n \mid a$. Докажи дека $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1)$ не е делител на $a^{n+1} + a - 1$.

52. Природен број N се нарекува *балансиран*, ако $N = 1$ или ако N може да се запише како производ па парен број прости броеви кои не мора да бидат различни. Нека се дадени природните броеви a и b и нека P е полином дефиниран со $P(x) = (x + a)(x + b)$.

а) Докажи дека постојат различни природни броеви a и b така што броевите $P(1), P(2), ..., P(50)$ се балансирани;

б) Докажи дека ако $P(n)$ е балансиран за сите природни броеви n, тогаш $a = b$.

53. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + ... + \left(\tfrac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \tfrac{2-2^p}{p} \pmod p.$$

54. Нека p е непарен прост број. Докажи, дека

а) $\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \binom{2i}{i} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$,

б) $\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2i}{i} \equiv (-3)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

55. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека бројот $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не е делив со 5.

56. Нека $a_1, a_2, a_3, ...$ е строго растечка низа природни броеви. Докажи дека низата содржи бесконечно многу членови a_m кои може да се претстават во облик

$$a_m = xa_p + ya_q$$

каде x и y се природни броеви и $p \neq q$.

57. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 2009 и чиј збир на цифри е еднаков на 2009.

58. Нека $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ е прост број. Нека N е бројот на правоаголниците со плоштина $2p^2$, чии темиња имаат целобројни координати (x, y) за кои важи $0 \leq x, y \leq 2p^2$. Определи го остатокот од делењето на бројот N со бројот p.

59. Определи го бројот на природните броеви a кои се помали од 2003 и за кои постои природен број n таков што $3^{2003} \mid n^3 + a$.

60. Нека n е непарен природен број. Докажи дека броевите $0,1,2,3,...,n^2 - 1$ може да се распоредат во таблица со n редици и n колони така што секој количник и секој остаток добиени при делењето на тие броеви со бројот n да се сретнува точно по еднаш во ред и колона.

61. Во правоаголен координатен систем е дадена затворена конвексна линија L чии темиња се со целобројни координати и чии страни се со еднаква должина. Докажи дека L има парен број страни.

62. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

63. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненегативни цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + ... + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

64. Нека p е прост број и $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ се различни природни броеви од интервалот $[1, p^2]$ чиј збир е делив со p. Докажи, дека постојат природни броеви $b_1, b_2, ..., b_{2p-1}$ такви што ниту еден од нив не е делив со p и за кои
   1) Во записот на секој од нив во броен систем со основа p се среќаваат само цифрите 0 и 1,
   2) Збирот $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{2p-1}b_{2p-1}$ е делив со p^{2012}.

65. Дали постои 23-цифрен природен број таков што со замена на произволна цифра никогаш не се добива број делив со 11?

66. Дадено е множество M од 1985 различни природни броеви, такви што ниту еден од нив нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири по парови различни броеви чиј производ е четврти степен на природен број.

67. Определи ги сите природни броеви n за кои сите природни броеви кои во декадниот запис имаат $n-1$ цифри 1 и една цифра 7 се прости броеви.

68. Нека k е природен број. Докажи дека постојат бесконечно многу точни квадрати од видот $2^k n - 7$.

69. Определи ги сите броеви од облик $2^n, n \in \mathbb{N}$, такви што по отстранувањето на првата цифра во декадниот запис на бројот 2^n повторно се добива степен на бројот 2.

70. Дали постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_{3^n}$ такви што за секој $x \in \mathbb{Z}$ важи

$$(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{3^n}) \equiv x^{3^n} + 1 \pmod 9 \text{ ?} \qquad (1)$$

71. За еден природен број $n > 1$ велиме дека е *добар* ако за произволни природни броеви $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ такви што $1 \le b_1, b_2, ..., b_{n-1} \le n-1$, важи: за секој $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ постои $I \subseteq \{1, 2, ..., n-1\}$ такво што $\sum_{k \in I} b_k \equiv i \pmod n$. (Притоа празната сума по дефиниција е еднаква на нула, а сума од еден собирок по дефиниција е тој собирок.). Определи ги сите добри броеви.

72. Ексцентричен математичар се движи по скала со n пречки, така што одеднаш преминува a пречки кога се качува нагоре, а b пречки кога се спушта

надолу. Со низа чекори нагоре и надолу, тој од земјата се качува на врвот на скалата и потоа слегува повторно на земјата. Определи го најмалиот број n за кој ова е можно.

73. Нека $k \geq 2$ е произволен природен број. Докажи дека постои ирационален број r_k таков што за секој природен број n важи

$$[r_k^n] \equiv -1 (\mathrm{mod}\, k).$$

74. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB} = 20$ и $\overline{BC} = 12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.
Нека $r \in \mathbb{N}$. Една монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.
а) Докажи, дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.
б) Докажи, дека целта може да се постигне ако $r = 73$.
в) Дали целта може да се постигне ако $r = 97$?

75. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Докажи, дека постои природен број m поголем од n^n таков што $\frac{n^m - m^n}{n+m}$ е природен број.

76. Определи ги сите парови природни броеви (k, n) такви што $7^k - 3^n$ е делител на $k^4 + n^2$.

77. Даден е природен број k. Низите a_n, b_n се определени со

$$a_1 = k, a_2 = k, a_{n+2} = a_n a_{n+1} \quad \text{и} \quad b_1 = 1, b_2 = k, b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n}.$$

Докажи дека за секој природен број n бројот $a_{2n} b_{n+3}$ е цел број.

78. Нека p е непарен прост број. За природниот број k, $1 \leq k \leq p-1$, нека a_k е бројот на делителите на $kp+1$ кои се поголеми или еднакви на k и се помали од p. Определи ја вредноста на изразот $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$.

79. Нека $n_1 < n_2 < \ldots < n_{31}$ се прости броеви. Докажи дека ако 30 е делител на збирот $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{31}^4$, тогаш меѓу дадените броеви има три последователи прости броеви.

12. СИСТЕМИ ОСТАТОЦИ

1. Докажи, дека за секој природен број n, бројот n^3+5n е делив со 6.

2. Докажи, дека ако a, b, c се произволни цели броеви, а n е природен број, поголем од 3, тогаш постои цел број k, таков што ниту еден од броевите $k+a$, $k+b$ и $k+c$ не е делив со 4.

3. Нека $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(m)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул m, $\{b_1, b_2, ..., b_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систен на остатоци по модул n и $(m,n)=1$. Докажи, дека множеството
$$S=\{a_i n+b_j m \mid i=1,2,...,\varphi(m);\ j=1,2,...,\varphi(n)\}$$
е редуциран систем на остатоци по модул mn.

4. На кружница дадено е множество E од $2n-1\,(n\geq 3)$ различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки меѓу кои во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат, се наоѓаат точно n точки од E.
Најди го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.

5. Дадено е множество M од 2^{2015} природни броеви, секој од кои има 2014 цифри. Секои два од овие броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{2015}. Колку најмалку различни цифри учествуваат во декадните записи на броевите од множеството M?

6. Дадени се природни броеви m и n. Определи го најмалиот природен број N, $N\geq m$, со следново својство: ако $N-$елементно множество од цели броеви содржи комплетен систем на остатоци по модул m, тогаш тоа множество има непразно подмножество, чиј збир на елементи е делив со n.

7. Нека
$$S_n=\{\tbinom{n}{n},\tbinom{2n}{n},\tbinom{3n}{n},...,\tbinom{n^2}{n}\}, n\in\mathbb{N}.$$

а) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n не е комплетен систем на остатоци по модул n.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n е комплеен систем на остатоци по модул n.

8. Даден е природен број $n>1$. Докажи, дека постојат n последователни природни броеви чиј производ е делив со сите прости броеви помали или еднакви на $2n+1$ и не е делив со ниту еден друг прост број.

9. Нека $p>2$ е прост број таков што $3\mid p-2$. Докажи дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S=\{y^2-x^3-1 \mid x,y\in\mathbb{Z}, 0\le x,y\le p-1\}$$

се деливи со p.

10. Нека p е непарен прост број. Докажи дека постои природен број m, $1\le m<p$ така што важи

$$mp=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

за некои цели броеви x_1,x_2,x_3.

11. Нека A е бесконечно подмножество од множеството природни броеви. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој $a\in A$ важи

$$a^n+a^{n-1}+...+a^1+1 \mid a^{n!}+a^{(n-1)!}+...+a^{1!}+1.$$

12. Нека a и b се цели, а n е природен број. Докажи дека

$$n! \mid (b^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)).$$

13. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој цел број y постои цел број x за кои $x^3+x\equiv y \pmod n$

13. ТЕОРЕМА НА ОЈЛЕР

1. Докажи, дека за секој природен број n бројот 5^{n+1} е делител на $N=1+2^{2\cdot 5^n}$.

2. Нека $(a,n)=1$ и $b-c=k\varphi(n)$. Докажи, дека a^b-a^c е делив со n .

3. Определи ги последните две цифри во декадниот запис на бројот 137^{42} .

4. Определи ја цифрата на единиците на збирот 2012^3+3^{2012}.

5. Определи го остатокот од делењето на бројот $(12371^{76}+34)^{150}$ со 111.

6. Определи го остатокот при делењето на бројот $(7^{2012})^{2014}-(3^{12})^{14}$ со бројот 10.

7. Определи ги сите природни броеви во чиј декаден запис се појавува само цифрата 9 и кои се деливи со 7.

8. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека $2^{n-1}(2^n-1)\equiv 1(\mod 9)$.

9. Нека n е природен број кој не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5. Докажи, дека бројот со $\varphi(n)$ цифри, кај кој сите цифри се единици, е делив со n .

10. Докажи, дека последните $2k$ цифри на бројот $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k}$ се нули.

11. Нека a е природен број. Определи го остатокот при делењето на бројот a^{100} со 125.

12. Определи ги сите природни броеви $n>1$ за кои бројот $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ е делив со n .

13. Докажи, дека ако n е непарен природен број, тогаш $n\,|\,2^{n!}-1$.

14. Докажи, дека за секој природен број s постои природен број n кој се дели со s и чиј збир на цифри е s.

15. Докажи, дека во секоја аритметичка прогресија $ak+b$, $k=0,1,2,3,...$ каде a,b се природни броеви, постојат бесконечно многу членови кои имаат исти прости делители.

16. Нека k и n се природни броеви такви што $k<2^{n+1}$. Докажи, дека бројот $1^{2^n}+2^{2^n}+...+k^{2^n}$ е делив со 2^n ако и само ако $k=2^{n+1}-1$.

17. Определи ги последните три цифри на бројот $2003^{2002^{2001}}$.

18. Докажи дека постои природен број $n<10^6$ за кој во декадниот запис на бројот 5^n има шест последователни нули.

19. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што во декадниот запис на бројот 5^n се појавуваат 1976 последователни нули.

20. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n>m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

21. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $42p$ е делител на бројот 3^p-2^p-1. Докажи!

22. Определи ги сите природни броеви $m,n\geq 2$ такви што $\frac{1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}}{n}$ е природен број.

23. За $x\in(0,1)$ нека $y\in(0,1)$ е број чија $n-$та цифра по децималната запирка е 2^n-тата цифра по децималната запирка на бројот x. Докажи дека ако x е рационален број, тогаш и y е рационален број.

24. Нека k е природен број и m е непарен цел број. Докажи дека постои природен број n таков што 2^k е делител на n^n-m.

25. Природниот број k ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни

цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите природни броеви n за кои постои наизменичен природен број A_n делив со n.

26. Определи ги сите цифри a ($0 \le a \le 9$), за кои постои таков природен број n, што последните 2011 цифри на бројот $3^n - 1$ се еднакви на a.

27. Подредениот пар цели броеви (x, y) го нарекуваме *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите x и y е еднаков на 1. Нека S е конечно множество примитивни точки. Докажи дека постојат природен број n и цели броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ такви што за секои точки (x, y) од S важи:
$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

28. Докажи дека за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ низата
$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, ... \pmod{n}$$
е константна почнувајќи од некој член.

29. Нека $n \ge 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n. Докажи, дека $f(n+p) \ne f(n)$, за секој $n \ge 2$ и за секој прост број p.

13. МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Докажи дека $2^{n-1} \equiv 1 (\bmod n)$ за $n = 73 \cdot 37$.

2. Докажи дека за секој природен број n и за секој прост број p бројот $1+\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}$ е делив со p.

3. Ако p е непарен прост број и a е цел број кој не е делив со p, тогаш еден и само еден со броевите $A = a^{1+2+\ldots+p-1}+1$, $B = a^{1+2+\ldots+p-1}-1$, е делив со p. Докажи!

4. Докажи, дека $ab^p - a^p b$ е делив со $6p$, ако a и b се природни броеви и $p > 3$ е прост број.

5. Определи ги сите прости броеви p за кои $p^2 \mid (11^{p^2}+1)$.

6. Ако за некој сложен број n важи $n \mid (2^n - 2)$, тогаш ќе велиме дека бројот n е *псевдопрост*. Докажи, дека бројот 341 е псевдопрост.

7. Ако n е непарен псевдопрост број, тогаш и $2^n - 1$ е псевдопрост број. Докажи!

8. Докажи, дека за секој непарен прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p \mid (2^n n + 1)$.

9. Низата $a_1, a_2, ...$ е определена со
$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad (n = 1, 2, ...).$$
Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

10. Докажи, дека за секој природен број k постојат бесконечно многу природни

броеви n такви што броевите

$$2^n+3^n-1, 2^n+3^n-2, ..., 2^n+3^n-k$$

се сложени.

11. Определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и n^3-1 се дели со 2556.

12. Определи ги сите прости броеви p, за кои p е делител на бројот $\sum_{n=1}^{103} n^{p-1}$.

13. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) такви што pq е делител на 5^p+5^q.

14. Природните броеви a и b се такви што броевите $15a+16b$ и $16a-15b$ се точни квадрати на природни броеви. Определи ја минималната можна вредност на помалиот од тие квадрати.

15. Нека p и q се прости броеви такви што $q\,|\,N$ каде $N=\frac{a^p-1}{a-1}$ за некој природен број a. Докажи, дека $p=q$ или $q\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p)$.

16. Определи ги сите природни броеви k, за кои производот на првите k прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од еден) на природен број.

17. Определи ги сите природни броеви k за кои производот на првите k непарни прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од прв) на природен број.

18. Нека p е прост број. Докажи, дека бројот $(2^{p-2}-1)^p(2^p-1)-2^{p(p-2)}+1$ е делив со p^3.

19. Докажи, дека последните цифри на броевите $n^{n^n}, n=1,2,3,\ldots$ формираат периодична низа, најди го периодот и испитај дали е чист период.

20. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со целобројни коефициенти, за кои $P(n)$ е делител на $2557^n+213\cdot 2015$ за секој природен број n.

21. Нека p е непарен прост број. За секој цел број a нека

$$S_a=\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+...+\frac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Нека m и n се цели броеви такви што $S_3+S_4-3S_2=\frac{m}{n}$. Докажи дека p е делител на m.

22. Нека a е најголемиот позитивен корен на равенката $x^3-3x^2+1=0$. Докажи дека $[a^{1788}]$ и $[a^{1988}]$ се деливи со 17.

23. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) такви што 3^a+7^b е точен квадрат на природен број.

24. Определи ги сите природни броеви $n>1$ за кои постои единствен цел број a таков што $0<a<n!$ и $n!\,|\,a^n+1$.

25. Докажи, дека за секои два природни броја m и n постојат бесконечно многу парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на am^a+bn^b.

26. За природниот број n ќе велиме дека е *специјален* ако постојат природни броеви a,b,c и d такви што $n=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.

б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

27. а) Докажи дека за секој природен број $a\geq 3$ постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $n\,|\,(a^n-1)$.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои $n\,|\,(2^n-1)$.

в) Нека $k\geq 2$ и нека $n_1,n_2,...,n_k$ се природни броеви такви што

$$n_{i+1}\,|\,(2^{n_i}-1),$$

за секој $1\leq i\leq k-1$ и $n_1\,|\,(2^{n_k}-1)$. Докажи дека $n_1=n_2=...=n_k=1$.

28. Определи ги сите природни броеви n, $n>1$, такви што $\frac{2^n+1}{n^2}\in\mathbb{N}$.

29. За секој природен број n со канонично претставување $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_t^{a_t}$ ставаме $\omega(n)=t, \Omega(n)=a_1+a_2+...+a_t$. Докажи го или оповргни го следново

тврдење: За дадени произволен природен број k и произволни позитивни реални броеви α и β постои природен број n, за кој

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha, \; \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta.$$

30. Определи ги сите непарни прости броеви p кои се делители на збирот

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2004^{p-1}.$$

31. Докажи дека за секој цел број $k \neq 1$ постојат бесконечно многу природни броеви n за кои бројот $2^{2^n} + k$ е сложен.

32. Определи ги сите парови (a,b) од природни броеви со следново својство: постои природен број $d \geq 2$ таков што $a^n + b^n + 1$ е делив со d за секој природен број n.

33. Ако $p > 2$ епрост број и a е цел број кој не е делив со p, тогаш еден и само еден од броевите

$$A = a^{1+2+\ldots+(p-1)} + 1 \text{ и } B = a^{1+2+\ldots+(p-1)} - 1$$

е делив со p. Докажи!

15. ТЕОРЕМА НА ВИЛСОН

1. а) Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $2002!+1$ и $2003!$.
   б) Докажи дека броевите $2003!+1$ и $2004!$ се заемно прости.

2. Ако p е прост број, тогаш $p^3 \mid (p!)^2 - p^2$. Докажи!

3. (Теорема на Лајбниц). Природниот број $p>2$ е прост ако и само ако
$$(p-2)!-1 \equiv 0 (\text{mod } p).$$
   Докажи!

4. Докажи дека природниот број n е прост ако и само ако $n \mid m$ каде
$$m = \sum_{r=1}^{n-3} r \cdot r!.$$

5. Нека p е прост број. Докажи, дека:
   а) $a^p + a(p-1)! \equiv 0 (\text{mod } p)$,
   б) $a^p (p-1)! + a \equiv 0 (\text{mod } p)$.

6. Нека p е прост број и $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ се последователни природни броеви. Определи го остатокот од делењето на бројот $a_1 a_2 ... a_{p-1}$ со бројот p .

7. Докажи, дека ако p е непарен прост број, тогаш
   а) $1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} (\text{mod } p)$,
   б) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} (\text{mod } p)$.

8. Докажи, дека равенството $(p-1)!+1 = p^m$ не е исполнето за никои природни броеви $p>5$ и m.

9. Дали постојат единствени броеви $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ такви што
$$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!} \qquad (1)$$

при што $0 \le a_i < i$ за $i = 2,3,4,5,6,7$. Определи го збирот

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 .$$

10. Нека $a_0, a_1, ..., a_{p-1}; b_0, b_1, ..., b_{p-1}$ се две пермутации на броевите $0,1,..., p-1$, каде p е прост број број. Со $r_0, r_1, ..., r_{p-1}$ ги означуваме остатоците од делењето на броевите $a_0b_0, a_1b_1, ..., a_{p-1}b_{p-1}$ со бројот. Докажи, дека броевите $r_0, r_1, ..., r_{p-1}$ не формираат пермутација на броевите $0,1,..., p-1$.

11. Нека $a_i, i = 1,2,...,22$ се 22 последователни природни броеви. Докажи, дека тие не може да се поделат во две групи така да производот на броевите од едната група е еднаков на производот на броевите од другата група.

12. Нека $n \ge 5$ и $2 \le b \le n$. Докажи, дека
$$[\tfrac{(n-1)!}{b}] \equiv 0 (\mathrm{mod}\, b-1) .$$

13. Низата $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ е определена со $x_2 = 1, x_3 = 1$ и
$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \text{ , за } n \ge 3 .$$
Докажи дека x_n е цел број ако и само ако n е прост број.

14. Низата a_n е дадена со
$$a_0 = 3 \text{ и } a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1) \text{ , } n \ge 0 .$$
Определи ги ги сите броеви m за кои $(m, a_n) = 1$, за сите $n \ge 0$.

15. Докажи, дека за секој непарен прост број p при делење на броевите $2^p - 2$ и
$$p(p-1)!(-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{p-1})$$
со p^2 се добива ист остаток.

16. Докажи, дека постојат бесконечно многу сложени броеви n, за кои бројот $n!-1$ има барем два различни прости делители.

17. Определи ги сите цели броеви $m \ge 2$ за кои секој природен број n таков што $\frac{m}{3} \le n \le \frac{m}{2}$ е делител на биномниот коефициент $\binom{n}{m-2n}$

18. Докажи, дека броевите p и $p+2$ се прости ако и само ако

$$4((p-1)!+1)+p\equiv 0(\mathrm{mod}\, p^2+2p)\,. \qquad (1)$$

19. а) Нека за природните броеви x,y,z важи $xy-z^2=1$. Докажи дека постојат ненегативни цели броеви a,b,c,d такви што

$$x=a^2+b^2,\ \ y=c^2+d^2,\ \ z=ac+bd\,.$$

б) Докажи, ако p е прост број таков што $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, тогаш p може да се претстави како збир на два квадрати на природни броеви.

16. ЛИНЕАРНА КОНГРУЕНТНА РАВЕНКА. КИНЕСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТОЦИ

1. Реши ја линеарната конгруентна равенка:
   а) $3x \equiv 5 \pmod 8$, б) $5x \equiv 7 \pmod{12}$,
   в) $2x \equiv 3 \pmod 9$, г) $7x \equiv 1 \pmod{10}$,
   д) $8x \equiv 4 \pmod 5$, ѓ) $2x \equiv 1 \pmod{17}$,
   е) $5x \equiv -1 \pmod 8$,

2. Реши ја линеарната конгруентна равенка:
   а) $21x \equiv 1 \pmod{17}$, б) $21x \equiv -5 \pmod{29}$
   в) $7x \equiv 15 \pmod 9$, г) $7x \equiv 9 \pmod{10}$

3. Реши ја линеарната конгруентна равенка:
   а) $72x \equiv 2 \pmod{10}$, б) $6x \equiv 27 \pmod{12}$,
   в) $10x \equiv 15 \pmod{35}$

4. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:
   а) $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 8 \pmod{11}$,
   б) $x \equiv 7 \pmod{33}$, $x \equiv 3 \pmod{63}$,
   в) $4x \equiv 3 \pmod 7$, $5x \equiv 4 \pmod 6$.

5. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:
   а) $17x \equiv 2 \pmod 5$, $2x \equiv 1 \pmod 3$, $2x \equiv 2 \pmod 5$,
   б) $3x \equiv 5 \pmod 7$, $2x \equiv 3 \pmod 5$, $3x \equiv 3 \pmod 9$,
   в) $5x \equiv 200 \pmod{251}$, $11x \equiv 192 \pmod{401}$, $3x \equiv -151 \pmod{907}$.

6. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:
   а) $x \equiv a \pmod 6$, $x \equiv 1 \pmod 8$,
   б) $x \equiv 2 \pmod 6$, $x \equiv a \pmod 8$.

7. Најди ја вредноста на параметарот a за која постои решение на системот линеарни конгруентни равенки:
   а) $x \equiv a \pmod 6$, $x \equiv 1 \pmod{10}$, $x \equiv 2 \pmod{21}$, $x \equiv 3 \pmod{11}$,

б) $2x \equiv a (\text{mod } 4), \quad 3x \equiv 4 (\text{mod } 10)$.

8. Даден е непарен прост број p. За $1 \le k \le p-1$ со a_k да го означиме бројот на делителите на $kp+1$, кои се поголеми од k и се помали од p. Определи го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}$.

9. Докажи дека разликата $10^{900} - 2^{1000}$ е делива со бројот 1994.

10. Нека x и y се природни броеви од интервалот $[2,100]$. Докажи дека постои природен број n таков што бројот $x^{2^n} + y^{2^n}$ е сложен.

11. Реши го системот линеарни конгруентни равенки
$$x \equiv 8 (\text{mod } 5), \; x \equiv 5 (\text{mod } 3), \; x \equiv 11 (\text{mod } 7), \; x \equiv 2 (\text{mod } 4).$$

12. Кои услови треба да ги задоволуваат броевите m и n за да системот линеарни конгруентни равенки
$$x \equiv 3 (\text{mod } 4), \; x \equiv 4 (\text{mod } m), \; x \equiv 6 (\text{mod } n)$$
има решение.

13. Линеарната конгруентна равенка $13x \equiv 17 \ (\text{mod } 42)$ реши ја со сведување на систем линеарни конгруентни равенки со прости модули.

14. Реши го системот линеарни конгруентни равенки
а) $x \equiv 28 (\text{mod } 29), \; x \equiv 30 (\text{mod } 31), \; x \equiv 10 (\text{mod } 11)$,
б) $5x \equiv 11 (\text{mod } 17), \; 3x \equiv 19 (\text{mod } 32), \; 11x \equiv 6 (\text{mod } 37)$.

15. Реши ги системите линерни конгруентни равенки
а) $\begin{cases} x + 5y \equiv 5 (\text{mod}\, 6) \\ 5x + 3y \equiv 1 (\text{mod}\, 6) \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y \equiv 3 (\text{mod}\, 6) \\ 2x + 2y \equiv -1 (\text{mod}\, 6) \end{cases}$
в) $\begin{cases} x - y \equiv 2 (\text{mod}\, 6) \\ 4x + 2y \equiv 2 (\text{mod}\, 6) \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - y \equiv 2 (\text{mod}\, 6) \\ 2x + 2y \equiv 0 (\text{mod}\, 6). \end{cases}$

16. Определи ги сите трицифрени природни броеви броеви кои се деливи со 7, а при делење со 9 даваат остаток 5.

17. Определи ја цифрата на единиците на производот на првите сто природни броеви кои при делење со 5 даваат остаток 3.

18. Најди го најмалиот број делив со 10, а при делење со 3 дава остаток 2 и при делење со 7 дава остаток 3.

19. Кошницата на стара жена, која одела на пазар, била згазната од коњ. Во кошницата имало јајца. Сопственикот на коњот се понудил да ги плати јајцата, кои биле во кошницата. Старата жена не се сеќавала на точниот број на јајца, но се сетила дека кога ги редела во кошницата, земајќи по две јајца истовремено, останувало едно јајце. Истото се случувало кога таа земала три, четири, пет и шест јајца истовремено, но кога земала по седум јајца истовремено, не останало ниту едно јајце. Кој е најмалиот број на јајца, кој можело да ги има во кошницата?

20. Докажи дека постојат k последователни природни броеви секој од кои е делив со квадрат на природен број поголем од 1.

21. Определи ги последните три цифри на бројот

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}.$$

22. Определи го најмалиот природен број a со следново својство: постои природен број n таков што бројот $17^n+87^n a$ е делив со 455.

23. Докажи дека за секој парен број $2k$ при даден природен број m може да се запише како разлика на два природни броја, заемно прости со m.

24. На таблата се запишани $n>2$ цели броеви со најголем заеднички делител 1. Во еден чекор е дозволено да се додаде (или одземе) на еден од запишаните броеви производот на некој од преостанатите броеви со некој цел број. Определи го најмалиот број k таков што со помош на k вакви чекори секогаш може да се запише бројот 1.

25. Докажи дека постои аритметичка прогресија со произволно многу членови составена од различни броеви кои се степени на природни броеви со природни степенови показатели.

26. Докажи дека постои низа со произволен број членови, составена од природни броеви секој од кои не е степен на природен број со степенов показател од 1.

27. Докажи, дека ако a,b,c се различни цели броеви, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите $a+n,b+n,c+n$ се по парови заемно прости.

28. Определи ги сите природни броеви n со следново својство: постојат природни броеви a,b и c, не поголеми од n, такви што квадратниот трином ax^2+bx+c има две различни реални нули кои се разликуваат најмногу за $\frac{1}{n}$.

29. Нека n е природен број и нека $a_1,a_2,...,a_k,(k\geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1}-1)$ се деливи со n за секој $i\in\{1,2,...,k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1-1)$ не е делив со n.

30. Определи ги сите вредности функцијата $f(x,y)=7x^2+5y^3$, $x,y\in\mathbb{Z}$ кои припаѓаат на интервалот $[2000,2012]$.

31. Определи го бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c') такви што
$$ab+a'b'\equiv bc+b'c'\equiv ca+c'a'(\text{mod}15)$$
и $a,b,c,a',b',c'\in\{1,2,3,...,14\}$.

32. Даден е природен број a. Докажи, дека
а) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p\,|\,a^n+n$,
б) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p^2\,|\,a^n+n$.

33. Природниот број r го нарекуваме *степен*, ако $r=t^s$, каде $t\geq 2, s\geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои множество A од природни броеви, кое ги задоволува следните услови:
a) A има n елементи;
b) секој елемент од A е степен; и
c) за секои $r_1,r_2,...,r_k\in A,\ 2\leq k\leq n$ бројот $\frac{r_1+r_2+...+r_k}{k}$ е „степен“.

34. Даден е природен број $n\geq 3$. Докажи, дека постои природен број m кој припаѓа на интервалот $(\sqrt[4]{5}n,\frac{n^4+4}{2})$ таков што n^4+4 е делител на m^4+4.

35. Определи ги сите природни бреови n за кои постои природен број m таков што 2^n-1 е делител на m^2+9.

36. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е растечка функција за која постојат прости броеви $p_1,p_2,...,p_n$ и природни броеви $s_1,s_2,...,s_n$ такви што за секои $i=1,2,...,n$ множеството $\{f(p_ir+s_i)\,|\,r=1,2,...\}$ е бесконечна аритметичка прогресија. Докажи, дека постои $a\in\mathbb{N}$ таков, што $f(a+1), f(a+2),...,\ f(a+n)$ е аритметичка прогресија.

37. Множеството природни броеви го нарекуваме *убаво* ако содржи најмалку два елементи и секој негов елемент има заеднички прост делител со барем еден од преостанатите елементи. Нека $P(n)=n^2+n+1,\ n\in\mathbb{N}$. Определи ја најмалата вредност на природниот број b за која постои ненегативен цел број a таков што множеството

$$\{P(a+1),P(a+2),...,P(a+b)\}$$

е убаво.

38. Дадени се по парови различни природни броеви a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 и b_3, за кои $(n+1)a_1^n+na_2^n+(n-1)a_3^n$ е делител на $(n+1)b_1^n+nb_2^n+(n-1)b_3^n$, за секој природен број n. Докажи, дека постои природен број k таков што $b_i=ka_i$, за секој $i=1,2,3$.

17. НЕЛИНЕАРНИ КОНГРУЕНТНИ РАВЕНКИ

1. Нека $p>2$ е прост број. Докаѓи дека секоја од конгруентните равенки

$$x^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p),\qquad x^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p)$$

има точно $\frac{p-1}{2}$ решение.

2. Нека $p>2$ е прост број и $a,b\in\mathbb{Z}$. При кои услови кингруентната равенка $x^2+ax+b\equiv 0(\bmod p)$ има решение.

3. Определи ги сите цели броеви n за кои $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ е делив со 199.

4. Докажи, дека конгруентната равенка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\equiv 0(\bmod p)\,, \qquad (1)$$

каде p е прост број, $a_0\not\equiv 0(\bmod p)$, $n-i>p, i=0,1,...,k<n$ и $n-i=pq_i+r_i$, $0\le r_i<p$ е еквивалентна со равенката

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{q_i+r_i}+\sum_{i=k+1}^{n} a_i x^{n-i}\equiv 0(\bmod p)\,.$$

5. Реши ги равенките

а) $x^8-x+1\equiv 0(\bmod 3)$.

б) $x^{12}-2x^7+x^3+1\equiv 0(\bmod 5)$.

6. Докажи, дека со смената $x=y+t$ конгруентната равенка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\equiv 0(\bmod m)\,,$$

каде $(na_0,m)=1$, може да се сведе на равенка од облик

$$a_0y^n+\sum_{i=2}^{n} b_i y^{n-i}\equiv 0(\bmod m)\,. \qquad (1)$$

7. Докажи, дека равенката $x^n \equiv 1 \pmod p$, p е прост број, има n решенија ако $p \equiv 1 \pmod n$.

8. Нека $f(x), \deg f = n$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти и p, $p < n$ е прост број. Ако $f(x) = (x^p - x)q(x) + r(x)$, докажи дека равенката $f(x) \equiv 0 \pmod p$ е еквивалентна со равенката $r(x) \equiv 0 \pmod p$. Докажи!

9. Реши ја конгруентната равенка

$$x^7 - 3x^6 + x^5 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2 = 0 \pmod 5. \qquad (1)$$

10. Нека $f(x)$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти. Докажи дека конгруентната равенка $f(x) \equiv 0 \pmod p$ има решение за бесконечно многу прости броеви p.

11. Нека $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ако

$$a^n + bn + c \equiv 0 \pmod m \qquad (1)$$

за секој $n \in \mathbb{N}$, докажи дека $b^2 \equiv 0 \pmod m$. Дали мора да важи $b \equiv 0 \pmod m$.

12. Определи ги сите природни броеви n за кои постои природен број x таков што $n!$ е делител на $x^3 + 4x - 680$.

13. Нека k е природен број и m е цел непарен број. Докажи дека постои природен број n таков што $2^k \mid n^n - m$.

14. Нека m и n се природни броеви, $m, n \geq 2$. Докажи дека, ако $a^n \equiv 1 \pmod m$ за секој $a \in \{1, 2, ..., n\}$, тогаш $(m, n) = (p, p-1)$ за некој прост број p.

15. Докажи дека не постои неконстантен полином $f(x)$ кој прима само прости вредности за сите доволно големи целобројни вредности на x.

16. Нека p е прост број, а $k \in \mathbb{N}$ е делител на $p-1$. Докажи дека x^k прима точно $\frac{p-1}{k} + 1$ различни вредности по модул p, кога x се менува од 0 до $p-1$.

18. РЕД НА БРОЈ ПО МОДУЛ

1. Определи ги сите природни броеви n, за кои $n\,|\,2^n-1$.

2. Ако a,b и n се природни броеви, за кои a и n, и b и n се заемно прости, тогаш најмалиот природен број k за кој $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ се нарекува *степен* на a и b по модул n.

   Да забележиме дека, согласно теоремата на Ојлер имаме $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$ и $b^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$, па затоа $a^{\varphi(n)} - b^{\varphi(n)} \equiv 0 (\bmod n)$. Значи, горната дефи-ниција е коректна. На аналоген начин се определува степен на повеќе броеви кои се заемно прости со даден природен број n.

   Ако a,b и n се природни броеви, за кои a и n, и b и n се заемно прости, k е степенот на a и b по модул n, тогаш $a^m \equiv b^m (\bmod n)$ за некој m ако и само ако k/m.

3. Определи ги сите природни броеви n такви што $n\,|\,3^n-2^n$.

4. Определи ги сите природни броеви m и n, за кои бројот $n\,|\,(m+1)^n-m^n$ е исто така природен.

5. Ако $m,n\neq 1$ и l се природни броеви такви што $n\,|\,(m+l)^n-m^n$, тогаш нај-малиот прост делител на n е делител на l.

6. Нека m е природен број. Докажи дека ако $2^{m+1}+1$ е делител на $3^{2^m}+1$, то-гаш $2^{m+1}+1$ е прост број.

7. Определи ги сите природни броеви $n>1$ кои имаат најмногу два различни прости делители и за кои n е делител на 3^n+1.

8. Определи ги сите природни броеви n, за кои $n^2\,|\,2^n+1$.

9. Определи ги сите непарни природни броеви n за кои n е делител на 3^n+1 .

10. Нека a, m и n се природни броеви, каде a е парен и $m<n$. Докажи дека еден од броевите $a^m+1, a^{m+1}+1, a^{m+2}+1, ..., a^n+1$ е заемно прост со секој од останатите броеви.

11. Нека p е прост број и нека n е природен број. Докажи дека ако $p \| 2^n-1$ тогаш $p \| 2^{p-1}-1$.

12. Нека $a \in \mathbb{N}$ и p и q се непарни прости броеви такви што $a^p \equiv 1 (\bmod q)$. Докажи дека или q е делител на $a-1$ или $q=1+2np$.

13. Нека p и q се прости броеви и $2^p \equiv -1 (\bmod q)$. Докажи, дека или $q=3$ или $q=1+2np$.

14. Докажи, дека ако $(x, y)=1$, тогаш секој непарен прост делител на бројот $x^{2^n}+y^{2^n}$ е од облик $2^{n+1}m+1$.

15. Определи ги сите парови природни броеви (n, p) такви што
    1) p е прост број,
    2) $n \leq 2p$ и
    3) $n^{p-1} \mid (p-1)^n+1$.

16. Определи го најмалиот природен број кој не може да се претстави во облик $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ каде a, b, c, d се природни броеви.

17. Даден е прост број p. Докажи, дека постои прост број q таков што за секој цел број n бројот n^p-p не е делив со q.

18. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n>m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден броен систем) се еднакви.
    Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

19. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и

$$A(m,n)=m^{3^{4n}+6}-m^{3^{4n}+4}-m^5+m^3.$$

Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m,n)$ е делив со 1992 за секој $m\in\mathbb{N}$.

20. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $3p^{q-1}+1$ е делител на 11^p+17^p.

21. За еден прост број p ќе велиме дека е *добар,* ако:

1) не постои природен број $n\geq 2$ таков што $\frac{p^n-1}{n}$ е природен број заемно прост со n,
2) за бесконечно многу $k\in\mathbb{N}$ постојат $n_1,n_2,...,n_k\in\mathbb{N}$, поголеми од $\frac{p}{2}$ такви што за секој $1\leq i\leq k$ бројот $\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$ е природен број и заемно прост со n_{i+1} $(n_{k+1}=n_1)$.

Докажи дека 2 не е добар број, но сите непарни прости броеви се добри.

22. Дадени се различни прости броеви p и q и природен број n такви што pq е делител на $n^{pq}+1$. Докажи дека, ако p^3q^3 е делител на $n^{pq}+1$, тогаш некој од броевите p^2 или q^2 е делител на $n+1$.

23. Докажи дека, ако постојат природни броеви $a_1,a_2,...,a_{2017}$ за кои производот

$$(a_1^{2017}+a_2)(a_2^{2017}+a_3)...(a_{2016}^{2017}+a_{2017})(a_{2017}^{2017}+a_1)$$

е точен степен на прост број со степенов показател k, тогаш $k=2017$ или $k\geq 2017\cdot 2018$.

19. ПРИМИТИВНИ КОРЕНИ

1. Нека a и b се природни броеви такви што
$$2^a \equiv 2^b (\mathrm{mod}\, 101).$$
Докажи дека $a \equiv b (\mathrm{mod}\, 100)$.

2. Ако p е непарен прост број и a е примитивен корен по модул p, тогаш $a+p$ е примитивен корен по модул p. Докажи!

3. Ако p е непарен прост број и a е примитивен корен по модул p, тогаш барем еден од броевите a^{p-1} и $(a+p)^{p-1}$ не е конгруентен со 1 по модул p^2. Докажи!

4. За секој природен број a нека $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Нека $0 \le a,b,c,d \le 99$. Докажи дека од
$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d (\mathrm{mod}\, 10100)$$
следува дека $a = c, b = d$ или $a = d, b = c$.

5. Определи ги сите двоцифрени броеви $n = 10a + b$, a,b се цифри, $a \ne 0$ такви што $n \mid k^a - k^b$ за секој природен број k.

6. Нека p прост број. Секој примитивен корен по модул $p^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ е примитивен корен и по модул p. Докажи!

7. Нека p е прост број и $\alpha \ge 2$. Ако a е примитивен корен по модул p и важи
$$a^{p^{\alpha-2}(p-1)} \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^\alpha),$$
тогаш a е примитивен корен по модул p^α. Докажи!

8. Определи ги сите прости броеви $p = 5n+1$, $n \in \mathbb{N}$, за кои остатоците на $1^5, 2^5, \ldots, n^5$ при делење со p се по парови различни.

9. Даден е прост број $p>3$. За произволно множество $S\subseteq\mathbb{Z}$ и $a\in\mathbb{Z}$, нека
$$S_a=\{x\in\{0,1,2,...,p-1\}\,|\,(\exists s\in S),\ x\equiv as(\operatorname{mod} p)\}.$$
а) Определи го бројот на множествата $S\subseteq\{1,2,...,p-1\}$ такви што низата $S_1,S_2,...,S_{p-1}$ содржи точно два различни члена.

б) Определи ги сите вредности на бројот $k\in\mathbb{N}$ за кои постои множество $S\subseteq\{1,2,...,p-1\}$ такво што низата $S_1,S_2,...,S_{p-1}$ содржи точно k различни членови.

10. Докажи, дека меѓу произволни 100000 последователи природни 100-цифрени броеви постои број n за кој периодот на дропката $\frac{1}{n}$ е поголем од 2011.

11. Нека $m\geq 2$ е природен број. За природниот број n ќе велиме дека е добар за m, ако за секој природен број a заемно прост со n, бројот n е делител на a^m-1. Докажи дека, ако n е добар за m, тогаш $n\leq 4m(2^m-1)$.

20. ЦИКЛОМАТИЧНИ ПОЛИНОМИ. ТЕОРЕМА НА ЖИГИМОНДИ

1. Докажи дека $\Phi_n(x)$ е симетричен полином, т.е. во записот

$$\Phi_n(x)=\sum_{i=0}^{\varphi(n)} a_i x^i$$

следува $a_k = a_{\varphi(n)-k}$ за секој $k=0,1,...,\varphi(n)$.

2. Нека $n>1$ и $a>1$. Докажи, дека

$$(a-1)^{\varphi(n)} \le \Phi_n(a) \le (a+1)^{\varphi(n)} \quad . \tag{1}$$

3. Нека $n>1$, $a\ge 3$ и p е прост број таков, што $p \mid n$. Докажи, дека $\Phi_n(a)\ge p$.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу парови различни прости броеви (p,q) такви што $p \mid 2^{q-1}-1$ и $q \mid 2^{p-1}-1$.

5. Нека p е прост број. Докажи дека постои прост број q таков што $q \nmid n^p - p$ за секој природен број n.

6. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што ниту еден од простите делители на бројот n^2+n+1 не е поголем од $\sqrt{n}$.

7. Определи ги сите четворки природни броеви (x,r,p,n) такви што p е прост број, $n,r>1$ и важи

$$x^r - 1 = p^n .$$

8. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,p) такви што p е прост број и важи

$$p^x - y^p = 1 .$$

9. Нека a,b се прости броеви такви што $a>b>2$. Докажи дека $2^{ab}-1$ има најмалку три различни прости делители.

10. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5^x - 3^y = z^2.$$

11. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,p) такви што

$$2^a + p^b = 19^a.$$

21. КВАДРАТНИ ОСТАТОЦИ

1. Дали конгруенцијата

   а) $x^2 \equiv 68 (\mathrm{mod}\, 113)$,

   б) $x^2 \equiv 310 (\mathrm{mod}\, 521)$,

   в) $x^2 + 174 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 619)$,

   има решение.

2. Нека $\{a_n\}_{n \geq 2}$ е низа природни броеви определена со

$$a_n = n^6 + 5n^4 - 12n^2 - 36.$$

   Докажи дека:

   а) секој прост број е делител на барем еден член на оваа низа,

   б) постои природен број кој не е делител на ниту еден член на оваа низа.

3. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што бројот $n^2 + 1$ има прост делител поголем од $2n + \sqrt{2n}$.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу парови различни прости броеви (p, q) такви што $p \mid 2^{q-1} - 1$ и $q \mid 2^{p-1} - 1$.

5. Определи ги сите точни квадрати во низата $a_n = 2^n + 2021n$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Нека a и b се заемно прости природни броеви и a_n и b_n се цели броеви, дефинирани со равенството

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

   Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број $n \leq p$ таков што p е делител на b_n.

7. Даден е полиномот

$$f(x) = x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1.$$

   Нека $p > 3$ е прост број таков што постои $z \in \mathbb{N}$ за кој $p \mid f(z)$. Докажи дека постојат цели броеви $z_1, z_2, ..., z_8$ такви што за $g(x) = (x - z_1)(x - z_2)...(x - z_8)$

важи дека сите коефициенти на полиномот $f(x)-g(x)$ се деливи со p.

8. а) Нека $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ е прост број. Докажи дека бројот $q=2p+1$ е прост број ако и само ако $2^p\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$.

   б) Докажи дека Мерсеновиот број $M_{251}=2^{251}-1$ не е прост.

9. Нека $(\frac{a}{p})=1$. Реши ја конгруенцијата $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$ ако $p=4k+3$ или $p=8k+5$.

10. Докажи дека $4kxy-1$ не е делител на бројот x^m+y^n за било кои природни броеви x,y,k,m,n.

11. За фиксиран природен број a дефинираме низа $x_1,x_2,...$ со
$$x_1=a,\ \ x_{n+1}=2x_n+1,\ n\in\mathbb{N}.$$
Нека $y_n=2^{x_n}-1$. Определи го најголемиот можен број k за кој постои таков a што сите броеви $y_1,y_2,...,y_k$ се прости.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$m^6=n^{n+1}+n-1.$$

13. Нека n еприроден број. Докажи дека бројот 3^n+2 нема прост делител од видот $24k+13$.

14. Дадени се природни броеви $a>1$ и b со различна парност. Докажи дека $2^a-1\nmid 3^b-1$.

15. Нека p е прост број и $a\in\mathbb{Z}$ е заемно прост со p. Докажи дека $-a$ е квадратен остаток по модул p ако и само ако постојат $x,y\in\mathbb{Z}$, заемно прости со p такви што $p\,|\,x^2+ay^2$.

22. ДИОФАНТОВИ АПРОКСИМАЦИИ

1. Докажи дека
$$\langle 2;2,\ldots,2\rangle = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}. \qquad (1)$$

2. Докажи дека дропката $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}, a\in\mathbb{N}$ не може да се скрати.

3. Докажи дека за симетричната конечна обична верижна дропка
$$a_n = a_0,\ a_{n-1} = a_1, \ldots$$
важи релацијата $p_{n-1} = q_n$.

4. Докажи дека за обичните верижни дропки важи
$$q_n \ge 2^{\frac{n-1}{2}}, n\ge 2. \qquad (1)$$

5. Користејќи ја релацијата
$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \qquad (1)$$
реши ја линеарната конгруентна равенка
$$ax \equiv b(\bmod m),\ (a,m)=1.$$

6. Реши ја линеарната конгруентна равенка
   а) $95x \equiv 59(\bmod 308)$
   б) $91 \equiv 1(\bmod 132)$.

7. Користејќи ја релацијата
$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \qquad (1)$$
во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x+by=c$.

8. Во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, реши ги равенките
   а) $70x+33y=1$,
   б) $60x-91y=2$.

9. Докажи дека позитивниот корен на триномот $bx^2-abx-a$ каде $a,b\in\mathbb{N}$ се

разложува во чиста периодична обична верижна дропка со должина на периодот еднаква на 2.

10. Ако квадратната равенка со целобројни коефициенти $bx^2 - abx - a = 0$ има корен $x_1 = \langle \overline{a;b} \rangle$, тогаш вториот нејзин корен е $-\frac{1}{\langle \overline{b;a} \rangle}$. Докажи!

11. Ако $x = \langle a; \overline{b,c} \rangle$ е корен на квадратна равенка со целобројни коефициенти, тогаш вториот нејзин корен е $a - \langle \overline{c;b} \rangle$. Докажи!

12. Определи го производот на верижните дропки $\langle \overline{a;b} \rangle$ и $\langle 0; \overline{b,a} \rangle$.

13. Докажи, дека броевите $\alpha = \langle a;b,c \rangle$ и $\beta = \langle c;b,a \rangle$ се пропорционални со броевите $x = \langle \overline{a;b,c} \rangle$ и $y = \langle \overline{c;b,a} \rangle$.

14. а) Пресметај ја вредноста на верижната дропка $\beta = \langle 2;3,2,3,2,3,... \rangle = \langle \overline{2,3} \rangle$.
б) Пресметај ја вредноста на верижната дропка $\alpha = \langle 4;1,\overline{2,3} \rangle$.

15. Определи го разложувањето во верижна дропка на $\sqrt{D}$, каде
$$D = [(4m^2 + 1)n + m]^2 + 4mn + 1,\quad m,n \in \mathbb{N}.$$

16. Нека $d \geq 2$ е природен број. Докажи дека
$$\sqrt{d^2 - d} = \langle d-1; \overline{2, 2d-2} \rangle.$$

17. Ако $p,q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} < \sqrt{7}$, докажи дека важи $\sqrt{7} - \frac{p}{q} > \frac{1}{pq}$.

18. Ако $z = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, каде a и b се природни броеви такви што и двата не се точни квадрати, докажи дека $2z^3\{z\} > 3$.

19. Дали постои ограничена низа реални броеви (x_n) која го задоволува условот $|x_m - x_n| \geq \frac{1}{|m-n|}$ за секои $m,n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

20. Докажи дека меѓу 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството $n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$ важи за секој природен број n.

21. Нека $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $m_1,m_2,...,m_n \in \mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $q_1,q_2,...,q_n$ и p кои не се сите еднакви на нула такви што $|q_i| \leq m_i$ за секој i и $|q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + ... + q_n\alpha_n - p| < \frac{1}{(m_1+1)(m_2+1)...(m_n+1)}$.

22. Нека $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ се реални броеви и $m \in \mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $p_1,p_2,...,p_n$ и природен број $q \leq m^n$ такви што $|q\alpha_i - p_i| \leq \frac{1}{m}$ за $i = 1,2,...,n$.

23. Нека $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Со X_n да го означиме множеството од сите парови заемно прости природни броеви (a,b) такви што важи $a < b \leq n < a+b$. Докажи дека $\sum_{(a,b)\in X_n} \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$.

24. Докажи дека за секој ирационален број α постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\{n\alpha\} < \frac{1}{n}$.

25. Докажи дека константата 1 од броителот во претходната задача не може да се подобри, односно дека за секој $K < 1$ постои ирационален број α таков што неравенката $\{n\alpha\} < \frac{K}{n}$ има само конечно многу решенија $n \in \mathbb{N}$.

26. За реалниот број α велиме дека е *апроксимабилен со степен* k ако постои константа C (која зависи од α) таква што неравенката $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ има бесконечно многу решенија $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$). Нека $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Ако ирационалниот број α има степен на апроксимабилност k, тогаш и бројот $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ има степен на апроксимабилност k. Докажи!

23. ФЕРМАТОВИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите прости броеви p од обликот $p=2^{u_n}+1$, каде
$$u_1=u_2=1,\ u_{n+2}=u_n+u_{n+1},\ n=1,2,3,...$$
е низата на Фибоначи.

2. Докажи, дека за Ферматовите броеви $f_0, f_1,..., f_n, f_{n+1}$ важи
$$f_{n+1}=f_0 f_1 ... f_n+2.$$

3. Докажи, дека бројот $2^{2^n}-1$ има најмалку n различни прости делители.

4. Докажи дека за секој $n>5$ брјот од видот $2^{2^n}-1$ има прост делител поголем од 1000000.

5. Докажи, дека Ферматов број не може да биде точен квадрат на природен број.

6. Докажи дека ниту еден од Ферматовите броеви $f_n=2^{2^n}+1, n=0,1,2,3,...$ не е точен куб.

7. Докажи, дека Ферматовиот број $f_5=2^{2^5}+1$ е сложен.

8. Докажи дека бројот $f_{1945}=2^{2^{1945}}+1$ е запишан со повеќе од $3\cdot 10^{582}$ цифри и најди со колку цифри е запишан бројот $5\cdot 2^{1947}+1$, за кој се знае дека е најмал прост делител на f_{1945}.

9. Нека $f_n=2^{2^n}+1$ е $n-$тиот Ферматов број. Докажи дека за $n\geq 5$ бројот $f_n+f_{n-1}-1$ има најмалку $n+1$ прост делител.

10. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$xy+x+y=2^{32}.$$

11. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што n е делител на $2^{\sigma(n)}$.

12. Докажи дека постои природен број k таков што бројот $2^n k+1$ е сложен за секој $n\in\mathbb{N}$.

13. Докажи дека ако Ферматовиот број f_n е прост ако и само ако

$$3^{\frac{f_n-1}{2}}\equiv -1(\operatorname{mod} f_n).$$

24. ДЕЛИВОСТ НА БИНОМНИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Докажи, дека за секој прост број $p>2$ и за секој $k=1,2,...,\ p-1$ важи
$$\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p.$$

2. а) Докажи дека $(n+1)\,|\,\binom{2n}{n}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

   б) За секој $k\in\mathbb{N}$ определи го најмалиот природен број C_k таков што
$$(n+k+1)\,|\,C_k\binom{2n}{n+k},$$
   за секој $n\geq k$.

3. Нека p е непарен прост број. Дали постојат природни броеви $a,b_1,b_2,...,b_6$ $\in\{1,2,...,p-2\}$ за кои е исполнето равенството
$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1}=\binom{p-1}{b_1}^2+\binom{p-1}{b_2}^2+...+\binom{p-1}{b_6}^2. \tag{1}$$

4. Ако p е прост број, тогаш $N=\frac{(2p)!}{(p!)^2}-2$ е делив со p^2. Докажи!

5. Нека p е прост број. Биномните коефициенти $\binom{n}{i}$, $i=1,2,...,n-1$ истовремено се деливи со p ако и само ако $n=p^k$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Докажи!

6. Ако p е прост број и $a\in\mathbb{N}$ тогаш $(\binom{p^a}{1},\binom{p^a}{2},...,\binom{p^a}{p^a-1})=p$. Докажи!

7. Ако природниот број n има најмалку два различни прости делители, тогаш $(\binom{n}{1},\binom{n}{2},...,\binom{n}{n-1})=1$. Докажи!

8. Определи го најголемиот заеднички делител на биномните коефициенти
$$\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1}.$$

9. Определи ги сите природни броеви $n\geq 2$ со следново својство: за секои $i,j\in\{0,1,2,...,n\}$ броевите $i+j$ и $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ имаат еднаква парност.

10. Нека $k,n\in\mathbb{N}$ и $k\leq n$. Докажи, дека броевите $\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k}{k}$ се заемно прости броеви.

11. Нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека низата $\binom{k}{k},\binom{k+1}{k},...,\binom{k+n}{k},...$ содржи бесконечно многу по парови заемно прости броеви.

12. Ако p е прост број, тогаш за секои $k,l\in\mathbb{N}$, $l\leq k$ важи

$$\binom{pk}{pl}\equiv\binom{k}{l}(\mathrm{mod}\,p). \tag{1}$$

Докажи!

13. Ако p е прост број, тогаш $\binom{n}{p}\equiv[\frac{n}{p}](\mathrm{mod}\,p)$. Докажи!

14. Нека $p>3$ е прост број. Докажи дека бројот

$$\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+...+\binom{p}{[2p/3]}$$

е делив со p^2.

15. Нека p е прост број, а n е природен број. Докажи дека следниве две тврдења се еквивалентни:

1) Ниту еден биномен коефициент $\binom{n}{k}$, $1\leq k\leq n$ не е делив со p.

2) $n=p^s q-1$ за некои цели броеви s,q такви што $s\geq 0$ и $0<q<p$.

16. **(Теорема на Лукас).** Нека m и n се ненегативни цели броеви и нека p е прост број. Нека $m=\overline{m_k m_{k-1}...m_0}_p$ и $n=\overline{n_k n_{k-1}...n_0}_p$ се записите на m и n во бројниот систем со основа p. Докажи дека

$$\binom{m}{n}\equiv\binom{m_k}{n_k}\binom{m_{k-1}}{n_{k-1}}...\binom{m_1}{n_1}\binom{m_0}{n_0}(\mathrm{mod}\,p).$$

17. **(Теорема на Кумер).** Нека m и n се природни броеви, а p е прост број. Тогаш степенот на p во каноничното претставување на биномниот коефициент $\binom{n}{m}$ е еднаков на бројот на преноси кои треба да бидат извршени при собирањето на m и $n-m$ во бројниот систем со основа p. Докажи!

18. Определи ги сите цели броеви k за кои постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n+k$ не е делител на биномниот коефициент $\binom{2n}{n}$.

19. Нека n е природен број, а p е прост број. Определи го бројот на коефициентите на полиномот $(x+1)^n$ кои не се деливи со p.

20. Определи ги сите природни броеви m такви што за секој природен број n таков што $\frac{m}{3} \le n \le \frac{m}{2}$ важи $n \mid \binom{n}{m-2n}$.

21. Нека n е природен број. Докажи дека броевите

$$\binom{2^n-1}{0}, \binom{2^n-1}{1}, \binom{2^n-1}{2}, \dots, \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$$

во некој редослед се конгруентни со броевите $1,3,5,\dots,2^n-1$ по модул 2^n.

25. ПОЛИНОМНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$ се такви што било кои два се заемно прости. Докажи дека
$$2abc-ab-bc-ca$$
е најголемиот цел број кој не може да се претстави во облик
$$xca+yca+zab$$
каде што x,y,z се ненегативни цели броеви.

2. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме најголемиот природен број со својството: за секој природен број k, $1<k<S(n)$, бројот n^2 може да се претстави како збир од k квадрати на природни броеви.
а) Докажи дека $S(n)\le n^2-14$, за секој $n>14$.
б) Определи природен број n за кој $S(n)=n^2-14$.
в) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $S(n)=n^2-14$.

3. Нека x,y,z се природни броеви такви што $(x,y)=1$ и $x^2+y^2=z^4$. Докажи дека $7\,|\,xy$. Дали условот $(x,y)=1$ е потребен?

4. Во множеството рационални броеви реши ја равенката
$$(1+x^2)(1+y^2)=2\,.$$

5. Даден е системот равенки
$$\begin{cases}x+y=z+u\\ 2xy=zu.\end{cases}\qquad(1)$$
Определи ја најголемата вредност за реалната константа m таква што $m\le\frac{x}{y}$ за секое решение природни броеви (x,y,z,u) на (1) такво што $x\ge y$.

6. Докажи дека секој прост број од облик $4k+1$ е должина на хипотенуза на правоаголен триаголник, чии страни се изразуваат со природни броеви.

7. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-2009y+2y^2=0.$$

9. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

10. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

11. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

12. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=20122012. \qquad (1)$$

Решение. Имаме,

$$x^2+y^2+z^2\equiv 20122012\equiv 0(\mathrm{mod}\,4).$$

Сега од $t^2\equiv 0$ или $1(\mathrm{mod}\,4)$, следува $x^2\equiv y^2\equiv z^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, што значи дека постојат цели броеви a,b,c такви што $x=2a, y=2b, z=2c$. Оттука следува

$$a^2+b^2+c^2=503503.$$

Ако последната равенка ја разгледуваме по одул 8 добиваме

$$a^2+b^2+c^2\equiv 7(\mathrm{mod}\,8). \qquad (2)$$

Но, $t^2\equiv 0,1$ или $4(\mathrm{mod}\,8)$, па затоа остатокот при делење на $a^2+b^2+c^2$ со 8 припаѓа на множеството $\{0,1,2,3,4,5.6\}$, што противречи на (2). Конечно, од добиената противречност следува дека равенката (1) нема решение во множеството цели броеви.

13. Докажи дека равенката

$$x^5+y^5+z^5=20152015$$

нема целобројни решенија.

14. Докажи дека равенката

$$3x^4+2013=25y^2-24x^2$$

нема целобројни решенија.

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$
каде p е прост број поголем од 3.

16. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2x^2-y^{14}=1.$$

17. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$(b^2+11(a-b))^2=a^3b.$$

18. За целиот број a велиме дека е *пријателски* ако равенката
$$(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3 \qquad (1)$$
има решение во множеството природни броеви.
а) Докажи дека множеството $\{1,2,...,2012\}$ содржи најмалку 500 пријателски броеви.
б) Провери дали бројот $a=2$ е пријателски.

19. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката
$$x+y+u+v=n\sqrt{xyuv}$$
има решение (x,y,u,v) во множеството цели броеви.

20. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$x^3+10x-1=y^3+6y^2.$$

21. Во множеството на цели броеви реши ја равенката
$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=y^3.$$

22. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^{2010}-2006=4y^{2009}+4y^{2008}+2007y.$$

23. Докажи дека равенката $x^2+y^2=6z^2$ во множеството $\mathbb{Z}$ нема решение различно од $(0,0,0)$.

24. Докажи дека равенката $x^7+7=y^2$ нема решение во множеството цели бро-

еви.

25. Докажи дека равенката $7x^3-13y=5$ нема целобројни решенија.

26. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{10}^4=2011.$$

27. Определи го најголемиот природен број n таков што равенката
$$(x+1)^2+y_1^2=(x+2)^2+y_2^2=...=(x+n)^2+y_n^2$$
има решение $(x,y_1,y_2,...,y_n)$ во множеството цели броеви.

28. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$n^{2002}=m(m+n)(m+2n)...(m+2001n)\,. \tag{1}$$

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$z^2+1=xy(xy+2y-2x-4)\,.$$

30. Нека p и q се прости броеви. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}\,.$$

31. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}\,.$$

32. Определи ги сите ненегативни цели броеви n такви што $\sqrt{n}+\sqrt{n+2005}$ е природен број.

33. Најди ги сите подредени тројки природни броеви (x,y,z) такви што
$$\sqrt{\frac{2015}{x+y}}+\sqrt{\frac{2015}{y+z}}+\sqrt{\frac{2015}{z+x}}$$
е природен број.

34. Докажи, дека за секој $s\in\mathbb{N}$ равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=1 \tag{1}$$
има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

35. Докажи, дека за секој $s>2$ равенката

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=1 \qquad (1)$$

во множеството $\mathbb{N}$ има решение $x_1, x_2, ..., x_s$ такво што $x_1<x_2<...<x_s$. Ако со k_s го означиме бројот на решенијата на равенката (1) докажи, дека $k_{s+1}>k_s$.

36. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{n}{4z^2+1}$ нема решение x, y, z во множеството природни броеви.

37. Определи го најмалиот природен број n за кој постои множество $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ кое се состои од n различни природни броеви такви што важи

$$(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})...(1-\frac{1}{s_n})=\frac{51}{2010}.$$

38. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=3(x+2y)z.$$

39. Реши ја равенката $2x^2+7y^2=z^2$ во множеството

а) $\mathbb{Q}$, б) $\mathbb{Z}$.

40. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$(y^3+xy-1)(x^2+x-y)=(x^3-xy+1)(y^2+x-y).$$

41. Нека $a, b\in\mathbb{N}$ и $(ab+1)\,|\,(a^2+b^2)$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

42. Докажи дека равенката $m^2=n^5-4$ нема решенија во множеството цели броеви.

43. Определи ги сите подредени парови природни броеви (x, y) за кои важи

$$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2.$$

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3=(x-y)(3xy+1).$$

45. Дадени се два заемно прости природни броја m и n. Докажи, дека равенката

$$x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$$

има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

46. Во една компанија има $m \geq 1$ мажи и $j \geq 1$ жени, $j < 2004$. Секој пратил на секого (освен на самиот себе) по една честитка. Се покажало дека бројот на честитките пратени од мажите е еднаков на бројот на честитките пратени од жените на жени. Определи ги сите можни вредности на j.

47. Дали равенката

$$x^2 + xy + y^2 = 2$$

има рационални решенија.

48. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

49. Нека $n \geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

нема решение $x, y \in \mathbb{N}$ за кое важи $(x, n+1) = 1$.

50. Докажи дека равенката

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30 \tag{1}$$

нема решение во множеството цели броеви.

51. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + x = y^3 + y^2 + y.$$

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy + yz + zx - xyz = 2.$$

53. Определи ги сите природни броеви n кои може да се запишат во видот $n = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, каде a, b, c се природни броеви.

54. Определи ги сите природни броеви k за кои равенката $x(x+k) = y(y+1)$ има решение во множеството природни броеви.

55. а) Природните броеви x и y се такви што бројот $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ е природен број и е

делител на 1978. Докажи дека $x = y$.

б) Докажи дека за кружница опишана околу квадрат со темиња (0,0), (1978,0), (1978,1978) и (0,1978) нема целобројни точки освен наведените.

56. Нека a, b, c се цели ненулти броеви. Познато е дека равенката

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

има целобројно решение различно од $x = y = z = 0$. Докажи дека равенката

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad (1)$$

има рационално решение.

57. Нека a и b се цели броеви кои не се точни квадрати. Докажи, ако равенката

$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0 \qquad (1)$$

има нетривијално целобројно решение, тогаш тоа важи и за равенката

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = 0. \qquad (2)$$

58. Определи целобројно решение на равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{29}^2 = 29x_1x_2...x_{29} \qquad (1)$$

такво што барем за еден $1 \le k \le 29$ важи $x_k \ge 1988^2$.

59. Докажи, дека за секој природен број n равенката $x(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n + y(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} = 1$ има точно едно целобројно решение (x, y).

60. Најди алгоритам за решавање во множеството $\mathbb{N}$ на равенката

$$x^n - y^n = a, \qquad (1)$$

каде a и n се дадени природни броoеви.

61. Нека p е прост број и k е природен број поголем од 1. Докажи дека постои најмногу еден пар природни броеви (x, y) таков што важи

$$x^k + px = y^k. \qquad (1)$$

62. Во множеството природни броеви решеија равенката

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1},$$

при што важат ограничувањата $n \ge 2$ и $z \le 5 \cdot 2^{2n}$.

63. Нека p е прост број и $m \ge 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p+y^p}{2}=(\frac{x+y}{2})^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x,y)\neq(1,1)$ само ако $m=p$.

64. Во множеството цели броеви реши ја равенката $\frac{a^7-1}{a-1}=b^5-1$.

65. Докажи, дека за секој природен број $k>1, k\neq 3$ постојат бесконечно многу природни броеви кои можат да се запишат како разлика на два $k-$ти степени на природни броеви, но не можат да се запишат како збир на два $k-$ти степени на природни броеви.

66. Нека x,y,z се по парови заемно прости природни броеви и $p\geq 5$, q се прости броеви, за кои се исполнети условите
а) $6p$ не е делив со $q-1$,
б) q не е делител на x^2+xy+y^2,
в) q не е делител на $x+y-z$.
Докажи, дека $x^p+y^p\neq z^p$.

67. Докажи, ако a и b се природни броеви и a^2+b^2-a е делив со $2ab$, тогаш a е точен квадрат.

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-mxy+y^2=n, \quad (1)$$
каде m е природен број и n е цел број.

69. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што за даден $q\in\mathbb{N}$ важи $\frac{a^2+b^2-a}{2ab}=q$.

70. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^2-5xy+y^2+5=0$.

26. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. За природен број n кој не е степен на 2, дефинираме $t(n)$ да биде најголемиот позитивен непарен делител на n и $r(n)$ да биде најмалиот позитивен непарен делител на n, различен од 1. Определи ги сите природни броеви n кои не се степен на 2 за кои важи $n=3t(n)+5r(n)$.

2. Одреди го најмалиот збир на цифрите на број од облик $3n^2+n+1$, каде n е природен број.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

4. Определи ги сите парови $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $a\neq b$, такви што $a+b$ и $ab+1$ се степени на 2.

5. За кои цели броеви a и b системот
$$\begin{cases}\frac{m^n-1}{m^n+1}=a\\ m^2+n^2=b\end{cases}$$
Има, во множеството $\mathbb{Z}$, решенија по m и n, ?

6. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x-5^y=z^2.$$

7. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}=2^y+1.$$

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^5+4^y=2013^z.$$

9. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^m+7^n=k^2.$$

10. Определи ги сите природни броеви n такви што за некои заемно прости

броеви x и y и природен број k, $k>1$ важи

$$3^n = x^k + y^k .$$

11. Определи ги сите природни броеви n за кои $A=n(n+2)(n+3)(n+5)$ има точно три различни прости делители. (Некои од простите делители може да го делат A и со степен повисок од 1.)

12. Докажи дека не постојат природни броеви x, y такви што $x \neq y$ и $x^{y^x} = y^{x^y}$.

13. Определи ги сите парови на природните броеви (m,n), $m,n>1$, за кои бројот $2^m + 3^n$ е квадрат на природен број.

14. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$n^x + n^y = n^z .$$

15. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$n^x + n^y + n^z = n^t . \qquad (1)$$

16. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^t . \qquad (1)$$

17. Определи ги сите природни броеви x, y и z такви што бројот $4^x + 4^y + 4^z$ е точен квадрат.

18. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^{b^2} = b^a .$$

19. Докажи дека не постојат природни броеви n и $p>5$, такви што важи

$$(p-1)!+1 = p^n . \qquad (1)$$

20. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 + 2x + 1 = 2^n .$$

21. Во множеството $\mathbb{N}$ реши го системот равенки

$$x_1^{x_2} = x_2^{x_3} = x_3^{x_4} = \ldots = x_{n-1}^{x_n} = x_n^{x_1}, \ n \geq 2 .$$

22. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$(x^2+y^2)^m=(xy)^n.$$

23. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката:
$$m^2+2\cdot 3^n=m(2^{n+1}-1).$$

24. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$11^a5^b-3^c2^d=1. \qquad (1)$$

25. Определи ги сите парови од природни броеви (m,n) за кои важи
$$3^m-7^n=2.$$

26. Определи ги сите позитивни рационални броеви $r\neq 1$ такви што $r^{\frac{1}{r-1}}$ е рационален број.

27. Во множеството природни броеви реши ја равенката $2^a+17=b^4$.

28. За природниот број ќе велиме дека е *двоен* ако неговиот декаден запис се состои од два исти блока цифри. Докажи дека меѓу двојните броеви постојат бесконечно многу точни квадрати.

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^3+x^2=2^y+16.$$

27. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

1. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p^3-q^3=pq^3-1.$$

2. Определи ги сите прости броеви такви што p^3-4p+9 е точен квадрат.

3. Определи ги сите природни броеви a,b,c за кои се исполнети условите:
1) a^2+1, b^2+1 се прости броеви,
2) $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$.

4. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) за кои p^2+q^3 и q^2+p^3 се точни квадрати.

5. Определи ги сите прости броеви p такви, што збирот на сите природни делители на бројот p^4 е квадрат на природен број.

6. Определи ги сите прости броеви p за кои $\frac{p^2-p-2}{2}$ е куб на природен број.

7. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^2-p+1 е точен куб.

8. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

9. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2-3p-1$ е точен куб на природен број.

10. Определи ги сите тројки (m,p,q) такви што m е природен број, p,q се прости броеви и важи
$$2^m p^2+1=q^5.$$

11. Определи ги сите прости броеви p и q за кои $p^{q+1}+q^{p+1}$ е точен квадрат.

12. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$2^p - q^2 = 1999.$$

28. РАВЕНКА НА ПЕЛ И РАВЕНКИ ОД ПЕЛОВ ТИП

1. Нека n и d се природни броеви такви што d не е точен квадрат. Докажи дека равенката $x^2-dy^2=1$ има бесконечно многу решенија (x,y) такви што $n\,|\,y$.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката
   а) $x^2-(a^2-1)y^2=1$, $x\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$,
   б) $x^2-(a^2+1)y^2=1$, $x\in\mathbb{N}$.

3. Докажи дека ако равенките од Пелов тип $x^2-5y^2=a$ и $x^2-5y^2=b$ имаат решение, тогаш и равенката $x^2-5y^2=ab$ има решение.

4. Ако $d\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, тогаш равенката $x^2-dy^2=-1$ нема решение во множеството цели броеви. Докажи!

5. Ако $d\equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4)$ е природен број кој не е точен квадрат, тогаш равенката $x^2-dy^2=-1$ има решение ако и само ако $x_0\equiv -1(\mathrm{mod}\,2d)$, каде (x_0,y_0) е фундаменталното решение на равенката $x^2-dy^2=1$. Докажи!

6. Нека S е множеството природни броеви n за кои n^4 има делител во множеството $\{n^2+1,n^2+2,...,n^2+2n\}$. Докажи дека S содржи бесконечно многу броеви од видовите $7k$, $7k+1$, $7k+2$, $7k+5$ и $7k+6$, но не содржи броеви од видовите $7k+3$ и $7k+4$, $k\in\mathbb{N}$.

7. Кој е најмал природен број n поголем од 1, за кој квадратната средина на броевите $1,2,...,n$ е природен број?

8. Докажи дека низата броеви $[n\sqrt{2}]$, $n\in\mathbb{N}$ содржи бесконечно многу точни квадрати.

9. Определи го најмалиот непарен природен број $a>5$ за кој постојат природ-

ни броеви m_1, m_2, n_1 и n_2 такви што

$$a = m_1^2 + n_1^2,\ a^2 = m_2^2 + n_2^2 \text{ и } m_1 - n_1 = m_2 - n_2. \tag{1}$$

10. Дадена е низата $a_k = [\sqrt{k^2 + (k+1)^2}],\ k \in \mathbb{N}$. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n^2 + (n+1)^2$ е точен квадрат,

$$a_n - a_{n-1} > 1 \text{ и } a_{n+1} - a_n = 1.$$

11. Нека n е природен број. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x, y, z) такви што е исполнето равенството

$$nx^2 + y^3 = z^4.$$

12. Нека $a, b > 1$ се заемно прости природни броеви такви што ab не е точен квадрат. Ако равенката $ax^2 - by^2 = 1$ има решение и нејзиното фундаментално решение е парот (A, B), тогаш сите нејзини решенија се дадени со

$$x_n = Au_n + bBv_n,\ y_n = Bu_n + aAv_n, \tag{1}$$

каде (u_n, v_n) е решение на равенката $x^2 - aby^2 = 1$. Докажи!

13. Нека $p \equiv 3 (\bmod 4)$ е прост број. Докажи дека равенката

$$(p+2)x^2 - (p+1)y^2 + px + (p+2)y = 1$$

има бескнечно многу решенија во множеството цели броеви и ако (x_0, y_0) е решение на равенката, тогаш $p \mid x_0$.

14. Докажи дека системот

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 3 = 4ab, \\ c^2 + d^2 + 3 = 4cd, \\ 4c^3 - 3c = a, \end{cases}$$

има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

15. Докажи дека равенката

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4 \tag{1}$$

има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

16. Определи ги сите природни броеви n такви што $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ за некој

природен број $k<n$.

17. Ако $m=2+2\sqrt{28n^2+1}$ е цел број за $n\in\mathbb{N}$, докажи дека m е точен квадрат.

18. Нека y е природен број. Докажи дека y е член на низата на Фибоначи ако и само ако еден од броевите $5y^2\pm4$ е точен квадрат.

19. Докажи дека $\{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}}$ за секој природен број n. Дали може константата $2\sqrt{2}$ во именителот да се подобри?

20. Ако a е природен број кој не е точен квадрат, определи го минимумот на изразот $q^2\,|\sqrt{a}-\frac{p}{q}|$ по $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$.

29. ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

1. Нека е даден полиномот
$$P(x)=(x+d_1)(x+d_2)...(x+d_9),$$
каде $d_1,d_2,...,d_9$ се девет различни цели броеви. Докажи дека постои цел број N, така што за сите цели броеви $x\geq N$, бројот $P(x)$ е делив со прост број поголем од 20.

2. Определи ги сите монични полиноми f со целобројни коефициенти кои го имаат следново својство: постои природен број N таков што $2(f(p)!)+1$ е делив со p за секој прост број $p>N$ за кој $f(p)$ е природен број.

3. Нека p е прост број и нека $f(x)$, $\deg f(x)=d$ е полином со целобројни коефициенти таков што:
1) $f(0)=0,\ f(1)=1,$
2) за секој природен број n, остатокот при делење на $f(n)$ со p е 0 или 1.
Докажи дека $d\geq p-1$.

4. Нека $n>1$ е природен број. Секоја дропка $\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n}$ ја запишуваме како нескратлива и со $f(n)$ го означуваме збирот на броителите на добиените дропки. За кои вредности на $n>1$ броевите $f(n)$ и $f(2015n)$ се со различна парност?

5. Определи полином $f(x)$ со целобрјни коефициенти, кој за m различни природни вредности на x дава m различни прости броеви.

6. Определи за кои природни броеви $m>1$ постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти, кој при делење со m за едни цели броеви дава остаток 0, а за други цели броеви дава остаток 1.

7. Нека $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Докажи дека постојат само конечен број прости броеви a_n од видот
$$a_n=\binom{n}{k}-1,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (1)$$

8. Докажи, дека не постои неконстантен полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков што сите броеви $f(k), k \in \mathbb{N}$ се прости.

9. Докажи, дека не постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков што $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$, но дека за секој природен број $m>1$ постои полином $f(x)$ со рационални коефициенти, таков што $f(k)=p_k$, $k=1,2,...,$ m каде p_k е $k-$тиот прост број.

10. Нека m е природен број и $r_1, r_2, ..., r_m$ се позитивни рационални броеви такви што $r_1+r_2+...+r_m=1$. Дефинираме функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ со
$$f(n)=n-[nr_1]-[nr_2]-...-[nr_m].$$
Определи ги минимумот и максимумот на функцијата f.

11. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со
$$f(m)=m+[\sqrt{m}], \text{ за } m\in\mathbb{N}.$$
Докажи дека за секој $m\in\mathbb{N}$ постои $k\in\mathbb{N}$ таков што
$$f^k(m)=f(f(...(f(m))...))$$
е точен квадрат.

12. Докажи дека не постои бикеција $f:\{1,2,...,n,...\}\to\{0,1,2,...,n,...\}$ таква што
$$f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n), \text{ за секои } m,n\in\mathbb{N}.$$

13. Функцијата $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ е таква што за секои цели броеви m и n разликата $f(m)-f(n)$ е делива со $f(m-n)$. Докажи дека за секои цели броеви m и n такви што $f(m)\le f(n)$, бројот $f(n)$ е делив со бројот $f(m)$.

14. Со $\mathbf{P}$ да го означиме множеството од сите прости броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$ такви што важи
$$f(p)^{f(q)}+q^p=f(q)^{f(p)}+p^q, \qquad (1)$$
за секои $p,q\in\mathbf{P}$.

15. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со
$$f(1)=1,\ f(2)=2 \text{ и } f(n+1)=f(n+1-f(n))+f(n-f(n-1)), \text{ за } n\ge 2.$$
Определи ги сите природни брови n за кои важи $f(n)=2^{20}$.

16. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $f(n!)=f(n)!$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $m-n$ е делител на $f(m)-f(n)$ за секои $m,n\in\mathbb{N}, m\neq n$.

17. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n+f(m) \text{ е делител на } f(n)+nf(m)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

18. Дали постои функција $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ која не е полином и таква што за секои $a,b\in\mathbb{Z}$ важи $a-b\mid f(a)-f(b)$?

19. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е неконстантна функција таква што $a-b\mid f(a)-f(b)$ за секои $a,b\in\mathbb{N}, a\neq b$. Докажи дека бројот на сите прости делители на броевите од множеството $\{f(1),f(2),f(3),...\}$ е бесконечен.

20. Нека k е даден природен број. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $m^2+f(n^k)\mid mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

21. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества: $\{f(1),f(2),...,f(n),...\}$, $\{g(1),g(2),...,g(n),...\}$ такви што

$$f(1)<f(2)<...<f(n)<..., \quad g(1)<g(2)<...<g(n)<...$$

и

$$g(n)=f(f(n))+1, \text{ за секој } n\geq 1$$

Определи го бројот $f(240)$.

22. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција за која важи: За секои $m,n\in\mathbb{N}$ бројот $(m^2+n)^2$ е делив со $f^2(m)+f(n)$. Докажи дека $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ со својството

$$f(x-(y))=f(f(x))-f(y)-1 \tag{1}$$

за сите $x,y\in\mathbb{Z}$.

24. За секој природен број n со $f(n)$ да го означиме бројот на различните можни избори на знаците $+$ и $-$ за кои важи $\pm1\pm2\pm...\pm n=0$. Докажи дека

а) $f(n)=0$, за $n\equiv 1,2 \pmod 4$

б) $f(n)\geq 2^{\frac{n}{2}-1}$, за $n\equiv 0,3 \pmod 4$.

30. ТЕОРЕМИ НА ЧЕБИШЕВ И ДИРИХЛЕ

1. Нека $n>10$ е природен број. Докажи, дека во каноничното разложување на $n!$ учествуваат барем два прости броја со степен 1.

2. Докажи, дека за секој природен број $n>4$ меѓу броевите n и $2n$ има најмалку еден број кој е производ на два различни прости броја.

3. Ако $n>1$ и p_n е $n-$тиот прост број, тогаш $p_n<2^n$. Докажи!

4. Докажи, дека за секој природен број $n>15$ меѓу броевите n и $2n$ постои најмалку еден природен број, кој е производ на три различни прости броеви.

5. Докажи, дека за секои природни броеви n и s, $n>p_1p_2...p_s$, меѓу броевите n и $2n$ постои најмалку еден природен број кој е производ на s различни прости множители (p_k е $k-$тиот прост број).

6. Определи ги сите природни броеви n со својство: ако природниот број m, $1<m<n$ е заемно прост со n, тогаш тој е прост.

7. За простите броеви p и q, $p>q$ ќе велиме дека се прости броеви близнаци ако $p=q+2$. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не припаѓаат на паровите прости броеви близнаци.

8. Докажи, дека за секој природен број m постои прост број, во чиј декаден запис има најмалку m нули.

9. Докажи дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти, таков што $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)$ при што сите овие вредности се прости броеви.

10. Докажи дека за секој природен број n постои прост број p таков што секој од броевите $p-1$ и $p+1$ има повеќе од n различни природни делители.

11. Докажи, за секој природен број n постојат прост број p и природен број m,

такви што

1) $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$,
2) p не е делител на n,
3) $n \equiv m^3 (\mathrm{mod}\, p)$.

12. Докажи, дека за секој природен број n постои прост број p таков, што секој од броевите $p-1, p+1, p+2$ има најмалку n различни прости делители.

13. Даден е природен број n поголем од 2. Нека V_n е множество броеви од облик $1+kn$, $k \in \mathbb{N}$. За бројот $m \in V_n$ велиме дека е неразложлив во V_n ако не постојат броеви $p, q \in V_n$, такви што $m = pq$.

    Докажи дека постои број $r \in V_n$ кој на повеќе од еден начин, може да се претстави како производ неразложливи множители во V_n. (Разложувањата кои се разликуваат само во редоследот на множителите во V_n ги сметаме за еднакви).

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Со колку цифри е запишан бројот $2^{11213}-1$.

   Решение. Произволен ненеулти степен на бројот има цифра на единиците 2, 4, 6 или 8, па затоа бројот $2^{11213}-1$ има онолку цифри колку што има бројот 2^{11213}. Имаме $\log_{10} 2 = 0,30103...$, па затоа

$$2^{11213} = 10^{11213 \log_{10} 2} = 10^{3375,44939...}$$

   и оттука следува дека бројот $2^{11213}-1$ е запишан со 3376 цифри.

2. Пресметај колку цифри се потребни за да се запишат сите природни броеви од N до M, $(N<M)$, вклучувајќи ги N и M.

   Решение. Броевите N и M имаат соодветно

$$n=[\log_{10} N]+1 \text{ и } m=[\log_{10} M]+1$$

   цифри. За да се запишат сите броеви од 1 до N, потребни се

$$s = 9\sum_{k=1}^{n-1} 10^{k-1}k + n(N+1-10^{n-1}) = n(N+1) - \tfrac{1}{9}(10^n-1)$$

   цифри. Слично, за да се запишат сите броеви од 1 до M потребни се

$$S = m(M+1) - \tfrac{1}{9}(10^m-1)$$

   цифри. Значи, бараниот број цифри е

$$S - s + n = m(M+1) - nN - \tfrac{10^n}{9}(10^{m-n}-1).$$

3. Со колку цифри е запишан бројот $2^{11212}(2^{11213}-1)$.

   Решение. Јасно, $2^{11212}(2^{11213}-1) = 2^{22425} - 2^{11212}$. Ќе определиме колку цифри има бројот 2^{22425}. Имаме $\log_{10} 2 = 0,30103...$, па затоа

$$2^{22425} = 10^{22425 \log_{10} 2} = 10^{6750,59775...}$$

   и оттука следува дека бројот 2^{22425} е запишан со 6751 цифра. Според задача 1 бројот 2^{11213} има 3376 цифри, па ако од бројот 2^{22425} го извадиме бројот 2^{11212} добиваме дека бројот $2^{11212}(2^{11213}-1)$ е запишан со 6751 цифра.

4. Дали постојат 10 различни цели броеви такви што збирот на било кои 9 од нив е точен квадрат?

Решение. Да постојат десет такви броеви. Нека за броевите $a_1, a_2,..., a_{10}$ важи:

$$S-a_1=9\cdot1^2, S-a_2=9\cdot2^2, S-a_3=9\cdot3^2,..., S-a_{10}=9\cdot10^2, \qquad (1)$$

каде $S=a_1+a_2+...+a_{10}$. Ако ги собереме равенствата (1) добиваме:

$$10S-(a_1+a_2+...+a_{10})=9(1^2+2^2+...+10^2)$$

$$9S=9(1^2+2^2+...+10^2)$$

$$S=1^2+2^2+...+10^2=\tfrac{10\cdot11\cdot21}{6}=55\cdot7=385$$

Конечно, $a_k=S-9k^2=385-9k^2$, за $k=1,2,3,....,10$.

5. Дадена е бесконечна аритметичка прогресија чии членови се природни броеви. Ако прогресијата содржи еден член кој е точен квадрат на природен број, тогаш таа содржи бесконечно многу точни квадрати на природни броеви. Докажи!

Решение. Нека разликата на прогресијата е еднаква на d и еден од нејзините членови е $a=m^2, m\in\mathbb{N}$. Тогаш, за секој $k\in\mathbb{N}$ бројот

$$a+d(2km+dk^2)=m^2+2mkd+k^2d^2=(m+kd)^2$$

е исто така точен квадрат на природен број, што значи дека прогресијата содржи бесконечно многу членови кои се точни квадрат на природни броеви.

6. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ е природен број.

Решение. Нека $a^2=k(2ab^2-b^3+1), k\in\mathbb{N}$. Од $2ab^2\ge b^3$ следува $b\le 2a$. Од друга страна, ако $b\ge a$, тогаш $b^2\ge a^2\ge b^2(2a-b)+1$, па затоа во овој случај $b=2a$.

За дадени вредности на b и k, бројот a е корен на квадратната равенка

$$x^2-2kb^2x+k(b^3-1)=0. \qquad (1)$$

Оваа равенка има две решенија $a_1,a_2\in\mathbb{N}_0$. Нека $a_1\ge a_2$. Од Виетовите правила имаме $a_1+a_2=2kb^2$, па затоа $a_1\ge kb^2$. Повторно од Виетовите правила следува

$$0\le a_2=\frac{k(b^3-1)}{a_1}\le\frac{k(b^3-1)}{kb^2}<b$$

и од претходно изнесеното добиваме дека мора да важи $b=2a_2$ или $a_2=0$. Ако $a_2=0$, тогаш $b=1$ и $a_1=2k$. Ако $b=2a_2$, тогаш ако во равенката (1) ставиме $x=a_2$ и $b=2a_2$ добиваме $k=a_2^2$, па наоѓаме дека

$$a_1=2kb^2-a_2=8a_2^4-a_2.$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека единствени решенија се

$$(a,b)\in\{(2t,1),(t,2t),(8t^4-t,2t)\,|\,t\in\mathbb{N}\}.$$

Непосредно се проверува дека овие парови навистина се решенија на задачата.

7. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постојат n по парови различни цели броеви чиј збир на квадрати е еднаков на збирот на кубовите.

Решение. За $n=3$, ако ставиме $y=-z$ можеме да конструираме бесконечно многу примери (x,y,z). Тогаш условот на задачата станува $x^2+2y^2=x^3$, т.е. $2(\frac{y}{z})^2=x-1$, што за $\frac{y}{x}=k$ дава

$$(x,y,z)=(2k^2+1,k(2k^2+1),-k(2k^2+1)).$$

Сега, на пример, за $n=3r$ можеме даземеме r дисјунктни тројки од горниот вид, кои ги има бесконечно многу. За $n=3r+1$ или $3r+2$ доволно е на оваа $3r-$торка да додадеме нула, единица или и двата броја.

8. Докажи, дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1,m_2,...,m_k$ (не задолжително различни) такви што

$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_k}).$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k.

За $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $1+\frac{2^k-1}{n}=1+\frac{1}{n}$, па ако земеме $m_1=n$, добиваме дека равенството (1) е исполнето, т.е. тврдењето важи за $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=r-1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека $k=r$ и $n\in\mathbb{N}$. Можни се два случаја: $n=2n_1$ или $n=2n_1-1$.

1) Ако $n=2n_1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+2^r-2}\cdot\frac{n+2^r-2}{n}=(1+\frac{1}{n+2^r-2})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}).$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1,m_2,...,m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}})$$

па затоа доволно е да земеме $m_r=n+2^r-2$.

2) Ако $n=2n_1-1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n_1-1+2^r-1}{2n_1-1+1}\cdot\frac{n+1}{n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}).$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1,m_2,...,m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}}),$$

па затоа доволно е даземеме $m_r=n$.

Според тоа, и во двата случаја тврдењето важи за $k=r$ и секој $n\in\mathbb{N}$, со што доказот е завршен.

9. Даден е природен број $n\geq 2$. Определи го најмалиот природен број m за кој постои низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n$, која ги задоволува условите:

1) $a_1<a_2<...<a_n=m$;

2) Сите $n-1$ броеви $\frac{a_1^2+a_2^2}{2},...,\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{2}$ се точни квадрати.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најмала вредност на m е $2n^2-1$. За $a_k=2k^2-1, k=1,2,...,n$ имаме

$$\frac{a_k^2+a_{k+1}^2}{2}=\frac{(2k^2-1)^2+(2(k+1)^2-1)^2}{2}=(2k^2+2k+1)^2,$$

па затоа $m\leq 2n^2-1$. Останува да докажеме, дека за секоја низа која ги задоволува условите важи $m\geq 2n^2-1$. За таа цел ќе докажеме дека $a_k\geq 2k^2-1$, за секој $k=1,2,...,n$.

Лема. Ако x,y,k се природни броеви такви што

$$2k^2-1\leq x<y<2(k+1)^2-1$$

тогаш $\frac{x^2+y^2}{2}$ не е точен квадрат на природен број.

Доказ. Ако $\frac{x^2+y^2}{2}$ е точен квадрат на природен број, тогаш x и y се со иста парност. Имаме

$$\frac{x^2+y^2}{2}-(\frac{x+y}{2})^2=(\frac{y-x}{2})^2>0.$$

Освен тоа, $y-x\leq(2(k+1)^2-2)-(2k^2-1)=4k+1$ и $y\geq x+2\geq 2k^2+1$. Бидејќи $y-x$ е парен број, од првото неравенство следува $y-x\leq 4k$. Пресметуваме

$$(\frac{x+y}{2}+1)^2-\frac{x^2+y^2}{2}=x+y+1-(\frac{y-x}{2})^2\geq(2k^2-1)+(2k^2+1)+1-(2k)^2=1>0.$$

Според тоа,

$$(\frac{x+y}{2})^2<\frac{x^2+y^2}{2}<(\frac{x+y}{2}+1)^2,$$

од каде следува дека $\frac{x^2+y^2}{2}$ не е точен квадрат на природен број. ■

Со индукција по k ќе докажеме дека $a_k \geq 2k^2 - 1$, за секој $k = 1, 2, ..., n$. За $k = 1$ тврдењето е очигледно. Ако $a_s \geq 2s^2 - 1$ и $a_{s+1} < 2(s+1)^2 - 1$, тогаш за $x = a_s$ и $y = a_{s+1}$ добиваме противречност на лемата, па затоа

$$a_{s+1} \geq 2(s+1)^2 - 1,$$

со што доказот е завршен.

10. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви кои можат да се запишат како разлика на кубови на два природни броја, но не можат да се заишат како збир на кубови на два природни броја.

Решение. За броевите $7 \cdot 8^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ важи

$$7 \cdot 8^n = (2^{n+1})^3 - (2^n)^3,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ќе докажеме дека ниту еден од броевите $7 \cdot 8^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ не може да се запише као збир на кубови на два природни броја. Лесно се проверува дека тврдењето важи за $n = 0$ и $n = 1$. Нека претпоставиме дека постои природен број n таков што $7 \cdot 8^n$ е збир на кубови на два природни броја и тоа нека е најмалиот природен број со ова својство. Така $n \geq 2$ и

$$7 \cdot 8^n = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2),$$

каде x и y се природни броеви. Бидејќи левата страна е парен број добиваме дека или x и y се парни или x и y се непарни. Ако x и y се непарни тогаш $x^2 - xy + y^2$ е непарен, што значи дека тој е еднаков на 1 или 7, т.е. $x^2 - xy + y^2 = 1$ или $x^2 - xy + y^2 = 7$. Во првиот случај $x^3 + y^3 = x + y$, па значи $x = y = 1$ и $7 \cdot 8^n = 2$ што не е можно, а во вториот случај од $x^2 - xy + y^2 = 7$ добиваме

$$(2x - y)^2 + 3y^2 = (2y - x)^2 + 3x^2 = 28$$

од што следува $3x^2 \leq 28$ и $3y^2 \leq 28$, па е $x \leq 3$ и $y \leq 3$, $x^3 + y^3 \leq 54$. Последното не е можно бидејќи $x^3 + y^3 = 7 \cdot 8^n \geq 7 \cdot 8^2$. Значи, x и y се парни: $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ каде $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$. Но, тоа значи

$$7 \cdot 8^n = x^3 + y^3, \text{ т.е. } 7 \cdot 8^{n-1} = x_1^3 + y_1^3,$$

што противречи на изборот на n.

Конечно, броевите $7 \cdot 8^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ги задоволуваат условите на задачата.

11. Колку пати се среќава цифрата 5 во декадниот запис на бројот

$$S = 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + ... + 10^{2021}?$$

Решение. Во збирот $1+10+19+28+37+...+10^n$ имаме $\frac{10^n-1}{9}+1$ собирци, па затоа

$$1+10+19+28+37+...+10^n=(\frac{10^n-1}{9}+1)\frac{10^n+1}{2}.$$

Бидејќи $\frac{10^n-1}{9}+1=\underbrace{11...1}_{n-1}2$, добиваме дека $\frac{\frac{10^n-1}{9}+1}{2}=\underbrace{55...5}_{n-2}6$ е број чиј декаден запис има $n-2$ цифри 5 и една цифра 6. Треба да го определиме бројот на цифрите 5 во бројот $\underbrace{55...5}_{n-2}6\cdot(10^n+1)$. Бидејќи последните n цифри на бројот $\underbrace{55...5}_{n-2}6\cdot 10^n$ се нули, добиваме дека

$$\underbrace{55...5}_{n-2}6\cdot(10^n+1)=\underbrace{55...5}_{n-2}60\underbrace{55...5}_{n-2}6$$

и овој број има $2(n-2)$ цифри 5. За $n=2021$ добиваме дека во декадниот запис на бројот цифрата 5 се содржи 4038 пати.

12. Определи го најмалиот природен број n кој што ги има следниве својства:
а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,
б) ако цифрата на единиците се премести пред другите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n.
Решение. *I начин.* Бројот n можеме да го запишеме во облик $n=10A+6$. Тогаш $4n=6\cdot 10^m+A$, каде бројот A има m цифри. Од овие две равенки добиваме

$$A=\frac{2\cdot 10^m-8}{13}.$$

Сега бараме најмал број m за кој овој количникот е цел број. Лесно се гледа дека $m=5$, $A=15384$ и $n=153846$.
II начин. Од условот на задачата имаме

$$n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 6},\qquad 4n=\overline{6a_m a_{m-1}...a_1},$$

односно

$$n=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+...+a_1\cdot 10+6$$

$$4n=6\cdot 10^m+a_m\cdot 10^{m-1}+a_{m-1}\cdot 10^{m-2}+...+a_1.$$

Бројот $4n$ завршува со 4, бидејќи $6\cdot 4=24$, па затоа $a_1=4$. Понатаму бројот $4n$ завршува со 84, бидејќи $4\cdot 46=184$, од што следува $a_2=8$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $n=153846$.

13. За целите броеви a, b, c и d се исполнети равенствата $|ac+bd|=|ad+bc|=1$.

Докажи, дека $|a|=|b|=1$ или $|c|=|d|=1$.

Решение. Да забележиме дека се можни два случаи.

Случај 1. $ac+bd$ и $ad+bc$ имаат исти знаци, т.е. двата се позитивни или двата се негативни. Тогаш

$$ac+bd=ad+bc$$
$$0=ac+bd-ad-bc=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

Според тоа $a-b=0$ или $c-d=0$, т.е. $a=b$ или $c=d$. Но тогаш $|a|=|b|$ или $|c|=|d|$.

Случај 2. $ac+bd$ и $ad+bc$ имаат спротивни знаци, т.е. едниот е позитивен а другиот негативен. Во тој случај

$$ac+bd=-(ad+bc)$$
$$0=ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d).$$

Од последното равенство добиваме $a+b=0$ или $c+d=0$, т.е. $a=-b$ или $c=-d$. Сега, $|a|=|b|$ или $|c|=|d|$.

Ако $|a|=|b|$, од равенството $1=|ac+bd|$ следува $1=|a|\cdot|c+d|$, па затоа $|b|=|a|=1$.

Ако $|c|=|d|$, од равенството $1=|ac+bd|$ следува $1=|c|\cdot|a+b|$, па затоа и $|d|=|c|=1$.

14. Нека d е природен број различен од 2, 5, 13. Докажи дека од множеството $\{2,5,13,d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така што $ab-1$ не е квадрат на цел број.

Решение. Доволно е да докажеме дека барем еден од броевите $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ не е квадрат на цел број. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат цели броеви x, y, z такви што

$$2d=x^2+1,\ \ 5d=y^2+1,\ \ 13d=z^2+1.$$

Од овде следува дека x е непарен број, т.е. $x=2x'+1$, од што следува дека $d=2x'(x'+1)+1$, што значи дека d е непарен. Понатаму, бидејќи d е непарен добиваме дека y и z се парни броеви, т.е. постојат цели броеви u и v такви што $y=2u$, $z=2v$. Тогаш

$$8d=z^2-y^2=(z-y)(z+y)=4(v+u)(v-u)\text{, т.е. } 2d=(v-u)(v+u).$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(v-u)(v+u)$ е непарен број, што е противречност, а ако u и v се со иста парност, тогаш се добива равенствоод видот $d=2(m-n)(m+n)$, што не е можно бидејќи d е непарен број.

15. Определи ги сите природни броеви n, $n\geq 1$ такви што бројот n^2+3^n е то-

чен квадрат.

Решение. Нека m е природен број таков што $n^2+3^n=m^2$. Тогаш

$$(m-n)(m+n)=3^n,$$

па затоа постои $k\geq 0$ таков што $m-n=3^k$ и $m+n=3^{n-k}$. Од $m-n<m+n$ следува $k<n-k$, па затоа $n-2k\geq 1$.

Ако $n-2k=1$, тогаш

$$\begin{aligned}2n&=(m+n)-(m-n)\\&=3^{n-k}-3^k=3^k(3^{n-2k}-1),\\&=3^k(3^1-1)=2\cdot 3^k\end{aligned}$$

па затоа $2k+1=n=3^k$. Од друга страна за $m\geq 2$ важи

$$3^m=(1+2)^m=1+2m+2^2\binom{m}{2}+...+2^m>2m+1.$$

Според тоа, од $2k+1=3^k$ следува $k=0$ или $k=1$, па затоа $n=1$ или $n=3$.

Ако $n-2k>1$, тогаш $n-2k\geq 2$, т.е. $k\leq n-k-2$. Затоа $3^k\leq 3^{n-k-2}$, што значи

$$\begin{aligned}2n&=3^{n-k}-3^k\geq 3^{n-k}-3^{n-k-2}\\&=3^{n-k-2}(3^2-1)=8\cdot 3^{n-k-2}\\&>8(1+2(n-k-2))\\&=16n-16k-24,\end{aligned}$$

т.е. $8k+12>7n$. Од друга страна за $n\geq 2k+2$ важи $7n\geq 14k+14$, што е противречност.

Конечно, единствени решенија се $n=1$ и $n=3$.

16. Дали постои природен број n, кој го има следново својство: збирот на цифрите на бројот n^2 е еднаков на 1000^2?

Решение. Со $s(a)$ да го означиме збирот на цифрите на бројот a. Нека n е k цифрен број, запишан со помош на m^2 единици и произволен број нули, таков што $s(n^2)=m^2$. Тогаш за бројот $n_1=10^{k+1}n+1$, каде k е бројот на цифрите во записот на n, важи $s(n_1)=m+1$ и $s(n_1^2)=(m+1)^2$. Сега, бидејќи за $n=1$ важи $s(1^2)=1^2$ значи, бараниот број постои.

17. Броевите $1,2,...,2n$ се распоредени во две низи

$$a_1<a_2<...<a_n \text{ и } b_1>b_2>...>b_n.$$

Докажи, дека бројот $w=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ е точен квадрат.

Решение. Нека претпоставиме, дека $b_n > a_n$. Тогаш важи

$$w = \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | = | 2n-1 | + | 2n-1-2 | + ... + | n+1-n | = n^2 .$$

Аналогно за $a_1 > b_1$ се добиваме дека $w = n^2$.

Да ги разгледаме случаите во кои елементите на едната низа не се сите поголеми од сите елементи на другата низа, т.е. $a_1 < b_1$ и $a_n > b_n$. Од последните две неравенства следува дека мора да постои индекс k за кој важи $a_k < b_k$ и $a_{k+1} > b_{k+1}$. Од условот на задачата имаме дека важи $b_{k-1} > b_k$ и $a_k > a_{k-1}$. Ако од се комбинира со $a_k < b_k$ заклучуваме дека $a_i < b_i, 1 \le i \le k$. Аналогно заклучуваме дека важи $a_i > b_i, k+1 \le i \le n$. Значи,

$$\begin{aligned} w &= b_1 - a_1 + ... + b_k - a_k + a_{k+1} - b_{k+1} + ... + a_n - b_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) - 2(a_1 + ... + a_k + b_{k+1} + ... + b_n) \\ &= n(2n+1) - 2(a_1 + ... + a_k + b_{k+1} + ... + b_n). \end{aligned}$$

Меѓутоа,

$$a_1 < a_2 < ... < a_k < b_k < b_{k-1} < ... < b_1$$

и

$$b_n < b_{n-1} < ... < b_{k+1} < a_{k+1} < ... < a_n .$$

Значи, сите елементи на множеството $\{b_1, b_2, ... b_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n\}$ се поголеми од елементите на множеството $\{a_1, a_2, ..., a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_n\}$, па затоа

$$a_1 + ... + a_k + b_{k+1} + ... + b_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Конечно,

$$w = n(2n+1) - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n^2 .$$

18. Бројот $5^{1985} - 1$ претстави го како производ на три природни броја секој од кои е поголем од 5^{100}.

Решение. Прво да забележиме дека $1985 = 5 \cdot 397$. Нека $x = 5^{397}$, што значи $5^{1985} - 1 = x^5 - 1$. Имаме:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) .$$

Понатаму, ако се земе предвид дека $5x = 5^{398} = (5^{199})^2$, вториот множител на десната страна на горното равенство можеме да го запишеме како разлика на два квадрати

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 - 5x(bx + c)^2 , \tag{1}$$

каде a,b,c се коефициенти кои треба да ги определиме. Од (1) имаме

$$x^3+x^2+x=(2a-5b^2)x^3+(a^2+2-10bc)x^2+(2a-5c^2)x,$$

па затоа

$$2a-5b^2=1,$$
$$a^2+2-10bc=1,$$
$$2a-5c^2=1,$$

од каде наоѓаме дека едно решение е $a=3$ и $b=c=1$. Според тоа,

$$x^5-1=(x-1)[(x^2+3x+1)^2-5x(x+)^2],$$

па како изразот во средната заграда е разлика на два квадрати, тој може да се запише како производ на два броја. Непосредно се проверува дека сите три множители се поголеми од 5^{100}.

19. Определи ги сите парови (x,y) различни природни броеви, такви што со замена на местата на последните две цифри на бројот x^2 се добива бројот y^2.

Решение. Забележуваме, ако парот (x,y) го задоволува условот на задачата, тогаш и парот (y,x) го задоволува условот на задачата. Затоа, доволно е да се најдат паровите (x,y) за кои $x>y$.

Нека $x^2=\overline{a_1a_2...pq}$ и $y^2=\overline{a_1a_2...qp}$. Тогаш $x^2-y^2=9(p-q)$. Ќе докажеме дека $d=p-q$ не може да биде 9, 8, 7 или 6.

1) Ако $d=9$, тогаш мора да важи $p=9$ и $q=0$, што не е можно бидејќи x^2 не може да завршува на 90.
2) Ако $d=8$, тогаш $(p,q)=(9,1)$ или $(p,q)=(8,0)$. Ова повторно не е можно, бидејќи x^2 не може да завршува ниту на 91, ниту на 80.
3) Ако $d=7$, тогаш $(p,q)\in\{(9,2),(8,1),(7,0)\}$. Ниту еден од овие случаи не е можен бидејќи x^2 не може да завршува на 92 или на 81 или на 70.
4) Ако $d=6$, тогаш $(p,q)\in\{(9,3),(8,2),(7,1),(6,0)\}$, што повторно не е можно.

Значи, $d\le 5$. Но, тогаш

$$2y+1\le x+y\le(x-y)(x+y)=9d\le 45,$$

односно $y\le 22$. Со непосредна проверка на можните случаи за y се добива дека $y=13$ или $y=14$, т.е. бараните парови се (13,14) и (14,13).

20. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = ... = S(n^2).$$

Решение. Нека претпоставиме дека $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$ е број кој го исполнува условот од задачата. Јасно е, дека $n \neq 10^k$, бидејќи во спротивен случај нема да е исполнето првото равенство од низата равенства. Според тоа $10^k + 1 \leq n$. Ќе го разгледаме бројот $(10^k + 1)n$ кој припаѓа во множеството $\{n, 2n, ..., n^2\}$. Од дефиницијата на n добиваме дека последните $(k-1)-$на цифра на $(10^k + 1)n$ се $a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0$. Преостанатите цифри на $(10^k + 1)n$ се цифрите на бројот $x = \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0} + a_k$, во редоследот во кој се распоредени и збирот на неговите цифри треба да е a_k. Бројот x има еден од облиците

а) $\overline{b_k b_{k-1} ... b_1 b_0}$

б) $\overline{b_{k+1} b_k b_{k-1} ... b_1 b_0}$

Во случајот а) имаме две можности

$i)$ $b_k = a_k$ при што од равенството $b_k + b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = a_k$, добиваме

$$a_k + b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = a_k, \text{ т.е. } b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = 0.$$

Бидејќи $b_{k-1}, ..., b_1, b_0$ се цифри, добиваме дека сите се еднакви на нула. Но тогаш бројот е од облик $\overline{a_k 0 ... 0}$ при што

$$a_k + a_0 = 10,\ 1 + a_1 = 10, ..., 1 + a_{k-1} = 10 \text{ и } b_k = a_k + 1,$$

што противречи на претпоставката.

$ii)$ $b_k = a_k + 1$ при што од равенството $b_k + b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = a_k$, добиваме

$$a_k + 1 + b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = a_k, \text{ т.е. } 1 + b_{k-1} + ... + b_1 + b_0 = 0,$$

кое во множеството на цифри нема решение.

Во случајот б) имаме $b_{k+1} = 1$ и од обликот на $x = \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0} + a_k$ добиваме

$$\begin{aligned} &a_0 + a_k - 10 = b_0, \\ &1 + a_1 - 10 = b_1, \\ &..................... \\ &1 + a_{k-1} - 10 = b_{k-1}, \\ &1 + a_k - 10 = b_k \end{aligned} \tag{1}$$

Од последните равенства имаме

$$\begin{aligned} &a_1 - 9 = b_1, \\ &............... \\ &a_{k-1} - 9 = b_{k-1}, \\ &a_k - 9 = b_k. \end{aligned}$$

Бидејќи $b_1, b_2, ..., b_k$ се цифри, добиваме дека

$$b_1 = b_2 = ... = b_k = 0 \text{ и } a_1 = a_2 = ... = a_k = 9.$$

Ако замениме во првата равенка на (1) добиваме $a_0 = b_0 + 1$.

Од друга страна од обликот на бројот $(10^k + 1)n$, односно од

$$(10^k + 1)n = \overline{10...0b_0 a_{k-1}...a_2 a_1 a_0}$$

добиваме $b_0 + 1 = a_k = 9$. Според тоа, $a_0 = 9$, $b_0 = 8$ и бараниот број е $n = \overline{99....9}$. Не е тешко да се провери дека секој број од таков вид го задоволува условот на задачата.

21. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}, a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1}, m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k$, за произволен $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_m = \frac{1}{2m + \frac{1}{a_{m-1}}}. \tag{1}$$

Нека $b_m = \frac{1}{a_m}, m \in \mathbb{N}$. Од (1) следува дека $b_m = 2m + b_{m-1}$. Оттука со математичка индукција добиваме $b_m = m(m+1)$. Значи,

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},$$

па затоа

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

22. Низата $\{a_n\}$ е определена со:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, \text{ за } n = 1, 2, ...$$

Изрази го $n-$от член.

Решение. Иммаме $a_1 = 1 = 3^{1-1}, a_2 = 3 = 3^{2-1}$. Нека претпоставиме дека за некој $n \geq 2$ важи $a_n = 3^{n-1}$. За $n+1$ имаме

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-2} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^{(n+1)-1}.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $a_n = 3^{n-1}$, за секој $n = 1, 2, ...$

23. Низата $\{c_n\}$ е зададена со

$$c_1 = a, c_2 = b, c_{n+2} = -(c_n + 2c_{n+1}), \text{ за } n = 1, 2, ...$$

Изрази го $n-$от член. Испитај ги случаите $a = 1$, $b = -1$ и $a = 1$, $b = -2$.

Решение. Имаме

$$c_3 = -(a+2b) = (-1)^3[(3-2)a+(3-1)b] \text{ и}$$

$$c_4 = 2a+3b = (-1)^4[(4-2)a+(4-1)b].$$

Лесно се проверува дека формулата

$$c_n = (-1)^n[(n-2)a+(n-1)b],\ n=1,2,\dots \tag{1}$$

е точна за $n=1$ и $n=2$, а за произволен n формулата (1) се докажува со помош на математичка индукција.

За $a=1$, $b=-1$ имаме $c_n=(-1)^{n+1}$, а за $a=1$, $b=-2$ имаме $c_n=(-1)^{n+1}n$.

24. Низата $\{c_n\}$ е зададена со

$$c_1=a, c_2=b, c_{n+2}=2c_{n+1}-c_n, \text{ за } n=1,2,...$$

Изрази го $n-$от член.

Упатство. Со помош на матеатичка индукција докажи дека

$$c_n=(2-n)a+(n-1)b, \text{ за } n=1,2,\dots.$$

25. Изрази го $n-$от член на низата $\{c_n\}$ зададена со

$$c_1=a, c_2=b, c_{n+2}=2c_n+c_{n+1}, \text{ за } n=1,2,\dots.$$

Упатство. Со помош на математичка индукција докажи дека

$$c_n=\tfrac{3}{4}[3^{n-2}+(-1)^{n-1})]a+\tfrac{1}{4}[3^{n-1}+(-1)^n]^b, \text{ за } n=1,2,...$$

26. Определи ги сите строго растечки аритметички прогресии составени од три членови на низата на Фибоначи $u_1=u_2=1$ и $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, за $n=1,2,\dots$. Докажи, дека не постои строго растечка аритметичка прогресија составена од четири членови на низата на Фибоначи.

Решение. Ако членовите u_k,u_l,u_m на низата на Фибоначи формираат строго растечка аритметичка прогресија, тогаш мора да е $u_l>1, l>2$, бидејќи $u_2=1$, $m>3$ и $u_m=u_l+(u_l-u_k)$, од каде следува

$$u_m<u_l+u_l<u_l+u_{l+1}=u_{l+2}, \text{ т.е. } u_m<u_{l+2}.$$

Значи, $u_m\le u_{l+1}$, а бидејќи $u_m>u_l$ добиваме $u_m\ge u_{l+1}$, од што следува дека $u_m=u_{l+1}$, т.е. $m=l+1$. Според тоа,

$$u_k=2u_l-u_m=u_l-(u_{l+1}-u_l)=u_l-u_{l-1}=u_{l-2},$$

па е $k=l-2$. Конечно, ако членовите u_k,u_l,u_m на низата на Фибоначи формираат строго растечка аритметичка прогресија, тогаш мора да е $l>2$, $k=l-2$ и $m=l+1$. Од друга страна, лесно се проверува дека за секој $l>2$ броевите u_{l-2},u_l,u_{l+1} формираат строго растечка аритметичка прогресија.

Нека n е природен број поголем од $l+1$. Тогаш $n \geq l+2$ и бидејќи $l>2$ добиваме

$$u_n \geq u_{l+2} \text{ и } u_n - u_{l+1} \geq u_{l+2} - u_{l+1} = u_l > u_{l-1}.$$

Затоа ниту една растечка аритметичка прогресија не содржи четири членови на низата на Фибоначи.

27. Докажи, дека секој природен број може да се запише како збир на различни членови на низата на Фибоначи: $u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, за $n = 1, 2, ...$.

Решение. Со индукцијата n ќе докажеме дека тврдењето е точно за секој природен број $k,\ k \leq u_n$.

Тоа е точна за $n=1$ бидејќи $u_1 = 1$ и за $n=2$ бидејќи $u_2 = 1$, а исто така за $n=3$ бидејќи $u_3 = 2$. Сега, нека n е природен број поголем од 2 и нека секој природен број помал или еднаков од u_n може да се запише како збир на различни членови на низата на Фибоначи. Нека k е таков број што $u_n < k \leq u_{n+1}$. Ако $k - u_n > u_{n-1}$, тогаш важи $u_{n+1} \geq k > u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$. што не е можно. Значи, $0 < k - u_n \leq u_{n-1}$.

Според тоа, природниот број $k - u_n$ е збир на различни членови на низата на Фибоначи, па значи и бројот k е збир на различни членови на низата на Фибоначи. Навистина, $k = (k - u_n) + u_n$ и во збирот на $k - u_n \leq u_{n-1}$ не се јавува бројот u_n. Конечно секој природен број помал или еднаков на u_{n+1} може да се претстави како збир на различни членови на низата на Фибоначи, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

28. Множество од последователни природни броеви содржи точно 10 четврти степени и точно 100 кубови на природни броеви. Докажи, дека ова множество содржи барем 2000 точни квадрати на природни броеви.

Решение. Нека четвртите степени содржани во множеството се

$$n^4, (n+1)^4, ..., (n+9)^4.$$

Според тоа, разгледуваното множество ги содржи точните квадрати

$$(n^2)^2, (n^2+1)^2, ..., (n^2+18n+81)^2,$$

кои ги има точно $18n+82$. Значи, доволно е да докажеме дека

$$18n + 82 \geq 2000, \text{ т.е. } n \geq 107.$$

Кубовите во разгледуваното множество се меѓу $(n-1)^{\frac{4}{3}}$ и $(n+10)^{\frac{4}{3}}$, па затоа важи

$$(n+10)^{\frac{4}{3}} - (n-1)^{\frac{4}{3}} \geq 99.$$

Од друга страна ако го искористиме неравенството на Бернули добиваме

$$(n+10)^{\frac{4}{3}}-(n-1)^{\frac{4}{3}}=(n+10)^{\frac{4}{3}}(1-(\tfrac{n-1}{n+10})^{\frac{4}{3}})$$
$$=(n+10)^{\frac{4}{3}}(1-(1-\tfrac{11}{n+10})^{\frac{4}{3}})$$
$$\leq(n+10)^{\frac{4}{3}}(1-(1-\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{11}{n+10})$$
$$=\frac{44(n+10)^{\frac{1}{3}}}{3}.$$

Според тоа,

$$\frac{44(n+10)^{\frac{1}{3}}}{3}\geq 99,\text{ т.е. } n\geq(\tfrac{27}{4})^3-10>6^3-10=206,$$

со што тврдењето е докажано.

29. Докажи го или негирај го тврдењето: ако за природните броеви $a_1,a_2,...,a_k$ важи

$$a_1!\cdot a_2!\cdot...\cdot a_k!=t^k,$$

каде t е некој природен број, тогаш $|a_i-a_j|\leq 1$ за секои $1\leq i,j\leq k$.

Решение. Ќе побараме контрапример во вид

$$a_1=...=a_i=n+2,\ a_{i+1}=...=a_j=n+1,\ a_{j+1}=...=a_k=n,$$

каде $1\leq i<j<k$. Во овој случај

$$a_1!\cdot a_2!\cdot...\cdot a_k!=(n!)^k(n+1)^j(n+2)^i.$$

Овој производ е $k-$ти степен ако $(n+1)^j$ и $(n+2)^i$ се $k-$ти степени, а тоа е можно само ако $n+1$ и $n+2$ се степени на природни броеви со експонент поголем од 1. Последното е можно за $n=7,k=6$ и притоа: $8=2^3,9=3^2$, па затоа

$$9!\cdot 9!\cdot 9!\cdot 8!\cdot 7!\cdot 7!=7!^6\cdot 8^4\cdot 9^3=(7!\cdot 2^2\cdot 3)^6.$$

30. Определи ги сите природни броеви n, $k_1,k_2,...,k_n$ за кои важи

$$k_1+...+k_n=5n-4 \text{ и } \tfrac{1}{k_1}+...+\tfrac{1}{k_n}=1.$$

Решение. Од неравенството помеѓу аритметичка и хармониската средина следува

$$(k_1+...+k_n)(\tfrac{1}{k_1}+...+\tfrac{1}{k_n})\geq n^2,\text{ т.е. } 5n-4\geq n^2,$$

од каде добиваме $n\leq 4$. Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $k_1\leq k_2\leq...\leq k_n$.

Ако $n=1$, тогаш $k_1=1$.

Ако $n=2$, тогаш $(k_1,k_2)\in\{(2,4),(3,3)\}$, што не ги задоволува условите на задачата.

Ако $n=3$, тогаш $k_1+k_2+k_3=11$, па затоа важи $2\le k_1\le 3$. Според тоа,

$$(k_1,k_2,k_3)\in\{(2,2,7),(2,3,6),(2,4,5),(3,3,5),(3,4,4)\},$$

од кои само тројката $(2,3,6)$ ги задоволува условите на задачата.

Ако $n=4$, тогаш во неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина важи знак за равенство, а тоа е точно само кога $k_1=k_2=k_3=k_4=4$.

Конечно, решенија на задачата се $n=1$ и $k_1=1$, $n=3$ и (k_1,k_2,k_3) е пермутација на $(2,3,6)$, $n=4$ и $(k_1,k_2,k_3)=(4,4,4)$.

31. Дали постои пермутација $(a_1,a_2,...,a_{2013})$ на броевите 1, 2, ..., 2013 таква што $a_i-a_j\neq a_j-a_k$, за секои $1\le i<j<k\le 2013$?

Решение. Со индукција ќе докажеме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постои пермутација на броевите $1,2,...,n$ со саканото својство. За $n=1,2$ тврдењето е тривијално. Нека $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. Според индуктивната претпоставка постои пермутација $(a_1,a_2,...,a_m)$ на броевите $1,2,...,m$ со саканото својство. Ќе докажеме дека $(b_1,b_2,...,b_n)=(2a_1,...,2a_m,2a_1-1,...,2a_m-1)$ е саканата пермутација на броевите $1,2,...,n$. Навистина, ако $b_i-b_j=b_j-b_k$ за $i<j<k$, тогаш по конструкција b_i,b_j,b_k не може да бидат сите парни или сите непарни, па следува дека b_i е парен, а b_k непарен, но тогаш $b_j=\frac{b_i+b_k}{2}$ не е природен број.

За $n=2m+1$ условот го задоволува пермутацијата која се добива кога од соодветната пермутација за $2m$ се избрише елементот $2m$. Со ова индукцијата е готова.

32. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $(1\le m\le 1981, 1\le n\le 1981)$ се такви што ја задоволуваат равенката

$$(n^2-mn-m^2)^2=1.$$

Определи ја најголемата вредност на збирот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката $|n^2-mn-m^2|=1$. Ако $m=n$ добиваме $m=n=1$. Ако парот (m,n), $m\neq n$ е решение на горната равенка тогаш важи

$$n^2-mn-m^2=1 \text{ или } m^2+mn-n^2=1.$$

Од $n^2=m^2+mn+1$ следува дека $n>m$. Од втората равенка следува

$$n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0 \text{ т.е. } n>m.$$

Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$ и ако замениме во $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. парот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m,k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k,m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k,m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m,k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m,m)$ индуцира нов пар (m,n). Сега, парот (1,1) е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите

(1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,8), (8,13), ..., (987, 1597), (1597, 2584), ...

се решенија на дадената равенка.

Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2.

33. За природните броеви a,b,c,d важи $ad=bc$ и $a<b<c<d$. Докажи дека постои природен број n таков што $a<n^2<d$.

Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Тогаш постои природен број n таков што $n^2\le a$ и $d\le(n+1)^2$. Оттука следува дека $d-a\le 2n+1$. Од друга страна, бидејќи $(c-b)^2>0$, од условот на задачата добиваме

$$(c+b)^2-(c-b)^2=4bc=4ad=(d+a)-(d-a)^2.$$

Понатаму, од $d-a>c-b>0$ следува $(d-a)^2>(c-b)^2$, па затоа од горното равенство следува $(d+a)^2>(c+b)^2$, т.е. $d+a>c+b$ и

$$\begin{aligned}(d-a)^2&=(d+a)^2-(c+b)^2+(c-b)^2\\&>(d+a)^2-(c+b)^2\\&=(d-c-b+a)(d+c+b+a).\end{aligned}\tag{1}$$

Но, $d-c-b+a>0$, т.е. $d-c-b+a\ge 1$. Исто така важи $d+c+b+a>4n^2$, па затоа $(d-a)^2>4n^2$, т.е. $d-a>2n$. Според тоа, $2n<d-a\le 2n+1$, па затоа единствена можност е

$$d-a=2n+1,\ a=n^2,\ d=(n+1)^2 \text{ и } bc=n^2(n+1)^2.$$

Ако $n=1$, тогаш $a=1$, $d=4$ од каде следува $b=2$, $c=3$. Но, $bc\ne 4$, па затоа овој случај отпаѓа. Од друга страна, за $n\ge 2$ точни се неравенствата

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1<8n^2=2\cdot 4n^2,$$

па заради (1) мора да важи $d-c-b+a=1$, т.е.

$$c+b=(n+1)^2+n^2-1=2n(n+1)=2\sqrt{ad}=2\sqrt{bc}\ ,$$

од каде добиваме $(\sqrt{c}-\sqrt{b})^2=0$, т.е. $b=c$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

34. Со $S(n)$ да го означиме збирот на цифрите на природниот број n запишан во декаден запис. За бројот m ќе велиме дека е лош ако не може да се претстави во обликот $m=n+S(n)$. Колку лоши броеви има, конечно или бесконечно многу?

Решение. Ќе докажеме дека постојат бесконечно многу лоши броеви.
Задачата ќе ја решиме така што ќе конструираме низа лоши природни броеви $\{a_n\}$. Притоа, низата ќе ја коструираме така што членот a_n е запишан со $n+1$ цифра.
Лесно се проверува дека бројот 20 е лош, па ставаме $a_1=20$.
Нека претпоставиме дека сме нашле лоши броеви $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ за кои се исполнети горенаведените услови. Треба да конструираме $(n+1)-$цифрен лош број a_n. За таа цел равенството $a_n=k+S(k)$ не треба да биде исполнето за било кој $k\in\mathbb{N}$. Посебно ќе ги разгледаме случаите кога k има најмногу n цифри, односно кога k има точно $n+1$ цифра.
Во првиот случај $k\le 10^n-1$ и $S(k)\le 9n$, па затоа

$$k+S(k)\le 10^n+9n-1.$$

Според тоа, ако со соодветна рекурзија обезбедиме да важи

$$a_n>10^n+9n-1, \tag{1}$$

тогаш разгледуваниот случај нема да е можен. Во вториот случај имаме $k\ge 10^n$. Тогаш можеме да ставиме

$$k=c\cdot 10^n+\alpha\ ,$$

каде c е првата цифра на k и $\alpha\le 10^n-1$. Притоа $S(k)=c+S(\alpha)$, т.е.

$$k+S(k)=c\cdot 10^n+\alpha+S(\alpha)+c\ .$$

Горното равенство сугерира за некој фиксиран $c\in\{1,2,...,9\}$ за бараната рекурзија даземеме

$$a_n=a_{n-1}+c(10^n+1),$$

бидејќи тогаш од претпоставката дека $a_n=k+S(k)$ следува $a_{n-1}=\alpha+S(\alpha)$, што овозможува да се заокружи индуктивниот доказ.
Ќе докажеме дека за $c=1$ се исполнетио бараните услови. Значи, ја разгледуваме рекурзијата

$$a_n = a_{n-1} + 10^n + 1, \tag{2}$$

$a_1 = 20$. Со индукција ќе докажеме дека сите членови на вака определената низа се лоши.

Прво да забележиме дека е исполнето неравенствоито (1). Навистина, очигледно

$$a_r = a_{r-1} + 10^r + 1 > 10^r,$$

па затоа за $n \geq 3$ имаме

$$a_n = a_{n-1} + 10^n + 1 > 10^n + 10^{n-1} > 10^n + 9n - 1.$$

За $n = 1, 2$ релацијата (1) се проверува непосредно. Значи, ако $a_n = k + S(k)$, тогаш мора да важи $k \geq 10^n$, а лесно се гледа дека случајот $k = 10^n$ не е можен.

Од друга страна, непосредно од (2) со индукција се покажува дека $a_n < 2 \cdot 10^n$. Бидејќи од равенството $a_n = k + S(k)$ следува $k < a_n$, добиваме дека првата цифра на бројот k е 1. Сега од горните разгледувања следува

$$k + S(k) = \alpha + S(\alpha) + 10^n + 1,$$

каде $k = 10^n + \alpha$, па претпоставката $a_n = k + S(k)$ повлекува $a_{n-1} = \alpha + S(\alpha)$. Но, според индуктивната претпоставка последното равенство не е можно, па затоа од добиената противречност следува дека a_n не може да се претстави во облик $k + S(k)$, т.е. бројот a_n е лош.

35. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите во декаден запис на природниот број n. Определи ги сите природни броеви M такви што важи $S(kM) = S(M)$ за секој природен број $k \leq M$.

Решение. Да забележиме дека $M = 1$ е тривијално решение на задачата.

Нека претпоставиме дека M е број со n цифри во декаден запис кој го задоволува условот на задачата. Нека d е неговата прва цифра. Имаме

$$M = 10^{n-1}d + m,$$

каде $m < 10^{n-1}$. Тогаш $S(M) = d + S(m)$. Јасно, освен во случајот $n = 1$ не може да е $M = 10^{n-1}$, па можеме да земеме $k = 10^{n-1} + 1$, со што добиваме

$$kM = 10^{2n-2}d + 10^{n-1}(m + d) + m,$$

па затоа

$$S(kM) = S(m) + S((10^{n-1}d + m + d)10^{n-1}) = S(m) + S(M + d),$$

од каде заради $S(kM) = S(M)$ и $S(M) = d + S(m)$ следува

$$d = S(M + d).$$

Но, d е прва цифра на бројот M, па затоа $M+d>10^{n-1}d$. Според тоа, ако $d<9$, тогаш првата цифра на бројот $M+d$ ќе биде или d или $d+1$. Во двата случаја ќе важи $S(M+d)>d$, што не е можно. Значи, $d=9$ и збирот на цифрите на бројот $M+9$ треба да е 9, што е можно само ако $M+9\geq 10^n$. Лесно се добива дека всушност сите цифри на бројот M мора да се еднакви на 9, т.е. $M=10^n-1$.

Ќе докажеме дека сите броеви од видот 10^n-1 го задоволуваат саканиот услов. Навистина, ако $M=10^n-1$, тогаш $S(M)=9n$ и за $k\leq M$ важи

$$S(kM)=S(k(10^n-1))=S((k-1)10^n+(10^n-k)).$$

Сега, ако $k>1$, тогаш $(k-1)10^n\geq 10^n>10^n-k\geq 1$, па затоа

$$S(kM)=S(k-1)+S(10^n-k).$$

Но, $10^n-k=10^n-1-(k-1)$, па затоа

$$S(10^n-k)=9n-S(k-1),$$

и ако го земеме предвид горното равенство добиваме

$$S(kM)=9n.$$

Според тоа, решенија на задачата се $M=1$ и $M=10^n-1$, $n\geq 1$.

2. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги сите природни броеви N такви што $N=(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)$ каде a_i се цифрите на бројот N во неговиот декаден запис.

Решение. Имаме

$$N=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1}=10^{n-1}a_n+10^{n-2}a_{n-1}+...+10a_2+a_1. \qquad (1)$$

Ако некоја цифра a_i на бројот N е еднаква на нула, тогаш $a_i+1=1$ и $a_j+1\le 10,\ j\ne i$, па затоа $N=(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)\le 10^{n-1}$, што не е можно заради (1).

Ако некоја цифра a_i на бројот N е еднаква на девет, тогаш $10\,|\,N$ што исто така не е можно бидејќи бројот N не завршува на нула, т.е. $a_i\ne 0$ за секој $i\in\{1,2,...,n\}$.

Ако $n>2$, тогаш

$$\begin{aligned}10^{n-1}a_n+10^{n-2}a_{n-1} &< 10^{n-1}a_n+10^{n-2}a_{n-1}+...+10a_2+a_1\\ &=(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)\\ &<(a_n+1)(a_{n-1}+1)\cdot 10^{n-2},\end{aligned}$$

т.е.

$$10^{n-1}a_n+10^{n-2}a_{n-1}<(a_n+1)(a_{n-1}+1)\cdot 10^{n-2},$$

од каде добиваме

$$10a_n+a_{n-1}<(a_n+1)(a_{n-1}+1)\text{, т.е. } a_n(10-a_{n-1})<a_n+1.$$

Значи, $a_{n-1}\ge 9$, што не е можно. За $n=2$ лесно се добива дека $N=18$ е единствено решение.

2. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се составени девет (не задолжително различни) деветцифрени броеви, при што секоја цифра во секој број е употребена точно по еднаш. На колку најмногу нули може да завршува збирот на овие девет броја?

Решение. Прво ќе докажеме дека збирот не може да завршува на девет нули. Јасно, сите броеви составени на опишаниот начин се деливи со 9 (збирот на нивните цифри е делив со 9). Според тоа, збирот на деветте броеви е делив со 9. Најмалиот број кој е делив со 9 и завршува на девет нули е бројот $9\cdot 10^9$. Според тоа, нашиот збир е најмалку $9\cdot 10^9$, од каде следува дека барем еден од деветте броја е поголем од 10^9, што е противречност.

Пример на девет броеви од разгледуваниот вид чиј збир завршува на осум нули се осум броја 987654321 и бројот 198765432. Збирот на овие девет броја е $81\cdot 10^8$.

3. Дали постои бесконечна низа природни броеви таква што за секој k збирот на секои k последователни броеви е делив со $k+1$?

Решение. Нека претпоставиме дека $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви со саканото својство. Нека $k>1$ е природен број. Тогаш од условот следува дека збирот $a_1+a_2+...+a_{2k-1}$ е делив со $2k$ (што значи и со k) и збировите $a_2+a_3+...+a_k$ и $a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k-1}$ се деливи со k. Според тоа, природниот број a_1 е делив со k за секој $k>1$, што е противречност.

4. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $(n+1)(n+2)...(n+n)$ е делив со 2^n, но не е делив со 2^{n+1}.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)...(n+n) &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n\cdot (n+1)\cdot (n+2)\cdot ...\cdot (2n-1)\cdot (2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot (2n-2)\cdot (2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n-1)\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n}\\ &= 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n-1),\end{aligned}$$

што значи дека бројот $(n+1)(n+2)...(n+n)$ е делив со 2^n но не е делив со 2^{n+1}.

5. Докажи дека за секој природен број n барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако $n=2k+1$, тогаш

$$3^{3n}+2^{3n}=27^n+8^n=27^{2k+1}+8^{2k+1}=(27+8)\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 27^{2k-i}8^i$$

па затоа $35\,|\,3^{3n}+2^{3n}$.

Ако $n=2k$, тогаш

$$3^{3n}-2^{3n}=729^k-64^k=(729-64)\sum_{i=0}^{k-1}729^{k-1-i}64^i=19\cdot 35\sum_{i=0}^{k-1}729^{k-1-i}64^i$$

па затоа $35\,|\,3^{3n}-2^{3n}$.

6. а) Нека $a_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,2,...,m$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека

$$6 \mid (a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1})$$

ако и само ако $6 \mid (a_1+a_2+...+a_m)$.

б) Нека $p>2$ е непарен природен број и n е природен број. Докажи дека p е делител на $1^{p^n}+2^{p^n}+...+(p-1)^{p^n}$.

Решение. а) Прво ќе докажеме дека за секој $a \in \mathbb{Z}$ и за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $6 \mid (a^{2n+1}-a)$. Навистина, од

$$a^{2n+1}-a=a(a^{2n}-1)=a(a-1)(a+1)(a^{2n-2}+a^{2n-4}+...+a^2+1),$$

и $6 \mid a(a-1)(a+1)$ следува дека $6 \mid (a^{2n+1}-a)$. Од досега изнесеното следува $6 \mid (a_i^{2n+1}-a_i)$, за $i=1,2,...,m$ и како

$$a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1}-(a_1+a_2+...+a_m)=(a_1^{2n+1}-a_1)+...+(a_m^{2n+1}-a_m),$$

следува дека $6 \mid (a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1})$ ако и само ако $6 \mid (a_1+a_2+...+a_m)$.

б) Ставаме $k=p^n$. Тогаш k е непарен број и за секој $d=1,2,...,\frac{p-1}{2}$ важи

$$d^k+(p-d)^k=p[d^{k-1}-d^{k-2}(p-d)+...+d(p-d)^{k-2}+(p-d)^{k-1}],$$

т.е. за секој $d=1,2,...,\frac{p-1}{2}$ важи $p \mid d^k+(p-d)^k$. Конечно, од претходно изнесеното следува $p \mid (1^{p^n}+2^{p^n}+...+(p-1)^{p^n})$.

7. За еден природен број ќе велиме дека е палиндром ако е еднаков на бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед, т.е. ако исто се чита како од лево на десно, така и од десно на лево. Определи ги најголемиот и најмалиот петцифрен палиндром кој е делив со 101.

Решение. Било кој петцифрен палиндром $\overline{abcba}$ може да се запише во обликот

$$\overline{abcba}=10001a+1010b+100c=101(99a+10b+c)+2a-c.$$

Според тоа, бидејќи $2a-c<101$ следува дека петцифрениот палиндром е делив со 101 ако и само ако $2a-c=0$. Сега, од $2a=c$ следува $a \le 4$, па како го бараме најголемиот петцифрен палиндром земаме $a=4$. Тогаш $c=8$ и како за цифрата b немаме ограничување, за да бројот е најголем земаме $b=9$. Според тоа, најголемиот петцифрен палиндром кој е делив со 101 е бројот 49894.

Повторно од $2a=c$ следува $a \le 4$, па како го бараме најмалиот петцифрен палиндром земаме $a=1$. Тогаш $c=2$ и како за цифрата b немаме ограничување, за да бројот е најмал земаме $b=0$. Според тоа, најмалиот петцифрен палиндром кој е делив со 101 е 10201.

8. За природниот број n со $P(n)$ да го означиме производот на сите позитивни делители на n. На пример, $P(20)=8000$, бидејќи позитивни делители на 20 се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20.
а) Определи ги сите природни броеви n такви што $P(n)=15n$.
б) Докажи дека не постои природен број n, таков што $P(n)=15n^2$.
Решение. а) Од $P(n)=15n$ следува дека 3 и 5 се делители на n, т.е. n е делив со 15. Ако $n>15$, тогаш 3, 5, 15 и n се делители на n, па затоа
$$15n=P(n)\geq 3\cdot 5\cdot 15\cdot n=225n,$$
што е противречност. Според тоа, единствена можност е $n=15$ и тогаш
$$P(15)=1\cdot 3\cdot 5\cdot 15=15\cdot 15,$$
што значи дека $n=15$ е решение на задачата.
б) Како во решението под а) наоѓаме дека 15 е делител на n. Но, за $n=15$ од а) следува дека $P(15)=15\cdot 15\neq 15\cdot 15^2$, т.е. $n\geq 30$. Тогаш $\frac{n}{3}>\frac{n}{5}>5$, па значи $1<3<5<\frac{n}{3}<\frac{n}{5}<n$ се различни делители на n. Според тоа,
$$P(n)\geq 1\cdot 3\cdot 5\cdot \tfrac{n}{5}\cdot \tfrac{n}{3}\cdot n=n^3,$$
па затоа $15n^2\geq n^3$, т.е. $15\geq n$, што противречи на $n\geq 30$.

9. Докажи дека сите членови на низата:
1007, 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ...
($n-$ тиот член на низата се добива така што меѓу 100 и 7 се запишани $n-1$ цифри еднакви на 1), се деливи со 53.
Решение. Дадената низа е определена со $a_1=1007$ и
$$a_{n+1}=10(a_n-6)+7=10a_n-53.$$
Имаме, $a_1=1007=53\cdot 19$, па затоа $53\,|\,a_1$. Понатаму, ако претпоставиме дека $53\,|\,a_k$, за некој $k\geq 1$, тогаш од $a_{k+1}=10a_k-53$ следува дека $53\,|\,a_{k+1}$. Конечно, од принципот на математиочка индукција следува $53\,|\,a_n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

10. Меѓу броевите од облик $36^k-5^l, k,l\in\mathbb{N}$ одреди го најмалиот по апсолутна вредност.
Решение. Цифрата на единиците на бројот $36^k=6^{2k}$ е еднаква на 6, а цифрата на единиците на бројот 5^l е еднаква на 5. Според тоа бројот $|6^{2k}-5^l|$ завршува на 1, кога $6^{2k}>5^l$ или на 9, кога $6^{2k}<5^l$. Равенството $6^{2k}-5^l=1$

не е можно, бидејќи од $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$ следува $5 \mid (6^k + 1)$, што не е можно. За $k = 1$ и $l = 2$ имаме $36^k - 5^l = 11$. Равенството $5^l - 36^k = 9$ не е можно, бидејќи $3 \nmid 5^l$.

Конечно, бараниот број е 11.

11. Нека a е цел број. Докажи дека не постојат цели броеви b и c, $c > 1$, за кои важи

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + ... + (a+99)^2 = b^c. \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека постојат цели броеви b и c, $c > 1$, такви што важи (1). По квадрирањето на (1) и средувањето на изразот на левата страна добиваме:

$$33(3a^2 + 300a + 50 \cdot 199) = b^c. \qquad (2)$$

Сега, $3 \mid b$ и бидејќи $c > 1$ заклучуваме дека $3^2 \mid b^c$. Од (2) следува дека $3^2 \mid 33(3a^2 + 300a + 50 \cdot 199)$, што не е можно бидејќи $3a^2 + 300a + 50 \cdot 199$ не е делив со 3.

12. Определи ги сите природни броеви n такви што збирот на цифрите на бројот $n!$ е еднаков на 9.

Решение. Нека x_n е збирот на цифрите на бројот $n!$. Забележуваме, дека $9 \mid n!$ ако и само ако $n \geq 6$. Понатаму,

$$6! = 720 \text{ и } x_6 = 9;\ 7! = 5040 \text{ и } x_7 = 9;$$
$$8! = 40320 \text{ и } x_8 = 9;\ 9! = 362880 \text{ и } x_9 = x_{10} > 9.$$

Нека $n \geq 11$ и $n! = \overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. Да претпоставиме дека

$$a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 = 9. \qquad (1)$$

Бидејќи за $n \geq 11$ бројот $n!$ е делив со 11, според критериумот за деливост со 11 добиваме

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^k a_k = 11m, \qquad (2)$$

каде $m \in \mathbb{Z}$ Бидејќи

$$\begin{aligned} -9 &= -(a_0 + a_1 + ... + a_k) \\ &\leq a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^k a_k \\ &= 11m \leq a_0 + a_1 + ... + a_k = 9, \end{aligned}$$

добиваме $m = 0$. Ако ги собереме неравенствата (1) и (2) имаме

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + ...) = 9,$$

што е противречност. Значи, бараните броеви се 6, 7 и 8.

13. Ако природниот број n има непарен број различни природни делители, сметајќи ги 1 и самиот број, тогаш n е квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Ако d е делител на бројот n, тогаш и $\frac{n}{d}$ е делител на бројот n. Според тоа, од различните делители d и $\frac{n}{d}$ формираме пар делители на бројот n и на овој начин можеме да одделиме парен број различни делители на n. Но, бројот на различните делители на n е непарен, па затоа ќе остане еден делител d' без свој пар. Во случајов имаме $d'=\frac{n}{d'}$, т.е. $n=d'^2$, што и требаше да се докаже. Не е можно $d'\neq\frac{n}{d'}$, бидејќи во таков случај и $\frac{n}{d'}$ ќе биде делител на n, па ќе имаме парен број делители на n, што противречи на условот на задачата.

14. Нека d и d', $d'>d$ се природни делители на природниот број n. Докажи, дека $d'>d+\frac{d^2}{n}$.

Решение. Бидејќи броевите $f=\frac{n}{d}$ и $f'=\frac{n}{d'}$ се природни, а $f>f'$, важи $f-f'\geq 1$, т.е.

$$1\leq\frac{n}{d}-\frac{n}{d'}=\frac{(d'-d)n}{dd'}<\frac{(d'-d)n}{d^2}.$$

Од последното неравенство следува неравенството $d'>d+\frac{d^2}{n}$.

15. Нека $n>1$ е природен број и нека $d_1,d_2,...,d_k$ се сите позитивни делители на бројот n, при што

$$1=d_1<d_2<...<d_k=n.$$

Нека $D=\sum_{i=1}^{k-1}d_id_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D<n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2.

Решение. а) Јасно, $n=d_id_{k+1-i}$, т.е. $\frac{d_i}{n}=\frac{1}{d_{k+1-i}}$, па затоа

$$\frac{D}{n^2}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_id_{i+1}}{n^2}=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{d_{k+1-i}d_{k-i}}\leq\sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_{k+1-i}-d_{k-i}}{d_{k+1-i}d_{k-i}}$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{d_{k-i}}-\frac{1}{d_{k+1-i}}\right)=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_k}=1-\frac{1}{n}<1,$$

што значи дека $D<n^2$.

б) Од решението под а) имаме

$$1 > \frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \geq \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2},$$

па затоа $d_1 = 1 < \frac{n^2}{D} \leq d_2$. Според тоа, ако D е делител на n^2, тогаш мора да важи $\frac{n^2}{D} = d_2$, па затоа $k = 2$. Значи, решение на задачата се сите природни броеви $n > 1$ кои имаат точно два позитивни делители, а тоа се простите броеви.

16. Нека $n_1, n_2, \ldots, n_k$ се сите природни делители на n, различни од 1 и n. Докажи, дека

$$\frac{2}{\log_k n}(\log_k n_1 + \log_k n_2 + \ldots + \log_k n_k) = k.$$

Решение. Броевите $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ги нумерираме така што $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$. Тогаш $n_1 n_k = n_2 n_{k-1} = \ldots = n_k n_1$, па затоа $n_1^2 n_2^2 ... n_k^2 = n^k$. Според тоа,

$$\frac{2}{\log_k n}(\log_k n_1 + \log_k n_2 + \ldots + \log_k n_k) = \frac{\log_k n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2}{\log_k n} = \frac{\log_k n^k}{\log_k n} = k.$$

17. Докажи дека 2014 е делител на $2012^9 + 2016^9$.

Решение. Ако искористиме дека за секои природни броеви m и n важи

$$m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2),$$

заклучуваме дека $m + n \mid m^3 + n^3$. Слично, $m^3 + n^3 \mid (m^3)^3 + (n^3)^3 = m^9 + n^9$, па затоа $m + n \mid m^9 + n^9$.

Значи, $2012 + 2016 \mid 2012^9 + 2016^9$ и како $2012 + 2016 = 2 \cdot 2014$, заклучуваме дека $2014 \mid 2012^9 + 2016^9$.

18. Докажи, дека за ниту еден природен број m бројот $1978^m - 1$ не е делив со $1000^m - 1$

Решение. Ако $1978^m - 1$ е делив со $1000^m - 1 = d$, тогаш и бројот

$$1978^m - 1000^m = 2^m (989^m - 500^m)$$

е делив со d. Последното не е можно, бидејќи d е непарен број и важи $989^m - 500^m < d$.

19. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $7^n - 1$ е делив со 6 и 8.

Решение. Бидејќи

$$7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + ... + 7 + 1)$$

добиваме дека $6\,|\,(7^n-1)$, за секој природен број n. Но, $7=8-1$, па затоа

$$7^n-1=(8-1)^n-1=8^n-\binom{n}{1}8^{n-1}+\binom{n}{2}8^{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}8\binom{n}{n-1}+(-1)^n-1$$
$$=8D+(-1)^n-1.$$

Значи, 7^n-1 е делив со 8 ако и само ако $(-1)^n-1=0$, т.е. ако и само ако $n=2k$. Конечно, бројот 7^n-1 е делив со 6 и 8 ако и само ако n е парен број.

20. Докажи дека бројот $2^{147}-1$ е делив со 343.

Решение. Бидејќи

$$343=7^3 \text{ и } 2^{147}-1=8^{49}-1=(8-1)(8^{48}+8^{47}+...+8+1)$$

доволно е да докажеме дека бројот $8^{48}+8^{47}+...+8+1$ е делив со 7^2. Ако ја искористиме Њутновата биномна формула добиваме

$$\begin{aligned}8^{48}+8^{47}+\ldots+8+1&=(7+1)^{48}+(7+1)^{47}+\ldots+(7+1)+1\\
&=7^{48}+\binom{48}{1}7^{47}+\binom{48}{2}7^{46}+\ldots+\binom{48}{47}7+1+\\
&\quad+7^{47}+\binom{47}{1}7^{46}+\binom{47}{2}7^{45}+\ldots+\binom{47}{46}7+1\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+7^3+\binom{3}{1}7^2+\binom{3}{2}7+1+\\
&\quad+7^2+\binom{2}{1}7+1+7+1+1\\
&=49n+7(48+47+...+3+2+1)+49\\
&=7^2(n+168+1),\end{aligned}$$

т.е. $7^2\,|\,(8^{48}+8^{47}+\ldots+8+1)$.

21. Докажи дека не постои природен број n таков што 6^n-1 е делител на 7^n-1.

Решение. Нека 6^n-1 е делител на 7^n-1. Според тоа, $6-1=5$ е делител на 7^n-1. Цифрата на единиците на бројот 7^n за $n\in\mathbb{N}$ може да биде 7, 9, 3, 1, 7, ... па затоа бројот 7^n-1 ќе биде делив со 5 ако и само ако $n=4k$ за некој $k\in\mathbb{N}$.

Сега да видиме за кој $k\in\mathbb{N}$ бројот $6^{4k}-1$ е делител на $7^{4k}-1$. Имаме,

$$6^{4k}-1=(6^{2k}-1)(6^{2k}+1)=(36^k-1)(6^{2k}+1)=35m,$$

за некој природен број m, па затоа $35\,|\,7^{4k}-1$, т.е. $7\,|\,7^{4k}-1$, што не е можно. Според тоа, не постои природен број n за кој 6^n-1 е делител на 7^n-1.

22. Даден е природен број n. Природниот број $a > n^2$ е таков што меѓу броевите $a+1, a+2, ..., a+n$ има содржател на секој од броевите $n^2+1, n^2+2, ..., n^2+n$. Докажи дека $a > n^4 - n^3$.

Решение. Нека $a_i(n^2+i)$ е содржател на бројот n^2+i кој е меѓу броевите $a+1, a+2, ..., a+n$. Од $a \geq n^2$ следува $a_1 \geq 1$. Да забележиме дека не може да важи $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, бидејќи во спротивно би било

$$n-1 \geq a_n(n^2+n) - a_1(n^2+1) \geq a_1(n-1),$$

што не е можно. Затоа $a_i > a_{i+1}$ за некој i, а тогаш

$$n-1 \geq a_i(n^2+i) - a_{i+1}(n^2+i+1) \geq a_i(n^2+i) - (a_i-1)(n^2+i+1) = n^2+i+1-a_i,$$

па затоа $a_i \geq n^2 - n + 3$. Тоа значи дека

$$a+n \geq (n^2-n+3)(n^2+i) > n^2(n^2-n+3),$$

од каде следува $a > n^4 - n^3$.

23. На таблата се запишани четири по парови различни цели броеви, секој од кои има апсолутна вредност поголема од 10^6. Познато е дека не постои природен број поголем од 1, кој е делител на секој од четирите запишани броеви. Павел во тетратката ги запишал шесте збирови на паровите броеви запишани на таблата, потоа ги поделил овие шест збирови на три парови и ги помножил броевите од секој пар. Дали е можно овие три производи да се еднакви?

Решение. Да. Ова важи, на пример, за броевите:

$$x = N^2 - 3N + 1,\ \ y = N^2 - N + 1,\ \ z = -3N^2 + 3N - 1,\ \ t = N^2 + N - 1,$$

каде N е природен број поголем од 10^6. Провери!

24. Определи ги сите природни броеви n такви што $8^n + n$ е делив со $2^n + n$.

Решение. Имаме, $2^n + n \mid 8^n + n^3$, за секој природен број n. Од условот на задачата имаме $2^n + n \mid 8^n + n$, па затоа $2^n + n \mid 8^n + n^3 - (8^n + n) = n^3 - n$.

Ако $n^3 - n = 0$, следува $n = 1$ е решение на задачата.

Ако $n^3 - n \neq 0$, тогаш $n^3 - n$ е природен број таков што $n^3 - n > 2^n + n$.

Ќе докажеме дека $2^n > n^3$ за $n \geq 10$.

За $n = 10$ важи $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$. Нека за сите природни броеви поголеми или еднакви на 10, а помали или еднакви на k важи $2^k > k^3$. Од претпоставката следува $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3$. Ќе докажеме дека за $k \geq 10$ важи $2k^3 \geq (k+1)^3$. Доволно е да докажеме дека $k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1$. Имаме

$$k^3 = k \cdot k^2 > 9k^2 = 3k^2 + 3k^2 + 3k^2 > 3k^2 + 3k + 1.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува $2^n > n^3$ за $n \geq 10$. Останува да се провери за кои вредности n од множеството $\{2,3,...,9\}$ важи $2^n + n \mid n^3 - n$. Добиваме дека $n = 1,2,4,6$ се природни броеви кои го исполнуваат условот на задачата.

25. Определи ги сите парови природни броеви a и b такви што $(a^3 + b)(b^3 + a)$ е степен на бројот 2.

Решение. Јасно, a и b се со иста парност. Ако $a = 2^r x$ и $b = 2^s y$, каде x и y се непарни броеви и $0 < r \leq s$, тогаш $b^3 + a = 2^r(2^{3s-r} y^3 + x)$, па затоа непарниот број $2^{3s-r} y^3 + x$ е степен на бројот 2, што е противречност. Значи, a и b се непарни.

Нека претпоставиме дека $a^3 + b = 2^m$ и $b^3 + a = 2^n$, при што $m \leq n$. Тогаш $a^3 + b$ е делител на броевите $b^3 + a$ и $a^9 + b^3 = (a^3 + b)^3 - 3a^3 b(a^3 + b)$, од каде добиваме дека $2^m = a^3 + b \mid a^9 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$. Бидејќи броевите $a, \frac{a^2+1}{2}$ и $\frac{a^4+1}{2}$ се непарни, следува дека $a^3 + b \mid 4(a^2 - 1)$. Оттука следува дека $a^3 < 4(a^2 - 1)$, т.е. $a < 4$.

Ако $a = 1$, тогаш $b + 1$ и $b^3 + 1$ се степени на бројот 2, па тоа е и бројот $\frac{b^3+1}{b+1} = b^2 - b + 1$, кој е непарен, па мора да важи $b^2 - b + 1 = 1$, т.е. $b = 1$.

Ако $a = 3$, тогаш $b + 3^3$ е делител на $4(3^2 - 1) = 32$, па добиваме $b = 5$.

Според тоа, единствени решенија (a,b) се $(1,1), (3,5)$ и $(5,3)$.

26. Определи природни броеви a и b за кои:

1) производот $ab(a+b)$ не е делив со 7,

2) бројот $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ е делив со 7^7.

Решение. Изразот $A = (a+b)^7 - a^7 - b^7$, го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} A &= 7ab[(a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2 b^2 (a+b)] \\ &= 7ab(a+b)(a^4 + 2a^3 b + 3a^2 b^2 + 2ab^3 + b^4) \\ &= 7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $ab(a+b)$ не е делив со 7, добиваме $7^3 \mid (a^2 + ab + b^2)$, односно

$$a^2+ab+b^2=7^3k\ .$$

За $k=1$ и $b=1$ добиваме $a^2+a+1=343$, т.е. $(a-18)(a+19)=0$, од каде што добиваме $a=18$. Паротот $a=18$ и $b=1$ ги задоволува условите од задачата.

27. Природните броеви, m,n,k се такви што бројот m^n е делив со n^m, а бројот n^k е делив со k^n. Докажи, дека бројот m^k е делив со k^m.

Решение. Ако a^c е делив со b^c, тогаш a е делив со b (зошто?) . Бидејќи m^n е делив со n^m добиваме дека m^{kn} е делив со n^{mk}. Бидејќи n^k е делив со k^n имаме дека n^{km} е дели со k^{nm}. Според тоа, $k^{nm}\,|\,n^{km}$ и $n^{mk}\,|\,m^{kn}$. Значи, $k^{nm}\,|\,m^{kn}$, односно $(k^m)^n\,|\,(m^k)^n$, т.е. $k^m\,|\,m^k$.

28. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n\,|\,2^n+1$.

Решение. Да ги разгледаме броевите $3^k, k=1,2,...$. За $k=1$ имаме $3\,|\,2^3+1$. Нека претпоставиме дека за некој $k\geq 1$ важи $3^k\,|\,2^{3^k}+1$. Тогаш

$$2^{3^{k+1}}+1=(2^{3^k}+1)(4^{3^k}-2^{3^k}+1)\,. \qquad (1)$$

Но, $4^{3^k}-2^{3^k}+1=(2^{3^k}+1)(2^{3^k}-2)+3$, т.е. $3\,|\,(4^{3^k}-2^{3^k}+1)$ и од индуктивната претпоставка и равенството (1) следува $3^{k+1}\,|\,2^{3^{k+1}}+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека броевите од видот 3^k, $k=1,2,3,...$ го задоволуваат условот на задачата.

29. Ако за природниот број n важи $n\,|\,(2^n+2)$ и $(n-1)\,|\,(2^n+1)$, тогаш и за бројот $n_1=2^n+2$ важи $n_1\,|\,(2^{n_1}+2)$ и $(n_1-1)\,|\,(2^{n_1}+1)$. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува дека $n-1$ е непарен, а n е парен број. Бидејќи $n_1=2^n+2=nk$, а $2^n+2=2(2^{n-1}+1)$ не е делив со 4 и n е парен, добиваме дека k е непарен. Тогаш

$$2^{n_1}+1=2^{nk}+1=(2^n+1)(2^{n(k-1)}-2^{n(k-2)}+...+1)$$

и $(n_1-1)\,|\,(2^{n_1}+1)$. Од условот $(n-1)\,|\,(2^n+1)$ следува дека

$$2^n+1=(n-1)m,$$

каде m е непарен број. Но, $(2^{n-1}+1)\,|\,(2^{(n-1)m}+1)$ и од

$$2(2^{(n-1)m}+1)=2^{(n-1)m+1}+2=2^{2^n+2}+2=2^{n_1}+2$$

следува $n_1\,|\,(2^{n_1}+2)$.

30. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n\,|\,(2^n+2)$.

Решение. Јасно, $2\,|\,(2^2+2)$. Тогаш од решението на претходната задача следува дека за секој член на низата $a_1=2,\ a_{k+1}=2^{a_k}+2,\ k=1,2,3,...$ важи $a_k\,|\,(2^{a_k}+2)$. Сега тврдењето следува од фактот дека броевите a_k, за $k=1,2,3,...$ се природни и дека $a_{k+1}>a_k$, за $k=1,2,3,...$.

31. Нека $m,n>1$ се природни броеви за кои важи $n\,|\,4^m-1$ и $2^m\,|\,n-1$. Докажи дека $n=2^m+1$.

Решение. Од $n\,|\,4^m-1$ следува дека постои природен број a таков што $4^m-1=an$. Од $2^m\,|\,n-1$ следува дека постои природен број b таков што $n-1=2^m b$. Според тоа,

$$4^m=an+1=a(2^m b+1)+1=2^m ab+a+1.$$

Јасно, $2^m\,|\,a+1$, па затоа $a=2^m c-1$ за некој природен број c. Според тоа,

$$4^m-1=(2^m c-1)(2^m b+1)=4^m bc+2^m(c-b)-1,\text{ т.е. } 4^m(bc-1)=2^m(b-c).$$

Равенството $2^m(bc-1)=b-c$ при услов $m>1$ е можна само ако $b=c=1$. Затоа $n=2^m b+1=2^m+1$.

32. Докажи дека за секој природен број n постои природен број k таков што 19^k-97 е делив со 2^n.

Решение. За $n=1,2$, на пример, тоа е бројот $k=2$, бидејќи $19^2-97=264$ е делив со 2 и 4.
Со математичка индукција ќе докажеме дека за $n\geq 3$ важи

$$19^{2^{n-2}}-1=2^n m_n\text{, каде } m_n \text{ е непарен број.}$$

За $n=3$ имаме $19^2-1=2^3\cdot 45$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека за секој природен број $k\in\{2,3,...,n\}$ важи $19^{2^{k-2}}-1=2^k m_k$, каде m_k е непарен број. Сега,

$$19^{2^{k-1}}-1=(19^{2^{k-2}})^2-1=(2^k m_k+1)^2-1=2^{k+1}m_k(2^{k-1}m_k+1)=2^{k+1}m_{k+1},$$

каде $m_{k+1}=m_k(2^{k-1}m_k+1)$ е непарен број.

Повторно со математичка индукција ќе докажеме дека за секој природен број n постои природен број k таков што 19^k-97 е делив со 2^n.

Ако $n=3$, тогаш тоа е бројот $k=2$. Нека претпоставиме дека за секој $m\in\{1,2,...,n\}$ постои природен број k_m таков што $19^{k_m}-97$ е делив со 2^m. Според тоа, постои природен број k_n таков што $19^{k_n}-97$ е делив со 2^n, т.е. постои природен број t таков што $19^{k_n}-97=2^n t$. Ако t е парен број, тогаш $19^{k_n}-97$ е делив со 2^{n+1}, од каде следува $k_{n+1}=k_n$. Ако t е непарен број, тогаш земаме $k_{n+1}=k_n+2^{n-2}$ и добиваме:

$$\begin{aligned}19^{k_{n+1}}-97&=19^{2^{n-2}}(19^{k_n}-97)+97(19^{2^{n-2}}-1)=19^{2^{n-2}}\cdot 2^n t+97\cdot 2^n m_n\\&=2^n(19^{2^{n-2}}t+97m_n)=2^{n+1}s',\end{aligned}$$

бидејќи $s=19^{2^{n-2}}t+97m_n$ е парен број.

33. Ако $k>1$ е природен број, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $n\,|\,(k^n+1)$. Докажи!

Решение. Нека k е парен број. Ќе докажеме, дека за секој $n=(k+1)^m$, $m=1,2,...$ важи $n\,|\,(k^n+1)=k^{(k+1)^m}+1=A_m$. За $m=1$ имаме

$$A_1=k^{k+1}+1=(k+1)(k^k-k^{k-1}+...+1),$$

што значи дека тврдењето важи. Нека тврдењето важи за некој $m\geq 1$, т.е. нека $A_m=(k+1)^m t$. Имаме

$$\begin{aligned}A_{m+1}&=k^{(k+1)^{m+1}}+1=[k^{(k+1)^m}]^{k+1}+1=(A_m-1)^{k+1}+1\\&=A_m[(A_m-1)^k-(A_m-1)^{k-1}+...+1]=A_m(A_m u+k+1)\\&=(k+1)^m t[(k+1)^m tu+k+1]=(k+1)^{m+1}t[(k+1)^{m-1}tu+1],\end{aligned}$$

што значи дека $(k+1)^{m+1}\,|\,A_{m+1}$, па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број m.

Нека $k>1$ е непарен број и да ставиме $n_1=2$ и $n_{m+1}=k^{n_m}+1$, за $m=1,2,...$. Очигледно $n_1<n_2<...<n_m<n_{m+1}<...$.

Со индукција по m ќе докажеме дека $n_m\,|\,(k^{n_m}+1)$. Јасно, тврдењето важи за $m=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $m>1$, т.е. дека $k^{n_m}+1=n_m t$, каде t е непарен број, бидејќи n_m е парен број и затоа $k^{n_m}+1$ не е делив со 4. Според тоа,

$$k^{n_{m+1}}+1=k^{k^{n_m}+1}+1=k^{n_m t}+1=(k^{n_m}+1)(k^{n_m(t-1)}-k^{n_m(t-2)}+...+1)=n_{m+1}u\,,$$

што значи дека $n_{m+1}\,|\,(k^{n_{m+1}}+1)$, па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број m.

34. Нека k е непарен природен број. Докажи, дека $2^{n+2}\,|\,(k^{2^n}-1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Лесно се покажува дека $2^3\,|\,(k^2-1)$, т.е. тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека за некој $n=m$ важи $2^{m+2}\,|\,(k^{2^m}-1)$. Тогаш $k^{2^m}=2^{m+2}a+1$, за некој $a\in\mathbb{N}$, па затоа

$$k^{2^{m+1}}=(2^{m+2}a+1)^2=2^{2m+4}a^2+2^{m+3}a+1=2^{m+3}(2^{m+1}a^2+a)+1\,,$$

т.е. $2^{m+3}\,|\,(k^{2^{m+1}}-1)$, што значи дека тврдењето важи за $n=m+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $2^{n+2}\,|\,(k^{2^n}-1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

35. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $(2^n-1)^2\,|\,(2^{(2^n-1)n}-1)$.

Решение. Од Њутновата биномна формула следува

$$(k+1)^k-1=\binom{k}{1}k+\binom{k}{2}k^2+....+\binom{k}{k}k^k\,,$$

и како $\binom{k}{1}=k$, добиваме дека $k^2\,|\,((k+1)^k-1)$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Сега, за $k=2^n-1$ добиваме дека $(2^n-1)^2\,|\,(2^{(2^n-1)n}-1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

36. Нека a е природен број од облик $4s+1$. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ збирот

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}a+\binom{n}{5}a^2+\binom{n}{7}a^3+...$$

е делив со 2^{n-1}.

Решение. Ставаме

$$A_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}a+\binom{n}{5}a^2+\binom{n}{7}a^3+...\,,\text{ каде } a=4s+1,\; n=1,2,....$$

Да означиме $\alpha=1+\sqrt{a}$, $\beta=1-\sqrt{a}$. Од Њутновата биномна формула следува

$$\begin{aligned}A_n&=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}a+\binom{n}{5}a^2+\binom{n}{7}a^3+...=\frac{(1+\sqrt{a})^n-(1-\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{a}}\\&=\frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha+\beta)}{2\sqrt{a}}-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{2\sqrt{a}}\\&=2A_{n-1}+(a-1)A_{n-2}=2A_{n-1}+4sA_{n-2}\,,\end{aligned}$$

т.е. точна е рекурентната формула

$$A_n=2A_{n-1}+4sA_{n-2}\,. \qquad (1)$$

Јасно, $2^{1-1}=1\,|\,A_1$ и $2^{2-1}=2\,|\,2=A_2$. Нека претпоставиме дека $2^{k-1}\,|\,A_k$, за секој $k<n$. Сега од $2^{n-3}\,|\,A_{n-2}$, $2^{n-2}\,|\,A_{n-1}$ и од (1) следува дека $2^{n-1}\,|\,A_n$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $2^{n-1}\,|\,A_n$.

37. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$ се такви што $a^2+b^2=c^2$. Докажи дека за секој $k\geq 2$ броевите $E_k=a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}$ и $F_k=(ab)^{2^k}+(bc)^{2^k}+(ca)^{2^k}$ се деливи со бројот $D=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$.

Решение. Прво ќе докажеме дека $D\in\mathbb{N}$. Навистина, ако $c=2k$, тогаш a и b и двата се парни или и двата се непарни броеви, па затоа $a^4+b^4+c^4$ е парен број. Ако $c=2k+1$, тогаш a^2+b^2 е непарен број, па затоа $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$ е непарен број, што значи дека $a^4+b^4+c^4$ е парен број. Според тоа, во секој случај $D\in\mathbb{N}$.

Ако искористиме дека $2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(a^4+b^4)=c^4-(a^4+b^4)$, добиваме $D=c^4-a^2b^2$, па затоа за $k=2$ имаме

$$\begin{aligned}F_2&=(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4=a^4b^4+c^4(a^4+b^4)\\&=a^4b^4+c^4(a^4+b^4+c^4)-c^8=2Dc^4+a^4b^4-c^8\\&=2Dc^4+(a^2b^2+c^4)(a^2b^2-c^4)=D(c^4-a^2b^2)\\&=D^2,\end{aligned}$$

па затоа $D\,|\,F_2$ и како $E_2=2D$ добиваме дека $D\,|\,E_2$. Сега тврдењето на задачата следува индуктивно од равенствата

$$E_{k+1}+2F_k=E_k^2 \text{ и } F_{k+1}+2(abc)^{2^k}E_k=F_k^2,$$

чија точност се покажува со непосредна проверка.

38. Определи ја максималната вредност за k таква што меѓу k избрани броеви од $\{1,2,...,2n\}$ не постојат два такви што едниот од нив е делител на другиот.

Решение. Секој природен број може да се претстави во облик $2^a c$ каде $a\in\mathbb{N}$ и $c\in\mathbb{N}$ е непарен број.

Нека $a_1,a_2,...,a_k$ се природни броеви од множеството $\{1,2,3,...,2n\}$. Секој од нив може да се запише во облик $a_i=2^{n_i}b_i$, каде b_i е непарен и $1\leq b_i\leq 2n-1$. Ако $k\geq n+1$, тогаш според принципот на Дирихле постојат i,j, $1\leq i<j\leq k$ такви што $b_i=b_j=b$.

Ако $n_i > n_j$, тогаш $a_j \mid a_i$. Ако $n_i > n_j$, тогаш $a_i \mid a_j$.

Според тоа, за максималната вредност на k имаме $k \le n$. Ако избереме било кои k, $1 < k \le n$ броеви $a_1, a_2, ..., a_k$ од $\{n+1, n+2, ..., 2n\}$ тогаш не постојат два од нив такви што едниот е делител на другиот. Навистина, ако $n+p$, $n+l \in \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ и $n+p < n+l$, тогаш $1 < \frac{n+l}{n+p} < \frac{2n}{n+p} < \frac{2n}{n+1} < 2$, односно $\frac{n+l}{n+p}$ не е природен број.

Значи, најголема вредност е $k = n$.

39. Нека се a и b природни броеви, такви што $a^2 + b^2$ е делив со $ab+1$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Нека $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \in \mathbb{N}$ и k не е точен квадрат на природен број. Да забележиме дека притоа не може да биде $a = b$, бидејќи тогаш од

$$k = (2-k)a^2, \text{ за } k \ge 2$$

ќе следува $k \le 0$, а $k = 1$ е точен квадрат.

Да претпоставиме, на пример, дека $a > b$ и дека a е најмалиот природен број таков што за парот (a,b) важи $a^2 + b^2 = k(ab+1)$. Со a' да го означиме другото решение на последната квадратна равенка по a. Од $a + a' = kb$ следува дека $a' \in \mathbb{Z}$ и од $k(a'b+1) = a'^2 + b^2$ следува $a' \ge 0$. Но, од $aa' = b^2 - k$ следува $a' \ne 0$, бидејќи во спротивно k ќе биде точен квадрат. Значи, $a' \in \mathbb{N}$ и притоа $aa' = b^2 - k < ab$, па затоа $a' < b$, т.е. (b, a') е решение на дадената равенка во множеството природни броеви, за кое $b < a$, што противречи на претпоставката за минималноста на a.

40. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab = 2^n - 1$, докажи дека бројот $ab - (a-b) - 1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

Решение. *Прв начин*. Нека $a = 2^r a_1 - 1$ и $b = 2^s b_1 + 1$, каде a_1 и b_1 се непарни природни броеви и $r, s \ge 1$. Тогаш

$$2^n - 1 = ab = (2^r a_1 - 1)(2^s b_1 + 1) = 2^{r+s} a_1 b_1 + 2^r a_1 - 2^s b_1 - 1,$$

па затоа $2^r \mid 2^s b_1$ и $2^s \mid 2^r a_1$, што е можно ако и само ако $r = s$. Според тоа,

$$ab - (a-b) - 1 = (a+1)(b-1) = 2^{2r} a_1 b_1,$$

каде $a_1 b_1$ е непарен природен број.

Втор начин. За секој природен број c со $v_2(c)$ го означуваме најголемиот ненегативен цел број d за кој 2^d е делител на c. Бидејќи

$$A = ab - a + b - 1 = (a+1)(b-1) > 0$$

и a е непарен број добиваме

$$v_2(A) = v_2((a+1)(b-1)a) = v_2((a+1)(2^n - a - 1)) .$$

Бидејќи $a+1 \in (0, 2^n)$ е парен, лесно се добива дека

$$v_2(a+1) = v_2(2^n - (a+1)) > 0 .$$

Според тоа, $v_2(A) = 2v_2(a+1)$ е парен број, со што задачата е решена.

41. Определи ги сите природни броеви $n > 1$ такви што $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!}$ е природен број.

Решение. Од

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \frac{n! + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3 + \ldots + n(n-1) + n + 1}{n!} = \frac{(n-1)S + n + 1}{n!}$$

добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!} = \frac{(n-1)S + n + 1}{(n-1)!} .$$

За бројот $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!}$ да е природен број потребно е $(n-1)! \mid (n-1)S + n + 1$. Понатаму, од $n-1 \mid (n-1)!$ и $n-1 \mid (n-1)S$ следува дека треба $n-1 \mid n+1 = n-1+2$, што значи дека треба $n-1 \mid 2$. Според тоа, можни решенија се $n = 2$ или $n = 3$. Со непосредна проверка се уверуваме дека овие броеви навистина се решенија на задачата.

42. Определи ги сите природни броеви кои не може да се претстават во облик

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}, \tag{1}$$

каде a и b се природни броеви.

Решение. Нека N е природен број за кој постојат природни броеви a и b такви што $N = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$. Тогаш

$$N - 2 = \frac{a}{b} - 1 + \frac{a+1}{b+1} - 1 = \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1} = (a-b)(\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1}) = \frac{(a-b)(2b+1)}{b(b+1)} .$$

Бидејќи $N - 2 \in \mathbb{Z}$, $b \nmid (2b+1)$ и $(b+1) \nmid (2b+1)$, следува $(2b+1) \mid (N-2)$.

Бројот $N-2$ нема непарен делител $2b+1$, $b \in \mathbb{N}$ ако $N - 2 = -1$ или $N - 2 = 2^k$, каде $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $N = 1$ или $N = 2^k + 2$, каде $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Според тоа, природните броеви N од претходниот облик не може да се претстават во обликот (1).

Од друга страна ако N не е од облик $N=1$ или $N=2^k+2$, за $k\geq 0$, $k\in\mathbb{N}$, и $2b+1$ е делител на $N-2$ за некој $b\in\mathbb{N}$, тогаш за $m=\frac{N-2}{2b+1}$ и

$$a=b+mb(b+1)$$

имаме

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}=\frac{b+mb(b+1)}{b}+\frac{b+mb(b+1)+1}{b+1}=1+m(b+1)+1+mb$$
$$=2+m(2b+1)=2+\frac{N-2}{2b+1}(2b+1)=N.$$

43. Дадена е бесконечна строго мнотоно растечка низа природни броеви $x_1=1,$ $x_2,x_3,...$ таква што за секој природен број s важи $x_{s+1}-x_s\leq 3$. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n за кои x_m е делител на x_n.

Решение. Доволно е да докажеме дека некој член на низата е делител на некој друг член на низата (зошто?). Од условот следува дека меѓу секои три последователни природни броеви барем еден е член на низата.
Нека a е член на низата и да ги разгледаме броевите

$$b=a+a(a+1)(a+2),\ b+1=a+1+a(a+1)(a+2)\text{ и }$$
$$b+2=a+2+a(a+1)(a+2)\ .$$

Бидејќи $a|b$, ако b е член на низата, тогаш тврдењето е докажано. Нека b не е член на низата. Тогаш еден од броевите $b+1$ или $b+2$ е член на низата. Нека $b+1$ е член на низата (вториот случај се разгледува аналогно). Да ги разгледаме броевите

$$c=b+b(b+1)(b+2),\ c+1=b+1+b(b+1)(b+2)\text{ и }c+2=b+2+b(b+1)(b+2).$$

Ако c е член на низата, тогаш $a|c$ и тврдењето е докажано, а ако $c+1$ е член на низата, тогаш $b+1|c+1$ и тврдењето е докажано. Затоа, нека $c+2$ е член на низата. Да ги разгледаме броевите

$$d=c+c(c+1)(c+2),\ d+1=c+1+c(c+1)(c+2)\text{ и }d+2=c+2+c(c+1)(c+2).$$

Ако d е член на низата, тогаш $a|d$ и тврдењето е докажано. Ако $d+1$ е член на низата, тогаш $b+1|d+1$ и тврдењето е доказано и ако $d+2$ е член на низата, тогаш $c+2|d+2$ и тврдењето е докажано.

44. Определи ги сите природни броеви m и n такви што n^m-m е делител на бројот m^2+2m.

Решение. Од $n^m-m|m^2+2m$ и $m^2+2m\neq 0$ следува $n^m-m\leq m^2+2m$.

Ако $n=1$, тогаш $1-m|m^2+2m\ \Leftrightarrow\ 1-m|(1-m)^2-4(1-m)+3\Leftrightarrow 1-m|3$.

Значи, $1-m\in\{\pm1,\pm3\}$. Бидејќи m е природен број следува дека $m=2$ или $m=4$, т.е. $(m,n)\in\{(2,1,(4,1)\}$.

Ако $n\geq 2$, тогаш $2^m-m\leq n^m-m\leq m^2+2m$, т.е. $m^2+3m\geq 2^m$. Ќе докажеме дека $2^m>m^2+3m$, за $m\geq 6$.

За $m=6$ имаме $2^6=64>54=6^2+3\cdot 6$. Нека за $k\geq 6$ важи $2^k>k^2+3k$. Имаме :

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\cdot 2^k>2(k^2+3k)=2k^2+6k\\&=k^2+5k+k^2+k\geq k^2+5k+42\\&>k^2+5k+4=(k+1)^2+3(k+1),\end{aligned}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $m\geq 6$. Сега, со непосредна проверка кога $m\in\{1,2,3,4,5\}$ се добива за кои вредности на n важи $n^m-m|m^2+2m$, т.е. се добива $(m,n)\in\{(1,2),(1,4),(2,2),(3,2),(4,2)\}$.

Конечно, $(m,n)\in\{(2,1),(4,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,2),(4,2)\}$

45. Определи природни броеви a, b и c такви, што

$$1\leq a<b<c \text{ и } abc\,|\,ab+bc+ca+a+b+c.$$

Решение. Нека a,b,c се природни броеви такви што $1\leq a<b<c$ и $abc\,|\,ab+bc+ca+a+b+c$. Нека $d=\frac{ab+bc+ca+a+b+c}{abc}$, т.е.

$$d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}.$$

Од условот $1\leq a<b<c$, добиваме дека $b\geq 2$ и $c\geq 3$, па според тоа

$$d\leq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2\frac{5}{6}<3.$$

Бидејќи d е природен број добиваме $d=1$ или $d=2$.

Нека a е природен број таков што $a\geq 3$. Од условот $1\leq a<b<c$ добиваме $b\geq 4$ и $c\geq 5$, па затоа

$$d\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{59}{60}<1.$$

Според тоа $a=1$ или $a=2$ и $d=1$ или $d=2$.

Можни се четири случаи.

1) $a=1$, $d=2$. Равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот $bc-2b-2c=1$, од каде добиваме $(b-2)(c-2)=5$. Бидејќи $b<c$, од последната равенка следува $b-2=1$ и $c-2=5$, т.е. $b=3$ и $c=7$. Значи, $a=1, b=3, c=7$ и $d=2$ е едно решение.
2) $a=1$, $d=1$. Во овој случај равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот $bc=bc+1+b+c+b+c$, т.е. $2b+2c+1=0$, што не е можно.

3) $a=2$, $d=2$. Равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот $4bc=2+b+c+2b+2c+bc$, т.е. $3(bc-b-c)=2$, што не е можно.
4) $a=2$ и $d=1$. Тогаш равенството $abcd=a+b+c+ab+bc+ca$ го добива обликот $2bc=2+b+c+2b+bc+2c$, т.е. $(b-3)(c-3)=11$. Бидејќи $b<c$, од последната равенка добиваме $b-3=1$ и $c-3=11$, т.е. $b=4$ и $c=14$. Во овој случај решение е $a=2, b=4, c=14$ и $d=1$.

Значи, решенија се $a=1, b=3, c=7, d=2$ и $a=2, b=4, c=14, d=1$.

46. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што $1<a<b<c$ и $abc-1$ е делив со $(a-1)(b-1)(c-1)$.

Решение. *Прв начин*. Нека $R(a,b,c)=\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$, $1<a<b<c$, $a,b,c\in\mathbb{N}$.

Функцијата R ја запишуваме во обликот

$$R(a,b,c)=1+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}+\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(c-1)(a-1)}.$$

Од дефиницијата на функцијата $R(a,b,c)$ следува:

1) $R(a,b,c)>1$ и $R(a,b,c)\le R(a',b',c')$, за $a\ge a'>1, b\ge b'>1, c\ge c'>1$.
2) Ако $R(a,b,c)$ е природен број, тогаш a,b и c имаат иста парност. Навистина, ако еден од броевите a,b или c е парен, тогаш $abc-1$ е непарен број, па затоа $(a-1)(b-1)(c-1)$ мора да е непарен број, што значи дека и другите два броја мора да се парни. Ако еден од броевите a,b или c е непарен, тогаш $(a-1)(b-1)(c-1)$ е парен број, па затоа $abc-1$ мора да е парен број, што значи дека и другите два броја мора да се непарни.
3) Ако $R(a,b,c)$ е природен број, а броевите a,b,c се парни, тогаш $R(a,b,c)$ е непарен број.

Ако $a\ge 4$, тогаш $1<R(a,b,c)\le R(4,6,8)=\frac{4\cdot 6\cdot 8-1}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{191}{105}<2$, па во овој случај $R(a,b,c)$ не може да биде цел број, т.е. во овој случај задачата нема решение.

За $a=3$, имаме $1<R(3,b,c)\le R(3,5,7)=\frac{3\cdot 5\cdot 7-1}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{104}{48}<3$. Сега

$$R(3,b,c)=\frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}=2,$$

па се добива дека $(b-4)(c-4)=11$ и $b=5$, $c=15$.

За $a=2$, имаме $1<R(2,b,c)\le R(2,4,6)=\frac{2\cdot 4\cdot 6-1}{1\cdot 3\cdot 5}=\frac{47}{15}<4$. Од 2) и 3) следува $R(2,b,c)=3$, т.е. $(b-3)(c-3)=5$ и тогаш $b=4$, $c=8$.

Според тоа, решенија се (3,5,15) и (2,4,8).

Втор начин. Ако бараните природни броеви ги задоволуваат условите на задачата, тогаш

$$b \geq a+1, \ \ c \geq b+1 \geq a+2 \tag{1}$$

и постои цел број $k \geq 1$ таков што

$$abc-1 = k(a-1)(b-1)(c-1) \ . \tag{2}$$

Од друга страна $abc > 0$, т.е. $\frac{1}{abc} > 0$, па од (1) и (2) непосредно следува

$$\begin{aligned} 1 > 1-\tfrac{1}{abc} &= k(1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{b})(1-\tfrac{1}{c}) \\ &\geq k(1-\tfrac{1}{a})(1-\tfrac{1}{a+1})(1-\tfrac{1}{a+2}) \\ &= k\tfrac{(a-1)a(a+1)}{a(a+1)(a+2)} = k\tfrac{a-1}{a+2}. \end{aligned}$$

Неравенството $1 > k\frac{a-1}{a+2}$ можеме да го запишеме во обликот $ka-a-k-2<0$ или $(k-1)(a-1) < 3$. Бидејќи $a > 1$ и $k > 1$ добиваме или

$$(k-1)(a-1) = 1 \tag{3}$$

или

$$(k-1)(a-1) = 2 \ . \tag{4}$$

Од (3) имаме $k = a = 2$, што не е можно, бидејќи притоа левата страна на (2) е непарна, а десната е парна.

Од (4) имаме или $k-1 = 2$, $a-1 = 1$ или $k-1 = 1$, $a-1 = 2$. Во првиот случај $k = 3$, $a = 2$, што според (2) значи $2bc-1 = 3(b-1)(c-1)$. Последното равенство можеме да го запишеме во видот

$$bc-3(b+c)+4 = 0, \text{ т.е. } (b-3)(c-3) = 5.$$

Бидејќи според условот на задачата $2 < b < c$ имаме $b-3 = 1$ и $c-3 = 5$. Значи, едно решение е $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$.

Случајот $k-1 = 1$, $a-1 = 2$ се разгледува аналогно. Тогаш $k = 2$, $a = 3$ и од (2) имаме

$$3bc-1 = 4(b-1)(c-1) \text{ или } (b-4)(c-4) = 11.$$

Значи, второ решение е $a = 3$, $b = 5$, $c = 11$.

47. Даден е природен број a. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена на следниот начин: $a_0 = a,$ ако

$$a_n = c_0 + 10c_1 + 10^2 c_2 + \ldots + 10^k c_k, \ \ c_i \in \{0,1,\ldots,9\},$$

тогаш

$$a_{n+1} = 2c_0 + c_1 + 10c_2 + \ldots + 10^{k-1} c_k \ .$$

Кои броеви во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се повторуваат бесконечно многу пати?

Решение. За произволен n нека $a_n = 10A + c_0$. Тогаш од дефиницијата на низата имаме $a_{n+1} = A + 2c_0$. Од овде следува дека $2a_n - a_{n+1} = 19A$, т.е. важи *i*) $19|a_n$ ако и само ако $19|a_{n+1}$.

Исто така, важи $a_n-a_{n+1}=9A-c_0$. Затоа за $A\geq 1$ имаме $a_n-a_{n+1}\geq 0$ при што равенство важи за $A=1$ и $c_0=9$. Со други зборови

ii) Ако е $a_n\geq 10$ и $a_n\neq 19$, тогаш $a_n>a_{n+1}$.

Од *ii*) следува дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго опаѓа додека некој нејзин член не стане помал од 20. Ако е тој член еднаков на 19 (а според *i*) тоа е можно само ако $19|a_0$) и сите членови ќе бидат еднакви на 19. Ако е тој член помал од 19, низата понатаму станува периодична со период 18 во која се појавуваат сите броеви од множеството $\{1,2,...,18\}$, (провери!).

Значи, ако $19|a$ во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно многу пати се појавува само бројот 19, а ако $a\neq 19$, тогаш во низата бесконечно многу пати се појавуваат сите броеви 1, 2,..., 18 и само тие.

48. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви, што $m|(n^2+1)$ и $n|(m^2+1)$?

Решение. Ќе докажеме, дека сите парови од видот $(n,m)=(u_{2k-1},u_{2k+1})$, каде u_s е $s-$тиот број на Фибоначи го задоволува условот на задачата. Со индукција по $k\geq 1$ лесно се докажува, дека за броевите на Фибоначи е точно равенството $u_{2k+1}^2+1=u_{2k-1}u_{2k+3}$.

Навистина, $u_3^2+1=2^2+1=u_1u_5$ и ако $u_{2k-1}^2+1=u_{2k-3}u_{2k+1}$, тогаш бидејќи

$$u_{2k+3}=u_{2k+2}+u_{2k+1}=2u_{2k+1}+u_{2k}=3u_{2k+1}-u_{2k-1},$$

добиваме

$$\begin{aligned}u_{2k-1}u_{2k+3}&=u_{2k-1}(3u_{2k+1}-u_{2k-1})\\&=3u_{2k-1}u_{2k+1}-u_{2k-1}^2\\&=3u_{2k-1}u_{2k+1}-(u_{2k-3}u_{2k+1}-1)\\&=u_{2k+1}(3u_{2k-1}-u_{2k-3})+1\\&=u_{2k+1}^2+1.\end{aligned}$$

Од добиеното равенство следува, дека

$$u_{2k-1}\,|\,(u_{2k+1}^2+1) \text{ и } u_{2k+1}\,|\,(u_{2k-1}^2+1).$$

49. Определи ги сите природни броеви x и y такви што $y|x^2+1$ и $x^2|y^3+1$.

Решение. Ако $x=y$, тогаш $x=y=1$ е едно решение на задачата. Исто така, ако $y=2$, тогаш $x=1$ или $x=3$. Според тоа, до сега имаме три решенија $(1,1),(1,2),(3,2)$.

Нека сега (x,y) е решение такво што $x\neq y$ и $y>2$. Тогаш броевите $\frac{x^2+1}{y}$ и $\frac{y^3+1}{x^2}$ се природни и нивниот производ исто така е природен број. Имаме:

$$\frac{x^2+1}{y}\cdot\frac{y^3+1}{x^2}=y^2+\frac{x^2+y^3+1}{x^2y},$$

па затоа и бројот $\frac{x^2+y^3+1}{x^2y}$ исто така е природен. Но, тогаш

$$\begin{aligned} x^2+y^3+1\geq x^2y \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(y-1)\leq y^3+1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2\leq\frac{y^3+1}{y-1}=y^2+y+1+\frac{2}{y-1}\\ &\Rightarrow \quad x^2\leq y^2+y+2\\ &\Rightarrow \quad x^2\leq(y+1)^2\\ &\Rightarrow \quad x\leq y+1.\end{aligned}$$

Значи, ако (x,y) е решение такво што $x\neq y$ и $y>2$, тогаш $x<y$. Понатаму, од $y\,|\,x^2+1$ следува $x^2+1=ya$, за некој природен број a. Очигледно $x>1$. Ако $a\geq x$, тогаш

$$ya\geq x(x+1)=x^2+x>x^2+1,$$

што не е можно. Значи, $a<x$. Од равенството $x^2+1=ya$ следува дека $a\,|\,x^2+1$, $y=\frac{x^2+1}{a}$ и

$$y^3+1=\frac{(x^2+1)^3}{a^3}+1=\frac{(x^2+1)^3+a^3}{a^3},$$

па затоа $x^2\,|\,\frac{(x^2+1)^3+a^3}{a^3}$, од каде следува $x^2\,|\,(x^2+1)^3+a^3$, т.е. $x^2\,|\,a^3+1$.

Според тоа, $a\,|\,x^2+1$, $x^2\,|\,a^3+1$ и $a<x$, па затоа $a\leq 2$. Значи, проблемот се сведува на следниве случаи:

1) $a=1$ и тогаш $y=x^2+1$, т.е. $x^2=y-1$ и $y-1\,|\,y^3+1$. Но,

$$y^3+1=y^3-1+1=(y-1)(y^2+y+1)+2,$$

па затоа $y-1\,|\,2$, од каде следува $y=3$. Со непосредна проверка се покажува дека ова не е решение.

2) $a=2$ и тогаш $2y=x^2+1$, т.е. $x^2=2y-1$ и $2y-1\,|\,y^3+1$, па затоа важи $2y-1\,|\,8y^3+8$. Сега, од

$$8y^3+8=(2y-1)(4y^2+4y+1)+9$$

следува $2y-1\,|\,9$. Но, $y>2$, т.е. $2y-1>3$, па добиваме $y=5$, од каде следува $x=3$.

Значи, решенија на задачата се $(1,1),(1,2),(3,2),(3,5)$.

50. Дадена е низата $x_1=1$, $x_2=4$ и $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n, n\geq 1$. Определи ги сите природни броеви m такви, што бројот $3x_n^2+m$ е точен квадрат за секој природен број n.

Решение. Карактеристичната равенка на дадената низа е $x^2-4x+1=0$ и нејзини решенија се $x_{1/2}=2\pm\sqrt{3}$, Според тоа, низата е од видот

$$x_n=A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n,$$

за некои константи A и B. Ако ги искористиме почетните услови $x_1=1$, $x_2=4$ наоѓаме $A=-B=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, т.е.

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n].$$

Сега

$$3x_n^2+1=\tfrac{1}{4}((2+\sqrt{3})^{2n}+(2-\sqrt{3})^{2n})=[\tfrac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)]^2=y_n^2,$$

каде $y_n=\frac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)$ е природен број. Според тоа, $m=1$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои $m\neq 1$ кој исто така ги задоволува условите на задачата. Тогаш

$$3x_n^2+m=y_n^2+(m-1)=z_n^2,\ (z_n>y_n\geq 0)$$

е точен квадрат за секој n. Значи,

$$m-1=z_n^2-y_n^2=(z_n-y_n)(z_n+y_n)$$

има бесконечно многу делители, што не е можно. Конечно, единстено решение на задачата е $m=1$.

51. Определи ги сите природни броеви a, b и c, за кои е исполнето равенството $a!b!=a!+b!+c!$.

Решение. Повеќе пати ќе ги искористиме очигледните тврдења:

За секои два природни броја m *и* n*, важи* $m!|n!$ *ако и само ако* $m\leq n$.

За секои три природни броеви k, m *и* n*, од кои* k *е најмалиот, важи* $\frac{m!}{k!}|\frac{n!}{k!}$ *ако и само ако* $m\leq n$.

Нека $a!b!=a!+b!+c!$. Без ограничување на општоста можеме да земеме, дека $a\leq b$. Тогаш $a!|b!$ и следствено $a!|c!$, т.е. $a\leq c$. Сега равенството $a!b!=a!+b!+c!$ е еквивалентно на $b!=1+\frac{b!}{a!}+\frac{c!}{a!}$. Во случајов $b!\geq 3$, од каде следува $b\geq 3$. Ќе разгледаме два случаја:

1) $c \le b$. Тогаш $c!|b!$ и $\frac{c!}{a!}|\frac{b!}{a!}$, од каде следува $\frac{c!}{a!}|1$, т.е. $c!=a!$. Значи, $b!=2+\frac{b!}{a!}$, па затоа $\frac{b!}{a!}|2$, т.е. $\frac{b!}{a!}=1$ или $\frac{b!}{a!}=2$. Имаме $b!=3$ или $b!=4$, што не е точно за ниту еден природен број b и затоа случајот $c \le b$ не е можен.

2) $b<c$. Аналогно на првиот случај добиваме $a!=b!$ и $b!=2+\frac{c!}{b!}$. Бидејќи $b \ge 3$, важи $3|b!$. Од друга страна 3 не е делител на 2, па значи 3 не е делител на $\frac{c!}{b!}$. Оттука $c \le b+2$, бидејќи во спротивно

$$\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)(b+3)...c,$$

а $3|(b+1)(b+2)(b+3)$. Значи, $c=b+1$ или $c=b+2$. Ако $c=b+1$, тогаш $b!=3+b$ и во случајов $b|3$, па затоа $b=3$. Ако $c=b+2$ имаме

$$\frac{c!}{b!}=(b+1)(b+2)=b^2+3b+2 \text{ и } b!=2+\frac{c!}{b!}=b^2+3b+4.$$

Така $b|4$ и бидејќи $b \ge 3$, тогаш $b=4$, што не е можно, бидејќи

$$4!=24 \ne 4+12+16.$$

Добиваме, дека единствената можност е $a=b=3$ и $c=4$, што е и решение на задачата, бидејќи $3!3!=36=3!+3!+4!$.

52. Определи го трицифрениот број n кој при делење со 11 дава број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на бројот n.

Решение. Бројот n е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $n=11u$, каде $10 \le u \le 90$, $u \in \mathbb{N}$.

Нека $u=10a+b$, $a \in \{1,2,...,9\}, b \in \{0,1,2,...,9\}$. Ќе разгледаме два случаја.

1° Ако $a+b<10$, тогаш бројот n е од облик

$$11 \cdot (10a+b)=100a+10(a+b)+b$$

и од условот на задачата следува

$$a^2+(a+b)^2+b^2=10a+b \text{ или } 2(a^2+b^2+ab-5a)=b,$$

што значи дека b мора да е парен број т.е. $b \in \{0,2,4,6,8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a=5$, $b=0$, т.е. едно решение на задачата е $n=550$.

2° Ако $a+b \ge 10$, тогаш бројот n е

$$11 \cdot (10a+b)=100(a+1)+10(a+b-10)+b$$

и од условот на задачата имаме

$$(a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2=10a+b$$

т.е.

$$2(a^2+b^2+ab-14a-10b+50)=b-1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b\in\{1,3,5,7,9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a=7$, $b=3$, т.е. во овој случај решение на задачата е $n=803$.

Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

53. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што секој од броевите

$$ab-c, bc-a, ca-b$$

е степен на бројот 2.

Решение. Нека претпоставиме дека $a=b$. Тогаш $b(c-1)$ и b^2-c се степени на бројот 2, па затоа $b=2^k$ и $c=2^l+1$ за некои $k,l\in\mathbb{N}_0$ и $b^2-c=2^{2k}-2^l-1$ е степен на бројот 2, што е можно единствено за $k=1$ и $l\in\{0,1\}$. Одовде ги добиваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$.

Понатаму, заради симетрија можеме да сметаме дека $a<b<c$. Јасно, мора да важи $a>1$. Да означиме

$$bc-a=2^\alpha, ca-b=2^\beta \text{ и } ab-c=2^\gamma.$$

Тогаш $\alpha>\beta>\gamma$. Броевите

$$2^\alpha+2^\beta=(c-1)(b+a) \text{ и } 2^\alpha-2^\beta=(c+1)(b-a)$$

се деливи со 2^β. Но, барем еден од броевите $c\pm1$ не е делив со 4, па затоа $2(a+b)$ или $2(a-b)$ е делив со 2^β. Според тоа,

$$2^\beta=ca-b\le 2(a+b), \text{ т.е. } a(b+1)\le ac\le 2a+3b<a+4b,$$

па затоа $ab<4b$, т.е. $a<4$.

1) Нека $a=3$. Претходно видовме дека 2^β е делител на $2(b+3)$ или на $2(b-3)$. Но, $2^\beta=3c-b>\max\{2(b-3),b+3\}$, па единствена можност е $3c-b=2(b+3)$, т.е. $c=b+2$. Сега $2^\alpha=bc-a=(b-1)(b+3)$, што значи дека $b-1$ и $b+3$ се степени на бројот 2 чија разлика е еднаква на 4. Оттука следува дека $b=5$, што го дава решението $(3,5,7)$.

2) Нека $a=2$. Имаме $2c-b=2^\beta$ и $2b-c=2^\gamma$. Ако $\gamma>0$, тогаш броевите b и c се парни, па затоа $bc-2=2^\alpha$ не е делив со 4, што не е можно. Според тоа, $\gamma=0$ и $c=2b-1$. Од $2^\beta=2c-b=3b-2$ следува

$$b=\frac{2^\beta+2}{3} \text{ и } 2^\alpha=b(2b-1)-2=\frac{2^{2\beta+1}+5\cdot2^\beta-16}{9}.$$

Ако $\beta > 4$, последниот израз не е делив со 2^5, па затоа не е делив со 2^α, што е противречност. Според тоа, $\beta \le 4$. Со проверка на можните случаи го добиваме решението $(2,6,11)$.

Конечно, решенија на задачата се подредените тројки $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,6,11)$ и $(3,5,7)$ и нивните пермутации.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање ако $a=b$, ги определуваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$. Нека a,b,c се различни природни броеви. Во зависност од нивната парност ги разликуваме следниве случаи.

1) a,b,c се парни. Нека $2^x \| a, 2^y \| b$ и $2^z \| c$, при што $1 \le x \le y \le z$. Од $2^x \| bc-a$ и $2^y \| ac-b$, следува $bc-a = 2^x \le a$ и $ac-b = 2^y \le b$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $(a+b)(c-1) \le a+b$, од каде добиваме $c=2$ и $x=y=z=1$, односно $(a,b,c)=(2,2,2)$.

2) a,b,c се непарни. Нека $a<b<c$ и $bc-a=2^x$ и $ac-b=2^y$. Тогаш $x>y$ и затоа 2^y е делител на $a(bc-a)-b(ac-b)=(b+a)(b-a)$. Едниот од множителите на $b \pm a$ не е делив со 4, па затоа другиот е делив со 2^{y-1} и важи $4b > 2(a+b) \ge 2^y = ac-b > (a-1)b$. Оттука следува $a=3$, па од $2(b+3) \ge 3c-b$ следува $c \le b+2$, т.е. $c=b+2$. Сега, $bc-a=(b-1)(b+3)$ е степен на бројот 2, па мора да е $b=5$ и $(a,b,c)=(3,5,7)$.

3) c е непарен, а ab е парен. Мора да е $c=ab-1$, па затоа

$$ab^2-a-b=bc-a=2^x \text{ и } a^2b-a-b=ac-b=2^y.$$

Нека $a<b$. Не може да е $y=0$, па затоа $x>y\ge 1$ и a и b се парни. Бидејќи $2^x+2^y=(a+b)(ab-2)$ и $4 \nmid ab-2$, добиваме $2^{y-1} \| a+b$ и оттука $2^{y-1} \| a^2b$ и $2^{y-1} \| ab^2$. Сега добиваме $a=2^k A, b=2^k B$, $y=3k+1$ и $A+B=2^{2k}C \ge 4C$ за некој $k \in \mathbb{N}$ и непарни A,B,C. Понатаму,

$$2^{3k+1}=2^{3k}(A^2B-C),$$

па затоа $A^2B-C=2$ и оттука

$$8 \ge 4A^2B-A-B \ge A^2(3B-1),$$

што е можно само за $A=1, B=3$ и $k=1$. Така го добиваме решението $(a,b,c)=(2,6,11)$.

54. а) Нека a, b и n се дадени природни броеви. Ако за секој природен број k, $k \ne b$ бројот k^n-a е делив со $k-b$, тогаш $a=b^n$. Докажи!

б) Природните броеви a и b се такви што за секој природен број n бројот $2^n a+b$ е точен квадрат. Докажи дека $a=0$.

Решение. а) За секој природен број k важи

$$k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+...+kb^{n-2}+b^{n-1}),$$

т.е. $(k-b)\,|\,(k^n-b^n)$. Значи, $(k-b)\,|\,[(k^n-b^n)-(k^n-a)]$, т.е. $(k-b)\,|\,(a-b^n)$, за секој за секој природен број k, $k\neq b$. Според тоа, бројот $a-b^n$ има бесконечно многу делители, а тоа е можно само ако $a-b^n=0$, односно $a=b^n$.

б) Нека претпоставиме дека $a\neq 0$. Ако $b=0$, тогаш најмалку еден од броевите $2a+b=2a$ и $2^2a+b=2^2a$ не е точен квадрат, што е противречност. Ако $b\neq 0$, тогаш за секој подреден пар $(x_n,y_n)=(2\sqrt{2^n a+b},\sqrt{2^{n+2}a+b})$, $n\in\mathbb{N}$ важи

$$(x_n+y_n)(x_n-y_n)=3b,$$

па затоа $x_n+y_n\,|\,3b$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Меѓутоа, $x_i+y_i<x_{i+1}+y_{i+1}$, за секој $i\in\mathbb{N}$, што противречи на $3b\neq 0$.

Конечно, од претходните разгледувања следува $a=0$.

55. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека постојат различни броеви $a,b,c\in\mathbb{N}$ такви што

$$n^2<a,b,c<n^2+n+3\sqrt{n} \text{ и } a\,|\,bc.$$

Решение. Бидејќи за бараните броеви мора да важи $a\,|\,bc$, постојат x,y такви што $a=xy$, при што $x\,|\,b$ и $y\,|\,c$. Неравенствата од условот на задачата сугерираат дека разликите меѓу броевите a,b,c треба да се најмали можни, па затоа ќе побараме броевите a,b,c да се од обликот

$$a=xy,\ b=x(y+1) \text{ и } c=(x+1)y,$$

каде $x<n<y$, од каде следува $a<b<c$. Нека $x=n-k$ и $y=n+l$ за некои $k,l\in\mathbb{N}$. За да ги определиме броевите x и y со саканите својства потребно и доволно е да биде

$$xy=(n-k)(n+l)>n^2 \text{ и } (x+1)y=(n-k+1)(n+l)<n^2+n+3\sqrt{n},$$

од каде по средувањето на неравенствата условите го добиваат видот

$$(l-k)n-kl>0 \text{ и } (l-k)n-kl+l<3\sqrt{n}. \qquad (1)$$

Од првото неравенство следува дека $l-k>0$. Неказемеме разгледуваната разлика да е најмалиот можен број, т.е. $l-k=1$, од каде добиваме $l=k+1$. Ако замениме во (1) добиваме

$$k(k+1)<n \text{ и } n-3\sqrt{n}+1<k^2.$$

Нека за k ја земеме најголемата можна вредност за која важи $k(k+1)<n$,

што значи дека избираме k таков што

$$k(k+1) < n \leq (k+1)(k+2) .$$

Неравенството $k(k+1) < n$ е еквивалентно со неравенството $a > n^2$, па останува да докажеме дека за направениот избор на k и l важи

$$c < n^2 + n + 3\sqrt{n} \text{, т.е. } n - 3\sqrt{n} + 1 < k^2 .$$

Навистина, ако претпоставиме дека ова неравенство не е исполнето, тогаш $k^2 \leq n - 3\sqrt{n} + 1 < (\sqrt{n} - 1)^2$, од каде добиваме $k < \sqrt{n} - 1$. Затоа, треба да важи

$$(k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2 < (n - 3\sqrt{n} + 1) + 3(\sqrt{n} - 1) + 2 = n ,$$

што противречи на изборот на k.

56. Докажи дека за било кои природни броеви a и b, бројот $(36a+b)(a+36b)$ не може да биде степен на бројот 2.

Решение. Нека $a = 2^c p, b = 2^d q$, каде p и q се непарни природни броеви. Без губење на општоста претпоставуваме дека $c \geq d$. Тогаш,

$$36a + b = 36 \cdot 2^c p + 2^d q = 2^d (36 \cdot 2^{c-d} p + q) .$$

Следува дека

$$(36a+b)(36b+a) = 2^d (36 \cdot 2^{c-d} p + q)(36b + a) ,$$

каде што бројот $36 \cdot 2^{c-d} p + q$ е нетривијален непарен множител, па затоа $(36a+b)(a+36b)$ не е степен со основа 2.

3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. На кружница се запишани 99 соседни броеви. Познато е дека секои два соседни броја се разликуваат за 1 или 2, или пак едниот е двапати поголем од другиот. Докажи дека, барем еден од броевите е делив со 3.
Решение. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите не е делив со 3, т.е. дека секој од запишаните броеви при делење со 3 дава остаток 1 или 2. Но, броевите со еднакви ненулти остатоци при делење со 3 не може да се разликуваат за 1 или 2, а не е можно и едниот да е двапати поголем од другиот. Тоа значи дека соседните броеви даваат различни остатоци при делење со 3, т.е. остатоците 1 и 2 наизменично се менуваат, што противречи на условот, дека имаме непарен број запишани броеви, т.е. 99 запишани броеви.

2. Докажи дека за секој природен број n постои $n-$цифрен број запишан само со непарни цифри и делив со 5^n.
Решение. Задачата ќе ја решиме со математичка индукција. Јасно, тврдењето важи за $n=1$. Нека $N=\overline{a_1a_2...a_n}$ е делив со 5^n и е запишан само со непарни цифри.
Да ги разгледаме броевите
$$N_1=\overline{1a_1...a_n}=1\cdot 10^n+5^n m=5^n(1\cdot 2^n+m),$$
$$N_2=\overline{3a_1...a_n}=3\cdot 10^n+5^n m=5^n(3\cdot 2^n+m),$$
$$N_3=\overline{5a_1...a_n}=5\cdot 10^n+5^n m=5^n(5\cdot 2^n+m),$$
$$N_4=\overline{7a_1...a_n}=7\cdot 10^n+5^n m=5^n(7\cdot 2^n+m),$$
$$N_5=\overline{9a_1...a_n}=9\cdot 10^n+5^n m=5^n(9\cdot 2^n+m).$$
Броевите $1\cdot 2^n+m, 3\cdot 2^n+m, 5\cdot 2^n+m, 7\cdot 2^n+m$ и $9\cdot 2^n+m$ даваат различни остатоци при делење со 5. Во спротивно разликата на некои два од нив ќе е делива со 5, што не е можно. Според тоа, барем еден од овие броеви е делив со 5, т.е. барем еден од броевите $N_1,N_2,...,N_5$ е делив со 5^{n+1} и јасно тој е запишан само со непарни цифри.

3. Дали постои цел број чиј куб е еднаков на $3n^2+3n+7$, каде n е цел број?
Решение. Нека претпоставиме дека постојат цели броеви n и k за кои е исполнето

$$k^3 = 3n^2 + 3n + 7 = 3(n^2 + n + 2) + 1.$$

Јасно, остатокот при делење на k^3 со 3 е 1, па затоа постои цел број s таков што $k = 3s + 1$. Ако замениме во $k^3 = 3n^2 + 3n + 7$, добиваме

$$3s(3s^2 + 3s + 1) = n^2 + n + 2. \qquad (1)$$

Бидејќи $n^2 + n + 2$ не е делив со 3 следува дека равенството (1) не е можно, па затоа не постои цел број чиј куб е еднаков на $3n^2 + 3n + 7$.

4. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви кои не можат да се претстават како збир на кубови на два цели броја, но се збир на кубови на два рационални позитивни броја.

Решение. Такви, на пример се броевите $6 \cdot 8^n$, каде $n = 0, 1, 2, \dots$. Навистина, секој куб на цел број при делење со 9 дава остаток 0, 1 или -1, па значи збир на два кубови при делење со 9 дава остаток $0, 1, -1, 2$ или -2. Но, од друга страна ако n е парен број тогаш $6 \cdot 8^n$ при делење со 9 дава остаток 6, а ако n е непарен број, $6 \cdot 8^n$ при делење со 9 дава остаток 3, што значи дека во секој случај остатокот е различен од $0, 1, -1, 2$ и -2. Последниот дел од тврдењето следува од

$$\left(\frac{17 \cdot 2^n}{21}\right)^3 + \left(\frac{37 \cdot 2^n}{21}\right)^3 = 2^{3n} \cdot \left[\left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3\right] = 8^n \cdot 6.$$

5. Докажи, дека секој природен број помал или еднаков на $n!$, може да се запише како збир на најмногу n по парови различни собирци, секој од кои е делител на бројот $n!$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тоа е точно за $n = k$, т.е. дека секој природен број помал или еднаков на $k!$ може да се запише како збир од најмногу k по парови различни собирци, секој од кои е делител на бројот $k!$.

Нека $n = k + 1$ и $a \le (k+1)!$. Од теоремата за делење со остаток следува дека постојат q и r такви што

$$a = q(k+1) + r, \; 0 \le r < k + 1. \qquad (1)$$

Но, $q \le k!$, па од индуктивната претпоставка следува дека постојат најмногу k меѓусебно различни собирци $d_1, d_2, \dots, d_k$ такви што секој од кои е делител на $k!$ и $q = d_1 + d_2 + \dots + d_k$. Ако замениме во (1) добиваме дека

$$a = d_1(k+1) + d_2(k+1) + \dots + d_k(k+1) + r,$$

при што $d_1(k+1), d_2(k+1), \dots, d_k(k+1), r$ се меѓусебно различни собирци и секој од нив е делител на $(k+1)!$, што значи дека тврдењето важи за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број n.

6. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви од облик $8k+1$, $k=0,1,2,...$ кои можат да се претстават во облик x^2-2y^2, каде x и y се природни броеви, а исто така има и бесконечно многу природни броеви кои не можат да се претстават во саканиот облик. Најди го најмалиот број кој не може да се претстави на бараниот начин.

Решение. За произволен природен број n и бројот $(2n+1)^2-2\cdot 2^2$ како лесно може да се забележи е број од облик $8k+1$, каде $k\geq 0$. Понатаму имаме

$$1=3^2-2\cdot 2^2,\ 9=9^2-2\cdot 6^2,\ 17=5^2-2\cdot 2^2,\ 25=15^2-2\cdot 10^2\ ,$$

но бројот 33 не може да се претстави во облик x^2-2y^2, каде x и y се природни броеви. Ќе докажеме дека ниту еден број од облик $72t+33$, каде $t=0,1,2,...$ не може да се претстави во облик x^2-2y^2, каде x и y се природни броеви. Нека претпоставиме спротивноı. Тогаш левата страна на равенството

$$72t+33=x^2-2y^2,\quad x,y\in\mathbb{N}, t=0,1,2,3,...$$

е делива со 3 , но не е делива со 9. Оттука следува дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 3, т.е $x=3k\pm 1$ и $y=3l\pm 1$. Но, тогаш $x^2=3M+1$ и $y^2=3N+1$, па затоа

$$x^2-2y^2=3(M-N)-1,$$

што противречи на $3\,|\,(72t+33)$.

7. Даден е бројот 2^k, $k>3$. Докажи дека со прераспоредување на цифрите на овој број не може да се добие број од видот 2^n, $n>k$.

Решение. Да претпоставиме дека со прераспоредување на цифрите на бројот $K=2^k$ е добиен бројот $N=2^n$, $n>k$. Тогаш, $N>K$ и бидејќи N има најмногу онолку цифри колку што има и K, добиваме N и K имаат ист број на цифри, што значи $N<10K$. Понатаму, збировите на цифрите на броевите N и K се еднакви, па затоа и двата броја даваат ист остаток при делење со 9, што значи дека бројот $N-K$ е делив со 9. Според тоа,

$$9\,|\,N-K=2^k(2^{n-k}-1)\text{, односно } 9\,|\,2^{n-k}-1<2^{n-k}=\tfrac{N}{K}<10\,.$$

Тоа значи дека $2^{n-k}-1=9$, што не е можно.

8. Определи го најмалиот природен број m за кој 2^{2000} е делител на $2003^m - 1$.

Решение. Нека $m = 2^k p$, каде $p > 1$ е непарен број. Тогаш

$$2003^m - 1 = 2003^{2^k p} - 1 = (2003^{2^k} - 1)K$$

каде K е збир на p непарни собирци, т.е. K е непарен број. Според тоа, најмалиот баран број m треба да е од видот $m = 2^k$. Имаме

$$\begin{aligned} 2003^{2^k} - 1 &= (2003^{2^{k-1}} - 1)(2003^{2^{k-1}} + 1) \\ &= (2003^{2^{k-1}} + 1)(2003^{2^{k-2}} + 1)\dots(2003^2 + 1)(2003 + 1)(2003 - 1). \end{aligned}$$

Бидејќи $2003^{2^i} + 1$, $i \geq 1$ дава остаток 2 при делење со 4, т.е. сите броеви од горниот вид се парни, но не се деливи со 4, добиваме дека $2003^{2^k} - 1$ е делив со 2^{k+2}, бидејќи $2003 + 1$ е делив со 4, но не е делив со 8, а $2003 - 1$ е делив со 2, но не е делив со 4. Значи, $k + 2 = 2000$, т.е. $k = 1998$. Конечно, бараниот број е $m = 2^{1998}$.

9. а) Докажи дека постои $n \in \mathbb{N}$ таков што

$$2^{1990} \mid (1989^n - 1).$$

Определи го најмалиот таков број n.

б) Нека $m \geq 3$ е непарен природен број. Определи го најмалиот број n за кој

$$2^{1989} \mid (m^n - 1)$$

Решение. Ќе ја решиме следнава задача која е поопшта од задачата под б): определи го најмалиот природен број n за кој $2^k \mid (m^n - 1)$, каде k е природен број.

Нека $n = 2^t q$, каде q е непарен број. Имаме

$$m^n - 1 = (m^{2^t})^q - 1 = (m^{2^t} - 1)[(m^{2^t})^{q-1} + \dots + m^{2^t} + 1].$$

Бројот во средната заграда е непарен, бидејќи е збир на q непарни броеви, па затоа $2^k \mid (m^n - 1)$ ако и само ако $2^k \mid (m^{2^t} - 1)$. Оттука следува дека за барааниот најмал број n важи $q = 1$.

Од друга страна, важи

$$m^{2^t} - 1 = (m^2 - 1)(m^2 + 1)(m^4 + 1)\dots(m^{2^{t-1}} + 1).$$

Бидејќи m е непарен број, при делење на m^2 со 4 се добива остаток 1, а истото важи и за секој број од видот m^{2^r}, $r \geq 1$. Според тоа, на десната страна во горниот производ сите множители освен првиот се деливи со 2, но не се деливи со 4. Тоа значи дека степенот на бројот 2 кој е делител на производот

$(m^2+1)(m^4+1)...(m^{2^{t-1}}+1)$ е еднаков на $t-1$. Значи, останува да го разгледаме степенот на бројот 2 во множителот $m^2-1=(m-1)(m+1)$. Бидејќи m при делење со 4 дава остаток 1 или 3, треба да ги разгледаме овие два случаја.
Нека $m=4l+1$ и нека $s\geq 2$ е најголемиот број таков што $2^s\,|\,(m-1)$. Тогаш $m+1$ е делив со 2, но не и со 4, па затоа најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на m^2-1 е 2^{s+1}. Од друга страна, ако $m=4l+3$, го разгледуваме најголемиот број $s\geq 2$ за кој важи $2^s\,|\,(m+1)$. Слично, како и погоре добиваме дека дека бројот m^2-1 е делив со 2^{s+1}, но не и со 2^{s+2}.
Според тоа, ако бројот s е определен како погоре (а тој зависи исклучиво од m), тогаш најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на $m^{2^t}-1$ е еднаков на $(t-1)+(s+1)=t+s$. Затоа бараниот најмал природен број е $n=2^{k-s}$ во случај кога $s\leq k$, а во спротивно тоа е бројот $n=1$.
Во задачата под а) имаме $m=1989=4\cdot 494+3$, па затоа во овој случај $s=2$, додека $k=1990$, што значи $m=2^{1988}$. Во задачата по б) треба да се примени горното решение за $k=1989$.

10. Определи ги сите природни броеви n за кои $3\,|\,(2^n n+1)$.

Решение. Очигледно $3\nmid n$. Понатаму, ако n е број од облик $3k+1$, тогаш лесно се гледа дека бројот 2^n+1 мора да е делив со 3, што значи дека n мора да е непарен број, односно дека n е број од облик $6m+1, m\in\mathbb{N}_0$. Ако n е број од облик $3k+2$, тогаш лесно се гледа дека бројот $2\cdot 2^n+1$ мора да е делив со 3, што значи дека n мора да е парен број, односно дека n е од облик $6m+2, m\in\mathbb{N}_0$. Конечно, сите природни броеви n за кои $3\,|\,(2^n n+1)$ се броевите $6m+1$ и $6m+2, m\in\mathbb{N}_0$.

11. Определи го максималниот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на даден природен број n.

Решение. Со P го означуваме бараниот прозвод. За $n=1$ очигледно $P=1$. Нека $n>1$. Јасно, во овој случај ниту еден од множителите не е еднаков на 1. Ќе докажеме дека сите негови множители се помали или еднакви на 4. Навистина, ако некој негов множител a е поголем или еднаков на 5, тогаш производот кој наместо a има два множители $a-2$ и 2 ќе биде поголем од P, бидејќи $2(a-2)>a$, а соодветниот збир повторно ќе биде еднаков на n. Исто така, секоја четворка може да се замени со две двојки и во збирот и во производот, па затоа производот е од облик $2^i 3^j$. Најпосле, бидејќи $2^3 < 3^2$, а $2+2+2=3+3$ јасно е дека во производот може да има најмногу две двојки. Според тоа,

$$P=\begin{cases} 3^k, & \text{за } n=3k,\ k\in\mathbb{N}, \\ 2\cdot 3^k, & \text{за } n=3k+2,\ k\in\mathbb{N}, \\ 2^2\cdot 3^{k-1}, & \text{за } n=3k+1,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

12. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?

Решение. Постои. Доволно е даземеме множество B кое се состои од 2002 броја од видот $2003k$ и 2002 броја од видот $2003k+1$. Навистина, ако 2003-елементно множество $A\subset B$ содржи m елементи од облик $2003k+1$ и $2003-m$ елементи од облик $2003k$ (каде $1\le m\le 2002$), тогаш збирот на неговите елементи при делење со 2003 дава остаток m.

13. За секој природен број n нека a_n е бројот на точните квадрати меѓу броевите $2, 9, 16, ..., 7n+2$, а b_n е бројот на точните квадрати меѓу броевите $1, 4, 7, ...,$ $3n+1$. Определи:

а) a_{1984},

б) најмал број n, за кој важи $b_n = a_{1984}$.

Решение. а) Лесно се проверува, дека бројот m^2 при делење со 7 дава остаток 2 само кога $m=7k+3$ или $m=7k+4$. Значи, $7n+2$ е точен квадрат, ако

$$7n+2=(7m+3)^2 \text{ или } 7n+2=(7m+4)^2.$$

Според тоа,

$$n=7k^2+6k+1 \text{ или } n=7k^2+8k+2,\ k=0,1,2,... .$$

Неравенствата

$$7k^2+6k+1\le 1984 \text{ и } 7k+8k+2\le 1984$$

се исполнети при $k=0,1,\ldots,16$. т.е $a_{1984}=34$

б) Бројот m^2 дава остаток 1 при делење со 3 само кога $m=3k+1$ или $m=3k+2$. Добиваме дека $3n+1$ е точен квадрат само ако n е од облик $n=3k^2+2k$ или $n=3k^2+4k+1$, $k=0,1,2,...$.

Нека $n=3\cdot 16^2+4\cdot 16+1=833$. Тогаш важат неравенствата $3k^2+2k\le 833$ и $3k^2+4k+1\le 833$, за $k=0,1,2,\ldots,16$. Значи $b_{833}=34=a_{1984}$. Ќе докажеме, дека $n=833$ е минималниот природен број со ова својство. Нека $m<833$. Тогаш од $3k^2+2k\le m<3\cdot16^2+4\cdot16+1$ следува дека $0\le k\le16$. Исто така, од $3k^2+4k+1\le m<3\cdot16^2+4\cdot16+1$ следува дека $0\le k\le15$, т.е. $b_m\le33<a_{1984}$.

14. Низите $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ се определени со

$$x_1=1,\, x_2=1,\, x_{n+1}=x_n+x_{n-1},\, n\ge2 \text{ и } y_1=1,\, y_2=7,\, y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1},\, n\ge2.$$

Докажи, дека освен бројот 1 овие низи немаат заеднички членови.

Решение. Нека

$$x_k=8q_k+r_k,\ 0\le r_k<8,$$
$$y_k=8t_k+s_k,\ 0\le s_k<8.$$

Со индукција по k се докажува дека низите остатоци $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ се

$$1,2,3,5,3,5,3,5,\dots \text{ и } 1,7,1,7,1,7,1,7,1,\dots.$$

Оттука следува дека $x_n=y_m$ е можно само за $n=m=1$, што и требаше да се докаже.

15. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и при делење на a^2+b^2 со $a+b$ се добива количник q и остаток r. Определи ги сите парови (a,b) за кои е $q^2+r=1977$.

Решение. Броевите a,b,q и r мора да ги задоволуваат условите:

$$a^2+b^2=(a+b)q+r$$
$$0\le r<a+b$$
$$q^2+r=1977.$$

Од $q^2\le1977$ следува $q\le44$, што значи

$$a^2+b^2<44(a+b)+(a+b)=45(a+b)$$

и бидејќи $(a+b)^2\le2a^2+2b^2$, добиваме

$$(a+b)^2\le90(a+b),\text{ т.е. } a+b\le90.$$

Според тоа $r<90$. Од

$$q^2=1977-r>1977-90=1887$$

добиваме $q>43$ и како $q\le44$ имаме $q=44$ и $r=41$.

Останува уште да ги определиме природните броеви a и b кои ја задоволуваат равенката $a^2+b^2=44(a+b)+41$, т.е. равенката

$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009.$$

Да ги определиме целобројните решенија на равенката $x^2+y^2=1009$ кои го задоволуваат условот $0 \le x \le y$.

Од $x^2 \le 1009$, следува $x \le 31$, а од $2y^2 \ge 1009$ следува $y \ge 23$. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение е: $x=15$, $y=28$.

Според тоа, во $\mathbb{N}$ треба да ги решиме следните системи равенки

$$|a-22|=15,\ |b-22|=28;\ \text{и}$$

$$|a-22|=28,\ |b-22|=15.$$

Првиот систем има решенија $(a,b)=(37,50)$ и $(a,b)=(7,50)$, а вториот $(a,b)=(50,37)$ и $(a,b)=(50,7)$, и тоа се единствените парови природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

16. Низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е определена со $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_{n-1}a_n+1,$ за $n=2,3,4,...$. Докажи, дека a_{2013} не е делив со 4.

Решение. Со $r_i, i=1,2,3,...$ да го означиме остатокот од делењето на бројот $a_i, i=1,2,3,...$ со 4, соодветно. Јасно, $r_1=r_2=1,\ r_3=2, r_4=r_5=3$. Индуктивно може да се докаже дека $r_{3k}=2, r_{3k+1}=r_{3k+2}=3,$ за $k=1,2,3,...$. Значи, $r_i \ne 0,$ за секој $i \in \mathbb{N}$, што значи дека $4 \nmid a_i$, за секој $i \in \mathbb{N}$, т.е. $4 \nmid a_{2013}$.

17. Најди бесконечна аритметичка прогресија, која се состои од природни броеви, има најмала разлика и не содржи ниту еден триаголен број $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$, $n=1,2,...$.

Решение. Триаголните броеви $t_n=\frac{n(n+1)}{2}, n=1,2,...$ се непарни за $n=4u+1$, $u=0,1,2,3,...$ и се парни за $n=4u$, $u=0,1,2,3,...$. Затоа, секоја аритметичка прогресија со разлика 2 содржи бесконечно многу триаголни броеви.

Аритметичката прогресија $3k+2, k=1,2,3,...$ не содржи ниту еден триаголен број, бидејќи

- ако $n=6u$, тогаш $t_n=3u(6u+1)\ne 3k+2$,
- ако $n=6u+1$, тогаш $t_n=(6u+1)(3u+1)=3(6u^2+3u)+1\ne 3k+2$,
- ако $n=6u+2$, тогаш $t_n=(6u+3)(3u+1)=3(2u+1)(3u+1)\ne 3k+2$,
- ако $n=6u+3$, тогаш $t_n=(6u+3)(3u+2)=3(2u+1)(3u+2)\ne 3k+2$,
- ако $n=6u+4$, тогаш $t_n=(6u+5)(3u+2)=3(6u^2+9u+3)+1\ne 3k+2$ и
- ако $n=6u+5$, тогаш $t_n=(6u+5)(3u+3)=3(6u+5)(u+1)\ne 3k+2$.

Значи, бараната аритметичка прогресија е $3k+2, k=1,2,3,...$.

18. Определи растечка аритметичка прогресија со најмала разлика, чии членови се природни броеви и таква што ниту еден нејзин член не припаѓа на низата на Фибоначи.

Решение. Лесно се проверува, дека ако m е природен број, тогаш остатоците од делењето со m на членовите на низата на Фибоначи формираат чиста периода, т.е. периода која почнува од првиот член. За $m=2,3,4,5,6,7$ остатоците од делењето со m на членовите на низата на Фибоначи се:

- за $m=2$: 1,1,0,1,1,0, ...
- за $m=3$: 1,1,2,0,2,2,1,0,1,1, ...
- за $m=4$: 1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0, ...
- за $m=5$: 1,1,2,3,0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0,1,1, ...
- за $m=6$: 1,1,2,3,5,2,1,3,4,1,5,0,5,5,4,3,1,4,5,3,2,5,1,0,1,1,2, ...
- за $m=7$: 1,1,2,3,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0,1,1,2,3,5,...

Бидејќи за секој од природните броеви $m\leq 7$ ги имаме сите можни остатоци од делењето со m заклучуваме дека во секоја аритметичка прогресија со разлика $m\in\{2,3,4,5,6,7\}$ се содржат бесконечно многу членови на низата на Фибоначи.

Остатоците од делењето на членовите на низата на Фибоначи со бројот 8 се:

1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Забележуваме дека во случајов се добиваат остатоците: 0, 1, 2, 3, 5 и 7, па затоа секој член на низата на Фибоначи може да се запише во еден од следниве облици: $8k, 8k+1, 8k+2, 8k+3, 8k+5$ и $8k+7$, каде $k\in\mathbb{N}_0$, што значи дека не постои член на низата на Фибоначи кој може да се запише во облик $8k+4$ или $8k+6$, $k\in\mathbb{N}_0$, па затоа во аритметичките прогресии $8k+4$ и $8k+6$, $k\in\mathbb{N}_0$ не се содржи ниту еден член на низата на Фибоначи и очигледно тоа се прогресии со најмала разлика.

19. Докажи дека за секој природен број n постои природен број N таков што за произволен природен број $b\in[2,1389]$ збирот на цифрите на N во броен систем со основа b е поголем од n.

Решение. Бројот $N=(1389!)^{n+1}-1$ го има саканото својство. Навистина, $N+1$ е делив со b^{n+1} за секој природен број $b\in[2,1389]$, па затоа последните $n+1$ цифра на бројот $N+1$ во систем со основа b се нули. Значи, последните $n+1$ цифра на N во систем со основа b се еднакви на $b-1$ и нивниот збир е еднаков на $(n+1)(b-1)>n$.

20. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни видови монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат

номинални вредности така што секоја сума од 1 до 6543 денари ќе може да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста номинална вредност.)

Решение. Да забележиме дека $9^4 = 6561 > 6543$. Ќе докажеме дека може да се изберат 12 различни видови монети така што со помош на најмногу осум монети може да се плати секоја сума од 6560 денари.
Со монети од 1, 3 и 4 денари може да се плати секоја сума од 1 до 8 денари, при што ќе се користат најмногу две монети

$$1 = 1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 3,\ 4 = 4,\ 5 = 1+4,\ 6 = 3+3,\ 7 = 4+3 \text{ и } 8 = 4+4 .$$

Да разгледаме монети од $9^k, 3\cdot 9^k$ и $4\cdot 9^k$ денари, за $k = 0,1,2,3$. Секој број n од 1 до 6560 на единствен начин може да се претстави во видот

$$n = a_3\cdot 9^3 + a_2\cdot 9^2 + a_1\cdot 9 + a_0, \text{ каде } a_i \in \{0,1,2,...,9\}, \text{ за } i = 0,1,2,3,$$

(тоа е разложувањето на бројот n во систем со основа 9). Но, збирот $a_k\cdot 9^k$ може да се добие со најмногу две монети, па затоа бројот n може да се добие со најмногу $4\cdot 2 = 8$ монети.

21. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

Решение. Почетната цифра на секој од разгледуваните броеви е 1 и бидејќи бројот на нулите е поголем од бројот на единиците, следува дека бројот на нулите е природен број кој припаѓа на интервалот $[1007, 2012]$. Според тоа,

$$\begin{aligned} n &= \tbinom{2012}{1007} + \tbinom{2012}{1008} + ... + \tbinom{2012}{2011} + \tbinom{2012}{2012} = \frac{2^{2012} - \tbinom{2012}{1006}}{2} \\ &= 2^{2011} - \tfrac{1}{2}\tbinom{2012}{1006} = 2^{2011} - \tbinom{2011}{1005}. \end{aligned}$$

За да го определиме s ќе го разгледаме бројот на единици во фиксирано место. Почетната цифра на сите броеви е единица. Да разгледаме произволно место на останатите единици. Без почетната цифра и разгледуваната цифра, на останатите 2011 места треба да имаме барем 1007 нули. Според тоа, тој број е еднаков на

$$\tbinom{2011}{1007} + \tbinom{2011}{1008} + ... + \tbinom{2011}{2010} + \tbinom{2011}{2011} = 2^{2010} - \tbinom{2011}{1006} = 2^{2010} - \tbinom{2011}{1005}.$$

Значи,

$$\begin{aligned} s &= 2^{2012} n + (2^{2010} - \tbinom{2011}{1005}) \sum_{i=0}^{2012} 2^i \\ &= 2^{2012} n + (2^{2010} - \tbinom{2011}{1005})(2^{2012} - 1), \end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned} n+s &= 2^{2011}-\binom{2011}{1005}+2^{2012}(2^{2011}-\binom{2011}{1005})+(2^{2010}-\binom{2011}{1005})(2^{2012}-1) \\ &= 2^{4023}+2^{4022}+2^{2010}-2^{2013}\binom{2011}{1005} \\ &= 2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\binom{2011}{1005})+2^{2010}. \end{aligned}$$

Бидејќи $n+s<2^{4024}$, бинарниот запис на $n+s$ има најмногу 4024 цифри, а од

$$n+s=2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\binom{2011}{1005})+2^{2010}$$

следува дека последните 2012 од 2013 цифри се нули. Ако допуштиме, дека во бинарниот запис на $n+s$ има повеќе нули од единици, тогаш првите 2012 цифри треба да се единици. Број со такво својство е бројот

$$2^{2013}(1+2+...+2^{2010})+2^{2010}$$

и овој број е поголем од $n+s$, што е противречност.

22. Во еден чекор тројката цели броеви (p,q,r) се заменува со тројката цели броеви $(r+5q,3r-5p,2q-3p)$. Дали по конечен број чекори на овој начин од тројката $(1,3,7)$ може да се добие тројката $(k,k+1,k+2)$?

Решение. Ако ги собереме броевите во новата тројка добиваме

$$(r+5q)+(3r-5p)+(2q-3p)=4r+7q-8p=3(r+2q-3p)+(p+q+r).$$

Според тоа, збирот на броевите во секоја тројка дава ист остаток при делење со 3. Збирот на елементите во почетната тројка $(1,3,7)$ при делење со 3 дава остаток 2, а додека збирот на броевите во тројката $(k,k+1,k+2)$ е делив со 3. Последното значи дека од тројката $(1,3,7)$ со опишаната постапка не може да се добие тројка чии членови се три последователни броеви.

4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Ако a и b се природни броеви и a^2+b^2-a е делив со $2ab$, тогаш a е точен квадрат. Докажи!
Решение. Од условот на задачата следува дека постои $q\in\mathbb{N}$ таков што
$$a^2+b^2-a=2qab\,,$$
Нека $d=(a,b), a=rd, b=sd$. Заменуваме во горното равенство и добиваме
$$r^2d+s^2d-r=2qrsd\,,$$
па затоа $d\,|\,r$. Но, од друга страна $r\,|\,s^2d$, па од $(r,s)=1$ следува $r\,|\,d$. Значи, $r=d$ и $a=r^2$.

2. Нека n е природен број. Докажи, ако бројот
$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$
е природен, тогаш тој е точен квадрат.
Решение. Нека претпоставиме дека
$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2(1+\sqrt{28n^2+1})=m\,,$$
за некој природен број m. Тогаш $\sqrt{28n^2+1}$ е непарен природен број, па затоа m е делив со 4, т.е. $m=4k$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Ако замениме во горното равенство, последователно добиваме
$$\begin{aligned}&\sqrt{28n^2+1}=2k-1,\\&28n^2+1=4k(k-1)+1,\\&7n^2=k(k-1).\end{aligned}$$
Но, $(k,k-1)=1$, па затоа постојат природни броеви q и r такви што важи една од следниве две можности:
1) $k=q^2, k-1=7r^2$,
2) $k=7q^2, k-1=r^2$.
Во случајот 1) добиваме $m=4k=4q^2=(2q)^2$, што и требаше да се докаже. Од друга страна, случајот 2) не е можен, бидејќи тогаш ќе важи $r^2=7q^2-1$,

односно остатокот при делење на r^2 со 7 да е 6, што не е можно, бидејќи квадратите на природните броеви при делење со 7 даваат остатоци 0, 1, 2 и 4.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои $13|n^2+3$ и $13|(n+1)^2+3$.

Решение. Од $13|n^2+3$ и $13|(n+1)^2+3$. Следува

$$13|(n^2+2n+4)-(n^2+3)=2n+1.$$

Меѓутоа, важи и обратното тврдење, т.е. ако $13|2n+1$, тогаш $13|n^2+3$ и $13|(n+1)^2+3$. Навистина, $13|(2n+1)^2=4n^2+4n+1$, па оттука следува дека $13|4n^2+4n+1-2(2n+1)+13=4n^2+12=4(n^2+3)$, и како $(4,13)=1$ заклучуваме дека $13|n^2+3$. Сега, $13|(n^2+3)+(2n+1)=(n+1)^2+3$. Значи, $13|n^2+3$ и $13|(n+1)^2+3$ ако и само ако $13|2n+1$. Оттука следува дека ако n е природен број за кој важи дадениот услов, тогаш $2n+1=13t$, $t\in\mathbb{N}$ и како $2n+1$ е непарен број, тогаш $t=2k+1$, па затоа сите природни броеви за кои важи дадениот услов се од видот $2n+1=13(2k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0$, односно

$$n=\frac{13(2k+1)-1}{2}=13k+6,\ k\in\mathbb{N}_0.$$

4. Нека n е природен број. Докажи дека најголемиот заеднички делител на броевите n^2+1 и $(n+1)^2+1$ е 1 или 5, при што е еднаков на 5 ако и само ако $n=5k+2, k\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $d=(n^2+1,(n+1)^2+1)$. Тогаш d е делител на бројот

$$(n+1)^2+1-(n^2+1)=2n+1,$$

односно на бројот

$$n(2n+1)-2(n^2+1)=n-2.$$

Според тоа, d е делител на бројот

$$2n+1-2(n-2)=5,$$

па затоа $d\in\{1,5\}$.

Ако бројот n при делење со 5 дава остатоци 0, 1, 2, 3, 4, тогаш бројот n^2+1 при делење со 5 соодветно дава остатоци 1, 2, 0, 0, 2, а бројот $(n+1)^2+1$ при делење со 5 соодветно дава остатоци 2, 0, 0, 2, 1. Според тоа, броевите n^2+1 и $(n+1)^2+1$ истовремено се деливи со 5 ако и само ако $n=5k+2, k\in\mathbb{N}$.

5. Нека a и b се два последователни природни броја и n е произволен при-

роден број. Докажи дека $(an+b, bn+a)$ е непарен број.

Решение. Од два последователни природни броја едниот е секогаш помал од другиот. Нека претпоставиме дека $b<a$, т.е. $a=b+1$. Ако

$$d=(an+b, bn+a),$$

тогаш $d\,|\,(an+b)$ и $d\,|\,(bn+a)$. Но, тоа значи дека $d\,|\,a(bn+a)$ и $d\,|\,b(an+b)$. Според тоа, $d\,|\,[a(bn+a)-b(an+b)]$, т.е. $d\,|\,(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)=2b+1$. Значи, бројот d е делител на непарен број, па затоа и самиот е непарен број.

6. Нека n е парен природен број. Определи ги сите заемно прости броеви a и b такви што $a+b\,|\,a^n+b^n$.

Решение. Бидејќи n е парен природен број важи

$$a^n-b^n=(a^2-b^2)(a^{n-2}+a^{n-4}b^2+...+a^2b^{n-4}+b^{n-2}).$$

Понатаму, $a+b\,|\,a^2-b^2$, па затоа $a+b\,|\,a^n-b^n$. Според тоа, $a+b$ е делител на

$$a^n+b^n+(a^n-b^n)=2a^n \text{ и } a^n+b^n-(a^n-b^n)=2b^n.$$

Меѓутоа, a и b се заемно прости броеви, па затоа $a+b$ е делител на $(2a^n, 2b^n)=2\cdot(a^n, b^n)=2$, од каде следува дека $a=b=1$.

7. Дали постојат три природни броеви поголеми од еден такви што квадратот на секој од нив намален за 1 е делив со секој од преостанатите два броја.

Решение. Нека претпоставиме дека $a\ge b\ge c$ се природни броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Бидејќи a^2-1 е делив со b, заклучуваме дека a и b се заемно прости. Бидејќи c^2-1 е делив со a и b, а a и b се заемно прости следува дека c^2-1 е делив со ab, па затоа $c^2-1\ge ab$. Но, $a\ge b\ge c$, па затоа $ab\ge c^2$, што противречи на $c^2-1\ge ab$. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат природни броеви со саканото својство.

8. Определи ги сите подредени тројки (m,n,p) позитивни рационални броеви такви што $m+\frac{1}{np}, n+\frac{1}{pm}, p+\frac{1}{mn}$ се цели броеви.

Решение. Да означиме $a=mnp$. Броевите $\frac{a+1}{mn}, \frac{a+1}{np}, \frac{a+1}{pm}$ се цели, па затоа и нивниот производ $\frac{(a+1)^3}{a^2}=k$ е цел број. Значи, a е решение на равенката

$$x^3+(3-k)x^2+3x+1=0.$$

Оттука следува дека ако $a=\frac{q}{r}, (q,r\in\mathbb{N}, (q,r)=1)$, тогаш $q,r\,|\,1$, па затоа $a=1$. Според тоа, $a+1=2a=2mnp$, па затоа $2p=\frac{a+1}{mn}$ е цел број. Аналогно $2m$ и $2n$ се цели броеви, па бидејќи $2m\cdot 2n\cdot 2p=8$, единствени решенија (m,n,p) се тројките $(1,1,1), (1,2,\frac{1}{2})$ и $(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ со нивните пермутации.

9. Нека m и n се природни броеви такви што

$$2001m^2+m=2002n^2+n\,.$$

Докажи дека $m-n$ е точен квадрат.

Решение. Нека m и n се природни броеви за кои е точно равенството

$$2001m^2+m=2002n^2+n\,.$$

Јасно, $m>n$ и постои природен број k таков што $m=n+k$. Но, со замена на m во даденото равенство, по средувањето, добиваме

$$n^2-4002nk-2001k^2-k=0\,.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако

$$\begin{aligned}D&=(4002k)^2+4(2001k^2+k)\\&=4[(2001^2+2001)k^2+k]\\&=4[(2001^2+2001)k+1]k\end{aligned}$$

е точен квадрат. Бидејќи $4=2^2$ и

$$((2001^2+2001)k+1,k)=(1,k)=1\,,$$

добиваме D е точен квадрат ако и само ако $(2001^2+2001)k+1$ и k се точни квадрати. Според тоа k е точен квадрат, односно $m-n$ е точен квадрат, што и требаше да се докаже.

10. Ако a и b се решенија на равенката $x^2+px-1=0$, каде p е непарен број, тогаш за секој ненегативен цел број n броевите a^n+b^n и $a^{n+1}+b^{n+1}$ се цели и заемно прости. Докажи!

Решение. Според Виетовите формули имаме $a+b=-p$ и $ab=-1$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=0$ имаме $a^0+b^0=2$ и $a^1+b^1=-p$ се цели броеви и се замено прости.

Нека претпоставиме дека a^n+b^n и $a^{n+1}+b^{n+1}$ се цели и заемно прости броеви. Тогаш

$$\begin{aligned}a^{n+2}+b^{n+2}&=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)\\&=-p(a^{n+1}+b^{n+1})+(a^n+b^n)\end{aligned}$$

исто така е цел број. Понатаму, ако броевите $a^{n+1}+b^{n+1}$ и $a^{n+2}+b^{n+2}$ имаат заеднички делител $d>1$, тогаш d е делител на a^n+b^n, што е противречи на претпоставката. Значи, $a^{n+1}+b^{n+1}$ и $a^{n+2}+b^{n+2}$ се заемно прости и тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

11. Збирот на 49 природни броеви е еднаков на 999. Определи ја најголемата можна вредност на нивниот најголем заеднички делител.

Решение. Нека збирот на броевите $a_1,a_2,...,a_{49}$ е еднаков на 999 и нека $d=(a_1,a_2,...,a_{49})$. Јасно, $d\,|\,999=3^2\cdot 39$. Понатаму, $d\,|\,a_i$, па затоа $d\le a_i$ за $i=1,2,...,49$. Според тоа, $999=a_1+a_2+...+a_{49}\ge 49d$, од каде следува $d\le \frac{999}{49}<21$. Единствени делители на 999 кои се помали од 21 се 1, 3 и 9. Најголемата можна вредност на најголемиот заеднички делител е $d=9$ и истата се достигнува, на пример, за $a_i=9, i=1,2,...,48$ и $a_{49}=567$.

12. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи

$$(a,b,c)=(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{b+c}{2},\tfrac{c+a}{2}).$$

Решение. Нека $(a,b,c)=d$ и $(\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2})=d'$. Тогаш $d\,|\,a$, $d\,|\,b$ и $d\,|\,c$, па затоа $d\,|\,(a+b)$, $d\,|\,(b+c)$ и $d\,|\,(c+a)$. Но, $a+b, b+c$ и $c+a$ се парни броеви, а d е непарен, па затоа $d\,|\,\frac{a+b}{2}, d\,|\,\frac{b+c}{2}$ и $d\,|\,\frac{c+a}{2}$, т.е. $d\,|\,d'$. Обратно, од $d'\,|\,\frac{a+b}{2}, d'\,|\,\frac{b+c}{2}$ следува $d'\,|\,\frac{a-c}{2}$ и како $d'\,|\,\frac{c+a}{2}$, добиваме $d'\,|\,a$. Аналогно наоѓаме $d'\,|\,b$ и $d'\,|\,c$, па затоа $d'\,|\,d$.

Конечно, од $d\,|\,d'$ и $d'\,|\,d$ следува $d=d'$, што и требаше да се докаже.

13. Ако за рационалниот број x вредноста на изразот $2x^4+3x+1$ е цел број тогаш и x е цел број. Докажи!

Решение. Од x е рационален следува $x=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ и $(m,n)=1$. Нека $2x^4+3x+1=k, k\in\mathbb{Z}$. Ако во последното равенство замениме $x=\frac{m}{n}$ добиваме

$$2(\tfrac{m}{n})^4+3\tfrac{m}{n}+1=k \text{, т.е. } 2m^4+3mn^3+n^4=kn^4.$$

Значи,

$$2m^4=n^3(kn-3m-n),$$

од каде следува $n^3\,|\,2m^4$. Но, $(m,n)=1$, па затоа имаме $n^3\,|\,2$, што значи $n=1$. Конечно, $x=m$, $m\in\mathbb{Z}$, што и требаше да се докаже.

14. Определи ги сите природни броеви n за кои дропката $\frac{5n+6}{8n+7}$ може да се скрати.

Решение. Имаме,

$$(5n+6,8n+7)=(5n+6,3n+1)=(3n+1,2n+5)$$
$$=(2n+5,n-4)=(n-4,13).$$

Значи, дропката $\frac{5n+6}{8n+7}$ може да се скрати само ако $n=13d+4$, $d=1,2,3,...$ и тоа со бројот 13.

15. Низата $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$t_1=2,\ t_{n+1}=t_n^2-t_n+1, \text{ за } n\geq 1.$$

Докажи дека за $m\neq n$ броевите t_m и t_n се заемно прости.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m<n$. Тогаш

$$\begin{aligned} &t_n-1=t_{n-1}(t_{n-1}-1),\\ &t_{n-1}-1=t_{n-2}(t_{n-2}-1),\\ &......................................\\ &t_2-1=t_1(t_1-1). \end{aligned} \tag{1}$$

Јасно, низата $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотоно расте, па затоа $t_n>1$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако ги помножиме равенствата добиваме

$$t_n=1+t_1t_2...t_m...t_{n-1}. \tag{2}$$

Ако d е заеднички делител на t_n и t_m, тогаш од (2) следува дека $d\,|\,1$, што значи $d=1$, па затоа $(t_n,t_m)=1$, т.е. за $m\neq n$ броевите t_m и t_n се заемно прости.

16. Нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека членовите на низата $F_n=(2k)^{2^n}+1$, $n=1,2,3,...$ се по парови заемно прости броеви.

Решение. Нека $m<n$. За секој x и за секој $p\in\mathbb{N}$ точно е равенството

$$x^{2p}-1=(x+1)(x^{2p-1}-x^{2p-2}+x^{2p-3}-x^{2p-4}+...+x^3-x^2+x-1). \tag{1}$$

Во (1) ставаме $x=(2k)^{2m}$ и $p=2^{n-m-1}$ и добиваме

$$F_n-2=F_m[(2k)^{2^n-2^m}-(2k)^{2^n-2\cdot2^m}+(2k)^{2^n-3\cdot2^m}-...+(2k)^{2^m}-1]. \tag{2}$$

Од (2) следува дека $F_m\,|\,(F_n-2)$. Нека $d=(F_m,F_n)$. Бидејќи сите членови на низата $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ се непарни добиваме дека d е непарен број. Понатаму, од $F_m\,|\,(F_n-2)$ следува $F_n-2=F_mk$ и како $F_m=da, F_n=db$, за некои $a,b\in\mathbb{N}$

наоѓаме $db-2=dak$, т.е. $d(b-ak)=2$, што значи $d\,|\,2$. Но, d е непарен број, па од $d\,|\,2$ следува $d=1$, т.е. $(F_m,F_n)=1$, што и требаше да се докаже.

17. Докажи дека:
   a) Постои бесконечна растечка низа по парови заемно прости триаголни броеви, т.е. броеви од облик
$$t_n=\frac{n(n+1)}{2},\ n=1,2,3,\dots .$$
   b) Постои бесконечна растечка низа по парови заемно прости тетраедарски броеви, т.е. броеви од облик
$$T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ n=1,2,3,\dots .$$

Решение. а) Ќе докажеме дека ако за некој природен број m постојат m триаголни броеви $a_1<a_2<\dots<a_m$, по парови заемно прости, тогаш постои триаголен број $t>a_m$ таков што $(t,a_1a_2\dots a_m)=1$.

Навистина, нека $a=a_1a_2\dots a_m$. Имаме
$$(a,a+1)=(a,2a+1)=1,$$
па затоа
$$(a,t_{2a+1})=(a,\tfrac{(2a+1)(2a+2)}{2})=(a,(a+1)(2a+1))=1,$$
што значи дека $a_{m+1}=t_{2a+1}$ е триаголен број поголем од a_m и заемно прост со $a=a_1a_2\dots a_m$.

b) Ќе докажеме дека ако за некој природен број m постојат m тетраедарни броеви $a_1<a_2<\dots<a_m$, по парови заемно прости, тогаш постои тетраедарен број $T>a_m$ таков што $(T,a_1a_2\dots a_m)=1$.

Навистина, нека $a=a_1a_2\dots a_m$. Имаме
$$(a,2a+1)=(a,3a+1)=(a,6a+1)=1,$$
па затоа
$$(a,T_{6a+1})=(a,\tfrac{(6a+1)(6a+2)(6a+3)}{6})=(a,(2a+1)(3a+1)(6a+1))=1,$$
што значи дека $a_{m+1}=T_{6a+1}$ е триаголен број поголем од a_m и заемно прост со $a=a_1a_2\dots a_m$.

18. Определи ги сите цели броеви n така што бројот $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ е рационален.

Решение. Нека a и b се заемно прости природни броеви такви што важи $\frac{4n-2}{n+5}=\frac{a^2}{b^2}$. Од последното равенство добиваме
$$n=\frac{2b^2+5a^2}{4b^2-a^2}=-5+\frac{22b^2}{4b^2-a^2}.$$

Бидејќи $(b^2,4b^2-a^2)=(b^2,a^2)=1$, од последното равенство следува дека $4b^2-a^2\,|\,22$. Ако a е парен број, тогаш $4\,|\,22$, што не е точно, па затоа a е непарен број. Последното значи дека остатокот при делењето на $4b^2-a^2$ со 4 е 3. Целобројни делители на 22 кои при делење со 4 даваат остаток 3 се -1 и 11, па затоа $4b^2-a^2=-1$ или $4b^2-a^2=11$. Во првиот случај добиваме $b=0$, што не е можно. Во вториот случај добиваме $2b-a=1$ и $2b+a=11$, од каде добиваме $a=5$, $b=3$ и $n=13$.

19. Нека a,b и c се природни броеви такви што барем еден од нив е заемно прост со останатите два. Докажи дека постојат природни броеви x,y и z такви што $x^a=y^b+z^c$.

Решение. 1) Нека $(a,b)=(a,c)=1$. Тогаш $(a,bc)=1$ и затоа постојат цели броеви u и v такви што $ua+vbc=1$. Според тоа, a е делител на $-vbc+1$. Ако $k\geq 1$ е природен број таков што a е делител на $-v-k$, тогаш a е делител на $kbc+1$, т.е. $kbc+1=at$. Тогаш за $x=2^t$, $y=2^{kc}$, $z=2^{kb}$ имаме

$$y^b+z^c=2^{kbc}+2^{kbc}=2^{kbc+1}=(2^t)^a=x^a.$$

2) Нека $(c,b)=(c,a)=1$. Тогаш $(c,ab)=1$ и како во 1) следува дека постои природен број k таков што c е делител на $kab+1$, т.е. $kab+1=ct$. Тогаш за $x=2(2^a-1)^{kb}$, $y=(2^a-1)^{ka}$, $z=(2^a-1)^t$ имаме

$$x^a-y^b=2^a(2^a-1)^{kab}-(^a-1)^{kab}=(2^a-1)^{kab+1}=z^c.$$

20. Определи ги сите природни броеви n, за кои множеството

$$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$$

може да се раздели на две множества такви што производот на сите елементи од едното множество е еднаков на производот на сите елементи од другото множество.

Решение. *Лема.* Меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој е заемно прост со останатите.

Доказ. Меѓу шест последователни природни броеви постојат три последователни непарни броеви. Еден од нив е делив со три, а најмногу еден од нив е делив со 5. Според тоа, меѓу шест последователни природни броеви постои еден кој не е делив со два, три и пет. Тој број е заемно прост со останатите броеви, бидејќи најголем заеднички делител на два броја, за кои разликата меѓу нив не е поголема од пет може да биде само еден од броевите 1, 2, 3, 4 или 5. ■

Множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ го делиме на две подмножества така што производот на броевите од едното подмножество е еднаков на производот на броевите од другото подмножество. Меѓу елементите од почетното множество постои еден кој е заемно прост со останатите. Тој е множител во еден од производите, и го дели другиот производ. Ова е можно само ако тој број е 1. Во множеството $\{1,2,3,4,5\}$ само еден број е делив со 5. Затоа еден од производите е делив со 5, а другиот не е, што не е можно, бидејќи тие треба да се еднакви.

Значи, во множеството природни броеви не постои број n кој што го има бараното својство.

21. На табла се запишани 100 по парови различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{100}$. Потоа, под секој број a_i е запишан број b_i еднаков на збирот на a_i и најголемиот заеднички делител на останатите 99 почетни броеви. Колку најмногу по парови може да се различни меѓу броевите $b_1, b_2, ..., b_{100}$.

Решение. Ако земеме $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i, i = 1,2,...,99$, тогаш $b_1 = b_{100} = 3$, па затоа меѓу броевите $b_1, b_2, ..., b_{100}$ нема повеќе од 99 по парови различни броеви.

Ќе докажеме дека меѓу броевите $b_1, b_2, ..., b_{100}$ има 99 по парови различни. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1 < a_2 < ... < a_{100}$. Нека d_i е најголемиот заеднички делител на сите почетни 99 броеви без a_i. Тогаш $b_i = a_i + d_i$. Нека $d_k = \max\{d_1, d_2, ..., d_{100}\}$. Тогаш за $i \neq k$ броевите a_i се деливи со d_k. Според тоа, при $i < j$ и $i \neq k \neq j$ разликата $a_j - a_i$ исто така е делива со d_k. Бидејќи оваа разлика е позитивна, имаме $a_j - a_i \geq d_k \geq d_i$. Тогаш $b_j > a_j \geq a_i + d_i = b_i$, па затоа $b_i \neq b_j$. Добивме дека $b_i \neq b_j$, за $i \neq k \neq j$, што значи дека сите 99 броеви b_i при $i \neq k$ се по парови различни.

22. За секој ненегативен цел број n дефинираме $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, ..., A_{1999}$.

Решение. Имаме $A_0 = 35$ и $A_1 = 8 + 6561 + 5^8 = 6569 + 5^8$, што значи дека A_1 не е делив со 5. Затоа најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, ...,$ A_{1999} е 7 или 1. Но, остатокот при делење на $2^3, 3^6, 5^6$ при делење со 7 е 1, па затоа остатокот при делење на $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ со 7 е ист со остатокот на бројот $1 + 3^2 + 5^2 = A_0$, а тој е делив со 7. Значи сите броеви $A_0, A_1,$

$\ldots, A_{1999}$ се деливи 7. Според тоа, $(A_0, A_1, \ldots, A_{1999}) = 7$.

23. Нека $x, y \neq -1$ се цели броеви такви што $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ е цел број. Докажи дека бројот $x^4 y^{44} - 1$ е делив со $x+1$.

Решение. Забележуваме $x^4 y^{44} - 1 = x^4(y^{44} - 1) + x^4 - 1$. Јасно, $x^4 - 1$ е делив со $x+1$, $y^{44} - 1$ е делив со $y^4 - 1$. Затоа доволно е да докажеме дека $y^4 - 1$ е делив со $x+1$.

Нека $\frac{x^4-1}{y+1} = \frac{a}{b}, \frac{y^4-1}{x+1} = \frac{c}{d}$, каде a, b, c, d се цели броеви за кои важи $(a,b) = (c,d) = 1$ и $b, d > 0$. Добиваме $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = t$, т.е. $ad + bc = bdt$ за некој цел број t. Значи, $b \mid ad + bc$, па затоа $b \mid ad$, т.е. $b \mid d$. Аналогно се добива дека $d \mid b$ и како b и d се природни броеви заклучуваме дека $b = d$.

Од друга страна

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x^4-1}{y+1} \cdot \frac{y^4-1}{x+1} = (x-1)(x^2+1)(y-1)(y^2+1)$$

е цел број, и бидејќи $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се нескратливи дропки следува дека $b = d = 1$. Значи $\frac{y^4-1}{x+1} = c$ е цел број, односно $x+1 \mid y^4 - 1$.

24. Нека c е ненегативен цел број. Дефинираме $a_n = n^2 + c$, $n \geq 1$. Нека d_n е најголемиот заеднички делител на a_n и a_{n+1}.

а) Ако $c = 0$, докажи дека $d_n = 1$ за секој $n \geq 1$.

б) Ако $c = 1$, докажи дека $d_n \in \{1, 5\}$ за секој $n \geq 1$.

в) Докажи дека $d_n \leq 4c + 1$ за секој $n \geq 1$.

Решение. а) Нека $c = 0$. Тогаш

$$d_n = (a_n, a_{n+1}) = (n^2, n^2 + 2n + 1) = (n^2, 2n + 1) = 1$$

б) Нека $c = 1$. Ако $n = 1$, тогаш $d_1 = (a_1, a_2) = (2, 5) = 1$. Ако $n \geq 2$, тогаш бидејќи n и $2n+1$ се заемно прости броеви добиваме

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n, a_{n+1}) = (n^2 + 1, n^2 + 2n + 2) = (n^2 + 1, 2n + 1) \\ &= (n^2 - 2n, 2n + 1) = (n(n-2), 2n + 1) = (n - 2, 2n + 1) \\ &= (n - 2, 2n + 1 - 2(n - 2)) = (n - 2, 5) \in \{1, 5\}. \end{aligned}$$

в) Од $d_n \mid a_n$ и $d_n \mid a_{n+1}$ следува $d_n \mid a_n + a_{n+1}$ и $d_n \mid a_n - a_{n+1}$. Оттука следува $d_n \mid 2(a_n + a_{n+1})$ и $d_n \mid -(a_n - a_{n+1})^2$, па затоа

$$d_n \mid 2(a_n + a_{n+1}) - (a_n - a_{n+1})^2 = 2(2n^2 + 2n + 2c + 1) - (2n+1)^2 = 4c + 1,$$

од каде следува $d_n \le 4c+1$.

25. Нека a, b и c се природни броеви такви што $\frac{bc}{b+a}, \frac{ca}{c+a}$ и $\frac{ab}{a+b}$ се природни броеви. Докажи дека $(a,b,c) > 1$.

Решение. Нека $(a,b) = d_1, (b,c) = d_2, (c,a) = d_3$. Постојат природни броеви $a_1, b_1, b_2, c_2, c_3, a_3$ такви што $(a_1, b_1) = (b_2, c_2) = (c_3, a_3) = 1$ и

$$a = a_1 d_1, b = b_1 d_1, b = b_2 d_2, c = c_2 d_2, c = c_3 d_3, a = a_3 d_3.$$

Според тоа, броевите $\frac{b_2 c_2 d_2}{b_2 + c_2}, \frac{a_3 c_3 d_3}{a_3 + c_3}, \frac{a_1 b_1 d_1}{a_1 + b_1}$ се природни. Бидејќи

$$(a_1 + b_1, a_1 b_1) = (b_2 + c_2, b_2 c_2) = (a_3 + c_3, a_3 c_3) = 1$$

добиваме $a_1 + b_1 \mid d_1, b_2 + c_2 \mid d_2$ и $a_3 + c_3 \mid d_3$. Значи, $a_1 + b_1 \le d_1, b_2 + c_2 \le d_2$ и $a_3 + c_3 \le d_3$.

Ќе докажеме дека $(d_1, d_2) > 1$. Нека $(d_1, d_2) = 1$. Од $b_1 d_1 = b = b_2 d_2$ следува дека $d_1 \mid b_2$ и $d_2 \mid b_1$, т.е. $d_1 \le b_2$ и $d_2 \le b_1$. Според тоа,

$$b_1 + b_2 \ge d_1 + d_2 \ge (a_1 + b_1) + (b_2 + c_2), \text{ т.е. } 0 \ge a_1 + c_2,$$

што не е можно. Значи, $(d_1, d_2) = t > 1$. Сега, од $t \mid d_1, t \mid d_2$ следува $t \mid a, t \mid b$ и $t \mid c$, па затоа $(a,b,c) > 1$.

26. Нека a и b се различни природни броеви такви што бројот $a^2 + ab + b^2$ е делител на бројот $ab(a+b)$. Докажи дека $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Решение. Нека $(a,b) = c$. Постојат цели броеви x и y такви што $a = xc$, $b = yc$ и $(x,y) = 1$.

Понатаму, од $a^2 + ab + b^2 \mid ab(a+b)$ следува $x^2 + xy + y^2 \mid xy(x+y)c$. Бидејќи

$$(x^2 + xy + y^2, x) = (y^2, x) = 1,$$

$$(x^2 + xy + y^2, y) = (x^2, y) = 1 \text{ и}$$

$$(x^2 + xy + y^2, x+y) = (x(x+y) + y^2, x+y) = (y^2, x+y) = (y^2, x) = 1,$$

следува дека $x^2 + xy + y^2 \mid c$. Значи, $c > x^2 + xy + y^2$. Според тоа,

$$|a-b|^3 = |c(x-y)|^3 = c^2 |x-y|^3 \cdot c \ge c^2 \cdot 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) \ge c^2 xy = ab,$$

од каде следува $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

27. Нека m и n се природни броеви такви што $(m,n) = 1$. Пресметај

$$(5^n+7^n, 5^m+7^m).$$

Решение. Нека $s_n=5^n+7^n$. Ако $n\geq 2m$ забележуваме дека важи

$$5^n+7^n=5^n+5^m7^{n-m}+7^m5^{n-m}+7^n-7^m5^{n-m}-5^m7^{n-m}$$
$$=(5^m+7^m)(5^{n-m}+7^{n-m})-5^m7^m(5^{n-m}+7^{n-m}),$$

т.е. $s_n=s_ms_{n-n}-5^m7^ms_{n-2m}$. Оттука следува

$$(s_n,s_m)=(s_ms_{n-n}-5^m7^ms_{n-2m},s_m)=(s_m,s_{n-2m}).$$

На ист начин, ако $m<n<2m$ добиваме $s_n=s_ms_{n-m}-5^{n-m}7^{n-m}s_{2m-n}$, од каде следува

$$(s_n,s_m)=(s_m,s_{2m-n}).$$

Од Евклидовиот алгоритам добиваме:

Ако $m+n$ е парен број, тогаш $(s_n,s_m)=(s_1,s_1)=12$.

Ако $m+n$ е непарен број, тогаш $(s_n,s_m)=(s_0,s_1)=2$.

28. Определи го најголемиот природен број n кој не може да се претстави како збир на три броја поголеми од 1 кои се по парови заемно прости.

Решение. *Одговор*: бараниот број е 17.

Прво ќе докажеме дека 17 не може да се претстави како збир на три броја поголеми од 1 кои се по парови заемно прости. Нека го претпоставиме спротивното. Овие три броја мора да се непарни, при што меѓу нив мора да биде бројот 3, бидејќи во спротивно најмалиот можен збир ќе биде $5+7+9=21>17$. Понатаму, 3 и 9 не се заемно прости, па затоа меѓу нив не смее да биде бројот 9. Најмалиот може збир е $3+5+7=15<17$, а следниот најмал можен збир е $3+5+11=19>17$. Заради тоа бројот 17 не може да се претстави како збир на три броја по парови заемно прости броеви поголеми од 1.

Сега ќе докажеме дека секој број поголем од 17 може да се претстави на саканиот начин. Прво ќе докажеме за парни броеви. Имаме:

$$6k+4=(6k-1)+2+3,\quad 6k+2=(6k-5)+3+4,\ 6k=(6k-5)+2+3,$$

или

$$4k+2=(2k-1)+(2k+1)+2,\quad 4k=(2k-3)+(2k+1)+2.$$

Сега тврдењето ќе го докажеме за непарни броеви. Имаме:

$$12k+1=(6k-7)+(6k-1)+9,\quad 12k+3=(6k+1)+(6k-1)+3,$$
$$12k+5=(6k-5)+(6k+1)+9,\quad 12k+7=(6k-1)+(6k+5)+3,$$
$$12k+9=(6k-1)+(6k+1)+9,\quad 12k+11=(6k+1)+(6k+7)+3.$$

Лесно се проверува дека во сите случаи собирците се по парови заемно прости. Понатаму, за $k\geq 1$ сите собирци се поголеми од 1, освен во претставувањата на $12k+5$ и $12k+1$ за $k=1$, но тоа се броевите 17 и 13, кои се помали или еднакви на 17.

29. Нека a е цел број. Докажи дека за секој реален број $x, x^2 < 3$, броевите $\sqrt{3-x^2}$ и $\sqrt[3]{a-x^3}$ не можат истовремено да бидат рационални броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека $m=\sqrt{3-x^2}$ и $n=\sqrt[3]{a-x^3}$ се рационални броеви. Тогаш, $x^2 = 3-m^2$ и $x^3 = a-n^3$, па затоа

$$a-n^3 = \pm(3-m^2)\sqrt{3-m^2}\,.$$

Бидејќи левата страна на последното равенство е рационален број следува дека и $q=\sqrt{3-m^2}$ е рационален број. Со квадрирање се добива $m^2+q^2=3$. Бидејќи m и q се рационални броеви постојат цели броеви u,v,w такви што $m=\frac{u}{w}$ и $q=\frac{v}{w}$ и притоа $(u,w)=(v,w)=1$. Ако замениме во $m^2+q^2=3$ добиваме $3w^2=u^2+v^2$. Јасно, $3\,|\,u^2+v^2$, па затоа $3\,|\,u$ и $3\,|\,v$. Според тоа, $9\,|\,3w^2$, т.е. $3\,|\,w$. Последното противречи на претпоставката дека $(u,w)=(v,w)=1$, па од добиената противречност следува точноста на тврдењето на задачата.

30. Нека a,m и n се природни броеви, при што n е непарен број. Докажи, дека $(a^n-1, a^m+1)\le 2$.

Решение. Нека $(a^n-1, a^m+1)=d$. Тогаш за некои природни броеви k и r важи $a^n = kd+1$ и $a^m = rd-1$. Според тоа,

$$a^{mn} = (a^n)^m = (kd+1)^m = td+1,$$

за некој цел број t, и

$$a^{mn} = (a^m)^n = (rd-1)^n = ud-1,$$

за некој цел број u, бидејќи n е непарен број. Значи,

$$td+1 = ud-1, \text{ т.е. } d(u-t)=2,$$

па затоа $d\,|\,2$.

31. Докажи, дека бројот $a^{2^n}+1$ е делител на бројот $a^{2^m}-1$, за $m>n$, и дека за $a,m\in\mathbb{N}, m\ne n$ важи

$$(a^{2^n}+1, a^{2^m}+1)=\begin{cases}2, & \text{ако } a \text{ е непарен број.}\\ 1, & \text{ако } a \text{ е парен број.}\end{cases}$$

Решение. Од $(a^{2^n}+1)(a^{2^n}-1)=a^{2^{n+1}}-1$ добиваме $a^{2^n}+1\,|\,a^{2^{n+1}}-1$. Првото тврдење на задачата се покажува со индукција по $m>n$. Исто така, за $m>n$ важи

$$a^{2^m}+1=k(a^{2^n}+1)+2\,,$$

т.е. $(a^{2^n}+1,a^{2^m}+1)$ е делител на бројот 2, па сега второто тврдење следува од парноста на бројот a.

32. Нека $a\in\mathbb{Z}$, $a>1$ и $m,n\in\mathbb{N}$. Определи го (a^m-1,a^n-1).

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $n\geq m$. Ако $m|n$, тогаш $(m,n)=m$ и $n=mq$. Според тоа,

$$a^n-1=(a^m)^q-1=(a^m-1)[(a^m)^{q-1}+(a^m)^{q-2}+...+1]\,,$$

т.е. $(a^m-1)\,|\,(a^n-1)$, па затоа

$$(a^m-1,a^n-1)=a^m-1=a^{(m,n)}-1\,.$$

Акоа $m\nmid n$, тогаш $n=mq+r_1$, за некој $0<r_1<m$. Имаме

$$\begin{aligned}a^n-1&=a^{mq}a^{r_1}-1=a^{mq}a^{r_1}-a^{r_1}+a^{r_1}-1=a^{r_1}(a^{mq}-1)+(a^{r_1}-1)\\&=(a^m-1)A+(a^{r_1}-1),\end{aligned}\qquad(1)$$

каде $A\in\mathbb{Z}$. Од (1) следува

$$(a^n-1,a^m-1)=(a^m-1,a^{r_1}-1)\,.$$

Ако $r_2,r_3,...,r_s=(m,n)$ се ненултите остатоци во Еклидовиот алгоритам, тогаш од претходно изнесеното и фактот дека $r_s\,|\,r_{s-1}$ следува

$$\begin{aligned}(a^n-1,a^m-1)&=(a^m-1,a^{r_1}-1)=(a^{r_1}-1,a^{r_2}-1)=...\\&=(a^{r_{s-1}}-1,a^{r_s}-1)=a^{r_s}-1=a^{(m,n)}-1.\end{aligned}$$

33. Нека a и b се заемно прости непарни природни броеви. Определи ги сите можни вредности на бројот $(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1,2^b+2^{\frac{b+1}{2}}+1)$.

Решение. Од

$$(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1)(2^a-2^{\frac{a+1}{2}}+1)=(2^a+1)^2-2^{a+1}=2^{2a}+1\,,$$

следува

$$\begin{aligned}d&=(2^a+2^{\frac{a+1}{2}}+1,2^b+2^{\frac{b+1}{2}}+1)\,|\,(2^{2a}+1,2^{2b}+1)\,|\,(2^{4a}-1,2^{4b}-1)\\&=2^{(4a,4b)}-1=2^{4(a,b)}-1=2^4-1=15.\end{aligned}$$

Притоа, $3\nmid 2^{2a}+1$, па затоа $d|5$. Можни вредности се 1 и 5. За $a=b=1$ имаме $d=5$, а за $a=1,b=3$ имаме $d=1$.

34. Природните броеви m и n се такви што $(2m+1,2n+1)=1$. Определи ги сите вредности на

$$(2^{2m+1}+2^{m+1}+1, 2^{2n+1}+2^{n+1}+1).$$

Решение. Нека

$$d=(2^{2m+1}+2^{m+1}+1, 2^{2n+1}+2^{n+1}+1).$$

Не е тешко да се провери точноста на равенствата:

$$(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)(2^{4m+2}-1)=2^{8m+4}-1,$$

$$(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{4n+2}-1)=2^{8n+4}-1.$$

Навистина

$$\begin{aligned}(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)(2^{2m+1}-2^{m+1}+1)(2^{4m+2}-1)&=[(2^{2m+1}+1)^2-(2^{m+1})^2](2^{4m+2}-1)\\&=(2^{4m+2}+2^{2m+2}+1-2^{2m+2})(2^{4m+2}-1)\\&=(2^{4m+2}+1)(2^{4m+2}-1)=(2^{4m+2})^2-1^2=2^{8m+4}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{4n+2}-1)&=[(2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2](2^{4n+2}-1)\\&=(2^{4n+2}+2^{2n+2}+1-2^{2n+2})(2^{4n+2}-1)\\&=(2^{4n+2}+1)(2^{4n+2}-1)=(2^{4n+2})^2-1^2=2^{8n+4}-1\end{aligned}$$

Јасно,

$$d\,|\,(2^{2m+1}+2^{m+1}+1)\,|\,(2^{4m+2}+1)\,|\,(2^{8m+4}-1) \text{ и}$$

$$d\,|\,(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)\,|\,(2^{4n+2}+1)\,|\,(2^{8n+4}-1).$$

Според тоа,

$$d\,|\,(2^{8m+4}-1, 2^{8n+4}-1)=2^{(8m+4,8n+4)}-1=2^{4(2m+1,2n+1)}-1=2^{4\cdot 1}-1=15.$$

Но, делители на бројот 15 се $d=1,3,5,15$. Од равенството

$$2^{2m+1}+2^{m+1}+1=2\cdot 2^{2m}+2^{m+1}+1=2(3+1)^m+2^{m+1}+1,$$

е јасно дека $d\neq 3$, а бидејќи $15=3\cdot 5$, добиваме дека $d\neq 15$.
За $m=1, n=2$ се добива $d=1$, а за $m=3, n=4$ се добива $d=5$.

35. Нека a и b се природни броеви такви што $a!+b!\,|\,a!b!$. Докажи го неравенството

$$3a\geq 2b+2.$$

Решение. Ако $a>b$, тогаш $3a>2b+a$. Понатаму, за $a=b$ имаме $2b!\,|\,a!b!$, од каде следува $2\,|\,a!$, па затоа $a\geq 2$, т.е. $3a\geq 2b+2$. Сега нека $a<b$ и нека $c=b-a$. Неравенството кое што треба да го докажеме го добива обликот $a\geq 2c+2$.

Да го претпоставиме спротивното, односно нека $a\leq 2c+1$. Дефинираме

$$M=\tfrac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)...(a+c).$$

Бидејќи $a!+b!|a!b!$, имаме $1+M\,|\,a!M$, од каде добиваме $1+M\,|\,a!$. Понатаму, $c<a$, бидејќи во спротивно $1+M>a!$, што противречи на $1+M\,|\,a!$. Да забележиме дека $c!|M$, бидејќи M е производ од c последователни природни броеви.

Следува $(1+M,c!)=1$, од каде следува

$$1+M\,|\,\tfrac{a!}{c!}=(c+1)(c+2)\cdot\ldots\cdot a \qquad (1)$$

Ако $a\le 2c$, тогаш $\frac{a!}{c!}$ е производ од $a-c\le c$ природни броеви помали од a, каде M е производот на c природните броеви поголеми од a.

Тогаш $1+M>\frac{a!}{c!}$, што е противречност.

Останува уште да го исклучиме случајот кога $a=2c+1$. Од $a+1=2(c+1)$ имаме $c+1|M$. Сега од (1) следува $1+M\,|\,(c+2)(c+3)\cdot\ldots\cdot a$. Според тоа, $(c+2)(c+3)\cdot\ldots\cdot a$ е производ од $a-c-1=c$ природни броеви кои се помали од a, па затоа производот е помал од $1+M$, што е противречност.

36. Нека a,b и c се природни броеви такви што барем еден од нив е заемно прост со останатите два. Докажи, дека постојат природни броеви x,y и z такви што $x^a=y^b+z^c$.

Решение. 1) Нека $(a,b)=(a,c)=1$. Тогаш $(a,bc)=1$ и затоа постојат цели броеви u и v такви што $ua+vbc=1$. Според тоа, a е делител на $-vbc+1$. Ако $k\ge 1$ е природен број таков што a е делител на $-v-k$, тогаш a е делител на $kbc+1$, т.е. $kbc+1=at$. Тогаш за $x=2^t,\ y=2^{kc},\ z=2^{kb}$ имаме

$$y^b+z^c=2^{kbc}+2^{kbc}=2^{kbc+1}=(2^t)^a=x^a.$$

2) Нека $(c,b)=(c,a)=1$. Тогаш $(c,ab)=1$ и како во 1) следува дека постои природен број k таков што c е делител на $kab+1$, т.е. $kab+1=ct$. Тогаш за $x=2(2^a-1)^{kb},\ y=(2^a-1)^{ka},\ z=(2^a-1)^t$ имаме

$$x^a-y^b=2^a(2^a-1)^{kab}-(^a-1)^{kab}=(2^a-1)^{kab+1}=z^c.$$

37. Нека $a,b,m,n\in\mathbb{N}$ и $(a,b)=1, a>1$. Ако $(a^n+b^n)\,|\,(a^m+b^m)$, тогаш $n\,|\,m$. Докажи!

Решение. Нека $m=qn+r$, $0\le r<n$ и да ставиме

$$d_k=a^{m-kn}+(-1)^k b^{m-kn},\ 0\le k\le q.$$

Точно е равенството

$$a^n d_{k+1}=d_k+(-1)^{k+1}b^{m-(k+1)n}(a^n+b^n), 0\le b\le q-1.$$

Од $(a,b)=1$ следува $(a^n, a^n+b^n)=1$, па од претходното равенство следува дека ако $(a^n+b^n)\,|\,d_k$ за некој k, тогаш $(a^n+b^n)\,|\,d_{k+1}$. Но, по услов $(a^n+b^n)\,|\,d_0=a^m+b^m$, па затоа $(a^n+b^n)\,|\,d_q=a^r+(-1)^q b^r$. Од друга страна имаме $|a^r+(-1)^q b^r|\le|a^r|+|b^r|<a^n+b^n$, па затоа $a^r+(-1)^q b^r=0$, што е можно само ако q е непарен број и $r=0$. Според тоа, $n\,|\,m$.

38. Со $w(x)$ да го означиме најголемиот непарен делител на природниот број x. Ако a и b се заемно прости природни броеви такви што $a+w(b+1)$ и $b+w(a+1)$ се степени на бројот 2, тогаш и броевите $a+1$ и $b+1$ се степени на бројот 2. Докажи!

Решение. Ќе ја користиме вообичаената ознака $2^r \,\|\, x$ ако $2^r\,|\,x$ и $2^{r+1}\nmid x$. Парот (a,b) кој ги задоволува условите ќе го нарекуваме $(k,l)-$*решение* ако $2^k \,\|\, a+1$ и $2^l \,\|\, b+1$.

Да разгледаме некое $(k,l)-$решение. Нека $a=2^k c-1$, $b=2^l d-1$ и

$$a+w(b+1)=2^k c+d-1=2^m \text{ и } b+w(a+1)=2^l d+c-1=2^n. \quad (1)$$

Ако $c=1$, тогаш и $d=1$ (и обратно), па тогаш $(a,b)=(2^k-1, 2^l-1)$. Нека претпоставиме дека $c,d>1$. Од (1) следува

$$2^k \,\|\, d-1=2^k b' \text{ и } 2^l \,\|\, c-1=2^l a'$$

за некои непарни броеви a', b', па со замена во (1) добиваме

$$2^l a'+b'+1=2^{m-k} \text{ и } 2^k b'+a'+1=2^{n-l}.$$

Оттука повторно $2^k \,\|\, a'+1$ и $2^l \,\|\, b'+1$, па претходните равенки даваат

$$a'+w(b'+1)=a'+\tfrac{b'+1}{2^l}=2^{m-k-l} \text{ и } b'+w(a'+1)=2^{n-k-l}.$$

Според тоа, парот $(a',b')=(\frac{a+1-2^k}{2^{k+l}}, \frac{b+1-2^l}{2^{k+l}})$ исто така е $(k,l)-$решение и притоа важи $a'<a, b'<b$. Дефинираме низи $\{a_n\},\{b_n\}$ со $a_1=a, b_1=b$ и $a_{n+1}=\frac{a_n+1-2^k}{2^{k+l}}, b_{n+1}=\frac{b_n+1-2^l}{2^{k+l}}$. Од претходните разгледувања следува дека секој пар (a_i,b_i) е $(k,l)-$решение и $a_n=2^k-1, b_n=2^l-1$, за некој n. Оттука со едноставна индукција наоѓаме

$$a=\frac{2^{n(k+l)}-1}{2^{k+l}-1}(2^k-1),\ b=\frac{2^{n(k+l)}-1}{2^{k+l}-1}(2^l-1).$$

Но, броевите a и b се заемно прости, па затоа мора да е $n=1$, т.е.

$$a=2^k-1 \text{ и } b=2^l-1$$

што и требаше да се докаже.

39. Определи аритметичка прогресија $ak+b$, $k=0,1,2,...$, каде $(a,b)=1$ која не содржи ниту еден член на низата на Фибоначи.

Решение. Такви се, на пример, прогресиите $11k+4, 11k+6, 11k+7$ и $11k+9$, $k=0,1,2,...$. Навистина лесно се гледа дека броевите $u_1,u_2,...,u_{12}$ при делење со 11 соодветно ги даваат остатоците: $1,1,2,3,5,8,2,10,1,0,1,1$. Со индукција по n можеме да докажеме дека $11|u_{n+10}-u_n$, за $n=1,2,...$, што значи дека низата остатоци од делењето со 11 на членовите на низата на Фибоначи е периодична со десетчлена периода. Во оваа периода не се појаввуват остатоците $4,6,7,9$, па затоа низите $11k+4, 11k+6, 11k+7$ и $11k+9$, $k=0,1,2,...$ ги задоволуваат условите на задачата.

40. Нека $a_0,a_1,a_2,...$ е низа природни броеви таква што најголемиот заеднички делител на два нејзини последователни членови е поголем од претходниот член, односно $(a_i,a_{i+1})>a_{i-1}$. Докажи дека $a_n\geq 2^n$, за секој $n=0,1,2,...$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.
Јасно, $a_n>a_{n-1}$, за секој природен број n. Имаме, $a_0\geq 1$. Нека

$$(a_1,a_2)=d>a_0\geq 1$$

од каде следува дека $a_1\geq 2$ и $a_2\geq 2\cdot 2=4$.

Нека претпоставиме дека за $i\in\{3,4,...,n-1\}$ важи $a_i\geq 2^i$. Ќе докажеме дека $a_n\geq 2^n$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека $a_n<2^n$. Тогаш,

$$2^{n-1}\leq a_{n-1}<a_n<2^n.$$

Сега,

$$(a_n,a_{n-1})=d>a_{n-2}\geq 2^{n-2} \text{ и } a_n=kd<2^n, k\geq 2.$$

Ако $k\geq 4$, тогаш бидејќи $d>2^{n-2}$ добиваме дека $a_n=kd>2^2\cdot 2^{n-2}=2^n$, што противречи на претпоставката дека $a_n<2^n$. Значи, мора да е $k=2$ или $k=3$.

1) Ако $k=2$, тогаш $a_n=2d$, од што следува $a_{n-1}=d\geq 2^{n-1}$. Оттука имаме дека $a_n=2d\geq 2^n$, што противречи на претпоставката дека $a_n<2^n$.
2) Ако $k=3$, тогаш $a_n=3d$. Оттука следува $a_{n-1}=d$ или $a_{n-1}=2d$. Ако $a_{n-1}=d$ имаме контрадикција како во случајот 1). Значи $a_{n-1}=2d.$ Нека $(a_{n-1},a_{n-2})=(2d,a_{n-2})=s>a_{n-3}\geq 2^{n-3}$. Од $2d>a_{n-2}$ следува $2d=st$,

$t \geq 2$. Сега, од $st = 2d = a_{n-1} < a_n < 2^n$ и $t \geq 2$ следува дека $s < 2^{n-1}$. Од $a_{n-1} = 2d = st \geq 2^{n-1}$, ако $t \geq 4$, тогаш $s \leq 2^{n-3}$. Последното не е можно бидејќи добивме дека $s > 2^{n-3}$. Останува дека $t = 2$ или $t = 3$. Ако $t = 2$, тогаш $s = d$, па оттука $(2d, a_{n-2}) = d$, т.е. $a_{n-2} = d$. Имаме

$$(a_n, a_{n-1}) = (3d, 2d) = d > a_{n-2} = d$$

што не е можно. Ако $t = 3$ тогаш $2d = 3s$. Добиваме

$$(a_{n-1}, a_{n-2}) = (3s, a_{n-2}) = s.$$

Ако $a_{n-2} = s \geq 2^{n-2}$, тогаш

$$2d \geq 3 \cdot 2^{n-2}, \text{ т.е. } d \geq \tfrac{3}{2} \cdot 2^{n-2}.$$

Оттука следува дека $a_n = 3d \geq \frac{9}{2} \cdot 2^{n-2} > 2^n$, што противречи на претпоставката дека $a_n < 2^n$.

Ако $a_{n-2} = 2s \geq 2^{n-2}$, тогаш $d = \frac{3}{2}s < 2s = a_{n-2}$. Тогаш

$$(a_n, a_{n-1}) = d > a_{n-2} > d,$$

што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува $a_n \geq 2^n$ за секој $n = 0,1,2,...$

41. Нека a, b, c и d се непарни природни броеви за кои:

(1) $0 < a < b < c < d$,

(2) $ad = bc$ и

(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ за некои природни броеви k и n.

Докажи дека $a = 1$.

Решение. Ќе докажеме дека $k > m$. Од $d(b-a) = b(d-c)$ и $b < d$ добиваме $d - c > b - a$, $a + d > b + c$, т.е. $2^k > 2^m$ од што следува $k > m$.

Од условите (2) и (3) следува $a(2^k - a) = b(2^m - b)$, т.е.

$$(b-a)(b+a) = 2^m(b - 2^{k-m}a).$$

Ако $b - a$ и $b + a$ се деливи со 4, тогаш $2b$ е делив со 4, што не е можно бидејќи b е непарен број. Значи, $2^{m-1} | (b-a)$ или $2^{m-1} | (b+a)$.

Во првиот случај

$$2^{m-1} | (b-a) \Rightarrow b - a \geq 2^{m-1} \Rightarrow c - a \geq 2^{m-1}$$
$$\Rightarrow b + c - 2^m > 2a \Rightarrow 0 > a,$$

што противречи на условот на задачата.

Во вториот случај имаме

$$2^{m-1}|(b+a) \quad \text{и} \quad b+a<b+c=2^m \quad \Rightarrow \quad b+a=2^{m-1}.$$

Но, a и b се непарни природни броеви, па затоа $a+b=2^{m-1}$ следува $(a,b)=1$. Понатаму, од $a+b=2^{m-1}$ и $b+c=2^m$ добиваме $c-a=2^{m-1}$ и како a и c се непарни броеви добиваме $(a,c)=1$.

Конечно, од $ad=bc$ следува $a|bc$ и како $(a,b)=1$ и $(a,c)=1$ добиваме дека $a=1$.

42. Нека $n,p,q\in\mathbb{N}$ се такви што $n>p+q$ и $x_0,x_1,...,x_n$ се природни броеви кои ги задоволуваат условите:
   a) $x_0=x_n$
   b) за секој $i\in\mathbb{N}$ таков што $1\le i\le n$ важи или $x_i-x_{i-1}=p$ или $x_i-x_{i-1}=-q$.

   Докажи дека постои пар на индекси (i,j) таков што $i<j$, $(i,j)\neq(0,n)$ и $x_i=x_j$.

   Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека p и q се заемно прости броеви, бидејќи ако $(p,q)=d>1$, тогаш може да го примениме решението на задачата за $p'=\frac{p}{d}$, $q'=\frac{q}{d}$ и $x_i^{'}=\frac{x_i}{d}$.

   Нека бројот на индексите $i\in\{1,2,...,n\}$ такви што $x_i-x_{i-1}=p$ е еднаков на k. Тогаш бројот на индексите $i\in\{1,2,...,n\}$ за кои $x_i-x_{i-1}=-q$ е еднаков на $n-k$. Бидејќи $x_n-x_0=0$ добиваме дека $kp=(n-k)q$, па затоа $k=aq$ и $n-k=ap$ за некој природен број a. Значи $n=a(p+q)$, каде $a>1$ бидејќи $n>p+q$.

   Нека $y_i=x_{i+p+q}-x_i$ за $i\in\{0,1,...,n-p-q\}$. Бидејќи $n>p+q$, постојат барем два такви броја y_i. Ќе покажеме дека барем еден од овие броеви y_i е нула и со тоа задачата ќе биде решена. Нека $S_i=\{i+1,i+2,...,i+p+q\}$ и нека r е бројот на сите индекси $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=p$. Тогаш бројот на сите $j\in S_i$ за кои $x_j-x_{j-1}=-q$ е $p+q-r$. Собирајќи ги овие равенства за сите $j\in S_i$, добиваме

$$y_i=rp-(p+q-r)q=(p+q)(r-q).$$

   Значи за секој i, $(p+q)|y_i$. Да ја разгледаме разликата

$$\begin{aligned} y_{i+1}-y_i &= (x_{i+p+q+1}-x_{i+1})-(x_{i+p+q}-x_i) \\ &= (x_{i+p+q+1}-x_{i+p+q})-(x_{i+1}-x_i). \end{aligned}$$

   Секој од броевите во заградата е p или $-q$, па затоа

$$y_{i+1}-y_i\in\{0,p+q,-(p+q)\}.$$

Да го разгледаме сега равенството

$$y_0+y_{p+q}+y_{2(p+q)}+...+y_{n-p-q}=0.$$

Тоа покажува дека броевите y_i не може да се сите позитивни или сите негативни. Значи, во низата $y_0,y_1,...,y_{n-p-q}$ постојат два броја кои имаат спротивни знаци. Бидејќи секое y_i се дели со $p+q$ и разликата меѓу два соседни броја е 0 или $\pm(p+q)$, добиваме дека некој од тие два броја мора да е еднаков на нула.

43. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков што $f(0)=f(1)=1$, a_0 е произволен цел број и нека низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е определена со

$$a_{n+1}=f(a_n),\ n=0,1,2,3,... . \tag{1}$$

Докажи, дека ако $m\neq n$, тогаш $(a_m,a_n)=1$.

Решение. За полиномот $f(x)$ имаме $f(x)=x(x-1)g(x)+ax+b$, $a,b\in\mathbb{Z}$ и $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Од условот на задачата следува $b=f(0)=1$ и $a=-b+f(1)=0$, т.е. $f(x)=x(x-1)g(x)+1$. Од последното равенство и од (1) следува дека за секој $n\geq 1$ важи

$$a_n=k_na_0a_1...a_{n-1}+1,\ k_n\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Навистина, за $n=1$ имаме

$$a_1=f(a_0)=a_0(a_0-1)g(a_0)+1=k_1a_0+1.$$

Нека претпоставиме дека за $n=m$ важи $a_m=k_ma_0a_1...a_{m-1}+1$. Тогаш за $n=m+1$ имаме

$$\begin{aligned}a_{m+1}=f(a_m)&=a_m(a_m-1)g(a_m)+1\\&=a_m(k_ma_0a_1...a_{m-1}+1-1)g(a_m)+1\\&=k_ma_0a_1...a_{m-1}a_mg(a_m)+1\\&=k_{m+1}a_0a_1...a_{m-1}a_m+1,\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m<n$ и ако $d=(a_m,a_n)$, тогаш од (2) следува $d\,|\,1$, т.е. $(a_m,a_n)=1$.

44. Најди алгоритам за наоѓање на сите парови природни броеви, такви што нивниот збир и производ се квадрати на природни броеви.

Решение. Нека a и b се произволни природни броеви, c^2 е најголемиот делител на a^2+b^2 кој е точен квадрат и $a^2+b^2=kc^2$. Ставаме $x=a^2k$ и

$y=b^2k$. Тогаш $x+y=a^2k+b^2k=(a^2+b^2)k=(kc)^2$ и $xy=(abk)^2$. Ќе докажеме дека сите парови природни броеви чиј збир и производ се точни квадрати можат да се добијат на опишаниот начин при соодветен избор на a и b.

Нека претпоставиме дека $x+y=z^2, xy=t^2$, каде z и t се природни броеви. Нека $d=(x,y)$ и нека c_1 е најголемиот делител на d кој е точен квадрат. Така $d=kc_1^2$, каде k е природен број, кој не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1. Имаме, $x=dx_1, y=dy_1$ каде $(x_1,y_1)=1$ така што од $x+y=z^2$ следува дека $(x_1+y_1)d=z^2$, па е $d=kc_1^2\,|\,z^2$, а бидејќи бројот k не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1, добиваме $kc_1\,|\,z$, па затоа $z=kc_1z_1$, каде z_1 е природен број. Оттука

$$(x_1+y_1)d=x+y=z^2=k^2c_1^2z_1^2=kdz_1^2,$$

па е

$$x_1+y_1=kz_1^2,\; x_1y_1=\tfrac{t^2}{d^2},$$

од што бидејќи $(x_1,y_1)=1$ следува дека x_1 и y_1 се точни квадрати, $x_1=a_1^2, y_1=b_1^2$, па значи $x=dx_1=k(c_1a_1)^2,\; y=dy_1=k(c_1b_1)^2$ така што ставајќи $a=c_1a_1, b=c_1b_1$, добиваме $x=ka^2, y=kb^2$ и

$$a^2+b^2=(c_1a_1)^2+(c_1b_1)^2=c_1^2(x_1+y_1)=k(c_1z_1)^2.$$

Ако ставиме $c_1z_1=c$ добиваме $a^2+b^2=kc^2$, па како бројот k не е делив со ниту еден квадрат на природен број поголем од 1, добиваме дека бројот c^2 е најголемиот делител на a^2+b^2 кој е точен квадрат.

45. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се по парови заемно прости природни броеви. Докажи дека

$$[a_1,a_2,...,a_n]=a_1a_2...a_n.$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

Јасно, тврдењето е точно за $n=2$.

Нека тврдењето точно за $n=k\ge 2$, т.е. нека $[a_1,a_2,...,a_k]=a_1a_2...a_k$, каде $(a_i,a_j)=1$, за $i\ne j$.

Нека $a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}$ се природни броеви такви да $(a_i,a_j)=1$, за $i\ne j$. Тогаш $(a_1a_2...a_k,a_{k+1})=1$, па од индуктивната претпоставка и својствата на НЗС следува

$$[a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}]=[[a_1,a_2,...,a_k],a_{k+1})=a_{k+1}\cdot[a_1,a_2,...,a_k]$$
$$=(a_1a_2...a_k)a_{k+1}=a_1a_2...a_ka_{k+1},$$

т.е. тврдењето важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

46. Нека $a,b\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$[1,2,...,a,b,b+1,...,b+a-1]=[b,b+1,...,b+a-1].$$

Решение. Доволно е да докажеме дека секој број m кој е делив со броевите $b,b+1,...,b+a-1$ е делив и со броевите $1,2,...,a$. Од теоремата за делење со остаток и од принципот на Дирихле следува дека меѓу k последователни природни броеви барем еден е делив со k. Бидејќи $b,b+1,...,b+a-1$ се последователни броеви, барем еден од нив е делив со 1, барем еден е делив со 2, барем еден е делив со 3 итн. барем еден е делив со a. Според тоа, m е делив со броевите $1,2,...,a$.

47. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се природни броеви. Докажи дека

$$[a_1,a_2,...,a_n]=\frac{a}{d}, \tag{1}$$

каде $a=a_1a_2...a_n$ и $d=(\frac{a}{a_1},\frac{a}{a_2},...,\frac{a}{a_n})$.

Решение. Нека $b=[a_1,a_2,...,a_n]$, $m=\frac{a}{d}$ и $b_i=\frac{a}{a_i}$, за $i=1,2,...,n$. Тогаш од $m=a_1\frac{b_1}{d}=a_2\frac{b_2}{d}=...=a_n\frac{b_n}{d}$ следува дека m е заеднички содржател на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, па $m=bt$, за некој $t\in\mathbb{N}$. Од друга страна $\frac{b}{a_1}t=\frac{m}{a_1}=\frac{b_1}{d}$, $\frac{b}{a_2}t=\frac{m}{a_2}=\frac{b_2}{d},...,\frac{b}{a_n}t=\frac{m}{a_n}=\frac{b_n}{d}$, што значи дека t е заеднички делител на во целина заемно простите броеви $\frac{b_i}{d}=\frac{a}{da_i}$, $i=1,2,...,n$. Според тоа, $t=1$ и затоа $m=b$, т.е. важи (1).

48. Нека $1=d_1<...<d_s=N$ се сите природни делители на природниот број $N>1$. Определи ги сите природни броеви N за кои важи

$$(d_1,d_2)+(d_2,d_3)+...+(d_{s-1},d_s)=N-2.$$

Решение. Имаме $d_{s+1-i}=\frac{N}{d_i}$, за $i=1,2,...,s$. Понатаму, бројот $d_{i+1}-d_i$ е делив со бројот (d_{i+1},d_i), па затоа $(d_{i+1},d_i)\le d_{i+1}-d_i$. Да означиме $r_i=(d_{i+1}-d_i)-(d_{i+1},d_i)\ge 0$, $i=1,2,...,s=1$. Од условот следува дека

$$(d_1,d_2)+(d_2,d_3)+...+(d_{s-1},d_s)=N-2$$

и

$$(d_2-d_1)+(d_3-d_2)+...+(d_s-d_{s-1})=d_s-d_1=N-1.$$

Од овие равенства следува дека $r_1+r_2+...+r_s=1$. Според тоа, $r_k=1$ за некој k и $r_i=0$ за $i\neq k$. Од равенството $1=(d_{k+1}-d_k)-(d_{k+1},d_k)$ следува $(d_{k+1},d_k)|1$, па затоа $(d_{k+1},d_k)=1$ и $d_{k+1}-d_k=2$.

Во случајов d_k и d_{k+1} се непарни. Бидејќи d_k и d_{k+1} се последователни делители на N заклучуваме дека и $\frac{N}{d_{k+1}}$ и $\frac{N}{d_k}$ се последователни делители на N. Нека

$$\frac{N}{d_{k+1}}=d_m \text{ и } \frac{N}{d_k}=d_{m+1}.$$

Последователно добиваме

$$\begin{aligned}(d_{m+1},d_m)&=\frac{d_{m+1}d_m}{[d_{m+1},d_m]}=\frac{N}{[d_{m+1},d_m]}\cdot\frac{N}{d_kd_{k+1}}\leq\frac{N}{d_kd_{k+1}}\\&<\frac{N(d_{k+1}-d_k)}{d_kd_{k+1}}=d_{m+1}-d_m.\end{aligned}$$

Од добиеното неравенство $(d_{m+1},d_m)<d_{m+1}-d_m$ следува $r_m>0$, т.е. $k=m$, па затоа $s=2k$.

Од досега изнесеното следува дека $d_{k+1}=\frac{N}{d_k}$, т.е. $N=d_{k+1}d_k$ е непарен број. Но, тогаш $d_{s-1}\leq\frac{N}{3}$, па затоа $(d_{s-1},d_s)\leq d_{s-1}\leq\frac{N}{3}$. Според тоа,

$$1\geq r_{s-1}\geq\frac{2N}{3}-\frac{N}{3}=\frac{N}{3}\text{, т.е. } N\leq 3.$$

Лесно се гледа дека единствената останата можност $N=3$ е решение на задачата.

49. Докажи дека низата 2^n-3, $n=2,3,...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

Решение. Тврдењето во задачата ќе го докажеме со математичка индукција. Нека претпоставиме дека имаме k броеви

$$a_1=2^{n_1}-3,\ a_2=2^{n_2}-3,\ ...,\ a_k=2^{n_k}-3$$

такви што секои два од нив се заемно прости и $2=n_1<n_2<...<n_k$. Конструираме број од облик $a_{k+1}=2^{n_{k+1}}-3$, кој ќе биде заемно прост со секој од овие броеви. Избираме $l=a_1a_2...a_k$. Меѓу $l+1$-те броеви $2^0,2^1,...,2^l$ постојат барем два кои при делење со l даваат ист остаток. Нека 2^r и 2^s $(r>s)$ се тие броеви. Тогаш постои природен број p, таков што

$$pl=2^r-2^s=(2^{r-s}-1)2^s.$$

Бидејќи l е непарен, добиваме дека $2^{r-s}-1$ е делив со l, т.е. за некој природен број q важи $2^{r-s}-1=ql$. Според тоа,

$$2^{r-s+2}-3=4\cdot 2^{r-s}-3=4(ql+1)-3=4ql+1$$

и овој број ќе го земеме за бројот a_{k+1}, бидејќи тој нема заеднички делител поголем од 1 со било кој од броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ и освен тоа $a_{k+1}>a_k$.

На опишаниот начин можеме да конструираме произволно многу броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

50. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде

$$1=d_1<d_2<...<d_k=n.$$

Определи ги сите природни броеви, за кои $k\geq 4$ и

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n.$$

Решение. Ако n е непарен број, тогаш и неговите делители се непарни броеви, од каде следува дека $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$ е парен број, што е противречност. Според тоа, n е парен број, $d_1=1, d_2=2$ и $n=5+d_3^2+d_4^2$. Тогаш, само еден од броевите d_3 и d_4 е парен. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.

1) Нека d_3 е парен, т.е. $d_3=2a, a>1$. Тогаш a е делител на n кој е поголем од d_1 и е помал од d_3, па затоа $a=d_2=2$ и $d_3=4$. Според тоа, $n=21+d_4^2$, што не е можно бидејќи n е делив со 4, а d_4^2 при делење со 4 дава остаток 0 или 1, а 21 при делење со 4 дава остаток 1.
2) Нека d_4 е парен, т.е. $d_4=2a, a>1$. Ако $a=2$, добиваме $d_4=4$ и од $2=d_2<d_3<d_4=4$ следува $d_3=3$. Тогаш $n=30$, кој не е делив со 4 и значи не е решение на задачата. Според тоа, a е делител на n кој е поголем од $d_2=2$ и помал од d_4, т.е. $a=d_3$. Значи, $n=5(1+d_3^2)$. Од $d_3 \mid n$ и $(d_3, 1+d_3^2)=1$ заклучуваме дека $d_3 \mid 5$, и како $d_3>1$ следува $d_3=5$. Тогаш $n=130$ и тоа е единственото решение на задачата.

51. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, ...$ е дефинирана со

$$a_1=c,\ a_{n+1}=a_n^2+a_n+c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k\geq 1$ и $m\geq 2$ такви што бројот $a_k^2+c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k>1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2+c^3=a_{k+1}-a_k=a_k^2+a_k-a_{k-1}^2-a_{k-1}=(a_k-a_{k-1})(a_k+a_{k-1}+1). \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c+1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

Сега, ако $a_{k+1} - a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и $a_k - a_{k-1}$ е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $(c^2, c+1) = 1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m = 2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1) = a_1^2 + c^3$ е точен квадрат.

52. Определи ги подредени парови природни броеви (m,n) такви што $\frac{n^3+1}{mn-1} \in \mathbb{N}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\frac{n^3+1}{mn-1} = k$, за $m,n,k \in \mathbb{N}$. Тогаш, $n^3 + 1 = mnk - k$, т.е. $n(mk - n^2) = k + 1$. Значи, $k + 1 = np$, т.е. $k = np - 1$, за $p \in \mathbb{N}$. Според тоа, $n^3 + 1 = mn^2 p - mn - np + 1$ од што следува $n(n^2 - mnp + m + p) = 0$ и како $n \in \mathbb{N}$ добиваме $n^2 - mnp + m + p = 0$. Последната равенка разгледувана како квадратна равенка по n мора да има решение во $\mathbb{N}$, па затоа

$$(pm)^2 - 4(m+p) = a^2,$$

за некој $a \in \mathbb{N}$ и како $(pm)^2 - 4(m+p) < (pm)^2$ добиваме $a < pm$. Од

$$(pm)^2 - 4(m+p) - (pm-1)^2 = -4(m+p) + 2pm - 1 \neq 0$$

следува $a \neq pm - 1$. Понатаму, од

$$a^2 = (pm-2)^2 + 4pm - 4 - 4(m+p) = (pm-2)^2 + 4(p-1)(m-1) - 8$$

и $a \leq pm - 2$ следува $(p-1)(m-1) \leq 2$.

Ако $p = 1$, тогаш од $a^2 = (m-2)^2 - 8$ следува $8 = (m-2-a)(m-2+a)$.

- Ако $m-2-a = 2$, $m-2+a = 4$ или $m-2-a = 4$, $m-2+a = 2$, тогаш важи $2m - 4 = 6$, т.е. $m = 5$.
- Ако $m-2-a = 8, m-2+a = 1$ или $m-2-a = 1$, $m-2+a = 8$, тогаш важи $2m - 4 = 9$, што не е можно.

Слично, ако $m = 1$, тогаш $8 = (p-2-a)(p-2+a)$ и добиваме $p = 5$

Ако $p \geq 2$ и $m \geq 2$, тогаш $(p-1)(m-1) \leq 2$ е можно само ако $m = p = 2$, $p = 2$, $m = 3$или $p = 3$, $m = 2$.

За $p = 1$, $m = 5$, од $n^2 - 5n + 6 = 0$ следува $n = 2$ или $n = 3$.

За $p = 5$, $m = 1$, од $n^2 - 5n + 6 = 0$ следува $n = 2$ или $n = 3$.

За $p = m = 2$, од $n^2 - 4n + 4 = 0$ следува $n = 2$.

За $p = 3$, $m = 2$, од $n^2 - 6n + 5 = 0$ следува $n = 1$ или $n = 5$.

За $p = 2$, $m = 3$, од $n^2 - 6n + 5 = 0$ следува $n = 1$ или $n = 5$.

Според тоа, бараните подредени парови се

$$(2,5); (3,5); (2,1); (3,1); (2,2); (1,3); (1,2); (5,3); (5,2).$$

Втор начин. Бидејќи $mn-1$ и m^3 се заемно прости, добиваме дека $mn-1$ е делител на n^3+1 ако и само ако $mn-1$ е делител на

$$m^3(n^3+1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1 = (mn-1)(m^2n^2 + mn + 1) + m^3 + 1$$

ако и само ако $mn-1$ е делител на m^3+1. Според тоа, подредениот пар (n,m) е решение на задачата ако и само ако подредениот пар (m,n) е решение на задачата.

i) Ако $m = n$, тогаш $\frac{n^3+1}{n^2-1} = \frac{n^2-n+1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}$ е природен број ако и само ако $n = 2$.

ii) Нека $m > n$. Ако $n = 1$, тогаш $\frac{2}{m-1}$ е природен број ако и само ако $m = 2$ или $m = 3$.

Понатаму, нека $n \geq 2$. Тогаш, како и во решението според првиот начин имаме $\frac{n^3+1}{mn-1} = pn-1$, од што заедно со $m > n$ добиваме

$$pn - 1 = \frac{n^3+1}{mn-1} < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1},$$

па затоа $n(p-1) < 1 + \frac{1}{n-1} \leq 2$. Но, $n \geq 2$ па затоа од последното неравенство следува дека $p = 1$. Сега од

$$n^3 + 1 = (n-1)(mn-1) = n^2m - n - mn + 1 \text{ и } n \in \mathbb{N}$$

следува $n^2 - mn + m + 1 = 0$, т.е.

$$m = \frac{n^2+1}{n-1} = n + 1 + \frac{2}{n-1}.$$

Но, $m \in \mathbb{N}$ па затоа од последното равенство следува дека $n = 2$ или $n = 3$, при што и во двата случаи $m = 5$.

Конечно, $(2,5); (3,5); (2,1); (3,1); (2,2); (1,3); (1,2); (5,3); (5,2)$.

53. Нека $f(x)=x^2-x+1$. Докажи, дека за секој природен број $m>1$ броевите $m, f(m), f(f(m)),...$ се по парови заемно прости.

Решение. Од $f(0)=f(1)=1$ следува дека слободниот член на полиномот

$$P_n(x)=f(f(...(x)...))$$

е еднаков на 1. Според тоа, за секој природен број m остатокот од делењето на $P_n(m)$ со m е 1.

Заменувајќи го m со $m'=P_k(m)$ добиваме дека $P_{n+k}(m)$ и $m'=P_k(m)$ се заемно прости.

54. Докажи, дека за секој природен број $n>1$ постојат бесконечно многу природни броеви, кои се збир на два $n-$ти степени на природни броеви, но не се разлика на два $n-$ти степени на природни броеви.

Решение. Ако $2|n$, тогаш броевите $(2k+1)^n+(2l+1)^n$, $k,l\in\mathbb{N}$ се збир на два $n-$ти степени на природни броеви, но бидејќи број од облик $4t+2$ не е разлика на два квадрати добиваме, дека овие броеви не се разлики на два $n-$ ти степени на природни броеви.

Ако $2\nmid n$, тогаш броевите

$$(2^n+1)2^{nk}=(2^{k+1})^n+(2^k)^n \text{, за } k=0,1,2,3,...$$

не се разлика на два $n-$ти степени на природни броеви. Навистина, ако

$$(2^n+1)2^{nk}=x^n-y^n \ , \ x,y\in\mathbb{N}$$

тогаш броевите $x_1=\frac{x}{(x,y)}$ и $y_1=\frac{y}{(x,y)}$ се природни и не се двата парни, па добиваме дека $2|\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}$. Но,

$$(2^n+1)2^{nk}=(x,y)^n\cdot(x_1-y_1)\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}$$

добиваме дека $\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}|2^n+1$, па затоа

$$\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}\le 2^n+1.$$

Но,

$$\frac{x_1^n-y_1^n}{x_1-y_1}\ge x_1^{n-1}\ge 3^{n-1}.$$

Од последните две неравенства следува $3^{n-1}<2^n+1$, што не е можно за $n\ge 3$.

55. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ се такви што $[m,n]+(m,n)=m+n$. Докажи дека еден од броевите е делител на другиот.

Решение. Нека $d=(m,n)$. Тогаш

$$m=ad \text{ и } n=bd\,,\ (a,b)=1 \text{ и } [m,n]=\tfrac{mn}{(m,n)}=abd\,.$$

Дадената равенка можеме да ја запишеме како $abd+d=ad+bd$ односно $ab-a-b+1=0$. Следува дека $(a-1)(b-1)=0$, од каде добиваме $a=1$ или $b=1$, односно или $m=d$ и $n=bd=bm$ или $n=d$, $m=an$, што и требаше да се докаже.

56. Определи ги сите природни броеви n кои можат да се запишат како

$$n=[a,b]+[b,c]+[c,a] \tag{1}$$

каде $a,b,c\in\mathbb{N}$.

Решение. Сите природни броеви n можат да се претстават освен степените на 2. Нека

$$f(a,b,c)=[a,b]+[b,c]+[c,a]\,.$$

Нека избереме $k\in\mathbb{N}$ и нека $a=k$, $b=c=1$. Тогаш $f(k,1,1)=2k+1$. Значи сите непарни броеви $n\geq 3$ можат да се запишат како во условот на задачата. Да забележиме дека ако n може да се запише во облик (1), тогаш може и $2n$, бидејќи $[2u,2v]=2[u,v]$ повлекува

$$f(2a,2b,2c)=2f(a,b,c)\,.$$

Значи, секој природен број $n\geq 3$ може да се запише во обликот (1) ако има еден непарен делител поголем од 1.

Остануваат степените на 2, односно 2^k, за $k\geq 0$. Ќе покажеме дека тие не може да се запишат во обликот (1). Ова е точно за $k=0$ и $k=1$ бидејќи $f(a,b,c)\geq 3$, за секои $a,b,c\in\mathbb{N}$. Нека $f(a,b,c)=2^k$, за $k\geq 2$. Нека k е нај-малиот број со такво својство. Да забележиме дека барем два од броевите a,b,c се парни. Во спротивно $f(a,b,c)$ е непарен, додека 2^k е парен број што е противречност. Ако a,b,c се сите парни, тогаш тие можат да се поделат со 2, па $f(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})=2^{k-1}$, што противречни на минималноста на k.

Сега нека претпоставиме дека a и b се парни, а c е непарен. Тогаш

$$[a,b]=2[\tfrac{a}{2},\tfrac{b}{2}] \text{ и } [a,c]=2[\tfrac{a}{2},c]\,,\ [b,c]=2[\tfrac{b}{2},c]\,.$$

Следува дека $f(\frac{a}{2},\frac{b}{2},c)=\frac{1}{2}f(a,b,c)=2^{k-1}$, што повторно противречи на минималноста на k.

57. Определи ги сите природни броеви k, за кои равенката

$$[m,n]-(m,n)=k(m-n)\,,$$

нема решенија $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, за $m\neq n$.

Решение. Нека $d=(m,n)$. Тогаш $m=da$ и $n=db$. Имајќи предвид дека

$$[m,n]\cdot(m,n)=m\cdot n,$$

почетната равенка добива облик

$$\frac{da\cdot db}{d}-d=k(da-db),$$

односно

$$ab-1=k(a-b) \qquad (1)$$

Го разгледуваме следниов еквивалентен проблем: Определи ги сите природни броеви k за кои (1) нема решенија (a,b), $a\neq b$ во множеството природни броеви такво што $(a,b)=1$. Да забележиме дека ако парот (a,b) ја задоволува равенката (1), директно следува дека $(a,b)=1$. Навистина, нека $t\,|\,a$ и $t\,|\,b$, тогаш имаме $t\,|\,ab$ и $t\,|\,(a-b)$, па $t\,|\,1$, од каде заклучуваме дека $t=1$, од каде $(a,b)=1$.

Нека $k\geq 3$. Тогаш $(a,b)=(k^2-k-1,k-1)$ е решение. Навистина,

$$ab-1=a(k-1)-1=ka-a-1=ka-k^2+k=k(a-k+1)=k(a-b).$$

Од дискусијата претходно, имаме дека $(a,b)=1$, па останува да докажеме дека a и b се различни природни броеви. Бидејќи $k\geq 3$, имаме $b=k-1\geq 2$ и $a=k^2-k-1\geq 2k-k-1=k-1\geq 2$, па a и b се позитивни. Ако $a=b$, тогаш $k^2-k-1=k-1$, па $k^2=2k$, од каде $k=2$, што е противречност. Според ова (a,b) е бараното решение. Тоа значи дека (1) има решение (a,b), $a\neq b$ во природните броеви и $(a,b)=1$.

Нека $k=1$. Тогаш $(a,b)=(2,1)$ е решение. Јасно, $a\neq b$, $a,b>0$ и $(a,b)=1$. Уште повеќе имаме

$$ab-1=2-1=1=1(2-1)=k(a-b).$$

Следува (1) има решение (a,b) во природните броеви, $a\neq b$ и $(a,b)=1$.

Нека претпоставиме сега $k=2$. Тогаш равенката (1) е $ab-1=2(a-b)$. Десната страна е најмногу $2a-2$, бидејќи b е природен број, па затоа важи $ab-1\leq 2a-2$, т.е. $ab<2a$, односно $b<2$. Значи, $b=1$, па (1) го добива облик $a-1=2(a-1)$, што повлекува $a-1=0$, од каде добиваме $a=b=1$. Значи, во множеството прриодни броеви не постои решение (a,b) на (1) такво што $a\neq b$ и $(a,b)=1$.

Конечно, единствено k, за кое равенката (1) нема решенија (m,n), $m\neq n$ во множеството природни броеви е $k=2$.

5. ПРОСТИ БРОЕВИ. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКАТА

1. Докажи, дека за секој природен број n постојат природни броеви $x>n$ и y такви што $x^x \mid y^y$, но $x \nmid y$.

   Решение. Нека n е даден природен број, k е природен број, поголем од 1, таков што $2^k>n$ и p е прост број поголем од $2^{k-1}k$. Од $k>1$ и фактот дека p е прост број поголем од $2^{k-1}k$, добиваме дека за $x=2^k$ и $y=2p$ важи $x \nmid y$, но од $2p>2^k k$ следува $x^x=2^{2^k k} \mid (2p)^{2p}=y^y$, што и требаше да се докаже.

2. Природниот број го нарекуваме *апсолутно прост*, ако тој е прост број и ако при секоја пермутација на неговите цифри се добива прост број. Докажи, дека во записот на апсолутно прост број не може да се содржат повеќе од 3 различни цифри.

   Решение. Во записот на апсолутно прост број можат да учествуваат само цифрите 1, 3, 7, 9. Но, тогаш за секој M еден од броевите
   $M+1379,\ M+3179,\ M+9137,\ M+7913,\ M+1397,\ M+3197$ или $M+7139$
   е делив со 7 (зошто?). Значи во записот на апсолутно прост број не можат да учествуваат четири цифри. (M е број запишан од цифрите 1, 3, 7, 9 во облик $10^4 \cdot \overline{xy...z}$).

3. Дали може ѕвездичките во изразот
   $$[*,*,*]-[*,*,*]=2009$$
   да се заменат со шест последователни природни броеви во некој редослед така што ќе се добие точно равенство?

   Решение. *Одговор*. Не може.

   Нека претпоставиме дека постојат шест последователни природни броеви кои заменети на местото на ѕвездичките даваат точно равенство. Најмалиот заеднички содржател на неколку броја е делив со секој од броевите, па затоа е делив со секој нивни прост делител. Значи, ако меѓу броевите во даден НЗС има парен број, тогаш НЗС е парен број. Бидејќи 2009 е непарен број, заклучуваме дека едниот НЗС е непарен број, а другиот е парен број. Последното значи дека трите последователни парни броеви се во едниот НЗС, а трите последователни непарни броеви се во другиот НЗС. Во секоја од овие тројки точно по еден број е делив со 3, што значи дека и двата НЗС се деливи со 3. Последното значи дека и бројот 2009 е делив со 3, што не е точно бидејќи $2009=3\cdot 669+2$.

4. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}$$

Решение. Ќе докажеме

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2}. \qquad (1)$$

Нека p е произволен прост број и нека α,β,γ се највисоките степени на p за кои $p^\alpha\,|\,a,\ p^\beta\,|\,b,\ p^\gamma\,|\,c$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha\le\beta\le\gamma$. Највисокиот степен x на p за кој p^x о делител на $[a,b],[b,c],[c,a]$ и $[a,b,c]^2$ е β,γ,γ и 2γ, соодветно. Според тоа највисокиот степен x на p за кој p^x е делител на бројот од левата страна на (1) е

$$\beta+\gamma+\gamma-2\gamma=\beta.$$

Аналогно, највисокиот степен x на p за кој p^x е делител на (a,b), (b,c), (c,a) и $(a,b,c)^2$ е α,β,α и 2α, соодветно. Според тоа највисокиот степен x на p за кој p^x е делител на бројот од десната страна на (1) е

$$\alpha+\beta+\alpha-2\alpha=\beta.$$

Конечно, од претходните разгледувања следува равенството (1).

5. Именителите на две нескратливи дропки се еднакви на 600 и 700. Определи ја најмалата можна вредност на именителот на нивниот збир запишан како нескратлива дропка.

Решение. Нека дропките се $\frac{a}{600}$ и $\frac{b}{700}$. Тогаш бројот a е заемно прост со 6, а бројот b е заемно прост со 7. Значи, броителот на нивниот збир $\frac{7a+6b}{4200}$ е заемно прост со $6=2\cdot 3$ и со 7. Бидејќи $4200=2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$, следува дека најмалата можна вредност на скратениот именител е поголема или еднаква на $2^3\cdot 3\cdot 7=168$. Оваа вредност се достигнува, на пример за $a=1$ и $b=3$, при што важи $\frac{1}{600}+\frac{3}{700}=\frac{1}{168}$.

6. Дали постои бесконечно множество од природни броеви такво што

а) било кој негов елемент не е k-ти степен, $k>1$ на природен број.

б) збирот на конечно многу од неговите елементи не е k-ти степен, $k>1$ на природен број,

Решение. Постои. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ е низата прости броеви. Ќе го разгледаме множеството $A = \{a_n \mid a_n = p_1^2 p_2^2 ... p_{n-1}^2 p_n\}$. Ќе покажеме дека множеството A ги исполнува условите од задачата.

а) Нека препоставиме дека постои природен број m и $a, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ такви што $a_m = a^k$. Тогаш

$$p_1^2 p_2^2 ... p_{n-1}^2 p_n = a^k .$$

Бидејќи a е природен број добиваме дека $p_n \mid a^k$. Бидејќи p_n е прост број добиваме дека $p_n \mid a$ и $p_n^k \mid a^k$. Но од друга страна $k > 1$, па значи

$$p_n^2 \mid a^k = p_1^2 p_2^2 ... p_{n-1}^2 p_n .$$

Добиваме дека $p_n \mid p_1^2 p_2^2 ... p_{n-1}^2$ што не е можно.

Од добиената противречност, следувца дека тврдењето е точно за множеството A.

б) Нека $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_s}$ се броеви од множеството A чиј збир е точен k-ти степен, $k > 1$ на некој природен број a. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $i_1 < i_2 < ... < i_s$. Значи,

$$a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_s} = a^k .$$

Значи,

$$p_{i_1} \prod_{i=1}^{i_1-1} p_i + p_{i_2} \prod_{i=1}^{i_2-1} p_i + ... + p_{i_k} \prod_{i=1}^{i_k-1} p_i = a^k ,$$

$$p_{i_1} (\prod_{i=1}^{i_1-1} p_i + p_{i_2} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_2-1} p_i + ... + p_{i_k} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_k-1} p_i) = a^k .$$

Бидејќи $p_{i_1} \mid a^k$ и p_{i_1} е прост број, добиваме дека $p_{i_1} \mid a$, односно $p_{i_1}^2 \mid p_{i_1}^k \mid a^k$. Според тоа

$$p_{i_1}^2 \mid a^k = p_{i_1} (\prod_{i=1}^{i_1-1} p_i + p_{i_2} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_2-1} p_i + ... + p_{i_k} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_k-1} p_i),$$

$$p_{i_1} \mid \prod_{i=1}^{i_1-1} p_i + p_{i_2} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_2-1} p_i + ... + p_{i_k} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_k-1} p_i = b ,$$

$$p_{i_1} \mid b - p_{i_2} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_2-1} p_i + ... + p_{i_k} p_{i_1} \prod_{i=1, i \neq i_1}^{i_k-1} p_i = \prod_{i=1}^{i_1-1} p_i ,$$

што не е можно.

7. Нека $p > 5$ е прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Докажи, дека множе-

ството X содржи два различни елементи x и y, такви што $x \neq 1$ и $x \mid y$.

Решение. Нека $p = n^2 + 1$. Ако n е непарен број, тогаш p е парен број поголем од 2, што не е можно. Значи, n е парен број. Бидејќи $p > 5$ добиваме дека $n \geq 4$. Значи, $p = n^2 + 1$ каде n е непарен број $n \geq 4$. Нека x и y се такви да

$$x = 2n = n^2 + 1 - (n^2 - 2n + 1) = p - (n-1)^2 \in X,$$
$$y = n^2 = n^2 + 1 - 1 = p - 1^2 \in X$$

Бидејќи n е парен број добиваме $x = 2n > 1$ и $2 \mid n$. Според тоа $2n \mid n^2$, т.е. $x \mid y$.

Сега нека постојат природни броеви n и $n+1$ такви што $n^2 < p < (n+1)^2$. Ако $p = n^2 + 1$, тогаш n е парен број и тоа е претходно разгледано. Според тоа $p > n^2 + 1$. Значи, $p - n^2 > 1$ и $p - n^2 \in X$. Земаме

$$x = p - n^2 \text{ и } y = p - (n-x)^2.$$

Бидејќи $x > 1$, доволно е да докажеме дека $x \mid y$ и $y \in X$. Од равенството

$$\begin{aligned} y = p - (n-x)^2 &= p - n^2 + 2nx - x^2 \\ &= x + 2nx - x^2 = x(1 + 2n - x), \end{aligned}$$

добиваме дека $x \mid y$. Ако $x \geq 2n$, тогаш

$$p = x + n^2 \geq 2n + n^2 = n(n+2),$$

и бидејќи p е прост број добиваме дека

$$p > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

што противречи на изборот на p. Значи, $x < 2n$, од каде добиваме

$$1 + x - x < 1 + 2n - x,$$

односно $1 + 2n - x > 1$. Според тоа $y = x(1 + 2n - x) > 1$ и од $y = p - (n-x)^2$ следува дека $y \in X$.

8. Нека a е природен број поголем од 1. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот

$$n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$$

е делив со секој прост број помал од бројот a.

Решение. Нека p е прост број таков што $p < a$. Ќе разгледаме два случаи.

а) Ако $p \mid n$, тогаш $p \mid [n(2n+1)(3n+1)...(an+1)]$.

б) Нека $p \nmid n$. Тогаш броевите $2n+1, 3n+1, ..., (p+1)n+1$ при делење со p имаат остатоци $r_1, r_2, ..., r_p$ соодветно. Нека претпоставиме дека постојат

$i,j\in\{1,2,...,p\}$ такви што $i\neq j$ и $r_i=r_j$. Според тоа постојат природни броеви b_i и b_j такви што $in+1=pb_i+r_i$ и $jn+1=pb_j+r_j$, од каде добиваме

$$(i-j)n=p(b_i-b_j).$$

Бидејќи $p\nmid n$, добиваме $p\,|\,(i-j)$. Од друга страна $i\le p+1$, $j\le p+1$, па од $i\neq j$ имаме $1\le|i-j|<p$. Од последното неравенство следува $p\nmid(i-j)$, што е противречност, па затоа $r_i\neq r_j$, за $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,...,p\}$. Сега, од принципот на Дирихле следува дека постои природен број k, $1\le k\le p$, таков што $r_k=0$. Според тоа, $p\,|\,[(k+1)n+1]$, односно

$$p\,|\,n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1],$$

т.е.

$$p\,|\,n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1]...[(a-1)n+1](an+1).$$

9. Нека $m,n,d\in\mathbb{N}$, $n>1$. Ако сите членови на аритметичката прогресија $m,m+d,m+2d,...,m+(n-1)d$ се прости броеви, тогаш разликата d на прогресијата е делива со сите прости броеви помали од n. Докажи!

Решение. Јасно, $m\ge n$ бидејќи во спротивно прогресијата содржи сложен број $m+md=(m+1)d$. Нека p е произволен прост број $p<n$. Бидејќи броевите $m,m+d,m+2d,m+(p-1)d$ се прости и $m\ge n>p$, заклучуваме дека ниту еден од нив не е делив со p. Но, имаме вкупно p броеви, а ненулти остатоци се вкупно $p-1$. Според тоа, постојат броеви k,l такви што $0\le k<l\le p-1$ и $p\,|\,[(m+ld)-(m+kd)]$, т.е. $p\,|\,(l-k)d$, што значи $p\,|\,d$.

10. Докажи дека за секој прост број p постојат цели броеви x и y такви што x^2+y^2+1 е делив со p.

Решение. Ако $p=2$, тогаш $p=1^2+0^2+1$. Нека сега простиот број p е непарен. Да ги разгледаме следните $\frac{p+1}{2}$ броеви $0,1,2,...,\frac{p-1}{2}$. Квадратите на секои два од овие броеви при делење со p даваат различни остатоци. Имено, ако важи $x_1^2=k_1p+r$ и $x_2^2=k_2p+r$, тогаш $x_1^2-x_2^2=(k_1-k_2)p,$ т.е. $(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ е делив со p, што не е можно бидејќи $|x_1-x_2|<p$ и $x_1+x_2<p$. Според тоа, различните $\frac{p+1}{2}$ броеви $0^2,1^2,\ 2^2,...,(\frac{p-1}{2})^2$ при делење со p исто така даваат различни $\frac{p+1}{2}$ остатоци. Од друга страна, при делење со p можат да се добијат само p различни остатоци, па затоа меѓу $p+1$ броеви

$$0^2,1^2,2^2,...,(\tfrac{p-1}{2})^2,-1-0^2,-1-1^2,-1-2^2,...,-1-(\tfrac{p-1}{2})^2$$

постојат барем два кои при делење со p даваат ист остаток. Притоа овие два броја се од облик x^2 и $-y^2-1$. Но, тоа значи дека

$$x^2=kp+r \text{ и } -y^2-1=tp+r \text{, т.е. } x^2+y^2+1=(k-t)p,$$

што значи $p\,|\,x^2+y^2+1$.

11. Ако $a,b\in\mathbb{N}$ и $(a,b)=1$, тогаш за секој природен број m во аритметичката прогресија $ak+b, k=0,1,2,...$ постојат бесконечно многу членови заемно прости со m. Докажи!

Решение. Јасно може да се претпостави дека m е природен број поголем од 1. Нека P е производот на сите различни прости делители на бројот m, кои се делители на бројот a, а ако такви не постојат, тогаш нека $P=1$. Нека Q е производот на сите различни прости делители на бројот m, кои се делители на бројот b, а ако такви не постојат, тогаш нека $Q=1$. Бидејќи $(a,b)=1$ добиваме $(P,Q)=1$. Нека на крајот R е производот на сите оние делители на бројот m кои не се делители ниту на a ниту на b, а ако такви нема тогаш ставаме $R=1$. Очигледно $(R,P)=(R,Q)=1$.

Ќе докажеме дека $(aPR+b,m)=1$. Нека претпоставиме дека постои p таков што $p\,|\,m$ и $p\,|\,aPR+b$. Ако $p\,|\,P$, тогаш од $p\,|\,aPR+b$ ќе следува $p\,|\,b$, па значи $p\,|\,Q$ што противречи на $(P,Q)=1$. Ако $p\,|\,Q$, тогаш $p\,|\,b$, па значи $p\,|\,aPR$, што противречи на

$$(a,b)=(b,p)=(b,R)=1.$$

Ако, на крајот $p\,|\,R$, тогаш $p\,|\,b$, па значи $p\,|\,Q$, што противречи на $(P,Q)=1$. Така, докажавме дека $(aPR+b,m)=1$. Оттука следува дека

$$(a(km+PR)+b,m)=1, \text{ за } k=0,1,2,...,$$

т.е во дадената прогресија постојат бесконечно многу членови заемно прости со m.

12. Докажи, дека во секоја аритметичка прогресија $ak+b,k=0,1,2,...$ каде $(a,b)=1,\ a,b\in\mathbb{N}$ постојат бесконечно многу по парови заемно прости броеви.

Решение. Да претпоставиме дека имаме n членови на дадената прогресија $ak_1+b,ak_2+b,...,ak_n+b$, кои се по парови заемно прости, (за $n=1$ може да се земе $k_1=1$). Нека $m=(ak_1+b)(ak_2+b)...(ak_n+b)$. Според претходната задача постои природен број k_{n+1}, таков што $(ak_{n+1}+b,m)=1$ и затоа

$$(ak_{n+1}+b, ak_i+b)=1, \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Според тоа, броевите $ak_1+b, ak_2+b, ..., ak_n+b, ak_{n+1}+b$, се по парови заемно прости.

Така, бесконечната низа природни броеви $k_1, k_2, ...$ која ја одредуваме индуктивно со помош на претходната постапка определува бесконечна подниза $ak_i+b, i=1,2,\dots$ по парови заемно прости броеви.

13. Определи прости броеви p, q и r за кои броевите $p(p+1), q(q+1)$ и $r(r+1)$ формираат растечка аритметичка прогресија.

Решение. Од очигледното равенство

$$n(n+1)+(41n+20)(41n+21)=2(29n+14)(29n+15)$$

следува дека природните броеви

$$n(n+1), (29n+14)(29n+15) \text{ и } (41n+20)(41n+21)$$

формираат растечка аритметичка прогресија. Ако за некој природен број n броевите $n, 29n+14$ и $41n+20$ се прости, тогаш тие го задоволуваат условот на задачата. Значи, место n треба да се разгледуваат непарните прости броеви и да се проверува дали $29n+14$ и $41n+20$ се прости. Најмал таков број е $n=127$ и притоа $p=127, q=3697$ и $r=5527$.

14. Дали постојат 14 последователни природни броеви секој од кои е делив со еден или повеќе прости броеви p, $2 \le p \le 11$?

Решение. Бидејќи меѓу секои 14 последователни природни броеви има 7 парни броеви и секој од нив е делив со 2, проблемот може да се поедностави на следново прашање, кое е еквивалентно на почетното прашање: „Дали постојат 7 последователни непарни природни броеви секој од кои е делив со еден или повеќе прости броеви p, $3 \le p \le 11$?“

За 7 последователни непарни природни броеви важи:

- 2 или 3 се деливи со 3,
- 1 или 2 се деливи со 5,
- точно 1 е делив со 7,
- 0 или 1 е делив со 11.

За да секој од овие 7 броеви е делив со 3, 5, 7 или 11, меѓу нив мора да има 3 содржатели на бројот 3, потоа 2 содржатели на бројот 5, па 1 содржател на бројот 7 и 1 содржател на бројот 11. Притоа, ниту еден од тие броеви не смее да биде содржател на било кои два од наведените четири прости броја. Нека $a_1, a_2, ..., a_7$ се последователни непарни природни броеви. Тогаш a_1, a_4, a_7 мора да се содржатели на бројот 3, па затоа не може да се содржатели на 5, 7 и 11. Сега, ако постојат два содржатели на бројот 5 тоа мора да се еден од двата пара (a_1, a_6) или (a_2, a_7). Но, во секој од овие два пара има по еден содржател на бројот 3, па затоа барем еден од 7 последователни непарни природни броеви не е делив со ниту еден од простите броеви 3, 5, 7 или 11. Значи, одговорот на поставеното прашање е негативен.

15. Природните броеви x, y, p, n и k се такви што $x^n + y^n = p^k$. Ако p е прост број и $n>1$ е непарен, тогаш n е степен на бројот p. Докажи!

Решение. Ако $x = y$, равенството го добива обликот

$$2x^n = p^k .$$

Бидејќи p е прост број, добиваме $2 \mid p$, па затоа $p=2$. Според тоа, равенството го добива обликот

$$x^n = 2^{k-1},$$

од каде имаме $x=2=y$ и $n=k-1$. За да n е непарен треба $k=2s$. Значи, во овој случај $x=y=2, n=2s-1, k=2s, p=2$.

Нека $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$ и нека d е најголемиот заеднички делител на x и y, т.е. $d=(x,y)$. Тогаш $x=dx_1$ и $y=dy_1$ при што $(x_1, y_1)=1$. Ако замениме во равенството добиваме

$$d^n (x_1^n + y_1^n) = p^k .$$

Бидејќи p е прост број и $d^n \mid p^k$, имаме $d = p^a$ за некој $a \in \mathbb{N}$ и равенството го добива обликот

$$x_1^n + y_1^n = p^{k-na} .$$

Изразот $x_1^n + y_1^n$ можеме да го запишеме во облик

$$x_1^n + y_1^n = (x_1 + y_1)(x_1^{n-1} - x_1^{n-2} y_1 + ... - x_1 y_1^{n-2} + y_1^{n-1}) .$$

Секој од множителите $x_1 + y_1, x_1^{n-1} - x_1^{n-2} y_1 + ... - x_1 y_1^{n-2} + y_1^{n-1}$ е поголем од 1. Навистина, бидејќи $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, добиваме $x_1 + y_1 = k \geq 2 > 1$. Ако претпоставиме дека $x_1^{n-1} - x_1^{n-2} y_1 + ... - x_1 y_1^{n-2} + y_1^{n-1} = 1$, тогаш

$$x_1^n + y_1^n = k \cdot 1 = k . \qquad (1)$$

Бидејќи $x \neq y$ и $x, y \in \mathbb{N}$, имаме $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ и $x_1 \neq y_1$. Според тоа можеме да сметаме дека еден од броевите x_1, y_1 е поголем од 1. Тогаш

$$x_1^n + y_1^n > x_1 + y_1 = k ,$$

што противречи на (1). Значи, $x_1 + y_1, x_1^{n-1} - x_1^{n-2} y_1 + ... - x_1 y_1^{n-2} + y_1^{n-1} > 1$.

Постојат природни броеви c и d такви што

$$x_1 + y_1 = p^b , \ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} y_1 + ... - x_1 y_1^{n-2} + y_1^{n-1} = p^c ,$$

при што $b+c=k-na$.

Нека претпоставиме дека $p \nmid n$. Од равенствата $y_1 = p^b - x_1$ и $x_1 = p^b - y_1$, добиваме

$$p^c = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}(p^b - x_1) + ... - (p^b - x_1)^{n-2} x_1 + (p^b - x_1)^{n-1} = Ap + nx_1^{n-1}$$

$$p^c = y_1^{n-1} - y_1^{n-2}(p^b - y_1) + ... - (p^b - y_1)^{n-2} y_1 + (p^b - y_1)^{n-1} = Bp + ny_1^{n-1}.$$

Значи, $p \mid (nx_1^{n-1})$ и $p \mid (ny_1^{n-1})$ и бидејќи $p \nmid n$ добиваме $p \mid x_1^{n-1}$, $p \mid y_1^{n-1}$. Значи, $p \mid x_1$ и $p \mid y_1$, што противречи на изборот на d и фактот дека $p \geq 2$. Од претходната дискусија добиваме $p \mid n$, т.е. $n = pn_1$. Сега почетното равенство го добива обликот

$$(x^p)^{n_1} + (y^p)^{n_1} = p^k, \; u^{n_1} + v^{n_1} = p^k.$$

На истиот начин како претходно заклучуваме дека $p \mid n_1$ и по конечен број на чекори добиваме $n = p^{\alpha}$.

16. Докажи, дека за секој $k \geq 3$ важи неравенството $p_{k+1} + p_{k+2} \leq p_1 p_2 ... p_k$, каде p_k е $k-$тиот по ред прост број.

Решение. Од $k \geq 3$ следува $p_1 p_2 ... p_k > p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 > 6$, па затоа важи $p_1 p_2 \dots \dots p_k = a + b$, каде $a, b > 1$ и $(a,b) = 1$, што значи дека a и b се заемно прости со нивниот производ $p_1 p_2 \dots \dots p_k$. Броевите a и b имаат различни прости делители. Нека $p | a$, $q | b$ и $p < q$. Бидејќи $(p_1, p_2, ..., p_k) = 1$, важи $p \geq p_{k+1}$ и како $q > p$ имаме $q > p_{k+2}$. Сега од $p + q \leq a + b$ следува $p_{k+1} + p_{k+2} \leq p_1 p_2 ... p_k$.

17. Докажи, ако p_n е $n-$тиот прост број, тогаш

$$p_n < 2^{2^n}. \qquad (1)$$

Решение. Имаме $p_2 = 3 \leq 2 + 1 = p_1 + 1$ и $p_3 = 5 \leq 2 \cdot 3 + 1 = p_1 p_2 + 1$, а од претходната задача следува дека $p_{n+1} \leq p_1 p_2 ... p_n + 1$, за $n \geq 3$.

Понатаму, $n = 1$ имаме $p_1 = 2 < 4 = 2^{2^1}$, т.е. неравенството (1) важи. Нека претпоставиме дека (1) важи за $n \leq k$, т.е. дека $p_k < 2^{2^k}$. Тогаш, од претходно изнесеното и од индуктивната претпоставка следува

$$p_{k+1} \leq p_1 p_2 ... p_k + 1 < 2^2 \cdot 2^{2^2} \cdot ... \cdot 2^{2^k} + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2 + 1 < 2^{2^{k+1}},$$

т.е. неравенството (1) важи за $n = k + 1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

18. Нека n и p се природни броеви, $k \geq 2$. Докажи, дека постојат n последова-

телни природни броеви, секој од кои се разложува на производ од барем k прости множители.

Решение. При $k=2$ тврдењето означува дека постојат n последователни сложени броеви.

Нека за некој k постојат n последователни природни броеви $N, N+1, ...,$ $N+n-1$, секој од кои се разложува на барем k прости множители. Тогаш секој од броевите $(N+n-1)!+N, (N+n-1)!N+1, \dots, (N+n-1)!+N+n-1$ се разложува на барем $k+1$ прости множители.

19. Определи n природни по парови заемно прости броеви, при што збирот на било кои k различни броеви е сложен број.

Решение. Земаме $a_i = i \cdot n!+1, i=1,2,\dots,n$. Дадените броеви се по парови заемно прости, но збир на било кои k од нив

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} = (i_1 + i_2 + \dots + i_k)n! + k$$

е делив со k, т.е. е сложен број.

На пример, за $n=5$, имаме 121, 241, 361, 481 и 601.

20. Нека a, b, c и d се природни броеви и нека $p = a+b+c+d$. Докажи дека ако p е прост број, тогаш p не е делител на бројот $ab-cd$.

Решение. Јасно, $a+b+c+d \mid b(a+b+c+d) = ab+b^2+bc+bd$. Нека претпоставиме дека p е прост делител на бројот $ab-cd$. Според тоа,

$$p \mid ab+b^2+bc+bd-ab+cd = (b+d)(b+c) .$$

Бидејќи p е прост број следува дека $p|b+d$ или $p|b+c$. Последното не е можно бидејќи

$$p = a+b+c+d > b+d \text{ и } p = a+b+c+d > b+c.$$

21. Нека $n \geq 2$ и p е прост број. Ако n е делител на $p-1$, а p е делител на n^3-1, докажи дека $4p-3$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Од $n \mid p-1$ следува дека постои природен број a таков што $p-1 = na$ и важи $p-1 \geq n$. Затоа од тоа што $p \mid n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ следува $p \mid n^2+n+1$. Значи, $an+1 = p \mid n^2+n+1$. Оттука $an+1 \leq n^2+n+1$, т.е. $1 \leq a \leq n+1$.

Од друга страна

$$an+1 \mid a(n^2+n+1) - n(an+1) = (a-1)n + a .$$

Бидејќи $(a-1)n+a > 0$, добиваме дека $(a-1)n+a \geq an+1$, па затоа $a \geq n+1$.

Според тоа, $a=n+1$, што значи $p=an+1=n^2+n+1$, па затоа
$$4p-3=4(n^2+n+1)-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2.$$

22. Природните броеви a,b,c се по парови различни и важи
$$a\mid b+c+bc,\ b\mid c+a+ca,\ c\mid a+b+ab.$$
Докажи дека најмалку еден од броевите a,b,c не е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека a,b,c се прости броеви. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a<b<c$. Јасно, $a\geq 3$, бидејќи ако $a=2$, тогаш $b+c+bc$ е непарен број кој е делив со два, што не е можно. Значи $a\geq 3$, $b\geq 5$ и $c\geq 7$.

Од $a\mid b+c+bc$ следува дека $a\mid a+b+c+ab+bc+ca+abc$. Аналогно важи $b\mid a+b+c+ab+bc+ca+abc$ и $c\mid a+b+c+ab+bc+ca+abc$. Бидејќи
$$a+b+c+ab+bc+ca+abc=(a+1)(b+1)(c+1)-1$$
и a,b,c се различни прости броеви следува дека $abc\mid(a+1)(b+1)(c+1)-1$. Значи,
$$\begin{aligned}1&<\tfrac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{abc}<\tfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc}=(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})\\&\leq(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{7})=\tfrac{64}{35}<2,\end{aligned}$$
што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека еден од броевите a,b,c не е прост број.

23. Нека p е прост број поголем од 2. За $k=1,2,...,p-1$ да го означиме со a_k остатокот од делењето на бројот k^p со p^2. Докажи, дека
$$a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}=\frac{p^3-p^2}{2}. \qquad (1)$$
Решение. Имаме:
$$a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}=(a_1+a_{p-1})+(a_2+a_{p-2})+\ldots+(a_{\frac{p-1}{2}}+a_{\frac{p+1}{2}}).$$
За $k\in\{1,2,...,p-1\}$ изразот $k^p+(p-k)^p$ го развиваме по биномната формула и добиваме дека истиот е делив со p^2. Бидејќи $a_k<p^2$ и $a_{p-k}<p^2$, заклучуваме дека $a_k+a_{p-k}=p^2$, односно важи (1).

24. Нека p е прост број, $p\neq 3$ и нека a,b се цели броеви такви што $p\mid a+b$ и $p^2\mid a^3+b^3$. Докажи дека $p^2\mid a+b$ или $p^3\mid a^3+b^3$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a+b$ не е делив со p^2. Сега доволно е да докажеме дека $p^3 \mid a^3+b^3$.

Бидејќи $p^2 \mid (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ од претпоставката, следува дека $p \mid 3ab$. Бидејќи $p \neq 3$ следува дека $p \mid a$ или $p \mid b$. Од условот $p \mid a+b$ следува дека $p \mid a$ и $p \mid b$, па оттука $p^3 \mid a^3$ и $p^3 \mid b^3$, што значи дека $p^3 \mid a^3+b^3$.

25. Определи ги сите природни броеви $a>1$ со следното својство: секој прост делител на a^6-1 е делител барем на еден од броевите: a^3-1 и a^2-1.

Решение. Ако p е прост делител на a^6-1 и е делител на некој од множителите $a-1, a+1, a^2+a+1$, тогаш p е делител на барем еден од броевите a^3-1 и a^2-1. Затоа е доволно да ги разгледаме само простите делители на a^2-a+1 и тогаш задачата се сведува на следната: определи ги сите природни броеви $a>1$ за кои секој прост делител на a^2-a+1 е делител на еден од броевите a^3-1 и a^2-1.

Од равенството $a^2-a+1 = a(a-1)+1$ добиваме $(a^2-a+1, a-1,) = 1$. Ако $d=(a^2-a+1, a^2+a+1)$, тогаш $d=1$, т.е. $(a^3-1, a^2-a+1)=1$. Според тоа, ако a е еден од бараните броеви, тогаш секој прост делител p на a^2-a+1 е делител на $a+1$. Нека p е таков делител. Тогаш $p \mid (a+1)^2$, односно $p \mid (a+1)^2-(a^2-a+1)=3a$. *Но,* $p>1$ е делител на $a+1$, па затоа $p \nmid a$, односно $p \mid 3$. Значи, $p=3$. Според тоа, $a^2-a+1=3^k$. Од друга страна $p \mid (a^2-a+1)-(a+1) = a(a-2)$, т.е. $p \mid (a-2)$. Значи, $a=3t+2$. Тогаш

$$3^k = (2+3t)^2-(2+3t)+1 = 9t^2+9t+3, \text{ т.е. } 3^{k-1} = 3t^2+3t+1,$$

што значи $k-1=0$ и $t=0$. Добиваме $a=2$. Со непосредната проверка се добива дека $a=2$ ги задоволува условите на задачата:

$$2^6-1 = 7\cdot 3\cdot 3,\ 2^3-1=7 \text{ и } 2^2-1=3.$$

26. Нека p е прост број. Сите прости броеви помали или еднакви на p се поделени во две групи $a,b,...,c$ и $\alpha,\beta,...,\gamma$ така што бројот $x = ab...c - \alpha\beta...\gamma$ е поголем од 1 и е помал од p^2. Докажи, дека x е прост број!

Решение. Нека претпоставиме дека x е сложен број. Тогаш x има прост делител q таков што $x=qy, 1<q\leq y<x$. Ако $q \leq p$, тогаш q е еден од простите броеви $a,b,...,c,\alpha,\beta,...,\gamma$, па значи дека q е делител на точно еден

од броевиете $ab...c$ или $\alpha\beta...\gamma$. Но, $q \mid x$ и како $x = ab...c - \alpha\beta...\gamma$ добиваме дека $q \mid ab...c$ и $q \mid \alpha\beta...\gamma$, што значи дека $q \in \{a, b, ..., c\}$ и $q \in \{\alpha, \beta, ..., \gamma\}$, што е противречност. Ако $q > p$, тогаш $x = qy \geq q^2 > p^2$, што повторно е противречност. Конечно, од добиените противречност следува дека x е прост број.

27. Определи ги сите природни броеви n, за кои постои природен број k таков што

а) k има барем n различни прости делители;

б) постојат n различни позитивни делители на k, $x_1 = 1, x_2, x_3, ..., x_n$ чиј збир е еднаков на k.

Решение. Ако n е решение на задачата, ќе покажеме дека и $n+1$ е решение на задачата.

Нека претпоставиме дека n е решение на задачата. Значи постои природен број k кој има барем n различни прости делители и постојат n различни делители на k, $x_1 = 1, x_2, x_3, ..., x_n$ такви што

$$1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k.$$

За природниот број $n+1$ ќе го разгледаме природниот број $k(k+1)$. Бидејќи k има n различни прости делители и $(k, k+1) = 1$, добиваме дека $k(k+1)$ има барем $n+1$ прост делител. Тоа се n-те делители на k и еден делител на $k+1$ ако тој е сложен број или $k+1$ ако е прост број.

Од друга страна ќе ги разгледаме броевите

$$y_1 = 1, y_2 = (k+1)x_2, y_3 = (k+1)x_3, ..., y_n = (k+1)x_n, y_{n+1} = k,$$

за кои е јасно дека се делители на $k(k+1)$ кои не се еднакви меѓу себе, и уште повеќе

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n + y_{n+1} &= 1 + (k+1)x_2 + (k+1)x_3 + ... + (k+1)x_n + k \\ &= (k+1)(1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) = k(k+1). \end{aligned}$$

Не е тешко да се провери дека $n = 6$ е најмалиот таков број. Доволно е да се земе $k = 1806 \cdot 1807$. Негови делители се

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 7, p_4 = 13, p_5 = 43, p_6 = 139,$$

а збирот неговите делители

$$1,\ 14 \cdot 13 \cdot 1807,\ 21 \cdot 43 \cdot 1807,\ 6 \cdot 43 \cdot 1807,\ 42 \cdot 1807, 1806$$

е еднаков на $1806 \cdot 1807$.

28. Определи ги сите прости броеви од облик $T_n + 1$, каде $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Постојат само три прости броеви $T_1 + 1 = 2, T_2 + 1 = 5, T_3 + 1 = 11$, кои ги исполнуваат условите на задачата. Навистина, за $n \geq 4$ имаме

$$T_n + 1 = \frac{n(n+3)(n^2+2)}{6},$$

при што $n+3>6$ и $n^2+2>6$ и еден од броевите е парен, а другиот се дели со 3, или еден од нив е делив со 6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

29. Определи ги сите парови (a,b) од цели броеви такви што ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b.

Решение. Нека ab^2+b+7 е делител на a^2b+a+b. Тогаш, бројот

$$b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$$

е делив со ab^2+b+7. Бидејќи $a\geq 1$, следува дека $ab^2+b+7>b^2-7a$, односно ако $b^2-7a\geq 0$, заклучуваме дека $b^2-7a=0$. Значи $b=7a$, $a=7c^2$ и лесно се проверува дека парот $(7c^2,7c)$ (c е цел број) ги задоволува условите од задачата. Да претпоставиме дека $b^2-7a<0$. Тогаш целиот број $7a-b^2$ е помал од $7a$ и е делив со ab^2+b+7. Следува $b=1$ или $b=2$ бидејќи во спротивно $ab^2+b+7>9a$. Лесно се проверува дека случајот $b=2$ не е можен, а за $b=1$ добиваме две решенија $(11,1)$ и $(49,1)$.

30. Природниот број n го нарекуваме *добар* ако и само ако постојат точно четири природни броеви k_1,k_2,k_3,k_4 такви што $n+k_i \mid n+k_i^2$, $i=1,2,3,4$.Докажи дека

а) 58 е добар број.

б) $2p$ е добар ако и само ако p и $2p+1$ се прости броеви ($p>2$).

Решение. Треба да важи $n+x \mid n+x^2$ за точно четири природни броеви x. Бидејќи $n+x \mid n^2-x^2$ следува дека $n+x \mid n+x^2+n^2-x^2$, т.е. $n+x \mid n^2+n$. Значи, бројот n е *добар* ако и само ако бројот n^2+n има точно четири делители поголеми од n.

а) Имаме $58^2+58=58\cdot 59=2\cdot 29\cdot 59$. Јасно, $59,\ 2\cdot 29,\ 29\cdot 59$ и $58\cdot 59$ се точно четири природни делители на 58^2+58 поголеми од 58. Според тоа бројот 58 е добар.

б) Нека $2p$ е добар број. Тогаш бројот $(2p)^2+2p$ има четири делители поголеми од $2p$. Бидејќи $(2p)^2+2p=2p(2p+1)$ следува дека $2p+1,\ 2(2p+1),$ $p(2p+1)$ и $2p(2p+1)$ се четирите делители на $(2p)^2+2p$ поголеми од $2p$.

Нека p е сложен број. Постои природен број a таков што $a\,|\,p$. Тогаш $2a(2p+1)\,|\,2p(2p+1)$ и $2a(2p+1)>2p$, т.е. $(2p)^2+2p$ има најмалку пет природни делители поголеми од $2p$, т.е. $2p$ не е добар број. Значи p е прост број.

Нека $2p+1$ е сложен број. Постои природен број a таков што $a\,|\,2p+1$. Тогаш $2pa\,|\,2p(2p+1)$ и $2pa>2p$, т.е. $(2p)^2+2p$ има најмалку пет природни делители поголеми од $2p$, т.е. $2p$ не е добар број. Значи $2p+1$ е прост број.

Ако p и $2p+1$ се прости броеви тогаш јасно е дека $2p+1$, $2(2p+1)$, $p(2p+1)$ и $2p(2p+1)$ се единствени делители на бројот $(2p)^2+2p$ поголеми од $2p$. Според тоа, $2p$ е добар број.

31. Докажи дека секој сложен природен број може да се претстави во облик $xy+yz+zx+1$, каде x,y,z се природни броеви.

Решение. Нека $z=1$. Имаме

$$xy+yz+zx+1=xy+y+x+1=(x+1)(y+1)=mn,$$

каде $m=x+1\geq 2, n=y+1\geq 2$. Значи, $xy+yz+zx+1$ е сложен број.

Според тоа, секој сложен број $s=mn$, каде $m,n\geq 2$ може да се претстави во облик $xy+yz+zx+1$ каде $x=m-1, y=n-1$ и $z=1$.

32. Докажи дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен .

Решение. Нека $a=5^{25}$. Од $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$ добиваме

$$\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}=\frac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1=(a^2+3a+1)^2-5a(a+1)^2$$

$$=(a^2+3a+1+5^{13}(a+1))(a^2+3a+1-5^{13}(a+1)).$$

Бидејќи $a^2+3a+1+5^{13}(a+1)>a^2+3a+1-5^{13}(a+1)>1$ следува дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ можеме да го претставиме како производ на два различни природни броеви поголеми од еден, што значи дека тој е сложен број.

33. Докажи дека постојат бесконечно многу непарни броеви $k>0$, за кои сите броеви од облик $2^{2^n}+k,\ n=1,2,...$ се сложени.

Решение. Такви се, на пример, сите броеви $k=6t-1$, $t=1,2,...$. Навистина, за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот 2^{2^n} при делење со 3 дава остаток 1, па затоа бројот $2^{2^n}+6t-1$ $=2^{2^n}+k$ ќе биде делив со 3 и бидејќи е поголем од 3, тој е сложен број.

34. Докажи дека низата 2^n-3, $n=2,3,...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.
Решение. Тврдењето во задачата ќе го докажеме користејќи го принципот на математичка индукција. Меѓу првите 11 броеви, за $n=2,3,...,12$, прости броеви од обликот 2^n-3 се броевите 5, 13, 29, 61, 509 и 1021, а заемно прост со нив е бројот 253.
Нека претпоставиме дека првите k по парови заемно прости броеви од обликот 2^n-3 се

$$a_1=2^{n_1}-3, a_2=2^{n_2}-3, ..., a_k=2^{n_k}-3, \text{ и } 2=n_1<n_2<...<n_k.$$

Конструираме број од облик $a_{k+1}=2^{n_{k+1}}-3$, кој ќе биде земно прост со секој од овие броеви. Избираме $l=a_1a_2...a_k$. Меѓу броеви $2^0,2^1,...,2^l$, кои ги има $l+1$, постојат барем два кои при делење со l даваат ист остаток. Нека 2^r и 2^s, $(r>s)$ се тие броеви. Тогаш постои природен број p, таков што $pl=2^r-2^s=(2^{r-s}-1)2^s$. Бидејќи l е непарен, добиваме дека $2^{r-s}-1$ е делив со l, т.е. за некој природен број q важи $2^{r-s}-1=ql$. Според тоа,

$$2^{r-s+2}-3=4\cdot 2^{r-s}-3=4(ql+1)-3=4ql+1$$

и овој број ќе го земеме за бројот a_{k+1}, бидејќи тој нема заеднички делител поголем од 1 со било кој од броевите $a_1,a_2,...,a_k$ и освен тоа $a_{k+1}>a_k$.
На опишаниот начин можеме да конструираме произволно многу броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

35. Броевите 1117 и 1171 се прости, а броевите 1711 и 7111 се сложени ($29|1711$ и $13|7111$). Докажи дека за секој $n\geq 2$ меѓу броевите запишани со помош на n единици и една седумка има барем еден сложен број.
Решение. Ако $n=2m$, тогаш

$$9\cdot 7\underbrace{11...1}_{2m}=63\underbrace{99...9}_{2m}=8\underbrace{00...0}_{m}{}^2-1=8\underbrace{00...0}_{m-1}1\cdot 7\underbrace{99...9}_{m}=9\cdot\underbrace{88...8}_{m-1}9\cdot 7\underbrace{99...9}_{m},$$

т.е.

$$7\underbrace{11...1}_{2m}=\underbrace{88...8}_{m-1}9\cdot 7\underbrace{99...9}_{m},$$

што значи дека $7\underbrace{11...1}_{2m}$ е сложен број.

Ако $n=6m+5$, тогаш збирот на цифрите на дадениот број е еднаков на $6m+5+7=6(m+2)$, па затоа тој е делив со 3.

Ако $n=6m+3$, тогаш бидејќи броевите 7111 и 111111 се деливи со 13, бројот

7111...1 е делив со 13.

Ако $n=6m+1$ тогаш бидејќи броевите 11171111 и 111111 се деливи со 7, бројот 111711...1 е делив со 7.

36. Нека a,b,c,d,r и f се природни броеви и нека $S=a+b+c+d+e+f$. Ако S е делител на броевите $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-fd$, тогаш S е сложен број. Докажи!

Решение. Го разгледуваме полиномот

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-d)(x-e)(x-f)\\&=(a+b+c+d+e+f)x^2-(ab+bc+cd-de-ef-fd)x+abc+def\\&=Sx^2+Rx+Q.\end{aligned}$$

Од условот на задачата следува $S\,|\,Q$ и $S\,|\,R$, па затоа $S\,|\,P(x)$ за секој цел број x. Ако земеме $x=d$, добиваме $P(d)=(a+d)(b+d)(c+d)$, односно $S\,|\,(a+d)(b+d)(c+d)$. Ако S е прост број, $S\,|\,(a+d)(b+d)(c+d)$ следува $S\,|\,a+d$ или $S\,|\,b+d$ или $S\,|\,c+d$, што противречи на $S>a+d,b+d,c+d$. Конечно, од добиената противречност следува дека S е сложен број.

37. Нека a,b,c, $(a\neq c)$ се ненулти цели броеви такви што $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Од $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ следува $(a-c)(b^2-ac)=0$ и како $a\neq c$ добиваме $b^2-ac=0$. Значи,

$$a^2+b^2+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+b+c)(a-b+c)$$

Ако $a^2+b^2+c^2>3$ е прост број, тогаш можни се следниве случаи:

1) $a-b+c=1, a+b+c=a^2+b^2+c^2$,

2) $a-b+c=-1, a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

3) $a+b+c=1, a-b+c=a^2+b^2+c^2$,

4) $a+b+c=-1, a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$.

Во првиот и третиот случај добиваме $(a-1)^2+b^2+(c-1)^2=1$, од каде следува $a=c=1$, што противречи на $a\neq c$.

Во вториот и четвртиот случај добиваме $(a+1)^2+b^2+(c+1)^2=1$, од каде следува $a=c=-1$, што противречи на $a\neq c$.

38. Природните броеви $x,y>1$ се такви што x^2+xy-y е точен квадрат. До-

кажи дека $x+y+1$ е сложен број.

Решение. Нека претпоставиме дека $x+y+1=p$ е прост број и дека

$$x^2+xy-y=px-p+1=k^2.$$

Тогаш $p\,|\,k^2-1$, па како p е прост број добиваме $p\,|\,k-1$ или $p\,|\,k+1$, од што следува $k\geq p-1$ и оттука добиваме $k-1\geq p-2\geq x$. Според тоа,

$$k^2-1\geq px>px-p=k^2-1,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $x+y+1$ е сложен број.

39. Природните броеви $a>b>1$ се такви што $b^2+a-1\,|\,a^2+b-1$. Докажи дека b^2+a-1 не е степен на прост број.

Решение. Нека $p^n=b^2+a-1\,|\,a^2+b-1$, каде p е прост број. Бидејќи $b^2+a-1\,|\,(b^2-1)^2-a^2$, добиваме

$$p^n\,|\,a^2+b-1+(b^2-1)^2-a^2=(b^2-1)^2+b-1=b(b-1)(b^2+b-1).$$

Понатаму, множителите $b,b-1$ и b^2+b-1 се заемно прости (провери) и $p^n<b(b-1)$, па затоа $p^n\,|\,b^2+b-1$. Значи, $p^n\,|\,b^2+a-1-(b^2+b-1)=a-b$, што не е можно бидејќи $0<a-b<p^n$.

40. Определи ги сите прости броеви од облик $\frac{n(n+1)}{2}-1$ каде n е природен број.

Решение. Имаме $\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Ако $n\geq 4$, тогаш $n-1$ и $n+2$ се и двата поголеми од 2, при што едниот од нив е парен, што значи дека $\frac{n(n+1)}{2}-1$ е сложен број. За $n=2$ имаме $\frac{2(2+1)}{2}-1=2$, а за $n=3$ имаме $\frac{3(3+1)}{2}-1=5$, што значи дека бараните броеви се 2 и 3.

41. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a>b>c>d$ и

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c). \tag{1}$$

Докажи, дека $ab+cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$a^2-ac+b^2=b^2+bd+d^2.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(ab+cd)(ad+bc)&=ac(b^2+bd+d^2)+bd(a^2-ac+c^2)\\&=(ac+bd)(a^2-ac+c^2).\end{aligned} \tag{2}$$

Нека претпоставиме дека $ab+cd$ е прост број. Од $a>b>c>d$ следува дека $ab+cd>ac+bd>ad+bc$ и како $ab+cd$ е прост број следува дека

$$(ab+cd, ac+bd)=1.$$

Сега, од (2) следува дека $ac+bd \mid ad+bc$, што противречи на

$$ac+bd>ad+bc.$$

Конечно, од добиената противречност следува дека $ab+cd$ не е прост број.

42. Докажи дека за секој природен број m постојат бесконечно многу парови природни броеви (x,y) за кои се исполенти следните услови:

а) x и y се заемно прости броеви,

b) $y \mid x^2+m$,

c) $x \mid y^2+m$.

Решение. Нека претпоставиме дека парот (x,y), каде $x \le y$, ги задоволува условите на задачата. Ќе докажеме дека и парот (y,z) каде $z=\frac{y^2+m}{x}$ исто така ги задоволува условите на задачата. Бидејќи еден пар кој ги задоволува условите на задачата е (1,1) ќе следува дека постојат бесконечно многу парови кои ги задоволуваат условите на задачата. Јасно,

$z=\frac{y^2+m}{x}=y\frac{y}{x}+\frac{m}{x}>y>0$.

Ќе докажеме дека $(z,y)=1$. Нека претпоставиме дека $(z,y)=d>1$. Постои прост број p таков што $p \mid d$. Оттука следува дека $p \mid z$ и $p \mid y$ Тогаш $p \mid z \mid y^2+m$, од каде бидејќи $p \mid y$ следува $p \mid m$. Но, $p \mid y \mid x^2+m$ и $p \mid m$, па следува дека $p \mid x^2$ и како p е прост број добиваме $p \mid x$, што противречи на $(x,y)=1$

Имаме, $(z,y)=1$. Од $x \mid y^2+m$ и како $z=\frac{y^2+m}{x}$ е цел број, добиваме дека $z \mid x^2+m$. Останува да докажеме дека важи $y \mid z^2+m$. Бидејќи x и y се заемно прости, доволно е да докажеме $y \mid x^2(z^2+m)$. Имаме

$$x^2(z^2+m)=x^2(\tfrac{y^4+2y^2m+m^2}{x^2}+m)=y^4+2y^2m+m^2+mx^2$$
$$=y^2(y^2+2m)+m(x^2+m),$$

и како $y \mid x^2+m$ заклучуваме дека следува $y \mid x^2(z^2+m)$, т.е. $y \mid z^2+m$.

43. Дали постои природен број n кој е делив со точно 2000 различни прости броеви, таков што бројот 2^n+1 е делив со n?

Решение. Со индукција по k ќе докажеме дека за секој $k\in\mathbb{N}$ постои $n_k\in\mathbb{N}$ кој има точно k различни прости делители и важи $n_k\,|\,2^{n_k}+1$ и $3\,|\,n_k$.

За $k=1$ бројот $n_1=3$ го задоволува горното тврдење. Нека претпоставиме дека $k\geq 1$ и $n_k=3^a m$, каде $3\nmid m$, па m има $k-1$ прости делители. Тогаш бројот $3n_k=3^{a+1}m$ има точно k прости делители и

$$2^{3n_k}+1=(2^{n_k}+1)(2^{2n_k}-2^{n_k}+1)$$

е делив со $3n_k$, бидејќи $3\,|\,2^{2n_k}-2^{n_k}+1$. Ќе земеме прост број p кој не е делител на n_k и нека $n_{k+1}=3pn_k$. Доволно е да се земе p така што $p\,|\,2^{3n_k}+1$ и $p\nmid 2^{n_k}+1$.

Последното е можно, бидејќи за секој природен број $a>2$ постои прост број p кој е делител на $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, но не е делител на $a+1$. Навистина, од $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ следува дека $(a+1,a^2-a+1)\,|\,3$ и $3^2\nmid a^2-a+1$, па за p може да се земе било кој прост делител на бројот a^2-a+1 поголем од 3.

44. Нека n е парен природен број кој не е делив со точен квадрат, k е цел број, а p е прост број таков, што $p<2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n+k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a,b,c такви, што $n=ab+bc+ca$.

Решение. Бројот n е парен и p не е делител на n, па затоа $p\neq 2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $0<k<p$. За $a=k$ и $b=p-k$ од равенството $n=ab+bc+ca$ имаме

$$c=\frac{n-ab}{a+b}=\frac{n-k(p-k)}{p}=\frac{n+k^2}{p}-k.$$

Според тоа, c е цел број и останува да докажеме дека $c>0$ и $c\neq a,b$. Бидејќи $\frac{n}{k}+k\geq 2\sqrt{n}>p$, добиваме дека $n+k^2>kp$, па затоа $c>0$.

Ако $c=a$, тогаш $\frac{n+k^2}{p}-k=k$, т.е. $n=k(2p-k)$. Бидејќи n е парен, добиваме дека k е парен, па затоа n е делив со 4, што противречи на условот дека n е парен природен број кој не е делив со точен квадрат. Ако $c=b$, тогаш $n=p^2-k^2$. Но, n е парен и p е непарен број, па затоа k е непарен број. Сега, $n=p^2-k^2$ е делив со 4, што е противречност. Конечно, a,b,c се различни природни броеви за кои е исполнето равенството $n=ab+bc+ca$.

45. Докажи, дека ако природниот број n може да се претстави на два различни начина

$$n = la^2 + mb^2,\ n = lc^2 + md^2, \qquad (1)$$

каде l, m се природни броеви и a, b, c, d се цели броеви, тогаш n е сложен број. Претставувањата кои се разликуваат по знаците на a, b, c, d или нивниот редослед кога $l = m$, не ги сметаме за различни.

Решение. Нека претпоставиме дека n е прост број. Од равенствата (1) следува

$$n(d^2 - b^2) = l(a^2d^2 - b^2c^2) = l(ad - bc)(ad + bc).$$

Но, n е прост број и како $l < n$ добиваме $(n, l) = 1$, па од последното равенство следува, дека барем еден од броевите $ad \pm bc$ се дели со n. Од

$$n^2 = (la^2 + mb^2)(lc^2 + md^2) = (lac + mbd)^2 + lm(ad - bc)^2,$$

следува, дека ако $lm > 1$, тогаш $ad \pm bc = 0$, бидејќи во спротивно десната страна на (2) ќе биде поголема од n^2. Но, тогаш или $ad - bc = 0$ или $ad + bc = 0$. И во двата случаја имаме

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{la^2 + mb^2}{lc^2 + md^2} = \frac{n}{n} = 1,$$

од што следува, дека $a = \pm c, b = \pm d$, т.е. двете претставувања на n се совпаѓаат. Значи, $lm = 1$, т.е. $l = m = 1$, па затоа $ac \pm bd = 0$. Аналогно добиваме $a = \pm d, b = \pm c$, што повторно е противречност. Според тоа, n е сложен број.

46. Испитај дали постои триаголник чија плоштина е 2004, а неговите страни имаат целобројни должини.

Решение. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои. Тогаш од Хероновата формула следува

$$s(s - a)(s - b)(s - c) = 2004^2,$$

од каде лесно следува дека s е природен број. Ставаме $s - a = x, s - b = y$, $s - c = z$ и како $s = x + y + z$ добиваме

$$xyz(x + y + z) = 12^2 \cdot 167^2.$$

Бројот 167 е прост, па затоа можни се следниве битно различни случаи:

1) $167^2 \mid x$ и тогаш $xyz(x + y + z) > 167^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 167^2 > 2004^2$,

2) $167 \mid x, 167 \mid y$ и тогаш $xyz(x + y + z) > 167 \cdot 167 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 167 > 2004^2$,

3) $167 \mid x, 167 \mid x + y + z$ и тогаш $167 \mid y + z$. Понатаму, од $yz \ge y + z - 1$ следува $yz \ge 166$, па затоа

$$xyz(x + y + z) > 167 \cdot 166 \cdot 2 \cdot 167 > 2004^2$$

4) $167^2 \mid x+y+z$, па затоа $x+y+z \geq 167^2$, од каде следува

$$xyz \geq \max\{x,y,z\} \geq \tfrac{x+y+z}{3} \geq \tfrac{167^2}{3} > 12^2, \text{ т.е.}$$

$$xyz(x+y+z) > 167^2 \cdot 12^2 = 2004^2.$$

Во сите четири случаи добиваме противречност, што значи дека не постои триаголник кој ги задоволува условоите на задачата.

47. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

Решение. Јасно, бројот 1 е решение на задачата. Решение на задачата се и сите непарни прости броеви. Навистина, ако $n=p$, тогаш делителите зголемени за 1 се 2 и $p+1$, па како бројот $p+1$ е парен, следува $2\mid(p+1)$ и $(p+1)\mid(p+1)$.

Нека претпоставиме, дека некој сложен број n е решение на задачата. Бидејќи $1\mid n$, заклучуваме дека $1+1=2\mid(n+1)$, па затоа n е непарен број. Нека $n=ab$, каде $a\geq b>2$. Тогаш $(a+1)\mid(n+1)$ и како $n+b=(a+1)b$, добиваме дека $(a+1)\mid(n+b)$, па затоа $(a+1)\mid(n+b-(n+1))=b-1$. Но, $b-1>0$, па затоа $b-1\geq a+1$, што е противречност.

48. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви кои се помали од збирот на сите свои вистински делители, но не може да се запишат како збир на некои различни вистински делители.

Решение. *Прв начин.* Нека p е прост број таков што $2^k < p < 2^{k+1}-1$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Вакви прости броеви има бесконечно многу, на пример, сите прости броеви од видот $4x+1, x\in\mathbb{N}$ се такви.

Ќе докажеме дека бројот $n=2^k p$ го има саканото своcјтво. Збирот на вистинските делители на бројот n е

$$(2^{k+1}-1)(p+1)-n-1=n+2^{k+1}-p-2>n.$$

Од друга страна, ако збирот на неколку негови виснски делители е еднаков на n, тогаш збирот на преостанатите делители е еднаков на $S=2^{k+1}-p-2$, што не е можно бидејќи S е непарен број помал од p , а сите вистински делители помали од p се парни броеви.

Втор начин. Бројот 70 го има саканото својство: збирот на неговите вистински делители е $1+2+5+7+10+14+35=74>70$, но не постои подмножество на множеството вистински делители со збир $74-70=4$. Сега да ги разгледаме броевите од видот $n=70p$, каде $p>7$ е некој прост број. Неговите вистински делители се:

$$2, 5, 7, 10, 14, 35, 70, \ p, 2p, 5p, 7p, 10p, 14p, 35p\,,$$

а нивниот збир е $74p+143$. Ако збирот на некои вистински делители е еднаков на $n=70p$, тогаш збирот на преостанатите делители ќе биде еднаков на $4p+143$. Меѓутоа бидејќи

$$2+5+7+10+14+35+70+p+2p=3p+143,$$

во овој збир мора да биде вклучен барем еден делител кој не е помал од $5p$, а тоа не е можно за $p>143$, бидејќи тогаш $5p>4p+143$. Според тоа, секој број од видот $n=70p$ за прост број $p>143$ го има саканото својство.

49. Докажи, ако n е непарен број поголем од 1, тогаш броевите n и $n+2$ се и двата прости ако и само ако бројот $(n-1)!$ не е делив ниту со n ниту со $n+2$.

Решение. Ако за некој $m\in\mathbb{N}$ бројот $m!$ е делив со простиот број p, тогаш p мора да е делител најмалку на еден од множителите во производот $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$, па значи $p\le m$. Затоа, ако бројот $m!$ е делив со природниот број $a>m$, тогаш мора a да е сложен број. Според тоа, ако за природен број $n>1$ бројот $(n-1)!$ е делив со n или со $n+2$, тогаш бројот n или $n+2$ е сложен. Значи, условот на задачи е потребен.

Да претпоставиме дека за непарен број $n>1$ бројот $(n-1)!$ не е делив ниту со n ниту со $n+2$. Ќе докажеме дека броевите n и $n+2$ се прости. Јасно, за $n=3$ и $n=5$ броевите n и $n+2$ се прости, па затоа нека $n\ge 7$. Ако n е сложен број, тогаш $n=ab$ каде a и b се природни броеви помали од n и, значи $a\le n-1,\ \ b\le n-1$, т.е броевите a и b ќе бидат множители во производот $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)$. Оттука, ако $a\ne b$, тогаш $n=ab\,|\,(n-1)!$, што е противречност. Ако $a=b$, тогаш $n=a^2$ и како n е непарен број поголем од 1 важи $a\ge 3$, т.е. $n=a^2\ge 3a>2a$, па затоа $2a\le n-1$. Според тоа, броевите a и $2a$ се различни множители на производот $(n-1)!$, па затоа $n=a^2\,|\,(n-1)!$, што противречи на претпоставката. Ако $n+2$ сложен број, тогаш $n+2=ab$, каде a и b се природни броеви поголеми од 1, и како n е непарен број добиваме $a,b\ge 3$ и отттука $n\ge 7, a\le \frac{n+2}{3}\le\frac{n-1}{2}$. Така, $2a\le n-1$ и слично наоѓаме $2b\le n-1$. Ако a и b се различни броеви, тогаш тие се различни множители во производот $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)=(n-1)!$, па спротивно на претпоставката $(n+2)\,|\,(n-1)!$. Ако $a=b$, тогаш a и $2b$ се различни множители во $(n-1)!$, па затоа спротивно на претпоставката $n+2\,|\,2ab\,|\,(n-1)!$. Значи условот е доволен.

50. Нека p е прост број и $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви такви што
$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p,$$
за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот $a_n + a_{n+2}$.

Решение. Ќе користиме индукција по n. Имаме,
$$a_1 a_3 + a_3^2 = a_2 a_4 + a_2^2,$$
па затоа a_2 е делител на $a_3(a_1 + a_3)$.

Ако $d = (a_2, a_3) > 1$, тогаш d е делител на $a_1 a_3 - a_2^2 = p$, па затоа $d = p$ и тогаш p е делител на a_2 и a_3 и од $p = a_3 a_5 - a_4^2$ следува дека p е делител на a_4. Последното значи дека p^2 е делител на $a_2 a_4 - a_3^2 = p$, што е противречност. Значи, $(a_2, a_3) = 1$ и од $a_2 \mid a_3(a_1 + a_3)$ следува $a_2 \mid (a_1 + a_3)$.

Нека претпоставиме дека за некој $k \in \mathbb{N}$ важи $a_{k+1} \mid (a_k + a_{k+2})$. Од рекурентната формула непосредно следува
$$\frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} + a_{k+3}}{a_{k+2}}.$$
Сега од $a_{k+1} \mid (a_k + a_{k+2})$ и последното равенство следува $a_{k+2} \mid (a_{k+1} + a_{k+3})$, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

51. Даден е природен број $k \geq 3$ и низа $a_k = 2k$ и
$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & \text{ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ се заемно прости,} \\ 2n, & \text{во спротивен случај,} \end{cases}$$
за секој $n > k$. Докажи, дека разликата $a_n - a_{n-1}$ е прост број за бесконечно броеви многу n.

Решение. Нека $a_t = 2t$ за некој $t \geq k$. Лесно се гледа, дека ако p е најмалиот прост делител на $t-1$ (таков p постои, бидејќи $t - 1 \geq k - 1 \geq 2$), тогаш
$$(t-1, i) = \begin{cases} 1, & \text{ако } 1 \leq i < p \\ p, & \text{ако } i = p. \end{cases}$$
Според тоа,
$$(2t + i - 2, t + i - 1) = \begin{cases} 1, & \text{ако } 1 \leq i < p \\ p, & \text{ако } i = p, \end{cases}$$
што значи, дека
$$a_{t+i-1} = \begin{cases} 2t + i - 1, & \text{ако } 1 \leq i < p \\ 2t + 2p - 2, & \text{ако } i = p. \end{cases}$$
Тогаш имаме $a_{t+p-2} = 2t + p - 2$ и $a_{t+p-1} = 2(t + p - 1)$, па затоа

$$a_{t+p-1}-a_{t+p-2}=2(t+p-1)-(2t+p-2)=p$$

е прост број. Освен тоа од претходно изнесеното следува, дека $a_t=2t$ за бесконечно многу вредности на t. Според тоа, постојат бесконечно многу вредности $t\geq k$, за кои $a_{t+p-1}-a_{t+p-2}=p$ е најмалиот прост делител на $t-1$.

52. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

Решение. Нека $x,y\in\mathbb{N}$. Ако $x\,|\,y$, тогаш $3^x-2^x\,|\,3^y-2^y$, па затоа бројот n ќе го побараме во облик 3^s-2^s. За да важи $3^s-2^s\,|\,3^{n-1}-2^{n-1}$, доволно е да важи $s\,|\,n-1$, т.е. доволно е да важи $s\,|\,3^s-2^s-1$. Нека $s=2^t$. Бидејќи за секој природен број t важи $t\leq 2^t$, добиваме $s\,|\,2^s$. Значи доволно е $2^t=s\,|\,3^s-1=3^{2^t}-1$. Последното ќе го докажеме со математичка индукција. За $t=1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $2^t\,|\,3^{2^t}-1$. Имаме, $3^{2^{t+1}}-1=(3^{2^t}-1)(3^{2^t}+1)$. Според индуктивната претпоставка првиот множител на десната страна на последното равенство се дели со 2^t, а вториот множител е парен, добиваме дека $2^{t+1}\,|\,3^{2^{t+1}}-1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $2^t\,|\,3^{2^t}-1$, за секој природен број t. Значи, за бројот $n=3^{2^t}-2^{2^t}$ важи $n\,|\,3^{n-1}-2^{n-1}$. Меѓутоа, за $t\geq 2$ важи

$$3^{2^t}-2^{2^t}=(3^{2^{t-1}}-2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}}+2^{2^{t-1}})$$

и очигледно тоа е сложен број. Според тоа, постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1}-2^{n-1}$.

53. Докажи дека за природнот број $n>1$ меѓу n и $2n$ постои барем еден прост број, ако и само ако за природниот број $n>1$ разложувањето на бројот $n!$ на прости множители содржи барем еден прост множител на прв степен.

Решение. Нека за природниот број $n>1$ меѓу n и $2n$ постои барем еден прост број. Јасно, за $n=2$ и $n=3$ во разложувањето на $n!$ на прости множители се содржи барем еден множител на прв степен. Нека претпоставиме, дека $n>3$. Ако n е парен број, $n=2k$, тогаш бидејќи $n>3$ важи $k>1$, па затоа постои прост број p таков што $k<p<2k$, т.е. $p<n<2p$, што значи p е делител само на множителот p во производот $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Ако пак $n=2k+1$, каде $k>1$, тогаш постои прост број p, таков што

$k<p<2k<n$, па е $k+1\le p$ и затоа $2k+1<2p$ и $p<n<2p$. Како и претходно заклучуваме дека бројот p во разложувањето на $n!$ е на степен 1.

Нека сега за природниот број $k>1$ разложувањето на бројот $k!$ на прости множители содржи барем еден прост множител на степен 1. Нека $n>1$ е даден природен број. Значи, постои прост број p кој во разложувањето на $(2n)!$ на прости множители се појавува на степен 1. Значи, $p<2n<2p$ (имено, ако $2p<2n$, тогаш во $(2n)!$ ќе се појават множители p и $2p$, па затоа p во разложувањето ќе се појави на степен поголем или еднаков на 2, што не можно). Конечно, $n<p<2n$, што и требаше да се докаже.

54. Нека a,m и n се природни броеви, каде a е парен и $m<n$. Докажи, дека еден од броевите $a^m+1, a^{m+1}+1, a^{m+2}+1,...,a^{m+n}+1$ е заемно прост со секој од останатите броеви.

Решение. Со k да го означиме најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на некој од броевите $m,m+1,...,n$. Нека претпоставиме дека има два броја кои се деливи со 2^k. Овие броеви можеме да ги запишеме во видот $2^k t_1$ и $2^k t_2$, каде $t_1<t_2$ се непарни броеви. Но, тогаш бројот $2^k(t_1+1)<2^k t_2$ се дели со 2^{k+1}, што противречи на изборот на k.

Според тоа, постои број $r, m\le r\le n$ кој се дели со 2^k и сите други броеви не се делат со 2^k. Ќе докажеме дека бројот a^r+1 е заемно прост со секој од останатите броеви. Нека p е прост делител на a^r+1. Бидејќи a е парен, добиваме дека p е непарен и тогаш p не е делител на a^r-1. Ако l е степенот на a по модул p, тогаш l е делител на $2r$ (бидејќи $a^{2r}-1$ се дели со p), но не е делител на r (бидејќи a^r-1 не се дели со p). Според тоа, l се дели со 2^{k+1}.

Нека претпоставиме дека p е делител на a^s+1 за $r\ne s$. Тоа значи дека l е делител на $2s$, т.е. 2^k е делител на s, што е противречност.

Докажавме, дека секој прост делител на a^s+1 не е делител на ниту еден од останатите броеви, т.е. бројот a^r+1 го има саканото својство.

55. Докажи дека низата на Фибоначи

$$u_1=u_2=1, u_{n+2}=u_n+u_{n+1},\ n=1,2,3,...$$

содржи бесконечна растечка низа по парови заемно прости членови.

Решение. Ако u_n е $n-$от член на низата на Фибоначи и ако m и n се природни броеви, тогаш може да се докаже дека $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$.

Затоа, ако земеме $p_1, p_2, p_3, ...$ да е низата прости броеви, тогаш

$$(u_{p_i}, u_{p_j}) = u_{(p_i, p_j)} = u_1 = 1,$$

т.е $u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, ...$ е бараната низа.

56. Определи ги сите четирицифрени природни броеви m, помали од 2005, за кои постои природен број $n < m$ таков што $m-n$ има најмногу три природни делители и mn е точен квадрат.

Решение. Условот $m-n$ да има најмногу три прриродни делители значи дека $m-n = p^k$, каде p е прост број и $k \in \{0,1,2\}$.

За $k = 0$ бројот $mn = n(n+1)$ не е точен квадрат. Нека $m-n = p^k$, $k \in \{1,2\}$ и $mn = t^2$, t е природен број. Тогаш $n(n+p^k) = t^2$, т.е.

$$(2n + p^k - 2t)(2n + p^k + 2t) = p^{2k},$$

од што следува дека $2n + p^k - 2t = p^s$ и $2n + p^k + 2t = p^r$, каде r и s се цели броеви $0 \le s < r \le 2k$ и $r + s = 2k$.

За $k = 1$ имаме единствена можност $2n + p^k - 2t = 1$ и $2n + p^k + 2t = p^2$, од каде добиваме $n = \frac{(p-1)^2}{4}, m = n + p = \frac{(p+1)^2}{4}$. Но, $1000 \le m < 2005$, па затоа $p = 83, 79, 73, 71, 67$ и соодветно $m = 1764, 1600, 1369, 1296, 1156$.

За $k = 2$ можно е $(r,s) = (4,0)$ или $(r,s) = (3,1)$. Во првиот случај добиваме $n = \frac{(p^2-1)^2}{4}$ и $m = n + p = \frac{(p^2+1)^2}{4}$. Но, од неравенството $1000 \le m < 2005$ следува $p = 8$, кој не е прост број. Во вториот случај имаме $m = n + p = \frac{p(p+1)^2}{4}$ и сега имаме решенија $p = 19, 17$ и соодветно $m = 1900, 1377$.

57. Нека n е природен број. Докажи дека, ако $n^5 + n^4 + 1$ има точно 6 различни природни делители, тогаш $n^3 - n + 1$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Еден природен број има точно шест природни делители ако и само ако наговиот каноничен запис е p^5 или pq^2, каде p и q се прости броеви.

Имаме

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$

Понатаму, од

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$$

следува дека $n^2 + n + 1$ не е точен квадрат. Нека со d го означиме најголемиот заеднички делител на $n^2 + n + 1$ и $n^3 - n + 1$. Тогаш последователно добиваме

$$d \mid n(n^2 + n + 1) - (n^3 - n + 1) = n^2 + 2n - 1$$
$$d \mid n^2 + 2n - 1 - (n^2 + n + 1) = n - 2$$
$$d \mid n^2 + n + 1 - n(n-2) = 3n + 1$$
$$d \mid 3n + 1 - 3(n-2) = 7.$$

Според тоа, $d = 1$ или $d = 7$.

Прв случај. Ако $d = 1$, тогаш

$$(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = pq^2$$

и единствена можност е

$$n^3 - n + 1 = q^2 \text{ и } n^2 + n + 1 = p\,,$$

При што првото од овие две равенства е тврдењето на задачата. Еден пример се добива за $n = 3$.

Втор случај. Ако $d = 7$ и $(n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = pq^2$ или p^5, тогаш еден од множителите од лево е еднаков на 7. Лесно се гледа дека во овој случај немаме решение.

58. Нека $n \geq 2$ и $a_j = n! + j,\ j = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека за секој природен број $k \in \{1, 2, ..., n\}$ постои барем еден прост број p, таков што $p \mid a_k$ и $p \nmid a_j$, $j \neq k$.

Решение. Забележуваме дека, ако p е прост број поголем од n, тогаш најмногу еден од броевите $a_j, j = 1, 2, ..., n$ е делив со p. Навистина, ако $p \mid a_i$, тогаш $p \mid a_j$, $1 \leq i < j \leq n$, тогаш $p \mid (a_j - a_i) = j - i$ што не е можно.

Да ги разгледаме следните случаи:

а) Ако k е прост број и $2k \leq n$, тогаш бројот $n!$ е делив со k^2, а бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со секој прост број кој не е поголем од n. Затоа бројот $\frac{n!}{k} + 1$ нема прости делители помали или еднакви на n. Значи бројот $a_k = k(\frac{n!}{k} + 1)$ има прост делител p кој е поголем од n. Но, тоа значи $p \nmid a_j$, $j \neq k$.

б) Ако k е прост број и $k \leq n < 2k$, тогаш $k \mid a_k$ и ниеден од броевите j, па затоа и $a_j, j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{k\}$, не е делив со k.

в) k е сложен број и $k \neq 4$. Ако $k = ab;\ a, b \in \mathbb{N}$ и $1 < a \leq b$, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите $a,\ b$ и k. Ако $k = a^2, a \geq 3$ е природен број, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите $a,\ 2a$ и k. Во секој случај бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со а, па аналогно на а) добиваме дека a_k има прост делител поголем од n.

г) $k = 4$. Ако $n \geq 6$, тогаш $\frac{n!}{4}$ се дели со 4, па аналогно на а) и в) следува дека a_k има прост делител поголем од n. За $n = 4$ бројот $a_4 = 4! + 4 + 28$ се дели со $p = 7$, а за $n = 5$ бројот $a_4 = 124$ се дели со $p = 31 > 5$.

59. Докажи, дека природниот број $n > 3$ е прост ако и само ако постои $\alpha \in \mathbb{N}$ таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$

Решение. *Условот е доволен.* Нека за некој $\alpha \in \mathbb{N}$ е исполнето

$$n! = n(n-1)(\alpha n + 1),\ \text{т.е.}\ (n-2)! = \alpha n + 1,$$

и нека n не е прост број. Ако p е било кој делител на n, тогаш $1 < p < n-2$, па значи $n \mid (n-2)!$. Меѓутоа $p \mid n$, па затоа αn не е делив со p, што е противречност.

Условот е потребен. Ќе докажеме две помошни тврдења.

а) Ако $(a, m) = 1,\ a, m \in \mathbb{N}$, тогаш броевите $a, 2a, \ldots, ma$ земени во некој редослед при делење со m даваат остатоци $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Навистина, ако ka и $la, k \neq l$ даваат ист остаток, тогаш $m \mid (k-l)$, што е противречност.

б) Ако p е прост број, тогаш за секој $k,\ 2 \leq k \leq p-2$ постои $l,\ 2 \leq l \leq p-2$, таков што $p \mid (kl-1), k \neq l$.

Според а) броевите $k, 2k, \ldots, pk,\ 2 \leq k \leq p-2$, земени во некој редослед, при делење со p даваат остатоци $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Меѓутоа

$$p \nmid (k-1), p \nmid pk, p \nmid (p-k-1),$$

па значи еден и само еден од броевите $kl,\ l = 2, 3, \ldots, p-2$, при делење со p дава остаток 1. Притоа $k \neq l$ бидејќи ако $k = l$, тогаш

$$p \mid (k^2 - 1) = (k-1)(k+1),$$

што противречи на $2 \leq k \leq p-2$ и p е прост број.

Од тврдењето б) имаме, ако p е прост број тогаш множителите $2, 3, \ldots, n-2$ на производот $(n-2)!$ можеме да ги поделиме на $\frac{n-3}{2}$ парови, такви што производот на секој од паровите при делење со n дава остаток 1. Затоа $n \mid ((n-2)! - 1)$, т.е. постои $\alpha \in \mathbb{N}$ таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$.

60. Докажи, дека ако n е природен број за кој бројот $1+2^n+4^n$ е прост, тогаш n е степен на бројот 3.

Решение. Ставаме $A_n=1+2^n+4^n$. Да забележиме дека за секои цели два броја $s\geq 0$ и $t\geq 1$, постои цел број B_{st}, за кој важи $2^{3^{s+1}t}=A_{3^s}B_{st}+1$. Навистина, за $t=1$ имаме

$$2^{3^{s+1}}-1=(2^{3^s})^3-1=(2^{3^s}-1)((2^{3^s})^2+2^{3^s}+1)=A_{3^s}(2^{3^s}-1),$$

т.е. ако ставиме $B_{st}=2^{3^s}-1$ го добиваме бараното равенство. За $t\neq 1$ важи

$$2^{3^{s+1}t}=(A_{3^s}B_{st-1}+1)^t=A_{3^s}B_{st}+1.$$

Нека сега n е природен број, за кој бројот A_n. Бројот n очиглено може да се запише во облик $n=3^s n_1$, каде $s\geq 0$ е цел број и n_1 е природен број, заемно прост со 3. За n_1 имаме две можности:

i) n_1 е од облик $n_1=3t+1$. Без тешкотии можеме да докажеме дека

$$A_n=A_{3^s}(1+2^{3^s}B_{st}+4^{3^s}A_{3^s}B_{st}^2+2B_{st}\cdot 4^{3^s}).$$

Но, при $t\geq 1$, т.е. при $n_1\neq 1$ важи

$$1+2^{3^s}B_{st}+4^{3^s}A_{3^s}B_{st}^2+2B_{st}\cdot 4^{3^s}>1,$$

што противречи на претпоставката дека A_n е цел број.

ii) n_1 е од облик $n_1=3t+2$. Тогаш

$$A_n=A_{3^s}(4^{3^s}B_{st}+4^{3^s\cdot 2}A_{3^s}B_{st}^2+2\cdot 4^{2\cdot 3^s}B_{st}+2^{3^s}B_{s1}+1),$$

т.е. A_n е сложен број.

Значи, ако A_n е прост број, тогаш $n_1=1$ или $n=3^s$, $s>1$, т.е. n е степен на бројот 3.

61. Определи ги сите аритметички прогресии во кои за секој $n\in\mathbb{N}$ збировите на првите n членови се точни квадрати.

Решение. Ако a е прв член на аритметичката прогресија, а d нејзината разлика, тогаш за збирот на првите n членови на прогресијата имаме

$$S_n=\tfrac{n}{2}(2a+(n-1)d).$$

Така, $S_1=a$ и $S_4=2(2a+3d)$, од каде добиваме $a=b^2$ и $d=2c$ за некои природни броеви b и c. Затоа,

$$S_n=n(b^2+(n-1)c)=n(nc+(b^2-c)).$$

За произволен прост број p од $p\,|\,S_p$ следува $p^2\,|\,S_p$, па затоа од горните развенства следува $p \mid b^2 - c$. Последното е можно ако и само ако $b^2 - c = 0$, т.е. $d = 2b^2$.

Од друга страна, ако членовите на аритметичката прогресија се од видот $(2n-1)b^2$, каде b е произволен природен број, тогаш соодветните збирови се $S_n = n^2 b^2$, што значи дека сме ги определиле бараните прогресии.

62. Дали постои прост број $p \geq 5$ за кој равенката

$$2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0$$

има рационален корен.

Решение. Нека $\frac{m}{n}$ е рационален корен на

$$f(x) = 2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0,$$

каде $(m,n) = 1, m > 0, n \neq 0$ и m е делител на $3p-1$. Тогаш

$$f(x) = (mx - n)g(x),$$

каде $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Бидејќи $f(1) = 2p$ и $f(-1) = 2$, заклучуваме дека $m-n$ е делител на $2p$ и $m+n$ е делител на 2. Според тоа, $m-n = \pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p$ и $m+n = \pm 1, \pm 2$, при што $m-n$ и $m+n$ се со иста парност.

Ако $m-n = x$ и $m+n = y$, тогаш $m = \frac{x+y}{2}, n = \frac{y-x}{2}$, за $x = \pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p$ и $y = \pm 1, \pm 2$. Од $m, n \neq 0$ следува дека $x \neq \pm 1, \pm 2$. Останува да ги разгледаме случаите $x = \pm p, y = \pm 1$ и $x = \pm 2p, y = \pm 2$. Понатаму, од $m > 0$ следува дека $x = p, y = \pm 1$ или $x = 2p, y = \pm 2$. Можните вредности за m се $m = \frac{p \pm 1}{2}$ и $m = p \pm 1$, при што во сите случаи $\frac{p \pm 1}{2}$ е делител на $3p-1$. Од

$$3p - 1 = 6 \cdot \frac{p-1}{2} + 2 = 6 \cdot \frac{p+1}{2} - 4,$$

добиваме дека $\frac{p-1}{2}$ е делител на 2 (што не е можно за $p \geq 5$) или $\frac{p+1}{2}$ е делител на 4, што е можно само за $p = 7$. Непосредно се пороверува дека за $p = 7$ соодветните вредности на m и n не даваат корени на равенката.

Според тоа, не постои прост број $p \geq 5$ за кој дадената равенка има рационален корен.

63. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = 7$ и $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1}, n)$, за $n \geq 2$. Докажи дека за секој $n \geq 2$ разликата $a_n - a_{n-1}$ или е прост број или е единица.

Решение. Имаме $a_2 = 8$ и $a_3 = 9$.

Да претпоставиме дека $a_n = 3n$ за некој $n \geq 3$ и да го разгледаме најмалиот природен број $m > n$ таков што $a_m - a_{m-1} > 1$. Ќе докажеме дека $a_m - a_{m-1}$ е прост број и $a_m = 3m$. Тогаш тврдењето на задачата одма ќе следува со индукција.

За $0 < i \leq m-n$ важи $a_{n+i-1} = 3n+i-1$ и

$$\begin{aligned} a_{n+i} - a_{n+i-1} &= (n+i, a_{n+i-1}) = (n+i, 2n-1) \\ &= (2n+2i, 2n-1) = (2i+1, 2n-1). \end{aligned}$$

Според тоа, $2i+1$ е заемно прост со $2n-1$ за $0 < i < m-n$, но не и за $i = m-n$. Следува дека $p = 2(m-n)+1$ е најмалиот прост делител на бројот $2n-1$ и $m = n + \frac{p-1}{2}$. Сега

$$a_m - a_{m-1} = p \text{ и } a_m = a_{m-1} + p = 3n + \frac{p-3}{2} + p = 3m.$$

64. За секои природни броеви $a > b > 1$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со равенството $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}, n \geq 1$. Определи го најмалиот природен број d таков, што за произволни a и b оваа низа не содржи повеќе од d последователни членови кои се прости броеви.

Решение. За $a = 4$ и $b = 2$ имаме $\frac{a^1-1}{b^1-1} = 3, \frac{a^2-1}{b^2-1} = 5$. Останува да докажеме, дека не постојат повеќе од два последователни членови на низата кои се прости броеви.

Ќе докажеме посилно тврдење: за $n \geq 2$ барем еден од броевите $\frac{a^n-1}{b^n-1}$ и $\frac{a^{n+1}-1}{b^{n+1}-1}$ е сложен број. Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш

$$(a-1)(a^{n-1} + ... + a + 1) = p(b-1)(b^{n-1} + ... + b + 1) \tag{1}$$

$$(a-1)(a^n + ... + a + 1) = q(b-1)(b^n + ... + b + 1), \tag{2}$$

каде p и q се прости броеви.

Да претпоставиме дека $b-1$ не е делител на $a-1$. Тогаш некој прост број r учествува во каноничното разложување на $b-1$ со степен поголем од тој во разложувањето на $a-1$. Од (1) и (2) добиваме, дека r е заеднички делител на $a^{n-1} + ... + a + 1$ и $a^n + ... + a + 1$, но

$$(a^{n-1} + ... + a + 1, a^n + ... + a + 1) = (a^{n-1} + ... + a + 1, a^n) = 1,$$

што е противречност. Според тоа, $k = \frac{a-1}{b-1} \in \mathbb{N}$. Од (1) имаме

$$k(a^{n-1} + ... + a + 1) = p(b^{n-1} + ... + b + 1).$$

Да забележиме, дека од

$$b^{n-1}+...+b+1<a^{n-1}+...+a+1$$

следува $1<k<p$. Значи, $(k,p)=1$ и затоа $b^{n-1}+...+b+1|k$. Аналогно, од (2) следува дека $k<q$ и $b^n+...+b+1|k$. Последното противречи на фактот дека

$$(b^{n-1}+...+b+1, b^n+...+b+1)=1.$$

Забелешка. Два последователни прости броја во таква низа можат да бидат секои два прости броја од видот $p=b+1$ и $q=b^2+1$.

Навистина, ако $a=b^2$, тогаш $p=\frac{a-1}{b-1}, q=\frac{a^2-1}{b^2-1}$. Такви парови се:

$$(7,37), (11,101) \text{ и } (2^{2^3}+1, 2^{2^4}+1).$$

65. Природниот број N е собран со неговиот најголем делител, кој е помал од N, и е добиен степен на бројот 10. Определи ги сите такви природни броеви N.

Решение. Нека m е најголемиот делител на N, помал од N. Тогаш $N=mp$, каде p е најмалиот прост делител на N. Имаме $N+m=10^k$, за некој k, па затоа $m(p+1)=10^k$. Десната страна на последното равенство не е делива со 3, па затоа $p>2$. Оттука следува дека N е непарен, па затоа и m е непарен. Од друга страна m е делител на 10^k, па затоа $m=5^s$, за некој ненегативен цел број s. Ако $m=1$, тогаш $N=p=10^k-1$ е прост број, што не е можно, бидејќи 10^k-1 е делив со 9.

Значи, $s\geq 1$, бројот N е делив со 5 и $p\leq 5$. Ако $p=3$, добиваме $4\cdot 5^s=10^k$, од каде следува $k=2$, $m=25$ и $n=75$. Ако $p=5$, тогаш $p+1=6$ и бројот 10^k е делив со 3, што е противречност.

66. Нека p е прост број. Определи ги сите природни броеви k такви што $\sqrt{k^2-pk}$ е природен број.

Решение. Ако $p=2$, тогаш $k^2-pk=k^2-2k=(k-1)^2-1$ треба да е квадрат на природен број, што не е можно за ниту еден природен број k.

Нека претпоставиме дека p е непарен прост број. Ако $k=np, n\in\mathbb{Z}$, тогаш $k^2-pk=p^2n(n-1)$, па затоа n и $n-1$ треба да се квадрати на природни броеви, што не е можно.

Нека $(p,k)=1$. Тогаш, $(k,p-k)=1$, па затоа ако $k^2-pk=k(p-k)$ е квадрат на природен број, тогаш $k=m^2$ и $k-p=n^2$. Според тоа,

$$p=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$$

од што следува $m+n=p$, $m-n=1$. Од последните равенства добиваме $m=\frac{p+1}{2}$, па затоа $k=\frac{(p+1)^2}{4}$.

67. Нека $p,q\in\mathbb{N}$ и $\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979\,|\,p$.

Решение. Нека $A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{1319}$ и $B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1318}$. Тогаш е исполнето

$$\frac{p}{q}=A-B=(A+B)-2B=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1319}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{659}$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+...+\frac{1}{1319}=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+...+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})$$

$$=\frac{1979}{660\cdot 1319}+\frac{1979}{661\cdot 1318}+...+\frac{1979}{989\cdot 990}=\frac{1979N}{660\cdot 661\cdot ...\cdot 1319}.$$

Бидејќи 1979 е прост број, тој не може да се скрати со ниту еден од множителите од именителот. Затоа броителот на добиената дропка е делив со 1979.

68. а) Определи ги сите природни броеви n, $n\geq 3$ за кои постои множество од n последователни природни броеви со следното својство: најголемиот од овие броеви е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите $n-1$ броеви.

б) За кои природни броеви n, $n\geq 3$ постои точно едно множество со ова својство?

Решение. Нека низата

$$a-n+1, a-n+2, a-n+3,....,a-1,a \tag{1}$$

природни броеви ги задоволува условите на задачата, т.е. нека

$$a\,|\,[a-n+1,...,a-1]$$

Нека $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, ($p_1<p_2<...<p_r$, $\alpha_j>0$ за $j=1,2,...,r$) е каноничната факторизација на бројот a. Тогаш за секој $j\in\{1, 2,...,r\}$ постои $m\in\{1,2,...,n-1\}$, таков што $p_j^{\alpha_j}\,|\,(a-m)$. Бидејќи $p_j^{\alpha_j}\,|a,$ добиваме дека $p_j^{\alpha_j}\leq n-1$ за секој $j\in\{1,2,...,r\}$. Ако $r=1$, тогаш

$$n\leq a=p_1^{\alpha_1}\leq n-1,$$

што не е можно. Значи, $r\geq 2$. Според тоа, постојат барем два прости броја помали од n, од што следува дека $n\geq 4$.

Ќе докажеме дека за секој $n\geq 4$ постои низа (1) која што ги задоволува условите на задачата, а за $n\geq 5$ постојат барем две такви низи. Според тоа, одговор на прашањето под а) е $n\geq 4,$ а одговор на прашањето под б) е $n=4$.

Ако $n=4$, тогаш $p_1^{\alpha_1}\leq 3$, $p_2^{\alpha_2}\leq 3$, па затоа важи $r=2,\ p_1=2,\ p_2=3,$ $\alpha_1=\alpha_2=1,$ т.е. низа од облик (1) која што ги задоволува условите на задачата е 3, 4, 5, 6.

За $n=5$ постојат две такви низи: 2, 3, 4, 5, 6 и 8, 9, 10, 11, 12.

Нека $n\geq 6$. Со r, s, t да ги означиме природните броеви кои ги исполнуваат неравенствата $2^r\leq n-1<2^{r+1}$, $3^s\leq n-1<3^{s+1}$, $5^t\leq n-1<5^{t+1}$. Нека во низата (1) $a=2^r3^s$, односно $a=2^r5^t$. Тогаш

$$n-1<2^{r+1}<2^r3\leq 2^r3^s=a$$
$$n-1<2^{r+1}<2^r5\leq 2^r5^t=a$$

Јасно, низите (1) за вака избран број a ги задоволуваат условите на задачата.

69. Докажи, дека за секој природен број n бројот

$$\frac{(17+12\sqrt{2})^n-(17-12\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$$

е природен, но не е точен квадрат.

Решение. Имаме $17+12\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^4$ и $17-12\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^4$, па затоа

$$\frac{(17+12\sqrt{2})^n-(17-12\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n}-(\sqrt{2}-1)^{4n}}{4\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}.$$

Нека

$$A=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2} \text{ и } B=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}.$$

Од биномната формула следува

$$(\sqrt{2}+1)^{2n}=x+y\sqrt{2},\quad (\sqrt{2}-1)^{2n}=x-y\sqrt{2},$$

па затоа

$$x=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2}=A \text{ и } y=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}=B,$$

што значи дека AB е природен број. Понатаму,

$$A^2-2B^2=(A+B\sqrt{2})(A-B\sqrt{2})=(\sqrt{2}+1)^{2n}(\sqrt{2}-1)^{2n}=1,$$

па затоа A и B се заемно прости. Сега, доволно е да докажеме дека барем еден од броевите A и B не е точен квадрат. Имаме

$$A=\frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2}=[\frac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}}]^2-1 \qquad (1)$$

$$A = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}}{2} = [\frac{(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}}]^2+1 \qquad (2)$$

Бидејќи, во зависност од парноста на n, само еден од броевите

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n}{\sqrt{2}}$$

е природен број, од (1) и (2) следува дека A не е точен квадрат.

70. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Решение. Броевите 3, 7 и 11 се прости и се од видот $4k+3$. Нека претпоставиме дека постојата конечно многу прости броеви од видот $4k+3$ и нека $p_1, p_2, ..., p_m$ се сите такви броеви. Бројот $n = 4p_1p_2...p_m - 1$ не е делив со ниту еден од броевите $p_1, p_2, ..., p_m$. Според тоа, ако го разложиме n на прости множители, сите тие треба да бидат од видот $4k+1$. Но, производ на броеви кои даваат остаток 1 при делење со 4 повторно е број кој дава остаток 1 при делење со 4, а додека при делење на n со 4 се добива остаток 3. Од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k+3$.

71. Докажи, дека за секој природен број n постојат бесконечно многу природни броеви m такви да $(n, 2^m - 1) = 1$.

Решение. Според задача I 82, ако p, q се прости броеви, $p \neq q$, тогаш $(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$, па затоа сите броеви во низата

$$2^{p_1} - 1, 2^{p_2} - 1, ..., 2^{p_k} - 1, ... \qquad (1)$$

каде $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ е низата прости броеви се по парови заемно прости. Но, секој природен број n има конечно многу прости делители, па затоа бесконечно многу членови на низата (1) се заемно прости со n.

72. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што најголемиот прост делител на $n^4 + n^2 + 1$ е еднаков на најголемиот прост делител на $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Решение. Прво да забележиме дека

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = ((n-1)^2 + (n-1) + 1)(n^2 + n + 1),$$

па затоа ако со p_n го означиме најголемиот прост делител на $n^4 + n^2 + 1$, а со q_n најголемиот прост делител на $n^2 + n + 1$, тогаш $p_n = \max\{q_n, q_{n-1}\}$, за секој $n \geq 2$. Бидејќи $(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = 1$, добиваме $q_n \neq q_{n-1}$, за секој n.

Според тоа, задачата се сведува на тоа да докажеме дека постојат бесконечно многу $n \geq 2$ такви што $q_n > q_{n-1}$ и $q_n > q_{n+1}$. Бидејќи $q_2 = 7 < 13 = q_3$ и $q_4 = 7 < 13 = q_3$, добиваме дека 3 еден таков број. Нека претпоставиме дека вакви броеви се конечно многу и нека m е најголемиот меѓу нив. Тогаш или $q_m > q_{m+1} > q_{m+2} > \dots$, што очигледно не е можно или постои $k \geq m$ таков што $q_k < q_{k+1}$ ($q_k \neq q_{k+1}$). Од друга страна, не е можно $q_k < q_{k+1} < q_{k+2} < \dots$, бидејќи $q_{(k+1)^2} = p_{k+1} = \max\{q_k, q_{k+1}\} = q_{k+1}$, па затоа постои најмал $l \geq k+1$ таков што $q_l > q_{l+1}$. Од минималноста следува $q_l > q_{l-1}$, но $l \geq k+1 > k \geq m$, што противречи на изборот на m, а со тоа и на претпоставката. Според тоа, постојат бесконечно многу n кои го задоволуваат условот на задачата.

73. Докажи, дека за секој природен број $a \geq 4$ постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на $a^n - 1$, но не се деливи со квадрат на прост број.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $p \geq 3$ е непарен делител на бројот b. Тогаш постои непарен прост број q таков што $q \mid (b+1)^p - 1$, но $q \nmid b$.

Доказ. Ако $b = pc$, тогаш

$$\begin{aligned}(b+1)^p - 1 &= b((b+1)^{p-1} + (b+1)^{p-2} + \dots + (b+1) + 1)\\ &= b(Bb^2 + \tfrac{p(p-1)}{2} b + p)\\ &= bp(b(Bc + \tfrac{p-1}{2}) + 1)\\ &= bpd,\end{aligned}$$

и останува да избереме прост делител q на d. Да забележиме дека d е непарен, бидејќи ако b е парен, тогаш $d = bK + 1$ е непарен, а ако b е непарен, тогаш $(b+1)^p - 1$ е непарен, па затоа d е непарен. Јасно, $q \mid (b+1)^p - 1$, но $q \nmid b$. ■

Сега, ќе докажеме дека ако $a \neq 2^k + 1$, тогаш постои низа непарни прости броеви $p_1, p_2, \dots$ таква што ако $p_0 = 1$ и ако $P_n = a^{p_0 p_1 \cdots p_n} - 1$, тогаш $p_1 \mid a - 1$ и $p_{n+1} \mid P_n$, но $p_{n+1} \nmid P_{n-1}$, $n \geq 1$.

Нека p_1 е непарен прост делител на $a - 1$ и нека веќе сме ги избрале броевите $p_1, p_2, \dots, p_k$. Ако ја примениме лемата за $b = P_k$ и $p = p_k$, наоѓаме непарен прост број p_{k+1} кој е делител на P_k, но не е делител на P_{k-1}.

Понатаму, бидејќи P_{k-1} е делив со броевите $p_1, p_2, \dots, p_k$, но не е делив со

p_{k+1}, заклучуваме дека p_{k+1} е различен од броевите $p_1, p_2, ..., p_k$. Според тоа, броевите од видот $p_1 p_2 ... p_k$ го имаат саканото својство од условот на задачата.

Ако $a = 2^l + 1$, $l \geq 2$, тогаш $a^2 \neq 2^m + 1$ и осатнува да ги помножиме со 2 најдените броеви за бројот a^2.

74. За секој природен број a со $P(a)$ е означен најголемиот прост делител на $a^2 + 1$. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки од различни природни броеви a, b, c такви што $P(a) = P(b) = P(c)$.

Решение. Нека p е непарен прост број и $a < p$ е природен број таков, што $p \mid a^2 + 1$. Тогаш броевите a и $p - a$ се различни и $P(a) = P(a - p) = p$. Навистина, броевите $a^2 + 1$ и $(p - a)^2 + 1 = a^2 + 1 + p(p - 2a)$ се деливи со p и се помали од p^2, што значи дека не може да се деливи со прости броеви поголеми од p.

Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш постојат конечен број прости броеви броеви p, за кои равенката $P(x) = p$ има барем три решенија во множеството природни броеви. Со s да го означиме најголемиот таков прост број (ако нема такви прости броеви, ставаме $s = 2$), а со S да го означиме производот на сите прости броеви помали или еднакви на s.

Нека $p = P(S)$. Тогаш p е заемно прост со S, па затоа $p > s$. Со a да го означиме остатокот при делењето на S со p. Имаме $p \mid a^2 + 1$ и затоа $P(a) = P(p - a) = p$. Јасно,еден од броевите a и $p - a$ е парен, да го означиме со b.

Понатаму, бројот $(b + p)^2 + 1$ е делив со $2p$ (бидејќи b е парен и p е непарен), па значи $P(b + p) \geq p$. Ако $P(b + p) = p$, тогаш равенката $P(x) = p$ има три решенија: $b, p - b, p + b$, што не еможно согласно направената претпоставка. Тогаш $P(b + p) = q > p$, бројот $(b + p)^2 + 1$ е делив со $2pq$ и во случајов не е помал од $2pq$. Тоа значи, дека $q < b + p$, бидејќи во спротивно

$$(b + p)^2 + 1 \leq (2p - 1)q + 1 < 2pq.$$

Конечно, ако c е остатокот при делењето на $b + p$ со q, тогаш

$$P(c) = P(q - c) = P(b + p) = q > p > s,$$

што проитвречи на изборот на s.

75. Нека n е природен број и p е прост број. Докажи дека ако a,b,c се цели броеви такви што $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$, тогаш $a=b=c$.

Решение. Лесно се докажува дека ако два од броевите a,b,c се еднакви, тогаш и третиот е еднаков на нив. Затоа нека $a\neq b\neq c\neq a$.

Од $a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa$ следува $\frac{a^n-b^n}{b-c}=\frac{b^n-c^n}{c-a}=\frac{c^n-a^n}{a-b}=-p$, па затоа

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\frac{b^n-c^n}{b-c}\cdot\frac{c^n-a^n}{c-a}=-p^3.$$

Ако n е непарен број, тогаш a^n-b^n и $a-b$ имаат ист знак, па затоа $\frac{a^n-b^n}{a-b}>0$. Слично, $\frac{b^n-c^n}{b-c}>0, \frac{c^n-a^n}{c-a}>0$, па затоа

$$0<\frac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\frac{b^n-c^n}{b-c}\cdot\frac{c^n-a^n}{c-a}=-p^3<0,$$

што е противречност. Значи, n е парен број. Нека $(a-b,b-c,c-a)=d$. Постојат цели броеви e,f,g такви што $a-b=ed,\ b-c=fd,\ c-a=gd$ и $(e,f,g)=1$. Важи

$$0=(a-b)+(b-c)+(c-a)=d(e+f+g),$$

па затоа $e+f+g=0$. Од $a^n-b^n=-p(b-c)$ следува $a-b\,|-p(b-c)$ т.е. $e\,|\,pf$. Аналогно се добива $f\,|\,pg$ и $g\,|\,pe$. Нека претпоставиме дека p е прост број кој не е делител на e,f,g. Следува дека $e\,|\,f, f\,|\,g, g\,|\,e$, од каде заради $(e,f,g)=1$ добиваме $|e|=|f|=|g|=1$, што противречи на $e+f+g=0$. Според тоа, p е делител најмалку на еден од броевите e,f,g. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p\,|\,e$. Постои природен број e' таков што $e=pe'$. Од $e\,|\,pf$ следува $pe'\,|\,pf$, т.е. $e'\,|\,f$. Исто така важи $f\,|\,g$ и $g\,|\,e$. Бидејќи $e'\,|\,e$, од $(e,f,g)=1$ следува $(e',f,g)=1$ Оттука $|e'|=|f|=|g|=1$. Добиваме

$$pe'+f+g=e+f+g=0$$

и од $f+g\in\{-2,-1,0,1,2\}$ и $pe'=\pm p$ следува дека $p=2$.

Значи $f+g=-2e'=\pm 2$ од каде следува дека $f=g=\pm 1$. Оттука

$$e=-(f+g)=\pm 2, \text{ т.е. } a-b=\pm 2d.$$

Јасно, $b-c=fd=\pm d, c-a=gd=\pm d$, (знакот на f и g е ист, но е спротивен на знакот на e) па следува дека $a-b=-2(b-c)$.

Бидејќи n е парен број, имаме $n=2k$, па затоа

$$a^n-b^n=-p(b-c)$$

$$(a^k-b^k)(a^k+b^k)=-2(b-c)=a-b. \qquad (1)$$

Бидејќи $a-b\,|\,a^k-b^k$ од (1) следува дека $a^k+b^k=\pm1$. Значи, броевите a и b се со различна парност, што противречи на $a-b=-2(b-c)$. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат цели броеви a,b,c кои го задоволуваат условот на задачата и за кои важи $a\neq b\neq c\neq a$. Тоа значи, $a=b=c$.

76. Дадени се природните броеви $b,n>1$. Нека за секој $k>1$ постои цел број a_k таков што $b-a_k^n$ е делив со k. Докажи дека $b=A^n$ за некој цел број A.

Решение. Нека $b=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничната факторизација на природниот број b. Доволно е да докажеме дека степените α_i се деливи со n. Нека $k=b^2$. Од условот на задачата добиваме следува дека $p_i^{2\alpha_i}\,|\,b-a_k^n$, па според тоа $p_i^{\alpha_i}\,|\,a_k^n$. Бидејќи за секој $i=1,2,...,k$ важи $1+\alpha_i\leq2\alpha_i$ имаме $p_i^{1+\alpha_i}\,|\,p_i^{2\alpha_i}$, од каде следува дека $p_i^{1+\alpha_i}\,|\,b-a_k^n$. Јасно, a_k^n не е делив со $p_i^{1+\alpha_i}$, бидејќи во тој случај b ќе биде делив со $p_i^{1+\alpha_i}$, што не е можно. Значи, највисокиот степен на p_i кој го дели a_k^n е $p_i^{\alpha_i}$.

Бидејќи a_k^n е точен $n-$ти степен следува дека α_i е делив со n.

77. Докажи дека за секој природен број n постојат n последователни природни броеви такви што ниту еден не е степен на прост број.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека ако a и b се природни броеви такви што $b\neq1$ и $a\geq2b$, тогаш $m=a!+b$ не е степен на прост број. Од овде следува дека условот на задачата е исполнет за следниве броеви:

$$(2n^2)!+n,\ (2n^2)!+n+1,\ ...,\ (2n^2)!+2n-1.$$

Втор начин. Нека n е природен број и да ставиме $k=(n+1)!^2+1$. Ќе докажеме дека ниту еден од броевите $k+1,k+2,...,k+n$ не е степен на прост број.

Забележуваме дека за секој $j\in\{1,2,...,n\}$ бројот $k+j=(n+1)!^2+j+1$ е делив со $j+1$. Да претпоставиме дека за некој $j\in\{1,2,...,n\}$ важи $k+j=p^m$, каде што p е прост број и m е природен број. Тогаш $1+j=p^s$ за некој природен број s, $s<m$. Тогаш $p^{s+1}\,|\,(n+1)!^2$ и $p^{s+1}\,|\,k+j$, односно $p^{s+1}\,|\,k-1$ и $p^{s+1}\,|\,k+j$. Затоа, $p^{s+1}\,|\,k+j-(k-1)=j+1$, што е противречност.

78. Определи ги сите природни броеви n, кои се деливи со сите природни брое-

ви помали или еднакви на $\sqrt{n}$.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот n е делив со сите броеви m помали или еднакви на $\sqrt{n}$. Да го определиме најмалиот заеднички содржател K на сите такви броеви m. Во него, очигледно, ќе се содржат сите прости броеви помали од $\sqrt{n}$, при што секој прост број е со таков степен a што $p^a \le \sqrt{n}$, но $p^{a+1} > \sqrt{n}$. Нека бројот на простите броеви помали од $\sqrt{n}$ е еднаков на t . Овие прости броеви ќе ги означиме со $p_1, p_2, ..., p_t$ и најмалиот заеднички содржател на сите броеви помали од $\sqrt{n}$ е $K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}$, каде $p_i^{\alpha_i} \le \sqrt{n} < p_i^{\alpha_i+1}$, за $i = 1, ..., t$. Ако ги помножиме неравенствата $\sqrt{n} < p_i^{\alpha_i+1}$, за $i = 1, ... ,t$ добиваме

$$\sqrt{n}^t < p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} ... p_t^{\alpha_t+1} ,$$

Но,

$$p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} ... p_t^{\alpha_t+1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t} p_1 p_2 ... p_t \le K^2 ,$$

па значи $\sqrt{n}^t < K^2$. Согласно со условот на задачата n мора да е делив со K , па затоа $K \le n$, односно $\sqrt{n}^t < n^2$. Од овде наоѓаме $t < 4$. Бидејќи $p_1, p_2, ...,$ p_t се сите прости броеви помали од $\sqrt{n}$, имаме $p_4 > \sqrt{n}$, т.е. $n < 49$. Со непосредна проверка за сите броеви, помали од 49, наоѓаме $n = 2, 4, 6, 8, 12, 24.$

79. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со

а) 2, б) 3 и в) 2015?

Решение. Еден природен број е силен ако секој негов прост делител е барем на втор степен. Ако каноничното разложување на еден број е $p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, тогаш неговата сила е еднаква на $s_1 s_2 ... s_k$, бидејќи за степенот на неговиот делител p_k има s_k можни избори (0,2,..., s_k).

а) Ако избереме 8 последователни броеви, тогаш некој од нив ќе биде делив со 2^2 , но нема да биде делив со 2^3 , па така неговата сила ќе биде делива со 2. Постојат 7 последователни природни броеви, секој од кои има сила која не е делива со 2, на пример 29, 30, 31, 32, 33, 34 и 35.

б) Ако избереме 16 последователни броеви, некој од нив ќе биде делив со 2^3 , но нема да биде делив со 2^4 , па така неговата сила ќе биде делива со 3.

Постојат 15 последователни природни броеви, секој од кои кои има сила која не е делива со 3, на пример 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 и 23.

в) Ако избереме $2^{32}\cdot 3^{14}\cdot 5^5$ последователни броеви, тогаш меѓу нив има број m од видот $m=2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5 A$, каде при делење со 30 бројот A дава остаток 1, 7, 13, 17, 23 или 29. Тогаш A не е делив со 2, 3 и 5, па така моќта на m е делива со $5\cdot 13\cdot 31=2015$.

Од друга страна во интервалот $(31\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5, 37\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5)$ се содржат $2^{32}\cdot 3^{14}\cdot 5^5-1$ последователни природни броеви. Нека претпоставиме дека меѓу нив постои природен број n чија сила е 2015. Бидејќи $11^5>37\cdot 5^5$, бројот n не може да е од видот $2^{31}\cdot 3^{13}p^5$, каде p е прост број поголем од 7. Понатаму,

$$5\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 7^5<31\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5 \text{ и } 11\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 7^5>37\cdot 2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5,$$

па затоа n не може да е делив со $2^{31}\cdot 3^{13}\cdot 5^5$. Исто така, бидејќи $3^{18}>2^{18}\cdot 37$, бројот n не може да е од видот $3^{31}\cdot 2^{13}\cdot p^5$, каде $p\geq 5$.

Сите од останатите можности за добивање на сила 2015 доведуваат до значително поголеми броеви. Значи, можеме да избереме $2^{32}\cdot 3^{14}\cdot 5^5-1$ броеви.

80. Нека S_1 е низата природни броеви 1,2,3,.... Дефинираме низа S_{n+1}, $n=1,2,...$ со помош на низата S_n, зголемувајќи ги за еден сите членови на низата S_n кои се деливи со n. Така на пример, S_2 е низата 2,3,4,5,6,... , S_3 е низата 3,3,5,5,7,... . Докажи, дека во низата S_n точно првите $n-1$ членови се еднакви на n ако и само ако n е прост број.

Решение. Нека $S_n(k)$ е $k-$тиот член на низата S_n. Од условот на задачата следува дека за секој природен број n важи $S_n(1)\leq S_n(2)\leq ...$. Навистина, ако во некој чекор еден член на низата се зголеми за 1, тогаш се зголемуваат и сите на него еднакви членови.

Нека n е прост број. Тогаш важи

$$S_n(1)=n=S_2(n-1)=S_3(n-1)=\ldots=S_{n-1}(n-1)=S_n(n-1).$$

Бидејќи $S_2(n)=n+1$, добиваме $S_n(n)\geq n+1$. Но, низата $S_n(k)$ е монотоно растечка, па затоа $S_n(1)=S_n(2)=\ldots=S_n(n-1)=n<S_n(n)$.

Нека n не е прост број и нека p е негов најмал прост делител. Тогаш

$$S_2(n-1)=S_p(n-1)=n<n+1=S_{p+1}(n-1)<S_n(n-1),$$

т.е. $(n-1)-$от член на низата е поголем од n.

81. Нека $a_1, a_2,...$ е бесконечна низа природни броеви. Да претпоставиме дека

постои природен број $N>1$ таков што за секој $n\geq N$ вредноста на изразот

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

е природен број. Докажи дека постои природен број M таков што $a_m=a_{m+1}$ за секој $m\geq M$.

Решение. Ја користиме вообичаената ознака $v_p(a)=k$ ако $k\in\mathbb{Z}$ е степенот на простиот број p во каноничното разложување на рационалниот број a.

Од условот на задачата следува дека $D_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}$ е цел број за секој $n\geq N$. За фиксирано n и прост број p да означиме $v_p(a_1)=A, v_p(a_n)=B$ и $v_p(a_{n+1})=C$. Разликуваме два случаи:

1) $B<A$. Бидејќи $v_p(\frac{a_n}{a_1})=B-A<0$, а D_n е цел број, следува дека $B-C=v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}})=B-A$ или $C-A=v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})=B-A$, па затоа $C\in\{A,B\}$.

2) $B\geq A$. Ако $C>B$ или $C<A$, тогаш $v_p(D_n)=\min\{v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}),v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})\}<0$ што не е можно. Според тоа, $A\leq C\leq B$.

Во двата случаја имаме

$$\min\{v_p(a_1),v_p(a_n)\}\leq v_p(a_{n+1})\leq \max\{v_p(a_1),v_p(a_n)\}.$$

Бидејќи ова важи за секој прост број p, следува дека

$$d_n=(a_1,a_n)\,|\,a_{n+1}\,|\,s_n=[a_1,a_n].$$

Оттука следува

$$d_n\leq d_{n+1}\leq s_{n+1}\leq s_n, \text{ за секој } n\geq N.$$

Според тоа, низите d_n и s_n се константни почнувајќи од некој член, да кажеме $n\geq M$, па тогаш имаме $a_1a_n=d_ns_n=d_Ms_M=a_1a_M$, т.е. $a_n=a_M$.

82. Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е определена со равенствата

$$a_1=a, a_2=b \text{ и } a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}, \text{ за } n\geq 2,$$

каде a,b,c се реални броеви, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако a,b и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ се цели броеви.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2, n\geq 2$$

т.е.

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\text{const}=t,$$

па затоа $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$, за $n\geq 2$. Од друга страна

$$t=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}.$$

Ако a,b и t се цели броеви, тогаш по индукција ќе следува дека и $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$ е цел број.

Обратно, нека претпоставиме дека a_n е цел број за секој $n=1,2,...$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и $t=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број. Нека претпоставиме дека t не е цел број. Тогаш $t=\frac{p}{q}$, каде p и $q>1$ се заемно прости броеви. Од $pa_2=q(a_1+a_3)$ следува дека $q\,|\,a_2$. Понатаму, од

$$pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$$

по индукција следува дека $q\,|\,a_n$ за секој $n\geq 2$. Одново од

$$pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$$

следува дека за $n\geq l+1$ важи дека $q^l\,|\,a_n$. Сега, од $c=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2$ следува дека $q^{2l}\,|\,c$ за секој природен број l, што не е можно. Според тоа $q=1$ и t е цел број.

83. Определи ги сите парови (a_n,a_{n+1}) од последователни чкенови на низата $a_n=2^n+49,\ n=1,2,...$ за кои $a_n=pq,\ a_{n+1}=rs$, каде p,q,r,s се прости броеви такви што $p<q,\ r<s$ и $q-p=s-r$.

Решение. Да означиме $q-p=s-r=x>0$.Тогаш

$$a_n=p(p+x) \text{ и } a_{n+1}=r(r+x)$$

и од $a_{n+1}>a_n$ следува $r>p$. Понатаму, $a_{n+1}-2a_n=-49$, т.е. $a_{n+1}<2a_n$, што значи $r(r+x)<2p(p+x)$. Според тоа,

$$2p(p+x)>r(r+x)>r(p+x),$$

па затоа $2p>r$. Бидејќи $a_n=2^n+49$ е делив со 3 ако и само ако n е непарен број, од $\min\{p,q,r,s\}=p$ следува $p=3$. Оттука и од $2p>r$ следува $r=5$. Тогаш од $a_{n+1}=2a_n-49$ наоѓаме $x=56$ и конечно

$$a_7=3\cdot 59=2^7+49 \text{ и } a_8=5\cdot 61=2^8+49.$$

Според тоа, единствено решение е подредениот пар (a_7,a_8).

84. Нека $a>1$ е даден природен број. Низата $a_1,a_2,...,a_n,...$ е определена со

$$a_1=1,\ a_2=a,\ a_{n+2}=aa_{n+1}-a_n, \text{ за } n\geq 1.$$

Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви такви што секој од нив е делител на барем еден член од дадената низа.

Решение. Со индукција по m ќе докажеме дека за секои два природни броја n и $m \geq 2$ важи

$$a_{n+m} = a_m a_{n+1} - a_{m-1} a_n . \qquad (1)$$

Јасно, (1) важи за $m=2$ и за секој n. Нека претпоставиме дека (1) важи за $m \geq 2$ и за секој n. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{m+1+n} = a_{m(n+1)} &= a_m a_{n+2} - a_{m-1} a_{n+1} \\ &= a_m (a a_{n+1} - a_n) - a_{m-1} a_{n+1} \\ &= (a a_m - a_{m-1}) a_{n+1} - a_m a_n \\ &= a_{m+1} a_{n+1} - a_m a_n , \end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

Од рекурентната зависност следува $(a_n, a_{n-1}) = 1$ за секој $n \geq 2$. Сега од (1) следува дека $(a_{n+m}, a_m) = (a_m, a_n)$. Оттука со индукција следува дека за секои два броја m и n важи $(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$. Сега задачата следува непосредно. Ако $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ е бесконечна низа од по парови заемно прости природни броеви, тогаш

$$(a_{n_i}, a_{n_j}) = a_{(n_i, n_j)} = a_1 = 1,$$

т.е. $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$ се по парови заемно прости броеви, па затоа прости броеви кои се нивни делители има бесконечно многу.

85. Низата $a_0, a_1, a_2, ...$ е зададена со равенствата $a_0 = 4, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

а) Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви, кои се делители барем на еден член од низата $a_0, a_1, a_2, ...$.

б) Дали постојат бесконечно многу прости броеви, кои не се делители на ниту еден член на низата $a_0, a_1, a_2, ...$?

Решение. а) Од $a_{n-1} \mid a_n$ следува дека, ако еден прост број е делител на некој член на низата, тогаш тој е делител и на сите останати. Од друга страна, низата е строго монотоно растечка и од равенството $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$ следува дека $a_{n-1} - 1 > 1$. Тогаш секој прост делител p на $a_{n-1} - 1$ е делител на a_n, но не е делител на a_{n-1}. Од ова и од $a_{k-1} \mid a_k$ следува дека p не е делител на a_m за ниту еден $m \leq n-1$. Таков прост број p постои за секој природен број n, па затоа постојат бесконечно многу прости броеви, кои се делители барем на еден член од низата $a_0, a_1, a_2, ...$.

б) Да ја разгледаме низата $b_0, b_1, b_2, ...$ определена со $b_n = a_n - 2$, за секој $n \geq 0$. Имаме

$$b_0 = 2, b_n = b_{n-1}(b_{n-1} + 3).$$

Двата множители на десната страна од последното равенство се заемно прости. Сега, како во случајот под а) следува, дека постојат бесконечно многу прости броеви, кои делат барем еден член на низата $b_0, b_1, b_2, ...$. Јасно, овие прости броеви, освен бројот 2, не се делители на ниту еден член на низата $a_0, a_1, a_2, ...$.

86. Даден е природен број p. Докажи дека ако бројот $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{p}{3}}$, тогаш $k^2 + k + p$ е прост за секој $k \in \mathbb{N}_0$ таков што $0 \leq k \leq p - 2$.

Решение. Нека $f(x) = x^2 + x + p$ и нека y е најмалиот природен број таков што $y \leq p - 2$ и $f(y)$ не е прост број и q е најмалиот прост делител на $f(y)$. Ќе докажеме дека $q > 2y$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. $q \leq 2y$. Од

$$f(y) - f(x) = (y - x)(y + x + 1),$$

следува дека кога x се менува од 0 до $y - 1$, $y - x$ се менува од 1 до y, а $y + x + 1$ се менува од $y + 1$ до $2y$. Ако $q \leq 2y$, тогаш ќе постои x, $0 \leq x \leq y - 1$, таков што $q | f(y) - f(x)$. Меѓутоа $f(x)$ е прост број и $q | f(y)$, па затоа мора да е $f(x) = q$. Сега од

$$y - x \leq p - 2 < p + x + x^2 = f(x) = q \text{ и}$$

$$y + x + 1 \leq p + x - 1 < p + x + x^2 = f(x) = q$$

следува дека $f(x) = q \nmid (y - x)(y + x + 1)$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $q > 2y$.

Бројот q е најмал прост делител на $f(y)$ па затоа $q \leq \sqrt{f(y)}$, т.е. $f(y) \geq q^2$. Затоа

$$y^2 + y + p \geq (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1,$$

односно $y < \sqrt{\frac{p}{3}}$, што противречни на претпоставката. Од добиенара противречност следува дека $x^2 + x + p$ е прост број за секој цел број k таков што $0 \leq k \leq p - 2$.

87. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n>6$ и $a_1,a_2,...,a_k$ се природните броеви кои што се помали од n и се заемно прости со n. Докажи дека, ако

$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_k-a_{k-1}>0,$$

тогаш n е или прост број или е степен на бројот 2.

Решение. Пред се, мора да биде $a_1=1,\ a_2=p,$ каде p е најмалиот прост број кој не е делител на n и $a_k=n-1.$ Константната разлика a_j-a_{j-1} да ја означиме со $r=p-1$.

Ако n е непарен број, тогаш $a_2=2,\ r=1$ и низата е $1,2,...,n-1,$ и како секој од овие броеви е заемно прост со n, n мора да биде прост број.

Ако n е парен број, тогаш $p\geq 3$. Ако $p=3$, тогаш $r=2$, па низата е $1,3,5,...,n-1.$ Значи, секој непарен број помал од n е заемно прост со n, т.е. n нема непарни делители, па $n=2^m$, за некој $m\in\mathbb{N}$.

Ако $p>3$, тогаш $3\,|\,n$. Но, $a_s=a_1+r(s-1),\ s=2,3,\ldots,k,$ па затоа

$$n-1=1+(p-1)(k-1),$$

од што следува дека $(p-1)\,|\,(n-2)$. Нека q е прост број, таков што $q\,|\,(p-1)$. Тогаш $q\,|\,(n-2)$. За секој број $q<p$, важи $q\,|\,n$, па затоа $q\,|\,2$, т.е. $q=2$, $p-1=2^l,\ p=2^l+1$ за некој $l\geq 2$. Бидејќи p е прост број и $3\,|\,(2^{2j-1}+1),$ $j\in\mathbb{N}$, следува дека $l=2j,\ j\in\mathbb{N}$. Но, тогаш

$$a_3=a_1+2r=1+2\left(p-1\right)=2p-1=2^{2j+1}+1,$$

па значи дека $3\,|\,a_3$, што противречи на $3\,|\,n$. Со тоа доказот е завршен.

88. Нека $k,m,n\in\mathbb{N}$ се такви што $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$. Ако $C_s=s(s+1)$, докажи дека производот

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)...(C_{m+n}-C_k)$$

е делив со производот $C_1C_2...C_n$.

Решение. Од дефиницијата на C_s добиваме

$$C_p-C_q=p^2+p-q^2-q=(p-q)(p+q+1).$$

Со примена на овој идентитет дадениот производ можеме да го запишеме во обликот

$$\begin{aligned}&(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)...(C_{m+n}-C_k)=\\&\quad=(m+1-k)(m+1+k+1)\cdot(m+2-k)(m+2+k+1)....(m+n-k)(m+n+k+1)\\&\quad=[(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)]\cdot[(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)]\\&\quad=A.\end{aligned}$$

Од друга страна

$$C_1C_2...C_n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot ...\cdot n\cdot (n+1) = n!(n+1)! = B.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\frac{A}{B} = \frac{[(m-k+1)(m-k+2)...(m-k+n)]}{n!}\cdot\frac{[(m+k+2)(m+k+3)...(m+k+n+1)]}{(n+1)!}$$
$$= \binom{m-k+n}{n}\binom{m+k+n+1}{n+1}\frac{1}{m+k+1}.$$

е природен број. Значи, доволно е да докажеме дека производот

$$\binom{m+k+n+1}{n+1}\frac{1}{m+k+1}$$

е природен број. Навистина, биномниот коефициент $\binom{m+k+n+1}{n+1}$ е делив со $m+k+1$, бидејќи $m+k+1$ е прост број поголем од $n+1$, па затоа е и заемно прост со $(n+1)!$.

89. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $S_n = 1!+2!+...+n!$. Докажи, дека постои n за кој бројот S_n има прост делител поголем од 10^{2012}.

Решение. За прост број p и природен број n со $v_p(n)$ да го означиме степенот на p во каноничното разложување на прости множители на бројот n. Притоа, ако $v_p(n)\neq v_p(k)$, тогаш $v_p(n\pm k) = \min\{v_p(n), v_p(k)\}$.

Нека го претпоставиме спротивното и нека $P = 10^{2012}$. Тогаш сите прости делители на броевите од видот S_n не се поголеми од P. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако за некој $n\in\mathbb{N}$ важи $v_p(S_n) < v_p((n+1)!)$, тогаш $v_p(S_k) = v_p(S_n)$, за секој $k\geq n$.

Доказ. Ако $a = v_p(S_n)$, $b = v_p((n+1)!)$, тогаш $b\geq a+1$. Имаме

$$S_k = S_n + (n+1)! + ... + k!,$$

при што во овој збир првиот собирок е делив со p^a, но не е делив со p^{a+1}, а сите останати собирци се деливи со p^{a+1}. Според тоа, S_k е делив со p^a, но не е делив со p^{a+1}, па затоа $v_p(S_k) = a = v_p(S_n)$. ■

Да разгледаме прост број $p\leq P$. Според лемата, ако $v_p(S_n) < v_p((n+1)!)$, за некој n, тогаш постои број a_p таков што $v_p(S_n)\leq a_p$ за секој природен број n. Простиот број со ова својство ќе го наречеме *мал.* Сите останати прости броеви кои се помали од P ќе ги наречеме *големи.* Бидејќи имаме конечно многу мали прости броеви, постои природен број M кој е поголем од секој број од видот p^{a_p}, каде p е мал прост број.

Да разгледаме голем прост број p и нека n е таков што $n+2$ е делив со p.

Од лемата следува

$$v_p(S_{n+1}) \geq v_p((n+2)!) > v_p((n+1)!)$$

и затоа

$$v_p(S_n) = v_p(S_{n+1} - (n+1)!) = v_p((n+1)!) = v_p(n!),$$

при што последното равенство е точно бидејќи $n+1$ не е делив со p.

Да го разгледаме бројот $N = P!M - 2$. Од претходно изнесеното следува дека $v_p(S_N) = v_p(N!)$, за секој голем прост број p. Освен тоа, бидејќи $N \geq M$, важи $v_p(S_N) \leq v_p(p^{a_p}) \leq v_p(N!)$, за секој прост број p. Бидејќи сите прости делители на S_N се или мали или големи, добиваме дека $S_N \leq N!$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува, дека постои природен број n за кој бројот S_n има прост делител поголем од 10^{2012}.

90. Дали постои бесконечно множество природни броеви $S, S \neq \mathbb{N}$ такво што за секој природен број $n \notin S$ точно n броеви од S се заемно прости со n?

Решение. Ќе докажеме дека множество со саканите својства не постои. Нека го претпоставиме спротивното и нека $n \notin S$ е природен број. Бидејќи точно n броеви од S се заемно прости со n, заклучуваме дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не се содржат во S. Нека p и q се два од тие прости броеви. Точно p од броевите во S не се деливи со p. Уште повеќе, имаме $p^\alpha \in S$ за секој природен број $\alpha > 1$, бидејќи во спротивно ќе имаме $p^\alpha > p$ броеви од S кои се заемно прости со p^α, па оттука и со p. Но, сега имаме бесконечно многу броеви од S кои се заемно прости со q, што е противречност.

91. Природните броеви $m \geq 3$ и n се такви што $n > m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$.

Решение. Ќе докажеме, дека бараниот број е $d = m-1$. Навистина, d е делител на $n!$ и за секој $k \geq m$ важи дека k не е делител на $m-1$, т.е. $d = m-1$ ги задоволува условите на задачата.

Да претпоставиме дека d е таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k \in \{m, m+1, ..., n\}$. Ќе докажеме дека $d \leq m-1$. Нека $d = p_1 ... p_t$, каде $p_i, 1 \leq i \leq t$ се прости броеви (не задолжително различни). Од првиот услов за d следува дека $p_i \leq n$ за секој i. Од вториот услов за d следува дека $p_i \notin \{m, m+1, ..., n\}$. Според тоа, $p_i \leq m-1$ за секој i. Секој од броевите

$p_1, p_1p_2, ..., p_1p_2...p_t$ е делител на d и следствено сите не припаѓаат на множеството $\{m, m+1, ..., n\}$. Освен тоа, $p_i \le m-1$. Нека $j \le t$ е најголемиот број за кој $p_1p_2...p_j \le m-1$. Ако $j < t$ имаме

$$p_1p_2...p_j p_{j+1} \le (m-1)p_{j+1} \le (m-1)(m-1) = m(m-2)+1 \le n,$$

и тогаш $p_1p_2...p_j p_{j+1} \le m-1$, што противречи на максималноста на j. Значи, $p_1p_2...p_t \le m-1$, со што доказот е завршен.

92. Дадени се природни броеви m и n. Докажи дека постои природен број c, за кој во декадниот запис на броевите cm и cn секоја ненулта цифра учествува еднаков број пати (колку во cm, толку во cn).

Решение. За секој природен број k можеме да запишеме $10^k m - n = 2^r 5^s t$, каде $(10,t)=1$. Бидејќи за доволно големо k степените на 2 и 5 на десната страна нема да ги надминуваат нивните степените во каноничното разложување на n, можеме да добиеме произволно големи t. Затоа ќе сметаме дека k и t се поголеми од $\max\{m,n\}$.

Нека b е остатокот на t по модул 10. Тогаш b е должината на периодата во десетичниот запис на дропката $\frac{1}{t}$. Поточно, ако $ct = 10^b - 1$, тогаш периодот е $b-$цифреното десетично претставување на c со евентуално додавање на нули. Бидејќи t е поголем од m и n, десетичните записи на дропките $\frac{m}{t}$ и $\frac{n}{t}$ за периоди ќе ги имаат соодветно $b-$цифрените претставувања на cm и cn.

Од друга страна, од равенството $10^k \frac{m}{t} = 2^r 5^s + \frac{n}{t}$ следува, дека десетичниот запис на $\frac{n}{t}$ се добива од оној на $\frac{m}{t}$ со поместување надесно на k места и отстранување на целиот дел. Според тоа, $b-$цифрените претставувања на cm и cn се циклично поместени едното во однос на другото. Во случајов секоја ненулта цифра се појавува еднаков број пати (тоа не може да се тврди за 0, бидејќи не е познат бројот на нулите на почетокот на $b-$цифрените записи).

93. Позитивни рационални броеви a и b се запишани како децимални броеви. Познато е дека најмалата периода и на двете дропки е со должина од 30 цифри, а во децималниот запис на бројот $a-b$ најмалата периода е со должина од 15 цифри. Кој е најмалиот природен број k за кој најмалиот период во децималниот запис на бројот $a+kb$ исто така може да е со должина од 15 цифри?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека броевите $a, b, a-b$ се чисто периодични, т.е. периодите започнуваат одма по децималната запирка. Навистина, множењето со степен на бројот 10 не ја менува периодата.

Ќе го искористиме следново познато тврдење: децималниот запис на рационален број r е чисто периодичен со периода T (не задолжително минимална) ако и само ако r е од видот $\frac{m}{10^T-1}$, за некој цел број m.

Во случајов имаме $a=\frac{m}{10^{30}-1}$ и $b=\frac{n}{10^{30}-1}$, за некои цели броеви m и n. Освен тоа, броевите $a-b=\frac{m-n}{10^{30}-1}$ и $a+kb=\frac{m+kn}{10^{30}-1}$ се децимални броеви со периоди 15, т.е. можат да бидат запишани како обични дропки со именители $10^{15}-1$. Тогаш, така може да се запише и нивната разлика $(k+1)b=\frac{(k+1)n}{10^{30}-1}$.

Според тоа, бројот $(k+1)n$ е делив со 10^5+1, а бројот n го нема тоа својство, бидејќи во спротивно бројот b ќе има периода 15. Заклучуваме дека бројот $k+1$ е делив со некој прост делител на бројот $10^{15}+1$. Најмалиот таков делител е 7. Значи, $k+1\geq 7$, т.е. $k\geq 6$.

Еден пример за броеви, кои го задоволуваат условот при $k=6$, се добива, ако $a-b=\frac{1}{10^{15}-1}$ и $a+6b=\frac{2}{10^{15}-1}$. Тогаш $a=\frac{8}{7(10^{15}-1)}$ и $b=\frac{1}{7(10^{15}-1)}$. Јасно, најмалите периоди на $a-b$ и $a+6b$ се со должини 15. На читателот му оставаме за вежба да провери дека, најмалите периоди на a и b се со должини 30.

94. Докажи, дека сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 може да бидат наредени на кружница така што да нема соседни броеви кои се заемно прости.

Решение. Нека $2=p_1<p_2<...<p_n<1000$ се сите прости броеви помали од 1000. Тогаш саканото подредување можеме да го направиме на следниов начин: ги запишуваме еден до друг сите сложени броеви помали или еднакви на 10^6 и кои се деливи со p_1 (т.е. сите парни броеви) почнувајќи од p_1p_n и завршувајќи со p_1p_2. Продолжуваме со сите од преостанати броеви кои се деливи со p_2, завршувајќи со p_2p_3, потоа со сите од преостанатите броеви кои се деливи со p_3, завршувајќи со p_3p_4 итн. На крајот ги запишуваме преостанатите броеви кои се деливи со p_n.

Јасно, секои два соседни броеви во горното подредување имаат заеднички делител кој е меѓу броевите $p_1, p_2, ..., p_n$, т.е. не се заемно прости. Освен тоа, секој сложен број, помал или еднаков од 10^6 има прост делител кој е помал или еднаков на $\sqrt{10^6}=1000$, т.е. во нашата постапка е запишан на некое место.

95. Нека е даден природен број k поголем од 1. Докажи дека постои прост број p и строго растечка низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n,...$ така што сите членови од низата $p+ka_1, p+ka_2,..., p+ka_n,...$ се прости броеви.

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на принципот на Дирихле. За секој $i=1,2,...,k-1$, со P_i ќе го означиме множеството од сите прости броеви конгруентни со i модул k. Секој прост број (освен можда самиот k) е содржан во точно едно од множествата $P_1,P_2,...,P_{k-1}$. Бидејќи има бесконечно многу прости броеви, најмалку едно од овие множества е бесконечно, на пример, нека тоа е P_i. Нека $p=x_1<x_2<...<x_n<...$ се неговите елементи наредени во растечки редослед и уште, $a_n=\frac{x_{n+1}-p}{k}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Тогаш $p+ka_n$ е некој од елементите од P_i, почнувајќи од x_2. Броевите a_n се природни броеви. Простиот број p и низата $a_1,a_2,...,a_n,...$ го имаат бараното својство.

96. а) Нека $(m,k)=1$. Докажи дека постојат природни броеви $a_1,a_2,...,a_m$ и $b_1,b_2,...,b_k$ такви што секој производ a_ib_j, $i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$ при делење mk дава различен остаток.

б) Нека $(m,k)>1$. Докажи дека за било кои природни броеви $a_1,a_2,...,a_m$ и $b_1,b_2,...,b_k$ може да се најдат два производи a_ib_j и a_sb_t, $(i,j)\neq(s,t)$ коишто имаат еднаков остаток при делење со mk.

Решение. а) Нека $a_i=ik+1,\ i=1,2,...,m$ и $b_j=jm+1,\ j=1,2,...,k$. Да претпоставиме дека

$$mk\,|\,a_ib_j-a_sb_t=(ik+1)(jm+1)-(sk+1)(tm+1)=km(ij-st)+m(j-t)+k(i-s).$$

Јасно, $m|k(i-s)$, што заедно со $(k,m)=1$ дава $i=s$. Аналогно добиваме дека $j=t$, од каде следува дека $a_ib_j=a_sb_t$.

б) Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека сите остатоци се различни. Тогаш се појавува и остатокот 0, на пример кај a_1b_1, т.е. $mk\,|\,a_1b_1$, па за некои $i,i\neq s$, $a'\,|\,a_i-a_s$, добиваме дека $mk=a'b'\,|\,a_ib_1-a_sb_1$ што е противречнсот. Од ова добиваме дека $a'\geq m$ и аналогно добиваме $b'\geq k$, па од $a'b'=mk$ имаме дека $a'=m$ и $b'=k$. Исто така добиваме:

сите a_i имаат при делење со $m = a'$ даваат различни остатоци

и сите b_j при делење со $k = b'$ даваат имаат различни остатоци. (*)

Нека p е заеднички прост делител на m и k. Од (*) следува дека точно $m - \frac{m}{p} = \frac{p-1}{p}m$ од броевите a_i и точно $k - \frac{k}{p} = \frac{p-1}{p}k$ од броевите b_j не се деливи со p. Според тоа, точно $\frac{(p-1)^2}{p^2}mk$ од производите $a_i b_j$ не се деливи со p. Но според претпоставката сите производи даваат различни остатоци, па следува дека бројот на такви производи е $\frac{p-1}{p}mk \neq \frac{(p-1)^2}{p^2}mk$, што е противречност.

6. ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

1. а) Докажи, дека ако $m,n\in\mathbb{N}$, тогаш количникот при делењето на m со n е еднаков на $[\frac{m}{n}]$.

   б) Докажи, дека ако $a,b,c\in\mathbb{N}$, тогаш $[\frac{[\frac{c}{a}]}{b}]=[\frac{c}{ab}]$.

   Решение. а) Нека $m=nq+r,\ 0\le r<n$. Имаме
$$[\tfrac{m}{n}]=[q+\tfrac{r}{n}]=q+[\tfrac{r}{n}]=q,$$
   бидејќи $0\le\frac{r}{n}<1$.

   б) Нека $[\frac{c}{a}]=q$ и $[\frac{q}{b}]=q_1$. Тогаш $c=qa+r,\ q=q_1b+r_1$, каде $0\le r<a$ и $0\le r_1<b$. Според тоа, $c=q_1ab+(r+r_1a)$, каде $0\le r+r_1a<ab$, бидејќи важи $a\le r+r_1a\le a-1+(b-1)a=ab-1<ab$. Според тоа,
$$[\tfrac{c}{ab}]=q_1=[\tfrac{q}{b}]=[\tfrac{[\frac{c}{a}]}{b}].$$

2. Докажи, дека за секој природен број $k\ge 2$ постои реален број $x\ne 0$ таков што $k=\frac{[x]\{x\}}{x}$.

   Решение. Јасно е дека $x<0$, бидејќи ако претпоставиме дека $x>0$ од неравенствата $\{x\}[x]<[x]\le x$ следува $k=\frac{[x]\{x\}}{x}<1$, што противречи на $k\ge 2$.

   Нека $[x]=-p$, $p>0$. Тогаш бараме p таков што $0\le\{x\}=\frac{kp}{k+p}<1$. Првото неравенство е точно за секој p, а второто е точно за $p<\frac{k}{k-1}$. Но, p е природен број и затоа $p=1$, т.е. $[x]=-1$. Тогаш $\{x\}=\frac{k}{k+1}$ или $x=-\frac{1}{k+1}$.

3. Докажи дека $x+[\frac{n}{x}]\ge 2[\sqrt{n}]$, за секои $x,n\in\mathbb{N}$.

   Решение. Од очигледното неравенство $x+\frac{n}{x}\ge 2\sqrt{n}$ следува
$$x+[\tfrac{n}{x}]=[x+\tfrac{n}{x}]\ge[2\sqrt{n}]\ge 2[\sqrt{n}].$$

4. Докажи, дека ако $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ не е цел број, тогаш $\frac{p}{q}\ge[\frac{p}{q}]+\frac{1}{q}$.

Решение. Бидејќи $\frac{p}{q}$ не е цел број, важи $\frac{p}{q}>[\frac{p}{q}]$, т.е. $p>q[\frac{p}{q}]$, па затоа $p\geq q[\frac{p}{q}]+1$, од што следува дека $\frac{p}{q}\geq[\frac{p}{q}]+\frac{1}{q}$.

5. Определи го бројот на природните броеви кои не се поголеми од 2021 и се такви што $[\sqrt{n}]\,|\,n$.

Решение. Нека $[\sqrt{n}]=k$. Тогаш

$$k\leq\sqrt{n}<k+1,\text{ т.е. } k^2\leq n<k^2+2k+1.$$

Меѓу последователните квадрати k^2 и $(k+1)^2$ само броевите k^2, k^2+k и k^2+2k се деливи со k. Според тоа, во секој интервал $[1^2,2^2)$, $[2^2,3^2)$, ..., $[43^2,44^2)$ постојат три броја кои го задоволуваат дадениот услов. Бидејќи Имаме, $44^2=1936$, $44^2+44=1908$ и $44^2+2\cdot 44=2024>2021$, па затоа има $3\cdot 43+2=131$ број со саканото својство.

Забелешка. Од решениетsо на задачата непосредно следува дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\sqrt{n}$ не е цел број и n е делив со $[\sqrt{n}]$.

6. Дадени се првите N природни броеви. Колку броеви, најмалку треба да се изберат на произволен начин, така што меѓу избраните броеви постојат барем два од кои едниот е делив со другиот?

Решение. Произволно да избереме $[\frac{N+1}{2}]+1$ броеви. Сите парни броеви кои се наоѓаат меѓу избраните (постои барем еден бидејќи непарни има $[\frac{N+1}{2}]$ ги делиме со таков степен на двојката, да количникот биде непарен број. Вака добиените количници, заедно со избраните непарни броеви се сите помали или еднакви на N и ги има $[\frac{N+1}{2}]+1$ на број. Според принципот на Дирихле, меѓу нив има барем два еднакви. Значи постојат два избрани броеви, од кои едниот е делив со другиот.

Броеви $[\frac{N+1}{2}],[\frac{N+1}{2}]+1,...,2[\frac{N+1}{2}]-1$ има $[\frac{N+1}{2}]$. Ниту еден од овие броеви не е делив со друг бидејќи

$$1<\frac{[\frac{N+1}{2}]+k}{[\frac{N+1}{2}]+l}<2,\text{ за } [\frac{N+1}{2}]\leq l<k\leq 2[\frac{N+1}{2}]-1.$$

Значи, $[\frac{N+1}{2}]+1$ е најмалиот број кој ги исполнува условите на задачата.

7. Определи ги сите природни броеви n за кои се исполнети следниве услови:

1) количникот при делење на n со 9 е трицифрен број со еднакви цифри,
2) количникот при делење на $n+36$ со 4 е четирицифрен број запишан цо цифрите 2, 0, 0 и 9 во некој редослед.

Решение. Имаме $n=9\cdot 111a+r$, каде $a\in\{1,2,...,9\}$ и $r<9$ е природен број. Според тоа, $n\leq 9\cdot 999+8=8999$ и затоа $\frac{n+36}{4}<2258$. Значи, $[\frac{n+36}{4}]=2009$ или 2090.

Ако $[\frac{n+36}{4}]=2009$, тогаш $n+36=4\cdot 2009+q$, $q\in\{0,1,2,3\}$, т.е. $n\in\{8000, 8001, 8002, 8003\}$. Бидејќи количникот при делење на 8001, 8002, 8003 со 9 е 889, само бројот 8000 ги задоволува условите на задачата.

Ако $[\frac{n+36}{4}]=2009$, тогаш $n+36=4\cdot 2009+q$, $q\in\{0,1,2,3\}$, т.е. $n\in\{8324, 8325, 8326, 8327\}$. Ниту еден од овие броеви не го задоволува првиот услов. Според тоа, единствено решение на задачата е $n=8000$.

8. Кои членови на низата $a_n=[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$, $n\in\mathbb{N}$ се деливи со 7?

Решение. Ако под знакот на коренот го помножиме првиот со четвртиот, а вториот со третиот множител и изразот n^2+6n го означиме со k, добиваме

$$\sqrt{(n^2+6n)(n^2+6n+8)}=\sqrt{k(k+8)}.$$

Бидејќи $k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16$, добиваме $[\sqrt{k(k+8)}]=k+3$ и затоа $a_n=(n+3)^2-6.$ Значи, a_n е делив со 7 ако и само ако $(n+3)^2$ при делење со 7 дава остаток 6. Меѓутоа, остатоците на квадратите на природните броеви при делење со 7 се 0, 1, 2 и 4, па затоа ниту еден член на разгледуваната низа не е делив со 7.

9. Нека $1<n_1<n_2<...<n_k<...$ е низа природни броеви која не содржи два последователни природни броја. Докажи, дека за секој $m\in\mathbb{N}$ меѓу броевите $n_1+n_2+...+n_m$ и $n_1+n_2+...+n_m+n_{m+1}$ постои број кој е точен квадрат.

Решение. Нека броевите a и b се такви што $a>b\geq 0$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}>1$. Тогаш $1<\sqrt{a}-\sqrt{b}\leq\sqrt{a}-\sqrt{[b]}$, па затоа $\sqrt{b}<1+\sqrt{[b]}<\sqrt{a}$, т.е. $b<(1+\sqrt{[b]})^2<a$. Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$\sqrt{n_1+n_2+...+n_m+n_{m+1}}-\sqrt{n_1+n_2+...+n_m}>1,$$

за секој $m\in\mathbb{N}$. Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$n_1+n_2+...+n_m+n_{m+1}>(1+\sqrt{n_1+n_2+...+n_m})^2,$$

т.е. на неравенството

$$n_{m+1}>1+2\sqrt{n_1+n_2+...+n_m},\quad m\geq 1. \tag{1}$$

Неравенствоито (1) ќе го докажеме со индукција по m. Бидејќи $n_1 > 1$ за $m = 1$ имаме $n_2 \ge n_1 + 2 = 1 + (1 + n_1) > 1 + 2\sqrt{n_1}$, т.е. точно е неравенството (1). Нека претпоставиме дека (1) важи за некој $m \ge 1$. Тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&n_{m+1} - 1 > 2\sqrt{n_1 + n_2 + ... + n_m}\\
&(n_{m+1} - 1)^2 > 4(n_1 + n_2 + ... + n_m)\\
&(n_{m+1} + 1)^2 > 4(n_1 + n_2 + ... + n_m + n_{m+1})\\
&n_{m+1} > 2\sqrt{n_1 + n_2 + ... + n_m + n_{m+1}} - 1.
\end{aligned}$$

Но, според условот на задачата $n_{m+2} - n_{m+1} \ge 2$ и ако ги собереме последните две неравенства добиваме дека

$$n_{m+2} > 1 + 2\sqrt{n_1 + n_2 + ... + n_m + n_{m+1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (1) важи за секој природен број m.

10. Нека $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Докажи, дека

$$[\tfrac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n}] + n - 1 \le k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

Решение. Од $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, 2, ..., n$, следува $1 \le \frac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
[\tfrac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n}] + n - 1 &\le \tfrac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n} + n - 1\\
&\le \tfrac{k_1 + k_2 + ... + k_n}{n} + \tfrac{(n-1)(k_1 + k_2 + ... + k_n)}{n}\\
&= k_1 + k_2 + ... + k_n.
\end{aligned}$$

11. Докажи, дека за секој позитивен број x важи

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}].$$

Решение. Од $[\sqrt{x}] \le \sqrt{x}$ добиваме $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] \le [\sqrt{\sqrt{x}}]$. Нека за некој $x > 0$ важи $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] < [\sqrt{\sqrt{x}}]$, т.е. постои природен број n таков што

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = n \text{ и } [\sqrt{\sqrt{x}}] = n + 1.$$

Тогаш $n \le \sqrt{[\sqrt{x}]} < n + 1 \le \sqrt{\sqrt{x}}$, т.е. $[\sqrt{x}] < (n+1)^2 \le \sqrt{x}$, што не е можно бидејќи од $(n+1)^2 \le \sqrt{x}$ следува $(n+1)^2 \le [\sqrt{x}]$, што е противречност.

12. Докажи дека за секој природен број $s > 1$ постои природен број m_s таков, што за $n \ge m_s$ меѓу броевите n и $2n$ постои најмлаку еден број кој е $s-$ти

степен на природен број. Определи го најмалиот број m_s за $s=2$ и $s=3$.

Решение. Ќе користиме, дека ако a и b се реални броеви такви, што $b-a>1$, тогаш $a<[a]+1<b$.

Нека s е даден природен број поголем од 1. Тогаш $\mu_s=\frac{1}{(\sqrt[s]{2}-1)^s}>0$. Ако $n>\mu_s$, т.е. $n>\frac{1}{(\sqrt[s]{2}-1)^s}$, тогаш $\sqrt[s]{n}>\frac{1}{\sqrt[s]{2}-1}$, па затоа $\sqrt[s]{n}(\sqrt[s]{2}-1)>1$, односно $\sqrt[s]{2n}-\sqrt[s]{n}>1$. Според тоа, постои природен број k таков, што $\sqrt[s]{n}<k<\sqrt[s]{2n}$, односно $n<k^2<2n$. Значи, $m_s=[\mu_s]+1$ или $m_s=[\mu_s]$.

За $s=2$ имаме $m_2=5$, а за $s=3$ имаме $m_3=33$.

13. Ако природните броеви x и y го задоволуваат равенството

$$[(4+2\sqrt{3})x]=[(4-2\sqrt{3})y],$$

докажи дека тие се со различна парност.

Решение. Ако означиме $[(4+2\sqrt{3})x]=n$, тогаш од даденото равенство следува $n<(4+2\sqrt{3})x<n+1$, што е еквивалентно со $\frac{2-\sqrt{3}}{2}n<x<\frac{2-\sqrt{3}}{2}(n+1)$. Слично, $\frac{2+\sqrt{3}}{2}n<y<\frac{2+\sqrt{3}}{2}(n+1)$. Ако ги собереме неравенствата добиваме $2n<x+y<2(n+1)$, па затоа важи $x+y=2n+1$, т.е броевите x и y се со различна парност.

14. Докажи, дека за секој реален број a и за секој природен број n важи

$$n[a]\le[na]\le n[a]+n-1. \qquad (1)$$

Решение. Имаме $[a]\le a<[a]+1$. Бидејќи n е природен број добиваме

$$n[a]\le na<n[a]+n,$$

т.е.

$$[n[a]]\le[na]<[n[a]+n]. \qquad (2)$$

Но, $[n[a]]=n[a]$ и $[n[a]+n]=n[a]+n$, па затоа од (2) следува

$$n[a]\le[na]<n[a]+n,$$

што значи дека важи (1).

15. Докажи, дека важи $[a[na]]+1=[na^2]$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. За бројот a важи $a^2=a+1$, па затоа треба да докажеме дека

$$[a[na]]=[na]+n-1,$$

односно дека важат неравенствата

$$[na]+n-1<a[na]<[na]+n. \qquad (1)$$

Од неравенството $a<2$ имаме $na+n-a-na+1>n-1$, т.е.

$$n(a+1)-a-na+1>n-1 \text{ или } na^2-a-na+1>n-1.$$

Последното неравенство можеме да го запишеме во облик

$$(a-1)(na-1)>n-1. \text{ Од } [na]>na-1>0$$

добиваме

$$(a-1)[na]>(a-1)(a-1)(na-1)>n-1,$$

односно $[na]+n-1<a[na]$. Значи, левото неравенство во (1) важи.

Имаме

Имаме

$$na>[na], \text{ т.е. } (a-1)[na]<(a-1)na=n(a^2-a)-n.$$

Значи,

$$a[na]-[na]<n, \text{ т.е. } a[na]<[na]+n.$$

Со тоа е докажано десното неравенство во (1).

16. Определи ги сите позитивни реални броеви a такви, што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$[a[(a+1)n]]=n-1. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) ставиме $n=1$ добиваме дека треба да најдеме реален број $a>0$ таков, што

$$0<a\le a[a+1]<1. \tag{2}$$

Понатаму, од (1) и (2) следува, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}
&n-1\le a[(a+1)n]<n\\
&\tfrac{n-1}{a}\le[(a+1)n]<\tfrac{n}{a}\\
&\tfrac{n-1}{a}\le(a+1)n<\tfrac{n}{a}+1\\
&n-1\le a(a+1)n<n+a<n+1\\
&1-\tfrac{1}{n}\le a(a+1)<1+\tfrac{1}{n},
\end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $a(a+1)=1$. Но, $a>0$, па од последното равенство следува дека $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Јасно, за $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$a[(a+1)n]<a(a+1)n=n \text{ и } a[(a+1)n]>a((a+1)n-1)=n-a>n-1,$$

па затоа за секој $n\in\mathbb{N}$ е исполнето равенството (1).

17. Нека $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Докажи, дека $3\,|\,[a[an]]+n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Лесно се проверува дека за бројот a важи $a^2-3a+1=0$. Нека

$$\tfrac{n}{a}=k+x,\ k\in\mathbb{N},\ 0\le x<1.$$

Бројот a е ирационален, па затоа $x\ne0$ и $n=ak+ax$. Сега имаме

$$[a[an]]+n=[a[an]+n]=[a[(3-\tfrac{1}{a})n]+n]=[a[3n-\tfrac{n}{a}]+n]=[a[3n-k-x]+n]$$
$$=[a(3n-k-1)+n]=[a(3n-1)+n-ak]=[a(3n-1)+ax]$$
$$=[a(3n-1+x)]=[(3-\tfrac{1}{a})(3n-1+x)]=[3(3n-1)+3x+\tfrac{1}{a}-\tfrac{x}{a}-\tfrac{3n}{a}]$$
$$=[3(3n-1)+3x+\tfrac{1}{a}-\tfrac{x}{a}-3k-3x]=3(3n-1-k)+[\tfrac{1-x}{a}].$$

Од $0<1-x<1<a$ следува $0<\frac{1-x}{a}<1$, па затоа $[\frac{1-x}{a}]=0$. Според тоа,

$$[a[an]]+n=3(3n-1-k),$$

па затоа $3\,|\,[a[an]]+n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

18. Нека x,y,z се произволни реални броеви. Докажи дека

$$x+[y+z]=y+[z+x]=z+[x+y] \qquad (1)$$

ако и само ако $\{x\}=\{y\}=\{z\}$.

Решение. Лесно се гледа дека равенството (1) е точно ако и само ако

$$\{x\}+[\{y\}+\{z\}]=\{y\}+[\{z\}+\{x\}]=\{z\}+[\{x\}+\{y\}]. \qquad (2)$$

Јасно, ако $\{x\}=\{y\}=\{z\}$, тогаш е точно равенството (2). Нека е точно равенството (2. Тогаш, на пример,

$$\{x\}-\{y\}=[\{z\}+\{x\}]-[\{y\}+\{z\}]\in\mathbb{Z}.$$

Бидејќи $\{x\},\{y\}\in[0,1)$ добиваме $\{x\}-\{y\}\in(-1,1)$ и како $\{x\}-\{y\}\in\mathbb{Z}$ следува $\{x\}-\{y\}=0$, т.е. $\{x\}=\{y\}$. На потполно ист начи се докажува равенството $\{y\}=\{z\}$.

19. а) Докажи дека, ако $(a,4)=1$, тогаш

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=\tfrac{3a-3}{2}.$$

б) Докажи дека

$$[\tfrac{4}{p}]+[\tfrac{6}{p}]+\ldots+[\tfrac{2(p-1)}{p}]=[\tfrac{p+1}{4}],$$

каде p е непарен прост број.

Решение. а) Од условот во задачата имаме $a=4q+1$ или $a=4q+3$. Во првиот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+2q+3q=6q=\tfrac{3a-3}{2}.$$

Во вториот случај

$$[\tfrac{a}{4}]+[\tfrac{2a}{4}]+[\tfrac{3a}{4}]=q+(2q+1)+(3q+2)=6q+3=\tfrac{3a-3}{2}.$$

б) За $p=3$ тврдењето е очигледно точно. Ако $p>3$, тогаш $p=4n+1$ или $p=4n+3$. Бидејќи $[\frac{4}{p}]=0$ и $[\frac{2(p-1)}{p}]=[1+\frac{p-2}{p}]=1$, добиваме дека во збирот од левата страна имаме само нули и единици, при што собираме $\frac{p-1}{2}$ броеви.

За да го определиме бројот на нулите од левата страна доволно е во собирокот од облик $[\frac{2\cdot 2x}{p}]=[\frac{4x}{p}]$ да ставиме $4x<p$ или $x<\frac{p}{4}$. Значи, $x=[\frac{p}{4}]$. Според тоа, бројот на собраните единици е $\frac{p-1}{2}-[\frac{p}{4}]$, т.е. n ако $p=4n+1$ или $n+1$ ако $p=4n+3$. Но, $[\frac{p+1}{4}]$ е еднаков на n ако $p=4n+1$ или $n+1$ за $p=4n+3$.

20. Ако за некој реален број x е исполенто равенството $\{8x\}=\{15x\}$, тогаш важи $\{26x\}=\{75x\}$. Докажи!

Решение. За произволни реални броеви $a=[a]+\{a\}$ и $b=[b]+\{b\}$ важи $\{a\}=\{b\}$ ако и само ако $a-b=[a]-[b]$, т.е. ако и само ако $a-b\in\mathbb{Z}$. Значи, од $\{8x\}=\{15x\}$ следува $7x\in\mathbb{Z}$, па затоа $49x\in\mathbb{Z}$ и како $49x=75x-26x$ заклучуваме дека $\{26x\}=\{75x\}$.

21. Дали постои природен број n таков што дробниот дел на бројот $(2+\sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999?

Решение. Од Њутновата биномна формула имаме

$$(2+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2} \quad \text{и} \quad (2-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2},$$

т.е. $(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n$ е природен број . Бидејќи $(2-\sqrt{2})^n<1$, добиваме

$$[(2+\sqrt{2})^n]=(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n-1$$

и затоа

$$(2+\sqrt{2})^n-[(2+\sqrt{2})^n]=1-(2-\sqrt{2})^n$$

Бидејќи $2-\sqrt{2}<1$, може да се избере доволно голем n таков што

$$(2-\sqrt{2})^n<0,000001.$$

За вака избраниот n имаме

$$(2+\sqrt{2})^n-[(2+\sqrt{2})^n]>0,999999$$

22. Докажи, дека за секој природен број n, бројот $[(2-\sqrt{3})^n]$ е непарен природен број.

Решение. Бидејќи $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ е природен број и $(2-\sqrt{3})^n<1$ добиваме дека $[(2+\sqrt{3})^n]=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1$.

Од Њутновата биномна формула имаме

$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3} \text{ и } (2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$$

па затоа $[(2+\sqrt{3})^n]=2a_n-1$, т.е. $[(2-\sqrt{3})^n]$ е непарен природен број.

23. Докажи дека членовите на низата $\{10^n\sqrt{2}\}, n=0,1,2,...$ се по парови различни.

Решение. Нека $\{10^p\sqrt{2}\}=\{10^q\sqrt{2}\},\ p\neq q$ и нека $\sqrt{2}=1,d_1d_2d_3...$ е децималниот запис на бројот $\sqrt{2}$. Од претходното равенство следува $d_{n+p}=d_{n+q}$, за $n=1,2,...$. Според тоа, $\sqrt{2}$ има мешовит периодичен децимален запис со должина на периода $|p-q|$, што не е можно, бидејќи $\sqrt{2}$ е ирационален број.

24. Нека $a_n=n\sqrt{5}-[n\sqrt{5}], n\in\mathbb{N}$. Определи го најмалиот и најголемиот број меѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{2009}$.

Решение. Да ја разгледаме низата, дефинирана со равенствата $b_0=0, b_1=1$ и $b_n=4b_{n-2}+b_{n-1}, n\geq 2$. За оваа низа имаме $b_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$ и во случајов $b_6=1292$ и $b_7=5473$.

За секој $k=1,2,...,5473$ со остаток да го поделиме $1292k$ на 5473, при што добиваме единствени природни броеви x_k и y_k, за кои $1292k=5473y_k+x_k$, $1\leq x_k\leq 5473$. Од $(1292,5473)=1$, следува дека $(x_1,x_2,...,x_{5473})$ е пермутација на $(1,2,...,5473)$, при што $y_1\leq y_2\leq...\leq y_{5473}=1291$.

Да означиме $f(x)=x-[x]=\{x\}$. Имаме

$$\begin{aligned}f(x_k\sqrt{5}) &= f(1292k\sqrt{5}-5473y_k\sqrt{5})\\ &= f\left(\tfrac{(2+\sqrt{5})^6-(2-\sqrt{5})^6}{2}k-\tfrac{(2+\sqrt{5})^7-(2-\sqrt{5})^7}{2}y_k\right)\\ &= f(-(2-\sqrt{5})^6k+(2-\sqrt{5})^7y_k).\end{aligned}$$

Бидејќи

$$0<(2-\sqrt{5})^6k-(2-\sqrt{5})^7y_k\leq 5473(2-\sqrt{5})^6-1291(2-\sqrt{5})^7<1$$

следува дека

$$f(x_k\sqrt{5})=1-(2-\sqrt{5})^6k+(2-\sqrt{5})^7y_k$$

и затоа вредностите на функцијата $f(x)$ строго опаѓаат, кога k прима вредности од 1 до 5473. Сега, од

$$x_1=1292,\ x_{5473}=5473,\ x_{5472}=4181,\ x_{5471}=2889 \text{ и } x_{5470}=1597,$$

следува дека бараните најмал и најголем број соодветно се a_{1292} и a_{1597}.

25. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со: $a_1=2$, $a_{n+1}=[\frac{3}{2}a_n]$, за $n=1,2,3,...$. Докажи, дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има бесконечно многу непарни и бесконечно многу парни броеви.

Решение. а) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу непарни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е парен број за секој $n\geq m$. Нека $a_m=2k_0, k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш,

$$a_{m+1}=[\tfrac{3}{2}a_m]=[\tfrac{3}{2}2k_0]=3k_0.$$

Бидејќи a_{m+1} е парен број, добиваме $k_0=2k_1,k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму

$$a_{m+2}=[\tfrac{3}{2}a_{m+1}]=[\tfrac{3}{2}3k_0]=3^2k_1.$$

Бидејќи a_{m+2} е парен број, добиваме $k_1=2k_2,k_2\in\mathbb{N}$ и $k_0=2^2k_2$. Продолжувајќи ја опишаната постапка добиваме дека за секој $s\in\mathbb{N}$ постои $k_s\in\mathbb{N}$, таков што $k_0=2^sk_s$. Ова противречи на фактот дека степенот на бројот 2 во каноничниот запис на k_0 е конечен број.

б) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу парни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е непарен број за секој $n\geq m$. Нека $a_m=2k_0+1,k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$a_{m+1}=[\tfrac{3}{2}a_m]=[\tfrac{3}{2}(2k_0+1)]=3k_0+1.$$

Бидејќи a_{m+1} е непарен број, добиваме $k_0=2k_1$, $k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму, како и во случајот под а), претпоставката доведува до противречност.

26. а) Дади пример на број a таков што

$$\{a\}+\{\tfrac{1}{a}\}=1.$$

б) Докажи, дека таков број a не може да биде рационален.

Решение. а) Да го разгледаме бројот $a=2+\sqrt{3}$. Имаме, $\frac{1}{a}=2-\sqrt{3}$, па затоа

$$\{a\}+\{\tfrac{1}{a}\}=\{2+\sqrt{3}\}+\{2-\sqrt{3}\}=\sqrt{3}-1+(2-\sqrt{3})=1,$$

и тоа е бараниот пример.

б) Да претпоставиме дека бројот a е рационален и истиот да го претставиме како дропка $a=\frac{m}{n}$. Ако $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$, тогаш

$$a+\tfrac{1}{a}=[a]+[\tfrac{1}{a}]+\{a\}+\{\tfrac{1}{a}\}=[a]+[\tfrac{1}{a}]+1$$

е цел број, т.е. $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=k\in\mathbb{Z}$, па затоа $m^2+n^2=kmn$. Оттука следува дека $n\,|\,m^2$ и $m\,|\,n^2$ и како m и n се заемно прости тоа е можно ако и само ако

$|m|=|n|=1$, т.е. ако и само ако $a=\pm1$. Но во овој случај $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=0$, што е противречност, па затоа бројот a не може да е рационален.

27. За три реални броја е познато дека дробниот дел на производот на било кои два од нив е еднаков на $\frac{1}{2}$. Докажи дека овие броеви се ирационални.

Решение. Нека дадените броеви се x,y и z и да претпоставиме дека некој од нив е рационален. Тогаш лесно се докажува дека и другите два броја се рационални. Нека

$$xy=n+\tfrac{1}{2},\ xz=m+\tfrac{1}{2},\ yz=k+\tfrac{1}{2},\ x=\tfrac{a}{b},$$

каде a,b,m,n,k се цели броеви $b\neq 0$. Тогаш

$$\frac{2k+1}{2}=yz=\frac{xy\cdot xz}{x^2}=\frac{b^2(2n+1)(2m+1)}{4a^2},$$

од каде добиваме

$$2a^2(2k+1)=b^2(2n+1)(2m+1).$$

Последното равенство не е можно бидејќи двете негови двете страни се цели броеви, при што на левата бројот 2 се јавува на непарен степен, а на десната тој се јавува на парен степен.

28. Нека a е позитивен, $\{a^{-1}\}=\{a^2\}$ и $2<a^2<3$. Определи ја вредноста на изразот $a^{12}-144a^{-1}$.

Решение. Да забележиме дека од претпоставката следува дека $\{a^{-1}\}=a^{-1}$. Навистина, од $a>1$ имаме $0<a^{-1}<1$. Понатаму, $\{a^2\}=a^2-2$, па a ја задоволува равенката $a^{-1}=a^2-2$, односно $a^3-2a-1=0$. Значи,

$$(a+1)(a^2-a-1)=0$$

и единствена позитивен корен е $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Сега користејќи дека $a^2=a+1$ и $a^3=2a+1$, пресметуваме

$$a^6=8a+5,\ a^{12}=144a+89 \text{ и } a^{13}=133a+144.$$

Конечно,

$$a^{12}-144a^{-1}=\frac{a^{13}-144}{a}=233.$$

29. Нека n е природен број и x е позитивен реален број, таков што ниту еден од броевите $x,2x,...,nx$ и ниту еден од броевите $\frac{1}{x},\frac{2}{x},...,\frac{[nx]}{x}$ не е цел број. Докажи дека

$$[x]+[2x]+...+[nx]+[\tfrac{1}{x}]+[\tfrac{2}{x}]+...[\tfrac{[nx]}{x}]=n[nx]. \qquad (1)$$

Решение. Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на нула е еднаков на бројот k, за кој важи $kx<1<(k+1)x$, а тоа е бројот $[\frac{1}{x}]$. Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на 1 е еднаков на бројот на целите броеви k за кои важи $1<kx<2$, а тој број е еднаков на $[\frac{2}{x}]-[\frac{1}{x}]$. Воопшто, за секој $1<r<[nx]$ бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на r е еднаков на $[\frac{r+1}{x}]-[\frac{r}{x}]$. На крајот, ако $[nx]=L$, тогаш бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на L е еднаков на $n-[\frac{L}{x}]=n-[\frac{[nx]}{x}]$. Затоа е точно равенството

$$\begin{aligned}[x]+[2x]+...+[nx] &= 0\cdot[\tfrac{1}{x}]+1\cdot([\tfrac{2}{x}]-[\tfrac{1}{x}])+2\cdot([\tfrac{3}{x}]-[\tfrac{2}{x}])+...+[nx]\cdot(n-[\tfrac{[nx]}{x}])\\ &= -[\tfrac{1}{x}]-[\tfrac{2}{x}]-...-[\tfrac{[nx]}{x}]+n[nx],\end{aligned}$$

кое е еквивалентно на равенството (1).

30. Даден е природен број $n>1$. Определи го најголемиот m за кој може да се изберат n броеви од множеството $\{1,2,...,2n\}$ така што најмалиот заеднички содржател на секои два од избраните броја е поголем или еднаков на m.

Решение. Одговорот е $k=6([\frac{n}{2}]+1)$ за $n\neq 4$ и $k=24$ за $n=4$.

Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се избраните броеви. За секој i постои $m_i\in\mathbb{N}$ таков што $n<m_ia_i\leq 2n$. Ако $m_ia_i=m_ja_j$ за некои $i\neq j$, тогаш $[a_i,a_j]\leq m_ia_i\leq 2n$. Затоа понатаму ќе претпоставуваме дека $\{m_ia_i\,|\,1\leq i\leq n\}=\{n+1,...,2n\}$. Ако $n\notin\{2,4\}$, тогаш броевите $2([\frac{n}{2}]+1)$ и $3([\frac{n}{2}]+1)$ се во множеството $\{n+1, n+2,...,2n\}$, па $[2([\frac{n}{2}]+1),3([\frac{n}{2}]+1)]=6([\frac{n}{2}]+1)$. Последното важи и за $n=2$, а за $n=4$ имаме $\min\{[i,j]\,|\,5\leq i<j\leq 8\}=24$.

Сега ќе докажеме дека за секои $n<i<j\leq 2n$ важи $[i,j]\geq 6([\frac{n}{2}]+1)$. Бидејќи $j<2i$ имаме $[i,j]\geq 3i$. Притоа $[i,j]=3i$ ако и само ако $j=\frac{3}{2}i$ и i е парен број, а во спротивно $[i,j]>4i>4n$. Сега тврдењето следува од фактот што $2([\frac{n}{2}]+1)$ е најмалиот парен број кој е поголем од n.

31. Во множеството $\mathbb{R}$ реши ја равенката

$$[x[x]]=1. \qquad (1)$$

Решение. Имаме

$$1\leq[x[x]]<2.$$

Можни се следниве случаи:

а) Ако $x \in (-\infty, -1)$, тогаш $[x] \le -2$ и $[x[x]] > 2$, т.е. x не е решение на (1).

б) Ако $x = -1$, тогаш $[x] = -1$ и $[x[x]] = 1$, т.е. $x = -1$ е решение на (1).

в) Ако $x \in (-1, 0)$, тогаш $[x] = -1$ и $x[x] = -x < 1$, т.е. x не е решение на (1).

г) Ако $x \in [0, 1)$, тогаш $[x] = 0$ и $x[x] = 0 < 1$, т.е. x не е решение на (1).

д) Ако $x \in [1, 2)$, тогаш $[x] = 1$ и $[x[x]] = [x] = 1$, т.е. x е решение на (1).

е) Ако $x \ge 2$, тогаш $[x] \ge 2$ и $[x[x]] > 2$, т.е. x не е решение на (1).

Конечно, $x \in \{-1\} \cup [1, 2)$.

32. Определи го бројот на реални решенија на равенката

$$[\tfrac{a}{2}] + [\tfrac{a}{3}] + [\tfrac{a}{5}] = a .$$

Решение. Бројот a е цел број бидејќи е збир од целите броеви $[\frac{a}{2}], [\frac{a}{3}], [\frac{a}{5}]$.

Нека ставиме $a = 30m + r$, каде m и r се цели броеви и $0 \le r < 30$. Сега ако во дадената равенка замениме за $a = 30m + r$ добиваме.

$$[15m + \tfrac{r}{2}] + [10m + \tfrac{r}{3}] + [6m + \tfrac{r}{5}] = 30m + r .$$

Ако искористиме $[a + b] = a + [b]$, кога a е цел број, а b е произволен реален број, добиваме:

$$15m + [\tfrac{r}{2}] + 10m + [\tfrac{r}{3}] + 6m + [\tfrac{r}{5}] = 30m + r$$

$$m = r - [\tfrac{r}{2}] - [\tfrac{r}{3}] - [\tfrac{r}{5}].$$

Сега, за секој $r \in \{0, 1, 2, ..., 29\}$ бројот m е еднозначно определен, што значи дека дадената равенка има 30 решенија.

33. Реши ја равенката

$$\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x .$$

Решение. Нека x е решение на дадената равенка, $k = [x]$ и $\alpha = \{x\}$. Можни се следниве случаи.

1) Ако $\alpha \in [0, \frac{1}{3})$, тогаш $6\alpha = k + \alpha$, т.е. $5\alpha = k$ и како $0 \le \alpha < \frac{1}{3}$, ќе важи $0 \le k < \frac{5}{3}$, па затоа $k = 0$ или $k = 1$. Последното значи дека $x = k + \alpha = 0$ или $x = k + \alpha = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

2) Ако $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, тогаш $\alpha + 2\alpha + 3\alpha - 1 = k + \alpha$, т.е. $5\alpha = k + 1$ и од $\frac{1}{3} \le \alpha < \frac{1}{2}$ ќе следува $\frac{2}{3} \le k < \frac{3}{2}$, т.е. $k = 1$, па затоа $x = k + \alpha = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$.

3) Ако $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, тогаш $\alpha + 2\alpha - 1 + 3\alpha - 1 = k + \alpha$, т.е. $5\alpha = k + 2$ и од $\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{2}{3}$ ќе следува $\frac{1}{2} \le k < \frac{4}{3}$, т.е. $k = 1$, па затоа $x = k + \alpha = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.

4) Ако $\alpha\in[\frac{2}{3},1)$, тогаш $\alpha+2\alpha-1+3\alpha-2=k+\alpha$, т.е. $5\alpha=k+3$ и од $\frac{2}{3}\leq\alpha<1$ ќе следува $\frac{1}{3}\leq k<2$, т.е. $k=1$, па затоа $x=k+\alpha=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$.

Значи, решенијата на дадената равенка се: $0,\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{8}{5},\frac{9}{5}$.

34. Реши ја равенката

$$[\tfrac{5+6x}{8}]=\tfrac{15x-7}{5}. \qquad (1)$$

Решение. Ставаме $[\frac{5+6x}{8}]=m, m\in\mathbb{Z}$ и добиваме $\frac{15x-7}{5}=m$, од каде следува $x=\frac{5m+7}{15}$. Според тоа, ако за x замениме во (1), по средувањето, дадената равенка може да се запише во обликот

$$[\tfrac{m}{4}+\tfrac{39}{40}]=m.$$

Последното значи дека $m\leq\frac{m}{4}+\frac{39}{40}<m+1$, од каде добиваме $m\in(-\frac{1}{30},\frac{13}{10}]$. Но, $m\in\mathbb{Z}$, па затоа $m=0$ или $m=1$. За $m=0$, добиваме $x=\frac{7}{15}$, а за $m=1$ добиваме $x=\frac{4}{5}$. Лесно се проверува дека $x=\frac{7}{15}$ и $x=\frac{4}{5}$ се решенија на почетната равенка.

35. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345. \qquad (1)$$

Решение. Нека x е решение на равенката. Јасно, $x>0$. Нека

$$x=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}+\frac{e}{16}+\frac{f}{32}+k,$$

каде a е ненегативен цел број, $b,c,d,e,f\in\{0,1\}$ и $0\leq k<\frac{1}{32}$. Ако замениме во (1) добиваме

$$\begin{aligned}&[a+(\tfrac{b}{2}+\tfrac{c}{4}+\tfrac{d}{8}+\tfrac{e}{16}+\tfrac{f}{32}+k)]+[2a+(b+\tfrac{c}{2}+\tfrac{d}{4}+\tfrac{e}{8}+\tfrac{f}{16}+2k)]+\\&+[4a+2b+c+(\tfrac{d}{2}+\tfrac{e}{4}+\tfrac{f}{8}+4k)]+[8a+4b+2c+d+(\tfrac{e}{2}+\tfrac{f}{4}+8k)]\\&+[16a+8b+4c+2d+e+(\tfrac{f}{2}+16k)]+\\&+[32a+16b+8c+4d+2e+f+(32)k]=12345\end{aligned} \qquad (1)$$

Бидејќи $b,c,d,e,f\in\{0,1\}$, $0\leq k<\frac{1}{32}$ лесно се докажува дека вредноста на изразите во малите загради во (1) се помала од еден. Ако искористиме дека $[s+t]=s$ кога s е ненегативен цел број и $t\in[0,1)$, равенката (1) го добива обликот:

$$63a+31b+15c+7d+3e+f=12345.$$

Од последната равенка добиваме:

$$63a\leq12345\leq63a+31+15+7+3+1=63a+57,$$

$$\frac{12288}{63} \le a \le \frac{12345}{63},$$

$$195 + \frac{3}{63} \le a \le 195 + \frac{60}{195},$$

што не е можно бидејќи a е цел број. Значи дадената равенка нема реално решение.

Забелешка. Секој позитивен реален број x може да се запише во облик $x = a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{2^n} + k$, каде a е природен број, $a_i \in \{0,1\}$ и $0 < k < \frac{1}{2^n}$. Важи $a \le x < a + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n} = a + 1$, па затоа $[x] = a$.

36. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x - y = 2001 \\ [x] + [y] = 2003. \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка на системот добиваме

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2001,$$

па затоа $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$. Но, $0 \le \{x\}, \{y\} < 1$, па затоа $-1 < \{x\} - \{y\} < 1$, од каде следува $\{x\} = \{y\}$. Според тоа, системот го добива видот

$$\begin{cases} [x] - [y] = 2001 \\ [x] + [y] = 2003 \end{cases}$$

од каде добиваме $[x] = 2002, [y] = 1$. Според тоа, дадениот систем има бесконечно многу решенија $A = \{(2002 + \alpha, 1 + \alpha) \mid 0 \le \alpha < 1\}$.

37. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2,2 \\ z + [x] + \{y\} = 3,3. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме равенките на системот и земеме предвид дека за секој реален број a важи $a = [a] + \{a\}$, добиваме

$$x + y + z = 3,3.$$

Сега, од третата равенка следува $x + y + z = z + [x] + \{y\}$, односно

$$x + y = [x] + \{y\} = [x] + y - [y],$$

па затоа $x = [x] - [y]$, од каде следува дека x е цел број, т.е. $x = [x]$. Затоа $[y] = 0$, како и $\{x\} = 0$ и $y = \{y\}$. Сега, од првата равенка на системот добиваме $x + \{z\} = 1,1$, па затоа $x = 1$ и $\{z\} = 0,1$. Од втората равенка на системот следува $y + [z] = 2,2$ и како $y = \{y\}$ добиваме $y = 0,2$ и $[z] = 2$.

Конечно, $x = 1, y = 0,2$ и $z = 2,1$.

38. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200, \\ \{x\}+y+[z]=190,1 \\ [x]+\{y\}+z=178,8 \end{cases}.$$

Решение. Ако ги собереме трите равенки добиваме

$$2x+2y+2z=568,9$$

од каде следува

$$x+y+z=284,45 \qquad (1)$$

Со одземање на сите три равенки од системот од (1) добиваме

$$\begin{cases} \{y\}+[z]=84,45 \\ [x]+\{z\}=94,35 \\ \{x\}+[y]=105,65 \end{cases}.$$

Оттука,

$$[z]=84, \{y\}=0,45, [x]=94, \{z\}=0,35, \{x\}=0,65, [y]=105,$$

односно

$$x=94,65,\ y=105,45,\ z=84,35.$$

39. Реши ја равенката

$$x^2-2[x]+\{x\}=0.$$

Решение. Имаме $\{x\}\geq 0$ и $x^2\geq 0$, па затоа ако x е решение на дадената ра

венка, тогаш $[x]\geq 0$. Нека $[x]=k$ и $\{x\}=\alpha$. Тогаш $(k+\alpha)^2-2k+\alpha=0$, т.е.

$$\alpha^2+(2k+1)\alpha+k^2-2k=0. \qquad (1)$$

Од (1), ако се земем предвид дека $\alpha\geq 0$ добиваме

$$\alpha=\frac{-(2k+1)+\sqrt{(2k+1)^2-4(k^2-2k)}}{2},$$

т.е. $\alpha=\frac{-(2k+1)+\sqrt{12k+1}}{2}$ и $(2k+1)^2\leq 12k+1$. Но, $k\in\mathbb{Z}$ и затоа решенија на последната неравенка се $k\in\{0,1,2\}$.

Ако $k=0$, тогаш равенката (1) го добива обликот $\alpha^2+\alpha=0$, па како $\alpha\in[0,1)$ добиваме $\alpha=0$. Значи, $x=k+\alpha=0$.

Ако $k=1$, тогаш равенката (1) го добива обликот $\alpha^2+3\alpha-1=0$, па како $\alpha\in[0,1)$ добиваме $\alpha=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Значи, $x=k+\alpha=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Ако $k=2$, од $\alpha^2+5\alpha=0$ и $\alpha\in[0,1)$ следува $\alpha=0$, па затоа $x=k+\alpha=2$.

Конечно решенија на дадената равенка се: 0, $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ и 2.

40. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$4x^2-40[x]+51=0. \qquad (1)$$

Решение. Имаме:

$$(2x-3)(2x-17)=4x^2-40x+51\le 4x^2-40[x]+51.$$

Но, $2x-17<2x-3$ и $(2x-3)(2x-17)\le 0$, па затоа $2x-17\le 0$ и $2x-3>0$. Оттука следува $\frac{3}{2}<x\le\frac{17}{2}$ и $1<[x]\le 8$. Од $4x^2-40[x]+51=0$, заради најдените ограничувања добиваме $x=\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$, т.е. $[x]=[\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}]$. Со непосредна проверка добиваме дека последното равенство е исполнето за $[x]=2,6,7$ и 8. Конечно, со замена во $x=\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$ добиваме дека решенија на (1) се $\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{\sqrt{189}}{2},\frac{\sqrt{229}}{2},\frac{\sqrt{269}}{2}$.

41. Даден е природен број n. Определи го бројот на решенијата на равенката

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2$$

такви што $1\le x\le n$.

Решение. Ако ставиме $x=m+\alpha$, $m\in\{1,2,...,n-1\}$, $0\le\alpha<1$, дадената равенка го добива видот

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2].$$

Според тоа, бројот $m+\alpha$ е решение на дадената равенка ако и само ако $2m\alpha$ е цел број, т.е. ако и само ако

$$\alpha\in\{0,\tfrac{1}{2m},\tfrac{2}{2m},...,\tfrac{2m-1}{2m}\},$$

што значи дека во интервалот $[m.m+1)$ дадената равенка има $2m$ решенија. Бидејќи и $x=n$ е решение на равенката, заклучуваме дека бараниот број решенија на оваа равенка е еднаков на

$$1+2(1+2+...+(n-1))=1+n(n-1)=n^2-n+1.$$

42. Реши ја равенката:

$$x^3-[x]=4.$$

Решение. Од $x^3-4=[x]\le x$ следува $x^3-x\le 4$, па затоа $x<2$, бидејќи за $x\ge 2$ добиваме $x(x^2-1)\ge 2\cdot 3=6$. Исто така, од $x^3-4=[x]\ge x-1$, т.е. $x^3-x\ge 3$ следува $x>-1$, бидејќи за $x\le -1$ важи $x^3-x=x(x^2-1)\le 0$.

Според тоа, $x\in(-1,2)$, па затоа $[x]\in\{-1,0,1\}$.

Ако $[x]=-1$, дадената равенка се сведува на $x^3+1=4$, од каде добиваме

$x=\sqrt[3]{3}$, што не е можно бидејќи $[\sqrt[3]{3}]=1\neq -1$.

Ако $[x]=0$, дадената равенка се сведува на $x^3=4$, од каде добиваме $x=\sqrt[3]{4}$, што не е можно бидејќи $[\sqrt[3]{4}]=1\neq 0$.

Ако $[x]=1$, дадената равенка се сведува на $x^3=5$, од каде добиваме $x=\sqrt[3]{5}$ и тоа е решение на почетната равенка.

43. Дадени се равенките

$$[x]^3+x^2=x^3+[x]^2 \text{ и } [x^3]+x^2=x^3+[x^2].$$

Докажи:

а) целите броеви се единствени решенија на првата равенка,

б) за втората равенка постои решение кое не е цел број.

Решение. а) Нека x ја задоволува равенката $[x]^3+x^2=x^3+[x]^2$. Тогаш за $t=[x]$ и $\alpha=x-t$ имаме

$$t^3+t^2=(t+\alpha)^3+(t+\alpha)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha(\alpha^2+(3t-1)\alpha+3t^2-2t)=0 .$$

Затоа $\alpha=0$ или α е корен на квадратниот полином во заградата. Во вториот случај дискриминантата $(3t+1)(t-1)$ треба да е ненегативна и бидејќи t е цел број имаме $t=0$ или $t=1$. Тогаш $\alpha=0, \alpha=1$ или $\alpha=-1$. Но, $\alpha\in[0,1)$, па затоа $\alpha=0$, т.е. x е цел број.

б) Степенот на полиномот y^3-y^2-1 е непарен, па затоа тој има барем едн реален корен α, кој очигледно не е цел број (всушност реалниот корен е единствен и припаѓа на интервалот $(1,2)$). Тогаш

$$[\alpha^3]=[\alpha^2+1]=[\alpha^2]+1,$$

па затоа

$$[\alpha^3]-[\alpha^2]=1=\alpha^3-\alpha^2.$$

44. Определи ги сите природни броеви n такви што

$$[\tfrac{n}{k}+k]=[2\sqrt{n}]+1,$$

каде $k=[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]$.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви се од видот $n=l(l-1)$, каде $l\geq 2$ е природен број.

За $n=l(l-1)$ имаме $k=[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]=l$, па затоа $[\frac{n}{k}+k]=2l-1$, а бидејќи

$$(2l-2)^2<4l(l-1)<(2l-1)^2$$

имаме $[2\sqrt{n}]=2l-2$, т.е. равенството од условот е исполнето.

Ќе докажеме дека за $n \neq l(l-1)$ е исполнето равенството $[\frac{n}{k}+k]=[2\sqrt{n}]$. Во тој случај k е најголемиот природен број за кој $k(k-1)<n$. Ако претпоставиме дека за некој $l \in \mathbb{N}$ е исполнето неравенството $\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2} \geq l > \frac{\sqrt{4n}+1}{2}$, тогаш $1+4n \geq (2l-1)^2 > 4n$, па затоа $1+4n=(2l-1)^2$, т.е. $n=l(l-1)$, што е противречност. Според тоа,

$$k=[\tfrac{\sqrt{4n+1}+1}{2}]=k=[\tfrac{\sqrt{4n}+1}{2}]=[\sqrt{n}+\tfrac{1}{2}],$$

т.е. $k=[\sqrt{n}]$ или $k=[\sqrt{n}]+1$.

Имаме $k(k-1)<n<k(k+1)$. Ќе разгледаме три случаи.

1) Ако $k(k+1)>n>k^2$, тогаш $[\frac{n}{k}]=k$ и $\sqrt{n}>k$, па затоа $\{\sqrt{n}\}<\frac{1}{2}$. Оттука $2[\sqrt{n}]=[2\sqrt{n}]$ и затоа $[\frac{n}{k}]+k=2k=2[\sqrt{n}]=[2\sqrt{n}]$.

2) Ако $k^2>n>k(k-1)$, тогаш $[\frac{n}{k}]=k-1$ и $k>\sqrt{n}$, па затоа $k=[\sqrt{n}]+1$. Оттука $\{\sqrt{n}\}>\frac{1}{2}$, т.е. $2[\sqrt{n}]=[2\sqrt{n}]-1$. Значи,

$$[\tfrac{n}{k}]+k=2k-1=2([\sqrt{n}]+1)-1=2[\sqrt{n}]+1=[2\sqrt{n}].$$

3) Ако $n=k$, тогаш повторно $[\frac{n}{k}]+k=2k=[2\sqrt{n}]$.

Според тоа, во сите случаи важи $[\frac{n}{k}]+k=[2\sqrt{n}]$.

45. Определи ги сите реални броеви a такви што $4[an]=n+[a[an]]$, за секој природен број n.

Решение. Од условот следува дека

$$4(an-1)<a+a(an) \text{ и } 4an>n+a(an-1)-1$$

т.е.

$$1+a^2-\frac{a+1}{n}<4a<1+a^2+\frac{4}{n}.$$

Но, n е произволен природен број, па од последните неравенства следува $1+a^2=4a$, од каде добиваме $a=2-\sqrt{3}$ или $a=2+\sqrt{3}$. Ако во условот замениме $n=1$ добиваме дека првиот случај не е можен. Во вториот случај ставаме $b=[\frac{n}{a}]$ и $c=\frac{n}{a}-b$. Бидејќи $a=4-\frac{1}{a}$, важи

$$\begin{aligned} n+[a[an]] &= [n+a[4n-\tfrac{n}{a}]]=[n+a(4n-b-1)]=[a(4n-1+c)] \\ &= [(4-\tfrac{1}{a})(4n-1+c)]=[4(4n-1)-4(\tfrac{n}{a}-c)+\tfrac{1-c}{a}] \\ &= 4(4n-1-b)=4[4n-\tfrac{n}{a}]=4[an]. \end{aligned}$$

Според тоа, единствено решение на задачата е $a=2+\sqrt{3}$.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои $n-[n\{n\}]=2$.

Решение. Ако $n=p^2$, тогаш $\sqrt{n}=p$ и $\{\sqrt{n}\}=0$, па затоа $n=2$, што противречи на $n=p^2$. Понатаму, постои природен број t таков што

$$(t-1)^2<n<t^2.$$

Тогаш $[\sqrt{n}]=t-1$, па како за секој цел број a важи $[a+b]=a+[b]$, добиваме

$$\begin{aligned}n-[n\{n\}]&=n-[n(\sqrt{n}-[\sqrt{n}])]=n-[n(\sqrt{n}-t+1)]\\&=n-[n\sqrt{n}]+nt-n=nt-[n\sqrt{n}].\end{aligned}$$

Според тоа, $nt=2+[n\sqrt{n}]$.

Нека $n=t^2-k$ и да претпоставиме дека $k\geq 2$. Тогаш $n\sqrt{n+2}\leq nt$ и како $2+[n\sqrt{n}]\leq 2+n\sqrt{n}$, добиваме $n\sqrt{n+2}\leq 2+n\sqrt{n}$. Последната неравенка ја запишуваме во видот $n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\leq 2$ и множиме со $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$, по што ја добиваме неравенката

$$n\leq\sqrt{n+2}+\sqrt{n}. \qquad (1)$$

Бидејќи $\sqrt{n(n+2)}<n+1$, по квадрирањето на (1) ја добиваме неравенката $n^2<3(n+1)$. Од последната неравенка добиваме $n=1,2$ или 3 и со непосредна проверка можеме да видиме дека ниту еден од овие броеви не е решение на почетната равенка.

Според тоа, $k=1$ и по слични трансформации добиваме $n\leq 2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$. Од $2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})<4\sqrt{n+1}$ следува $n<4\sqrt{n+1}$. Бидејќи $n=t^2-1$ добиваме $t^2-1<4t$, што е точно само за $t\leq 4$. Според тоа, сите можни вредности на n се $n=3, n=8$ и $n=15$. Со непосредна проверка се добива дека само $n=8$ и $n=15$ се решенија на задачата.

47. Определи ги сите прости броеви p, за кои

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]$$

е прост број.

Решение. За $p=2$ имаме

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]=[\tfrac{5}{2}]+[\tfrac{6}{3}]+[\tfrac{11}{8}]+[\tfrac{22}{24}]=2+2+1+0=5,$$

кој е прост број. Следствено $p=2$ е решение на задачата.

За $p=3$ имаме

$$[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]=[\tfrac{10}{2}]+[\tfrac{11}{3}]+[\tfrac{16}{8}]+[\tfrac{27}{24}]=5+3+2+1=11,$$

кој исто така е прост број. Следствено и $p=3$ е решение на задачата.

Нека $p\geq 5$ е прост број. Тогаш $p^2-1=(p-1)(p+1)$, кој е производ на два последователни парни броја и следствено се дели со 8. Освен тоа разгледуваниот производ се дели и со 3, бидејќи еден од броевите $p-1$ или $p+1$ се дели со 3. Заклучуваме, дека p^2-1 се дели со 24 и следствено $p^2=24k+1$ (k е природен број). Оттука добиваме

$$\begin{aligned}[\tfrac{p^2+1}{2}]+[\tfrac{p^2+2}{3}]+[\tfrac{p^2+7}{8}]+[\tfrac{p^2+18}{24}]&=[\tfrac{24k+2}{2}]+[\tfrac{24k+3}{3}]+[\tfrac{24k+8}{8}]+[\tfrac{24k+19}{24}]\\ &=12k+1+8k+1+2k+1+k\\ &=3(8k+1).\end{aligned}$$

Добиениот број не може да е прост, бидејќи се дели со 3 и е поголем од 3. Така, $p=2$ и $p=3$ се единствените решенија на задачата.

48. Определи ги сите парови (a,b) реални броеви такви што важи

$$a[bn]=b[an], \qquad (1)$$

за секој природен број n.

Решение. Јасно,

1) $a=b$, 2) $a=0$ или $b=0$, 3) a и b се цели броеви,

се решенија на равенката. Ќе докажеме дека равенката нема други решенија освен 1), 2) и 3). Нека претпоставиме дека a и b се ненулти и различни реални броеви такви што важи (1). Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека

$$[2^n a]=2^n[a] \text{ и } [2^n b]=2^n[b].$$

Нека $n=1$. Имаме, $2[a]\leq 2a<2([a]+1)=2[a]+2$, па затоа $[2a]=2[a]$ или $[2a]=2[a+1$. Ако $[2a]=2[a+1$, тогаш

$$a[2b]=b[2a]=b(2[a]+1)=2b[a]+b=2a[b]+b,$$

па ако поделиме со a добиваме $[2b]=2[b]+\frac{b}{a}$. Значи, $a=b$, што противречи на претпоставката $a\neq b$. Значи $[2a]=2[a]$. Аналогно се докажува дека $[2b]=2[b]$.

Нека претпоставиме дека за $2\leq k\leq n$ важи $[2^n a]=2^n[a]$ и $[2^n b]=2^n[b]$. Ако во дадената равенка замениме $n=2^{k+1}$ добиваме $a[2^{k+1}b]=b[2^{k+1}a]$. Како и претходно,

$$[2^{k+1}a]=[2\cdot 2^k a]=2[2^k a] \text{ или } [2^{k+1}a]=[2\cdot 2^k a]=2[2^k a]+1.$$

Ако $[2^{k+1}a]=2[2^k a]+1$, тогаш добиваме

$$a[2^{k+1}b]=b[2^{k+1}a]=b(2[2^k a]+1)=2b[2^k a]+b$$
$$=2^{k+1}b[a]+b=2^{k+1}a[b]+b.$$

Ако $a[2^{k+1}b]=2^{k+1}a[b]+b$ го поделиме со a добиваме

$$[2^{k+1}b]=2^{k+1}a[b]+\frac{b}{a},$$

од каде добиваме $a=b$, што е противречност. Од добиената противречност следува $[2^{k+1}a]=2[2^k a]=2^{k+1}[a]$ и аналогно $[2^{k+1}b]=2^{k+1}[b]$. Со тоа идуктивниот доказ е завршен.

Бидејќи $[2^n x]=2^n[x]$ и $[2^n y]=2^n[y]$ за секој природен број n, заклучуваме дека x и y мора да се цели броеви. Навистина, ако x и y не се цели броеви, тогаш постои природен број n така што $[2^n x]>2^n[x]$ и $[2^n y]>2^n[y]$. Јасно, ако $[x]=a$, тогаш доволно е да избериме природен број n така што $[2^n x]>2^n a$, т.е. $[2^n x]\geq 2^n a+1$. Според тоа добиваме дека

$$2^n x\geq 2^n a+1 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n(x-a)\geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2^n\geq \frac{1}{x-a}.$$

49. Нека n е фиксен природен број.

а) Определи ги целобројните решенија на равенката $\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{x}{2^k}]=x-1$.

б) Определи ги целобројните решенија на равенката $\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{x}{2^k}]=x-m$, каде m е фиксен природен број.

Решение. Бидејќи збирот на левите страни од равенките од а) и б) е природен број и $1,m\in\mathbb{N}$ јасно е дека решенијата на равенките треба да ги бараме во множеството природни броеви. Затоа, нека претпоставиме дека

$$x=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+....+a_n\cdot 2^n+...+a_r 2^r,$$

каде $a_i\in\{0,1\}$, $i=0,1,2,...,n,n+1,...,r$.

Со $\{\frac{x}{2^k}\}$ ќе го означиме дробниот дел на бројот $\frac{x}{2^k}$. Тогаш $[\frac{x}{2^k}]=\frac{x}{2^k}-\{\frac{x}{2^k}\}$, за $k=1,2,\dots$. Значи, збирот $\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{x}{2^k}]$ можеме да го запишеме во вид

$$\sum_{k=1}^{n}[\tfrac{x}{2^k}]=\sum_{k=1}^{n}(\tfrac{x}{2^k}-\{\tfrac{x}{2^k}\})=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{x}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\{\tfrac{x}{2^k}\}=x\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\{\tfrac{x}{2^k}\}$$
$$=x(1-\tfrac{1}{2^n})-[\tfrac{a_0}{2}+(\tfrac{a_0}{2^2}+\tfrac{a_1}{2})+(\tfrac{a_0}{2^3}+\tfrac{a_1}{2^2}+\tfrac{a_2}{2})+...+(\tfrac{a_0}{2^n}+\tfrac{a_1}{2^{n-1}}+\tfrac{a_2}{2^{n-2}}+...+\tfrac{a_{n-1}}{2})]$$

$$=x(1-\tfrac{1}{2^n})-[a_0(1-\tfrac{1}{2^n})+a_1(1-\tfrac{1}{2^{n-1}})+...+a_{n-2}(1-\tfrac{1}{2^2})+a_{n-1}(1-\tfrac{1}{2^1})]$$

$$=x(1-\tfrac{1}{2^n})-[a_0+a_1+...+a_{n-1}]-[\tfrac{a_0}{2^n}+\tfrac{a_1}{2^{n-1}}+...+\tfrac{a_{n-1}}{2}]$$

$$=x(1-\tfrac{1}{2^n})-[a_0+a_1+...+a_{n-1}+a_n]+\tfrac{1}{2^n}[a_0+2a_1+...+2^{n-1}a_{n-1}+2^n a_n]$$

$$=x-\tfrac{x}{2^n}-\sum_{i=0}^{n}a_i+\tfrac{1}{2^n}(x-\sum_{i\geq n+1}a_i2^i)$$

$$=x-\sum_{i=0}^{n}a_i-\tfrac{1}{2^n}\sum_{i\geq n+1}a_i2^i$$

$$=x-\sum_{i=0}^{n}a_i-\sum_{i\geq n+1}a_i2^{i-n}.$$

а) Во овој случај равенката го добива обликот

$$x-1=x-\sum_{i=0}^{n}a_i-\sum_{i\geq n+1}a_i2^{i-n},$$

од каде добиваме $1=\sum_{i=0}^{n}a_i+\sum_{i\geq n+1}a_i2^{i-n}$. Јасно е дека равенство не е можно ако $a_k=1$, за било кој $k=n+1,...,r$. Заради тоа ќе претпоставиме дека $a_k=0$, $k=n+1,...,r$. Во тој случај равенката го добива видот

$$\sum_{i=0}^{n}a_i=1.$$

Последната равенка има решенија

$$(a_0,a_1,...,a_n)=(0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0)\text{, за } i=0,1,2,...,n.$$

Значи, почетната равенка има $(n+1)-$но решение

$$x_0=1,x_2=2,....,x_n=2^n.$$

б) Упатство. Искористи ја претходната конструкција. Какви се решенијата на равенката

$$m=\sum_{i=0}^{n}a_i+\sum_{i\geq n+1}a_i2^{i-n}.$$

50. Дали постои природен број n таков што секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се среќава еднаков број пати на позицијата 200 по децималната запирка во броевите $\sqrt{n},\sqrt{n+1},\sqrt{n+2},...,\sqrt{n+999}$.

Решение. Нека k е природен број за кој

$$\frac{(10^{200}-1)^2}{4}<k<\frac{10^{400}}{4},$$

(постојат многу повеќе од 2001, колку што ќе ни бидат потребни, такви k). Од

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \text{ и } \frac{1}{2\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}$$

следува

$$\frac{1}{10^{200}}<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{10^{200}-1}.$$

Освен тоа, важи

$$\frac{1}{10^{200}-1}-\frac{1}{10^{200}}=\frac{1}{10^{200}(10^{200}-1)}<\frac{1}{10^{300}}.$$

Од горните равенства добиваме

$$\frac{1}{10^{200}}<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{10^{200}}+\frac{1}{10^{300}},$$

па затоа

$$1<10^{200}\sqrt{k+1}-10^{200}\sqrt{k}<1+10^{-100}.$$

Цифрата која не интересира (на позиција 200 по децималната запирка) е точно последната цифра на бројот $[10^{200}\sqrt{k}]$. Од добиените неравенства следува дека за секој од разгледаните k имаме $[10^{200}\sqrt{k+1}]-[10^{200}\sqrt{k}]=1$ или 2. Уште повеќе, ако $[10^{200}\sqrt{k+1}]-[10^{200}\sqrt{k}]=2$, тогаш $\{10^{200}\sqrt{k+1}\}<10^{-100}$. Да ги разгледаме првите 1000 броја во нашиот интервал. Ако за нив сите разлики $[10^{200}\sqrt{k+1}]-[10^{200}\sqrt{k}]$ се еднакви на 1, тогаш овие броеви го имаат саканото својство – т.е. секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се среќава по 100 пати на позицијата 200 по децималната запирка. Ако $[10^{200}\sqrt{k+1}]-[10^{200}\sqrt{k}]=2$ за некој од овие броеви, тогаш дробниот дел на $10^{200}\sqrt{k+1}$ е помал од 10^{-100} и потоа секој пат нараснува за помалку од 10^{-100}. Тогаш следните 1000 броеви го имаат саканото својство.

51. Докажи, дека меѓу произволни 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството

$$n\sqrt{d}\cdot\{n\sqrt{d}\}>\frac{5}{2}$$

важи за секој природен број n.

Решение. Бидејќи за $m=[n\sqrt{d}]$ важи

$$n\sqrt{d}\cdot\{n\sqrt{d}\}=n\sqrt{d}(n\sqrt{d}-m)=n\sqrt{d}\,\frac{dn^2-m^2}{n\sqrt{d}+m}$$
$$>n\sqrt{d}\,\frac{dn^2-m^2}{2n\sqrt{d}}=\frac{dn^2-m^2}{2},$$

доволно е да се избере d таков што за секои $m,n\in\mathbb{N}$ важи $dn^2-m^2\notin\{1,2,3,4\}$. Последното може да се постигне ако земеме

$$d=20k+15=4(4k+3), \text{ за } k\in\mathbb{N}_0.$$

Навистина, тогаш m^2+2 и $m+3$ не се деливи со 5, додека m^2+1 и m^2+4 немаат делители од облик $4k+3$, па затоа ниту еден од броевите m^2+1, m^2+2, m^2+3 и m^2+4 не може да е делив со d.

52. Определи го бројот на различните членови на конечната низа со општ член $[\frac{k^2}{1998}]$, каде $k=1,2,...,1997$.

Решение. Бидејќи разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1}^{999}$ е помала од 1, заклучуваме дека секои два соседни членови на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1}^{999}$ се еднакви или се разликуваат за 1. Бидејќи првиот член на таа низа е еднаков на 1, а последниот на 499, заклучуваме дека бројот на нејзините различни членови е 500. Од друга страна, разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1000}^{1997}$ е поголема од 1 и затоа членовите на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1000}^{1997}$ се различни.

Конечно, дадената низа има $500+998=1498$ различни членови.

53. Определи ги сите реални броеви $x>1$ такви што $\sqrt[n]{[x^n]}$ е природен број за секој $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Решение. Нека $\sqrt[n]{[x^n]}=a_n$. Тогаш $[x^n]=a_n^n$ и $a_n^n\le x^n<a_n^n+1$, од каде следува дека $a_n\le x<\sqrt[n]{a_n^n+1}$. Од последните неравенства следува дека $[x]=a_n$, што значи дека сите природни броеви $x, x\ge 2$ го задоволуваат условот на задачата.

Сега, нека $x=a+\alpha, a\in\mathbb{Z}, a\ge 1, 0<\alpha<a$ го задоволува условот на задачата. Тогаш $a^n<(x+a)^n<a^n+1$, па затоа

$$1<(1+\frac{\alpha}{a})^n<1+\frac{1}{a^n}\le 2. \qquad (1)$$

Од друга страна, од неравенството на Бернули следува дека

$$(1+\frac{\alpha}{a})^n\ge 1+n\frac{\alpha}{a}>2$$

за доволно голем природен број n, што противречи на неравенството (1). Конечно од добиената противречност следува дека единствени решенија на задачата се природните броеви $x, x\ge 2$.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои е точно равенството

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+...+[\sqrt[3]{n}]=2n.$$

Решение. Нека $a_m=[\sqrt[3]{m}]-2$, $m\in\mathbb{N}$. Задачата се сведува на тоа да ги определиме сите природни броеви n за кои важи

$$a_1+a_2+...+a_n=0.$$

Бидејќи

$$a_m=-1 \text{ за } 1\le m\le 7,$$
$$a_m=0 \text{ за } 8\le m\le 26,$$
$$a_m=1 \text{ за } 27\le m\le 63,$$
$$a_m=2 \text{ за } m\ge 64,$$

заклучуваме дека $a_1+a_2+...+a_n=0$ ако и само ако $n=26+7=33$.

55. Определи го целиот дел на бројот

$$a_n=\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+...+\sqrt[3]{24}}}, \text{ (} n \text{ корени)},$$

каде $n\ge 1$

Решение. Очигледно

$$a_{n+1}=\sqrt[3]{24+a_n} \text{ и } 2\le\sqrt[3]{24}=a_1<3.$$

Нека претпоставиме дека за некој $n\in\mathbb{N}$ важи $2\le a_n<3$. Тогаш

$$a_{n+1}=\sqrt[3]{24+a_n}<\sqrt[3]{24+3}=3 \text{ и } a_{n+1}=\sqrt[3]{24+a_n}>\sqrt[3]{24}>2,$$

па од принципот на математичка индукција следува $2\le a_n<3$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Конечно, $[a_n]=2$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

56. Колку од првите 1000 позитивни броеви можат да се запишат во облик $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$, каде x е реален број?

Решение. Нека $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ и нека n е природен број. Тогаш $f(x+n)=f(x)+20n$. Ова всушност значи дека ако некој природен број k може да се запише во облик $f(x_0)$ за некој реален број x_0, тогаш за $n=1,2,3,...$, слично може да се запише и

$$k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n).$$

Врз основа на оваа дискусија ние можеме да се ограничиме на разгледување кои од првите 20 природни броеви можат да се запишат на бараниот начин, каде $x\in(0,1]$.

Понатаму, ако x расте, вредноста на $f(x)$ се менува само ако $2x,4x,6x,8x$ достигнува цела вредност и промената на $f(x)$ е секогаш на нова поголема вредност. Во интервалот $(0,1]$ такви промени настануваат точно кога x е од форма $\frac{m}{n}$, каде $l\le m\le n$ и $n=2,4,6$ или 8. Постојат точно 12 такви дропки, кои во растечки редослед се:

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},1.$$

Па, само 12 од првите 20 природни броеви можат да се запишат во бараната форма. Бидејќи $1000=50\cdot 20$, постојат $50\cdot 12=600$ природни броеви кои можат да се запишат во бараната форма.

57. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ го задоволува равенството

$$a_{n+2}=[\frac{2a_{n+1}}{a_n}]+[\frac{2a_n}{a_{n+1}}].$$

Докажи дека постои природен број m таков што $a_m=4$ и $a_{m+1}\in\{3,4\}$.

Решение. Прв ќе докажеме три леми.

Лема 1. За секој природен број $n\geq 3$ важи $a_n\geq 3$.

Доказ. Нека $a_n<3$, за некој $n\geq 3$. Ако $a_{n-1}\geq a_{n-2}$, тогаш

$$\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}}\geq 2 \Rightarrow [\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}}]\geq 2 \Rightarrow [\frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}}]=0 \Rightarrow a_{n-1}>2a_{n-2} \Rightarrow \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}}>4.$$

Последното противречи на $a_n<3$. Случајот $a_{n-2}\geq a_{n-1}$ се разгледува аналогно. ■

Лема 2. За секој природен број $n\geq 3$ е исполнето

$$a_{n+1}=a_n \text{ или } a_{n+2}<\max\{a_n,a_{n+1}\}.$$

Доказ. Нека претпоставиме дека, $a_{n+1}\neq a_n$. Ако $a_n=\max\{a_n,a_{n+1}\}$, тогаш $\frac{2a_{n+1}}{a_n}<2$. Од друга страна

$$a_{n+1}a_n\geq 3 \Rightarrow \frac{2a_n}{a_{n+1}}\leq\frac{2a_n}{3} \Rightarrow a_{n+2}=[\frac{2a_{n+1}}{a_n}]+[\frac{2a_n}{a_{n+1}}]\leq 1+\frac{2a_n}{3}\leq\frac{a_n}{3}+\frac{2a_n}{3}=a_n$$

Ако $a_{n+2}\geq\max\{a_n,a_{n+1}\}=a_n$, тогаш горното неравенство преминува во равенство и тогаш $a_{n+1}=a_n=3$, што противречи на $a_{n+1}\neq a_n$. Случајот $a_{n+1}=\max\{a_n,a_{n+1}\}$ се разгледува аналогно. ■

Лема 3. Постои природен број k, за кој $a_k=a_{k+1}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека никогаш нема равенство. Од лема 2 следува

$$a_{n+1}<\max\{a_n,a_{n+1}\} \text{ и } a_{n+2}<\max\{a_n,a_{n+1}\}.$$

Според тоа,

$$\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}<\max\{a_n,a_{n+1}\}$$

и функцијата $\max\{a_n,a_{n+1}\}$ моното опажа, што не е можно во множеството природни броеви. Со тоа лемата е докажана. ■

Од лема 3 следува, дека постои природен број k таков што $a_k=a_{k+1}$. Тоа значи дека $a_{k+2}=4$ и ако $a_k=a_{k+1}\in\{3,4\}$, тогаш $a_{k+3}\in\{3,4\}$ и тврдењето е докажано. Ако $a_k=a_{k+1}>4$, тогаш постои природен број m, таков што $a_{k+m+1}=a_{k+m}$. Сега, од доказот на Лема 3 следува:

Прв случај. Ако m е парен, тогаш

$$a_{k+1}=\max\{a_{k+1},a_{k+2}=4\}>\max\{a_{k+3},a_{k+4}\}>...$$
$$>\max\{a_{k+m},a_{k+m+1}\}=a_{k+m}.$$

Прв случај. Ако m е непарен, тогаш

$$a_{k+1}=\max\{a_{k+1},a_{k+2}=4\}>\max\{a_{k+3},a_{k+4}\}>...$$
$$>\max\{a_{k+m-1},a_{k+m}\}\geq a_{k+m}.$$

Според тоа, ако два еднакви соседни членови на низата се поголеми од 4, тогаш постојат два последователни членови на низата со помала вредност. Така можеме да избереме два последователни членови на низата помали или еднакви на 4. Со тоа доказот е завршен, бидејќи следните два члена се 4, 3 или 3, 4.

58. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека 2^n не е делител на $n!$.

Решение. Нека $s\geq 0$ е цел број таков, што $2^s\leq n<2^{s+1}$. Тогаш бројот 2 учествува во каноничното разложување на $n!$ со степен

$$a=[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2^2}]+...+[\tfrac{n}{2^s}]\leq\tfrac{n}{2}+\tfrac{n}{2^2}+...+\tfrac{n}{2^s}$$
$$=\tfrac{n}{2}(1+\tfrac{1}{2}+...+\tfrac{1}{2^{s-1}})=n-\tfrac{n}{2^s}\leq n-1.$$

Според тоа, 2^n не е делител на $n!$. Освен тоа, од решението следува дека 2^{n-1} е делител на $n!$ само кога $n=2^s$, за некој цел број $s\geq 0$.

59. Кој е степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на $p^n!$?

Решение. Бараниот степенов показател е

$$\frac{p^n}{p}+\frac{p^n}{p^2}+...+\frac{p^n}{p^{n-1}}+\frac{p^n}{p^n}+\frac{p^n}{p^{n+1}}+...=p^{n-1}+p^{n-2}+...+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}.$$

60. За природниот број n ќе велиме дека навидум е прост ако n е сложен број, но не е делив со 2, 3 или 5. Трите најмали навидум прости броеви се 49, 77 и 91. Постојат 168 прости броеви кои се помали од 1000. Колку навидум прости броеви се помали од 1000?

Решение. Броеви помали од 1000 кои се деливи со

- 2 има $[\frac{999}{2}]=499$,
- 3 има $[\frac{999}{3}]=333$,
- 5 има $[\frac{999}{5}]=199$,
- 6 има $[\frac{999}{6}]=166$,

- 10 има $[\frac{999}{10}]=99$,
- 15 има $[\frac{999}{15}]=66$,
- 30 има $[\frac{999}{30}]=33$.

Според тоа, вкупниот број броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 2 или со 3 или со 5 е еднаков на

$$499+333+199-166-99-66+33=733.$$

Преостануваат $999-733=266$ броеви, Меѓу нив се сите прости броеви помали од 1000, освен броевите 2, 3 и 5, и тоа се $168-3=165$ прости броеви. Меѓу преостанатите броеви е и бројот 1 кој е ниту прост ниту сложен број. Затоа вкупниот број навидум прости броеви помали од 100 е еднаков на $266-165-1=100$.

61. На колку нули завршува бројот:

а) $1993!$ б) 2016!

Решение. а) Ако N е бараниот број нули, тогаш е $1993!=10^N M, M$ е природен број кој не е делив со 10. Бидејќи $10=2\cdot 5$ добиваме $N=\min\{N_1,N_2\}$, каде

$$N_1=[\frac{1993}{5}]+[\frac{1993}{5^2}]+[\frac{1993}{5^5}]+[\frac{1993}{5^4}]+[\frac{1993}{5^5}]+...=495$$

и

$$N_1=[\frac{1993}{2}]+[\frac{1993}{2^2}]+[\frac{1993}{2^3}]+...+[\frac{1993}{2^{10}}]+[\frac{1993}{2^{11}}]+...=1986.$$

Значи, $N=495$, т.е. бројот $1993!$ завршува на 495 нули.

б) На потполно аналоген начин се добива дека бројот 2016! Завршува на 502 нули.

62. Ако $a+b+...+m\le n; n,a,b,...,m\in\mathbb{N}$, тогаш $\frac{n!}{a!b!...m!}\in\mathbb{N}$. Докажи!

Решение. Простиот број p учествува во каноничното разложување на броевите $n!,a!,b!,...,m!$ соодветно со степени

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+...+[\frac{n}{p^k}]+...$$
$$[\frac{a}{p}]+[\frac{a}{p^2}]+...+[\frac{a}{p^k}]+...$$
$$[\frac{b}{p}]+[\frac{b}{p^2}]+...+[\frac{b}{p^k}]+...$$
....
$$[\frac{m}{p}]+[\frac{m}{p^2}]+...+[\frac{m}{p^k}]+...$$

Според тоа, ако p е прост број, тогаш за степените во каноничните разложувања на именителот и броителот на дропката $\frac{n!}{a!b!...m!}$ важи

$$([\tfrac{a}{p}]+[\tfrac{a}{p^2}]+\ldots)+([\tfrac{b}{p}]+[\tfrac{b}{p^2}]+\ldots)+\ldots+([\tfrac{m}{p}]+[\tfrac{m}{p^2}]+\ldots)=$$

$$=([\tfrac{a}{p}]+[\tfrac{b}{p}]+\ldots+[\tfrac{m}{p}])+([\tfrac{a}{p^2}]+[\tfrac{b}{p^2}]+\ldots+[\tfrac{m}{p^2}])+\ldots$$

$$\le([\tfrac{a}{p}+\tfrac{b}{p}+\ldots+\tfrac{m}{p}])+([\tfrac{a}{p^2}+\tfrac{b}{p^2}+\ldots+\tfrac{m}{p^2}])+\ldots$$

$$\le[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+\ldots$$

т.е. степенот на простиот број p во каноничното разложување на именителот е помал или еднаков од степенот на простиот број p во каноничното разложување на броителот. Ова важи за секој прост број, па затоа

$$\frac{n!}{a!b!\ldots m!}=\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_t^{\alpha_t}}{p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_t^{\beta_t}}=p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}\ldots p_t^{\alpha_t-\beta_t},\quad 0\le\beta_i\le\alpha_i,\text{ за } i=1,2,\ldots,t,$$

т.е. $\frac{n!}{a!b!\ldots m!}\in\mathbb{N}$.

63. Докажи дека $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}\in\mathbb{N}$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ќе докажеме дека максималниот степен на произволен прост број p со кој е делив броителот на дадената дропка, не е помал од максималниот степен на бројот p со кој е делив именителот на дадената дропка.

Нека p е прост број. Степенот на бројот p во броителот на дропката е

$$s=[\tfrac{2n}{p}]+[\tfrac{2n}{p^2}]+[\tfrac{2n}{p^3}]+\ldots+[\tfrac{2m}{p}]+[\tfrac{2m}{p^2}]+[\tfrac{2m}{p^3}]+\ldots,$$

а степенот на бројот p во именителот е

$$t=[\tfrac{n}{p}]+[\tfrac{n}{p^2}]+[\tfrac{n}{p^3}]+\ldots+[\tfrac{m}{p}]+[\tfrac{m}{p^2}]+[\tfrac{m}{p^3}]+\ldots+[\tfrac{m+n}{p}]+[\tfrac{m+n}{p^2}]+[\tfrac{m+n}{p^3}]+\ldots.$$

Сега тврдењето на задачата е последица од фактот дека за секои $a,b\in\mathbb{R}^+$ важи $[2a]+[2b]\ge[a]+[b]+[a+b]$ и ако земеме за $a=\frac{n}{p^k}$, $b=\frac{m}{p^k}$, $k=1,2,3,\ldots$.

64. Определи го n така што $n!$ завршува точно на 290 нули.

Решение. Воведуваме ознака $e_p(n)=\sum_{i\ge1}[\frac{n}{p^i}]$, каде p е прост број. Според теоремата на Лежандр $e_p(n)$ е степенот на простиот број p во факторизацијата на n. Имаме

$$290=[\tfrac{n}{5}]+[\tfrac{n}{5^2}]+[\tfrac{n}{5^3}]+\ldots=e_5(n)$$

што грубо разгледувано е геометриски ред чија сума приближно е $\frac{\frac{n}{5}}{1-\frac{1}{5}}\approx290$, односно приближно $n=1160$. Со проверка добиваме дека $e_5(1160)=288$.

Додавајќи уште 10 на n добиваме дека $e_5(1170)=290$, па бараниот број е $n=1170$.

65. Докажи, дека $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ е природен број, за секои $a,b\in\mathbb{N}$.

Решение. Доволно е да докажеме дека за секој прост број p важи

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{ab}{p^i}]-\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{a}{p^i}]-a\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{b}{p^i}]\geq 0.$$

Нека r и s се такви природни броеви што $p^r\leq a<p^{r+1}$, $p^s\leq b<p^{s+1}$. Тогаш, имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{ab}{p^i}]-\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{a}{p^i}]-a\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{b}{p^i}]&=\sum_{i=1}^{s}[\frac{ab}{p^i}]+\sum_{i=s+1}^{r+s}[\frac{ab}{p^i}]+\sum_{i=r+s+1}^{\infty}[\frac{ab}{p^i}]-\sum_{i=1}^{r}[\frac{a}{p^i}]-\sum_{i=1}^{s}a[\frac{b}{p^i}]\\ &=\sum_{i=1}^{s}([\frac{ab}{p^i}]-a[\frac{b}{p^i}])+\sum_{i=1}^{r}([\frac{ab}{p^{s+i}}]-[\frac{a}{p^i}])+\sum_{i=r+s+1}^{\infty}[\frac{ab}{p^i}]\\ &\geq\sum_{i=1}^{s}([\frac{ab}{p^i}]-a[\frac{b}{p^i}])+\sum_{i=1}^{r}([\frac{ap^s}{p^{s+i}}]-[\frac{a}{p^i}])\\ &=\sum_{i=1}^{s}([\frac{ab}{p^i}]-a[\frac{b}{p^i}])\geq\sum_{i=1}^{s}([\frac{ab}{p^i}]-[\frac{ab}{p^i}])=0,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

66. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека $(n!)^{(n-1)!}$ е делител на $(n!)!$.

Решение. Нека a и b се степеновите показатели на највисоките степени на произволен прост број p кои соодветно ги делат $(n!)^{(n-1)!}$ и $(n!)!$. Тогаш

$$b=[\frac{n!}{p}]+[\frac{n!}{p^2}]+...+[\frac{n!}{p^k}]+... \text{ и } a=(n-1)!([\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+...+[\frac{n}{p^k}]+...).$$

Понатаму, за секој природен број k важи

$$[\frac{n!}{p^k}]=[(n-1)!\frac{n}{p^k}]\geq[(n-1)![\frac{n}{p^k}]]=(n-1)![\frac{n}{p^k}].$$

Според тоа, $b\geq a$. Сега од произволноста на простиот број p следува дека $(n!)^{(n-1)!}$ е делител на $(n!)!$.

67. Со $(2m)!!$ го означуваме производот на сите парни броеви помали или еднакви на $2m$, а со $(2m+1)!!$ производот на сите непарни броеви помали или еднакви на $2m+1$, соодветно. Најди го степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на бројот

а) $(2m)!!$ б) $(2m+1)!!$

Решение. а) $(2m)!=2^m m!$, па затоа при $p=2$ бараниот степенов показател е еднаков на $m+\sum_{i=1}^{k}[\frac{m}{2^i}]$, каде, $2^k \le m \le 2^{k+1}$. Ако $p>2$, тогаш степеновиот показател е $\sum_{i=1}^{k}[\frac{m}{p^i}]$, каде $p^k \le m < p^{k+1}$.

б) Од $(2m+1)!!=\frac{(2m+1)!}{(2m)!!}=\frac{(2m+1)!}{2^m m!}$ следува дека за степеновиот показател е $\sum_{i=1}^{k}[\frac{2m+1}{p^i}]-\sum_{i=1}^{k}[\frac{m}{p^i}]$, каде $p^k \le 2m+1 < p^{k+1}$, а за $p=2$ тој е еднаков на 0.

68. Пресметај го збирот

$$S_n=\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}[\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}].$$

Решение. Функцијата $f:[1,n]\to[1,\frac{n(n+1)}{2}]$ определена со $f(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ е монотона и биективна. Понатаму, $n(G_f)=n$ и $f^{-1}(x)=\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}$, па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}[\frac{k(k+1)}{2}]+\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}[\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}]-n=\frac{n^2(n+1)}{2},$$

па затоа

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}[\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}]-n&=\frac{n^2(n+1)}{2}+n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\\&=\frac{n^2(n+1)}{2}+n-\frac{n(n+1)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\&=\frac{n(n^2+2)}{3}.\end{aligned}$$

69. Пресметај ги збировите

а) $\sum_{k=1}^{n^2+2n}k[\sqrt{k}]$, б) $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-[\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$.

Решение. а) Имаме,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2+2n}k[\sqrt{k}]&=\sum_{k=1}^{n}k(k^2+(k^2+1)+\ldots+(k^2+2k))\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)(2k+1)\\&=\frac{1}{20}n(n+1)(8n^3+27n^2+23n+2).\end{aligned}$$

б) Од неравенствата $m^2+1\le k\le (m+1)^2$ следува $[\sqrt{k-1}]=m$ Освен тоа,

$$\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=1.$$

Значи,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-[\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{n-[\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{n-m}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

70. Докажи, дека

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]=\tfrac{1}{6}(n-1)n(4n+1),\text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Решение. *Прв начин*. Прво да забележиме, дека ако k е природен број, тогаш

$$[\sqrt{k^2}]=[\sqrt{k^2+1}]=...=[\sqrt{k^2+2k}]=k$$

и освен тоа низата $k^2,k^2+1,...,k^2+2k$ содржи $2k+1$ членови. Значи,

$$[\sqrt{k^2}]+[\sqrt{k^2+1}]+...+[\sqrt{k^2+2k}]=k(2k+1).$$

Од тука следува дека

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]&=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{2n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}\\&=\tfrac{1}{6}(n-1)n(4n+1).\end{aligned}$$

Втор начин. Да ја разгледаме функцијата $f:[1,n^2-1]\to[1,\sqrt{n^2-1}]$ определена со $f(x)=\sqrt{x}$. Бидејќи $n(G_f)=n-1$ и $f^{-1}(x)=x^2$, од добиваме

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]+\sum_{k=1}^{n-1}[k^2]-(n-1)=(n-1)(n^2-1),$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}[\sqrt{k}]=(n-1)n^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2=(n-1)n^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1).$$

71. Нека $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот

$$[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+....$$

Решение. *Прв начин.* Ако искористиме дака за секој реален број x важи

$$[x+\tfrac{1}{2}]=[2x]-[x].$$

добиваеме

$$\begin{aligned}[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]+... &= [\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{n}{4}+\tfrac{1}{2}]+...+[\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}]+...\\ &= [n]-[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2}]-[\tfrac{n}{4}]+...+[\tfrac{n}{2^k}]-[\tfrac{n}{2^{k+1}}]+...\\ &= n,\end{aligned}$$

бидејќи почнувајќи од $k=[\log_2 n]+1$ сите собирци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

Втор начин. Нека $n=\overline{x_m x_{m-1}...x_1 x_0}=\sum\limits_{k=0}^{m} 2^i x_i$, $x_i \in \{0.1\}$ е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]=[\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}]=[\sum_{k=0}^{m} 2^{i-k-1}x_i+2^{-1}],$$

па затоа важи

$$[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}]=\begin{cases}\overline{x_m x_m....x_{k+1}}+x_k, & k<m\\ x_m, & k=m\\ 0, & k>m\end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}] &= (\overline{x_m x_{m-1}...x_1}+x_0)+(\overline{x_m x_{m-1}...x_2}+x_1)+...+(x_m+x_{m-1})+x_m\\ &= x_m(2^{m-1}+...+2^0+1)+x_{m-1}(2^{m-2}+...+2^0+1)+...+x_1(2^0+1)+x_0\\ &= 2^m x_m+2^{m-1}x_{m-1}+...+2x_1+x_0=n.\end{aligned}$$

72. Нека $0 \le x < 1$. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k}=1-2x.$$

Решение. Бројот x ќе го запишеме во бинарен броен систем. Нека

$$x=\sum_{k\ge 1}\frac{a_k}{2^k},\ a_k \in \{0,1\},\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Тогаш,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{a_k}}{2^k}.$$

Ако $a_k=1$, тогаш $\frac{(-1)^{a_k}}{2^k}=-\frac{a_k}{2^k}$, а ако $a_k=0$ тогаш $\frac{(-1)^{a_k}}{2^k}=-\frac{a_k}{2^k}+\frac{1}{2^k}$.

Според тоа,

$$\frac{(-1)^{a_k}}{2^k}=-\frac{a_k}{2^k}+(1-a_k)\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^k}-2\frac{a_k}{2^k}$$

Значи,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{a_k}}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}=1-2x$$

73. Докажи дека за секој природен број k бројот

$$A=(k^2)!\prod_{j=0}^{k-1}\frac{j!}{(j+k)!}$$

е природен број.

Решение. Доволно е да докажеме дека степенот на секој прост број p во каноничниот запис на $(k^2)!$ е поголем од степенот на p во каноничниот запис на $\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(j+k)!}{j!}$. Како што знаеме степенот на секој прост број p во каноничниот запис на $n!$ е еднаков на $\sum_{i\geq 1}[\frac{n}{p^i}]$. Затоа е доволно да докажеме дека за секој прост број p важи

$$[\frac{k^2}{p}]\geq\sum_{j=0}^{k-1}([\frac{j+k}{p}]-[\frac{j}{p}]).$$

Бидејќи на двете страни во последното неравенство имаме цели броеви, тоа е еквивалентно со неравенството

$$[\frac{k^2}{p}]>-1+\sum_{j=0}^{k-1}([\frac{j+k}{p}]-[\frac{j}{p}]).$$

Со $\{x\}$ да го означиме дробниот дел на x, т.е. $\{x\}=x-[x]$. Така последното неравенство се сведува на неравенството

$$\{\frac{k^2}{p}\}+\sum_{j=0}^{k-1}\{\frac{j}{p}\}<1+\sum_{j=0}^{k-1}\{\frac{j+k}{p}\}. \tag{1}$$

Сега, бидејќи збирот на остатоците на $0,1,...,k-1$ при делење со p е помал или еднаков на збирот на остатоците на $k,k+1,...,2k-1$ при делење со p добиваме

$$\sum_{j=0}^{k-1}\{\frac{j}{p}\}\leq\sum_{j=0}^{k-1}\{\frac{j+k}{p}\}.$$

Од друга страна $\{\frac{k^2}{p}\}<1$ и ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1).

74. Определи го збирот на сите природни броеви помали или еднакви на даден природен број N, кои завршуваат на барем две еднакви цифри, различни од нула.

Упатство. 1) Тие броеви се $a_k=11k+[\frac{k-1}{9}]$

2) Вкупно ги има $n=[\frac{N-[\frac{N}{100}]}{11}]$.

3) Бараниот збир е $s=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{11n(n+1)}{2}+[\frac{n-1}{9}](n-\frac{9}{2}([\frac{n-1}{9}]+1))$.

75. За секој реален број x докажи дека

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+...+\frac{[nx]}{n}\leq[nx]. \tag{1}$$

Решение. Прво ќе го докажеме следново тврдење:

Ако $a_1,a_2,...$ е низа од реални броеви за која важи $a_{i+j}\leq a_i+a_j$ за секои $i,j\in\mathbb{N}$, тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_n}{n}\geq a_n. \tag{2}$$

Доказ. Случаите $n=1$ и $n=2$ се тривијални. Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n\leq k$, каде $k\geq 2$ е природен број, односно

$$a_1\geq a_1$$

$$a_1+\frac{a_2}{2}\geq a_2$$

....

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}\geq a_k$$

Овие неравенства ги собираме и добиваме

$$ka_1+(k-1)\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_k}{k}\geq a_1+a_2+...+a_k.$$

Сега, ако на двете страни на неравенството додадеме $a_1+a_2+...+a_k$ и поделиме со $k+1$ добиваме

$$(k+1)(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k})\geq(a_1+a_k)+(a_2+a_{k-1})+...+(a_k+a_1)\geq ka_{k+1},$$

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}\geq\frac{ka_{k+1}}{k+1},$$

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geq a_{k+1},$$

од каде според принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Сега неравенството (1) следува од неравенството (2) за $a_k = -[kx]$.

76. Определи ги сите природни броеви a и b такви што

$$[\tfrac{a^2}{b}]+[\tfrac{b^2}{a}]=[\tfrac{a^2+b^2}{ab}]+ab. \qquad (*)$$

Решение. Ако $a=b$, тогаш $2a=2+a^2$ и оваа равенка нема решение во множеството природни броеви. Значи $a\neq b$ и без ограничување на општоста можеме да земеме $a>b$.

Ако $b=1$, тогаш од $a>b$ следува $a^2=2a$, т.е. $(2,1)$ е едно решение на равенката (*).

Сега нека $b>1$. Заменуваме $[\frac{a^2}{b}]=m$ и $[\frac{b^2}{a}]=n$. Притоа важи $\frac{a^2}{b}\geq m$ и $\frac{b^2}{a}\geq n$, од каде што следува $ab\geq mn$, а како $a^2+b^2\geq 2ab$, добиваме $[\frac{a^2+b^2}{ab}]\geq 2$. Сега од (*) следува неравенката $m+n\geq 2+mn$, која е еквивалентна со неравенката

$$(m-1)(n-1)\leq -1. \qquad (1)$$

Од $a>b$ следува дека $m=[\frac{a^2}{b}]\geq 1$, па затоа од (1) следува $n=0$. Сега од $[\frac{b^2}{a}]=n=0$ добиваме $b^2<a$, т.е. постои природен број $c>0$ таков што $a=b^2+c$. Со замена во (*) последователно добиваме

$$[\tfrac{a^2}{b}]+[\tfrac{b^2}{a}]=[\tfrac{a^2+b^2}{ab}]+ab$$

$$[\tfrac{b^4+2b^2c+c^2}{b}]+0=[\tfrac{b^4+2b^2c+c^2+b^2}{b(b^2+c)}]+b(b^2+c)$$

$$[\tfrac{b(b^3+2bc)+c^2}{b}]=[\tfrac{b^2(b^2+c)+c^2+b^2(c+1)}{b(b^2+c)}]+b^3+bc$$

$$b^3+2bc+[\tfrac{c^2}{b}]=b+[\tfrac{c^2+b^2(c+1)}{b(b^2+c)}]+b^3+bc$$

$$b(c-1)+[\tfrac{c^2}{b}]=[\tfrac{c^2+b^2(c+1)}{b(b^2+c)}] \qquad (2)$$

За $c=1$ имаме

$$(b^2+c)b=(b^2+1)b=b^3+b\geq 2b^2+b>2b^2+1=b^2(c+1)+c^2,$$

па затоа $\frac{c^2+b^2(c+1)}{b(b^2+c)}<1$ односно

$$b(c-1)+[\tfrac{c^2}{b}]=0+[\tfrac{1}{b}]=0+0=0=[\tfrac{c^2+b^2(c+1)}{b(b^2+c)}].$$

Според тоа, $a=b^2+1$, односно $(a,b)=(n^2+1,n)$ и $(a,b)=(n,n^2+1)$ се решенија на (*).

Ако $c>1$, тогаш од (2) добиваме

$$\frac{c^2+b^2(c+1}{b(b^2+c)} \geq [\frac{c^2+b^2(c+1}{b(b^2+c)}] = b(c-1)+[\frac{c^2}{b}] \geq b(c-1),$$

т.е.

$$c^2(b^2-1)+b^2(c(b^2-2))-(b^2+1) \leq 0. \qquad (3)$$

Имаме

$$\begin{aligned} c^2(b^2-1)+b^2(c(b^2-2)-(b^2+1)) &\geq 4(b^2-1)+b^2(2b^2-4-b^2-1) \\ &= 4(b^2-1)+b^2(b^2-5) \\ &= b^4-b^2-4. \end{aligned}$$

Бидејќи $b^2 \geq 4$ добиваме

$$c^2(b^2-1)+b^2(c(b^2-2)-(b^2+1)) \geq b^4-b^2-4 \geq 4b^2-b^2-4 = 3b^2-4 > 8 > 0,$$

што значи дека неравенството (3) е точно ако и само ако $b=2$. Во тој случај од (3) добиваме $3c^2+8c-20 \leq 0$, што не е точно за $c \geq 2$.

Според тоа, $(a,b)=(n^2+1,n)$ и $(a,b)=(n,n^2+1)$, $n \in \mathbb{N}$ се единствени решенија на (*).

77. Нека m е природен број и A_m е степенот на бројот 2 во каноничното разложување на $m!$. Докажи, дека во низата со општ член $a_n=[\frac{m}{2^n}]$ има точно $2[\frac{m}{2}]-A_m$ непарни членови.

Решение. Јасно

$$a_n-2[\frac{a_n}{2}] = \begin{cases} 1, \text{ кога } a_n \text{ е непарен број} \\ 0, \text{ кога } a_n \text{ е парен број.} \end{cases}$$

Затоа бројот на непарните членови во низата $\{a_n\}$ е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-2[\frac{a_i}{2}]) = [\frac{m}{2}]-[\frac{m}{2^2}]-[\frac{m}{2^3}]-...-[\frac{m}{2^i}]-...$$

и бидејќи

$$A_m=[\frac{m}{2}]+[\frac{m}{2^2}]+[\frac{m}{2^3}]+...+[\frac{m}{2^i}]-...,$$

горниот збир е еднаков на $2[\frac{m}{2}]-A_m$.

78. Докажи дека за секој рационален број α секогаш може да се најде интервал $[c,d] \subset [0,1]$, кој не содржи ниту еден член на низата $a_n=\{\alpha n\}, n=1,2,3,...$.

Решение. Нека $\alpha=\frac{p}{q}$. Тогаш $\{\alpha n\}=\{\frac{pn}{q}\}, n=1,2,3,...$ ги прима вредностите $\frac{i}{q}, i=0,1,2,...,q-1$. Јасно, во секој интервал

$$[\frac{i}{q}-\frac{1}{4q^2},\frac{i}{q}+\frac{1}{4q^2}],\ i=1,2,...,q-1$$

нема точки од низата $a_n=\{\alpha n\}, n=1,2,3,...$.

79. Докажи дека за секој ирационален број α во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$, има барем еден член на низата $a_n=\{\alpha n\}, n=1,2,3,...$.

Решение. Нека $(c,d)\subset(0,1)$ и $d-c=a$. Тогаш, меѓу $N-$те точки $\{\alpha n\}$, $n=1,2,...,N$, каде N е природен број поголем од $\frac{1}{a}$, постојат две точки такви, што растојанието меѓу нив е помало од $\frac{1}{N}$. Нека се тоа точките $\{\alpha k\}$ и $\{\alpha t\}$, $t>k$. Овие точки не се совпаѓаат, бидејќи од равенството $\{\alpha k\}=\{\alpha t\}$ и својствата на функцијата дробен дел следува дека $\alpha=\frac{m}{n}$, каде $m,n\in\mathbb{N}$, т.е. α е рационален број. Тогаш $\{(t-k)\alpha\}<a$ или $\{(t-k)\alpha\}>1-a$. Нека, на пример, $\{(t-k)\alpha\}<a$. Сега, ако земеме $p=[\frac{c}{\{(t-k)\alpha\}}]+1$ добиваме, дека точката $\{(t-k)p\alpha\}$ се наоѓа во интервалот (c,d).

80. Докажи, дека во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$, има барем еден член на низата

$$a_n=\{\lg n\}, n=1,2,3,... . \qquad (1)$$

Решение. Бројот $\lg 2$ е ирационален. Според претходната задача во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$ има барем еден член од низата

$$\{k\lg 2\}, k=1,2,3,... . \qquad (2)$$

Низата (2) е подниза на низата (1), па значи во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$ има барем еден член на низата (1).

81. Докажи, дека во секој интервал $(c,d)\subset(0,1)$ се содржат членови на низата $a_n=\{\sqrt{n}\}, n=1,2,3,..$.

Решение. Тврдењето на задачата непосредно следува од

1) Низата $\sqrt{n}, n=1,2,...$ неограничено расте,
2) При избор на доволно голем број n разликата меѓу два соседни членови на низата може да биде направена произволно мала.

Навистина, од $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ следува 2), а тврдењето 1) е очигледно.

82. Низата $\{a_n\}, n=1,2, ...$ е дефинирана со: n-тиот член на оваа низа е последната цифра на бројот $[\sqrt{10^n}]$, за $n=1,2,...$. Дали оваа низа е периодична?

Решение. Нека $c_0,c_1c_2c_3...$ е декадниот запис на бројот $\sqrt{10}$. Од $\sqrt{10^{2k}}=10^k$ добивме $a_{2k}=0$. Сега, од

$$[\sqrt{10^{2k+1}}]=[10^k\sqrt{10}]$$

следува $a_{2k+1}=c_k$, $k=0,1,2,...$. Според тоа, за низата $\{a_n\}$, $n=1,2,...$ имаме $c_0,0,c_1,0,c_2,...$ и истата не е периодична бидејќи $\sqrt{10}$ е ирационален број , чиј декаден запис е непериодичен децимален број.

83. Докажи дека низата броеви $[n\sqrt{2}]$, $n\in\mathbb{N}$ содржи бесконечно многу степени на бројот 2.

Решение. Тврдењето на задачата може да се искаже и на следниов начин: постојат бесконечно многу природни броеви n за кои постои природен број k таков што

$$2^k\le n\sqrt{2}<2^k+1,$$

т.е.

$$2^{k-1}\sqrt{2}\le n<2^{k-1}\sqrt{2}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но, интервалот $[2^{k-1}\sqrt{2},2^{k-1}\sqrt{2}+\tfrac{1}{\sqrt{2}})$ содржи цел број ако и само ако

$$\{2^{k-1}\sqrt{2}\}>1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека наведените интервали содржат само конечно многу цели броеви. Тогаш постои $k_0\in\mathbb{N}$ таков што за секој $k\ge k_0$ важи

$$\{2^k\sqrt{2}\}\le 1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}<\tfrac{1}{2}.$$

За $i\ge 0$ дефинираме низа реални броеви

$$r_i=\{2^{i+k_0}\sqrt{2}\}.$$

Очигледно, важи:

$$r_{i+1}=\{2r_i\}=\begin{cases}2r_i, & r_i<\tfrac{1}{2},\\ 2r_i-1, & r_i\ge\tfrac{1}{2}.\end{cases}$$

По претпоставка, имаме $r_i<\tfrac{1}{2}$ за секој $i\ge 0$, па затоа $r_{i+1}=2r_i$, од каде следува $r_i=2^i r_0$. Сега имаме $2^i r_0<\tfrac{1}{2}$ за секој $i\ge 0$, што е можно ако и само ако $r_0=0$. Но, $r_0=\{2^{k_0}\sqrt{2}\}$ е ирационален број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

84. Докажи, дека за секој природен број $q \geq 2$ постои реален број α таков што во секој интервал $(c,d) \subset (0,1)$ се содржи барем еден член од низата $a_n = \{\alpha q^n\}, n = 1,2,3,...$.

Решение. Нека k е природен број таков што $q^{-k} < \frac{d-c}{4}$. Тогаш постојат најмалку три природни броеви $a, a+1, a+2$ такви што $\frac{a}{q^k}, \frac{a+1}{q^k}, \frac{a+2}{q^k} \in (c,d)$. Бројот a да го запишеме во броен систем со основа q. Имаме

$$a = \alpha_{k-1}q^{k-1} + \alpha_{k-2}q^{k-2} + ... + \alpha_1 q + \alpha_0,\ 0 \leq \alpha_i < q-1,\ i = 0,1,2,..,k-1.$$

Ќе ги запишеме по ред броевите $0,1,2,...,q-1$. Потоа по нив ќе ги допишеме по ред сите разместувања од $2q$ броеви $\{0,1,2,...,q-1,0,1,2,...,q-1\}$ по 2 броеви, потоа на добиениот слог ќе ги допишеме сите разместувања од $3q$ броеви $\{0,1,2,...,q-1,0,1,2,...,q-1,0,1,2,...,q-1\}$ по 3 броеви итн. Нека притоа добиеме $\{0,1,2,...,q-1,\beta_1,\beta_2,\beta_3,...\}$, каде сите β_i го задоволуваат неравенството $0 \leq \beta_i < q-1$. Ставаме

$$\alpha = \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + ... + \frac{q-1}{q^{q-1}} + \frac{\beta_1}{q^q} + \frac{\beta_2}{q^{q+1}} + \frac{\beta_3}{q^{q+2}} + ...$$

Јасно, во разложувањето на α по степени на q се јавува собирок од видот

$$\frac{\alpha_{k-1}}{q^l} + \frac{\alpha_{k-2}}{q^{l+1}} + ... + \frac{\alpha_0}{q^{l+k-1}} + \frac{0}{q^{l+k}} + ...$$

па затоа

$$\{\alpha q^{l-1}\} = \frac{\alpha_{k-1}}{q} + \frac{\alpha_{k-2}}{q^2} + ... + \frac{\alpha_0}{q^k} + \frac{0}{q^{l+k}} + ...$$

Добиениот број се наоѓа меѓу $\frac{a}{q^k}$ и $\frac{a+1}{q^k}$ и затоа припаѓа на (c,d).

85. Определи ги сите парови природни броеви (k,n) такви што важи

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1}).$$

Решение. Најголемиот цел број r таков што $2^r \mid k!$ е еднаков на

$$[\tfrac{k}{2}] + [\tfrac{k}{2^2}] + [\tfrac{k}{2^3}] + ... < k.$$

Бидејќи бројот $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)...(2^n - 2^{n-1})$ е делив со $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, добиваме $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Според тоа,

$$2^{n^2} > f(n) = k! > (\tfrac{n(n-1)}{2})!.$$

Меѓутоа, за $n \geq 6$ ова неравенство не важи. Навистина, за $n = 6$ имаме $15! > 2^{36}$, додека за $n > 6$ имаме

$$(\frac{n(n-1)}{2})! > 15!\cdot 16^{\frac{n(n-1)}{2}-15} > 2^{36}\cdot 2^{2n(n-1)-60} = 2^{2n^2-2n-24} > 2^{n^2},$$

бидејќи $n^2-2n-24>0$.

Конечно, бидејќи $f(3)=168$, $f(4)=\frac{1}{4}\cdot 8!$ и $31|\, f(5)<31!$, ниту во овие случаи нема решение, па затоа единствени решенија се $(k,n)\in\{(1,1),\{3,2\}$.

86. Даден е прост број $p>3$. Докажи, дека ако постои природен број k, за кој k^2+5 е делив со p, тогаш постојат природни броеви m и n, такви што $p^2=m^2+5n^2$.

Решение. Ќе докажеме, дека ако постојат цели броеви x и y за кои

$$x^2+5y^2 = p, 2p, 3p, 4p \text{ или } 5p,$$

тогаш постојат природни броеви m и n такви што $p^2=m^2+5n^2$.

- Нека $x^2+5y^2=p$. Бидејќи p е прост број, важи $xy\neq 0$ и непосредно се проверува дека $(x^2-5y^2)^2+5(2xy)^2=p^2$.
- Нека $x^2+5y^2=2p$. Бидејќи $p>2$, заклучуваме дека x и y се непарни и тогаш $(\frac{x^2-5y^2}{2})^2+5(xy)^2=p^2$.
- Нека $x^2+5y^2=3p$. Бидејќи $p>3$, заклучуваме дека x и y не се деливи со 3. Ако $x+y$ е делив со 3, тогаш $(\frac{x-5y}{3})^2+5(\frac{x+y}{3})^2=2p$. Ако $x-y$ е делив со 3, тогаш $(\frac{x+5y}{3})^2+5(\frac{x-y}{3})^2=2p$. Според тоа, случајот се сведува на претходниот.
- Нека $x^2+5y^2=4p$, тогаш x и y се парни. Според тоа, важи $(\frac{x}{2})^2+5(\frac{y}{2})^2=p$ и случајот се сведува на $r^2+5s^2=p$.
- Нека $x^2+5y^2=5p$. Тогаш $5|x$ и $y^2+5(\frac{x}{5})^2=p$ и случајот се сведува на $r^2+5s^2=p$.

Од претходно докажаното следува, дека можеме да сметаме дека $k^2+5=tp$, за $t\geq 6$, бидејќи во спротивен случај $x=k, y=1$ дава $x^2+5y^2=tp$, за $t\leq 5$.

Да го разгледаме множеството

$$A=\{a_1+a_2k\,|\,0\leq a_1\leq s,\ 0\leq a_2\leq s\},$$

каде $s=[\sqrt{p}]$. Бројот на елементите на A е еднаков на $(s+1)^2>p$ (од $k^2+5=tp,$ за $t\geq 6$, лесно следува, дека $k>s$ и тогаш во A нема еднакви елементи) што значи дека, разликата на два елементи на A се дели со p. Според тоа, постојат x и y, такви што $|x|\le s, |y|\le s, x+yk\ne 0$ и p е делител на $x+yk$. Тогаш p е делител на

$$(x+yk)(x-yk)=x^2+5y^2-y^2(k^2+5)$$

и бидејќи p е делител на k^2+5, добиваме дека p е делител на x^2+5y^2. Но, $0<x^2+5y^2\le 6s^2<6p$, т.е. $x^2+5y^2=p, 2p, 3p, 4p$ или $5p$.

87. Нека $p>5$ е прост број и $X=\{p-n^2 \mid n\in\mathbb{N}, n^2<p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y такви што $x\ne 1$ и $x\,|\,y$.

Решение. Нека $m=[\sqrt{p}]$, $x=p-m^2$ и $y=p-|m-x|^2$. Тогаш

$$y=m^2+x-(m-x)^2=x(2m+1-x),$$

па затоа $x\,|\,y$. Освен тоа, од $x+m^2=p<(m+1)^2$ следува дека $x<2m+1$, т.е. $y>0$. Исто така, $m\ne x$ бидејќи $p\ne m^2$. Освен тоа, $y\ne x$, бидејќи во спротивно $x=0$ или $x=2m$, од каде следува $p=m^2$ или $p=m(m+2)$, т.е. $m=1$ и $p=3$. Од досега изнесеното следува дека $x,y\in X$ и $x\,|\,y$. Ако $x\ne 1$, тогаш задачата е решена. За $x=1$ следува дека m е парен број и затоа $2m=p-(m-1)^2$ е делител на $m^2=p-1^2$. Останува да забележиме дека $2m<m^2$, бидејќи во спротивно $m=2$ и $p=1+2^2=5$.

88. Докажи, дека за секој реален број $\alpha>0$ постојат бесконечно многу природни броеви n, такви што $n^2+1\,|\,[\alpha n]$.

Решение. Нека $n=2k^2$. Тогаш

$$n^2+1=4k^4+1=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1).$$

Ставаме

$$P(k)=2k^2+2k+1 \text{ и } Q(k)=2k^2-2k+1.$$

Бидејќи полиномите P и Q неограничено растат со нарасувањето на k, постои цел број c, за кој $p=P(c)>\frac{5}{\alpha}u$, $q=Q(c)>\frac{5}{\alpha}$. Освен тоа, за секој цел број l имаме $p\,|\,P(c+lpq)$ и $q\,|\,Q(c+lpq)$. Нека

$$P(c+lpq)=pr,\ Q(c+lpq)=qs \text{ и } k=lpq+c.$$

Тогаш $n^2+1=P(k)Q(k)=pqrs$. Ќе докажеме дека секој од броевите p,q,r и s може да се ограничи од горе со $\frac{\alpha n}{4}$. Лесно се проверува, дека при $k\ge 5$

важат неравенствата $r=\frac{P(k)}{p}<\frac{P(k)}{\frac{5}{\alpha}}<\frac{\alpha n}{4}$ и $s<\frac{\alpha n}{4}$. Бидејќи p и q зависат само од c, а n зависи и од l, l е произволен природен број, добиваме дека може да се избере l таков, што $p<\frac{\alpha n}{4}$ и $q<\frac{\alpha n}{4}$.

Да ги разгледаме броевите

$$1,2,...,[\tfrac{\alpha n}{4}],...,2[\tfrac{\alpha n}{4}],...,3[\tfrac{\alpha n}{4}],...,[\alpha n], \text{ каде } \alpha n\geq 4[\tfrac{\alpha n}{4}].$$

Меѓу овие броеви има 4 различни, кои се делат со p,q,r,s. Конечно, конструиравме бесконечно множество од природни броеви n, за кои $n^2+1|[\alpha n]$, за секој $\alpha>0$.

89. Нека a,b и c се такви реални броеви, што $[an]+[bn]=[cn]$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека барем еден од броевите a и b е цел број.

Решение. Ќе докажеме дека $a+b=c$. Од неравенството $0\leq an-[an]<1$ следува $|\frac{[an]}{n}-a|<\frac{1}{n}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[an]}{n}=a.$ Ако во равенството $\frac{[an]}{n}+\frac{[bn]}{n}=\frac{[cn]}{n}$ земеме $n\to\infty$ добиваме $a+b=c$.

Ставаме $\alpha=a-[a], \beta=b-[b]$, каде $0\leq\alpha<1, 0\leq\beta<1$ и добиваме

$$[an]+[bn]=[([a]+\alpha)n]+[([b]+\beta)n]=[a]n+[b]n+[\alpha n]+[\beta n].$$

Од друга страна,

$$[(a+b)n]=[a]n+[b]n+[(\alpha+\beta)n].$$

Значи, задачата е еквивалентна на следната задача: Нека a, $0\leq a<1$ и $b,$ $0\leq b<1$ се реални броеви такви што $[an]+[bn]=[(a+b)n]$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека барем еден од броевите a и b е еднаков на нула.

Да претпоставиме дека $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Ќе докажеме, дека постои таков n, за кој равенството $[an]+[bn]=[(a+b)n]$ не важи. За таа цел да претпоставиме дека $a+b<1$, бидејќи во спротивно равенството ќе биде нарушено при $n=1$.

Нека a и b се рационални броеви. Тогаш постојат цели броеви A, B и N, такви што $0<A<N;\ 0<B<N$ и $a=\frac{A}{N}, b=\frac{B}{N}$. Имаме,

$$[(N-1)a]=[Na-a]=[A-a]=A-1,\ [(N-1)b]=B-1 \text{ и}$$

$$[(N-1)(a+b)]=A+B-1,$$

што противречи на условот на задачата.

Нека сега барем еден од броевите a и b е ирационален и нека тоа е бројот a. Јасно, постои $k\in\mathbb{N}$ таков што $a+kb<1$ и $a+(k+1)b\geq 1$. Лесно се гледа дека постојат $m,n\in\mathbb{N}$ такви што $a+kb<na-ma<1$. Притоа важи $m=[an]$, т.е. $a+kb<an+[an]<1$. Нека сега $nb-[bn]\geq b$. Тогаш,

$$[(a+b)n]=[an]+[bn]+1,$$

што не е можно. Ако $nb-[bn]<b$, тогаш $-b\le(n-1)b-[bn]<b$ што покажува дека

$$[b(n-1)]=[bn]-1,\text{ т.е. } 1-b\le(n-1)b-[b(n-1)]<1.$$

Од друга страна, $kb<(n-1)a-[an]<1-a$, од што добиваме $[(n-1)a]=[an]$. Значи,

$$(n-1)a+(n-1)b-[(n-1)a]-[(n-1)b]>1-b+kb=1+(k-1)b\ge1,$$

што повторно е противречност.

90. Нека a е природен број и нека α_a е најголемиот непарен делител на a. Ставаме $s_b=\sum\limits_{a=1}^{b}\frac{\alpha_a}{a}$. Докажи, дека низата $\{\frac{s_b}{b}\}$ е конвергетна и одреди ја нејзината граница.

Решение. Бидејќи α_a е најголемиот непарен делител на a, добиваме $\frac{\alpha_a}{a}=\frac{1}{2^{n_a}}$, за некој природен број n_a. Според тоа,

$$s_b=\sum_{a=1}^{b}\frac{\alpha_a}{a}=\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{2^{n_a}}$$

Меѓу броевите $1,2,...,b$ има точно $b-[\frac{b}{2}]$ непарни; бројот на оние кои се делат со 2, но не се делат со 4 е $[\frac{b}{2}]-[\frac{b}{4}]$ итн.

Тогаш,

$$\begin{aligned}s_b&=1(b-[\tfrac{b}{2}])+\tfrac{1}{2^1}([\tfrac{b}{2}]-[\tfrac{b}{4}])+\ldots+\tfrac{1}{2^k}([\tfrac{b}{2^k}]-[\tfrac{b}{2^{k+1}}])+...\\&=b-\tfrac{1}{2^1}[\tfrac{b}{2}]-\tfrac{1}{2^2}[\tfrac{b}{2}]-...-\tfrac{1}{2^k}[\tfrac{b}{2^k}]-...\end{aligned}$$

Но, $\frac{b}{2^k}-1\le[\frac{b}{2^k}]\le\frac{b}{2^k}$, за $k=1,2,\ ...$ така што

$$b-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{b}{2^k}\le s_b\le b-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}(\frac{b}{2^k}-1)$$

Од овде добиваме дека

$$b-\tfrac{b}{3}\le s_b\le b-\tfrac{b}{3}+1,\text{ т.е. } \tfrac{2}{3}\le\tfrac{s_b}{b}\le\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{b}.$$

Конечно,

$$\lim_{b\to\infty}\frac{s_b}{b}=\frac{2}{3}.$$

91. Докажи, дека за секој природен број n бројот $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ е делив со 10^n.

Решение. Ги разгледуваме броевите

$$a_m = (5+\sqrt{35})^m + (5-\sqrt{35})^m .$$

Тие броеви ја задоволуваат рекурентната формула

$$a_{m+2} = 10a_{m+1} + 10a_m .$$

Бидејќи, $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, со индукција лесно се добива дека за секој $m \in \mathbb{N}$, броевите a_{2m-1} и a_{2m} се деливи со 10^m. Бидејќи, $-1 < 5-\sqrt{35} < 0$, за непарен m важи

$$-1 < (5-\sqrt{35})^m < 0,$$

од каде добиваме

$$[(5+\sqrt{35})^m] = a_m .$$

7. МУЛТИПЛИКАТИВНИ ФУНКЦИИ

1. Нека $\delta(n)$ е производот на различните природни делители на природниот број n, а $\tau(n)$ е нивниот број. Докажи дека $\delta(n)=n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

Решение. Ако $d_1,d_2,...,d_s$ се сите делители на бројот, тогаш $\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},...,\frac{n}{d_s}$ се сите делители на бројот n земени во некој друг редослед. Затоа,

$$d_1d_2...d_s=\frac{n}{d_1}\frac{n}{d_2}...\frac{n}{d_s},$$

од каде добиваме $(d_1d_2...d_s)^2=n^s$, што значи $\delta(n)^2=n^{\tau(n)}$, т.е. $\delta(n)=n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

2. Нека $\delta(n)$ е производот на различните природни делители на природниот број n. Ако $\delta(n)=\delta(m)$, тогаш $m=n$. Докажи!

Решение. Според претходната задача имаме

$$n^{\tau(n)}=\delta(n)^2=\delta(m)^2=m^{\tau(m)}.$$

Според тоа, m и n имаат едни и исти прости делители. Ако простиот број p учествува со степени α и β соодветно во каноничните разложувања на m и n, тогаш $\alpha\tau(m)=\beta\tau(n)$. Според тоа, дропката $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\tau(n)}{\tau(m)}$ не зависи од α и β и ако таа е различна од 1, ќе добиеме противречност. Според тоа, за секој прост делител p на m и n важи $\alpha=\beta$, односно $m=n$.

3. Нека

$$\lambda(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ (-1)^m, & n>1\end{cases}$$

каде m е бројот на простите делители на n, при што се броени повеќекратните појавувања на секој прост делител. Докажи дека $\lambda(n)$ е мултипликативна функција.

Решение. Нека n има k прости делиотели, а n има s прости делители. Тогаш mn има $k+s$ прости делители, па затоа

$$\lambda(mn)=(-1)^{k+s}=(-1)^k(-1)^s=\lambda(m)\lambda(n),$$

што значи дека функцијата $\lambda(n)$ е мултипликативна.

4. Нека
$$\pi(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број}\\ \log p, & \text{ако } n=p^s>1 \text{ е степен на прост број.}\end{cases}$$
Докажи дека функцијата $\pi(n)$ не е мултипликативна.

Решение. Функцијата не е мултипликативна бидејќи $\pi(1)=0\neq 1$. Меѓутоа, дека функцијата не е мултипликативна следувца и од $m=p^s>1$, $n=q^r>1$, па затоа
$$\pi(mn)=\pi(p^r q^s)=0\neq \log p\cdot\log q=\pi(m)\pi(n)\ .$$

5. Докажи дека за секој природен број n точно е равенството
$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & \text{ако } n \text{ е точен квадрат,}\\ (-1)^m, & \text{ако } n \text{ не е точен квадрат.}\end{cases}$$

Решение. Функцијата $\lambda(n)$ е мултипликативна. Ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на n и $F(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)$ е функцијата сума на $\lambda(n)$, тогаш
$$F(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda(p_i)+...+\lambda(p_i^{a_i}))\ . \tag{1}$$
Сега, тврдењето на задачата следува од фактот дека ако n е точен квадрат, тогаш броевите $a_i, i=1,2,...,k$ се парни, што значи дека
$$1+\lambda(p_i)+...+\lambda(p_i^{a_i})=1 \text{ за } i=1,2,...,k,$$
па затоа $F(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)=1$, а ако n не е точен квадрат, тогаш во случај кога a_i е парен број имаме $1+\lambda(p_i)+...+\lambda(p_i^{a_i})=1=(-1)^{a_i}$, а во случај кога a_i е непарен број имаме $1+\lambda(p_i)+...+\lambda(p_i^{a_i})=-1=(-1)^{a_i}$, па затоа
$$F(n)=\prod_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}a_i}=(-1)^m\ .$$

6. Докажи дека за секој природен број n точно е равенството
$$\sum_{d|n}\pi(d)=\log n\ .$$

Решение. Функцијата $\pi(n)$ не е мултипликативна, па затоа не можеме да ја примениме формулата за функцијата сума. Меѓутоа, ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$, тогаш бидејќи ако делителот d има два или повеќе различни прости множители имаме $\pi(d)=0$, добиваме

$$\sum_{d|n}\pi(d)=\sum_{i=1}^{k}(\pi(p_i)+\pi(p_i^2)+...+\pi(p_i^{a_i}))=\sum_{i=1}^{k}a_i\log p_i=\log\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i}=\log n\,.$$

7. Нека n е природен број. За секој s со $\tau_s(n)$ го означуваме бројот на решенијата во множеството природни броеви на равенката $x_1x_2...x_s=n$. Докажи9 дека

а) $\tau_1(n)=1$,

б) $\tau_s(n)=\sum_{d|n}\tau_{s-1}(d)$,

в) ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на n, тогаш

$$\tau_s(n)=\binom{a_1+s-1}{a_1}\binom{a_2+s-1}{a_2}...\binom{a_k+s-1}{a_k}\,. \qquad (1)$$

Решение. а) Јасно, во множеството природни броеви равенката $x_1=n$ има едно и единствено решение, па затоа $\tau_1(n)=1$

б) Ако $d\,|\,n$, тогаш на секое решение $(x_1,...,x_{s-1},d)$ на равенката $x_1...x_s=n$ еднозначно му соодветствува решение $(x_1,...,x_{s-1})$ на равенката $x_1...x_{s-1}=\frac{n}{d}$ и обратно. Затоа

$$\tau_s(n)=\sum_{d|n}\tau_{s-1}(\tfrac{n}{d})=\sum_{d|n}\tau_{s-1}(d)\,.$$

в) Функцијата $\tau_1(n)=1$ е мултипликативна. Нека претпоставиме дека за $s-1$, $s\geq 2$ функцијата $\tau_{s-1}(n)$ е мултипликативна. Тогаш нејзината функција сума $\tau_s(n)$ е мултипликативна, Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $\tau_s(n)$ е мултипликативна функција за секој $s\in\mathbb{N}$. Понатаму, ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничното претставување на n, тогаш за секој $s\geq 2$ точна е формулата за функцијата сума

$$\tau_s(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+\tau_{s-1}(p_i)+...+\tau_{s-1}(p_i^{a_i}))\,,$$

од каде што следува формулата (1). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. а) Ако g и $f*g$ се мултипликативни функции, тогаш и f е мултипликативна функција. Докажи!

б) Ако g е мултипликативна функција, тогаш и нејзината конволуциска инверзија е мултипликативна функција. Докажи!

Решение. а) Нека $h=f*g$ и да претпоставиме дека функцијата f не е мултипликативна. Тогаш постојат m и n, $(m,n)=1$ такви што $f(mn)\neq f(m)f(n)$. Нека m и n ги избереме така што производот mn е најмалиот можен. Ако $mn=1$, тогаш $f(1)\neq f(1)f(1)$, па затоа $f(1)\neq 1$. Но, тогаш $h(1)=f(1)g(1)=f(1)\neq 1$, што противречи на мултипликативноста на h. Ако $mn>1$, тогаш $f(ab)=f(a)f(b)$ за секои $a,b\in\mathbb{N}$ такви што $ab<mn$ и $(a,b)=1$. Според тоа,

$$\begin{aligned}h(mn)&=f(mn)g(1)+\sum_{\substack{a|m,\, b|n\\ ab<mn}} f(ab)g(\tfrac{mn}{ab})=f(mn)+\sum_{\substack{a|m,\, b|n\\ ab<mn}} f(a)f(b)g(\tfrac{m}{a})g(\tfrac{n}{b})\\ &=f(mn)-f(m)f(n)+h(m)h(n).\end{aligned}$$

Бидејќи $f(mn)\neq f(m)f(n)$, добиваме дека $h(mn)\neq h(m)h(n)$, што противречи на мултипликативноста на h.

б) Со g^{-1} да ја означиме конволуциската инверзија на g. Тогаш g и $e=g^{-1}*g=g*g^{-1}$ се мултипликативни, па од а) следува дека g^{-1} е мултипликативна.

9. Докажи, дека аритметичката функција f е потполно мултипликативна ако и само ако $f*f=f\tau$.

Решение. Нека f е потполно мултипликативна. Тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}(f*f)(n)&=\sum_{d|n} f(d)f(\tfrac{n}{d})=\sum_{d|n} f(d\tfrac{n}{d})=\sum_{d|n} f(n)\\ &=f(n)\sum_{d|n}1=f(n)\tau(n)=(f\tau)(n),\end{aligned}$$

па затоа $f*f=f\tau$.

Обратно, нека $f*f=f\tau$. За $n=1$ добиваме $f(1)=0$ или $f(1)=1$. Нека претпоставиме дека $n\geq 2$ и нека $n=p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$ е каноничното разложување на n. Ставаме $\alpha(n)=a_1+...+a_n$. Доволно е да докажеме дека за секој природен број $n\geq 2$ важи

$$f(n)=f(1)f(p_1)^{a_1}...f(p_k)^{a_k}. \qquad (1)$$

Ќе користиме индукција по α. Ако $\alpha(n)=1$, тогаш n е прост број, т.е. $n=p$ и (1) следува од

$$2f(p)=\tau(p)f(p)=f(1)f(p)+f(p)f(1)=2f(1)f(p).$$

Нека претпоставиме дека (1) важи за сите природни броеви n такви што $\alpha(n)\leq k$. Нека n е природен број со $\alpha(n)=k+1$. Тогаш

$$\tau(n)f(n)=2f(1)f(n)+\sum_{\substack{ab=n\\1<a,b<n}} f(a)f(b)\ .$$

Според тоа, $\alpha(a)\leq k, \alpha(b)\leq k$ и од индуктивната претпоставка следува

$$\tau(n)f(n)=2f(1)f(n)+(\tau(n)-2)f^{2}(1)f(p_1)^{a_1}...f(p_k)^{a_k}\ .$$

Но, n не е прост број , па затоа $\tau(n)>2$ и бидејќи $f(1)=0$ или $f(1)=1$ од последното равенство следува дека (1) важи и за $\alpha(n)=k+1$.

8. ФУНКЦИИТЕ $\tau(n)$ И $\sigma(n)$

1. Колку делители има бројот 1200?
Решение. Го разложуваме бројот 1200 на прости множители, т.е. го запишуваме во каноничен вид:
$$1200 = 12 \cdot 10 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2,$$
па затоа
$$\tau(1200) = (4+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$$
Значи, бројот 1200 има вкупно 30 делители.

2. Определи го бројот на паровите природни броеви (m,k) за кои важи
$$20m = k(m-15k).$$
Решение. Јасно, $k \neq 20$, па затоа важи
$$m = \frac{15k^2}{k-20}.$$
Од последното равенство следува $k > 20$ и $k-20$ е делител на $15k^2$. Имаме
$$\frac{15k^2}{k-20} = 15(k+20) + \frac{6000}{k-20},$$
па затоа m е природен број ако и само ако $k > 20$ и $k-20$ е делител на 6000. Но, $6000 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^3$, па затоа бројот на делителите на 6000 е еднаков на $(4+1) \cdot (1+1) \cdot (3+1) = 40$. Според тоа, бараниот број парови (m,k) е 40.

3. Определи го бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10}, 15^7, 18^{11}$.
Решение. Имаме:
$$10^{10} = 2^{10}5^{10},$$
$$15^7 = 3^7 5^7,$$
$$18^{11} = 2^{11}3^{22},$$
па затоа
- 10^{10} има $(10+1)(10+1) = 121$ делител,
- 15^7 има $(7+1)(7+1) = 64$ делители и
- 18^{11} има $(11+1)(22+1) = 276$ делители.

Во збирот $121+64+276$ два пати ги броевме заедничките делители на два броја. Затоа мора да ги одзмеме заедничиките делители на 10^{10} и 15^7, на 15^7 и 18^{11}, на 18^{11} и 10^{10}. Бројот на заедничките делители на два броја е еднаков на бројот на делителите на нивниот најголем заеднички делител. Имаме:

- $(10^{10},15^7)=5^7$, па затоа 10^{10} и 15^7 имаат $7+1=8$ заеднички делители,
- $(15^7,18^{11})=3^7$, па затоа 15^7 и 18^{11} имаат $7+1=8$ заеднички делители и
- $(10^{10},18^{11})=2^{10}$, па затоа 18^{11} и 10^{10} имаат $11+1=12$ заеднички делители.

Понатаму, во збирот на делителите на поединечните броеви $121+64+276$ три пати ги броевме заедничките делители на сите три броја и во збирот на делителите на паровите броеви три пати ги пребројавме заедничките делители на сите три броја, па затоа овој број мора да го додадеме. Но, заеднички делител на сите три броја е само бројот 1, па затоа бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10},15^7,18^{11}$ е еднаков на

$$121+64+276-8-8-11+1=435.$$

4. Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако n е точен квадрат.

Решение. На секој делител d на бројот n кој е помал од $\sqrt{n}$ му соодветствува делител $\frac{n}{d}$ кој е поголем од $\sqrt{n}$ и обратно. Значи, за секој број n, бројот на неговите делители кои се различни од $\sqrt{n}$ е парен број. Според тоа, ако бројот на делителите на n е непарен број, тогаш $\sqrt{n}$ е делител на n и обратно, ако $\sqrt{n}$ е делител n, тогаш бројот на делителите на n е непарен број.

5. Определи ги сите природни броеви кои имаат точно шест делитили, чиј збир е еднаков на 3500.

Решение. Ако n е природен број кој има точно шест делители, тогаш $n=p^5$ каде p е прост број или $n=p^2q$, каде p и q се различни прости броеви. Во првиот случај имаме $1+p+p^2+...+p^5=3500$, т.е.

$$p(1+p+...+p^4)=3449. \qquad (1)$$

Бројот 3449 не е делив со 2, 3, 5 и 7, па затоа $p\geq 11$. Но, тогаш левата страна на (1) е поголема од 3449, што значи дека равенката (1) нема решение во множеството природни броеви.

Во вториот случај имаме $1+p+q+pq+p^2+p^2q=3500$, т.е.

$$(1+p+p^2)(1+q)=5^3\cdot 7\cdot 4\,. \tag{2}$$

Јасно, бројот

$$1+p+p^2=1+p(p+1)$$

е непарен и не е делив со 5, па затоа од $1+p+p^2>1$ следува $1+p+p^2=7$, т.е. $p=2$. Според тоа, $q=499$. Броевите 2 и 499 се прости и бараниот број е $2^2\cdot 499=1996$.

6. Најди природен број кој е делив со 12 и има 14 делители.
Решение. Бројот n е делив со 12, па значи е делив со 2 и со 3. Од друга страна $\tau(n)=14=2\cdot 7=(1+1)(6+1)$, па затоа $n=2^{a_1}3^{a_2}$, при што $a_1\ge 2$ и $a_2\ge 1$. Според тоа, $a_1=6$ и $a_2=1$, па е $n=2^6\cdot 3=192$.

7. Природниот број n има два прости делители, а бројот n^2 има вкупно 15 делители. Колку делители има бројот n^3?
Решение. Од условот на задачата имаме $n=p^aq^b$, каде p и q се прости броеви, $n^2=p^{2a}q^{2b}$ и $(2a+1)(2b+1)=15$. Од последната равенка добиваме $2a+1=3$, $2b+1=5$, т.е. $a=1, b=2$. Конечно, бројот $n^3=p^{3a}q^{3b}$ има $(3a+1)(3b+1)=4\cdot 7=28$ делители.

8. Природниот број n има само три прости делители: 2, 3 и 5. Определи го бројот n ако

$$\tau(\tfrac{n}{2})=\tau(n)-30\,,\ \tau(\tfrac{n}{3})=\tau(n)-35 \text{ и } \tau(\tfrac{n}{5})=\tau(n)-42\,.$$

Решение. Нека $n=2^a3^b5^c$. Тогаш

$$\begin{aligned}\tau(n)&=(a+1)(b+1)(c+1)\\ \tau(\tfrac{n}{2})&=a(b+1)(c+1)\\ \tau(\tfrac{n}{3})&=(a+1)b(c+1)\\ \tau(\tfrac{n}{5})&=(a+1)(b+1)c\end{aligned}$$

па од условот на задачата следува дека

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)(c+1)&=a(b+1)(c+1)+30\\ &=(a+1)b(c+1)+35\\ &=(a+1)(b+1)c+42,\end{aligned}$$

од каде го добиваме системот

$$(b+1)(c+1)=30$$
$$(a+1)(c+1)=35$$
$$(a+1)(b+1)=42.$$

Решението на последниот систем е $a=6, b=5, c=4$, па затоа бараниот број е $n=2^6 3^5 5^4=9720000$.

9. Определи ги сите решенија на равенката $\sigma(n)=60$.

Решение. Делители на бројот 60 се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60. За секој прост број p_i имаме:

$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}\neq 1, 2, 5, 10.$$

Од друга страна

$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=3, \text{ за } p_i=2,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=4, \text{ за } p_i=3,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=6, \text{ за } p_i=5,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=12 \text{ за } p_i=11,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=15, \text{ за } p_i=2,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=20, \text{ за } p_i=19,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=30, \text{ за } p_i=29,$$
$$1+p_i+p_i^2+...+p_i^{a_i}=60, \text{ за } p_i=59.$$

Од $60=3\cdot 20=4\cdot 15=1\cdot 60$ следува дека

$$\sigma(n)=60=(1+2)\cdot(1+19)=(1+3)\cdot(1+2+2^2+2^3)=1+59,$$

што значи дека решенијата на дадената равенка се

$$n=2\cdot 19=38,\ n=3\cdot 2^3=24 \text{ и } n=59.$$

10. Определи го најмалиот број од облик $2^a p_1 p_2$, каде p_1 и p_2 се непарни прости броеви, чиј збир на делители е трипати поголем од самиот број.

Решение. Равенката $\sigma(m)=3m$ при $m=2^a p_1 p_2$ го добива обликот

$$(2^{a+1}-1)(1+p_1)(1+p_2)=3\cdot 2^a p_1 p_2$$

За $a=0$ имаме $(1+p_1)(1+p_2)=3p_1p_2$ или $1+p_1+p_2=2p_1p_2$ што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната страна е парен број. Значи, $a\neq 0$.

За $a=1$ имаме $(1+p_1)(1+p_2)=2p_1p_2$ што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 4, а десната страна не е делива со 4. Значи $a>1$.

За $a=2$ имаме $7(1+p_1)(1+p_2)=12p_1p_2$ или $7+7(p_1+p_2)=5p_1p_2$. Оттука $p_1=7$, $p_2=2$, што не е можно.

При $a=3$ имаме $5(1+p_1)(1+p_2)=8p_1p_2$ или $5+5(p_1+p_2)=3p_1p_2$. Одтука $p_1=5$, $p_2=3$. Според тоа, најмалиот природен број со бараното својство е $m=2^3\cdot 3\cdot 5=120$.

11. Докажи, дека, за секој природен број $n\geq 2$ е исполнето равенството

$$\tau(n)=\sum_{k=1}^{n}([\tfrac{n}{k}]-[\tfrac{n-1}{k}]).$$

Решение. Имаме

$$[\tfrac{n}{k}]-[\tfrac{n-1}{k}]=\begin{cases}1, & \text{ако } k\mid n\\ 0, & \text{ако } k\nmid n,\end{cases}$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}([\tfrac{n}{k}]-[\tfrac{n-1}{k}])=\sum_{k\mid n}1=\tau(n).$$

Забелешка. Бидејќи n е прост број ако и само ако $\tau(n)=2$, од претходната задача следува дека n е прост број ако и само ако

$$\sum_{k=1}^{n}([\tfrac{n}{k}]-[\tfrac{n-1}{k}])=2.$$

12. Докажи, дека броевите $\tau(m^n)$ и n се заемно прости.

Решение. Нека $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Тогаш $m^n=p_1^{n\alpha_1}p_2^{n\alpha_2}...p_k^{n\alpha_k}$ и

$$\tau(m^n)=(n\alpha_1+1)(n\alpha_2+1)...(n\alpha_k+1),$$

па затоа $(n\alpha_i+1,n)=1, i=1,2,...,k$, од што следува дека $\tau(m^n)$ и n се заемно прости.

13. Определи ги сите природни броеви n такви што $n=2\tau(n)$

Решение. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ е каноничното претставување на n. Од условот во задачата имаме

$$\frac{p_1^{\alpha_1}}{\alpha_1+1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2}}{\alpha_2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_m^{\alpha_m}}{\alpha_m+1}=2. \tag{1}$$

Забележуваме дека

$$\frac{2^1}{1+1}=1<\frac{2^2}{2+1}<\frac{2^3}{3+1}=2<\frac{2^a}{a+1}, \text{ за } a\geq 4,$$
$$1<\frac{3^1}{1+1}<2<\frac{3^a}{a+1}, \text{ за } a\geq 2,$$
$$2<\frac{p^a}{a+1}, \text{ за } p\geq 5 \text{ и } a\geq 1.$$

Според тоа, дропките од левата страна на (1) можат да бидат некои од следните $\frac{2^1}{1+1},\frac{2^2}{2+1},\frac{2^3}{3+1},\frac{3^1}{1+1}$, при што нивниот производ е еднаков а 2. Но, ова е можно ако имаме само еден количник $\frac{2^3}{3+1}$ или производ $\frac{2^2}{2+1}\cdot\frac{3^1}{1+1}$. Значи, $n=12$ и $n=8$ се единствените броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

14. Определи ги сите природни броеви n за кои $8\tau(n^2)=27\tau(n)$.

Решение. Очигледно $n\neq 1$ и нека $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ е каноничното претставување на n. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот
$$\frac{2a_1+1}{a_1+1}\cdot\frac{2a_2+1}{a_2+1}\cdot...\cdot\frac{2a_r+1}{a_r+1}=(\tfrac{3}{2})^3. \tag{1}$$
Понатаму, $\frac{3}{2}\leq\frac{2a_i+1}{a_i+1}<2$ за секој a_i при што знак за равенство на левата страна важи само кога $a_i=1$. Тогаш од (1) следува дека $2^r>(\frac{3}{2})^3\geq(\frac{3}{2})^r$, од каде заклучуваме дека $2\leq r\leq 3$.

За $r=3$ имаме $a_i=1, i=1,2,3$, од што го добиваме решението $n=p_1p_2p_3$ каде p_1,p_2 и p_3 се различни прости броеви.

Нека $r=2$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1\geq a_2$, од каде следува $\frac{2a_1+1}{a_1+1}\geq\frac{2a_2+1}{a_2+1}$. Тогаш од (1) добиваме
$$\frac{2(2a_2+1)}{a_2+1}>\frac{2a_1+1}{a_1+1}\cdot\frac{2a_2+1}{a_2+1}=(\tfrac{3}{2})^3=\frac{2a_1+1}{a_1+1}\cdot\frac{2a_2+1}{a_2+1}\geq(\frac{2a_2+1}{a_2+1})^2.$$
Од последните неравенства лесно следува дека $3\leq a_2\leq 5$. Во секој од случаите $a_2=3,4,5$ добиваме линеарна равенка по a_1 при што ги добиваме решенијата $(a_1,a_2)=(13,3)$ и $(7,4)$, т.е. $n=p_1^{13}p_2^3$ и $n=p_1^7p_2^4$, каде p_1 и p_2 се различни прости броеви.

15. Определи ги сите позитивни цели броеви *k* за кои постои позитивен цел број *n*, така што $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}=k$.

Решение. Нека $n>1$ и $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdot...\cdot p_r^{k_r}$ е каноничното разложување на *n* на прости множители, $a_i=k_i+1$, за $1\leq i\leq r$. Тогаш

$$\tau(n)=a_1a_2...a_r \quad \text{и} \quad \tau(n^2)=(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_r-1).$$

Задачата се сведува на определување на сите природни броеви k кои може да се претставаат во облик

$$m=\frac{(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_r-1)}{a_1a_2...a_r}\text{, каде } a_i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\text{, за } i=1,2,...,r. \tag{1}$$

Јасно, m мора да биде непарен број, бидејќи $\tau(n^2)$ е непарен број. Со индукција ќе покажеме дека секој непарен број $m\in\mathbb{N}$ може да се претстави во обликот (1).

Базата на индукцијата $k=1$ е тривијална. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за непарниот број m. Тогаш точноста на тврдењето за непарниот број $k=2m-1$, следува од индуктивната претпоставка и претставувањето $k=\frac{2m-1}{m}m$. Ако непарниот број е од видот $k=4m-1$, каде m е непарен број, тогаш тој може да се запише во видот $k=\frac{12m-3}{6m-1}\cdot\frac{6m-1}{3m}\cdot m$, па затоа точноста на тврдењето за броевите од овој вид следува од индуктивната претпоставка и даденото претставување. Ќе продолжиме со оваа идеја. Нека $n=2^t m-1$, каде m е непарен. Означуваме $u=(2^t-1)m$ и добиваме

$$k=\frac{2^t u-2^t+1}{2^{t-1}u-2^{t-1}+1}\cdot...\cdot\frac{4u-3}{2u-1}\cdot\frac{2u-1}{u}\cdot m,$$

со што доказот е завршен

16. Меѓу сите бесконечни аритметички прогресии од различни природни броеви, за кои бројот на позитивните делители на секој член на прогресијата е делив со 1997, определи ја онаа прогресија чиј што 1997-ми член е најмал можен.

Решение. Ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$ е канонечното разложување на $n\in\mathbb{N}$, тогаш $\tau(n)=\prod_{i=1}^{s}(a_i+1)$ е бројот на делителите на n. Бројот 1997 е прост, па затоа $1997\,|\,\tau(n)$ ако и само ако $a_i=1996+1997m$, за некој $i=1,2,...,s$, каде $m\in\mathbb{N}$.

Сега, лесно се добива дека првиот член на бараната прогресија е 2^{1996}, а разликата е 2^{1997}.

17. Низата природни броеви $a_1,a_2,...$ го задоволува равенството

$$a_{n+1}=a_n+2\tau(n)\text{, за секој } n\geq 1.$$

Дали е можно два последователни членови на оваа низа да се точни квадрати?

Решение. Не! Очигледно низата $a_1,a_2,...$ строго расте. Нека претпоставиме дека $a_n = x^2$ и $a_{n+1} = y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Тогаш од равенството $a_{n+1} = a_n + 2\tau(n)$ следува дека x и y се со еднаква парност и важи

$$2\tau(n) = a_{n+1} - a_n = y^2 - x^2 \geq (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4 \text{, т.е. } \tau(n) \geq 2x + 2.$$

Но, $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$, па затоа $\sqrt{n} \geq x + 1 > x = \sqrt{a_n}$, т.е. $n > a_n$, што очигледно не е можно, бидејќи a_1 е природен број и низата $a_1, a_2, ...$ строго расте.

18. Определи ги сите природни броеви d кои имаат точно 16 позитивни делители $d_1, d_2, ..., d_{16}$ такви што

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_{16} = d, \ d_6 = 18 \text{ и } d_9 - d_8 = 17.$$

Решение. Нека $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_m^{a_m}$ е каноничното претставување на d. Тогаш $\tau(d) = (1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_m)$. Од $\tau(d) = 16 = 2^4$ следува дека $1 + a_i = 2^t$, за $i = 1, 2, ..., m$. Понатаму, $d_6 = 2 \cdot 3^2$ е делител на d, па затоа $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, а бидејќи $\tau(d) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 2 \cdot 8$ заклучуваме дека $d = 2 \cdot 3^7$ или $d = 2 \cdot 3^3 p$, за некој прост број p. Ако $d = 2 \cdot 3^7$, тогаш $d_8 = 54, d_9 = 81$ и $d_9 - d_8 \neq 17$. Според тоа, $d = 2 \cdot 3^3 p$, за некој прост број $p > 18$. Ако $p < 27$, тогаш $d_7 = p, d_8 = 27$ и $2p = d_9 = 27 + 17 = 44$, па затоа $p = 22$, што е противречност. Значи, $p > 27$. Ако $p < 54$, тогаш $d_7 = 27, d_8 = p$ и $d_9 = 54 = d_8 + 17$, т.е. $d_8 = 37$. Ако $p > 54$, тогаш $d_7 = 27, d_8 = 54$ и $d_9 = d_8 + 17 = 71$.

Конечно, задачата има две решенија

$$d = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 = 1998 \text{ и } d = 2 \cdot 3^3 \cdot 71 = 3834.$$

19. Определи ги сите природни бгроеви $n > 1$ такви што производот на сите делители на бројот n е еднаков на n^3.

Решение. Нека $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ се сите позитивни делители на бројот n. Имаме

$$d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = d_3 d_{k-2} = ... = n.$$

Од последната низа равенства следува дека производот на сите делители на n е еднаков на n^3 ако и само ако n има точно шест делители.

Ако $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ е каноничното претставување на бројот n, тогаш бројот на делителите на n е еднаков на $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_s + 1)$. Според тоа, треба да важи

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_s + 1) = 6.$$

Бидејќи сите множители на левата страна во последното равенство се поголеми од 1, имаме само две можности и тоа $s=1, \alpha_1=5$ и $s=2, \alpha_1=2, \alpha_2=1$. Според тоа, n е таков што производот на сите негови делители е еднаков на n^3 ако $n=p^5$, каде p е прост број или $n=p^2q$, каде p и q се прости броеви.

20. Низата $f(1), f(2), f(3),...$ е определена со формулата

$$f(n)=\frac{1}{n}([\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]).$$

а) Докажи дека $f(n+1)>f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n.

б) Докажи дека $f(n+1)<f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n.

Решение. Нека

$$g(n)=[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]=nf(n)$$

и да додефинираме $g(0)=0$. Имаме, $[\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]=1$ ако $k\,|\,n$ и $[\frac{n}{k}]-[\frac{n-1}{k}]=0$ ако $k\nmid n$. Според тоа,

$$g(n)-g(n-1)=([\tfrac{n}{1}]-[\tfrac{n-1}{1}])+([\tfrac{n}{2}]-[\tfrac{n-1}{2}])+...+([\tfrac{n}{n}]-[\tfrac{n-1}{n}])=\tau(n).$$

Добиваме

$$g(n)=g(n-1)+\tau(n)=g(n-2)+\tau(n-1)+\tau(n)=...=\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n),$$

па затоа

$$f(n)=\frac{\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n)}{n}.$$

а) Неравенството $f(n+1)>f(n)$ е еквивалентно со неравенството

$$\frac{\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n)+\tau(n+1)}{n+1}>f(n)$$

и бидејќи $\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n)=nf(n)$ следува дека доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $\tau(n+1)>f(n)$. За бесконечно многу природни броеви n важи

$$\tau(n+1)>\tau(1), \tau(n+1)>\tau(2),..., \tau(n+1)>\tau(n),$$

па затоа имаме

$$\tau(n+1)>\frac{\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n)}{n}=f(n).$$

б) Условот $f(n+1)<f(n)$ е еквивалентен со $\tau(n+1)<f(n)$ и е исполнет за бесконечно многу природни броеви n за кои $n+1$ е прост број. Во тој случај $\tau(n+1)=2<f(n)$.

21. Нека $(m,n)>1$.

а) Што е поголемо $\tau(mn)$ или $\tau(m)\tau(n)$?

б) Што е поголемо $\sigma(mn)$ или $\sigma(m)\sigma(n)$?

Решение. а) Ако p се наоѓа во каноничното разложување само на m или само на n со некој степен a, тогаш како $\tau(mn)$ така и $\tau(m)\tau(n)$ содржи множител $a+1$. Ако пак каноничните разложувања на m и n содржат множители p^a и p^b, соодветно, тогаш каноничното разложување на mn содржи p^{a+b} и на множителот $a+b+1$, кој се содржи во $\tau(mn)$, му соодветствува множител $(a+1)(b+1)>a+b+1$, кој се содржи во $\tau(m)d(n)$. Според тоа, ако $(m,n)>1$, тогаш $\tau(m)d(n)>\tau(mn)$.

б) Случајот кога простиот број p се содржи во каноничното разложување само на m или само на n се разгледува аналогно.

Во вториот случај на множителот $\frac{p^{a+b+1}-1}{p-1}$, кој се содржи во $\sigma(mn)$ соодветствува производот $\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{b+1}-1}{p-1}$ кој се содржи во $\sigma(m)\sigma(n)$. Од очигледното неравенство $p^{b+1}(p^a-1)>p(p^a-1)$, следува

$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{b+1}-1}{p-1}>\frac{p^{a+b+1}-1}{p-1}.$$

Според тоа, ако $(m,n)>1$, тогаш $\sigma(m)\sigma(n)>\sigma(mn)$.

22. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви да $\sigma(n)=2n-1$.

Решение. За секој природен број k важи

$$\sigma(2^k)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}=2^{k+1}-1=2\cdot 2^k-1,$$

што значи дека броевите $2^k, k=1,2,3,...$ го имаат бараното својство.

23. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш $\sigma(n)\geq n+\sqrt{n}+1$.

Решение. Природниот број n има делител d таков што $d\neq 1$ и $d\leq\sqrt{n}$. Но, $\frac{n}{d}$ исто така е делител на n за кој важи $\frac{n}{d}\geq\sqrt{n}$. Затоа

$$\sigma(n)=\sum_{k|n}k\geq 1+n+\frac{n}{d}\geq n+\sqrt{n}+1.$$

24. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш

$$\sigma(n)\geq\tau(n)\sqrt{n}+(\sqrt{n}-1)^2.$$

Решение. Нека $\tau(n)=2k$ и $d_1=1,d_2,...,d_k,\frac{n}{d_k},...,\frac{n}{d_2},n$ се сите делители на n

. Тогаш $d_i+\frac{n}{d_i}\geq 2\sqrt{n}$ за $i=2,3,...,k$, па затоа

$$\sigma(n)=(d_1+\tfrac{n}{d_1})+(d_2+\tfrac{n}{d_2})+...+(d_k+\tfrac{n}{d_k})\geq n+1+2(k-1)\sqrt{n}$$
$$=\tau(n)\sqrt{n}+n-2\sqrt{n}+1=\tau(n)\sqrt{n}+(\sqrt{n}-1)^2.$$

Случајот кога $\tau(n)=2k+1$, односно $n=d_{k+1}^2$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

25. Докажи дека ако n е сложен природен број, тогаш $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}\leq\frac{3n}{4}$.

Решение. Нека $\tau(n)=2k$ и $d_1=1,d_2,...,d_k,\frac{n}{d_k},...,\frac{n}{d_2},n$ се сите делители на n . Тогаш $d_i+\frac{n}{d_i}\leq\frac{3n}{2}$ за $i=2,3,...,k$, па затоа

$$\sigma(n)=(d_1+\tfrac{n}{d_1})+(d_2+\tfrac{n}{d_2})+...+(d_k+\tfrac{n}{d_k})\leq 1+n+(k-1)(n+\tfrac{n}{2})$$
$$=2k\cdot\tfrac{3n}{4}-\tfrac{n}{2}+1\leq\tfrac{3n}{4}\tau(n),$$

односно $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}\leq\frac{3n}{4}$. Случајот кога $\tau(n)=2k+1$, односно $n=d_{k+1}^2$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

26. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{k=1}^{n}k[\tfrac{n}{k}],\qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}[\tfrac{n}{k}]([\tfrac{n}{k}]+1).\qquad (2)$$

Решение. Бројот k е делител во $[\frac{n}{k}]$ случаи и нивниот збир е $k[\frac{n}{k}]$, па затоа важи (1).

Броевите кои се помали или еднакви на n и се деливи со k се: $k,2k,...,k[\frac{n}{k}]$.

Сега равенството (2) се добива ако се искористи равенството $\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$.

27. Докажи дека цифра на единиците на парен совршен број секогаш е 6 или 8.

Решение. Парен совршен број има облик $2^{p-1}(2^p-1)$ каде p и $2^{\boldsymbol{p}}-1$ се прости броеви. За $p=2$ тоа е бројот 6. Ако $p>2$, тогаш p е прост број од видот $4k+1$ или $4k+3$.

Ако $p=4k+1$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k}=16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 6, а цифрата на единиците на бројот $2^p-1=2^{4k+1}-1=2\cdot16^k-1$ е 1. Значи, за $p=4k+1$ цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 6.

Ако $p=4k+3$, тогаш $2^{p-1}=2^{4k+2}=4\cdot16^k$ и цифрата на единиците на овој број е 4. Цифрата на единиците на бројот 2^p е 8, па затоа цифрата на единиците на бројот 2^p-1 е 7. Конено, ако $p=4k+3$, тогаш цифрата на единиците на бројот $2^{p-1}(2^p-1)$ е 8.

28. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека постојат природни броеви a и b такви што аритметичката средина од сите делители на бројот $n=p^aq^b$ е природен број.

Решение. Имаме

$$\sigma(n)=\frac{(p^{a+1}-1)(q^{b+1}-1)}{(p-1)(q-1)},\ \tau(n)=(a+1)(b+1),$$

па затоа аритметичката средина од сите делители на бројот $n=p^aq^b$ е

$$M=\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}=\frac{(p^{a+1}-1)(q^{b+1}-1)}{(p-1)(q-1)(a+1)(b+1)}.$$

Ако p и q се непарни прости броеви, тогаш

$$p^2-1\,|\,p^{p+1}-1 \text{ и } q^2-1\,|\,q^{q+1}-1,$$

па затоа доволно е да земеме $a=p$ и $b=q$. Ако $p=2$ и q е непарен, тогаш за $b=q$ и $a=q^{q-1}+q^{q-3}+...+q^2$ и имаме

$$\begin{aligned}(p-1)(q-1)(a+1)(b+1)&=(q-1)(q+1)(q^{q-1}+q^{q-3}+...+q^2+1)\\&=q^{q+1}-1=q^{b+1}-1,\end{aligned}$$

па затоа $M=p^{a+1}-1=2^{a+1}-1$ е природен број. Аналогно, ако p е непарен и $q=2$, тогаш за $a=p$ и $b=p^{p-1}+p^{p-3}+...+p^2$ имаме

$$M=q^{b+1}-1=2^{b+1}-1,$$

т.е. е природен број, со што задачата е решена.

29. За секој $n\in\mathbb{N}$ нека $f(n)$ е бројот на природните броеви $m, m\le n$ за кои $\sigma(m)$ е непарен број. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $f(n)\,|\,n$.

Решение. Ако $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_k^{r_k}$ е факторизацијата на бројот n на прости множители, тогаш $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+...+p_i^{r_i})$. Бројот $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако сите множители $1+p_i+...+p_i^{r_i}$ се непарни, што е еквивалентно со $p_i=2$ или $2\,|\,r_i$. Според тоа, $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако n или $\frac{n}{2}$ е квадрат на природен број, од што следува $f(n)=[\sqrt{n}]+[\sqrt{\frac{n}{2}}]$.

Важи $f(n)\le f(n+1)$ за секој n. Исто така, количникот $\frac{n}{f(n)}$ не е ограничен, па затоа за секој $k\in\mathbb{N}$ постои најмал $n=n_k$ за кој $\frac{n}{f(n)}\ge k$. За $k>1$ важи $n_k>1$ и $\frac{n_k-1}{f(n_k-1)}<k$, од каде следува $n_k\ge kf(n_k)\ge kf(n_k-1)>n_k-1$. Последното е можно само ако првите две неравенства всушност се равенства, т.е. $f(n_k)\,|\,n_k=kf(n_k)$. Сите броеви n_k се различни, со што тврдењето е докажано.

30. Пермутацијата π на броевите од 1 до n ќе ја наречеме добра, ако множеството $\{\pi(k)-k\,|\,k=1,2,...,n\}$ има два елементи. Докажи, дека бројот на добрите пермutации е еднаков на $\sigma(n)-\tau(n)$.

Решение. Да разгледаме една добра пермутација π. Од $\sum_{k=1}^{n}(\pi(k)-k)=0$, заклучуваме дека еден од двата елементи на множеството $\{\pi(k)-k\,|\,k=1,2,...,n\}$ е позитивен, а другиот е негативен, на пример $a>0$ и $-b<0$. Нека $A=\{k\,|\,\pi(k)-k=a\}$ и $B=\{k\,|\,\pi(k)-k=-b\}$.

Прво да забележиме, дека ако $i\in A$ и $i+a+b\le n$, тогаш $i+a+b\in A$. Навистина, ако $\pi(i)=i+a$, тогаш бидејќи π е пермутација следува

$$\pi(i+a+b)\ne\pi(i)=i+a\text{, т.е. }\pi(i+a+b)-(i+a+b)\ne -b,$$

т.е. $i+a+b\notin B$. Аналогно, ако $i\in B$ и $1\le i-a-b$, тогаш $i-a-b\in B$. Навистина, ако $\pi(i)=i-b$, тогаш бидејќи π е пермутација следува

$$\pi(i-a-b)\ne\pi(i)=i-b,$$

па затоа важи $\pi(i-a-b)-(i-a-b)\ne a$, т.е. $i-a-b\notin A$.

Очигледно, $i\in A$ за $1\le i\le b$. Од претходните разгледувања следува дека ако остатокот на i при делење со $a+b$ е ненулти и е помал или еднаков на b, тогаш $i\in A$. Аналогно, ако остатокот на i при делење со $a+b$ е 0 или поголем од b, тогаш $i\in B$. Оттука лесно следува дека $d=a+b$ е делител на n.

Обратно, горните разгледувања дозволуваат за секој делител d на n и секој $a=1,2,...,d-1$ да конструираме добра пермутација така, што елементи на множеството $\{\pi(k)-k\,|\,k=1,2,...,n\}$ се a и $-b=a-d$. Според тоа, бројот на добрите пермутации е еднаков на

$$\sum_{d|n}(d-1)=\sum_{d|n}d-\sum_{d|n}1=\sigma(n)-\tau(n).$$

31. За природните броеви m и n ќе велиме дека се *пријателски* ако секој од нив е еднаков на збирот на вистинските делители на другиот број. Докажи, дека ако $p=3\cdot 2^{k-1}-1$, $q=3\cdot 2^{k}-1$ и $9=9\cdot 2^{2k-1}-1$ се прости броеви, тогаш $A=2^k pq$ и $B=2^k r$ се пријателски броеви.

Решение. Имаме:

$$\sigma(A)=(1+2+...+2^k)(1+p)(1+q)=9\cdot 2^{2k-1}(2^{k+1}-1)\ ,$$

$$\sigma(B)=(1+2+...+2^k)(1+r)=9\cdot 2^{2k-1}(2^{k+1}-1)\,.$$

Исто така,

$$A+B=2^k(pq+r)=2^k((3\cdot 2^{k-1}-1)(3\cdot 2^k-1)+9\cdot 2^{2k-1}-1)$$
$$=2^k(9\cdot 2^{2k}-9\cdot 2^{k-1})=9\cdot 2^{2k-1}(2^{k+1}-1).$$

Збирот на вистинските делители на A е еднаков на $\sigma(A)-A=A+B-A=B$, а збирот на вистинските делители на B е $\sigma(B)-B=A+B-B=B$. Значи, A и B се пријателски броеви.

9. ФУНКЦИЈА НА МЕБИУС

1. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\prod_{d|n} d^{\mu(d)}=\begin{cases}1, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број,}\\ p^{-1}, & \text{ако } n>1 \text{ е степен на простиот број } p.\end{cases} \tag{1}$$

Решение. За $n=1$ очигледно точна е (1). Нека $n>1$ и $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ е каноничното претставување на n. Ако $r=1$ имаме

$$\prod_{d|n} d^{\mu(d)}=1^1 p_1^{-1}(p_1^2)^0(p_1^3)^0...(p_1^r)^0=p_1^{-1},$$

т.е. точна е (1). Нека $r>1$. Бидејќи $d^{\mu(d)}=d^0=1$ за делители d на n, кои се делат со квадрат на природен број, поголем од 1, можеме да ги разгледуваме само оние делители на n, кои не содржат квадрати, т.е. само делителите d на бројот $p_1p_2...p_r$. Сега, имаме

$$\begin{aligned}\prod_{d|n} d^{\mu(d)}=\prod_{d|p_1p_2...p_r} d^{\mu(d)}&=p_1^{-1}...p_r^{-1}(p_1p_2)^{(-1)^2}...(p_{r-1}p_r)^{(-1)^2}\cdot\\ &\cdot(p_1p_2p_3)^{(-1)^3}...(p_{r-2}p_{r-1}p_r)^{(-1)^3}...(p_1p_2...p_r)^{(-1)^r}\\ &=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}.\end{aligned}$$

За да ги определиме $k_i,\ i=1,2,...,r$, ќе забележиме, дека на пример p_1 се среќава еднаш во производот $p_1^{-1}...p_r^{-1}$, $\binom{r-1}{1}$ пати во производот $(p_1p_2)^{(-1)^2}$ $...(p_{r-1}p_r)^{(-1)^2}$, $\binom{r-1}{2}$ пати во производот $(p_1p_2p_3)^{(-1)^3}...(p_{r-2}p_{r-1}p_r)^{(-1)^3}$ итн. еднаш во производот $(p_1p_2...p_r)^{(-1)^r}$. Според тоа, за секој $i=1,2,...,r$ важи

$$\begin{aligned}k_i&=-1+\tbinom{r-1}{1}\cdot1+\tbinom{r-1}{2}\cdot(-1)+...+\tbinom{r-1}{r-2}\cdot(-1)^{r-1}+(-1)^r\\ &=-(1+\tbinom{r-1}{1}\cdot(-1)+\tbinom{r-1}{2}\cdot(-1)^2+...+\tbinom{r-1}{r-2}\cdot(-1)^{r-2}+(-1)^{r-1})\\ &=-(1-1)^{r-1}\\ &=0.\end{aligned}$$

Конечно, бидејќи $r>1$ добиваме, дека

$$\prod_{d|n} d^{\mu(d)}=1.$$

2. Нека
$$\pi(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број}\\ \log p, & \text{ако } n=p^s>1 \text{ е степен на прост број.}\end{cases}$$
Докажи дека ако $f(n)$ е аритметичка функција за која важи
$$\sum_{d|n} f(d)=\log n$$
за секој природен број n, тогаш $f(n)=\pi(n)$

Решение. Од Мебиусовата инверзна формула последователнои добиваме
$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{d|n}\mu(d)\log\tfrac{n}{d}=\sum_{d|n}\log(\tfrac{n}{d})^{\mu(d)}=\log\prod_{d|n}(\tfrac{n}{d})^{\mu(d)}\\
&=\log\frac{\prod_{d|n}n^{\mu(d)}}{\prod_{d|n}d^{\mu(d)}}=\log\frac{n^{\sum_{d|n}\mu(d)}}{\prod_{d|n}d^{\mu(d)}}\\
&=\log\frac{\begin{cases}n, & \text{ако } n=1\\ 1, & \text{ако } n>1\end{cases}}{\begin{cases}1, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број,}\\ p^{-1}, & \text{ако } n>1 \text{ е степен на простиот број } p,\end{cases}}\\
&=\begin{cases}0, & \text{ако } n \text{ не е степен на прост број}\\ \log p, & \text{ако } n=p^s>1 \text{ е степен на прост број}\end{cases}\\
&=\pi(n).\end{aligned}$$

3. Нека $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ и каноничното претставување на n е $n=p_1p_2...p_r$, r е парен број. Докажи, дека
$$\sum_{d}\mu(d)=0,$$
каде сумирањето е по сите делители d на n, кои се помали од $\sqrt{n}$.

Решение. На секој делител d_1 на n кој го задоволува условот $d_1<\sqrt{n}$ му соодветствува делител $d_2=\frac{n}{d_1}$ на n за кој важи $d_2>\sqrt{n}$. Притоа, броевите d_1 и d_2 се различни и заемно прости, па затоа од
$$1=(-1)^r=\mu(n)=\mu(d_1d_2)=\mu(d_1)\mu(d_2)$$
следува $\mu(d_1)=\mu(d_2)$. Според тоа
$$\begin{aligned}0=\sum_{d|n}\mu(d)&=\sum_{d_1|n,\,d_1<\sqrt{n}}\mu(d_1)+\sum_{d_2|n,\,d_2>\sqrt{n}}\mu(d_2)\\
&=2\sum_{d_1|n,\,d_1<\sqrt{n}}\mu(d_1)\end{aligned},$$
од што следува тврдењето на задачата.

4. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(k)[\tfrac{n}{k}] = 1 .$$

Решение. Нека

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)[\tfrac{n}{k}] .$$

Јасно, $S(1) = 1$. Нека $n \geq 2$. Ако земеме предвид дека $[\frac{n-1}{n}] = 0$, добиваме

$$S(n) - S(n-1) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)[\tfrac{n}{k}] - \sum_{k=1}^{n-1} \mu(k)[\tfrac{n-1}{k}] = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)([\tfrac{n}{k}] - [\tfrac{n-1}{k}]) .$$

Бидејќи

$$[\tfrac{n}{k}] - [\tfrac{n-1}{k}] = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \nmid n \\ 1, & \text{ако } k \mid n, \end{cases}$$

и $n > 1$ добиваме дека

$$S(n) - S(n-1) = \sum_{k|n} \mu(k) = 0 .$$

Според тоа, $S(n) = S(n-1) = S(n-2) = ... = S(1) = 1$.

5. Нека $\omega(n)$ е бројот на различните прости фактори на природниот број n. Докажи, дека

$$\sum_{d|n} \mu^2(d) = 2^{\omega(n)} . \qquad (1)$$

Решение. Ако $m, n \in \mathbb{N}$ и $(m,n) = 1$, тогаш секој од $r-$те прости фактори на бројот m се разликува од секој од $s-$те прости фактори на бројот n, па затоа

$$2^{\omega(m)} = 2^r, 2^{\omega(n)} = 2^s, 2^{\omega(mn)} = 2^{r+s} = 2^r 2^s = 2^{\omega(m)} 2^{\omega(n)},$$

т.е. функцијата $2^{\omega(n)}$ е мултипликативна. Понатаму, функцијата на Мебиус и нејзиниот квадрат се мултипликативни, па затоа функцијата на десната страна во (1) е мултипликативна. Затоа, доволно е равенството (1) да го докажеме за броеви од видот $n = p^a$. Имаме, $2^{\omega(p^a)} = 2^1 = 2, \mu(p^a) = 0,$ за $a > 1$, па затоа

$$\sum_{d|p^a} \mu^2(d) = \mu^2(1) + \mu^2(p) = 2 = 2^{\omega(p^a)},$$

со што доказот е завршен.

6. Нека $f(n)$ е мултипликативна функција, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, а $\theta(n)$ го означува бројот на разложувањата на природниот број n како производ од заемно прости множители. Докажи, дека

$$\sum_{k^2|n} f(k)\tau(\tfrac{n}{k^2}) = \sum_{k^2|n} g(k)\theta(\tfrac{n}{k^2})\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ е каноничното претставување на бројот n. Ако n е претставен како производ на два заемно прости броеви, тогаш секој избор на r од $k-$те прости множители $p_1, p_2, ..., p_k$ дава разложување

$$n = p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} p_{i_2}^{\alpha_{i_2}} ... p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \cdot p_{i_{r+1}}^{\alpha_{i_{r+1}}} p_{i_{r+2}}^{\alpha_{i_{r+2}}} ... p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}\,,$$

при што $i_1, i_2, ..., i_k$ е некоја пермутација на броевите $1, 2, ..., k$. Затоа, според претходната задача имаме

$$\theta(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k = 2^{\omega(n)} = \sum_{t|n} \mu^2(t)\,,$$

што значи дека $\theta(n)$ е мултипликативна функција. Значи, левата и десната страна на (1) се мултипликативни функции, па затоа да го докажеме доволно е идентитетот за броеви од облик $n = p^a$. Притоа, заради квадратот кој се јавува во (1), одделно ќе ги разгледуваме случаите кога $a = 2k$ и $a = 2k-1$. Имаме

$$\sum_{t^2|p^{2k}} f(t)\tau(\tfrac{p^{2k}}{t^2}) = \sum_{i=0}^{k} f(p^i)\tau(p^{2k-2i}) = \sum_{i=0}^{k} f(p^i)(2k-2i+1).$$

Од друга страна, бидејќи $\theta(1) = 1, \theta(p^a) = 2$, добиваме

$$\begin{aligned}
\sum_{t^2|p^{2k}} g(t)\theta(\tfrac{p^{2k}}{t^2}) &= \sum_{i=0}^{k} g(p^i)\theta(p^{2k-2i}) = g(p^k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2g(p^i) \\
&= \sum_{j=0}^{k} f(p^j) + 2\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} f(p^j) = \sum_{j=0}^{k} f(p^j) + 2\sum_{j=0}^{k-1} f(p^j) \sum_{i=j}^{k-1} 1 \\
&= 2\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) f(p^j) + \sum_{j=0}^{k} f(p^j) = \sum_{j=0}^{k} (2k-2j+1) f(p^j),
\end{aligned}$$

што значи дека идентитетот (1) важи за броеви од видот $n = p^{2k}$. Понатаму,

$$\sum_{t^2|p^{2k-1}} f(t)d(\tfrac{p^{2k-1}}{t^2}) = \sum_{i=0}^{k-1} f(p^i)d(p^{2k-2i-1}) = 2\sum_{i=0}^{k-1} (k-i) f(p^i)\,,$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{t^2|p^{2k-1}} g(t)\theta(\tfrac{p^{2k-1}}{t^2}) &= \sum_{i=0}^{k-1} g(p^i)\theta(p^{2k-2i-1}) = 2\sum_{i=0}^{k-1} g(p^i) = 2\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} f(p^j) \\
&= 2\sum_{j=0}^{k-1} f(p^j) \sum_{i=j}^{k-1} 1 = 2\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) f(p^j),
\end{aligned}$$

што значи дека идентитетот (1) важи за броеви од видот $n = p^{2k-1}$.

10. ОЈЛЕРОВА ФУНКЦИЈА

1. Нека $a \in \mathbb{N}$ и p е прост број. Докажи дека $\varphi(p^a) = p^{a-1}\varphi(p)$.

Решение. Имаме

$$\varphi(p^a) = p^a(1-\tfrac{1}{p})$$

и како $\varphi(p) = p-1$, со замена во горното равенство наоѓаме

$$\varphi(p^a) = p^{a-1}(p-1) = p^{a-1}\varphi(p).$$

2. Нека $m, a \in \mathbb{N}$. Докажи, дека $\varphi(m^a) = m^{a-1}\varphi(m)$.

Решение. Нека $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$. Имаме $m^a = p_1^{aa_1} p_2^{aa_2} ... p_k^{aa_k}$, па затоа

$$\begin{aligned}\varphi(m^a) &= p_1^{aa_1} p_2^{aa_2} ... p_k^{aa_k} (1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k}) \\ &= p_1^{aa_1-a_1} p_2^{aa_2-a_2} ... p_k^{aa_k-a_k} p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} (1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k}) \\ &= p_1^{a_1(a-1)} p_2^{a_2(a-1)} ... p_k^{a_k(a-1)} p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} (1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k}) \\ &= [p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}]^{a-1} p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} (1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k}) \\ &= m^{a-1}\varphi(m).\end{aligned}$$

3. Ако n е сложен природен број, тогаш $\varphi(n) \le n - \sqrt{n}$. Докажи!

Решение. Нека n е сложен и $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ е неговото канонично претставување. Тоа значи дека n има прост множител $p_j \le \sqrt{n}$, па затоа важи

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} ... p_k^{a_k-1}(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_k}) \\ &\le n(1-\tfrac{1}{p_j}) \le n(1-\tfrac{1}{\sqrt{n}}) = n - \sqrt{n}.\end{aligned}$$

4. Дадено е $\varphi(m)$. Пресметај $\varphi(2m)$.

Решение. Ако m е непарен број, тогаш $(2, m) = 1$, па затоа

$$\varphi(2m) = \varphi(2)\varphi(m) = \varphi(m).$$

Ако m е парен број, тогаш $m = 2^k p$ и $2m = 2^{k+1} p$, каде p е непарен број, па затоа

$$\begin{aligned}\varphi(2m)&=\varphi(2^{k+1}p)=\varphi(2^{k+1})\varphi(p)\\&=2^{k+1}(1-\tfrac{1}{2})\varphi(p)=2\cdot 2^k(1-\tfrac{1}{2})\varphi(p)\\&=2\varphi(2^k)\varphi(p)=2\varphi(2^k p)=2\varphi(m).\end{aligned}$$

5. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(3^m5^n)=600$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3^{m-1}5^{n-1}\cdot 2\cdot 4=600,$$

т.е. на равеката

$$3^{m-1}5^{n-1}=3\cdot 5^2.$$

Во множеството $\mathbb{N}$ решение на последната равенка е $m=2,n=3$.

6. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката $\varphi(n)=11424$, ако $n=p^2q^2$ и p и q се прости броеви.

Решение. Од $n=p^2q^2$, каде p и q се прости броеви следува дека равенката $\varphi(n)=11424$ е еквивалентна на равенката

$$pq(p-1)(q-1)=2^5\cdot 3\cdot 7\cdot 17.$$

Со непосредна проверка добиваме дека решенија на последната равенка се $p=7, q=17$ и $p=17, q=7$, па затоа $n=7^2 17^2=14161$.

7. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{2}$.

Решение. Јасно n мора да е парен број. Нека $n=2^a r$, каде r е непарен број и $a\in\mathbb{N}$. Равенката добива облик $2^{a-1}\varphi(r)=2^{a-1}r$, од каде следува $r=1$ и $n=2^a$, $a\in\mathbb{N}$.

8. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{n}{3}$.

Решение. Нека $n=2^a3^b r$, каде r е природен број кој не е делив со 2 и со 3 и $a,b\in\mathbb{N}$. Равенката го добива обликот $2^{a-1}3^{b-1}(3-1)\varphi(r)=2^a3^{b-1}r$, од каде следува $r=1$ и $n=2^a3^b,\ a,b\in\mathbb{N}$.

9. Реши ја равенката $\varphi(n)=\frac{2n}{3}$.

Решение. Бројот $\frac{2n}{3}$ треба да е природен број, па затоа $3\,|\,n$. Нека $n=3^k m$, каде $k\ge 1, m\ge 1$ и $(3,m)=1$. Тогаш

$$\varphi(n)=\varphi(3^k m)=\varphi(3^k)\varphi(m)=2\cdot 3^{k-1}\varphi(m),$$

па ако замениме во дадената равенка добиваме

$$2\cdot 3^{k-1}\varphi(m)=\tfrac{2}{3}3^k m \text{, т.е. } \varphi(m)=m,$$

од каде следува $m=1$. Конечно, решенија на дадената равенка се броевите од облик $n=3^k, k\in\mathbb{N}$.

10. Реши ја равенката $\varphi(2n)=\varphi(3n)$.

Решение. Нека $n=2^a 3^b r$, каде $a,b\geq 0$, $r>1$ и $(r,6)=1$. Со замена во дадената равенка последователно добиваме

$$\varphi(2^{a+1}3^b r)=\varphi(2^a 3^{b+1} r),$$

$$\varphi(2^{a+1})\varphi(3^b)\varphi(r)=\varphi(2^a)\varphi(3^{b+1})\varphi(r)$$

$$2^a\varphi(3^b)=\varphi(2^a)\cdot 2\cdot 3^b.$$

Ако $b>0$, тогаш последната равенка го добива обликот

$$2^a\cdot 2\cdot 3^{b-1}=\varphi(2^a)\cdot 2\cdot 3^b \text{, т.е. } 2^a=3\varphi(2^a),$$

што е противречност. Значи, $b=0$ и го добиваме равенството $2^a=2\varphi(2^a)$, т.е. равенството $2^{a-1}=\varphi(2^a)$, кое е исполнето за секој $a\geq 1$. Конечно, решение на задачата е $n=2^a r$, каде a е произволен природен број и r е произволен природен број заемно прост со 6.

11. Пресметај го збирот

$$\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^a),$$

каде p е прост број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+...+\varphi(p^a)&=1+(p-1)+p(p-1)+...+p^{a-1}(p-1)\\&=1+p-1+p^2-p+...+p^a-p^{a-1}=p^a.\end{aligned}$$

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\tau(\varphi(3^k))=2^k$.

Решение. Имаме $\varphi(3^k)=2\cdot 3^{k-1}$, па затоа

$$\tau(\varphi(3^k))=\tau(2\cdot 3^{k-1})=\tau(2)\tau(3^{k-1})=2k$$

и со замена во равенката добиваме $2k=2^k$, т.е. $k=2^{k-1}$. Но, $k=2^{k-1}$, за $k=1,2$ и $2^{k-1}>k$, за $k\geq 3$, па добиваме дека решенија на дадената равенка се $k=1$ и $k=2$.

13. Определи ги сите природни броеви од облик $n=p^k, k\in\mathbb{N}$ и p е прост број такви што $\varphi(\tau(n))=\tau(\varphi(n))$.

Решение. Нека $n=p^k, k\in\mathbb{N}$ и p е прост број. Имаме

$$\varphi(\tau(p^k))=\varphi(k+1) \text{ и } \tau(\varphi(p^k))=\tau(p^{k-1}(p-1))=\tau(p^{k-1})\tau(p-1)=k\tau(p-1),$$

па од условот на задачата добиваме $\varphi(k+1)=k\tau(p-1)$. Но, $\varphi(k+1)\le k$ и $\tau(p-1)\ge 1$, па затоа последното равенство е можно ако и само ако $\tau(p-1)=1$ и $\varphi(k+1)=k$, од што следува дека $p-1=1$, т.е. $p=2$ и $q=k+1$ е прост број. Конечно, решение на задачата е $n=2^{q-1}$, каде q е прост број.

14. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $(a,b)=d,\ [a,b]=m$. Докажи, дека

$$\varphi(ab)=d\varphi(m).$$

Решение. Ако еден од броевите a или b е еднаков на 1, тогаш тврдењето е очигледно. Нека $a,b>1$. Имаме

$$a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k} \text{ и } b=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_k^{b_k}$$

каде $p_1,p_2,...,p_k$ се различни прости броеви и $a_i\ge 0, b_i\ge 0$ и $a_i+b_i\ge 1$, за $i=1,2,...,k$. Тогаш

$$d=(a,b)=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k},\ m=[a,b]=p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k},$$

каде

$$n_i=\min\{a_i,b_i\}\ge 0,\quad m_i=\max\{a_i,b_i\}\ge 1,\ i=1,2,3,...,k.$$

Имаме

$$\begin{aligned}\varphi(ab)&=\varphi(p_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}...p_k^{a_k+b_k})\\&=p_1^{a_1+b_1-1}p_2^{a_2+b_2-1}...p_k^{a_k+b_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}d\varphi(m)&=p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}p_1^{m_1-1}p_2^{m_2-1}...p_k^{m_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\\&=p_1^{m_1+n_1-1}p_2^{m_2+n_2-1}...p_k^{m_k+n_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\\&=p_1^{a_1+b_1-1}p_2^{a_2+b_2-1}...p_k^{a_k+b_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\end{aligned}$$

па затоа $\varphi(ab)=d\varphi(m)$.

15. Нека $n=2^k+1$, k е природен број. Ако $\varphi(n)\,|\,(n-1)$, тогаш n е прост број. Докажи!

Решение. Нека $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$ е каноничното претставување на n. Од $\varphi(n)$ е делител на $n-1=2^k$, следува $\varphi(n)=2^m,\ m\in\mathbb{N}$. Значи

$$p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}...p_s^{a_s-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_s-1)=\varphi(n)=2^m .$$

Но, бројот n е непарен, па затоа броевите $p_1,p_2,...,p_s$ се непарни, од што следува дека горното равенство е можно ако и само ако $a_1=a_2=...=a_s=1$, па затоа

$$(p_1-1)(p_2-1)...(p_s-1)=2^m .$$

Оттука следува, дека секој од броевите $p_i, i=1,2,...,s$ е од видот $p_i=2^{t_i}+1$, $t_i\ge 1$. Нека претпоставиме дека $s>1$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $t_1<t_2<...<t_s$. Според тоа,

$$\begin{aligned}2^k+1=n&=p_1p_2...p_s\\&=(2^{t_1}+1)(2^{t_2}+1)...(2^{t_s}+1),\\&=1+2^{t_1}+2^{t_2}M\end{aligned}$$

каде $M\in\mathbb{N}$, од каде добиваме

$$2^{k-t_1}=1+2^{t_2-t_1}M ,$$

што не е можно бидејќи $k>t_1$ и $t_2>t_1$. Значи, $s=1$ и $n=p_1$ е прост број.

16. Докажи дека за секој природен број n постојат природни броеви

$$a_1<a_2<...<a_n$$

такви што

$$\varphi(a_1)>\varphi(a_2)>...>\varphi(a_n) .$$

Решение. Индуктивно ќе конструираме низа со саканото својство. За $n=1$ тврдењето е тривијално.

Нека природните броеви $a_1<a_2<...<a_n$ се такви, што $\varphi(a_1)>\varphi(a_2)>...>\varphi(a_n)$. Со p_i да го означиме $i-$тиот прост број. Нека p_N е најголемиот меѓу сите прости делители на броевите $a_1,a_2,...,a_n$. Тогаш секој природен број x чии прости делители се поголеми од p_N е заемно прост со секој од броевите $a_1,a_2,...,a_n$. Последното значи дека низата $a_1x<a_2x<...<a_nx$ исто така го има саканото својство, бидејќи $\varphi(a_ix)=\varphi(a_i)\varphi(x)$.

Сега, ќе најдеме таков x и ќе избереме природен број y таков, што $y<a_1x$ и $\varphi(y)>\varphi(a_1x)$, од што ќе следува дека тврдењето важи и за $n+1$.

Прво ќе докажеме дека постои x таков, што $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)}>4$, т.е. $\frac{x}{\varphi(x)}>4\frac{\varphi(a_1)}{a_1}$. Нека $x_m=p_{N+1}p_{N+2}...p_{N+m}$, каде m е природен број. Тогаш

$$\frac{x_m}{\varphi(x_m)}=\prod_{i=N+1}^{N+m}\frac{p_i}{p_i-1}=\prod_{i=N+1}^{N+m}(1+\frac{1}{p_i-1})\ge\sum_{i=N+1}^{N+m}\frac{1}{p_i-1} .$$

Бидејќи $\sum_{i=N+1}^{N+m}\frac{1}{p_i-1}\to\infty$ кога $m\to\infty$, постои m таков, што $\frac{x_m}{\varphi(x_m)}>4\frac{a_1}{\varphi(a_1)}$.
Сега доволно е да земеме $x=x_m$.

Да забележиме дека од $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)}>4$ следува, дека за природниот број t таков што $2^{t-2}<\varphi(a_1x)<2^{t-1}$ важи $\varphi(a_1x)<2^{t-1}<2^t<a_1x$. Сега, доволно е земеме $y=2^t$ и низата $y<a_1x<a_2x<...<a_nx$ го има саканото својство.

17. Определи ги сите природни броеви n, за кои бројот $\frac{n}{\varphi(n)}$ е исто така природен број.

Решение. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничната репрезентација (1) на n. Од (5) заклучуваме дека

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\frac{p_1p_2\cdots p_k}{(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)}.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$p_1<p_2<...<p_k.$$

Ако $k\geq 3$, тогаш $p_2\neq 2$ па според тоа бројот p_2-1 е парен број. Бидејќи $p_3,p_4,...,p_k$ се прости броеви, секој од броевите $p_3-1,p_4-1,...,p_k-1$ се парни броеви. Значи именителот на $\frac{n}{\varphi(n)}$ е делив со 2^{k-1}, па затоа и со 2^2 бидејќи $k\geq 3$. Од друга страна броителот е делив најмногу со 2, и тоа во случај кога $p_1=2$. Според тоа, за бараните броеви n од задачата, $k=1$ или $k=2$.
При $k=1$ мора да е исполнет условот $p_1=2$, бидејќи во спротивно именителот на $\frac{p_1}{p_1-1}$ е делив со 2, а броителот би бил непарен број. Според тоа $\frac{p_1}{p_1-1}$ не е цел број. Решение на задачата во случајот $k=1$ се сите цели броеви n од облик $n=2^\alpha$, каде α е произволен природен број.
При $k=2$, со аналогни разгледувања како и во претходниот дел, се покажува дека $p_1=2$. Ќе покажеме дека $p_2=3$. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $p_2>3$. Тогаш $p_2=2q+1$, каде $q>1$. За количникот $\frac{n}{\varphi(n)}$ добиваме

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\frac{2\cdot p_2}{1\cdot 2\cdot q}=\frac{p_2}{q}.$$

За да бројот $\frac{p_2}{q}$ биде цел број, мора да е исполнет $q=1$ бидејќи p_2 е прост број поголем од 3 а $q<1$. Во тој случај $p_2=3$ што е во спротивност со почетната претпоставка. Значи $p_2=3$.

Конечно, бараните броеви имаат облик $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, каде α и β се произволни природни броеви. Да напоменеме дека β може да прима вредност 0.

18. Определи ги сите природни броеви n такви што $\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n$.

Решение. За функцијата $\varphi(k)$ важи $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(k)$ е парен број ако $k > 2$. Освен тоа,

$$\varphi(2k) = \begin{cases} 2\varphi(k), & \text{ако } k \text{ е парен} \\ \varphi(k), & \text{ако } k \text{ е непарен.} \end{cases} \tag{1}$$

Нека n е решение. Ќе разгледаме два случаја.

Прв случај. Ако n е парен број, тогаш $n = 2^s m$, каде $s, m \in \mathbb{N}$ и m е непарен број. Ако замениме во условот последователно добиваме

$$\varphi(\varphi(2^s m)) + \varphi(2^s m) = 2^s m,$$
$$\varphi(2^{s-1}\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m.$$

Ако $m = 1$, тогаш последното равенство го добива видот $\varphi(2^{s-1}) = 2^{s-1}$ и единствена можност е $s = 1$, од што следува $n = 2$. Ако $m > 1$, тогаш $\varphi(m)$ е парен број и од (1) следува

$$2^{s-1}\varphi(\varphi(m)) + 2^{s-1}\varphi(m) = 2^s m$$
$$\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) = 2m.$$

Но, $\varphi(m) < m$, за секој $m > 1$, па затоа

$$\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) \le \varphi(m) + \varphi(m) < 2m,$$

што е противречност.

Втор случај. Ако n е непарен, тогаш $\varphi(n) = 1$ или $\varphi(n) = 2^s k$, каде $s, k \in \mathbb{N}$ и k е непарен број.

Случајот $\varphi(n) = 1$, доведува до $n = \varphi(1) + 1 = 2$, што е противречност.

Ако $\varphi(n) = 2^s k$, каде $s, k \in \mathbb{N}$ и k е непарен број, тогаш со замена во условот добиваме

$$\varphi(2^s k) + 2^s k = n$$
$$2^{s-1}\varphi(k) + 2^s k = n.$$

Но, n е непарен број, па последното равенство е можно ако и само ако $s = k = 1$, што значи $n = 3$.

Конечно, $n = 2$ и $n = 3$ се единствени решенија на задачата.

19. Нека n е непарен природен број таков што броевите $\varphi(n)$ и $\varphi(n+1)$ се степени на бројот 2. Докажи, дека $n+1$ е степен на бројот 2 или $n+1 = 5$.

Решение. Ако $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$ е каноничното претставување на бројот n, тогаш

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i-1}(p_i-1),$$

па бидејќи $\varphi(n)$ нема други степени освен бројот 2, мора да важи $r_i=1$ и $p_i-1=2^{b_i}$ за секој i и некои b_i. Но, бројот $2^{b_i}+1$ може да биде прост само ако бројот b_i е степен на бројот 2, добиваме дека $2^{2^{c_i}}+1$, за некои различни c_i.

Нека претпоставиме дека бројот $n+1$ не е степен на бројот 2. Бидејќи бројот $\varphi(n+1)$ е степен на бројот 2 следува дека сите непарни прости делители на бројот $n+1$ се од облик $2^{2^{d_i}}+1$. Според тоа,

$$n=\prod_{i=1}^{k}(2^{2^{c_i}}+1) \text{ и } n+1=\prod_{j=1}^{l}(2^{2^{d_j}}+1),$$

при што сите c_i и d_j се различни меѓе себе. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c_1<c_2<...<c_k$ и $d_1<d_2<...<d_l$.

За секои $m,M\in\mathbb{N}, m\leq M$, со едноставна индукција се докажува дека важи

$$\frac{2^{2^m}+1}{2^{2^m}}<\prod_{i=m}^{M}\frac{2^{2^i}+1}{2^{2^i}}=\frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1}\cdot\frac{2^{2^{M+1}}-1}{2^{2^{M+1}}}<\frac{2^{2^m}}{2^{2^m}-1}.$$

Оттука добиваме

$$\frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}}2^c\leq n<\frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1}2^c \text{ и } \frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}2^d\leq n+1<\frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1}2^d,$$

каде $c=\sum_{i=1}^{k}2^{c_i}$ и $d=\sum_{j=1}^{l}2^{d_j}$. Од горните неравенства следува дека $c=d$.

Ако $d_1>c_1$, тогаш

$$\frac{2^{2^{d_1}}}{2^{2^{d_1}}-1}<\frac{2^{2^{c_1}}+1}{2^{2^{c_1}}},$$

па затоа $n+1<n$, што е противречност. Според тоа, $d_1<c_1$, па тогаш

$$n+1\geq\frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}2^d>\frac{2^{2^{c_1}}}{2^{2^{c_1}}-1}2^c>n,$$

па затоа

$$\frac{n+1}{n}>\frac{2^{2^{d_1}}+1}{2^{2^{d_1}}}\cdot\frac{2^{2^{c_1}}-1}{2^{2^{c_1}}}.$$

Но,

$$n\geq 2^{2^{c_1}}+1\geq a^2+1, \text{ за } a=2^{2^{d_1}},$$

па затоа

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}>\frac{(a+1)(a^2-1)}{a^3}=1+\frac{a^2-a-1}{a^3},$$

од каде следува

$$a^2+1\le n<\frac{a^3}{a^2-a-1}.$$

Единствена можност е $a=2$ и $n=5$.

20. Нека $n\in\mathbb{N}$. Докажи, дека

$$\sum_d \mu(d)=0,$$

каде сумирањето е по сите природни броеви d (ако има такви), за кои $\varphi(d)=n$.

Решение. Постојат најмногу конечно многу природни броеви d, за кои $\varphi(d)=n$. Затоа, сумата од условот на задачата содржи конечно многу собирци. Притоа, можеме да ги разгледуваме ненултите собирци, т.е. природните броеви d, кои не се делат со квадрати на природни броеви, поголеми од 1, и такви што $\varphi(d)=n$. Ако d е непарен број со овие својства, тогаш $2d$ е парен број со истите својства, бидејќи

$$\varphi(2d)=\varphi(2)\varphi(d)=\varphi(d)=n.$$

Ако, пак d е парен број со овие својства, тогаш $4\nmid d$ и затоа $\frac{d}{2}$ е непарен број со истите својства, бидејќи

$$\varphi(\tfrac{d}{2})=\varphi(d)=n.$$

Од досега изнесеното следува, дека разгледуваните природни броеви може да се поделат на парови од видот $d,2d$ (d е непарен број). Притоа, за броевите $d,2d$ од секој пар важи

$$\begin{aligned}\mu(d)+\mu(2d)&=\mu(d)+\mu(2)\mu(d)\\&=\mu(d)-\mu(d)=0.\end{aligned}$$

Конечно, од претходно изнесеното следува тврдењето на задачата.

21. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[\tfrac{n}{k}]^2=2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)-1.$$

Решение. Нека

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)[\tfrac{n}{k}]^2.$$

Имаме $S(1)=1=\varphi(1)$, а за $n\ge 2$ добиваме

$$S(n)-S(n-1)=\sum_{k=1}^{n}\mu(k)([\tfrac{n}{k}]-[\tfrac{n-1}{k}])([\tfrac{n}{k}]+[\tfrac{n-1}{k}]$$
$$=\sum_{k|n}\mu(k)\cdot 1\cdot(2\tfrac{n}{k}-1)$$
$$=2n\sum_{k|n}\frac{\mu(k)}{k}-\sum_{k|n}\mu(k)$$
$$=2n\frac{\varphi(n)}{n}-0=2\varphi(n).$$

Сега, ако ги собереме равенствата

$$\begin{aligned}&S(n)-S(n-1)=2\varphi(n),\\&S(n-1)-S(n-2)=2\varphi(n-1),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&S(3)-S(2)=2\varphi(3),\\&S(2)-S(1)=2\varphi(2),\end{aligned}$$

добиваме

$$S(n)=2\sum_{k=2}^{n}\varphi(k)+1=2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)-1.$$

22. Функцијата $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со $\psi(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k,n)$.

а) Докажи дека $\psi(mn)=\psi(m)\psi(n)$, каде $m,n\in\mathbb{N}$ и $(m,n)=1$.

б) Докажи дека за секој природен број $a\in\mathbb{N}$ равенката $\psi(x)=ax$ има решение.

в) Определи ги природните броеви a такви што равенката $\psi(x)=ax$ има единствено решение.

Решение. Нека n е природен број. За секој $k=1,2,...,n$, бројот (k,n) е делител на бројот n.

Нека d е произволен делител на n. Тогаш $\frac{n}{d}$ е природен број и $\frac{n}{d}\le n$. Ќе го определиме точниот број на природни броеви $k=1,2,...,n$ такви што $(k,n)=\frac{n}{d}$. Од равенството $(k,n)=\frac{n}{d}$ добиваме дека $\frac{n}{d}\,|\,k$ и постои единствен $l\in\mathbb{N}$ таков што $l\frac{n}{d}=k\le n=d\frac{n}{d}$. Од последното неравенство добиваме $l\le d$.

Од друга страна,

$$\frac{n}{d}=(k,n)=(l\tfrac{n}{d},d\tfrac{n}{d})=\tfrac{n}{d}(l,d),$$

па според тоа $(l,d)=1$. Точно е и обратното, т.е. ако l е природен број таков што $(l,d)=1$, $l\le d$, тогаш

$$\tfrac{n}{d}(l,d)=\tfrac{n}{d},\ (\tfrac{n}{d}l,\tfrac{n}{d}d)=\tfrac{n}{d},\ (k,n)=\tfrac{n}{d},$$

каде $k=l\frac{n}{d}$.

Броеви $l\in\mathbb{N},\ l\le d$ такви што $k=l\frac{n}{d}$ и за кои $(k,n)=\frac{n}{d}$ се сите природни броеви такви што $(l,d)=1$. Нивниот број е еднаков на $\varphi(d)$. Според тоа,

$$\psi(n)=\sum_{k=1}^{n}(k,n)=\sum_{d|n}\varphi(d)\tfrac{n}{d}=n\sum_{d|n}\frac{\varphi(d)}{d}. \qquad (1)$$

а) Нека m и n се природни броеви кои се заемно прости. Ако f е кој било делител на mn, тогаш постојат d и e такви што $(d,e)=1,\ f=de,\ d\,|\,n,\ e\,|\,m$. Но тогаш

$$\begin{aligned}\psi(mn)&=mn\sum_{f|mn}\frac{\varphi(f)}{f}=mn\sum_{d|m,e|n}\frac{\varphi(de)}{de}\\&=mn\sum_{d|m,e|n}\frac{\varphi(d)\varphi(e)}{de}=mn\sum_{d|m,\ e|n}\frac{\varphi(d)}{d}\frac{\varphi(e)}{e}\\&=(m\sum_{d|m}\frac{\varphi(d)}{d})(n\sum_{e|n}\frac{\varphi(e)}{e})=\psi(m)\psi n).\end{aligned}$$

б) Нека $a\in\mathbb{N}$ е фиксен природен број. За $n=p^k$, каде p е прост број и $k\in\mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{\psi(p^k)}{p^k}&=\sum_{d|p^k}\frac{\varphi(d)}{d}=\frac{\varphi(1)}{1}+\frac{\varphi(p)}{p}+\frac{\varphi(p^2)}{p^2}+...+\frac{\varphi(p^k)}{p^k}\\&=1+\frac{p-1}{p}+\frac{p(p-1)}{p^2}+\frac{p^2(p-1)}{p^3}+...+\frac{p^{k-1}(p-1)}{p^k}=1+\frac{k(p-1)}{p}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Ако избереме $p=2$ и $k=2(a-1)$ добиваме

$$\frac{\psi(p^k)}{p^k}=1+\frac{2(a-1)(2-1)}{2}=1+a-1=a,\ \psi(p^k)=ap^k,\text{ т.е. } \psi(n)=an.$$

в) Да забележиме дека за било кој прост број p, $\psi(p)=p^{p+1}$. Навистина, ако замениме $k=p$ во (2), тогаш

$$\frac{\psi(p^p)}{p^p}=1+\frac{p(p-1)}{p}=p.$$

Нека a има непарен прост фактор p и $a_1=\frac{a}{p}$. За $x=p^p2^{2(a_1-2)}$ имаме

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi(p^p2^{2(a_1-1)})=\psi(p^p)\psi(2^{2(a_1-1)})\\&=p^{p+1}a_12^{2(a_1-1)}=pa_1(p^p2^{2(a_1-1)})=ax\end{aligned}.$$

Значи, за природни броеви a кои имаат непарни прости делители равенката $\psi(x)=ax$ нема единствено решение.

Сега не е тешко да се докаже дека $\psi(x)=ax$ има единствено решение ако и само ако a е степен на бројот 2. Докажи!

23. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати по 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:
а) дадените броеви се 1 и 1000,
б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.
Решение. а) Да забележиме, дека бројот 2013 не може да се појави на правата за парот (a,b), ако $a+b>2013$. Лесно се покажува дека по 2013 чекори бројот 2013 се запишува само двапати и тоа во $8-$миот и $2013-$ тиот чекор.
б) Да го додадеме на правата бројот 1 по бројот 1000. Ќе преброиме колку пати се среќава бројот 2013 на новата права по 2013 чекори. Конструираме индуктивно низа A од парови броеви. Прво избираме

$$A=\{(1,2),(2,3),...,(999,1000),(1000,1)\}$$

и на секој чекор при запишување на бројот $k=a+b$ за парот (a,b) во множеството A додаваме два нови пара (a,k) и (k,b).

Со индукција по $a+b$ ќе докажеме дека подредениот пар (a,b) се појавува во множеството A само кога $(a,b)=1$ и секогаш кога $(a,b)=1$ парот (a,b) се појавува точно еднаш во множеството A. Базата на индукцијата се проверува директно. Нека претпоставиме, дека тврдењето е точно за $a+b<k$. Ќе докажеме дека тоа е точно за $a+b=k$. Парот (a,b) се додава во A кога го запишуваме бројот b меѓу броевите од парот $(a,b-a)$. Од $a+(b-a)=b<k$, следува дека парот $(a,b-a)$ е во множеството само ако $(a,b-a)=1$ и ако $(a,b-a)=1$, тогаш парот $(a,b-a)$ се појавува точно еднаш. Бидејќи $(a,b)=(a,b-a)$ твдењето е точно и за $a+b=k$, со што доказот е завршен.

Според тоа, бројот на запишувања на бројот 2013 е еднаков на паровите $(a,2013-a)$ за кои $(a,2013-a)=1$. Тоа значи, дека 2013 се запишува точно $\varphi(2013)=1200$ пати.

Од а) имаме дека 2013 меѓу 1 и 1000 се запишува двапати. Значи, на почетната права 2013 е запишан $1200-2=1198$ пати.

11. КОНГРУЕНЦИИ, ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1. Природниот број го нарекуваме *двоен број* ако неговиот декаден запис се состои од блок цифри. На пример, 360360 е двоен број додека 36036 не е двоен број. Докажи дека постојат бесконечно многу двојни броеви кои се точни квадрати.

Решение. Од Њутновата биномна формула следува:

$$\begin{aligned}10^{21} &= (10^3)^7 = (1001-1)^7 = (7\cdot 143-1)^7\\ &= (7\cdot 143)^7 - \tbinom{7}{1}(7\cdot 143)^6 + \tbinom{7}{2}(7\cdot 143)^5 - \ldots + \tbinom{7}{6}\cdot 7\cdot 143 - 1\\ &\equiv -1 \pmod{49}.\end{aligned}$$

Според тоа бројот $10^{21n}+1$ е делив со 49 за секој непарен природен број n. Оттука добиваме

$$A = \tfrac{9}{49}(10^{21n}+1)^2 = \left(\tfrac{3(10^{21n}+1)}{7}\right)^2 \in \mathbb{N}.$$

Лесно се проверува дека $A = \frac{9}{49}(10^{21n}+1)^2$ е двоен број.

2. Природните броеви m,n,k се такви што 5^n-2 и 2^k-5 се деливи со 5^m-2^m. Докажи дека $(m,n)=1$.

Решение. Да означиме $M=5^m-2^m$. Имаме $5^{nk}\equiv 2^k\equiv 5 \pmod M$, т.е. $M \mid 5^{nk-1}-1$. Аналогно важи $M \mid 2^{nk-1}-1$, па затоа

$$M=5^m-2^m \mid 5^{nk-1}-2^{nk-1}.$$

Оттука следува дека $m \mid nk-1$, па затоа $(m,n)=1$.

3. Докажи дека бројот $2^{2^n-1}-2^n-1$ е сложен за секој природен број $n>2$.

Решение. За парно n важи $a_n = 2^{2^n-1}-2^n-1 \equiv 2-1-1 = 0 \pmod 3$. Понатаму, за $n\equiv 1 \pmod 4$, $n>1$ важи

$$2^{2^n-1}\equiv 2^3 \text{ и } 2^n \equiv 2 \pmod 5,$$

па затоа $5 \mid a_n$. Нека k е природен број таков што $2^k \parallel n+1$. Тврдиме дека a_n е делив со $2^{2^k}+1$. Навистина, $2^{2^k}+1 \mid 2^{n+1}+1$, па затоа

$$2a_n = 2^{2^n}-2^{n+1}-2 \equiv 1+1-2 = 0 \pmod{2^{2^n}+1}.$$

4. Нека претпоставиме дека множеството $\{1,2,...,1998\}$ е поделено на дисјунктни множества $\{a_i,b_i\}$, $1\le i\le 999$ и $|a_i-b_i|=1$ или $|a_i-b_i|=6$ за $1\le i\le 999$. Докажи дека збирот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ завршува на цифрата 9.

Решение. Од $|a_i-b_i|=1$ или $|a_i-b_i|=6$ следува дека $|a_i-b_i|\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$. Според тоа,

$$S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv 999\equiv 4(\mathrm{mod}\,5).$$

За секои цели броеви a и b важи $|a+b|\equiv a-b\equiv a+b(\mathrm{mod}\,2)$. Оттука

$$S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv\sum_{i=1}^{999}a_i+b_i=\sum_{i=1}^{1998}i=\tfrac{1998\cdot 1999}{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2).$$

Од $5\,|\,S-4$ следува $5\,|\,S-9$. Јасно, $2\,|\,S-9$, па затоа $10\,|\,S-9$. Конечно, од $10\,|\,S-9$ следува дека бројот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ завршува на цифрата 9.

5. Нека $n\in\mathbb{N}$ и нека $a_1,a_2,...,a_k,(k\ge 2)$ се по парови различни природни броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1}-1)$ се деливи со n за секој $i\in\{1,2,...,k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1-1)$ не е делив со n.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека $a_ia_{i+1}\equiv a_i\ (\mathrm{mod}\,n)$ за $i=1,2,...,k$ (индексите се сметаат по модул k). Тогаш за секој j важи

$$a_j\equiv a_ja_{j+1}\equiv a_ja_{j+1}a_{j+2}\equiv...\equiv a_ja_{j+1}...a_{j+k-1}=a_1a_2...a_k\ (\mathrm{mod}\,n),$$

па затоа $a_1\equiv a_2\equiv...\equiv a_k\ (\mathrm{mod}\,n)$, што е противречност.

6. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на p^4-1 за секој прост број $p>3$.

Решение. Бидејќи $p>3$ е прост број, важи $p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,3)$, од што следува дека $p^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Од друга страна, p е непарен број, па затоа

$$p\equiv\pm 1,\pm 3,\pm 5,\pm 7(\mathrm{mod}\,2^4).$$

Со непосредна проверка се добива дека за секој можен остаток важи $p^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,2^4)$. Според тоа, $3\cdot 2^4$ е делител на p^4-1, за секој прост број p. Конечно, бидејќи $(5^4-1,7^4-1)=3\cdot 2^4$ добиваме дека бараниот најголем природен број е $3\cdot 2^4=48$.

7. Нека $n\in\mathbb{N}$ е природен број таков што $n\,|\,((1^n+2^n+3^n+...+(n-1)^n)+1)$. Докажи, дека n нема делител кој е точен квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека $n\,|\,S$, каде

$$S=(1^n+2^n+3^n+...+(n-1)^n)+1$$

и нека p е прост број чиј квадрат е делител на n, т.е. $n=mp^2$, за некој природен број m. Природниот број $N=1^n+2^n+3^n+...+(n-1)^n$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}N=&\underbrace{0^p+1^p+...+(p-1)^n}_{p\text{ собирци}}+\underbrace{p^n+(p+1)^n+...+(2p-1)^n}_{p\text{ собирци}}+\\&+\underbrace{(2p)^n+(2p+1)^n+...+(3p-1)^n}_{p\text{ собирци}}+...+\\&+\underbrace{[(mp-2)p]^n+[(mp-2)p+1]^n+...+[(mp-1)p-1]^n}_{p\text{ собирци}}+\\&+\underbrace{[(mp-1)p]^n+[(mp-1)p+1]^n+...+(mp^2-1)^n}_{p\text{ собирци}}\end{aligned}$$

Значи,

$$N=\sum_{k=0}^{mp-1}\sum_{i=0}^{p-1}(kp+i)^n.$$

Бидејќи

$$(kp+1)^n\equiv i^n(\text{mod}\,p),\ i=0,1,2,..,p-1,$$

следува дека

$$\sum_{i=0}^{p-1}(kp+i)^n\equiv\sum_{i=0}^{p-1}i^n(\text{mod}\,p),$$

од каде добиваме дека

$$\sum_{k=0}^{mp-1}\sum_{i=0}^{p-1}(kp+i)^n\equiv\sum_{k=0}^{mp-1}\sum_{i=0}^{p-1}i^n\equiv(mp)\sum_{i=0}^{p-1}i^n\equiv0(\text{mod}\,p).$$

Значи, $p\,|\sum_{k=0}^{mp-1}\sum_{i=0}^{p-1}(kp+i)^n=N$. Според тоа $p\nmid(N+1)=S$ што противречи на претпоставката. Значи, n нема делител кој што е точен квадрат.

8. Докажи дека ниту еден број од облик $8k+3$ или $8k+5$, $k\in\mathbb{Z}$ не може да се претстави во облик x^2-2y^2, каде $x,y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Ако за целите броеви x и y бројот x^2-2y^2 е непарен, тогаш x мора да е непарен и затоа $x^2\equiv1(\text{mod}\,8)$. Ако бројот y е парен, тогаш

$2y^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$, а ако бројот y е непарен, тогаш $2y^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 8)$. Значи, $x^2 - 2y^2 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, од што следува тврдењето на задачата.

9. Нека $a, b \in \mathbb{N}$, $b > 2$. Докажи, дека $2^a + 1$ не е делив со $2^b - 1$.

Решение. Ставаме $2^b - 1 = m$. Јасно, $2^b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$. Нека претпоставиме дека $m \mid (2^a + 1)$, т.е. дека $2^a + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$. Од теоремата за делење со остаток имаме $a = kb + c, 0 \le c < b$, па затоа $2^a = 2^{kb} 2^c \equiv 2^c (\mathrm{mod}\, m)$, од што следува дека $2^c + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$, т.е. $m \mid (2^c + 1)$, што не е можно бидејќи од $b > 2$ и $0 \le c < b$ следува $0 < 2^c + 1 < 2^b - 1$.

10. Нека p е прост број. Докажи дека $\binom{p}{k} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ за секој $k = 1, 2, ..., p-1$ и дека најголемиот заеднички делител на броевите $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, ..., \binom{p}{p-1}$ е еднаков на p.

Решение. За секој $k = 1, 2, ..., p-1$ важи

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!},$$

па затоа $k! \mid p(p-1)...(p-k+1)$. Но, $k < p$ и бидејќи p е прост број добиваме $(k!, p) = 1$, па затоа $k! \mid (p-1)...(p-k+1)$, што значи дека $p \mid \binom{p}{k}$, за секој $k = 1, 2, ..., p-1$. Според тоа, $\binom{p}{k} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ за секој $k = 1, 2, ..., p-1$.

Нека $d = (\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, ..., \binom{p}{p-1})$. Јасно, $p \mid d$. Но, $d \mid \binom{p}{1} = p$, па затоа $d = p$.

11. Ако $p > 2$ е прост број и $x^p + y^p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, тогаш $x^p + y^p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^2)$. Докажи!

Решение. Имаме

$$(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} x^{p-i} y^i \equiv x^p + y^p \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$$

и бидејќи p е прост број добиваме $x + y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $x \equiv -y (\mathrm{mod}\, p)$. Значи, $x = -y + kp$, $k \in \mathbb{Z}$, па затоа

$$\begin{aligned} x^p &= (-y+kp)^p = -y^p + kp^2 y^{p-1} - \binom{p}{2} k^2 p^2 y^{p-2} + ... + k^p p^p \\ &= -y^p + p^2 (ky^{p-1} - \binom{p}{2} k^2 y^{p-2} + ... + k^p p^{p-2}), \end{aligned}$$

т.е.

$$x^p + y^p = p^2(ky^{p-1} - \binom{p}{2}k^2y^{p-2} + ... + k^p p^{p-2}),$$

што значи $x^p + y^p \equiv 0 (\bmod p^2)$.

12. Ако $a \equiv b (\bmod m)$, тогаш $a^{m^k} \equiv b^{m^k} (\bmod m^{k+1})$, за секој $k \in \mathbb{N}_0$. Докажи!

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k = 0$, тврдењето очигледно е точно. Нека претпоставиме дека за некој $k \geq 0$ важи $a^{m^k} \equiv b^{m^k} (\bmod m^{k+1})$. Ставаме $l = m^k$ и добиваме

$$a^{m^{k+1}} - b^{m^{k+1}} = (a^l - b^l)(a^{l(m-1)} + a^{l(m-2)}b^l + ... + b^{l(m-1)}). \quad (1)$$

Од индуктивната претпоставка следува $m^{k+1} \mid (a^l - b^l)$, па затоа доволное да докажеме дека вториот множител во (1) е делив со m. Но, $a \equiv b (\bmod m)$, па затоа $a^l \equiv b^l (\bmod m)$, од што следува дека

$$\begin{aligned} a^{l(m-1)} + a^{l(m-2)}b^l + ... + b^{l(m-1)} &\equiv a^{l(m-1)} + a^{l(m-1)} + ... + a^{l(m-1)} \\ &\equiv ma^{l(m-1)} \equiv 0 (\bmod m). \end{aligned}$$

13. Нека $a_i, i = 1, 2, ..., 1990$ се природни броеви за кои важи

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1989}^2 = a_{1990}^2. \quad (1)$$

Докажи, дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Нека претпоставиме дека сите броеви $a_i, i = 1, 2, ..., 1990$ се непарни. За секој непарен природен број n важи $n^2 \equiv 1 (\bmod 8)$, па затоа

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1989}^2 \equiv 1989 \equiv 5 (\bmod 8) \text{ и } a_{1990}^2 \equiv 1 (\bmod 8),$$

што е противречи на (1).

Нека претпоставиме дека точно еден од броевите $a_i, i = 1, 2, ..., 1990$ е парен. Ако тоа е бројот a_{1990}, тогаш броевите $a_i, i = 1, 2, ..., 1989$ се непарни и повторно добиваме противречност. Ако тоа е еден од броевите a_i, $i = 1, 2, ..., 1989$, тогаш левата страна на (1) е парен број, а десната страна е непарен број, што не е можно.

14. Нека p е прост број. Докажи, дека може да се изберат p броеви помали од $2p^2$ такви што било кои две различни двојки броеви од избраните имаат различен збир.

Решение. За $a = 1, 2, 3, ..., p$ со r_a ќе го означиме остатокот кој се добива при делењето на a^2 со p, т.е. $0 \leq r_a \leq p - 1$ и $a^2 \equiv r_a (\bmod p)$.

Ќе го разгледаме множеството броеви $\{a+2pr_a \mid a=1,2,...,p\}$. Ќе докажеме дека броевите од ова множество ги исполнуваат условите од задачата. На почеток да забележиме дека ова множество има p елементи. Навистина, ако претпоставиме дека $a,b\in\{1,2,...,p\}$, $a>b$ се такви што

$$a+2pr_a=b+2pr_b,$$

тогаш $a-b=2p(r_b-r_a)$. Но тоа не е можно, бидејќи $a-b<p$ и $p\mid a-b$, што е противречност.

Ако $a+2pr_a$ е произволен број од тоа множество, тогаш

$$a+2pr_a<p+2p(p-1)=2p^2.$$

Нека претпоставиме дека постојат a,b,c,d, такви што $(a,b)\neq(c,d)$ и

$$a+2pr_a+b+2pr_b=c+2pr_c+d+2pr_d, \tag{1}$$

Од последното равенство добиваме

$$a+b\equiv c+d(\operatorname{mod} p)$$

т.е.

$$(a+b)-(c+d)\equiv 0(\operatorname{mod} p).$$

Значи, $p\mid(a+b)-(c+d)$. Заради неравенството $|a+b-c-d|<2p$, добиваме дека $|a+b-c-d|=p$ или $|a+b-c-d|=0$. Ако е точно првото од последните две равенства $p=2p|r_a+r_b-r_c-r_d|$, тогаш $1=2|r_a+r_b-r_c-r_d|$, т.е. $2|1$ што не е можно. Значи останува втората можност, т.е. $|a+b-c-d|=0$ од каде добиваме дека

$$a+b=c+d. \tag{2}$$

Во тој случај равенството (1) го добива обликот

$$r_a+r_b=r_c+r_d. \tag{3}$$

Од равенството (3) непосредно се добива

$$a^2+b^2\equiv c^2+d^2(\operatorname{mod} p). \tag{4}$$

Навистина

$$a^2+b^2\equiv r_a+r_b=r_c+r_d\equiv c^2+d^2(\operatorname{mod} p).$$

Од равенството (2) добиваме

$$(a+b)^2\equiv(c+d)^2(\operatorname{mod} p),$$

и бидејќи $2\nmid p$ добиваме дека $ab\equiv cd(\operatorname{mod} p)$. Во $\mathbb{Z}_p$ ќе ја разгледаме равенката

$$x^2-ux+v=0. \tag{5}$$

За оваа равенка во $\mathbb{Z}_p$ решенија се и $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$. Навистина

$$a^2-ua+v=r_a-(a+b)a+v=r_a-r_a-v+v=0-0=0$$

$$b^2-ub+v=r_b-(a+b)b+v=r_b-v-r_b+v=0-0=0$$
$$c^2-uc+v=r_c-(c+d)c+v=r_c-r_c-v+v=0-0=0$$
$$d^2-ud+v=r_d-(c+d)d+v=r_d-v-r_d+v=0-0=0\,.$$

Но, секоја равенка од втор степен над $\mathbb{Z}_p$ има две решенија па според тоа $a=c$ или $a=d$. Во првиот случај, заради (2) добиваме $b=d$ а во вториот случај $b=c$. Значи, $\{a,b\}=\{c,d\}$.

15. Даден е 25-цифрен број без деветки во декадниот запис. Докажи дека можеме да зголемиме две негови еднакви цифри за 1 така што ќе добиеме број кој не е делив со 7.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Дадениот број да го означиме со $n=\overline{a_{24}a_{23}...a_2a_1a_0}$. Ако $a_i=a_j=a_k$ за некои различни i,j,k, тогаш

$$10^i+10^j\equiv 10^i+10^k\equiv 10^j+10^k\equiv -n(\mathrm{mod}\,7),$$

па затоа $10^i\equiv 10^j\equiv 10^k\equiv -\frac{n}{2}(\mathrm{mod}\,7)$. Бидејќи низата $1,10,10^2,...,10^{24}$ е периодична по модул 7 со период 6, во неа секој остаток по модул 7 (па така и $-\frac{n}{2}$) се појавува најмногу пет пати. Според тоа, најмногу една цифра може да се појави повеќе од двапати, но таа цифра не може да се појави повеќе од пет пати. Последното значи дека n може да има најмногу $8\cdot 2+5=21$ цифра, што е противречност.

16. За природниот број n со b_n да го означиме бројот на единиците во бинарниот запис на n. Ќе велиме дека бројот n е *посебен* ако $b_n\,|\,n$.

а) Докажи дека не постојат 5 последователни посебни природни броеви.

б) Постојат бесконечно многу тројки последователни посебни природни броеви.

Решение. а) За $k\in\mathbb{N}$ броевите $4k+1$ и $4k+2$ не може истовремено да се посебни бидејќи $b_{4k+2}=b_{4k+1}>1$. Сега тврдењето следува од фактот дека меѓу било кои пет последователни броеви се наоѓаат броевите $4k+1$ и $4k+2$ за некој $k\in\mathbb{N}$.

б) Ќе определиме n така што броевите $n-1,n,n+1$ ќе бидат посебни со

$$b_{n-1}=7,\ b_n=4 \text{ и } b_{n+1}=5.$$

Бројот n го бараме да е од видот $2^{4a}+2^{4b}+2^{4c}+2^4$, бидејќи тогаш $4\,|\,n$ и $5\,|\,n$, па затоа треба да ги одбереме a,b,c уште да важи

$$7\,|\,n-1=2^{4a}+2^{4b}+2^{4c}+15,$$

за што е доволно да земеме $a\equiv b\equiv c\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$.

17. Разгледуваме 70-цифрен број со својство секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 во декадниот запис на бројот се појавува по точно десет пати, а цифрите 0, 8 и 9 не се појавуваат во неговиот декаден запис. Докажи дека во множеството од сите такви броеви не постојат два броја така што едниот е делител на другиот.

Решение. Нека a и b се броеви од даденото множество за кои важи $a|b$. Со $s(n)$ да го означиме збирот на цифрите на природниот број n. За секој природен број n важи $n \equiv s(n)(\mod 9)$, па затоа $a \equiv 10(1+2+...+7) \equiv 1(\mod 9)$ и $b \equiv 1(\mod 9)$. Од $a|b$ следува дека постои природен број $k>1$ таков што $b = ka$. Но, $a \ge 11...122..2...77...7$ и $b \le 77...766...6...11...1$, па затоа $1<k \le 6$. Значи, $1 \equiv b \equiv ka \equiv k(\mod 9)$, што противречи на $k \in \{2,3,4,5,6\}$.

18. Определи го најмалиот природен број M за кој бројот 2012 може да се запише како збир на кубови на M цели броеви.

Решение. Нека бројот 2012 е запишан како збир на кубови на M цели броеви. Лесно се проверува дека за произволен цел број x важи $x^3 \equiv 0,1$ или $-1(\mod 9)$. Од друга страна $2012 \equiv 9(\mod 9)$, па затоа $M \ge 4$. Но, едно можно претставување на 2012 како збир на четири кубови е

$$2012 = (-4)^3 + 5^3 + (-25)^3 + 26^3,$$

па затоа $M = 4$.

19. Нека a и b се заемно прости природни броеви. Определи ги сите природни броеви кои можат да бидат најголемиот заеднички делител на броевите $a+b$ и $\frac{a^{2005}+b^{2005}}{a+b}$.

Решение. Нека $d = (a+b, \frac{a^{2005}+b^{2005}}{a+b})$. Од $d | a+b$ следува $a \equiv -b(\mod d)$. Понатаму,

$$\frac{a^{2005}+b^{2005}}{a+b} = a^{2004} - a^{2003}b + ... - ab^{2003} + b^{2004} \equiv 0(\mod d).$$

Ако во последната конгруенција замениме $a \equiv -b(\mod d)$ добиваме

$$2005b^{2004} \equiv 0(\mod d),$$

т.е. $d | 2005b^{2004}$ и затоа $d | 2005a^{2004}$. Ако 2005 не е делив со d, тогаш $d | a$ и $d | b$, што не е можно бидејќи $(a,b) = 1$. Значи, $d | 2005$, од каде следува дека $d \in \{1,5,401,2005\}$.

20. Нека x и y се природни броеви за кои $3x+4y$ и $4x+3y$ се точни квадрати. Докажи дека x и y се деливи со 7.

Решение. *Лема.* Ако a и b се природни броеви такви што $7\,|\,a^2+b^2$, тогаш $7|a$ и $7|b$.

Доказ. Нека $7\,|\,a^2+b^2$. Бидејќи за секој цел број x важи $x^2\equiv 0,1,2$ или $4 \pmod 7$, од $7\,|\,a^2+b^2$ следува $a^2\equiv b^2\equiv 0 \pmod 7$. ■

Нека $3x+4y$ и $4x+3y$ се точни квадратина природни броеви. Тогаш постојат природни броеви a и b за кои $3x+4y=a^2$ и $4x+3y=b^2$. Бидејќи $a^2+b^2=7(x+y)$, од лемата следува дека $7|a$ и $7|b$. Оттука добиваме $49\,|\,a^2+b^2=7(x+y)$, т.е. $7|x+y$. Сега, $a^2=3x+4y=3(x-y)+7y$, па од $7|a$ следува $7|3(x-y)$, т.е. $7|x-y$. Според тоа, $7|(x+y)+(x-y)=2x$, што значи $7|x$. Конечно, од $7|x$ и $7|x+y$ следува $7|y$.

21. Нека p е прост број од видот $4k+3$ и $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ се $p-1$ последователни природни броеви. Докажи, дека овие броеви не може да се поделат на две групи така да производот на броевите од едната група да е еднаков на производот од броевите на другата група.

Решение. Меѓу $p-1$ последователни природни броеви најмногу еден е делив со p. Затоа, ако меѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ има број делив со p, тогаш како и да ги поделиме овие броеви на две групи, производот на броевите од едната група е делив со p, а производот на броевите од другата група не е делив со p. Затоа можеме да сметаме дека ниту еден од броевите $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ не е делив со p.

Да претпоставиме дека броевите се поделени во две групи $b_1,b_2,...,b_s$ и $c_1,c_2,...,c_r$, $s+r=p-1$, каде $m=b_1b_2...b_s=c_1c_2...c_r$. Тогаш

$$m^2=b_1b_2...b_sc_1c_2...c_r\equiv a_1a_2...a_{p-1}\equiv -1 \pmod p,$$

т.е. $p\,|\,m^2+1$.

Но, p е број од видот $4k+3$, па затоа $p|1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

22. Определи ги сите парови (n,p) природни броеви, такви што p е прост број, $n\le 2p$ и $(p-1)^n+1$ е делив со n^{p-1}.

Решение. Јасно е дека паровите $(1,p)$ и $(2,2)$ ги задоволуваат условите од задачата и за секој друг пар што ги задоволува условите на задачата важи $p\ge 3$.

Останува да ги најдеме паровите (n,p) за кои $n\ge 2$, $p\ge 3$.

Најпрво ќе го разгледаме случајот кога n е делив со p и $n<2p$, од каде ќе следува $n=p$. Оттука имаме

$$p^{p-1}\,|\,(p-1)^p+1=p^2(p^{p-2}-\binom{p}{1}p^{p-3}+\binom{p}{p-3}p-\binom{p}{p-2})+1)$$

и, бидејќи сите собироци во заградата освен последниот се деливи со p, $p-1\le 2$. Следува $p=3$, $n=3$.

Бидејќи $(p-1)^n+1$ е непарен, следува дека и n е непарен $(n<2p)$. Да го означиме со q најмалиот прост делител на n. Од $q\,|\,(p-1)^n+1$ добиваме $(p-1)^n\equiv -1(\operatorname{mod} q)$ и $(q,p-1)=1$. Но, од изборот на q имаме $(n,q-1)=1$, па следува дека постојат цели броеви u и v такви што $un+v(q-1)=1$, а оттука $p-1\equiv(p-1)^{un}(\operatorname{mod} q)$. Понатаму,

$$(p-1)^{v(q-1)}\equiv(-1)^u\cdot 1^v\equiv -1(\operatorname{mod} q)$$

затоа што u мора да биде непарен. Следува дека $q\,|\,p$, а оттука $q=p$.

Конечно, бараните парови се $(2,2),(3,3)$ и $(1,p)$ каде што p е произволен прост број.

23. Ако за некој цел број $k\ge 0$ важи $p^{k+1}\,|\,a^{p^k}+1$, каде a е непарен број поголем од 1 и p е непарен прост број, тогаш $p^{k+2}\,|\,a^{p^k}+1$. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека за некој $k\ge 0$ важи $p^{k+1}\,|\,a^{p^k}+1$. Ставаме $a^{p^k}=b$ и добиваме дека $p^{k+1}\,|\,b+1$, т.е.

$$b\equiv -1(\operatorname{mod} p^{k+1}).$$

Бидејќи p е непарен број важи

$$a^{p^{k+1}}+1=b^p+1=(b+1)(b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1),$$

и како $b\equiv -1(\operatorname{mod} p^{k+1})$ важи $b\equiv -1(\operatorname{mod} p)$, па е

$$b^{2p}\equiv 1(\operatorname{mod} p) \text{ и } b^{2p-1}\equiv -1(\operatorname{mod} p), \text{ за } p=1,2,....$$

Оттука

$$b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1\equiv 1+1+..+1=p\equiv 0(\operatorname{mod} p).$$

Според тоа, $p\,|\,(b^{p-1}-b^{p-2}+...-b+1)$ и како $p^{k+1}\,|\,(b+1)$ добиваме

$$p^{k+2}\,|\,(a^{p^{k+1}}+1).$$

24. (Теорема на Рајтер). Ако a е природен број таков што $a+1$ не е степен на

бројот 2, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $n \mid a^n + 1$. Докажи!

Решение. Бидејќи $a+1$ не е степен на бројот 2, тој мора да има прост делител $p > 2$. Така $p \mid a+1$. Од задача 17 со помош на математичката идукција следува $p^k \mid a^{p^k} + 1$, за $k = 1, 2, \ldots$, што значи постојат бесконечно многу природни броеви $n = p^k$ такви што $n \mid a^n + 1$.

25. Докажи, дека за секој природен број $a > 1$ постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n \mid a^n + 1$.

Решение. Согласно теоремата на Рајтер доволно е да се докаже дека за секој непарен број $a > 1$ постојат бесконечно многу природни броеви n, така што $n \mid a^n + 1$

За таа цел ќе ја докажеме следната:

Лема. Ако $a > 1$ е непарен број, s и $a^s + 1$ се од облик $2(4к \pm 1)$ и $s \mid a^s + 1$, тогаш постои природен број $s_1 > s$ таков што s_1 и $a^{s_1} + 1$ се од облик $2(4k_1 \pm 1)$ и $s_1 \mid a^{s_1} + 1$.

Доказ. Бидејќи $s \mid a^s + 1$, при што s и $a^s + 1$ се од облик $2(4к \pm 1)$ добиваме $a^s + 1 = ms$, каде m е непарен број. Значи $a^s + 1 \mid a^{ms} + 1$ или $a^s + 1 \mid a^{a^s+1} + 1$, при што $a^s + 1$ е парен број добиваме дека $a^{a^s+1} + 1$ е од облик $2(4k_1 \pm 1)$.

Според тоа, за $s_1 = a^s + 1$ имаме $s_1 \mid a^{s_1} + 1$, при што s_1 и $a^{s_1} + 1$ се од облик $2(4k_1 \pm 1)$ и ако $a > 1$ добиваме $s_1 = a^s + 1 > s$. ■

Да се вратиме на задачата. Ако a е непарен број, тогаш при $s = 2$ важи $s \mid a^s + 1$. Сега тврдењето на задачата при непарни a следува од претходно докажаната лема.

26. (Теорема на Луивил). За секој прост број $p > 5$ и секој природен број m равенството $(p-1)! + 1 = p^m$ не е можно. Докажи!

Решение. За прост број $p > 5$ имаме $2 < \frac{p-1}{2} < p-1$, па е

$$(p-1)^2 = 2\frac{p-1}{2}(p-1) \mid (p-1)!.$$

Нека за простиот број $p > 5$ и за некој природен број m важи

$$(p-1)! + 1 = p^m. \tag{1}$$

Тогаш $(p-1)^2 \mid p^m - 1$, од каде наоѓаме дека

$$(p-1) \mid p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1. \qquad (2)$$

Но, $p-1 \mid p^k - 1$, па е

$$p^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p-1), \text{ за } k = 0,1,2,\ldots,$$

што значи

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1 \equiv m (\mathrm{mod}\, p-1).$$

Сега од (2) добиваме $p-1 \mid m$, што значи $m \geq p-1$. Конечно,

$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} \geq (p-1)! + 1,$$

т.е. $p^m \geq (p-1)! + 1$ што противречи на (1).

27. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви q такви што за некој природен број $n < q$ важи $q \mid (n-1)! + 1$.

Решение. Според теоремата на Луивил, ако p е прост број поголем од 5, за ниту еден број m не е можно равенството $(p-1)! + 1 = p^m$. Бројот $(p-1)! + 1$ е непарен и е поголем од 1, па значи има прост непарен делител $q \neq p$. Од релацијата $q \mid (p-1)! + 1$ следува дека $q > p-1$ и затоа $q > p$. Сега сметајќи дека p може да биде произволно голем прост број, можеме да заклучиме дека прости броеви q за кои при некој $q > p$ важи $q \mid (p-1)! + 1$ постојат бесконечно многу.

28. Нека p е непарен прост број. За секое $i = 1,2,3,\ldots, p-1$ со r_i го означуваме остатокот од делењето на i^p со p^2. Пресметај го збирот $r_1 + r_2 + \ldots + r_{p-1}$.

Решение. Бараниот збир ќе го означиме со S. Ако го собереме првиот со последниот собирок, вториот со претпоследниот, итн. последниот со првиот собирок (да забележиме дека бројот на собироците е парен број), добиваме

$$2S = (r_1 + r_{p-1}) + (r_2 + r_{p-2}) + \ldots + (r_{p-1} + r_1). \qquad (1)$$

Според дефиницијата на $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ имаме

$$r_i + r_{p-i} \equiv i^p + i^{p-i} (\mathrm{mod}\; p^2)$$

Од друга страна, бидејќи p е непарен број имаме

$$\begin{aligned} i^p + (p-i)^p &= p^p - \tbinom{p}{1} p^{p-1} i + \tbinom{p}{2} p^{p-2} i^2 - \ldots + \tbinom{p}{p-1} p i^{p-1} \\ &= p[p^{p-1} - \tbinom{p}{1} p^{p-2} i + \tbinom{p}{2} p^{p-3} i^2 - \ldots + \tbinom{p}{p-1} i^{p-1}]. \end{aligned}$$

За биномниот коефициент $\binom{p}{i}$ имаме $\binom{p}{i}=p\frac{(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{i!}$. Но, p е прост број и $(p,i)=1$, за $i=1,2,\ldots,p-1$, па според тоа $p^2\mid i^p+(p-i)^p$, од каде следува $p^2\mid r_i+r_{p-i}$. Сега, од неравенствата $0<r_i<p^2$ и $0<r_{p-i}<p^2$, добиваме

$$r_i+r_{p-i}=p^2,\ i=1,2,\ldots,p-1. \tag{2}$$

Од (1) и (2) имаме $S=\frac{p-1}{2}p^2$.

29. Нека λ е позитивниот корен на равенката $t^2-1998t-1=0$. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=[\lambda x_n],\ n=0,1,2,\ldots.$$

Определи го остатокот од делењето на x_{1998} со 1998.

Решение. Имаме

$$1998<\lambda=\frac{1998+\sqrt{1998^2+4}}{2}=999+\sqrt{999^2+1}<1999,$$

т.е. $x_1=1998, x_2=1998^2$. Од $\lambda^2-1998\lambda-1=0$, следува $\lambda=1998+\frac{1}{\lambda}$, односно $\lambda x=1998x+\frac{x}{\lambda}$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Понатаму, $x_n=[x_{n-1}\lambda]$ и x_{n-1} е цел број, а λ е ирационален број, па затоа

$$x_n<x_{n-1}\lambda<x_n+1,\text{ т.е. } \frac{x_n}{\lambda}<x_{n-1}<\frac{x_n+1}{\lambda}.$$

Но, $\lambda>1998$ и $[\frac{x_n}{\lambda}]=x_{n-1}-1$, па затоа

$$x_{n+1}=[\lambda x_n]=[1998x_n+\frac{x_n}{\lambda}]=1998x_n+x_{n-1}-1,$$

од каде добиваме $x_{n+1}\equiv x_{n-1}-1 \pmod{1998}$. Конечно, со индукција се добива дека $x_{1998}\equiv x_0-999\equiv 1000 \pmod{1998}$.

30. Нека $p>2$ е прост број. Докажи, дека секој делител на бројот 2^p-1 е од облик $2kp+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека q е прост делител на бројот 2^p-1, т.е. $2^p\equiv 1 \pmod q$ и нека d е најмалиот природен број, таков да $2^d\equiv 1\pmod q$. Тогаш, $d\mid p$, па $d=1$ или $d=p$. Бидејќи $2^d\equiv 1\pmod q$, мора $d=p$. Од $2^{q-1}\equiv 1\pmod q$ следи дека $p=d\mid q-1$. Бидејќи q е непарен, $q-1$ е делив со 2. Следи дека $q=2kp+1$, за некој природен број k. Бидејќи производ на броеви од облик $2kp+1$, $k\in\mathbb{N}$ е број од истиот облик, а секој делител на еден природен број е производ од неговите прости делители, се добива тврдењето на задачата.

31. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви p од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$ такви што p е делител на 2^q-1 за некој прост број q.

Решение. Нека $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата прости броеви. Да означиме $Q_n=2^{q_n}-1$. Да забележиме дека $(Q_m,Q_n)=1$, за $m\neq n$. Навистина, ако $d\in\mathbb{N}$ е делител на Q_m и Q_n, тогаш d е делител на $2^{(q_m,q_n)}-1=2^1-1=1$, па затоа $d=1$.

Не е можно сите прости делители на Q_n да се конгруентни со 1 по модул 4, бидејќи во тој случај ќе имаме $Q_n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, што противречи на $Q_n=2^{q_n}-1\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Според тоа, Q_n има барем еден прост делител p_n од видот $p_n=4k_n-1$, $k_n\in\mathbb{N}$. Освен тоа, кога $m\neq n$, од $(Q_m,Q_n)=1$ следува $p_n\neq p_m$. Така добивме бесконечна низа $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ од различни прости броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

32. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A. Определи го збирот на цифрите на бројот B.
(Сите броеви се запишани во декаден броен систем).

Решение. Нека C е збирот на цифрите на бројот B. Бидејќи $4444<10000$, важи

$$4444^{4444}<10000^{4444}.$$

Бројот на цифрите на 10000^{4444} е еднаков на $1+4\cdot 4444=17777$. Според тоа, бројот на цифрите на 4444^{4444} е помал или еднаков на 17777, што значи дека е помал од 20000. Најголемиот број кој има 20000 цифри е бројот N кој има 20000 деветки. Збирот на цифрите на N е $20000\cdot 9=180000$, па затоа $A<180000$. Бројот кој е помал од 180000 и има најголем збир на цифри е бројот 99999. Затоа за збирот на цифрите на бројот A е исполенто $B\leq 9\cdot 5=45$. Бројот кој е помал од 45 и има наголем збир на цифри е 39, па затоа $C\leq 3+9=12$. Понатаму, ако искористиме дека остатокот на бројот M при делење со 9 е еднаков на остатокот при делење на збирот на цифрите на бројот N со 9, добиваме дека

$$4444^{4444}\equiv A\equiv B\equiv C(\mathrm{mod}\,9).$$

Ќе го определиме остатокот од делењето на бројот 4444^{4444} со 9. Од $4444\equiv -2(\mathrm{mod}\ 9)$ следува

$$4444^{4444}\equiv(-2)^{4444}=2^{3\cdot 1481+1}=2\cdot 8^{1481}\equiv 2\cdot(-1)^{1481}\equiv -2\equiv 7(\mathrm{mod}\,9).$$

Според тоа, $C\equiv 7(\mathrm{mod}\,9)$. Природниот број C ги задоволува условите $C\leq 12$ и $C\equiv 7(\mathrm{mod}\,9)$, па затоа $C=7$.

33. Нека X е множество кое што содржи 10000 цели броеви, кои што не се деливи со 47. Докажи, дека постои 2008-елементно подмножество Y од X такво што $a-b+c-d+e$ не е делив со 47, кога $a,b,c,d,e \in Y$.

Решение. Нека X е множество такво што $|X|=10000$ и $x \in X$, $47 \nmid x$. Множеството M ќе го наречеме *добро* ако $47 \nmid a-b+c-d+e$ за $a,b,c,d,e \in M$. Едно добро множество е множеството

$$J=\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}.$$

Навистина

$$-45=-9-(-9)+(-9)-9+(-9) \le a-b+c-d+e \le 9-(-9)+9-(-9)+9=45,$$

а меѓу -45 и 45 не постои број кој е делив со 47.

За секој $k=-9,-8,-7,...,-1,1,...,38$ ќе го определиме множеството

$$A_k=\{x \in X \mid \text{постои } j \in J : kx \equiv j (\mathrm{mod}\, 47)\}.$$

Ќе докажеме дека

$$A_k, k=-9,-8,-7,...,-1,1,...,38$$

се добри множества. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека A_s не е добро множество за некој $s \in \{-9,-8,...,-1,1,...,38\}$. Тогаш постојат $a,b,c,d,e \in A_s$ такви што $47 \mid a-b+c-d+e$. Тогаш

$$47 \mid s(a-b+c-d+e)=sa-sb+sc-sd+se.$$

Но тогаш $47 \mid 5j$. Бидејќи $5<46, j<47$ и 47 е прост број добиваме противречност. Значи, A_s е добро множество.

Ќе го разгледаме множеството $S=\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,...,38\}$. За произволен $k \in S$ ќе го формираме множеството $P_k=\{r_{-9},r_{-8},...,r_{38}\}$, каде $-9 \le r_i \le 38$ и $ki \equiv r_i (\mathrm{mod}\, 47)$, $i=-9,-8,-7,...,38$. Јасно, $P_k=S$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш постојат

$$m,n \in \{-9,-8,...,38\}, m,n \ne 0,\ m \ne n \text{ и } r_m=r_n.$$

Но тогаш

$$km \equiv r_m (\mathrm{mod}\, 47),$$
$$kn \equiv r_n (\mathrm{mod}\, 47),$$

од каде добиваме дека $k(m-n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 47)$, што не е можно бидејќи $1 \le k < 47,\ -17 \le m-n < 47$ и 47 е прост број.

Нека $x \in X$ е произволно зададен елемент. Тогаш постои единствен $j \in S$ таков што $x \equiv j (\mathrm{mod}\, 47)$. Притоа $kx \equiv kj (\mathrm{mod}\, 47)$. Множеството $P_j=S$ ги содржи точно по еднаш елементите од множеството J. Според тоа, x ќе биде елемент на точно 10 множества од низата множества $A_k, k=1,2,3,...,46$. Значи,

$$\sum_{k=1}^{46}|A_k|=10|X|=100000,$$

од каде што добиваме дека барем за едно $p\in\{-9,-8,-7,...,-1,1,...,38\}$ е исполнето $|A_p|\geq\frac{100000}{46}>2008$.

34. Докажи, дека за секој природен број n, еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако $n=2k+1$, каде $k\in\mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n}\equiv(-8)^{2k+1}(\bmod 35) \text{ и } 2^{3n}\equiv 8^{2k+1}(\bmod 35)$$

добиваме

$$3^{3n}+2^{3n}\equiv(-8)^{2k+1}+8^{2k+1}\equiv 0(\bmod 35).$$

Ако е $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$, тогаш од конгруенциите

$$3^{3n}\equiv 729^k\equiv 29^k(\bmod 35) \text{ и } 2^{3n}\equiv 64^k\equiv 29^k(\bmod 35)$$

добиваме

$$3^{3n}-2^{3n}\equiv 29^k-29^k\equiv 0(\bmod 35).$$

35. а) Определи ги сите природни броеви n, такви што $7\,|\,(2^n-1)$.

б) Докажи дека $7\nmid(2^n+1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Ако $n\equiv 0(\bmod 3)$, тогаш $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$, т.е.

$$2^n=(2^3)^k\equiv 1(\bmod 7),$$

па $2^{3k}-1$ е делив со 7.

Ако $n=3k+i,$ за $i=1,2$ тогаш $2^{3k+i}-1=2^i(2^{3k}-1)+2^i-1$. Бидејќи е $2^{3k}-1$ е делив со 7, а 2^i-1 не е делив со 7 добиваме дека $2^{3k+i}-1,$ за $i=1,2$ не е делив со 7.

Значи, 2^n-1 е делив со 7 ако и само ако n е делив со 3.

б) Секој природен број n може да се запише во обликот $3k+i$, $i=0,1,2,$ $k\in\mathbb{N}$. Тогаш $2^n+1=2^i(2^{3k}-1)+2^i+1$. Првиот собирок е делив со 7, а вториот собирок не е делив со 7.

Значи, 2^n+1 не е делив со 7, за секој $n\in\mathbb{N}$.

36. За природниот број n со d да го означиме најголемиот заеднички делител на сите броеви од видот $a^n+(a+1)^n+(a+2)^n,\ a\in\mathbb{N}$. Определи ги сите можни вредности на бројот d.

Решение. Да означиме $x_a = a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$. Од

$$d \mid x_{d+1} - x_d = (d+3)^n - d^n \equiv 3^n (\bmod d),$$

следува дека $d = 3^k$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Од друга страна, ако ставиме $n = 3^{k-1}$, тогаш лесно се докажува дека $3^k \parallel x_{a+1} - x_a = (a+3)^n - a^n$, па како $x_{-1} = 0$ следува $3^k \parallel x_0, x_1$ и со индукција се докажува дека $3^k \parallel x_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Според тоа, можни вредности на d се сите степени на бројот 3 (поголеми од 1).

37. Определи ги сите парови на природни броеви (m,n) такви што

$$((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) > 1.$$

Решение. Нека n и m се природни броеви такви што

$$((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) = d > 1.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} d &\mid (n+1)^m - n, \\ d &\mid (n+1)^{m+3} - n. \end{aligned} \tag{1}$$

Од $(n, n+1) = 1$, следува дека $d \nmid n+1$. Уште повеќе $(d, n+1) = 1$. Навистина, ако $p > 1$ е таков што $p \mid d$ и $p \mid n+1$, тогаш $p \mid (n+1)^m$ и $p \mid (n+1)^m - n$, од каде добиваме дека

$$p \mid (n+1)^m - n - (n+1)^m = -n.$$

Според тоа

$$1 < p < (-n, n+1) = (n, n+1) = 1.$$

Од (1) добиваме дека

$$d \mid (n+1)^{m+3} - n - (n+1)^m + n = (n+1)^{m+3} - (n+1)^m = (n+1)^m [(n+1)^3 - 1]. \tag{2}$$

Бидејќи $(d, (n+1)^m) = 1$ од (2) добиваме $d \mid (n+1)^3 - 1$, односно

$$(n+1)^3 \equiv 1 \ (\bmod d). \tag{3}$$

Од дефинцијата на d имаме

$$(n+1)^m \equiv n (\bmod d). \tag{4}$$

Ќе разгледаме три случаи.

Нека $m = 3k$. Тогаш

$$\begin{aligned} &n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k} = ((n+1)^3)^k \equiv 1^k = 1 (\bmod d), \\ &n+1 \equiv 2 (\bmod d), \\ &2^3 \equiv (n+1)^3 \equiv 1 (\bmod d). \end{aligned}$$

Бидејќи $7 \equiv 0 (\bmod d)$ имаме $d = 7$.

Нека $m=3k+1$. Од (3) и (4) добиваме

$$n\equiv(n+1)^m=(n+1)^{3k}(n+1)=((n+1)^3)^k(n+1)\equiv1^k(n+1)=n+1(\mathrm{mod}\,d).$$

Но, тогаш $1\equiv0(\mathrm{mod}\,d)$, што значи $d\,|\,1$. Тоа е во контрадикција со претпоставката за d.

Нека $m=3k+2$. Повторно од (3) и (4) имаме

$$n\equiv(n+1)^m=(n+1)^{3k}(n+1)^2=((n+1)^3)^k(n+1)^2\equiv1^k(n+1)^2\equiv(n+1)^2(\mathrm{mod}\,d)$$

т.е.

$$n\equiv n^2+2n+1(\mathrm{mod}\,d),$$

$$n^2+n\equiv-1(\mathrm{mod}\,d). \qquad (5)$$

Од друга страна од $n\equiv(n+1)^2(\mathrm{mod}\,d)$ и добиваме

$$n(n+1)\equiv(n+1)^3\equiv1(\mathrm{mod}\,d). \qquad (6)$$

Тогаш од (5) и (6) имаме $2\equiv0(\mathrm{mod}\,d)$, односно $d=2$. Но, тоа не е можно, бидејќи $d\,|\,n$ или $d\,|\,n+1$ и би добиле контрадикција со (1).

Не е тешко да се провери дека за $n=7l+1$ и $m=3k$ се добива $d>1$. Конечно, решенија на задачата се $(m,n)=(3k,7l+1)$.

38. Реалните броеви a,b,c се такви што за секој природен број n бројот $a^n+b^n+c^n$ е цел број. Докажи дека постојат цели броеви p,q,r за кои a,b,c се корени на равеката $x^3+px^2+qx+r=0$.

Решение. За секој природен број n да ставиме $T_n=a^n+b^n+c^n$. Од условот на задачата следува дека $T_n\in\mathbb{Z}$. Ќе докажеме дека броевите $p=-(a+b+c)$, $q=ab+bc+ca$ и $r=-abc$ ги задоволуваат условите на задачата. Бидејќи, согласно Виетовите формули, броевите a,b,c се корени на равеката $x^3+px^2+qx+r=0$, доволно е да докажеме дека $p,q,r\in\mathbb{Z}$. Од $p=-T_1$ следува дека $p\in\mathbb{Z}$. Точни се следниве претставувања на T_n преку p,q,r:

$$T_1=-p,\ T_2=p^2-2q \qquad (1)$$

$$T_3=-p^3+3pq-3r, \qquad (2)$$

$$T_{n+3}=-pT_{n+2}-qT_{n+1}-rT_n. \qquad (3)$$

Бидејќи $p,T_2\in\mathbb{Z}$, од (1) следува дека $2q\in\mathbb{Z}$ Сега од (2) добиваме

$$2pT_3=-2p^4+6p^2q-6pr,$$

па од $2q\in\mathbb{Z}$ следува $6pr\in\mathbb{Z}$. За $n=1$ од (3) добиваме

$$T_4=-pT_3-qT_2-rT_1=p^4-4p^2q+4pr+2q^2,$$

па затоа $3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2$. Сега, од $2q \in \mathbb{Z}$ и $6pr \in \mathbb{Z}$ следува $6q^2 \in \mathbb{Z}$ и како $2q \in \mathbb{Z}$, добиваме $q \in \mathbb{Z}$. Понатаму, од (2) следува $3r \in \mathbb{Z}$, па затоа

$$r = \tfrac{m}{3},\ m \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Од друга страна, од (3) следува дека $rT_n \in \mathbb{Z}$ за секој $n \geq 1$. Сега од (4) добиваме

$$mT_n \equiv 0 \pmod 3. \tag{5}$$

Ако постои n за кој $(T_n, 3) = 1$, тогаш од (5) добиваме $m \equiv 0 \pmod 3$, па затоа $r \in \mathbb{Z}$. Нека претпоставиме дека $T_n \equiv 0 \pmod 3$ за секој n Тогаш $p = -T_1 \equiv 0 \pmod 3$, $T_3 \equiv 0 \pmod 3$ и од (2) следува $r \in \mathbb{Z}$.

39. Нека m, $m \geq 3$ е непарен природен број. Определи го најмалиот природен број n таков што 2^{1989} е делител на $m^n - 1$.

Решение. Нека n е бараниот број и нека $n = 2^a b$ каде b е непарен број и $a \geq 0$. Имаме

$$m^n - 1 = m^{2^a b} - 1 = (m^{2^a} - 1)(m^{2^a(b-1)} + m^{2^a(b-2)} + \ldots + m^{2^a} + 1) = (m^{2^a} - 1)c,$$

каде c е збир на непарен број непарни собирци, т.е. е непарен број. Сега, од $2^{1989} \mid m^n - 1$ следува $2^{1989} \mid (m^{2^a} - 1)c$, т.е. $2^{1989} \mid m^{2^a} - 1$. Бидејќи се бара најмалиот природен број n, заклучуваме дека $n = 2^a$. Важи

$$\begin{aligned} m^n - 1 &= m^{2^a} - 1 = (m^{2^{a-1}})^2 - 1 = (m^{2^{a-1}} + 1)(m^{2^{a-1}} - 1) = \ldots \\ &= (m^{2^{a-1}} + 1)(m^{2^{a-2}} + 1)\ldots(m^2 + 1)(m^2 - 1). \end{aligned}$$

Нека s е најголемиот природен број таков што

$$m \equiv \pm 1 \pmod{2^s}. \tag{1}$$

Бидејќи броевите $m-1$ и $m+1$ се парни, од конгруенцијата (1) следува дека $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ е делив со 2^{s+1}. Понатаму, од (1) следува дека

$$m^4 + 1 \equiv 2 \pmod{2^s},\ m^8 + 1 \equiv 2 \pmod{2^s},\ \ldots,\ m^{2^{s-1}} + 1 \equiv 2 \pmod{2^s}.$$

Понатаму, броевите $m^4 + 1$, $m^8 + 1$, ..., $m^{2^{s-1}} + 1$ се деливи со 2, но не се деливи со 4. Затоа $m^n - 1$ е делив со $2^{s+1} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{a-1} = 2^{s+a}$, но не е делив со 2^{s+a+1}. Бидејќи $2^{1989} \mid m^{2^a} - 1$ следува дека $a + s = 1989$, т.е. $a = 1989 - s$. Значи, $n = 2^{1989-s}$, ако $s \leq 1989$ и $n = 1$, ако $s > 1989$.

40. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со $a_0=0, a_1=1$ и $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$, за $n\geq 0$. Докажи дека $2^k \mid a_n$ ако и само ако $2^k \mid n$.

Решение. Од $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\equiv a_n(\mathrm{mod}\,2)$ следува дека a_n и a_{+2} имаат иста парност. Од Бидејќи $a_0=0$ и $a_1=1$ следува дека a_{2k} е парен, а a_{2k+1} е непарен за секој $k\in\mathbb{N}$. Карактеристичната равенка на диференцната равенка $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ е $r^2-2r-1=0$ и нејзини решенија се $r_1=1+\sqrt{2}$ и $r_2=1-\sqrt{2}$. Значи $a_n=A(1+\sqrt{2})^n+B(1-\sqrt{2})^n$ и ако замениме $n=0$ и $n=1$, од $a_0=0$ и $a_1=1$, добиваме $A=\frac{1}{\sqrt{8}}$ и $B=-\frac{1}{\sqrt{8}}$. Значи, $a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{8}}$, за $n\geq 0$.

Дефинираме низа $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ со $b_0=b_1=2$ и $b_{n+2}=2b_{n+1}+b_n$. Јасно, сите членови на оваа низа се парни и како $b_0=b_1=2$ од $b_{n+2}=2b_{n+1}+b_n\equiv b_n(\mathrm{mod}\,4)$ следува дека $b_n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ за секој природен број n. Аналогно како за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ наоѓаме $b_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$. Според тоа,

$$a_nb_n=\frac{(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{8}}=a_{2n}.$$

Сега со математичка индукција по k ќе докажеме дека $2^k\mid a_n\Leftrightarrow 2^k\mid n$.

Јасно, еквиваленцијата важи за $k=1$.

Нека претпоставиме дека е точно $2^k\mid a_n\Leftrightarrow 2^k\mid n$. Тогаш,

$$2^{k+1}\mid a_n\Leftrightarrow 2^{k+1}\mid a_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}}$$

и бидејќи $b_{\frac{n}{2}}$ е парен број кој не е делив со 4 добиваме дека

$$2^{k+1}\mid a_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}}\Leftrightarrow 2^k\mid a_{\frac{n}{2}}\Leftrightarrow 2^k\mid \tfrac{n}{2}\Leftrightarrow 2^{k+1}\mid n,$$

со што доказот е завршен.

41. Низата $x_1,x_2,...$ е определена со $x_1=4$ и $x_{n+1}=x_1x_2...x_{n-1}x_n+5$ за $n\geq 1$. Определи ги сите парови од природни броеви (a,b) така што x_ax_b е точен квадрат.

Решение. Имаме $x_1=4$, $x_2=4+5=9$, $x_3=x_1x_2+5=41$. Со математичка индукција лесно се докажува дека ниту еден од членовите на низата $\{x_n\}$ не е делив со 5. Навистина, $x_1=4$ не е делив со 5. Ако претпоставиме дека x_k не е делив со 5 за секој $k=1,2,...,n$, тогаш

$$x_{n+1}=x_1x_2...x_{n-1}x_n+5\equiv a_1a_2...a_{n-1}a_n\equiv a(\mathrm{mod}\,5),$$

каде $a_i \in \{1,2,...,4\}$ и $a \in \{1,2,3,4\}$.

Нека x_a, x_b се членови од низата за кои $x_a x_b$ е точен квадрат. Без ограничување на оштоста можеме да земеме дека $a > b$. Имаме

$$x_a = x_1 x_2 ... x_{a-1} + 5 = x_1 x_2 ... x_b ... x_{a-1} + 5,$$

па затоа следува

$$(x_a, x_b) = (x_1 x_2 ... x_b ... x_{a-1} + 5, x_b) = (5, x_b) = 1.$$

Значи, $x_a x_b$ е точен квадрат ако и само ако x_a и x_b се точни квадрати. Остатокот при делење на точен квадрат со 36 е број од множеството $\{0,1,4,13,16,25,28\}$. Понатаму,

$$x_1 = 4,\ x_1 = 9,\ x_3 = 41,\ ...,\ x_{n+1} = 36x_3 ... x_n + 5,$$

па оттука следува $x_n \equiv 5 (\bmod 36)$, за $n \geq 3$. Бидејќи 5 не е остаток при делење на точен квадрат со 36 следува дека $n \leq 2$. Јасно, $x_1 x_2 = 36 = 6^2$ е единствено решение.

42. Нека k е фиксен природен број и $m = 4k^2 - 5$. Докажи, дека постојат природни броеви a и b такви што сите членови на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, каде $x_0 = a$, $x_1 = b$ и $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n = 0,1,2,....$ се заемно прости со m.

Решение. Нека k е фиксен природен број и $m = 4k^2 - 5$. Нека b е природен број таков што

$$b \equiv 2k^2 + k - 2 (\bmod m). \tag{1}$$

Тогаш

$$2b \equiv 4k^2 + 2k - 4 (\bmod m),$$

$$2b - 1 \equiv 4k^2 + 2k - 5 \equiv 4k^2 - 5 + 2k \equiv 2k (\bmod m).$$

Бидејќи $2b - 1 \equiv 2k (\bmod m)$, добиваме

$$(2b-1)^2 \equiv 4k^2 (\bmod m),$$

$$(2b-1)^2 - 5 \equiv 4k^2 - 5 \equiv 0 (\bmod m)$$

$$(2b-1)^2 \equiv 5 (\bmod m),$$

$$4b^2 - 4b \equiv 4 (\bmod m),$$

$$b^2 \equiv b + 1 (\bmod m). \tag{2}$$

Значи, постои $b \in \mathbb{N}$ таков што $b^2 \equiv b + 1 (\bmod m)$. На пример, доволно е да избереме

$$b = 2k^2 + k - 2 + p(4k^2 - 5),$$

каде $p \in \mathbb{N}$ е произволен природен број.

Ќе избереме $a=1$ и $b\in\mathbb{N}$, кој го задволува условот (1), односно условот (2). Ќе докажеме дека $b^n\equiv x_n(\bmod m)$. Навистина, за $n=1$ тврдењето е тривијално. Бидејќи

$$x_2=x_0+x+1=1+b\equiv b^2(\bmod m).$$

Значи, тврдењето е точно и за $n=2$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за било кој природен број помал од $n+1$. Според тоа $x_n\equiv b^n(\bmod m)$ и $x_{n-1}\equiv b^{n-1}(\bmod m)$. Тогаш

$$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}\equiv b^n+b^{n-1}\equiv b^{n-1}(b+1)\equiv b^{n-1}b^2\equiv b^{n+1}(\bmod m),$$

Според принципот на математичка индукција $b^n\equiv x_n(\bmod m)$.

Јасно е дека ако b е природен број кој го задоволува условот (1), тогаш $(b,m)=1$. Навистина, ако $(b,m)=d$, тогаш $d\mid b$ и $d\mid m$. Но тогаш, заради (2)

$$b^2-b\equiv 1(\bmod m). \tag{3}$$

Од $d\mid b$, добиваме дека $d\mid b^2$, па според тоа $d\mid b^2-b$, т.е.

$$b^2-b\equiv 0(\bmod m). \tag{4}$$

Заради (3) и (4) добиваме дека $1\equiv 0\,(\bmod d)$ кое е точно само ако $d=1$.

Со тоа е комплетиран доказот на тврдењето од задачата.

43. Определи ги сите природни броеви n за кои 2^{n+1} е делител на $7^{n!}-3^{n!}$.

Решение. Нека $n!=2^k m$, каде m е непарен број, а k е ненегативен цел број. Тогаш

$$7^{n!}-3^{n!}=(7^m)^{2^k}-(3^m)^{2^k}=(7^m-3^m)(7^m+3^m)(7^{2m}+3^{2m})...(7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m}).$$

Бидејќи

$$7^m+3^m\equiv 7^{2m}+3^{2m}\equiv...\equiv 7^{2^{k-1}m}+3^{2^{k-1}m}\equiv 2(\bmod 4) \text{ и } 7^m-3^m\equiv 4(\bmod 8)$$

заклучуваме дека $2^{k+2}\mid(7^{n!}-3^{n!})$, но $2^{k+3}\nmid(7^{n!}-3^{n!})$. Затоа, $n+1\le k+2$, т.е. $k\ge n-1$. Од друга страна, ако $2^t\le n<2^{t+1}, t\in\mathbb{N}_0$, тогаш

$$k=[\tfrac{n}{2}]+[\tfrac{n}{2^2}]+...+[\tfrac{n}{2^t}]\le\tfrac{n}{2}+\tfrac{n}{2^2}+...+\tfrac{n}{2^t}=n(1-\tfrac{1}{2^t})\le n-1.$$

Според тоа, $k=n-1$ и $n=2^t$, $t\in\mathbb{N}_0$.

44. Нека a е природен број и p е прост број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a^{p^n}+p^n$ има барем два различни прости делители.

Решение. Ако $p\,|\,a$, тогаш $a^{p^n}+p^n=p^n(pA+1)$, каде A е природен број и тврдењето очигледно важи. Затоа нека претпоставиме дека $(a,p)=1$.

Нека p е непарен, $n=pk$ и $a^{p^{n-1}}=x,\ p^k=y$. Тогаш

$$a^{p^n}+p^n=x^p+y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+...-xy^{p-2}+y^{p-1})$$

и да претпоставиме дека овој број има не повеќе од еден прост делител, т.е. дека е еднаков на q^t за некој прост број q и некој природен број t. Очигледно $q\neq p$. Од $q\,|\,x+y$ следува дека $x\equiv -y(\mathrm{mod}\,q)$ и тогаш

$$x^{p-1}-x^{p-2}y+...-xy^{p-2}+y^{p-1}\equiv py^{p-1}(\mathrm{mod}\,q)$$

не е делив со q, што е противречност.

Нека $p=2$ и $n=4k+2,\ k\in\mathbb{N},\ a^{2^{n-2}}=u,\ 2^k=v$. Тогаш

$$a^{2^n}+2^n=u^4+4v^4=(u^2+2uv+v^2)(u^2-2uv+v^2).$$

Двата множители на десната страна се заемно прости и поголеми од 1, па значи имаат различни прости делители.

45. Нека $a_1=1, a_2=3$ и $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, за секој $n=1,2,...$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

Решение. *Прв начин.* Од рекурентната врска следува дека ако два последователни члена на низата се деливи со 11, тогаш сите следни членови се деливи со 11. Со непосредна проверка се добива дека a_{10} и a_{11} се деливи со 11, а меѓу членовите $a_1,a_2,...,a_9$ само a_4 и a_8 се деливи со 11. Според тоа, a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

Втор начин. Ставаме $b_n=a_{n+1}-a_n$, за $n=1,2,...$. Тогаш рекурзијата можеме да ја запишеме во видот $b_{n+1}=(n+2)b_n$, за $n=1,2,3,...$. Бидејќи $a_2-a_1=2$, со индукција лесно се докажува дека $b_n=(n+1)!$, за $n=1,2,3,...$. Значи,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)!=\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n-a_1=a_n-1.$$

Затоа $a_n=\sum_{i=1}^{n} i!$. Јасно, ако $n\geq 11$, бројот $n!$ е делив со 11, така што ако $n=11,12,...$ имаме $a_n\equiv a_{10}(\mathrm{mod}\,11)$. Понатаму, ако ги земеме предвид остатоците на броевите $1!,2!,...,10!$ по модул 11, добиваме:

$$\begin{aligned}&a_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,11),\quad a_2\equiv 3(\mathrm{mod}\,11),\ a_3\equiv 9(\mathrm{mod}\,11),\ a_4\equiv 0(\mathrm{mod}\,11),\\ &a_5\equiv 10(\mathrm{mod}\,11),\ a_6\equiv 4(\mathrm{mod}\,11),\ a_7\equiv 6(\mathrm{mod}\,11),\\ &a_8\equiv 0(\mathrm{mod}\,11),\quad a_9\equiv 1(\mathrm{mod}\,11),\ a_{10}\equiv 0(\mathrm{mod}\,11).\end{aligned}$$

Од досега изнесеното следува дека a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

46. За секој природен број n збирот $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ е запишан како нескратлива дропка $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажи, дека 3 не е делител на p_{67}.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои $3\mid p_n$.

Решение. а) Нека $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Имаме, $S_2=3\cdot\frac{1}{2}$, $S_7=3\cdot\frac{121}{140}$ и

$$S_{22}-S_7=\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\frac{1}{14}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}=\frac{30a}{b}+\frac{51}{140}=\frac{3c}{d},$$

каде $(a,b)=(c,d)=1$. Лесно се гледа дека $a\equiv b(\mathrm{mod}\,3)$. Затоа $3\nmid c,d$, $c\not\equiv d(\mathrm{mod}\,3)$, $p_{22}=3p'_{22}$ и $3\nmid p'_{22}$. Слично се докажува дека

$$S_{67}-S_{22}=\frac{90e}{f}+\frac{c}{d},$$

каде $3\nmid f$. Затоа $3\nmid p_{67},q_{67}$.

б) Нека $S_n=\frac{k_n}{3^{m_n}l_n}$, каде $3\nmid k_n,l_n$. Тогаш

$$S_{3n}=\frac{S_n}{3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}$$
$$=\frac{k_n}{3^{m_n+1}l_n}+3\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_nb_n+3^{m_n+2}l_nb_n}{3^{m_n+1}l_nb_n},$$

каде $3\nmid b_n$. Затоа, ако $m_n\geq -1$, тогаш $m_{3n}=m_n+1$. Аналогно се докажува дека $m_{3n+2}=m_n+1$ за $m_n\geq -1$ и $m_{3n+1}=m_n+1$ за $m_n\geq 0$. Бидејќи

$$m_1=0, m_2=m_7=m_{22}=-1 \text{ и } m_{67}=0,$$

лесно се следува дека одговорот на задачата е $n=2,7,22$.

47. Нека a и b се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на $(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

Решение. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Нека $k>1$ е природен број. Ако ако $kab-1$ е делител на $(ka^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

За парот природни броеви (a,b) ќе велиме дека е *добар* ако $kab-1\mid(ka^2-1)^2$. Од

$$(ka^2-1)^2\equiv(ka^2-kab)^2=k^2a^2(a-b)^2\ (\mathrm{mod}\,kab-1)$$

и $(k^2a^2,kab-1)=1$ следува $kab-1\mid(ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab-1\mid(a-b)^2$.

Според тоа, парот (a,b) е добар ако и само ако парот (b,a) е добар. Последното значи, дека ако $a \neq b$, тогаш можеме да претпосатвиме дека $b > a$. Нека a е најмалиот природен број за кој постои $b > a, b \in \mathbb{N}$ таков што парот (a,b) е добар. Тогаш

$$\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1} \equiv -\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}(kab-1) = -(ka^2-1)^2 \equiv -1 \,(\operatorname{mod} ka),$$

па затоа постои $c \in \mathbb{N}$ таков што

$$(ka^2-1)^2 = (kab-1)(kac-1),$$

што значи дека парот (a,c) е добар. Меѓутоа,

$$kac-1 = \frac{(ka^2-1)^2}{kab-1} < ka^2-1,$$

па затоа $a > c$, што противречи на изборот на парот (a,b). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

48. Нека b,n се природни броеви. Нека претпоставиме дека за секој $k > 1$, постои цел број a_k така што $b - a_k^n$ е делив со k. Докажи дека $b = A^n$, за некој природен број A.

Решение. Нека факторизацијата на b е $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, каде $p_1, p_2, \ldots, p_s$ се различни прости броеви. Ќе докажеме дека сите експоненти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ се деливи со n, па така $A = p_1^{\frac{\alpha_1}{n}} p_2^{\frac{\alpha_2}{n}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\frac{\alpha_s}{n}}$.

За секој k постои a_k таков што $k \mid b - a_k^n$, па затоа постои и за $k = b^2$. Значи, постои природен број a_k таков што $b^2 \mid (b - a_k^n)$. Бидејќи $b^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \ldots p_s^{2\alpha_s}$, за секој $i = 1,2,\ldots,s$ имаме $p_i^{2\alpha_i} \mid (b - a_k^n)$ и $p_i^{2\alpha_i} > p_i^{\alpha_i}$. Оттука,

$$a_k^n \equiv b \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p_i^{\alpha_i})$$

и

$$a_k^n \equiv b \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p_i^{\alpha_i+1}),$$

од каде имаме дека најголемиот степен на p_i кој го дели a_k^n е $p_i^{\alpha_i}$. Бидејќи a_k^n е n-ти степен на број, следува дека α_i е делив со n, за $i = 1,2,\ldots s$.

49. Определи го најмалиот природен број k, таков што постојат цели броеви $x_1, x_2, \ldots, x_k$ за кои важи $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 = 2002^{2002}$.

Решение. Одговорот е $k=4$. Прво ќе покажеме дека 2002^{2002} не може да се запише како сума на три кубови на природни броеви. Да забележиме дека $2002\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)$ и

$$2002^3\equiv 4^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,9),$$

од каде следува

$$2002^{2002}\equiv (2002^3)^{667}\cdot 2002\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)\,.$$

Од друга страна, $x^3\equiv 0,\pm 1(\mathrm{mod}\,9)$ за било кој цел број x. Според тоа,

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3\not\equiv 4(\mathrm{mod}\,9)\,.$$

Останува да покажеме дека 2002^{2002} е збир на четири кубови. Имаме

$$2002=10^3+10^3+1^3+1^3,$$

и имајќи предвид дека $2002=3\cdot 667+1$, можеме да запишеме дека

$$\begin{aligned}2002^{2002}&=2002\cdot(2002^{667})^3\\&=(10\cdot 2002^{667})^3+(10\cdot 2002^{667})^3+(2002^{667})^3+(2002^{667})^3,\end{aligned}$$

со што сме покажале дека дека $k=4$.

50. Даден е прост број $p>3$. Дали броевите $1,2,...,p-1$ можеме да ги поделиме (разбиеме) на две непразни множества така што збирот на броевите во едното и производот на броевите во другото множество да даваат ист остаток при делење со p?

Решение. Ќе докажеме дека постојат два ненулти остатоци a и b по модул p, такви што нивниот производ е конгруентен со збирот на останатите ненулти остатоци по модул p. За збирот на остатоците имаме

$$\frac{p(p-1)}{2}-a-b\equiv -(a+b)(\mathrm{mod}\,p),$$

па затоа нашиот услов е еквивалентен на

$$ab\equiv -(a+b)(\mathrm{mod}\,p),$$

т.е. на

$$(a+1)(b+1)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)\,.$$

Бидејќи $p>3$ постојат ненулти остатоци m и n такви што $mn\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ и $m\neq n$. Освен тоа, јасно е дека $m,n\not\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, па затоа можеме да избереме $a=m-1$ и $b=n-1$.

Според тоа, бараното разбивање можеме да го направиме.

51. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се природни броеви и $a>1$ е природен број таков што $a_1a_2...a_n\,|\,a$. Докажи дека $(a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1)$ не е делител на $a^{n+1}+a-1$.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Ако $a_i = 1$ за некој i, добиваме дека $a \mid (a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1) \mid a^{n+1}+a-1$, што не е можно. Според тоа, $a_i \geq 2$, за $i = 1,2,...,n$.

Нека $a = ba_1a_2...a_n$ и $a^{n+1}+a-1 = c(a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1)$. Очигледно, $(b,c)=1$, $1 \leq b \leq a-1$, а лесно се покажува дека $c \leq \frac{a^{n+1}+a-1}{(a+1)^n} < a$. Освен тоа

$$ba_1a_2...a_n \equiv ca_1a_2...a_n (\operatorname{mod} a-1)$$

што заедно со претходно изнесеното дава $b = c = 1$. Сега имаме

$$\begin{aligned} a^{n+1}+a-1 &= (a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1) \\ &< (a+a_1)(a+a_2)...(a+a_n) \\ &= a(\tfrac{a}{a_1}+1)(\tfrac{a}{a_2}+1)...(\tfrac{a}{a_n}+1) \\ &\leq a(\tfrac{a}{2}+1)^n \leq a^{n+1}, \end{aligned}$$

што е противречност.

52. Природен број N се нарекува *балансиран*, ако $N = 1$ или ако N може да се запише како производ па парен број прости броеви кои не мора да бидат различни. Нека се дадени природните броеви a и b и нека P е полином дефиниран со $P(x) = (x+a)(x+b)$.

а) Докажи дека постојат различни природни броеви a и b така што броевите $P(1), P(2),..., P(50)$ се балансирани;

б) Докажи дека ако $P(n)$ е балансиран за сите природни броеви n, тогаш $a = b$.

Решение. Дефинираме функција на множеството од природни броеви со $f(n) = 0$, ако n е балансиран и $f(n) = 1$, ако n не е балансиран. Јасно,

$$f(mn) \equiv f(n) + f(m) (\operatorname{mod} 2),$$

за секои природни броеви n, m.

а) За природен број n ја рагледуваме бинарната низа

$$(f(n+1), f(n+2),..., f(n+50)).$$

Бидејќи имаме 2^{50} различни такви низи, има два различни природни броеви a и b такви што

$$(f(a+1), f(a+2),..., f(a+50)) = (f(b+1), f(b+2),..., f(b+50)).$$

Но, ова повлекува дека за полиномот $P(x) = (x+a)(x+b)$ сите броеви $P(1)$, $P(2), P(3),..., P(50)$ се балансирани, бидејќи $1 \leq k \leq 50$ имаме

$$f(P(k)) = f(a+k) + f(b+k) \equiv 2f(a+k) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2).$$

б) нека, сега претпоставиме дека $P(n)$ е балансирано за сите природни броеви n и $a<b$. Нека $n=k(b-a)-a$, за доволно големо k, така што n е позитивен. Тогаш

$$P(n)=k(k+1)(b-a)^2$$

и овој број ќе биде балансиран ако $f(k)=f(k+1)$. Тоа значи дека низата $\{f(k)\}_k$ мора да биде константна за доволно големо k. Но, ова не е можно бидејќи за секој прост број p, $f(p)=1$, а за секој квадрат $f(t^2)=0$. Конечно, од добиената противречност следува $a=b$.

53. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$1^{p-2}+2^{p-2}+...+(\tfrac{p-1}{2})^{p-2}\equiv\tfrac{2-2^p}{p}(\operatorname{mod}p).$$

Решение. Нека $(a,p)=1$, a е фиксиран, и за секој $v\in\{1,2,...,p-1\}$ да го поделиме av со p и остаток $r_{a,v}$ и да ставиме $av=pq_{a,v}+r_{a,v}$. Лесно се покажува дека остатоците $r_{a,v}$ се ненулти и дека се по парови различни, што значи дека го формираат множеството $\{1,2,...,p-1\}$.

Нека $T(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$, за $(a,p)=1$. Имаме

$$T(av)=\tfrac{(av)^{p-1}-1}{p}=\tfrac{(pq_{a,v}+r_{a,v})^{p-1}-1}{p}\equiv T(r_{a,v})-q_{a,v}(av)^{p-2}.$$

Според тоа,

$$\sum_{v=1}^{p-1}T(av)\equiv\sum_{v=1}^{p-1}(T(r_{a,v})-q_{a,v}(av)^{p-2})\equiv\sum_{v=1}^{p-1}T(v)-\sum_{v=1}^{p-1}q_{a,v}(av)^{p-2}(\operatorname{mod}p).$$

Од друга страна, лесно се гледа, дека

$$T(ab)-T(a)-T(b)=pT(a)T(b)\text{, т.е. }T(ab)\equiv T(a)+T(b)(\operatorname{mod}p).$$

Тогаш

$$\sum_{v=1}^{p-1}T(av)\equiv(p-1)T(a)+\sum_{v=1}^{p-1}T(v)(\operatorname{mod}p)$$

и следствено $T(a)\equiv\sum_{v=1}^{p-1}q_{a,v}(av)^{p-2}(\operatorname{mod}p)$. Во случајов, за $a=2$ имаме

$$\tfrac{2^p-2}{p}=2T(2)\equiv(2^{p-1}-1+1)\sum_{v=1}^{p-1}q_{2,v}v^{p-2}\equiv\sum_{v=1}^{p-1}q_{2,v}v^{p-2}$$

$$\equiv\sum_{v>\frac{p}{2}}v^{p-2}\equiv-\sum_{v=1}^{\frac{p-1}{2}}v^{p-2}(\operatorname{mod}p)$$

со што тврдењето е докажано.

54. Нека p е непарен прост број. Докажи, дека

а) $\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \binom{2i}{i} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$,

б) $\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2i}{i} \equiv (-3)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Решение. а) Имаме

$$5^{\frac{p-1}{2}} = (1+4)^{\frac{p-1}{2}} = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i} 4^i = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\frac{p-1}{2}(\frac{p-1}{2}-1)...(\frac{p-1}{2}-i+1)}{i!} 4^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(p-1)(p-3)...(p-(2i-1))}{2^i i!} 4^i \equiv \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(-1)(-3)...(-2i+1)}{i!} 2^i$$
$$= \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2i-1)\cdot 2\cdot 4\cdot ...\cdot 2i}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \binom{2i}{i} \pmod{p}.$$

б) Постапи аналогно како под а) со тоа што ќе искористиш дека $-3 = 1-4$.

55. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека бројот $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$ не е делив со 5.

Решение. Од Њутновата бинимна формула за изразот $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ добиваме

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \sqrt{8}^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \sqrt{8}^{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 8^k + \sqrt{8} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 8^k$$
$$= a_n + b_n \sqrt{8},$$

каде што $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Доволно е да докажеме дека ниту еден од броевите $b_1, b_2, ...$ не е делив со 5.

Прв начин. Ако ги помножиме равенствата

$$(1+\sqrt{8})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{8} \quad \text{и} \quad (1-\sqrt{8})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{8},$$

добиваме $a_n^2 + 7^{2n+1} = 8b_n^2$. Ако некој од броевите b_n е делив со 5, тогаш бројот $a_n^2 + 7^{2n+1}$ ќе биде делив со 10. Последното не е можно бидејќи цифрата на единиците на бројот a_n^2 може да биде 0, 1, 4, 6 или 9, а на бројот 7^{2n+1} само 3 или 7.

Втор начин. За $n \geq 0$ имаме

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{8} = (1+\sqrt{8})^{2n+3} = (1+\sqrt{8})^2 (1+\sqrt{8})^{2n+1}$$

$$=(9+2\sqrt{8})(a_n+b_n\sqrt{8})$$
$$=(9a_n+16b_n)+(2a_n+9b_n)\sqrt{8},$$

од каде што добиваме

$$a_{n+1}=9a_n+16b_n,\quad b_{n+1}=2a_n+9b_n,\quad (n=0,1,2,...).$$

Од $(1+\sqrt{8})^{2\cdot 0+1}=1+\sqrt{8}$, $a_0=1$ и $b_0=1$, добиваме:

$a_0\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$	$b_0\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$	$b_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_2\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$	$b_2\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_3\equiv -2(\mathrm{mod}\,5)$	$b_3\equiv -2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_4\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$	$b_4\equiv -2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_5\equiv -2(\mathrm{mod}\,5)$	$b_5\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_6\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$	$b_6\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_7\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$	$b_7\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_8\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$	$b_8\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$
$a_9\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$	$b_9\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_{10}\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$	$b_{10}\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_{11}\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$	$b_{11}\equiv -2(\mathrm{mod}\,5)$
$a_{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$	$b_{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$

Сега тврдењето на задачата следува од $a_0,a_{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ и $b_0,b_{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$, што значи дека

$$b_k=\sum_{k=}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$$

што и требаше да се докаже.

56. Нека $a_1,a_2,a_3,...$ е строго растечка низа природни броеви. Докажи дека низата содржи бесконечно многу членови a_m кои може да се претставaт во облик

$$a_m=xa_p+ya_q$$

каде x и y се природни броеви и $p\neq q$.

Решение. Сите броеви од низата $\{a_i\}$ ги делиме во a_1 групи на следниот начин:

$$A_0=\{a_i\mid a_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$A_1=\{a_i\mid a_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$A_2=\{a_i\mid a_i\equiv 2(\mathrm{mod}\,a_1)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{a_1-1}=\{a_i\mid a_i\equiv a_1-1(\mathrm{mod}\,a_1)\}.$$

Од овие множества барем едно е бесконечно, бидејќи во спротивно множеството вредности на низата би било конечно, што не е можно бидејќи низата строго монотоно расте. Нека A_r е бесконечно множество. Тогаш, за секои два елементи a_m и a_p ($a_m > a_p$) од тоа множество е исполнето

$$a_m = la_1 + r,\ a_p = sa_1 + r$$

од што следува

$$a_m - a_p = (l-s)a_1$$

т.е. при ознака $l - s = y$, имаме $a_m = a_p + ya_1$. При тоа важи $a_q = a_1$ и $x = 1$. Такви броеви a_m има бесконечно многу.

57. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 2009 и чиј збир на цифри е еднаков на 2009.

Решение. Бидејќи $2009 = 223 \cdot 9 + 2$, бараниот број има барем 224 цифри. Ќе разгледуваме 224-цифрени броеви $x = \overline{c_{223}c_{222}...c_1c_0}$. Јасно е дека $c_{223} \geq 2$. Притоа, ако $c_{223} = 2$, тогаш $c_{222} = c_{221} = ... = c_1 = c_0 = 9$ и $x = 3 \cdot 10^{223} - 1$, а овој број не е делив со $2009 = 7^2 \cdot 41$, бидејќи $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Нека $c_{223} = 3$. Тогаш $x = 399...989...9 = 4 \cdot 10^{223} - 10^i - 1$, за некој i. Бидејќи $10^5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 41)$ имаме $10^i \equiv 1, 10, 18, 16$ или $31 (\mathrm{mod}\, 41)$, за $i = 0,1,2,3,4 (\mathrm{mod}\, 5)$, соодветно и оттука следува $x = 4 \cdot 10^{223} - 10^i - 1 \equiv 22 - 10^i (\mathrm{mod}\, 41)$, т.е. x никогаш не е делив со 41.

Нека $c_{223} = 4$. Меѓу цифрите $c_{222}, c_{221}, ..., c_1, c_0$ се наожаат две осумки или една седумка, додека сите останати се деветки. Во секој случај

$$x = 5 \cdot 10^{223} - 10^i - 10^j - 1 \equiv 38 - (10^i + 10^j) (\mathrm{mod}\, 41).$$

Од претхпдните разгледувања имаме $10^i + 10^j \equiv 38 (\mathrm{mod}\, 41)$ ако и само ако $(i, j) \equiv (0,4)$ или $(4,0) (\mathrm{mod}\, 5)$. Притоа $i \neq j$ и $i, j \leq 220$.

Да ставиме $j = 220$ и $i \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$. Треба да избереме i, ако постои, така што

$$7^2 \mid x = 5 \cdot 10^{223} - 10^{220} - 10^i - 1 \equiv 5 \cdot 10^{13} - 10^{10} - 10^i - 1 \equiv 31 - 10^i (\mathrm{mod}\, 49).$$

Лесно се добива дека $10^i \equiv 31 (\mathrm{mod}\, 49)$ ако и само ако $i \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 42)$, што заедно со $i \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 5)$ ја дава единствената можност $i = 49$. Според тоа, бараниот број е

$$x = 4998\underset{170}{9...99}8\underset{49}{9...99}.$$

58. Нека $p \equiv 3 \pmod 4$ е прост број. Нека N е бројот на правоаголниците со плоштина $2p^2$, чии темиња имаат целобројни координати (x, y) за кои важи $0 \le x, y \le 2p^2$. Определи го остатокот од делењето на бројот N со бројот p.

Решение. Прво ќе го определиме бројот на правоаголниците со страни паралелни со координатните оски. Очигледно, бројот на правоаголниците со страни со должини a и b, кои се паралелни со координатните оски и чии темиња имаат целобројни координати (x, y), за кои важи $0 \le x, y \le 2p^2$ е

$$(2p^2 - a + 1)(2p^2 - b + 1) \equiv (a-1)(b-1) \pmod p.$$

Правоаголници со плоштина $2p^2$ имаат димензии $2p^2 \times 1, p^2 \times 2, 2p \times p$, $p \times 2p$, $2 \times p^2$, $1 \times 2p^2$. Значи, ако нивниот број е K, тогаш $K \equiv 0 \pmod p$.

Сега ќе го определиме бројот L на правоаголниците чии страни не се паралелни со координатните оски. Да разгледаме три последователни темиња на таков правоаголник, кои имаат координати $(0, a), (b, 0), (b+c, d)$. Очигледно, $c = ka, d = kb$ и $k(a^2 + b^2) = 2p^2$ за некој цел број k (зошто k е цел број?). Решенијата на оваа равенка се $k = 1, a = b = p$ и $k = p^2, a = b = 1$.

Во првиот случај имаме квадрат со страна $\sqrt{2}p$ и неговата полошба е еднозначно определена од опишаниот околу него квадрат со страна $2p$. За второто решение имаме два правоаголника со плоштина $2p^2$, впишани во квадрат со страна $p^2 + 1$. Според тоа, за L добиваме

$$L \equiv (2p-1)^2 + 2p^4 \equiv 1 \pmod p.$$

Конечно, $N = K + L \equiv 1 \pmod p$.

59. Определи го бројот на природните броеви a кои се помали од 2003 и за кои постои природен број n таков што $3^{2003} \mid n^3 + a$.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви имаат еден од следниве облици $9k \pm 1$, $3^3(9k \pm 1)$ или $3^6(9k \pm 1)$.

Нека претпоставиме дека 3 не е делител на a. Бидејќи $n^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$, заклучуваме дека $a \equiv \pm 1 \pmod 9$.

Обратно, нека $a \equiv \pm 1 \pmod 9$. Бидејќи $1^3 - 1$ и $2^3 + 1$ се деливи со 9, следува дека постои n таков што $3^s, s \ge 2$ е делител на $n^3 + a$ и 3^{s+1} не е делител на $n^3 + a$, т.е. $n^3 + a = 3^s t$, каде $3 \nmid t$. Ќе докажеме дека бројот $n_1 = n + 2 \cdot 3^{s-1} t$

е таков што n_1^3+a е делив со 3^{s+1}. Имаме

$$(n+2\cdot 3^{s-1}t)^3+a=3^s t(2n^2+1)+4\cdot 3^{2s-1}nt^2+8\cdot 3^{3s-3}t^3.$$

Бидејќи 3 не е делител на n, заклучуваме дека $2n^2+1$ е делив со 3. Освен тоа $2s-1\geq s+1$ и $3s-3\geq s+1$, па затоа n_1^3+a е делив со 3^{s+1}. Продолжувајќи на истиот начин ќе добиеме дека постои природен број n_p таков што $3^{2003}\mid n_p^3+a$.

Ако $a<2003$ е делив со 3, тогаш $a=3^s b$, каде $s\leq 6$. Тогаш 3 е делител на n, т.е. $n=3^p n_0$, каде $p\geq 1$ и $3\nmid n_0$. Ако $p\geq 3$, тогаш $3^9\mid n^3$ и $3^9\nmid a$, па затоа $3^{2003}\nmid n^3+a$. Според тоа, $p=1$ или $p=2$, од каде следува дека $s=3$ или $s=6$, соодветно.

Во првиот случај добиваме дека $3^{2000}\mid n_0^3+b$, каде $3\nmid b$ и $27b<2003$. Сега, како и претгходно заклучуваме дека $b\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,9)$.

Во вториот случај добиваме дека $3^{1997}\mid n_0^3+b$, каде $3\nmid b$ и $729b<2003$. Сега како и претходно закчучуваме дека $b\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,9)$.

Бројот на природните броеви $b\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,9)$ такви што $b<2003, 27b<2003$ или $729b<2003$ е еднаков на $2\cdot 222+1=445, 2\cdot 8+1=17$ или 1, соодветно. Според тоа, постојат $445+17+1=463$ броеви со саканото својство.

60. Нека n е непарен природен број. Докажи дека броевите $0,1,2,3,...,n^2-1$ може да се распоредат во таблица со n редици и n колони така што секој количник и секој остаток добиени при делењето на тие броеви со бројот n да се сретнува точно по еднаш во ред и колона.

Решение. Во полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го запишуваме бројот

$$n\cdot((i+j)\pmod n)+(i-j)\pmod n.$$

Јасно, секој количник и секој остаток се среќава точно по еднаш во ред и колона. Нека претпоставиме дека во полињата (i,j) и (k,l), $(i,j)\neq(k,l)$ има запишано еден и ист број. Тогаш $i+j\equiv k+l(\mathrm{mod}\,n)$ и $i-j\equiv k-l(\mathrm{mod}\,n)$, од каде следува $i=k,\ j=l$, што е противречност.

61. Во правоаголен координатен систем е дадена затворена конвексна линија L чии темиња се со целобројни координати и чии страни се со еднаква должина. Докажи дека L има парен број страни.

Решение. Нека L има n страни и нека x_i и y_i се проекциите на должината на $i-$тата страна на L на координатните оски x и y соодветно, земени со запазување на знакот. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,\ x_i^2 + y_i^2 = c \text{, за } i = 1,2,...,n. \qquad (1)$$

Можеме да сметаме дека барем едена од броевите $x_i, y_i, i = 1,2,...,n$ е непарен, бидејќи во спротивно равенствата во (1) можеме да ги поделиме со заедничкиот степен на бројот 2. Бројот c е збир на два точни квадрати, па затоа единствени остатоци при делење со 4 на бројот c се 0, 2 или 1. Можни се два случаи.

1) Сите броеви $x_i, y_i, i = 1,2,...,n$ се непарни и тогаш очигледно n мора да е парен број.
2) За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ еден од броевите е парен, а другиот е непарен, па од равенството $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ повторно ќе следува дека n е парен број.

Друг случај освен 1) и 2) не е можен. На пример, ако x_i, y_i се парни, а x_k, y_k се непарни, тогаш $c = x_i^2 + y_i^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $c = x_i^2 + y_i^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, што е противречност. На потполно ист начин, разгледувајќи конгруенции по модул 4 се покажува дека и останатите случаи доведуваат до противречност.

62. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S .

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S. Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k-1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \le h(y) - h(x) \le k - 1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m(\mathrm{mod}\, k)\}$, $m = 1, 2, ..., k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S. Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

63. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненегативни цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + ... + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Решение. *Прв начин.* Ако постојат $a_1, a_2, ..., a_n$, тогаш множејќи го десното равенство со 3^a, каде $a = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и сведувајќи го по модул 2 добиваме

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2).$$

Според тоа, $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ или $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$. Затоа во натамошните разгледувања ќе земеме $n \equiv 1, 2(\mathrm{mod}\, 4)$. Ќе докажеме дека во овие случаи броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ постојат.

Низата реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ ќе ја наречеме употреблива со степени $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$, ако

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + ... + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + ... + \frac{x_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Лесно се проверува дека ако низата $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, \frac{x_{n-1}+x_n}{3}$ е употреблива со степени $a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}$, тогаш и низата $x_1, x_2, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ е употреблива со степени $a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + 1, a_{n-1} + 1$.

Ќе ја наречеме чекор во низата $x_1, x_2, ..., x_n$ операцијата на замена на два броја a, b со бројот $\frac{a+b}{3}$. Од претходните разгледувања следува дека низата $x_1, x_2, ..., x_n$ е употреблива (за некои a_i) ако може да се применат $n-1$ чекори така што ќе остане бројот 1. Со индукција по n ќе докажеме дека низата $1, 2, ..., n$ е употреблива.

Да забележиме дека бројот $2x$ може да се избрише од низата ако во неа се наоѓа бројот x (замена на $x, 2x$ со x).

1) Ако $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$, според претходните разгледувања со бришење на n ја добиваме низата $1, 2, ..., n-1$.
2) Нека $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Ако $n \ge 9$, постои $m \in \mathbb{N}$ таков што $6m \le n \le 10m$.

Бројот $6m$ можеме да го избришеме, додека секој од паровите $(6m-i,$ $6m+i)$, за $1\le i\le n-6m$ можеме да го замениме со бројот $4m$. Исто така и секое појавување на бројот $4m$ можеме да го избришеме. Така ни останува низата $1,2,...,12m-1-n$ која според индуктивната претпоставка е употреблива бидејќи $12m-1-n\equiv 2(\bmod 4)$.

Останува да ја провериме базата на индукција, а тоа се случаите $n\in\{1,5\}$. Случајот $n=1$ е тривијален, а за $n=5$ ја применуваме низата чекори $1,2,3,\underline{4,5}\to 1,2,\underline{3,3}\to \underline{1,2},2\to \underline{1,2}\to 1$.

Втор начин. Од второто равенство следува $1\cdot b_1+2\cdot b_2+...+n\cdot b_n=3^{b_0}$, каде за секој i бројот b_i е степен на бројот 3. Десната страна е непарна, а левата има парност на $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $n=4k+1$ или $n=4k+2$.

Обратно, за такви n постојат соодветни броеви $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{N}$. На пример, по индукција следува дека

$$\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^2}+(\frac{4}{3^4}+\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{7}{3^4})+...+$$
$$+(\frac{4k-4}{3^{k+2}}+\frac{4k-3}{3^{k+2}}+\frac{4k-2}{3^{k+2}}+\frac{4k-1}{3^{k+2}})+\frac{4k}{3^{k+2}}+\frac{4k+1}{3^{k+2}}=1,$$
$$\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^3}+(\frac{5}{3^4}+\frac{6}{3^4}+\frac{7}{3^4}+\frac{8}{3^4})+...+$$
$$+(\frac{4k-3}{3^{k+2}}+\frac{4k-2}{3^{k+2}}+\frac{4k-1}{3^{k+2}}+\frac{4k}{3^{k+2}})+\frac{4k+1}{3^{k+2}}+\frac{4k+2}{3^{k+2}}=1,$$

при што соодветните равенства за 2 се исто така точни.

64. Нека p е прост број и $a_1,a_2,...,a_{2p-1}$ се различни природни броеви од интервалот $[1,p^2]$ чиј збир е делив со p. Докажи, дека постојат природни броеви $b_1,b_2,...,b_{2p-1}$ такви што ниту еден од нив не е делив со p и за кои

1) Во записот на секој од нив во броен систем со основа p се среќаваат само цифрите 0 и 1,
2) Збирот $a_1b_1+a_2b_2+...+a_{2p-1}b_{2p-1}$ е делив со p^{2012}.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме за произволен природен број n. За таа цел прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако $x_1,x_2,...,x_{p-1}$ се природни броеви кои не се деливи со p, тогаш за секој r, $1\le r\le p-2$ можеме за избереме неколку од нив чиј збир при делење со p дава остаток r.

Доказ. Да ставиме $S_0=0$ и да претпоставиме дека сме нашле $k, 0\le k\le p-2$ збирови $S_0,S_1,....,S_k$ во секој од кои учествуваат само броеви од $x_1,x_2,...,x_k$

и кои при делење со p даваат различни остатоци. Го додаваме бројот x_{k+1} и да ги разгледаме збировите $S_0+x_{k+1}, S_1+x_{k+1},...., S_k+x_{k+1}$ кои при делење со p даваат различни остатоци. Ако претпоставиме дека тие остатоци се пермутација на $S_0, S_1,...., S_k$ и собереме почлено ќе добиеме

$$(k+1)x_{k+1} \equiv 0 (\bmod p),$$

што не е можно. Според тоа, добивме барем еден нов остаток и така по индукција ќе ги добиеме сите можни ненулти остатоци. Со тоа лемата е докажана. ■

Сега тврдењето следува по индукција. Бидејќи збирот на дадените броеви е делив со p, имаме база на индукцијата.

Нека претпоставиме дека постојат броеви $b_1, b_2, ..., b_{2p-1}$ кои ги задоволуваат условот и такви што $a_1b_1+a_2b_2+...+a_{2p-1}b_{2p-1}=p^nA$ каде $n \geq 1$ и p не е делител на A. Бидејќи во интервалот $[1, p^2]$ има точно p броеви кои се деливи со p, добиваме дека меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{2p-1}$ има барем $p-1$ кои не се деливи со p. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се броевите $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$.

Согласно лемата, без ограничување на општоста можеме да земеме дека за броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ е точно дека збирот $a_1+a_2+...+a_k+A$ е делив со p. Сега, ако ставиме $b_i^{'}=b_i+p^n, i=1,2,...,k$ и $b_i^{'}=b_i, i=k+1, k+2, ..., 2p-1$, тогаш новите броеви го задоволуваат условот и $a_1b_1+a_2b_2+...+a_{2p-1}b_{2p-1}$ е делив со p^{n+1}.

65. Дали постои 23-цифрен природен број таков што со замена на произволна цифра никогаш не се добива број делив со 11?

Решение. Нека претпоставиме дека таков број постои и нека тоа е бројот

$$x=\sum_{k=0}^{22} a_k 10^k .$$

Бидејќи $10^{2k} \equiv 1(\bmod 11)$ и $10^{2k-1} \equiv -1(\bmod 11)$, ако r е остатокот при делење на x со 11, имаме

$$r \equiv \sum_{k=0}^{11} a_{2k} - \sum_{k=1}^{11} a_{2k-1} (\bmod 11).$$

Ако $a_{2k} \geq r$ за некој k, тогаш a_{2k} можеме да го замениме со $a_{2k}^{'}=a_{2k}-r$ (што е цифра, бидејќи $a_{2k}^{'} \leq a_{2k}$), а во случај $a_{2k} \leq r-2$ со $a_{2k}^{'}=11+a_{2k}-r$ (при што $a_{2k}^{'} \leq 9$ следува од $a_{2k} \leq r-2$), па ќе добиеме број кој е делив со

11. Според тоа, сите цифри на парните места на бројот x се еднакви на $r-1$, $(r \neq 0)$.

Аналогно, ако $a_{2k-1} \leq 9-r$, тогаш со замена на a_{2k-1} со цифрата $a'_{2k-1} = a_{2k-1}+r \leq 9-r+r=9$, односно за $a_{2k-1} \geq 11-r$ со замена на a_{2k-1} со цифрата $a'_{2k-1} = a_{2k-1}+r-11 \leq a_{2k-1}$ добиваме број делив со 11. Затоа сите цифри на бројот x на непарните места мора да се $10-r$.
Тогаш, важи

$$r \equiv 12(r-1)-11(10-r) \equiv r-1 (\mathrm{mod}\, 11),$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека број со саканото својство не постои.

66. Дадено е множество M од 1985 различни природни броеви, такви што ниту еден од нив нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири по парови различни броеви чиј производ е четврти степен на природен број.

Решение. Секој број $x_j \in M$ е од облик

$$x_j = \prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}}, \quad j=1,2,...,1985, \; 0 \leq a_{ij}$$

каде $p_1, p_2, ..., p_9$ се сите прости броеви помали од 26, т.е. $p_i \in \{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$. Производот $x_j x_k$ е точен квадрат ако и само ако $2 \,|\, a_{ij}+a_{ik}$, $i=1,...,9$. Бројот на различни производи $x_j x_k$ по модул 2 е $2^9 = 512$. Секое подмножество од M кое содржи барем 513 елементи содржи два броја чиј производ е точен квадрат. Со елиминација на таквите парови се добиваат $\frac{1985-511}{2} = 737$ парови , такви што производот на членовите на секој пар е точен квадрат. Множеството производи е $\{y_1^2, ..., y_{737}^2\}$. Ако направиме аналогна постапка како претходната на множеството $\{y_1^2, ..., y_{737}^2\}$, добиваме дека постои пар y_r, y_s таков што $y_r y_s$ е тоќен квадрат. Значи $y_r y_s = y^2$, за некој $y \in \mathbb{N}$. Бидејќи

$$y_r^2 = x_j x_k, \; y_s^2 = x_m x_n,$$

добиваме

$$x_j x_k x_m x_n = y_r^2 y_s^2 = y^4,$$

каде x_j, x_k, x_m, x_n се различни природни броеви од множеството M.

67. Определи ги сите природни броеви n за кои сите природни броеви кои во

декадниот запис имаат $n-1$ цифри 1 и една цифра 7 се прости броеви.

Решение. Бројот N кој во декадниот запис има $n-1$ цифри 1 и една цифра 7 може да се запише во видот:

$$N = A_n + 6\cdot 10^k,$$

каде A_n е број запишан со n единици и $0 \le k \le n$.

Јасно, $N > 3$. Ако $3|n$, тогаш збирот на цифрите на N е делив со 3, па затоа $3|N$, т.е. N е сложен број.

Сега да го разгледаме случајот $n \ge 6$. Бидејќи броевите A_s, за $s = 1,2,3,4,5,6$ при делење со 7 даваат остатоци соодветно 1, 4, 6, 5, 2, 0 и бидејќи

$$A_{m+6} = A_m 10^6 + A_6 \equiv A_m + A_6 \equiv A_m \pmod 7$$

следува дека $7|A_l$ ако и само ако $6|l$. Понатаму, за $k = 0,1,2,3,4,5$ бројот 10^k дава остатоци соодветно 1, 3, 2, 6, 4, 5, па затоа $6\cdot 10^k$ за истите вредности на k дава остатоци 6, 4, 5, 1, 3, 2. Оттука следува дека, ако за некој $n \ge 6$ важи $A_n \equiv r \pmod 7$ и $3 \nmid n$, тогаш може да најдеме таков $k \le 5$ што $6\cdot 10^k \equiv -r \pmod 7$, па затоа $7 | A_n + 6\cdot 10^k$, т.е. $7|N$, што значи дека N не е прост.

Значи, доволно е да ги провериме вредностите $n = 2,4,5$. За $n = 5$ имаме $11711 = 7\cdot 1673$, а за $n = 4$ имаме $1711 = 29\cdot 59$. Од друга страна за $n = 2$ броевите 17 и 71 се прости, а за $n = 1$ бројот 7 е прост. Значи, решение на задачата е $n \in \{1,2\}$.

68. Нека k е природен број. Докажи дека постојат бесконечно многу точни квадрати од видот $2^k n - 7$.

Решение. Прво ќе докажеме дека за секој природен број k постои природен број a_k таков што

$$a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}.$$

Да забележиме дека изборот $a_k = 1$ го задоволува бараниот услов за $k \le 3$. За $k \ge 4$, да тргнеме од претпоставката $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$. Сега, очигледно имаме две можности

$$a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}$$

или

$$a_k^2 \equiv 2^k - 7 \pmod{2^{k+1}}.$$

Во првиот случај ставаме $a_{k+1} = a_k$, а во вториот случај $a_{k+1} = a_k + 2^{k-1}$. Бидејќи a_k е непарен, во вториот случај од индуктивната претпоставка следува

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2^k a_k + 2^{2k-2} \equiv a_k^2 + 2^k a_k \equiv a_k^2 + 2^k \equiv -7 (\mathrm{mod}\, 2^{k+1}) .$$

Најпосле, да забележиме дека низата a_k не е ограничена, бидејќи мора да важи $a_k^2 \geq 2^k - 7$, што значи дека разгледуваната низа има бесконечно многу различни вредности. Оттука го добиваме саканиот резултат, бидејќи за $m \geq k$ имаме $a_m^2 \equiv -7 (\mathrm{mod}\, 2^k)$ и можеме да дефинираме $n = \frac{a_m^2 + 7}{2^k}$.

69. Определи ги сите броеви од облик $2^n, n \in \mathbb{N}$, такви што по отстранувањето на првата цифра во декадниот запис на бројот 2^n повторно се добива степен на бројот 2.

Решение. Од условот на задачата следува $2^n = 10^k m + 2^a$, каде $n, k, a \in \mathbb{N}$ и $m \in \{1, 2, ..., 9\}$. Земаме $m = 2^p q$ и добиваме $2^n = 2^{p+k} 5^k q + 2^a$, $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $q \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, при сите комбинации за p и q. Од

$$2^a (2^{n-a} - 1) = 2^{p+k} 5^k q$$

следува $a = p + k$ и $2^{n-a} - 1 = 5^k q$. Според тоа, $5 | 2^{n-a} - 1$, што е можно ако и само ако $n - a = 4t$. Од

$$2^{4t} - 1 = (2^4 - 1)[(2^4)^{t-1} + (2^4)^{t-2} + ... + 2^4 + 1]$$

следува $15 | 2^{4t} - 1$, т.е. $15 | 5^k q$. Според тоа, $q = 3j, \quad j = 1, 3$. Нека $q = 9$. Добиваме $2^{4t} - 1 = 9 \cdot 5^k$. За $k = 1$ имаме $2^{4t} = 46$, што не е можно. Ако $k > 1$, тогаш $9 \cdot 5^k \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 100)$, а $2^{4t} - 1 \equiv 15 (\mathrm{mod}\, 100)$, што повторно не е можно. Останува да го разгледаме случајот $q = 3$. Добиваме $2^{4t} - 1 = 3 \cdot 5^k$. За $k = 1$ имаме $2^{4t} = 16$, односно $4t = 4$. Значи, $n - 4 = a$, па затоа $n = a + 4, a = k + 1$ и $p \in \{0, 1\}$. За $p = 0$ имаме $a = 1$, $n = 5$ и $2^n = 32$, а за $p = 1$ се добива $a = 2$, $n = 6$ и $2^6 = 64 = 6 \cdot 10 + 2^2$. Како и во случајот кога $q = 9$, претпоставката $k > 1$ доведува до противречност.

Значи, единствени можни решенија се $n = 5$ и $n = 6$, т.е. бараните броеви се $2^5 = 32$ и $2^6 = 64$.

70. Дали постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_{3^n}$ такви што за секој $x \in \mathbb{Z}$ важи

$$(x + a_1)(x + a_2)...(x + a_{3^n}) \equiv x^{3^n} + 1 (\mathrm{mod}\, 9) ? \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека постојат цели броеви $a_1, a_2, ..., a_{3^n}$ такви што за секој $x \in \mathbb{Z}$ бројот

$$f(x)=(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{3^n})-x^{3^n}-1$$

е делив со 9. Ставаме $x=-a_i, i=1,2,...,3^n$ и добиваме дека 9 е делител на $f(-a_i)=a_i^{3^n}-1$, $i=1,2,...,3^n$, па затоа $a_i=3k_i+1$, за $i=1,2,...,3^n$. Бидејќи 9 е делител на $f(0)=a_1a_2...a_{3^n}-1$ добиваме дека

$$(3k_1+1)(3k_2+1)...(3k_{3^n}+1)\equiv 1(\bmod 9),$$

од што следува дека $3\sum_{i=1}^{3^n}k_i\equiv 0(\bmod 9)$.

Ако $f(x)$ го запишеме како полином по x добиваме дека коефициентот пред x^{3^n-m}, $1\le m\le 3^n-1$ е збир од сите производи на m различни множители $a_i, i=1,2,...,3^n$. Но, $a_i=3k_i+1$, за $i=1,2,...,3^n$ и како 9 е делител на $3\sum_{i=1}^{3^n}k_i$ добиваме дека коефциентото пред x^{3^n-m}, $1\le m\le 3^n-1$ има облик $9n_m+\binom{3^n}{m}$, каде $n_m\in\mathbb{N}$. Но, $\binom{3^n}{m}$ е делив со 9 за секој m, $1\le m\le 3^n-1$, различен од 3^{n-1} и $2\cdot 3^{n-1}$, при што за $m=3^{n-1}$ и $m=2\cdot 3^{n-1}$ бројот $\binom{3^n}{m}$ е делив со 3, но не е делив со 9. Понатаму,

$$f(1)\equiv\binom{3^n}{3^{n-1}}+\binom{3^n}{2\cdot 3^{n-1}}(\bmod 9),$$

а по претпоставка $f(1)$ е делив со 9, а $\binom{3^n}{3^{n-1}}+\binom{3^n}{2\cdot 3^{n-1}}=2\binom{3^n}{3^{n-1}}$ не е делив со 9, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат цели броеви $a_1,a_2,...,a_{3^n}$ такви што за секој $x\in\mathbb{Z}$ важи (1).

71. За еден природен број $n>1$ велиме дека е *добар* ако за произволни природни броеви $b_1,b_2,...,b_{n-1}$ такви што $1\le b_1,b_2,...,b_{n-1}\le n-1$, важи: за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$ постои $I\subseteq\{1,2,...,n-1\}$ такво што $\sum_{k\in I}b_k\equiv i(\bmod n)$. (Притоа празната сума по дефиниција е еднаква на нула, а сума од еден собирок по дефиниција е тој собирок.). Определи ги сите добри броеви.

Решение. Ќе покажеме дека еден број е добар акко е прост. Прво да докажеме дека ако n е сложен број, тогаш n не е добар. Имено, нека $n=rs$, $1<r,s<n$. Да избереме $b_1=b_2=...=b_{n-1}=r$. Тогаш

$$\{\sum_{i\in I}bi(\bmod n)\mid I\subseteq\{1,2,...,n-1\}\}=\{0,r,2r,...,n-r\},$$

па на пример за $i=1$ не постои соодветното подмножество I.

Ќе докажеме дека секој прост број е добар. Нека p е прост број. Важи нешто повеќе: за $1\le r\le n-1$ и за произволни природни броеви $b_1,b_2,...,b_r$ такви што $1\le b_1,b_2,...,b_r\le p-1$ постојат барем $r+1$ различни броеви $(\bmod p)$ кои се добиваат како суми од елементите $b_1,b_2,...,b_r$.

Доказот на ова ќе го изведеме со индукција по r.

За $r=1$ тврдењето важи бидејќи празната сума е $\equiv 0(\bmod p)$, а сумата од b_1 не е $\equiv 0(\bmod p)$. Нека $r<n-1$ и тврдењето за r е исполнето. Да претпоставиме дека за $p+1$ тврдењето не важи. Нека $1\le b_1,b_2,...,b_r,b\le p-1$ се такви што сумите од овие броеви не даваат барем $r+2$ различни броеви $(\bmod p)$. Бидејќи за r тврдењето важи, за броевите $b_1,b_2,...,b_r$ постојат суми $0=\sigma_0$, $\sigma_1,...,\sigma_r$ по парови различни по модул p. Тогаш мора σ_0+b,σ_1+b, $...,\sigma_r+b$ да не даваат нов број по модул p (различен од $0=\sigma_0$, $\sigma_1,...,\sigma_r$) Бидејќи $\sigma_i+b\ne\sigma_i(\bmod p)$, мора $0,b,...,(r+1)b\in\{\sigma_0,\sigma_1,...,\sigma_r\}$. Но, тогаш постојат i,j такви што $0\le i<j\le r+1$ и $ib\equiv jb(\bmod p)$, што повлекува дека $(j-i)b\equiv 0(\bmod p)$. Последново противречи на фактот дека p е прост број. Значи претпоставката за $r+1$ не е точна. Со тоа тврдењето е докажано.

72. Ексцентричен математичар се движи по скала со n пречки, така што одеднаш преминува a пречки кога се качува нагоре, а b пречки кога се спушта надолу. Со низа чекори нагоре и надолу, тој од земјата се качува на врвот на скалата и потоа слегува повторно на земјата. Определи го најмалиот број n за кој ова е можно.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\ge b$, бидејќи во спротивно ќе ги замениме улогите на a и b, па така на секоја успешна низа чекори во првобитната поставка соодветствува, кога таа низа чекори ја разгледуваме station наназад, успешна низа чекори во новата постапка.

Исто така, општиот случај може да се сведи на случајот кога $(a,b)=1$. Имено, ако $(a,b)=d>1$, тогаш е јасно дека математичарот може да стигне само до оние пречки чии редни броеви се деливи со d (земјата ја разгледуваме како нулта пречка). Затоа меѓу секоја низа чекори која математичарот може да ги превземе постои биекција со соодветната низа чекори кога наместо параметрите на задачата a и b се земат соодветно параметрите $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$. Затоа, ако со $n\cdot(a,b)$ го означиме бараниот број, тогаш важи $n\cdot(a,b)=nd\cdot(\frac{a}{d},\frac{b}{d})$. Според тоа, во натамошните разгледувања можеме да претпоставиме дека $(a,b)=1$.

Во суштина, можеме да разликуваме два типа низ чекори кои математичатор може да ги превземе. Првата можност е во еден момент тој два пати да поминува по a пречки нагоре. Меѓутоа, за да ова е можно, треба скалата да има најмалку $2a$ пречки. Ќе докажеме дека математичарот може да ја изврши дадената задача и за оние n кои се помали од $2a$, а тоа е можно само ако разгледуваме друг тип низи чекори, кај кои не се јавуваат два чекори нагоре. Со други зборови, по секој чекор од a пречки нагоре следуваат неколку (барем еден) чекор од b пречки надолу. За да го минимизираме бројот на пречките n, интуитивно е оправдано да разгледуваме низа чекори определена со следниов алгоритам:

1) На почетокот математичарот е на нивото 0.
2) Ако математичарот се наоѓа (по $i-$тата итерација на овој алгоритам) на нивото $r_i < b$ (кога не може да се движи надолу), тогаш оди еден чекор нагоре до пречката $a+r_i$.
3) Од пречката $a+r_i$, математичарот следува за по b пречки надолу колку пати што тоа е можно, се додека не дојде до пречката $r_{i+1} < b$.
4) Ако $r_{i+1} > 0$ се враќаме на чекорот 2). Во спротивно алгоритамот е завршен.

Разгледувајќи го чекорот 2), јасно е дека овој алгоритам може да се реализира до крај ако $n \geq a+b-1$.

Сега за $n = a+b-1$ ќе докажеме дека опишаниот алгоритам генерира низа чекори која ги задоволува условите на задачата. Прво со индукција лесно се докажува дека важи $r_i \equiv ia (\mathrm{mod}\, b)$. Навистина, од пречката r_i математичарот прво преминува на пречката $a+r_i$, а потоа неколку пати, да кажеме q_i пати, слегува по b прешки надолу, се додека не дојде до пречката

$$r_{i+1} = a + r_i - bq_i < b.$$

Оттука одма следува дека од $r_i \equiv ia (\mathrm{mod}\, b)$ следува $r_{i+1} \equiv (i+1)a (\mathrm{mod}\, b)$. Од една страна, добиената конгруенција значи дека по b итерации ќе имаме

$$r_b \equiv ba \equiv 0 (\mathrm{mod}\, b),$$

т.е. математичарот ќе се врати на земја. Од друга страна, бидејќи $(a,b)=1$, постои $j < b$ таков што $r_j \equiv ja \equiv b-1 (\mathrm{mod}\, b)$, па затоа во следниот чекор математичарот стигнува на врвот на скалата, па заклучуваме дека разгледуваната низа чекори го има саканото својство.

Останува да докажеме дека за $n = a+b-c$, каде $c \geq 2$ математичарот не може да ја изврши дадената задача. Всушност, единствен начин на кој тој може да се движи на скалата е точно начинот опишан во горниот алгоритам. Имено, на секое ниво тој на располагање има најмногу еден чекор: на ниво помало или еднакво на $b-c$ тој може да оди само a пречки нагоре, на ниво поголемо или еднакво на b може да оди b пречки надолу, а на пречките

$b-c+1,...,b-1$ нема на располагање ниту еден потез, т.е. заглавил. Но, како $ia\equiv 0(\mathrm{mod}\, b)$ повлекува $b\,|\,i$, тој не може да ја исполни задачата пред да се реализираат барем b итерации. Но, како $ja\equiv b-1(\mathrm{mod}\, b)$ за некој $j<b$, тој сигурно ќе заглави пред тоа: или веќе заглавил пред $j-$тата итерација, или ако не е заглавен, стигнува до пречката $b-1$ и заглавува точно во $j-$тата итерација.

Значи, ако $(a,b)=1$, тогаш $n\cdot(a,b)=a+b-1$.

Последното значи дека во општ случај решението е $n\cdot(a,b)=a+b-(a,b)$.

73. Нека $k\geq 2$ е произволен природен број. Докажи дека постои ирационален број r_k таков што за секој природен број n важи

$$[r_k^n]\equiv -1(\mathrm{mod}\, k).$$

Решение. Да ја разгледаме равенката

$$t^2-at+b=0,$$

каде $a,b\in\mathbb{N}$ и решенијата на равенката r,s се реални. Тогаш $r+s=a$ и $rs=b$, па со индукција се докажува дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот r^n+s^n е цел број – навистина, го искористиме равенството

$$r^{n+1}+s^{n+1}=(r+s)(r^n+s^n)-rs(r^{n-1}+s^{n-1}),$$

т.е. ако означиме $X_n=r^n+s^n$, тогаш $X_{n+1}=aX_n-bX_{n-1}$. Ако r,s се позитивни броеви и притоа уште $s<1$, тогаш $s^n<1$ за секој $n\in\mathbb{N}$, па затоа

$$r^n+s^n=[r^n]+1.$$

Со други зборови $[r^n]=X_n-1$, па затоа доволно е да обезбедиме сите броеви X_n да се деливи со k. Очигледно, последното ќе биде точно, ако двата коефициенти a,b се деливи со k.

Затоа ја разгледуваме равенката

$$x^2-kpx+kq=0, \tag{1}$$

а параметрите $p,q\in\mathbb{N}$ ќе ги определиме така што нејзините решенија ќе бидат позитивни, ирационални и едно нејзино решение е помало од 1. Како што претходно видовме другото решение може да се земе за r_k.

За да решенијата на (1) се реални потребно е да важи $(kp)^2-4kp>0$, а додека решенијата да се позитивни и едното од нив да е помало од 1 се обезбедува со неравенствата

$$0<\tfrac{kp-\sqrt{(kp)^2-4kq}}{2}<1.$$

Последните две релации заедно се еквивалентни со условите

$$p^2 > \frac{4q}{k}, \ \ p > q .$$

Очигледно, овие услови може да се постигнат. Ирационалност на решенијата на (1) може да се постигне ако земеме, на пример, $q = k$. Имено, тогаш дискриминантата е еднаква на $k^2(p^2 - 4)$ и ова не може да е точен квадрат, бидејќи во спротивно ќе важи $4 = p^2 - t^2 = (p-4)(p+t)$, за некој природен број t, што не е можно. Сега е доволно да се земе произволно $p \geq k+1$.

74. Дадена е правоаголна табла $ABCD$ со димензии $\overline{AB} = 20$ и $\overline{BC} = 12$, која е поделена на 20×12 единечни квадрати.
Нека $r \in \mathbb{N}$. Една монета може да биде придвижена од еден квадрат на друг ако и само ако растојанието меѓу центрите на двата квадрата е $\sqrt{r}$. Целта е да се најде низа од движења на монетата од квадратот чие теме е A до квадратот чие теме е B.
а) Докажи, дека целта не може да се постигне ако r е делив со 2 или 3.
б) Докажи, дека целта може да се постигне ако $r = 73$.
в) Дали целта може да се постигне ако $r = 97$?
Решение. Ако монетата ја придвижиме од точката $P(x_1, y_1)$ до точката $Q(x_2, y_2)$, таа ќе помине растојание

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{, т.е. } d = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

каде $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, се цели броеви. Значи, $x^2 + y^2 = r$.

а) (i). Ако $r = 2k$, тогаш $x^2 + y^2 = 2k$, што е можно ако и само ако x и y се со иста парност. Со A_1, B_1, C_1 и D_1 да ги означиме центрите на квадратите со темиња A, B, C, D соодветно. Нека поставиме правоаголен координатен систем таков што $A_1(0,0)$, $B_1(19,0)$, $D_1(0,12)$ и $C_1(19,12)$. Тогаш монетата може да се помести од полето (p_1, q_1) на полето (p_2, q_2) ако и само ако

$$p_1 + q_1 \equiv p_2 + q_2 \pmod 2,$$

т.е.

$$p_1 - p_2 \equiv q_1 - q_2 \pmod 2 .$$

Но, бидејќи $A_1(0,0)$ и $B_1(19,0)$ од $0 + 0 \not\equiv 19 + 0 \pmod 2$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

(ii) Нека $r = 3k$ т.е. $x^2 + y^2 = 3k$. Ако $x = 3p$, тогаш мора да е $y = 3q$. Ако $x = 3p \pm 1$, тогаш $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, па мора да е $y^2 \equiv -1 \pmod 3$, што не е можно. Значи, ако монетата се поместува од полето (p_1, q_1) на полето (p_2, q_2) тогаш

$p_1-p_2\equiv q_1-q_2(\mathrm{mod}3)$. Но, како $19-0\not\equiv 0-0(\mathrm{mod}3)$ заклучуваме дека целта не може да се постигне.

б) Може, на пример:

$$(0,0)\to(3,8)\to(11,5)\to(3,2)\to(0,10)\to(8,7)\to(0,4)\to$$
$$\to(8,1)\to(5,9)\to(13,6)\to(5,3)\to(13,0)\to(16,8)\to(19,0)$$

в) Не е можно.

Ќе докажеме дека бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$ е еднаков на бројот на поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y-9)$.

Ако последното не е точно, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека имаме повеќе поместувања од видот $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$, *„качувања“* за 9.

За да точката остане на $x-$оската, овој вишок на качувања може да се компензира со *„симнувања“* за 4 и притоа $y-$положбата на паричката се менува за 1 по модул 4. Затоа, за да остане на $x-$оската вишокот на движења од облик $(x\pm4,y+9)$, во однос на движењата $(x\pm4,y-9)$ мора да е делив со 4, и при секое од нив почетната $y-$положба на монетата е различна по модул 4. Но, бидејќи не постои положба на таблата (x,y), каде $y\equiv3$ $(\mathrm{mod}4)$ и качување за 9 е можно, добиваме дека тврдењето е точно, т.е. бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm4,y+9)$ е еднаков на бројот на движењата од облик $(x,y)\to(x\pm4,y-9)$. Оттука следува и дека: колку што има движења од облик $(x,y)\to(x\pm9,y+4)$, толку има движења од облик $(x,y)\to(x\pm9,y-4)$. Значи секогаш имаме парен број на поместувања од двата вида, што значи по $x-$оската секогаш се движиме за парно растојание, па како растојанието од $A_1(0,0)$ до $B_1(19,0)$ е 19, заклучуваме дека целта не може да се постигне.

75. Нека $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Докажи, дека постои природен број m поголем од n^n таков што $\frac{n^m-m^n}{n+m}$ е природен број.

Решение. На почетокот да забележиме дека со индукција може да се докаже дека $n^m>m^n$ за $m>n\geq3$. Затоа $\frac{n^m-m^n}{n+m}>0$.

Ако $n=2$, тогаш можеме да земеме $m=10$ и притоа $\frac{n^m-m^n}{n+m}=\frac{2^{10}-10^2}{12}=77$.

Нека претпоставиме дека $n>2$. Имаме

$$n^m-m^n\equiv n^m-(-n)^n=n^n(n^{m-n}-(-1)^n)\,(\mathrm{mod}\,n+m).$$

Бројот m ќе го побараме во облик

$$m=kn^n-n,\,(k\in\mathbb{N}).$$

Тогаш $m+n=kn^n \mid n^m-m^n$ ако и само ако $k \mid n^{m-n}-(-1)^n$.

1) Ако n е непарен, тогаш $n^{m-n}-(-1)^n$ е парен, па можеме да земеме $k=2$, т.е. $m=2n^n-n$.

2) Ако n е парен, тогаш $n^{m-n}-(-1)^n=n^{m-n}-1$ е делив со $n-1$, па можеме да земеме $k=n-1$, т.е. $m=(n-1)n^n-n$.

*Забелешка***.** Неравенството $n^m>m^n$ за $m>n\geq 3$ може да се докаже и со помош на изводи. Навистина, за функцијата $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>e$ важи

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$$

кога $x>e$, што значи дека таа монотоно опаѓа за $x>e$. Затоа

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln m}{m}, \text{ т.е. } m\ln n>n\ln m,$$

од каде добиваме

$$n^m=e^{m\ln n}>e^{n\ln m}=m^n, \text{ за } m>n\geq 3.$$

76. Определи ги сите парови природни броеви (k,n) такви што 7^k-3^n е делител на k^4+n^2.

Решение. Нека парот (k,n) ги задоволува условите на задачата. Бидејќи 7^k-3^n е парен број следува дека и k^4+n^2 е парен број, од каде следува дека k и n имаат иста парност. Ако k и n се непарни броеви, тогаш $k^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ и $n^2\equiv(\mathrm{mod}\,4)$, т.е. $k^4+n^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. Од друга страна

$$7^k-3^n\equiv(-1)^k-(-1)^n\equiv -1+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

што не е можно бидејќи 7^k-3^n е делител на k^4+n^2. Значи, k и n се парни броеви. Нека $k=2a, n=2b$. Тогаш

$$7^k-3^n=7^{2a}-3^{2b}=\frac{7^a-3^b}{2}\cdot 2(7^a+3^b),$$

па затоа $2(7^a+3^b)$ е делител на 7^k-3^n. Значи, $2(7^a+3^b)\mid 7^k-3^n\mid k^4+n^2$, од каде добиваме дека $7^a+3^b\mid 8a^4+2b^2$, па затоа $7^a+3^b\leq 8a^4+2b^2$.

Со математичка индукција ќе докажеме дека $8a^4<7^a$ за $a\geq 4$ и $2b^2+9\leq 3^b$ за $b\geq 3$, од што ќе следува $2b^2<3^b$ за $b\geq 3$, а за $b=1$ и $b=2$ последното неравенство ќе го провериме непосредно.

За $a=4$ важи $8\cdot a^4=8\cdot 4^4=2048<2401=7^4.$ Од $a\geq 4$ следува $1+\frac{1}{a}\leq\frac{5}{4}$.

Нека претпоставиме дека $8a^4<7^a$ за некој $a\geq 4$. Имаме,

$$8(a+1)^4 = 8a^4(\tfrac{a+1}{a})^4 < 7^a(1+\tfrac{1}{a})^4 \le 7^a(\tfrac{5}{4})^4 = 7^a \cdot \tfrac{625}{256} < 7^a \cdot 7 = 7^{a+1}.$$

Ако $b=1$, тогаш $2b^2 = 2 < 3^1 = 3^b$, а ако $b=2$, тогаш $2b^2 = 8 < 9 = 3^2 = 3^b$. Ќе докажеме дека $2b^2+9 \le 3^b$ за $b \ge 3$, од каде ќе следува $2b^2 < 2b^2+9 \le 3^b$. За $b \ge 3$ важи $1+\frac{1}{b} \le \frac{4}{3}$, и од индуктивната претпоставка $2b^2+9 \le 3^b$ имаме:

$$2(b+1)^2+9 < 2b^2+9(\tfrac{b+1}{b})^2 = (b+1)^2(2+\tfrac{9}{b^2}) = (2b^2+9)(\tfrac{b+1}{b})^2$$

$$\le 3^b(\tfrac{4}{3})^2 = 3^b \cdot \tfrac{16}{9} \le 3^b \cdot 3 = 3^{b+1}.$$

За $a \ge 4$ важи $7^a+3^b > 8a^4+2b^2$, што противречи на $7^a+3^b \le 8a^4+2b^2$.
Значи $a \le 3$, и ги разгледуваме следните случаи:

Случај 1. Нека $a=1$. Тогаш $k=2a=2$ и треба да важи $8+2b^2 \ge 7+3^b$, т.е. $2b^2+1 \ge 3^b$. Последното неравенство важи за $b \le 2$. Ако $b=1$ тогаш $n=2$ и ако замениме во условот на задачата добиваме дека $7^2-3^2 \mid 2^4+2^2$, т.е. $40 \mid 20$, што не е точно. Ако $b=2$, тогаш $n=4$, па ако замениме во условот на задачата добиваме имаме $7^2-3^4 \mid 2^4+4^2$, т.е. $-32 \mid 32$ што е точно. Значи, парот $(2,4)$ е решение.

Случај 2. Нека $a=2$. Тогаш $k=4$ и

$$k^4+n^2 = 256+4b^2 \ge |7^4-3^n| = |49^2-3^{2b}| = |49-3^b| \cdot (49+3^b).$$

Најмалата вредност на множителот $|49-3^b|$ е 22 и се добива за $b=3$. Следува дека $128+2b^2 \ge 11\cdot(49+3^b) = 539+11\cdot 3^b$, што не е можно бидејќи $3^b > 2b^2$.

Случај 3. Нека $a=3$. Тогаш $k=6$ и

$$k^4+n^2 = 1296+4b^2 \ge |7^6-3^n| = |343^2-3^{2b}| = |343-3^b| \cdot (343+3^b).$$

На ист начин како погоре важи $|343-3^b| \ge 100$ па оттука следува

$$1296+4b^2 \ge 100\cdot(343+3^b)\text{ , т.е. } 324+b^2 \ge 25\cdot(343+3^b)\ .$$

Очигледно е дека последна неравенка нема решение.
Конечно, од претходните разгледувања следува дека $(k,n)=(2,4)$ е единствено решение на задачата.

77. Даден е природен број k. Низите a_n, b_n се определени со

$$a_1 = k,\ a_2 = k,\ a_{n+2} = a_n a_{n+1},$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = k,\ b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3+1}{b_n}.$$

Докажи дека за секој природен број n бројот $a_{2n}b_{n+3}$ е цел број.

Решение. Нека f_n е низата на Фибоначи со

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_0 = 0,\ f_{-1} = 1,\ \ f_{-2} = -1.$$

Индуктивно добиваме $a_n = k^{f_n}$ за $n \geq -2$.

За $n \geq -1$ ставаме $c_n = a_{2n}b_{n+3} = k^{f_{2n}}b_{n+3}$. Со непосредни пресметувања добиваме дека $c_{-1} = 1, c_0 = k^3 + 1, c_1 = c_0^3 + 1$ и $c_2 = b_3^6 + 3b_3^5 + 3b_3^2 + 1$, што значи дека c_{-1}, c_0, c_1 и c_2 навистина се природни броеви.

Лема 1. За секој $n \geq -1$ важи $f_{2n} + f_{2n+4} = 3f_{2n+2}$ и $c_n c_{n+2} = c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$.

Доказ. Равенствата се проверуваат непосредно. ■

Нека претпоставиме дека $c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_{n+1}$ $(n \geq 1)$ се природни броеви. Согласно равенството $c_n c_{n+2} = c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$, доволно е да докажеме дека $c_n \mid c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$.

Лема 2. За секој непарен прост делител p на k важи

$$(c_m, p) = 1 \text{ за } -1 \leq m \leq n+1.$$

Доказ. Следува по индукција и Лема 1. ■

Лема 3. За $-1 \leq m \leq n-1$ важи $(c_m, c_{m+1}) = 2^{\alpha}$ за некој ненегативен број α.

Доказ. Навистина, ако c_m и c_{m+1} имаат заеднички непарен прост делител p, тогаш од Лема 1 следува дека $p \mid k$, што противречи на Лема 2. ■

Лема 4. За непарен прост број p и природен број m такви што $p^m \parallel c_n$ важи $p^m \mid c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$.

Доказ. Непосредно следува од фактот дека p не е делител на c_{n-1} и равенството

$$c_{n+2} = \frac{c_n^8 + 3c_n^5 k^{3f_{2n}} + 3c_n^2 k^{6f_{2n}} + k^{3f_{2n+2}} c_{n-2}}{c_{n-1}^3},$$

кое се проверува непосредно. ■

За природниот број n со $v_2(n)$ ќе го означиме степенот на бројот 2 во неговото каноничнопретставување. За рационален број $q = \frac{m}{n}$ ставаме

$$v_2(q) = v_2(m) - v_2(n).$$

Лема 5. Ако $4 \mid k$. Тогаш $v_2(c_n) = f_{2n}$ за секој $n \geq 1$.

Доказ. Со индукција при претпоставка $v_2(c_n) = f_{2n}$ и $v_2(c_{n+1}) = f_{2n+2}$ и Лема 4. ■

Лема 6. Нека $k \equiv 2 \pmod 4$. Ако $n \equiv 2 \pmod 3$, тогаш $v_2(c_n) > f_{2n}$. Ако $n \not\equiv 2$ $\pmod 3$, тогаш $v_2(c_n) = f_{2n}$.

Доказ. Со индукција. ■

Од Лема 5 и Лема 6 следува дека ако 2^m е делител на c_n, тогаш 2^m е делител на $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$. Сега со помош на Лема 4 заклучуваме дека c_n е делител на $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$, што и требаше да се докаже.

78. Нека p е непарен прост број. За природниот број k, $1 \le k \le p-1$, нека a_k е бројот на делителите на $kp+1$ кои се поголеми или еднакви на k и се помали од p. Определи ја вредноста на изразот $a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}$.

Решение. За природниот број k, $1 \le k \le p-1$, нека S_k е монжеството кое се состои од сите делители на $kp+1$ поголеми или еднакви на k, а помали од p. Бројот a_k во формулацијата на задачата е бројот на елементи на множеството S_k. Прво ќе покажеме дека за произволен природен број r, $1 \le r \le p-1$, постои единствено k, за кое $r \in S_k$. Да забележиме дека за да важи $r \in S_k$, мора да важи $k \le r$.

Нека претпоставиме дека постои пар од природни броеви (i, j), $1 \le i < j \le r$ за кои важи

$$ip + 1 \equiv jp + 1 (\bmod r).$$

Тогаш

$$(j-i)p \equiv 0 (\bmod r).$$

Бидејќи r и p се заемно прости, мора да важи

$j - i \equiv 0 (\bmod r)$,

што не е зможно бидејќи $1 \le i < j \le r$. Ова значи дека броевите $p+1, 2p+1, ..., rp+1$ имаат различни остатоци при делење со r. Според ова, постои само едно k $(1 \le k \le r)$, за кое важи $r \mid kp+1$. За ова k, јасно е дека $r \in S_k$.

Од претходните разгледувања следува дека за секој природен број r, $1 \le r \le p-1$, постои единствено k, за кое $r \in S_k$ и секој природен број s, $1 \le s \le p-1$, се содржи во точно едно S_k. Оттука следува дека

$$a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} = p-1.$$

79. Нека $n_1 < n_2 < ... < n_{31}$ се прости броеви. Докажи дека ако 30 е делител на збирот $n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{31}^4$, тогаш меѓу дадените броеви има три последователи прости броеви.

Решение. Нека $S = n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{31}^4$ и $A = \{n_1, n_2, ..., n_{31}\}$.

Прво да забележиме дека $2 \in A$, бидејќи во спротивно сите броеви n_i,

$i=1,2,...,31$ ќе бидат непарни, па така S ќе биде непарен број, што не е можно.
Понатаму, $3\in A$, бидејво спротивно ќе важи $n_i\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,3)$, па затоа ќе важи $n_i^4\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$, односно $S\equiv31\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$, што повоторно не е можно.
Ќе докажеме дека и $5\in A$. Навистина, во спротивно имаме $n_i\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,5)$ или $n_i\equiv\pm2(\mathrm{mod}\,5)$, п затоа ќе важи $n_i^4\equiv1(\mathrm{mod}\,5)$, односно $S\equiv31\equiv1(\mathrm{mod}\,5)$, што повоторно не е можно.

12. СИСТЕМИ ОСТАТОЦИ

1. Докажи, дека за секој природен број n, бројот n^3+5n е делив со 6.

   Решение. Комплетен систем на остатоци по модул 6 е 0,1,2,3,4 и 5. Значи, доволно е да испитаме дали n^3+5n е делив со 6 за $n=0,1,2,3,4,5$. При множење по модул 6 имаме
$$0^3\equiv 0, 1^3\equiv 1, 2^3\equiv 2, 3^3\equiv 3, 4^3\equiv 4, \ 5^3\equiv 5.$$
   Според тоа,
$$n^3+5n\equiv n+5n=6n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 6).$$

2. Докажи, дека ако a,b,c се произволни цели броеви, а n е природен број, поголем од 3, тогаш постои цел број k, таков што ниту еден од броевите $k+a$, $k+b$ и $k+c$ не е делив со 4.

   Решение. Со r_1,r_2,r_3 да ги означиме соодветните остатоци од делењето на целите броеви $-a,-b,-c$ со n. Бидејќи овие броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,2,...,n-1\}$, каде $n>3$, во оваа низа на остатоци постои број r, таков што $r\neq r_1$, $r\neq r_2$ и $r\neq r_3$. Да допуштиме дека $n\,|\,a+r$. Тогаш од $n\,|\,a+r_1$ следува $n\,|\,r-r_1$, што е можно само ако $r=r_1$, а тоа противречи на изборот на бројот r. Аналогно докажуваме $n\,|\,b+r$ и $n\,|\,c+r$. Според тоа, $k=r$.

3. Нека $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(m)}\}$ е редуциран систем на остатоци по модул m, $\{b_1,b_2,...,b_{\varphi(n)}\}$ е редуциран систен на остатоци по модул n и $(m,n)=1$. Докажи, дека множеството
$$S=\{a_in+b_jm\,|\,i=1,2,...,\varphi(m);\ j=1,2,...,\varphi(n)\}$$
   е редуциран систем на остатоци по модул mn.

   Решение. Множеството S е подмножество од множеството
$$A=\{a_in+b_jm\,|\,i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n\},$$
   кое е комплетен систем на остатоци, па затоа сите елементи S по парови не се конгруентни по модул mn. Бидејќи
$$(a_in+b_jm,m)=(a_in,m) \text{ и } (a_i,m)=(n,m)=1$$

добиваме дека $(a_i n+b_j m,m)=1$. На потполно ист начин се добива дека $(a_i n+b_j m,n)=1$, па затоа $(a_i n+b_j m,mn)=1$. Според тоа, множеството $S\subseteq A$ има $\varphi(m)\varphi(n)=\varphi(mn)$ елементи кои се заемно прости со mn и како A е комплетен систем на остатоци по модул mn добиваме дека S е редуциран систем на остатоци по модул mn.

4. На кружница дадено е множество E од $2n-1$ ($n\geq 3$) различни точки, меѓу кои точно k точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки меѓу кои во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат, се наоѓаат точно n точки од E.
Најди го најмалиот број k за кој секое боење на множеството E е „добро“.
Решение. Да ги означиме точките со броеви $1,2,...,2n-1$. Ќе го определиме најголемиот број k таков што постои боење кое не е „добро“. Тогаш $k+1$ е решение на задачата.
Нека на некој лак меѓу точките со броеви p и q постојат точно n броеви од E (таквите точки ќе ги наречеме „соседни“). Тогаш:
$$|p-q|\equiv n+1 \pmod{2n-1}.$$
Да ги разгледаме броевите од облик
$$a_i\equiv p+i(n+1) \pmod{2n-1} \qquad (*)$$
каде $i,a_i\in\{0,1,2,...,2n-2\}$. Секои два последователни члена од оваа низа се парови соседни точки (бидејќи $a_{i+1}-a_i\equiv n+1 \pmod{2n-1}$).
Ако боењето не е добро, соседните точки не смеат истовремено да бидат црни. Доволно е точките да се прикажат со помош на членови од низата (*) и да се констатира дека соседните членови не се црни, па обоени се најмногу половина од членовите на низата. Разликуваме два случаи:
а) $(n+1,2n-1)=1$. Нека $a_i\equiv 1+i(1+n) \pmod{2n-1}$. Броевите a_i формираат комплетен систем на остатоци по модул $2n-1$. Од тука следува дека може да бидат обоени најмногу
$$[\tfrac{2n-1}{2}]=[n-\tfrac{1}{2}]=n-1$$
членови на низата. Сега бараниот број е еднаков на n.
б) $(n+1,2n-1)=3$. Нека
$$a_i\equiv 1+i(n+1) \pmod{2n-1},\ \ b_i\equiv 2+i(n+1) \pmod{2n-1},$$
$$c_i\equiv 3+i(n+1) \pmod{2n-1},\quad i=0,1,...,\tfrac{2n-1}{3}-1.$$
Низите a_i,b_i,c_i имаат различни членови.
Слично како во предходниот случај можеме да обоиме најмногу

$$[\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}]=[\frac{n-2}{3}+\frac{1}{2}]=\frac{n-2}{3}$$

членови на низата. Значи можеме да обоиме најмногу $3\cdot\frac{n-2}{3}=n-2$ точки, а притоа боењето да не биде добро. Решението во овој случај е $n-1$.

Јасно, $(n+1,2n-1)$ не може да има некоја друга вредност, бидејќи според Евклидовиот алгоритам важи

$$(2n-1,n+1)=(n+1,n-2)=(n-2,3)\in\{1,3\}.$$

5. Дадено е множество M од 2^{2015} природни броеви, секој од кои има 2014 цифри. Секои два од овие броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{2015}. Колку најмалку различни цифри учествуваат во декадните записи на броевите од множеството M?

Решение. Ако броевите x и y даваат различни остатоци при делење со 2^n, тогаш од $10x+c\equiv 10y+c(\bmod 2^{n+1})$ следува дека по допишувањето на произволна цифра од десно, новите броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{n+1}. Според тоа, ако имаме комплетен систем на остатоци по модул 2^n, по допишување на 1 од овие броеви ќе се добијат различни непарни остатоци, а по допишување на 2 од овие броеви ќе се добијат различни парни остатоци, па добиваме комплетен систем на остатоци по модул 2^{n+1}.

Почнувајќи од 1, 2, 3, 4 кои формираат комплетен систем на остатоци по модул 2^2, добиваме пример со 4 различни цифри, кои го задоволуваат условот на задачата.

Нека претпоставиме дека такво множество можеме да конструираме со три цифри a,b и c. Цифрите a,b и c не се со еднаква парност, бидејќи во спротивен случај сите остатоци по модул 2^{2015} ќе бидат со еднаква парност и нема да формираат комплетен систем на остатоци. Нека a и b се непарни, а c е парна (другиот случај е разгледува аналогно). Бидејќи броевите од M формираат комплетен систем на остатоци, половината од броевите во M се парни, а половината се непарни. Бидејќи c е единствена парна цифра, добиваме дека сите парни броеви од M завршуваат на c. Ако ја избришеме последната цифра од овие броеви, ќе добиеме комплетен систем на остатоци од различни 2013-цифрени броеви по модул 2^{2014}, бидејќи ако

$$x\equiv y(\bmod 2^{2014}),$$

тогаш

$$10x+c\equiv 10y+c(\bmod 2^{2015}).$$

За новото множество го повторуваме размислувањето и добиваме комплетен систем на остатоци по модул 2^{2013}, составен од 2012-цифрени броеви. Продолжувајќи на овој начин ќе добиеме комплетен систем на остатоци по модул $2^2=4$ составен од различни едноцифрени броеви. Последното противречи на фактот дека имаме само три едноцифрени броеви a,b и c.

6. Дадени се природни броеви m и n. Определи го најмалиот природен број $N, N\geq m$, со следново својство: ако $N-$елементно множество од цели броеви содржи комплетен систем на остатоци по модул m, тогаш тоа множество има непразно подмножество, чиј збир на елементи е делив со n.

Решение. Прво ќе докажеме, дека $N\geq \max\{m, m+n-\frac{m\cdot((m,n)+1)}{2}\}$. Неравенството $N\geq m$ е очигледно. Нека $(m,n)=d, m=m_1d, n=n_1d$ и $n>\frac{m(d+1)}{2}$. Постои комплетен систем на остатоци $(x_1,x_2,...,x_m)$ по модул m таков што остатоците на броевите $x_1,x_2,...,x_m$ при делење со n формираат точно m_1 групи $\{1,2,...,d\}$. Навистина, броевите $i+jdn_1,\ i=1,2,...,d,\ \ j=1,2,...,m_1$, го имаат саканото својство.

Кон броевите $x_1,x_2,...,x_m$ да додадеме уште $k=n-\frac{m(d+1)}{2}$ броеви $y_1,y_2,...,$ y_k секој од кои дава остаток 1 при делење со n. Тогаш множеството $\{x_1,x_2,...,x_m,y_1,y_2,...,y_k\}$ го има саканото својство. Навистина, $(x_1,x_2,...,x_m)$ е комплетен систем на остатоци по модул m, а збирот на сите остатоци по модул n е меѓу 0 и $m_1(1+2+...+d)+k=n-1$.

Останува да докажеме, дека бројот $N=\max\{m, m+n-\frac{m\cdot((m,n)+1)}{2}\}$ ги има саканите својства. Неколку пати ќе ја искористиме следнава

Лема 1. Меѓу произволни k броеви можат да се изберат неколку, чиј збир е делив со k.

Доказ. За броевите $a_1,a_2,...,a_k$ ги разгледуваме збировите

$$S_i=a_1+a_2+...+a_i,\ i=1,2,...,k.$$

Ако ниту еден збир не е делив со k, тогаш два од нив даваат исти остатоци при делење со k и тогаш нивната разлика е делива со k. ■

Лема 2. Меѓу произволни k броеви кои се деливи со a можат да се изберат неколку чиј збир е делив со ka.

Доказ. Непосредно следува од лема 1. ■

Понатаму, ќе велиме дека едно конечно множество е $k-$*множество*, ако збирот на неговите елементи е делив со k.

Одделно ќе разгледаме два случаи за максимумот.

Случај 1. Нека $n\leq\frac{m(d+1)}{2}$ и соодветно $N=m$.

Нека $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ е произволно множество од $N=m$ цели броеви со саканите својства. Бидејќи $(x_1,x_2,...,x_m)$ е комплетен систем на остатоци по модул m, истиот можеме да го разделиме на m_1 групи, секоја од кои е комплетен систем на остатоци по модул d. За секој од последните системи $Y=(y_1,y_2,...,y_d)$ ќе сметаме дека $y_i \equiv i(\mathrm{mod}\, d)$.

Ако d е непарен, тогаш Y можеме да го поделиме на $\frac{d+1}{2}$ на број $d-$множества (на пример, $\{y_i,y_{d-i}\}$, за $i=1,2,...,\frac{d-1}{2}$ и $\{y_d\}$). Добивме $\frac{m_1(d+1)}{2}\geq n_1$ на број $d-$множества, па затоа можеме да избереме неколку од нив со вкупен збир на елементи делив со $n_1d=n$.

Ако d е парен, тогаш Y можеме да го поделиме на $\frac{d}{2}$ на број $d-$множества и го оставаме $y_{\frac{d}{2}}$ на страна, комбинирајќи го со аналогниот елемент од друг систем. Така добиваме $\frac{m_1d}{2}+[\frac{m_1}{2}]\geq n_1$ на број $d-$множества, и повторно можеме да избереме неколку од нив со вкупен збир на елементи делив со $n_1d=n$.

Случај 2. Нека $n>\frac{m(d+1)}{2}$ и соодветно $N=m+n-\frac{m(d+1)}{2}$.

Нека X е множество од N елементи, и $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}\subset X$ е комплетен систем на остатоци по модул m.

Ако d е непарен, тогаш го разбиваме A како во случај 1 на $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества, а останатите $n-\frac{m(d+1)}{2}$ елементи на A ги разбиваме произволно на $n_1-\frac{m_1(d+1)}{2}$ множества од по d броеви. Во ское од последните множества можеме да најдеме $d-$множество, т.е. имаме уште $n_1-\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества. Така добивме n_1 на број $d-$множества и следствено можеме да избереме неколку од нив чиј вкупен збир на елементи е делив со $n_1d=n$.

Ако d е парен, тогаш го разбиваме A како во случај 1 на $\frac{m_1d}{2}+[\frac{m_1}{2}]$ на број $d-$множества. Да забележиме, дека ако m_1 е парен, тогаш имаме $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества, а ако m_1 е непарен, тогаш ни останува бројот $y_{\frac{d}{2}}\equiv \frac{d}{2}(\mathrm{mod}\, m)$. Сега, останатите $n-\frac{m(d+1)}{2}$ елементи на A ги разбиваме произволно на $2n_1-m_1(d+1)$ множества од по $\frac{d}{2}$ броеви. Во секое од последните множества можеме да најдеме $\frac{d}{2}-$подмножество, а потоа од секои две $\frac{d}{2}-$ множества имаме барем едно $d-$множество, при што добиваме $n_1-[\frac{m_1(d+1)}{2}]$ на број $d-$множества. Во случај на парен m_1 директно имаме n_1 на број $d-$множества. За непарен m_1 ги комбинираме останатите $y_{\frac{d}{2}}$ и едно $\frac{d}{2}-$множество, за да добиеме уште едно $d-$множество, со што добиваме n_1 на број $d-$множества. Конечно, можеме да избереме неколку од нашите n_1 на број $d-$множества со вкупен збир на елементи делив со $n_1d=n$.

7. Нека

$$S_n=\{\binom{n}{n},\binom{2n}{n},\binom{3n}{n},...,\binom{n^2}{n}\}, n\in\mathbb{N}.$$

а) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n не е комплетен систем на остатоци по модул n.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n е комплеен систем на остатоци по модул n.

Решение. а) Ќе докажеме дека $n=2p$, каде $p>2$ е прост број го задоволува условот. Имаме

$$\binom{2kp}{2p}=k\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-i}{2p-i}\cdot(2k-1)\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-p-i}{p-i}\equiv k(2k-1)\,(\mathrm{mod}\,p).$$

Од овде следува дека $\binom{2kp}{2p}$ е делив со p за $k\in\{\frac{p+1}{2},p,2p\}$, т.е. S_{2p} има три елементи деливи со p, па затоа не е комплетен систем на остатоци.

б) Ќе докажеме дека $n=p^2$, каде $p>2$ е прост број го задоволува условот. Имаме

$$\binom{kp^2}{p^2}=\prod_{i=0}^{p^2-1}\frac{kp^2-i}{p^2-i}=k\prod_{j=1}^{p-1}\frac{kp^2-jp}{jp}\cdot\prod_{p\nmid i}\frac{kp^2-i}{p^2-i},$$

па затоа по модул p^2

$$\binom{kn}{n}\equiv k\prod_{j=1}^{p-1}\frac{kp-j}{j}=k\prod_{j=1}^{p-1}(1-\frac{kp}{j})\equiv k-k^2p\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j}.$$

Бидејќи

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}(\frac{1}{j}+\frac{1}{p-j})=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p}{j(p-j)}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$$

добиваме $\binom{kn}{n}\equiv k(\mathrm{mod}\,p^2)$.

8. Даден е природен број $n>1$. Докажи, дека постојат n последователни природни броеви чиј производ е делив со сите прости броеви помали или еднакви на $2n+1$ и не е делив со ниту еден друг прост број.

Решение. Ако бројот $n+1$ е сложен, тогаш броевите $n+2, n+3, ..., 2n+1$ го имаат саканото својство. Навистина, нивниот производ очигледно е делив со сите прости броеви од интервалот $[n+2, 2n+1]$, но не е делив со простите броеви поголеми од $2n+1$. Освен тоа, за секој прост број $p \le n$ меѓу множителите имаме комплетен систем на остатоци по модул p, па значи производот е делив со p.

Ако $n+1$ е прост број, тогаш тој е непарен и $n+2$ е парен, што значи дека е сложен број. Сега да ги разгледаме броевите $n+3, n+4, ..., 2n+2$. Како и претходно, лесно се гледа дека нивниот производ P е делив со сите прости броеви од интервалите $[1, n]$ и $[n+3, 2n+2]$, но не е делив со простите броеви поголеми од $2n+1$ (бидејќи $2n+2$ е сложен). Освен тоа P е делив со $n+1 = \frac{2n+2}{2}$

9. Нека $p>2$ е прост број таков што $3 \mid p-2$. Докажи дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y \le p-1\}$$

се деливи со p.

Решение. Од $p \equiv 2 \pmod 3$ следува дека броевите $0^3, 1^3, ..., (p-1)^3$ даваат различни остатоци при делење со p. Навистина, ако $a^3 \equiv b^3 \pmod p$, тогаш со степенување на $\frac{p-2}{3}$ добиваме

$$a^{p-2} \equiv b^{p-2} \pmod p.$$

Но,

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod p,$$

па затоа $a \equiv b \pmod p$. Според тоа, за секој $y \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ постои точно еден елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ делив со p. Меѓутоа,

$$s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1 = s_3,$$

па затоа меѓу елементите $s_0, s_1, ..., s_{p-1}$ има најмногу $p-1$ различни.

10. Нека p е непарен прост број. Докажи дека постои природен број m, $1 \le m < p$ така што важи

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

за некои цели броеви x_1, x_2, x_3.

Решение. Нека $x_1, x_2 \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $x_1 > x_2$. Ако $x_1^2 \equiv x_2^2 (\mathrm{mod}\, p)$, тогаш $p \mid x_1 - x_2 < p$ или $p \mid x_1 + x_2 < p$, што е противречност. Според тоа, важи $x_1^2 \not\equiv x_2^2 (\mathrm{mod}\, p)$. Значи, за $y_1, y_2 \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $y_1 \neq y_2$ важи

$$-1 - y_1^2 \not\equiv -1 - y_2^2 (\mathrm{mod}\, p).$$

Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу $p+1$ броеви

$$x_0^2, x_1^2, ..., x_{\frac{p-1}{2}}^2, -1-y_0^2, -1-y_1^2, ..., -1-y_{\frac{p-1}{2}}^2,$$

такви $x_i, y_i \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $x_i \neq x_j$, $y_k \neq y_l$ за $i \neq j,\ k \neq l$ постојат два броја кои при делење со p даваат ист остаток, т.е. мора да важи

$$x_s^2 \equiv -1 - y_t^2 (\mathrm{mod}\, p),$$

т.е.

$$x_s^2 + y_t^2 + 1 = mp,$$

при што важи $0 < mp < (\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{2})^2 + 1 = \frac{p^2}{2} + 1 < p^2$, т.е. $1 \leq m < p$.

11. Нека A е бесконечно подмножество од множеството природни броеви. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој $a \in A$ важи

$$a^n + a^{n-1} + ... + a^1 + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + ... + a^{1!} + 1.$$

Решение. Да означиме

$$P(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 \text{ и } Q(x) = x^{n!} + x^{(n-1)!} + ... + x^{1!} + 1.$$

Нека

$$Q(x) = C(x)P(x) + R(x),$$

каде $C(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти и $\deg R < \deg P$. Од условот на задачата следува $P(a) \mid Q(a)$, па затоа $P(a) \mid R(a)$, за бесконечно многу цели броеви a. Бидејќи за доволно голем број a важи $|R(a)| < |P(a)|$, заклучуваме дека $R(a) = 0$. Значи, $R(x)$ има бесконечно многу нули, па затоа $R(x) \equiv 0$ и $P(x) \mid Q(x)$.

Лема. Нека $k_0, k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}_0$. Полиномот $P(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ е делител на полиномот $Q(x) = x^{k_n} + ... + x^{k_1} + x^{k_0}$ ако и само ако $\{k_0, k_1, ..., k_n\}$ е комплетен систем на остатоци по модул $n+1$.

Доказ. Нека r_i е остатокот при делење на k_i со $n+1$. Бидејќи $x^{n+1} - 1$ е делител на $x^{k_i} - x^{r_i}$ за секој i, следува дека $P(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ е делител на

$Q(x)-Q_1(x)$, каде $Q_1(x)=x^{r_n}+...+x^{r_1}+x^{r_0}$ и приота важи $\deg Q_1 \le n$. Ако $P(x)\,|\,Q(x)$, тогаш $P(x)\,|\,Q_1(x)$, т.е. $Q_1(x)=cP(x)$ за некоја константа c, а тоа важи ако и само ако $c=1$ и $\{r_0,r_1,...,r_n\}=\{0,1,2,...,n\}$. ■

Од лемата следува дека бараните броеви се оние броеви за кои $\{0,1!,2!,...,n!\}$ е комплетен систем на остатоци по модул $n+1$.

12. Нека a и b се цели, а n е природен број. Докажи дека

$$n!\,|\,(b^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)).$$

Решение. Ако p е прост број и $s\ge 0$ е најголемиот цел број за кој $p^s\,|\,n!$ тогаш од теоремата на Лежандр следува

$$s=\sum_{m\ge 1}[\tfrac{n}{p^m}]\le \sum_{m=1}^{\infty}[\tfrac{n}{2^m}]<n\ , \qquad (1)$$

па затоа $s\le n-1$. Ако $p\,|\,b$, тогаш $p^{n-1}\,|\,b^{n-1}$, па затоа $p^s\,|\,b^{n-1}$. Ако $p\nmid b$, тогаш бидејќи $a,a+b,...,a+(p-1)b$ се p броеви кои формираат комплетен систем на остатоци по модул p, бројот p е делител на барем еден од овие броеви (во спротивно два такви броја би давале ист остаток по модул p, па ќе важи $p\,|\,(i-j)b$ за некои $i,j\in\{1,2,...,p-1\}$, што не е можно). Затоа p е делител на најмалку $[\frac{n}{p}]$ множители на производот $\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)$, понатаму, p^2 е делител на најмалку $[\frac{n}{p^2}]$ од овие мнжители итн. Сега, од (1) следува дека степенот на простиот број p во овој производ е најмалку s, од каде што следува тврдењето на задачата.

13. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој цел број y постои цел број x за кои $x^3+x\equiv y(\bmod n)$

Решение. Според условот на задачата $\{x^3+x\,|\,x=0,1,2,...,n-1\}$ е комплетен систем на остатоци по модул n. Да забележиме дека ако n го нема ова својство, тогаш го нема ниту било кој природен содржател на n.

Бројот $n=2$ го нема бараното својство, а $n=3$ го има. Да претпоставиме дека простиот број $n>3$ го има тоа својство. Бидејќи $x^3+x\not\equiv y^3+y$ за секои цели x,y ($x\not\equiv y(\bmod n)$), количникот

$$f(x,y)=\frac{y^3+y-x^3-x}{y-x}=x^2+xy+y^2+1$$

не е делив со n за $x\not\equiv y(\mathrm{mod}\, n)$. Уште повеќе $n\,|\,f(x,y)$ не е можно и за $x\equiv y(\mathrm{mod}\, n)$ бидејќи тогаш исто така $n\,|\,f(x,-2x)$. Според тоа, за секои цели броеви x и y важи $f(x,y)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$.

Бидејќи $4f(x,y)=z^2+3y^2+4$ за $z=2x+y$, бројот z^2+3y^2+4 не е делив со n за било кои $y,z\in\mathbb{Z}$. Сега да ги разгледаме множествата

$$Y=\{3y^2+4\,|\,y\in\mathbb{Z}\} \text{ и } Z=\{-z^2\,|\,z\in\mathbb{Z}\}.$$

Секое од множествата Y и Z има најмалку $\frac{n+1}{2}$ елементи по модул n, па затоа тие имаат заеднички елемент, т.е. $3y^2+4\equiv -z^2(\mathrm{mod}\, n)$, што значи дека $n\,|\,3y^2+z^2+4$, што е противречност. Според тоа, единствен прост број со саканото својство е $n=3$.

Од претходните разгледувања следува дека ако n го задоволува условот на задачата, тогаш $n=3^k$ за некој $k\in\mathbb{N}_0$. Ваквите броеви го имаат саканото својство. Навистина, лесно се проверува дека $3\nmid f(x,y)$ за $x,y\in\mathbb{Z}$, па така од $x^3+x\equiv y^3+y(\mathrm{mod}\, 3^k)$ следува $x\equiv y(\mathrm{mod}\, 3^k)$.

13. ТЕОРЕМА НА ОЈЛЕР

1. Докажи, дека за секој природен број n бројот 5^{n+1} е делител на $N=1+2^{2\cdot 5^n}$.

Решение. Од теоремата на Ојлер имаме $2^{4\cdot 5^n}\equiv 2^{\varphi(5^{n+1})}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,5^{n+1})$. Значи, 5^{n+1} е делител на $(2^{2\cdot 5^n}+1)(2^{2\cdot 5^n}-1)$. Двата множители во последниот производ се заемно прости и $5\nmid(2^{2\cdot 5^n}-1)$ (провери!), па затоа $5^{n+1}\,|\,(2^{2\cdot 5^n}+1)$.

2. Нека $(a,n)=1$ и $b-c=k\varphi(n)$. Докажи, дека a^b-a^c е делив со n.

Решение. Според теоремата на Ојлер важи $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$, па затоа

$$a^{k\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n).$$

Последната конгруенција ја множиме со a^c и добиваме

$$a^{k\varphi(n)}a^c\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n),\text{ т.е. } a^{c+k\varphi(n)}\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n).$$

Но, $b=c+k\varphi(n)$, па затоа $a^b\equiv a^c(\mathrm{mod}\,n)$, што значи $n\,|\,(a^b-a^c)$.

3. Определи ги последните две цифри во декадниот запис на бројот 137^{42}.

Решение. Бидејќи $(137,100)=1$ од теоремата на Ојлер следува

$$137^{\varphi(100)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100).$$

Но, $100=2^2 5^2$, па затоа

$$\varphi(100)=100(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{5})=40,$$

од што следува дека $137^{40}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Од друга страна $137\equiv 37(\mathrm{mod}\,100)$, па затоа $137^2\equiv 1369\equiv 69(\mathrm{mod}\,100)$. Конечно,

$$137^{42}\equiv 69(\mathrm{mod}\,100)$$

што значи дека последните две цифри на бројот 137^{42} се 6 и 9.

4. Определи ја цифрата на единиците на збирот 2012^3+3^{2012}.

Решение. *Прв начин*. Цифрата на единиците на бројот 2012^3 е 8. Цифрите на единиците на степените $3^1,3^2,3^3,3^4,3^5,3^6,3^7,3^8,3^9,...$ се 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3,... соодветно. Според тоа, цифрите на единиците на степените на бројот 3 формираат периодична низа со должина на основната париода еднаква на 4. Затоа бројот $3^{2012}=(3^4)^{503}$ има цифра на единиците како и бројот 3^4, т.е. 1. Според тоа, цифрата на единиците на бројот 2012^3+3^{2012} е еднаква на цифрата на единиците на збирот $8+1=9$, т.е. таа е 9.

Втор начин. Од теоремата на Ојлер следува дека $3^4=3^{\varphi(10)}\equiv 1(\text{mod}\,10)$, па затоа $3^{2012}=(3^4)^{503}\equiv 1^{503}=1(\text{mod}\,10)$. Конечно,

$$2012^3+3^{2012}\equiv 8+1=9(\text{mod}\,10),$$

т.е. цифрата на единиците на 2012^3+3^{2012} е 9.

5. Определи го остатокот од делењето на бројот $(12371^{76}+34)^{150}$ со 111.

Решение. Бидејќи $(12371,111)=1$, од теоремата на Ојлер следува

$$12371^{\varphi(111)}\equiv 1(\text{mod}\,111).$$

Понатаму, $111=3\cdot 37$, па затоа $\varphi(111)=(3-1)(37-1)=72$. Според тоа, $12371^{72}\equiv 1(\text{mod}\,111)$. Исто така, $12371\equiv 50(\text{mod}\,111)$, па затоа

$12371^2\equiv 50^2\equiv 58(\text{mod}\,111)$ и $12371^4\equiv 58^2\equiv 34(\text{mod}\,111)$.

Оттука,

$12371^{76}\equiv 34(\text{mod}\,111)$ и $12371^{76}+34\equiv 68\equiv -43(\text{mod}\,111)$.

Но, $(43,111)=1$, па затоа од теоремата на Ојлер следува $43^{72}\equiv 1(\text{mod}\,111)$, што значи $43^{144}\equiv 1(\text{mod}\,111)$. Од друга страна

$$43^2=1849\equiv -38(\text{mod}\,111),$$

$$43^4=38^2=1444\equiv 1(\text{mod}\,111) \text{ и}$$

$$43^6\equiv -38\equiv 73(\text{mod}\,111)$$

што значи дека

$$(12371^{76}+34)^{150}\equiv(-43)^{150}\equiv 43)^{144}43)^6\equiv 73(\text{mod}\,111).$$

Конечно, бараниот остаток е 73.

6. Определи го остатокот при делењето на бројот $(7^{2012})^{2014}-(3^{12})^{14}$ со бројот 10.

Решение. *Прв начин*. Степените на бројот 7 последователно имаат цифра на единицци 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ..., т.е. секоја четврт член во низата се повторува. Затоа бројот $(7^{2012})^{2014}=((7^4)^{503})^{2014}$ има цифра на единиците како и бројот 7^4, т.е. 1.

Аналогно добиваме дека бројот $(3^{12})^{14}$ има цифра на единиците како и бројот 3^4, т.е. 1. Значи, цифрата на единицте на бројот $(7^{2012})^{2014}-(3^{12})^{14}$ е 0, па и остатокот при делење на овој број со бројот 10 е 0.

Втор начин. Бидејќи $(7,10)=1$, од теоремата на Ојлер следува

$$7^4=7^{\varphi(10)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10),$$

па затоа $7^{2012}=(7^4)^{503}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$, што значи $(7^{2012})^{2014}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$.

Аналогно,

$$3^4=3^{\varphi(10)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10),$$

од што следува $(3^{12})^{14}\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$. Конечно,

$$(7^{2012})^{2014}-(3^{12})^{14}\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}\,10),$$

па затоа остатокот при делење на бројот $(7^{2012})^{2014}-(3^{12})^{14}$ со бројот 10 е 0.

7. Определи ги сите природни броеви во чиј декаден запис се појавува само цифрата 9 и кои се деливи со 7.

Решение. Бараните броеви се до облик 10^n-1. Најмалиот број n за кој $10^n-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, односно $10^n\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$ е бројот $\varphi(7)=6$. Значи, $n=6k$, $k\in\mathbb{N}$. Конечно, бараните броеви имаат $6k$ цифри и сите цифри им се еднакви на 9.

8. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека $2^{n-1}(2^n-1)\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$.

Решение. Имаме $\varphi(9)=6$. Бидејќи n е непарен број важи $n=6q+r$, $r=1,3$ или 5. Од теоремата на Ојлер следува $2^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, па затоа $2^{6q}\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$ што значи дека

$$2^n\equiv 2^{6q+r}\equiv 2^r(\mathrm{mod}\,9) \text{ и } 2^{n-1}\equiv 2^{6q+r-1}\equiv 2^{r-1}(\mathrm{mod}\,9).$$

Според тоа,

$$2^{n-1}(2^n-1)\equiv 2^{r-1}(2^r-1)(\mathrm{mod}\,9),$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$2^{r-1}(2^r-1)\equiv 1(\mathrm{mod}\,9), \text{ за } r=1,3 \text{ и } 5,$$

што се проверува непосредно.

9. Нека n е природен број кој не е делив ниту со 2, ниту со 3, ниту со 5. Докажи, дека бројот со $\varphi(n)$ цифри, кај кој сите цифри се единици, е делив со n.

Решение. Бидејќи $(10,n)=1$, од теоремата на Ојлер следува конгруенцијата

$$10^{\varphi(n)}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)\ .$$

Бројот $10^{\varphi(n)}-1$ има $\varphi(n)$ цифри и сите цифри се деветки. Но, $(9,n)=1$ и ако конгрунцијата ја поделиме со 9 добиваме број со $\varphi(n)$, кај кој сите цифри се единици и кој е делив со n.

10. Докажи, дека последните $2k$ цифри на бројот $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k}$ се нули.

Решение. Броевите 2 и 5^n се заемно прости и $\varphi(5^n)=4\cdot 5^{n-1}$, па од теоремата на Ојлер следува

$$2^{4\cdot 5^{n-1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^n)\ .$$

Ако во горната конгруенција ставиме $n=2k$, добиваме

$$2^{4\cdot 5^{2k-1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^{2k}),$$

односно $5^{2k}\,|\,(2^{4\cdot 5^{2k-1}}-1)$, од што следува $2^{2k}5^{2k}\,|\,2^{2k}(2^{4\cdot 5^{2k-1}}-1)$, односно $10^{2k}\,|\,(2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k})$, што значи дека последните $2k$ цифри на бројот $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}-2^{2k}$ се нули.

11. Нека a е природен број. Определи го остатокот при делењето на бројот a^{100} со 125.

Решение. Ако $(a,5)=5$, тогаш $125\,|\,a^{100}$. Ако $(a,5)=1$, тогаш од теоремата на Ојлер следува

$$a^{100}=a^{4\cdot 5^2}=a^{\varphi(125)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 125)\ .$$

Конечно, бараните остатоци се 0 и 1.

12. Определи ги сите природни броеви $n>1$ за кои бројот $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ е делив со n.

Решение. Сите непарни броеви поголеми од 1 го задоволуваат условот на задачата. Навистина, ако $n=2t+1$, тогаш $\frac{n-1}{2}=t$ е природен број и за $k=1,2,...,\frac{n-1}{2}$ важи $n\,|\,k^n+(n-k)^n$. Значи, $n\,|\,1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$.

Нека сега n е парен број и нека $2^s m=n$, m е непарен број. Бидејќи $s<2^s$, заклучуваме дека за парни k важи $2^s\,|\,k^n$, а за непарните k, чиј број е $\frac{n}{2}$, од теоремата на Ојлер имаме $2^{k^{s-1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^s)$, па затоа и $k^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^s)$ и оттука

$$1^n+3^n+...+(n-3)^n+\ (n-1)^n\equiv \tfrac{n}{2}(\mathrm{mod}\,2^s)\,.$$

Според тоа, од

$$2^n+4^n+...+(n-2)^n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^s)$$

добиваме

$$1^n+2^n+...+(n-2)^n+\ (n-1)^n\equiv \tfrac{n}{2}(\mathrm{mod}\,2^s)\,.$$

Ако сега претпоставиме, дека $n\,|\,1^n+2^n..+(n-1)^n$, тогаш бидејќи $2^s\,|\,n$, ја добиваме конгруенцијата $0\equiv \frac{n}{2}(\mathrm{mod}\,2^s)$ од која следува $2^s\,|\,\frac{n}{2}$, што противречи на $n=2^s m,\ m$ е непарен број. Конечно, ако n парен број, тогаш

$$n\nmid 1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n\,.$$

13. Докажи, дека ако n е непарен природен број, тогаш $n\,|\,2^{n!}-1$.

Решение. Ако n е природен број, тогаш $\varphi(n)\,|\,n!$. Навистина, за $n=1$ тоа е очигледно, а ако $n>1$ и $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разложување на n, каде $p_1<p_2<...<p_k$, тогаш

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}...p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\,|\,n!\,,$$

бидејќи $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}...p_k^{\alpha_k-1}\,|\,n$, а $p_k-1<p_k\le n$, па затоа

$$p_1-1<p_2-1<...<p_k-1$$

се различни природни броеви помали од n т.е

$$(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)\,|\,(n-1)!.$$

Сега, бидејќи n е непарен природен број, од теоремата на Ојлер имаме $2^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$. Според тоа,

$$2^{n!}=(2^{\varphi(n)})^{\frac{n!}{\varphi(n)}}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)\,.$$

14. Докажи, дека за секој природен број s постои природен број n кој се дели со s и чиј збир на цифри е s.

Решение. Нека s е даден природен број, $s=2^\alpha 5^\beta t$, каде α,β се цели ненегативни броеви, а t е природен број кој не се дели ниту со 2, ниту со 5. Од теоремата на Ојлер следува $10^{\varphi(t)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,t)$. Нека

$$n=10^{\alpha+\beta}(10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\varphi(t)})\,.$$

Бројот n се дели со s, бидејќи $2^\alpha 5^\beta\,|\,10^{\alpha+\beta}$ и бидејќи $t\,|\,s$ добиваме

$$10^{\varphi(t)}+10^{2\varphi(t)}+\ldots+10^{s\varphi(t)}\equiv s\equiv 0(\mathrm{mod}\,t)\,.$$

Од друга страна, јасно, збирот на цифрите на бројот n е s.

15. Докажи, дека во секоја аритметичка прогресија $ak+b$, $k=0,1,2,3,...$ каде a,b се природни броеви, постојат бесконечно многу членови кои имаат исти прости делители.

Решение. Нека $d=(a,a+b)$. Тогаш $a=da_1, a+b=dc$, каде што $(a_1,c)=1$, $c>1$, бидејќи $d\le a$ и $dc=a+b>a$. Бидејќи $(a_1,c)=1$ од теоремата на Ојлер имаме $c^{\varphi(a_1)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, a_1)$ за секој природен број n, т.е

$$c^{\varphi(a_1)}-1=t_n a_1,$$

каде t_n е природен број кој можеме да го направиме произволно голем ($c>1$ и n е произволен природен број), при што

$$a(ct_n+1)+b=da_1ct_n+dc=dc^{n\varphi(a_1)+1}.$$

Според тоа, членот на прогресијата $a(ct_n+1)+b$ има исти прости делители со бројот $dc>1$ од што следува дека прогресијата содржи бесконечно многу членови кои имаат едни и исти прости делители.

16. Нека k и n се природни броеви такви што $k<2^{n+1}$. Докажи, дека бројот $1^{2^n}+2^{2^n}+...+k^{2^n}$ е делив со 2^n ако и само ако $k=2^{n+1}-1$.

Решение. Нека $k<2^{n+1}$ е таков природен број што бројот

$$S(n,k)=1^{2^n}+2^{2^n}+...+k^{2^n}$$

е делив со 2^n. Бидејќи $(2i)^{2^n}$ е делив со 2^{2^n}, доволно е да ги разгледаме само непарните собирци во $S(n,k)$. Ако j е непарен, тогаш од теорема на Ојлер следува $j^{2^{n-1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^n)$, па затоа $j^{2^n}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\, 2^n)$. Тогаш

$$S(n,k)\equiv [\tfrac{k+1}{2}]\,(\mathrm{mod}\, 2\ \ ).$$

Јасно, $[\frac{k+1}{2}]\le 2^n$, при што знак за равенство важи само ако $k=2^{n+1}-1$.

17. Определи ги последните три цифри на бројот $2003^{2002^{2001}}$.

Решение. Од $1000=2^3\cdot 5^3$ следува $\varphi(1000)=1000\cdot(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=400$.

Имаме, $2003\equiv 3(\mathrm{mod}1000)$, па затоа $2003^{2002^{2001}}\equiv 3^{2002^{2001}}(\mathrm{mod}1000)$. Од теоремата на Ојлер следува $3^{400}=3^{\varphi(1000)}\equiv 1(\mathrm{mod}1000)$. Ќе докажеме дека $2002^{2001}\equiv 2^{2001}\equiv 352(\mathrm{mod}\,400)$. Имаме, $2^{2001}\equiv 2^4\cdot 2^{1997}\equiv 2^4 t(\mathrm{mod}\,2^4\cdot 25)$, па затоа $2^{1997}\equiv t(\bmod 25)$. Сега, повторно од теоремата на Ојлер следува $2^{20}=2^{\varphi(25)}\equiv 1(\bmod 25)$. Според тоа

$$2^{1997}\equiv 2^{17}\cdot 2^{1980}\equiv 2^{17}\cdot(2^{20})^{99}\equiv 2^{17}\equiv 22(\bmod 25),$$

т.е.

$$2^{2001}\equiv 16\cdot 22\equiv 352(\bmod 2^4\cdot 25).$$

Значи, $2002^{2001}=400k+352$, па оттука

$$2003^{2002^{2001}}\equiv 3^{400k+352}\equiv (3^{400})^k\cdot 3^{352}\equiv 3^{352}\equiv 9^{176}(\bmod 1000).$$

Останува да се определи остатокот при делење на 9^{176} со 1000. Од Њутновата биномна формула добиваме

$$\begin{aligned}9^{176}&=10^{176}-\tbinom{176}{1}10^{175}+\tbinom{176}{2}10^{174}-...-\tbinom{176}{173}10^3+\tbinom{176}{174}10^2-\tbinom{176}{175}10+1\\&\equiv\tbinom{176}{174}10^2-\tbinom{176}{175}10+1\equiv\tbinom{176}{2}100-1760+1\equiv 0-760+1\equiv 241(\bmod 1000)\end{aligned}$$

Значи, последните три цифри на кој завршува бројот $2003^{2002^{2001}}$ се 2, 4 и 1.

18. Докажи дека постои природен број $n<10^6$ за кој во декадниот запис на бројот 5^n има шест последователни нули.

Решение. Ќе докажеме дека бројот $n=20+2^{19}$ го задоволува условот на задачата. Јасно, $5^n\equiv 5^{20}(\bmod 5^{20})$. Ќе докажеме дека $5^n\equiv 5^{20}(\bmod 2^{20})$. Бидејќи $\varphi(2^{20})=2^{19}$, од теоремата на Ојлер следува $5^{2^{19}}\equiv 1(\bmod 2^{20})$, па затоа $5^{2^{19}+20}\equiv 5^{20}(\bmod 2^{20})$, со што докажавме $5^n\equiv 5^{20}(\bmod 2^{20})$. Според тоа, $5^n\equiv 5^{20}(\bmod 10^{20})$.

Меѓутоа, $5^{20}=\frac{1}{2^{20}}\cdot 10^{20}<\frac{1}{1000^2}\cdot 10^{20}=10^{14}$. Значи, последните 20 цифри на 5^{20} ќе започнат со шест нули, што покажува дека избраниот n ги задоволува условите на задачата. Останува да забележиме дека $20+2^{19}<10^6$.

19. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што во декадниот запис на бројот 5^n се појавуваат 1976 последователни нули.

Решение. Задачата ќе биде решена ако докажеме дека постојат бескончно многу природни броеви n такви што 5^n може да се запише во облик

$$5^n=10^{k+1976}q+r, \qquad (1)$$

за некои природни броеви q,r,k, при што $r<10^k$. За да последното е исполнето мора да важи $10^{k+1976} < 5^n$, од каде следува $5^{k+1976} | r$. Да ставиме $r = 5^{k+1976}s$, при што s ќе биде дополнително определено. Од $5^{k+1976} | r < 10^k$ следува $5^{k+1976} < 10^k$, т.е. $2^k > 5^{1796}$. Тоа значи дека

$$k \ge [1976\log_2 5]+1 = 4589.$$

Сега (1) може да се запише во видот $5^{n-k-1976} = 2^{k+1976}q+s$ и ако воведеме смена $t = k+1976$ добиваме

$$5^{n-t} = 2^t q + s,$$

каде $q > 0$ (што е еквивалентно со $n-t > 0$). Понатаму, за да можеме да ја примениме теоремата на Ојлер, ќе земеме $s = 1$. Бидејќи

$$5^{\varphi(2^t)} \equiv 1 (\bmod 2^t),$$

сите барани услови се исполнети за секој $t \ge 4589+1976 = 6565$ и за секој n за кој важи $n > t$ и

$$\varphi(2^t) = 2^{t-1} | (n-t).$$

Со други зборови, за секој $m \in \mathbb{N}$ и $t \ge 6565$ бројот $n = 2^{t-1}m+t$ го има саканото својство.

20. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n > m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме, дека ако бројот 5^m има k цифри, тогаш $k \le m$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш $k-1 \ge m$, па како секој број со k цифри е поголем или еднаков на 10^{k-1} добиваме

$$10^{k-1} \ge 10^m > 5^m \ge 10^{k-1},$$

што е противречност.

Ако најдеме n таков што $5^n - 5^m$ е делив со 10^k, тогаш последните k цифри на 5^n се совпаѓаат со бројот 5^m, т.е. 5^n се добива од 5^m со додавање на неколку цифри од лево. Бидејќи броевите 2 и 5 се заемно прости, заклучуваме дека бројот $5^{\varphi(2^k)}-1$ е делив со 2^k. Тогаш бројот

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)}-1)$$

е делив со 5^k и со 2^k, т.е. е делив со 10^k. Значи, $n = m+\varphi(2^k)$ е бројот со саканото својство.

Втор начин. Ќе бараме n во облик $n = m+k$, каде $k > 0$. Нека r_m е бројот на цифрите на декадниот запис на 5^m. Бидејќи треба $5^n - 5^m = 10^{r_m}a$, доволно е 10^{r_m} да е делител на 5^n-5^m. Но, $5^n-5^m=5^m(5^k-1)$ и како $r_m<m$ (Зошто?), добиваме дека 5^{r_m} е делител на 5^m. Од друга страна $10^{r_m}=5^{r_m}2^{r_m}$ и затоа доволно е 2^{r_m} да е делител на 5^k-1. Ќе користиме индукција. Нека $r_m=1$ и да ставиме $k=1$. Очигледно $2^{r_m}=2$ е делитек на $5^k-1=4$. Нека $r_m\geq 1$ и нека k е таков што 2^{r_m} е делител на 5^k-1. На r_m+1 во соодветствве му ставаме $2k$. Тогаш, бидејќи $2^{r_m}\,|\,5^k-1$ и $2\,|\,5^k+1$, добиваме $2^{r_m+1}\,|\,5^{2k}-1$, што и требаше да се докаже.

21. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $42p$ е делител на бројот 3^p-2^p-1. Докажи!

Решение. Нека $m=3^p-2^p-1$. Имаме,

$$m\equiv 1-0-1=0 \pmod 2 \text{ и } m\equiv 0+1-1=0 \pmod 3.$$

Понатаму, од последица 4.5 следува дека

$$m=3^p-2^p-1\equiv 3-2-1=0 \pmod p.$$

Ќе докажеме дека 7 е делител на m. Бидејќи $p>3$ е прост број, важи $p=3k+1$ или $p=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$. Ако $p=3k+1$, тогаш k е парен број, па затоа

$$\begin{aligned} m&=3^{3k}\cdot 3-2^{3k}\cdot 2-1=27^k\cdot 3-8^k\cdot 2-1\\ &\equiv(-1)^k\cdot 3-1^k\cdot 2-1\equiv 0 \pmod 7. \end{aligned}$$

Ако $p=3k+2$, тогаш k е непарен број, па затоа

$$\begin{aligned} m&=27^k\cdot 9-8^k\cdot 4-1\equiv(-1)^k\cdot 9-1^k\cdot 4-1\\ &\equiv -14\equiv 0 \pmod 7. \end{aligned}$$

Според тоа, и во двата случаја $7\,|\,m$. Ако $p\neq 7$, тогаш броевите 2, 3, 7 и p се заемно прости, па од досега изнесеното добиваме дека $42p$ е делител на m. Ако $p=7$, тогаш

$$3^7-2^7-1=2058=7\cdot 42\cdot 7,$$

што значи дека и во овој случај $42p$ е делител на m.

22. Определи ги сите природни броеви $m,n\geq 2$ такви што $\frac{1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}}{n}$ е природен број.

Решение. Нека m и n ги задоволуваат условите на задачата. Тогаш n е непарен број и $(m,n)=1$. Ако $n=3$, тогаш $m\equiv 1 \pmod 3$, бидејќи во случај кога

$m \equiv -1 (\mod 3)$ добиваме

$$1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n} \equiv 1 - 1 + 1 = 1 (\mod 3).$$

Сега нека $n > 3$. Тогаш $m^{3^n} \not\equiv 1 (\mod n)$, бидејќи во спротивно ќе имаме

$$1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n} \equiv 3 (\mod n),$$

т.е. $n \mid 3$. Понатаму, бидејќи

$$1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n} = \frac{m^{3^{n+1}} - 1}{m^{3^n} - 1},$$

добиваме $m^{3^{n+1}} \equiv 1 (\mod n)$. Нека k е најмалиот природен број таков што $m^k \equiv 1 (\mod n)$. Тогаш $k \mid 3^{n+1}$ и $k \nmid 3^n$, па затоа $k = 3^{n+1}$. Бидејќи $(m, n) = 1$, од теоремата на Ојлер следува $m^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mod n)$, па затоа $k \le \varphi(n)$. Според тоа, $3^{n+1} \le \varphi(n) \le n - 1$, што не е можно.

Според тоа, бараните броеви се $n = 3$ и сите броеви $m \ge 4$ такви што $m \equiv 1 (\mod 3)$.

23. За $x \in (0,1)$ нека $y \in (0,1)$ е број чија $n-$та цифра по децималната запирка е $2^n -$тата цифра по децималната запирка на бројот x. Докажи дека ако x е рационален број, тогаш и y е рационален број.

Решение. *Прв начин.* Нека $f(n)$ е $n-$тата цифра по децималната запирка на бројот x и $g(n)$ е $n-$тата цифра по децималната запирка на бројот y. Тогаш за децималниот запис на y важи $g(n) = f(2^n)$.

Бројот x е рационален, што значи дека неговите вифри периодично се повторуваат почнувајќи од некор децимално место. Значи, постои природен број m (должината на периодот на x) и природен број x_0 така што за секој $x > x_0$ важи $f(x) = f(x+m)$.

Со математичка индукција лесно се докажува дека за секои $x, y > x_0$ такви што $x \equiv y (\mod m)$ важи $f(x) = f(y)$. Навистина, ако $x \equiv y (\mod m)$, тогаш постои природен број t таков што $x = tm + y$. Ако $t = 1$, тогаш имаме $f(x) = f(y+m) = f(y)$. Нека претпоставиме дека $f(x) = f(y)$ за фиксирана вредност t. Сега за $x = (t+1)m + y$ важи:

$$x \equiv y (\mod m) \text{ и } f(x) = f((t+1)m + y) = f((tm+y)+m) = f(tm+y) = f(y).$$

Нека $m = 2^k d$, каде d е непарен број. Од теоремата на Ојлер следува $d \mid 2^{\varphi(d)} - 1$ и бидејќи $2^k \mid 2^x$ за $k < x$ добиваме

$$m=2^k d \mid 2^x(2^{\varphi(d)}-1)=2^{x+\varphi(d)}-2^x\text{, т.е. }2^x\equiv 2^{x+\varphi(d)}(\bmod m).$$

Според тоа за $x>\max\{x_0,k\}$ важи

$$f(2^{x+\varphi(d)})=f(2^x)\text{, т.е. }g(x+\varphi(d))=g(x).$$

Значи, $g(x)$ е периодична функција со период $\varphi(d)$, од каде следува дека y е рационален број.

Втор начин. Бидејќи x е рационален, неговите цифри се повторуваат периодично, почнувајќи од некоја позиција после децималната запирка. Сакаме да покажеме дека ова е точно и за цифрите на y после децималната запирка, од каде ќе добиеме дека и y е рационален број.

Нека d е должината на периодот x и нека $d=2^u v$, каде v е непарен број. Тогаш за $w=\varphi(v)$ од теоремата на Ојлер следува $2^w\equiv 1(\bmod v)$. Според тоа,

$$2^{n+w}=2^n\cdot 2^w\equiv 2^n\,(\bmod v)$$

за секој n. Исто така, за $n\geq u$ имаме

$$2^{n+w}\equiv 2^n\equiv 0(\bmod 2^u).$$

Според тоа, за секој $n\geq u$, важи $2^{n+w}\equiv 2^n\,(\bmod d)$.

Тогаш за n доволно големо, 2^{n+w}-та цифра е на исто место во периодот на x како и 2^n-тата цифра, па овие цифри се еднакви. Следува $(n+w)$-та цифра е еднаква на n-тата цифра во y. Ова значи дека цифрите на y се менуваат периодично со период w од некое децимално место.

24. Нека k е природен број и m е непарен цел број. Докажи дека постои природен број n таков што 2^k е делител на n^n-m.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k=1$ можеме да земеме произволен непарен број n. Нека $n_0\in\mathbb{N}$ е таков што

$$n_0^{n_0}\equiv m(\bmod 2^k).$$

Јасно, n_0 е непарен број.

Ако

$$n_0^{n_0}\equiv m(\bmod 2^{k+1}),$$

тогаш нема што да докажуваме. Во спротивно ќе докажеме дека бројот $n=n_0+2^k$ го има саканото својство.

Имаме $n_0^{n_0}-m=2^k d$, каде d е непарен број и затоа бројот

$$n_0^{n_0}-m-2^k=2^k(d-1)$$

е делив со 2^{k+1}. Од теоремата на Ојлер следува дека $n^{2^k} \equiv 1 (\mod 2^{k+1})$. Затоа

$$\begin{aligned} n^n &= n^{n_0+2^k} = n^{n_0} n^{2^k} \equiv n^{n_0} \\ &= (n_0+2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0-1} 2^k \\ &\equiv m + 2^k + n_0^{n_0} 2^k = m + (n_0^{n_0}+1)2^k \\ &\equiv m (\mod 2^{k+1}). \end{aligned}$$

Според, $n^n - m \equiv 0 (\mod 2^{k+1})$, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

25. Природниот број k ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите природни броеви n за кои постои наизменичен природен број A_n делив со n.

Решение. Ако $20 | n$, тогаш последните две цифри на секој број делив со n се парни, па затоа не е наизменичен. Ќе докажеме дека за секој n таков што $20 \nmid n$ постои наизменичен содржател A_n. Прво, за секој m таков што $(m,10)=1$ и за секој $k \in \mathbb{N}$ постои број од облик

$$I_{k,m} = \overline{1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1...1\underbrace{0...0}_{k-1}1} = \frac{10^{ik}-1}{10^k-1}, i \in \mathbb{N}$$

таков што $m | I_{k,m}$. Навистина, според теоремата на Ојлер можеме да земеме $i = \varphi((10^k-1)m)$.

1) Ако $(n,10)=1$, тогаш $I_{2,n}$ е наизменичен број делив со n.

2) Нека $n = 2 \cdot 5^k m$, каде $(m,10)=1$. Ќе докажеме, дека за секој r постои $r-$цифрен наизменичен број U_r (кој може да почнува со нула) делив со 5^r, а потоа ќе земеме $A_n = 10 U_{2k} I_{2k,m}$.

   Низата $\{U_r\}$ ја дефинираме индуктивно. Нека $U_1 = 5$. За $r \ge 1$ нека $c \in \{0,1,2,3,4\}$ е таков што

$$2^r c \equiv -\frac{U_r}{5^r} (\mod 5)$$

   и нека $d = c+5$. Тогаш $(r+1)-$цифрените броеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ се деливи со 5^{r+1}, а еден од нив е наизменичен. За U_{r+1} го земеме тој наизменичен број.

3) Нека $n = 2^k m$, каде $\mathrm{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме дека за секој r постои $2r-$цифрен наизменичен број V_r делив со 2^{2r+1}, а потоа ќе земеме

$A_n = V_k I_{2k,m}$. Како и во случајот 2), V_r го дефинираме индуктивно. Земаме $V_1 = 16$, а за $r > 1$ точно еден од броевите $\overline{10V_r}, \overline{12V_r}, \overline{14V_r}, \overline{16V_r}$ може да се земе за V_{r+1}.

26. Определи ги сите цифри a ($0 \le a \le 9$), за кои постои таков природен број n, што последните 2011 цифри на бројот $3^n - 1$ се еднакви на a.

Решение. Последната цифра на степените на бројот 3 е некоја од цифрите 1, 3, 7 или 9. Следствено a може да биде само некоја од цифрите 0, 2, 6 или 8. Бидејќи 3 и 10^{2011} се заемно прости, следува дека постои таков природен број k, што $3^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10^{2011})$ (на пример според теоремата на Ојлер за $k = \varphi(10^{2011})$). Но, тоа значи, дека последните 2011 цифри на $3^k - 1$ се нули, т.е. $a = 0$ е решение на задачата.

При делење со 8 степените на бројот 3 даваат остатоци 3 или 1 и следствено броевите од видот $3^n - 1$ ќе даваат остатоци 2 или 0. Тоа значи, дека нема степен на 3, за кој бројот $3^n - 1$ завршува на повеќе од две двојки. Во спротивен случај би требало да постои n, за кој бројот $(3^n - 1) - 222$ се дели со 1000, а следствено и со 8. Во исто време 222 дава остаток 6 при делење со 8, додека $3^n - 1$ дава остаток 2 или 0 и следствено бројот $(3^n - 1) - 222$ не се дели со 8. Заклучуваме, дека $a = 2$ не е решение на задачата.

Ќе докажеме, дека $a = 6$ и $a = 8$ се решенија. За таа цел да го разгледаме бројот $3^k - 1$ од случајот $a = 0$, кој завршува на 2011 нули. Тогаш и бројот $3^k - 1 + 10^{2011}$ исто така завршува на 2011 нули. За овој број имаме

$$3^k - 1 + 10^{2011} = 3^k + 10^{2011} - 1 = 3^k + \underbrace{99\ldots9}_{2011} = 3(3^{k-1} + \underbrace{33\ldots3}_{2011}) .$$

Тоа значи, дека бројот $3^{k-1} + \underbrace{33\ldots3}_{2011}$ завршува на 2011 нули. Оттука лесно следува, дека бројот $3^{k-1} - 1$ завршува на 2011 шестки, што значи дека $a = 6$ е решение е решение на задачата. Случајот $a = 8$ се разгледува на ист начин, при шт користиме дека

$$3^k - 1 + 10^{2011} = 3^k + 10^{2011} - 1 = 3^k + \underbrace{99\ldots9}_{2011} = 9(3^{k-2} + \underset{2011}{11\ldots1}) .$$

Значи, бројот $3^{k-2} + \underset{2011}{11\ldots1}$ завршува на 2011 нули, од каде веднаш заклучуваме, дека бројот $3^{k-2} - 1$ завршува на 2011 осумки.

Конечно, решенијата на задачата се $a = 0,\ a = 6$ и $a = 8$.

27. Подредениот пар цели броеви (x, y) го нарекуваме *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите x и y е еднаков на 1. Нека S е конечно множество примитивни точки. Докажи дека постојат природен број n и цели броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ такви што за секои точки (x, y) од S важи:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Решение. *Прв начин*. Нека

$$S = \{(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k)\}.$$

Доволно е да се докаже дека постои хомоген полином $P(x, y)$ таков што $P(x_i, y_i) = \pm 1$ за $i = 1, 2, ..., k$. Навистина, тогаш $P(x_i, y_i)^2 = 1$ за секој i. Понатаму, бидејќи за секој хомоген полином P важи $P(-x, -y) = \pm P(x, y)$ можеме да сметаме дека $(x_i, y_i) \neq (-x_j, -y_j)$ за секои i, j, т.е. дека никои две точки на множеството S не лежат на иста права која минува низ координатниот почеток.

Ги разгледуваме хомогените полиноми

$$G_i(x, y) = \prod_{j \neq i} (y_j x - x_j y), \text{ за } i = 1, 2, ..., k.$$

Степенот на овие полиноми е $k - 1$ и притоа важи $G_i(x_j, y_j) = 0$ за $j \neq i$ и $G_i(x_i, y_i) = c_i \neq 0$. Нека $c = [c_1, ..., c_k]$. Постојат линеарни хомогени полиноми E_i такви што $E_i(x_i, y_i) = 1$ за $i = 1, 2, ..., k$. Саканиот полином P ќе го дадеме во обликот

$$P(x, y) = F_c(x, y) - \sum_{i=1}^{k} b_i E_i(x, y)^{m-k+1} G_i(x, y),$$

каде F_c е хомоген полином од некој степен $m \geq k - 1$ таков што $F_c(x_i, y_i) \equiv 1 (\bmod c)$ за секој i, а $b_i = \frac{F_c(x_i, y_i) - 1}{c_i} \in \mathbb{Z}$ се соодветните константи. Потребно е само да се докаже дека ваков полином F_c постои.

Лема. За секој природен број c постои хомоген полином Q_c таков што за секоја примитивна точка (x, y) важи $Q_c(x, y) \equiv 1 (\bmod c)$.

Доказ. Ако $c = p^a$ е степен на прост број, може да се земе

$$Q_c(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy + y^2)^{\varphi(c)}, & p = 2 \\ (x^{p-1} + y^{p-1})^{\varphi(c)}, & p > 2. \end{cases}$$

Нека $c=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на бројот c. Бидејќи броевите $\frac{c}{p_i^{a_i}}, i=1,2,...,r$ се заемно прости, постојат цели броеви $A_1,...,A_r$ такви што $\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1$, а тогаш можеме да земеме

$$Q_c(x,y)=\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}Q_{p_i^{a_i}}(x,y)\equiv\sum_{i=1}^{r}A_i\frac{c}{p_i^{a_i}}=1(\bmod c).\ \blacksquare$$

Втор начин. Нека $S=\{(x_1,y_1),...,(x_k,y_k)\}$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. Случајот $k=1$ е тривијален. Нека $k\geq 2$. Според индуктивната претпоставка постојат хомогени полиноми $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ со целобројни коефициенти такви што

$$Q(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k-1 \text{ и } R(x_i,y_i)=1 \text{ за } i\neq k,\ (1\leq i\leq k).$$

Бараниот полином $P(x,y)=\sum_j a_j x^{n-j}y^j$ го бараме во облик

$$P(x,y)=F(Q(x,y),R(x,y)),$$

каде $F(u,v)$ е некој хомоген полином. Ако $Q(x_{k-1},y_{k-1})=a$ и $R(x_k,y_k)=b$, тогаш важи

$$P(x_i,y_i)=\begin{cases}F(1,1), & i=1,2,...,k-2\\ F(a,1), & i=k-1\\ F(1,b), & i=k.\end{cases}$$

Значи, доволно е да докажеме дека постои полином $F\in\mathbb{Z}[x,y]$ таков што

$$F(1,1)=F(a,1)=F(1,b)=1.$$

Сметаме дека $|b|>1$, а во спротивно ќе земеме

$$F(x,y)=(x-y)(x-a)(x+y)^2+y^4.$$

Запишуваме $F(x,y)=y^m f(\frac{x}{y})$, каде $f\in\mathbb{Z}[x]$ и $m=\deg f$. Треба да важи

$$f(1)=f(a)=1 \text{ и } f(\tfrac{1}{b})=\tfrac{1}{b^m},$$

па доволно е да најдеме полином $g\in\mathbb{Z}[x]$ со степен $m-2$ таков што

$$f(t)=(t-1)(t-a)g(t)+1, \text{ при што важи } g(\tfrac{1}{b})=\tfrac{1}{b^{m-2}}\cdot\tfrac{b^m-1}{(b-1)(ab-1)}.$$

Ваков полином g постои ако и само ако $(b-1)(ab-1)$ е делител на b^m-1, па така може да се земе $m=\varphi(|b-1|\cdot|ab-1|)$ и индукцијата е готова.

28. Докажи дека за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ низата

$$2,2^2,2^{2^2},2^{2^{2^2}},...(\bmod n)$$

е константна почнувајќи од некој член.

Решение. Да означиме $a_1 = 2,\ a_{i+1} = 2^{a_i}$ за $i \geq 1$. Треба да докажеме, дека за секој природен број n разликата $a_{i+1} - a_i$ е делива со n за доволно голем i. Со други зборови, ако означиме $b_i = a_{i+1} - a_i$, треба да докажеме:

за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $i_n \in \mathbb{N}$ таков што од $i \geq i_n$ следува $n \mid b_i$. (1)

Важи,

$$b_i = a_{i+1} - a_i = 2^{a_i} - 2^{a_{i-1}} = 2^{a_{i-1}}(2^{a_i - a_{i-1}} - 1) = a_i(2^{b_{i-1}} - 1),$$

и ставаме $a_0 = 1$. Сега, користејќи го горното равенство со индукција ќе го докажеме тврдењето (1). Тоа очигледно важи за $n = 1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за сите природни броеви помали од некој број n. Нека $n = 2^k q$ каде q е непарен број. Бидејќи за $k \leq a_i$ важи $2^k \mid 2^{a_i} = a_{i+1}$, па како низата a_i не е ограничена следува дека постои j_k таков што $2^k \mid a_i \mid b_i$ за секој $i \geq j_k$. Од друга страна, сакаме $q \mid b_i$ за доволно големо i, што е можно само ако $q \mid 2^{b_{i-1}} - 1$. Од теоремата на Ојлер следува

$$2^{\varphi(q)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q),$$

па од $\varphi(q) \mid b_{i-1}$ ќе следува заклучокот. Но, според индктивната претпоставка (која може да ја примениме бидејќи $\varphi(q) < q \leq n$), оваа деливост е точна за секој i за кој $i - 1 \geq i_{\varphi(q)}$. Според тоа, за секој $i \geq i_{\varphi(q)} + 1$ важи $q \mid 2^{b_{i-1}} - 1 \mid b_i$. Но, $(2^k, q) = 1$, па затоа за секој $i \geq \max\{j_k, i_{\varphi(q)} + 1\}$ имаме $n = 2^k q \mid b_i$, со што индуктивниот доказ е завршен.

29. Нека $n \geq 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n. Докажи, дека $f(n+p) \neq f(n)$, за секој $n \geq 2$ и за секој прост број p.

Решение. Ненегативни цели броеви кои не се заемно прости со n и кои се помали или еднакви на n има $n + 1 - \varphi(n)$. Понатаму, ако r е таков број, тогаш и $n - r$ е таков број, па затоа важи $f(n) = \frac{1}{2} n(n + 1 - \varphi(n))$. Нека претпоставиме дека $f(n+p) = f(n)$ за некој природен број n и прост број p. Тогаш го добиваме равенството

$$n(n + 1 - \varphi(n)) = (n+p)(n+p+1-\varphi(n+p)). \qquad (1)$$

Ако $(n, p) = 1$, тогаш $n + p$ е делител на $n + 1 - \varphi(n) < n$, што не е можно. Нека $n = pt, t \in \mathbb{N}$ и (1) да го запишеме во видот

$$t(tp + 1 - \varphi(tp)) = (t+1)(tp + p + 1 - \varphi(tp + p)). \qquad (2)$$

Да допуштиме дека p е делител на t и нека $t = ps, s \in \mathbb{N}$. Бидејќи $(t,t+1) = (p,t+1) = 1$, имаме

$$t+1 \mid pt+1-\varphi(pt) = (p+1)(t+1) - p - t - p\varphi(t),$$

од каде следува дека $t+1 \mid p(1+s+\varphi(t))$, па затоа $t+1 \mid 1+s+\varphi(t)$. Но,

$$1+s+\varphi(t) < 1+t+t < 2(t+1)$$

и затоа $t+1 = 1+s+\varphi(t)$. Тогаш $t+1 = pt+1-\varphi(pt)$ и од (2) добиваме

$$t = pt+p+1-\varphi(p(t+1)) = pt+p+1-(p-1)\varphi(t+1).$$

Последното равенство, разгледано по модул $p-1$ дава $p-1 \mid 2$, па затоа $p=2$ или $p=3$. Ако $p=2$, тогаш $t = 2t+3-\varphi(t+1) > t+2$, а ако $p=3$, добиваме $t = 3t+4-2\varphi(t+1) > t+2$, што и во двата случаја е противречност. Според тоа, $(p,t)=1$.

Ако $p \mid t+1$, т.е. $t+1 = pq, q \in \mathbb{N}$, тогаш аналогно како погоре добиваме $t+1 \mid (p-1)(\varphi(t)+1))$. Заменуваме $(p-1)(\varphi(t)+1) = (t+1)u, u \in \mathbb{N}$ и добиваме

$$t(p-u) = pt+p+1-p\varphi(t+1).$$

Според тоа, $p \mid 1+tu = 1-u+pqu$, т.е. $p \mid u-1$. Меѓутоа,

$$u = \tfrac{(p-1)(\varphi(t)+1)}{t+1} < p-1,$$

па затоа важи $u=1$. Тогаш $t+1 = (p-1)(\varphi(t)+1)$ е непарен, а од друга страна од $1+q = \varphi(t+1)$ следува дека q е непарен, што значи дека $t+1 = pq$ е непарен. Последното противречи на фактот дека $t+1$ не може да има два непарни делители од видот p и $p-1$, а во случајот $p=2$ би добиле $t+1 \mid \varphi(t)+1 < t+1$, што не е можно.

Сега, бидејќи $(p,t) = (p,t+1) = 1$ од (2) следува

$$t(tp+1-(p-1)\varphi(t)) = (t+1)(tp+p+1-(p-1)\varphi(t+1)),$$

односно

$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = \tfrac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \tfrac{\varphi(t+1)}{t}. \qquad (3)$$

Бидејќи

$$\tfrac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \tfrac{\varphi(t+1)}{t} > \tfrac{2(p-1)t}{t(p-1)} - 1 = 1$$

имаме $t \geq 4$ и бројот $\varphi(t+1)-\varphi(t)$ е парен (како разлика на два парни броја). Освен тоа

$$\tfrac{2pt+p+1}{t(p-1)} - \tfrac{\varphi(t+1)}{t} < \tfrac{2p+1}{p-1} < 4$$

кога $p \geq 3$, а за $p=2$ добиваме

$$\tfrac{5t+1-\varphi(t)}{t} < 4.$$

Според тоа, $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$. Од последното равенство и од $t\geq 4$ следува дека точно еден од броевите $\varphi(t+1)$ и $\varphi(t)$ не е делив со 4 (т.е. дава остаток 2 при делење со 4). Тоа е можно ако и само ако точно еден од броевите t и $t+1$ е еднаков на 4, q^k или $2q^k$, каде q е непарен прост број (конгруентен со 3 по модул 4) и $k\in\mathbb{N}$.

Освен тоа со помош на $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$ од (3) ги добиваме равенствата

$$\varphi(t+1)=\frac{2pt+p+1}{p-1}-2t=\frac{2t+p+1}{p-1} \text{ и } \varphi(t)=\varphi(t+1)-2=\frac{2t-p+3}{p-1}. \quad (4)$$

Да забележиме дека, $\varphi(q^k)=(q-1)q^{k-1}\geq\frac{2}{3}q^k$. Имаме и $p\geq 7$, бидејќи во спротивно добиваме $t>\varphi(t)=2t+1$ за $p=2$, $t>\varphi(t)=t$ за $p=3$, а за $p=5$ добиваме дека $2\varphi(t)=t-1$ и $2\varphi(t+1)=t+3$, што лесно доведува до противречност. Со помош на овие оценки добиваме противречност во секој одделен случај.

Случај 1. Ако $t=q^k$ или $t=2q^k$, тогаш

$$4q^k\leq(p-1)q^{k-1}(q-1)\leq 4q^k-p+3\leq 4q^k-2,$$

што не е можно.

Случај 2. Ако $t+1=q^k$ или $t+1=2q^k$, тогаш за $p=7$ добиваме

$$3q^{k-1}(q-1)=q^k+4 \text{ или } 2q^k+4.$$

Сега од $(q,4)=1$ следува $k=1$ и лесно се гледа дека единствена можност е $q=7$ и соодветно $t+1=14$. Но последното противречни на второто равенство во (4). Конечно, ако $p\geq 11$ имаме

$$(p-1)(q^k-q^{k-1}-1)=2q^k \text{ или } 4q^k,$$

од каде следува

$$\frac{20q^k}{3}-10\leq(p-1)(q^k-q^{k-1}-1)\leq 4q^k, \text{ т.е. } 4q^k\leq 15,$$

што е можно само за $q=3, k=1$ и соодветно $t+1=6$, а тоа противречи на второто равенство во (4).

13. МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Докажи дека $2^{n-1}\equiv 1(\mod n)$ за $n=73\cdot 37$.

Решение. Броевите 73 и 37 се прости, па затоа од малата теорема на Ферма следува $2^{72}\equiv 1(\mod 73)$ и $2^{36}\equiv 1(\mod 37)$. Затоа, $2^{72}\equiv (2^{36})^2\equiv 1(\mod 37)$ и $2^{72}\equiv 1(\mod [73,37])$, т.е. $2^{72}\equiv 1(\mod 73\cdot 37)$. Според тоа,

$$2^{72\cdot 37}\equiv 1^{37}\equiv 1(\mod 73\cdot 37)$$

и како $2^{36}=(2^9)^4\equiv 1(\mod 73)$, добиваме

$$2^{n-1}=2^{73\cdot 37-1}=2^{72\cdot 37+37-1}=2^{72\cdot 37}\cdot 2^{36}\equiv 2^{36}\equiv 1(\mod 37\cdot 73).$$

2. Докажи дека за секој природен број n и за секој прост број p бројот $1+\sum\limits_{k=1}^{p-1}k^{n(p-1)}$ е делив со p.

Решение. Бројот p е прост, што значи дека за секој $k\in\{1,2,...,p-1\}$ важи $(k,p)=1$. Сега, од малата теорема на Ферма следува дека $k^{p-1}\equiv 1(\mod p)$ за $k\in\{1,2,...,p-1\}$, што значи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $k^{n(p-1)}\equiv 1(\mod p)$, па затоа

$$1+\sum_{k=1}^{p-1}k^{n(p-1)}\equiv 1+(p-1)\cdot 1\equiv 0(\mod p).$$

3. Ако p е непарен прост број и a е цел број кој не е делив со p, тогаш еден и само еден со броевите $A=a^{1+2+\ldots+p-1}+1$, $B=a^{1+2+\ldots+p-1}-1$, е делив со p. Докажи!

Решение. Имаме $A-B=2$ и $AB=(a^p)^{p-1}-1$. Понатаму, $A-B$ не е делив со p, а според малата теорема на Ферма $p\,|\,AB$, па затоа еден и само еден од множителите е делив со p, што значи еден и само еден од броевите A и B е делив со p.

4. Докажи, дека ab^p-a^pb е делив со $6p$, ако a и b се природни броеви и $p>3$ е прост број.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува дека бројот

$$R = ab^p - a^p b = a(b^p - b) - b(a^p - a)$$

е делив со p.

Ако еден од броевите a и b е парен, тогаш $2 \mid ab$, ако и двата се непарни тогаш $2 \mid (a^{p-1} - b^{p-1})$.

Ако $3 \mid a$ или $3 \mid b$, тогаш $3 \mid (ab^p - a^p b)$. Ако $a = 3k+1$ и $b = 3t+1$, тогаш $3 \mid (a^{p-1} - b^{p-1})$. Слично, ако $a = 3k+2$ и $b = 3t+2$, тогаш $3 \mid (a^{p-1} - b^{p-1})$. Ако $a = 3k+1$ и $b = 3t+2$, тогаш

$$R = ab(3m + 2^{p-1} - 1) = ab(3m + (3-1)^{p-1} - 1)$$

т.е. е делив со 3 бидејќи $p-1$ е парен број.

Бидејќи $p > 3$ имаме $(2,3) = (2, p) = (3, p) = 1$, па затоа $6p \mid R$.

5. Определи ги сите прости броеви p за кои $p^2 \mid (11^{p^2} + 1)$.

Решение. Од условот имаме $11^{p^2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p^2)$, па затоа $11^{p^2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$. Од друга страна, од малата теорема на Ферма следува $11^p \equiv 11 (\mathrm{mod}\ p)$, што значи $11^{p^2} \equiv 11^p (\mathrm{mod}\ p)$. Следствено $11 \equiv 11^p \equiv 11^{p^2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$, па затоа $p \mid 12$, т.е. $p = 2$ или $p = 3$. Понатаму, $11^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, од каде следува дека $p = 2$ не е решение. Бидејќи $11^9 \equiv 2^9 \equiv 8^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 9)$ добиваме дека $p = 3$ е единствено решение.

6. Ако за некој сложен број n важи $n \mid (2^n - 2)$, тогаш ќе велиме дека бројот n е *псевдопрост*. Докажи дека бројот 341 е псевдопрост.

Решение. Имаме $341 = 11 \cdot 31$, што значи дека 341 е сложен број. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{10} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$, па затоа

$$2^{341} = (2^{10})^{34} \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 11).$$

Слично, $2^{30} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 31)$, па затоа

$$2^{341} = (2^{30})^{10} \cdot 2^{11} \equiv 2^{11} \equiv (2^5)^2 \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 31).$$

Според тоа, $2^{341} - 2$ се дели со 11 и со 31, па затоа се дели со 341, од што следува дека тој е псевдопрост број.

7. Ако n е непарен псевдопрост број, тогаш и $2^n - 1$ е псевдопрост број. Докажи!

Решение. Нека $m=2^n-1$. Бидејќи псевдопрост број е сложен добиваме $n=kr$, за некои природни броеви k и r, $1<k<n$, $1<r<n$. Но, тоа значи дека $2^k-1>1$ и од

$$m=2^{kr}-1=(2^k)^r-1=(2^k-1)[(2^k)^{r-1}+(2^k)^{r-2}+...+2^k+1]$$

следува дека $m=2^n-1$ е сложен број. Бидејќи n е непарен и е делител на

$$2^n-2=2(2^{n-1}-1),$$

добиваме дека $n\,|\,(2^{n-1}-1)$, па затоа $2^{n-1}-1=sn$, за некој природен број s, т.е. $2^n-2=2sn$. Сега

$$2^{m-1}=2^{2^n-2}=2^{2sn},$$

т.е.

$$2^{m-1}-1=(2^n)^{2s}-1=(2^n-1)[(2^n)^{2s-1}+(2^n)^{2s-2}+...+2^n+1],$$

што значи дека $(2^n-1)\,|\,(2^{m-1}-1)$, односно $m\,|\,(2^m-2)$, а тоа значи дека n е псевдопрост број.

Забелешка. Бидејќи бројот 341 е непарен пседвдопрост број, добиваме дека постојат бесконечнмо многу псевдопрости броеви.

8. Докажи, дека за секој непарен прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p\,|\,(2^n n+1)$.

Решение. Нека n е непарен прост број и $n=(p-1)(kp+1)$, за $k=0,1,2,3,...$. Имаме $n\equiv -1 \pmod p$. Од малата теорема на Ферма имаме $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ и ако последната конгруенција ја степенуваме на степен $kp+1$, добиваме $2^n\equiv 1 \pmod p$. Според тоа, $2^n n+1\equiv(-1)\cdot 1+1=0 \pmod p$. Но, $k=0,1,2,3,...$, па затоа постојат бесконечно многу природни броеви n со бараното својство.

*Забелешка***.** Од оваа задача следува, дека постојат бесконечно многу сложени броеви од облик $2^n n+1$, каде $n\in\mathbb{N}$. Овие броеви се нарекуваат *броеви на Кален*. Докажано е дека за секој $n\in\{2,3...140\}$ броевите на Кален се сложени, но за $n=141$ бројот на Кален е прост. Не се знае дали меѓу броевите на Кален има бесконечно многу прости броеви.

9. Низата $a_1,a_2,...$ е определена со

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1,\quad (n=1,2,...).$$

Определи ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p \mid a_m$. За $p \in \{2,3\}$ имаме $p \mid a_2 = 48$. Од друга страна, ако $p > 3$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека

$$6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \,(\mathrm{mod}\, p),$$

т.е. $p \mid a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

10. Докажи, дека за секој природен број k постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, ..., 2^n + 3^n - k$$

се сложени.

Решение. Нека k е даден природен број и да избереме природен број m таков што $2^m + 3^m - k > 1$. Од секој од броевите

$$2^m + 3^m - 1, 2^m + 3^m - 2, ..., 2^m + 3^m - k$$

избираме по еден прост делител $p_1, p_2, ..., p_k$, соодветно. Нека

$$n_t = m + t(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_k - 1)$$

каде t е произволен природен број. За секој $i, 1 \le i \le k$ ќе докажеме дека $2^{n_t} \equiv 2^m (\mathrm{mod}\, p_i)$. За $p_i = 2$ конгруенцијата е очигледна, а за $p_i \neq 2$ од малата теорема на Ферма следува

$$2^{n_t} \equiv 2^m 2^{t(p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1)} \equiv 2^m \cdot 1 \equiv 2^m (\mathrm{mod}\, p_i).$$

Аналогно се докажува дека $3^{n_t} \equiv 3^m (\mathrm{mod}\, p_i)$, па затоа

$$2^{n_t} + 3^{n_t} - i \equiv 2^m + 3^m - i (\mathrm{mod}\, p_i),$$

при што важи $2^{n_t} + 3^{n_t} - i > 2^m + 3^m - i$. Според тоа, $2^{n_t} + 3^{n_t} - i$ е сложен број. Според тоа, за $n = n_t$ броевите

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, ..., 2^n + 3^n - k$$

се сложени. Но, t е произволен број, па затоа постојат бесконечно многу такви броеви.

11. Определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и $n^3 - 1$ е делив со 2556.

Решение. Бидејќи $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$ имаме $n^3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71)$. Освен тоа, од малата теорема на Ферма следува $n^{70} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 71)$, па затоа

$$1 \equiv n \cdot n^{69} \equiv n(n^3)^{23} \equiv n (\mathrm{mod}\, 71) .$$

Според тоа, $71 | n-1$. Од $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ и фактот дека $n^2+n+1=n(n+1)+1$ е непарен број следува дека $4 | n-1$. Сега, ако $3 \nmid n-1$, тогаш $3 | n(n+1)$, па затоа $3 \nmid n(n+1)+1$, т.е. $3 \nmid n^3-1$, што е противречност. Од досега изнесеното следува дека $n-1$ се дели со 3, 4 и 71, па затоа важи $n=3\cdot 4\cdot 71k+1=852k+1$. Ќе докажеме дека бараниот број со најмал збир на цифрите е бројот $n=852\cdot 25+1=21301$. Бидејќи последната цифра на $852k$ не може да биде 9, доволно е да најдеме петцифрен природен број од видот $852k$ со најмал збир на цифри. Бидејќи тој број е делив со 3, потребно е збирот на цифрите да е делив со 3. Освен тоа, последните две цифри треба да формираат број кој е делив со 4. Ако збирот на цифрите е 3, тогаш единствена можност е тој број да е од видот $\overline{abc20}$, каде $a+b+c=1$, од што следува $a=1, b=c=0$. Но, 10020 не е делив со 71. Сега, ако збирот на цифрите е еднаков на 6, тогаш лесно следува дека бараниот број е 21301.

12. Определи ги сите прости броеви p, за кои p е делител на бројот $\sum_{n=1}^{103} n^{p-1}$.

Решение. Ако $p>103$, тогаш $(i,p)=1$ за $i\in\{1,2,...,103\}$. Од малата теорема на Ферма следува $\sum_{n=1}^{103} n^{p-1}\equiv 103(\bmod p)$. Според тоа, $p | 103$, што не е можно бидејќи $p>103$. Значи $p\leq 103$. Важи $n^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ кога $(n,p)=1$ и $n^{p-1}\equiv 0(\bmod p)$ кога $(n,p)=p$, т.е. $p | n$. Оттука следува

$$\sum_{n=1}^{103} n^{p-1}\equiv 1\cdot(103-[\tfrac{103}{p}])(\bmod p).$$

Бидејќи $p | \sum_{n=1}^{103} n^{p-1}$ добиваме дека p е непарен прост број за кој важи $103\equiv[\frac{103}{p}](\bmod p)$. Нека $103=pq+r$, каде $0\leq r\leq p-1$. Бидејќи $[\frac{103}{p}]=q$ следува дека $r\equiv q(\bmod q)$. Ќе разгледаме два случаја:

1) Ако $q<p$, тогаш од $r\equiv q(\bmod p)$ следува $r=q$. Значи $103=r(p+1)$, од каде следува $r=1$ и $p+1=103$, т.е. $p=102$. Но, 102 не е прост број.
2) Ако $q\geq p$ добиваме $103=pq+r\geq p^2$, т.е. $p\leq\sqrt{103}<11$. Со непосредна проверка се добива дека единствено решение е $p=3$.

13. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) такви што pq е делител на 5^p+5^q.

Решение. Ако некој од броевите p или q е еднаков на 2, на пример $p=2$, тогаш $q\,|\,5^q+5^2$ и $q\,|\,5^q-5$, па затоа $q\,|\,5^2+5=30$, од каде следува $q=2,3$ или 5. Со непосредна проверка се добива дека само $q=3$ и $q=5$ даваат решение на задачата. Аналогно, ако некој од броевите p или q е еднаков на 5, на пример $p=5$, тогаш $q\,|\,5^5+5=3130$, т.е. $q=2,5$ или 313, при што нови решенија се добиваат за $q=5$ и $q=313$.

Нека $(pq,10)=1$. Да означиме $p-1=2^k(2r-1)$ и $q-1=2^l(2s-1)$, каде k,r, l,s се природни броеви. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $k\le l$. Од условот следува дека $p\,|\,5^{p-1}+5^{q-1}$. Оттука и од малата теорема на Ферма следува $5^{q-1}\equiv -1(\bmod p)$, па затоа

$$5^{(q-1)(2r-1)}\equiv -1(\bmod p). \tag{1}$$

Од друга страна, ако конгруенцијата $5^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ ја квадрираме $l-k$ пати и потоа ја степенуваме на степрен $2s-1$, добиваме $5^{(q-1)(2s-1)}\equiv 1(\bmod p)$, што противречи на (1).

Конечно, сите решенија на задачата се (2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (5,2), (5,313) и (313,5).

14. Природните броеви a и b се такви што броевите $15a+16b$ и $16a-15b$ се точни квадрати на природни броеви. Определи ја минималната можна вредност на помалиот од тие квадрати.

Решение. Нека x и y се природни броеви такви што

$$15a+16b=x^2,\ 16a-15b=y^2.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}x^4+y^4&=(x^2)^2+(y^2)^2\\&=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2\\&=(15^2+16^2)(a^2+b^2)\\&=481(a^2+b^2).\end{aligned}$$

Бидејќи $481=13\cdot 37$ добиваме дека

$$x^4+y^4\equiv 0\ (\bmod 13),$$

$$x^4+y^4\equiv 0\ (\bmod 37).$$

Од последните равенства добиваме

$$\left.\begin{aligned}x^4&\equiv -y^4\ (\bmod 13)\\x^4&\equiv -y^4\ (\bmod 37)\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Нека претпоставиме дека $13 \nmid x$. Тогаш, бидејќи 13 е прост број добиваме дека $13 \nmid x^4$. Според (1) добиваме дека $13 \nmid y^4$, и повторно бидејќи 13 е прост број добиваме дека $13 \nmid y$. Бидејќи $13 \nmid x$ и $13 \nmid y$, од малата теорема на Ферма следува

$$\begin{aligned} x^{12} &\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,13) \\ y^{12} &\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,13) \end{aligned} \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) имаме

$$1 \equiv x^{12} = (x^4)^3 \equiv (-y^4)^3 \equiv -y^{12} \equiv -1\,(\mathrm{mod}\,13)\,.$$

Од добиената контрадикција, добиваме $13 | x$. Аналогно се добива $13 | y$.

Бидејќи 37 е прост број, исто како и претходно, добиваме $37 | x$ и $37 | y$. Сега од $13 | x$ и $37 | x$ добиваме дека $x \geq 13 \cdot 37 = 481$. Аналогно, од $13 | y$ и $37 | y$ добиваме $y \geq 13 \cdot 37 = 481$

За $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$ имаме:

$$\begin{aligned} 16a - 15b &= 16 \cdot 31 \cdot 481 - 15 \cdot 481 = 481(16 \cdot 31 - 15) \\ &= 481(496 - 15) = 481 \cdot 481 = 481^2. \end{aligned}$$

Според тоа, најмалиот квадрат е еднаков на 481^2.

15. Нека p и q се прости броеви такви што $q | N$ каде $N = \frac{a^p - 1}{a-1}$ за некој природен број a. Докажи, дека $p = q$ или $q \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Решение. а) Случајот кога $p = 2$, а q е непарен прост број е тривијален. Навистина, тогаш $q - 1$ е парен, па според тоа $q \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, т.е. $q \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Затоа ќе претпоставиме дека p и q се прости непарни броеви. Јасно,

$$N = a^{p-1} + a^{p-2} + ... + a + 1\,.$$

Бидејќи $q | N = \frac{a^p - 1}{a-1}$, добиваме $q | (a-1)N = a^p - 1$, па затоа

$$a^p - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,q)\text{, т.е. } a^p \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)\,.$$

Ќе разгледаме два случаи и тоа

i) $q | (a-1)$. Тогаш $a \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ и $a^i \equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, за $i = 0,1,2,..., p-1$. Значи, $N = \sum_{i=0}^{p-1} a^i \equiv p(\mathrm{mod}\,q)$, а бидејќи $N \equiv 0(\mathrm{mod}\,q)$ добиваме дека $p \equiv 0(\mathrm{mod}\,q)$.

Значи, $p | q$ и бидејќи p и q се прости броеви, добиваме дека $p = q$.

ii) $q \nmid (a-1)$. Тогаш $q | (a^{p-1} + a^{p-2} + ... + a + 1)$ и нека $(a,q) = d > 1$. Значи, $d | a$ и $d | q$, а бидејќи $d > 1$ и q е прост број, добиваме дека $d = q$. Бидејќи

$d\,|\,a$ добиваме $q\,|\,a$, односно постои природен број k таков што $a=qk$. Но тогаш

$$q\nmid[(qk)^{p-1}+(qk)^{p-2}+...+(qk)+1],$$

што противречи на претпоставката. Значи $(a,q)=d=1$.

Бидејќи q е прост број, од малата теорема на Ферма добиваме дека

$$a^{q-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ q).$$

Нека $s=(p,q-1)$. Јасно, $s=1$ или $s=p$. Ако $s=p$, тогаш $p\,|\,(q-1)$ па според тоа $q-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$, односно $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ q)$.

Ако $s=1$, тогаш постојат цели броеви x и y такви што $px+(q-1)y=1$ и притоа еден од броевите x и y мора да е негативен. Нека претпоставиме дека $y<0$. Тогаш

$$a^{px}\equiv 1^x(\mathrm{mod}\ q)\text{, т.е. } a^{px}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q),$$

и

$$a^{-y(q-1)}\equiv 1^{-y}(\mathrm{mod}\ q)\text{, т.е. } a^{-y(q-1)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q).$$

Затоа

$$a^{px}-a^{-y(q-1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ q),\ a^{-y(q-1)}[a^{px+y(q-1)}-1]\equiv 0(\mathrm{mod}\ q),$$

и од $(a,q)=1$ добиваме

$$a^{px+y(q-1)}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)\text{, т.е. } a-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ q),$$

што противречи на претпоставката.

16. Определи ги сите природни броеви k, за кои производот на првите k прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од еден) на природен број.

Решение. Нека $n\geq 2$ и $2=p_1<p_2<...<p_k$ се првите k прости броеви такви што $p_1p_2...p_k=a^n+1$. Ако $a=1$, тогаш $a^n+1=2$, па затоа $k=1$.

Нека сега $a>1$ и $k>1$. Бројот a е непарен, па затоа има непарен прост делител q. Очигледно $q>p_k$, па затоа и $a>p_k$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека n е прост број (ако $n=st$, можеме да го замениме n со t, а a со a^s). Освен тоа $n>2$, бидејќи a^2+1 не е делив со 3.

Ако $n>p_k$, тогаш $a^n+1>p_k^{p_k}>p_1p_2...p_k$, што не е можно.

Според тоа, $n\leq p_k$, т.е. $n=p_s$ за некој $s\in\{1,2,...,k\}$. Според условот важи $p_i\,|\,a^{p_i}+1$, а од малата теорема на Ферма следува $p_i\,|\,a^{p_i}-a$, па затоа $p_i\,|\,(a^{p_i}+1)-(a^{p_i}-a)=a+1$. Но, тогаш $a^{p_i}+1=(1+a)(1-a+...+a^{p_i-1})$ е делив со p_i^2, бидејќи $p_i\,|\,a+1$ и

$$1-a+...+a^{p_i-1}\equiv 1+1+...+1=p_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_i).$$

Според тоа, $p_1p_2...p_k=a^{p_i}+1$ е делив со p_i^2, што не е можно.

17. Определи ги сите природни броеви k за кои производот на првите k непарни прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од прв) на природен број.

Решение. Ќе докажеме дека такви природни броеви k не постојат. Нека $n\geq 2$ и $3=p_1<p_2<...<p_k$ се првите k непарни прости броеви. Нека претпоставиме дека

$$p_1p_2...p_k=a^n+1 \qquad (1)$$

за некој природен број a. Можни се два случаја.

Прв случај. Нека a е степен на бројот 2. Бидејќи степените на 2 при делење со 7 даваат остатоци 1, 2 и 4, а a^n+1 е делив со 7 кога $p_k\geq 7$, заклучуваме дека $k\leq 2$. Можни вредности се $3-1=2$ и $3\cdot 5-1=14$, но и двете не се точни степени на природен број.

Втор случај. Нека a има непарен прост делител q. Тогаш $q>p_k$, бидејќи во спротивен случај левата страна на (1) е делива со q, а десната страна на (1) не е делива со q. Значи, $a>p_k$.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека n е прост број, бидејќи ако $n=st$, тогаш можеме n да го замениме со t, а a да го замениме со a^s. Понатаму, $n>2$, бидејќи a^2+1 не е делив со $3=p_1$.

Ќе докажеме, дека $n>p_k$. Навистина, во спротивен случај имаме $n=p_i$, за некој $i\in\{1,2,...,k\}$. Тогаш $p_i\,|\,a^{p_i}+1$, а од малата теорема на Ферма следува дека $p_i\,|\,a^{p_i}-a$. Според тоа $p_i\,|\,(a^{p_i}+1)-(a^{p_i}-a)=a+1$. Но, тогаш

$$a^{p_i}+1=(1+a)(1-a+...+a^{p_i-1})$$

е делив со p_i^2, бидејќи $p_i\,|\,a+1$ и

$$1-a+...+a^{p_i-1}\equiv 1+1+...+1=p_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_i).$$

Според тоа, $p_1p_2...p_k=a^{p_i}+1$ е делив со p_i^2, што не е можно.

Добивме, дека $a>p_k$ и $n>p_k$, па затоа $a^n+1>p_k^{p_k}+1>p_1p_2...p_k$ што противречи на (1).

18. Нека p е прост број. Докажи, дека бројот $(2^{p-2}-1)^p(2^p-1)-2^{p(p-2)}+1$ е делив со p^3.

Решение. Да означиме $A(p)=(2^{p-2}-1)^p(2^p-1)-2^{p(p-2)}+1$. Од $A(2)=0$ следува дека $A(2)$ е делив со 2. Нека $p\geq 3$ е прост број. Ќе докажеме дека $2^p A(p)$ е делив со p^3, од што следува дека $A(p)$ е делив со p^3. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, што значи дека $2^{p-1}=kp+1$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$2^p A(p)=(2^{p-1}-2)^p(2^p-1)-2^{p(p-1)}+2^p=(pk-1)^p(2pk+1)-(pk+1)^p+2^p$$

Ако ја искористиме Њутновата биномна формула за $(pk-1)^p$ и $(pk+1)^p$ и фактот дека биномниот коефициент $\binom{p}{2}$ е делив со p, добиваме

$$\begin{aligned}2^p A(p)&\equiv(p^2k-1)(2pk+1)-(p^2k+1)+2^p\\&\equiv p^2k-2pk-1-p^2k-1+2^p\\&=2^p-2pk-2=0(\mathrm{mod}\, p^3)\end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

19. Докажи, дека последните цифри на броевите $n^{n^n}, n=1,2,3,\dots$ формираат периодична низа, најди го периодот и испитај дали е чист период.

Решение. Ако n е природен број, тогаш бројот

$$n^{n+20}-n^n=n^n(n^{20}-1)$$

е делив со 4. Навистина, ако n е парен, тогаш $4\,|\,n^n$, а ако n е непарен број тогаш n^{10} е непарен број, па значи неговиот квадрат n^{20} при делење со 8 дава остаток 1, т.е. $8\,|\,(n^{20}-1)$.

Според тоа, за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $n^{n+20}-n^n$ и бројот $(n+20)^{n+20}-n^n$ се деливи со 4.

Но, ако a и b се природни броеви, такви што $a>b$ и $4\,|\,a-b$, тогаш за природен број n имаме $5\,|\,n^a-n^b$. Навистина, $a=b+4k, k\in\mathbb{N}$, па затоа $n^a-n^b=n^b(n^{4k}-1)$. Ако $5\,|\,n$, тогаш првиот множител на десната страна е делив со 5, ако пак $5\nmid n$, тогаш од малата теорема на Ферма имаме $n^4\equiv 1(\mathrm{mod} 5)$, па е $n^{4k}\equiv 1(\mathrm{mod} 5)$, што значи вториот множител е делив со 5. Така, докажавме дека ако a и b се природни броеви, $a>b$ и $4\,|\,a-b$, тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $5\,|\,n^a-n^b$. Затоа $5\,|\,(n+20)^a-n^b$. За $a=(n+20)^{n+20}$ и $b=n^n$ добиваме $4\,|\,a-b$ и затоа $5\,|\,(n+20)^{(n+20)^{n+20}}-n^{n^n}$, а бидејќи

$(n+20)^{(n+20)^{n+20}}-n^{n^n}$ е парен број добиваме $10\,|\,(n+20)^{(n+20)^{n+20}}-n^{n^n}$, што значи n^{n^n} и $(n+20)^{(n+20)^{n+20}}$ имаат една иста последна цифра. Значи, низата составена од последните цифри на $n^{n^n}, n=1,2,3\dots$ е периодична, при што периодот е чист и содржи најмногу 20 цифри. Лесно се пресметува дека периодот содржи точно 20 членови и тоа $1,6,7,6,5,6,3,4,9,0,1,6,3,6,5,6,3,4,9,0.$

20. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со целобројни коефициенти, за кои $P(n)$ е делител на $2557^n+213\cdot 2015$ за секој природен број n.

Решение. Јасно, полиномите $P(x)\equiv 1$ и $P(x)\equiv -1$ се решенија на задачата. Ако $P\not\equiv 1, P\not\equiv -1$ и $P\not\equiv 0$, тогаш постои цел број n_0, таков што $|P(n_0)|>1$. Понатаму, ако q е прост делител на $P(n_0)$, тогаш q е делител на $2557^n+213\cdot 2015$, од каде следува дека q е непарен број и како 2557 е прост број добиваме дека $q\neq 2557$.

Од $P(n_0+q)\equiv P(n_0)\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$ и фактот дека $P(n_0+q)$ е делител на $2557^{n_0+q}+213\cdot 2015$ следува дека

$$2557^{n_0+q}+213\cdot 2015\equiv 2557^{n_0}+213\cdot 2015 (\mathrm{mod}\, q),$$

т.е.

$$2557^{n_0+q}\equiv 2557^{n_0} (\mathrm{mod}\, q).$$

Но, $(q,2557)=1$, па затоа $2557^q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, q)$. Сега од малата теорема на Ферма добиваме $1\equiv 2557^q\equiv 2557 (\mathrm{mod}\, q)$, што значи дека q е делител на $2556=2^2 3^2\cdot 71$. Според тоа, $q=3$ или $q=71$, па затоа q е делител на $213\cdot 2014$. Но, тоа значи дека q е делител на 2557^{n_0}, од каде заклучуваме $q=2557$, што е противречност.

Конечно, бараните полиноми се $P(x)\equiv 1$ и $P(x)\equiv -1$.

21. Нека p е непарен прост број. За секој цел број a нека

$$S_a=\tfrac{a}{1}+\tfrac{a^2}{2}+...+\tfrac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Нека m и n се цели броеви такви што $S_3+S_4-3S_2=\frac{m}{n}$. Докажи дека p е делител на m.

Решение. Нека $p=3$. Тогаш

$$S_2=\tfrac{2}{1}+\tfrac{2^2}{2}=4,\ S_3=\tfrac{3}{1}+\tfrac{3^2}{2}=\tfrac{15}{2},\ S_4=\tfrac{4}{1}+\tfrac{4^2}{2}=12.$$

Оттука $S_3+S_4-3S_2=\frac{15}{2}$. Значи $m=15$ и $3|15$.

Сега нека $p\geq 5$. Имаме:

$$S_a=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{a^k}{k}=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-a)^k(-1)^k}{k}=-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-a)^k(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ќе докажеме дека $(-1)^{k-1}\equiv\frac{k}{p}\binom{p}{k}(\operatorname{mod}p)$. Од $p|\binom{p}{k}$ следува дека $\frac{k}{p}\binom{p}{k}$ е природен број. Според тоа,

$$\frac{k}{p}\binom{p}{k}=\frac{(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{(k-1)!}\equiv\frac{(-1)\cdot(-2)...(-k+1)}{(k-1)!}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(k-1)!}=(-1)^{k-1}(\operatorname{mod}p).$$

Значи,

$$\begin{aligned}S_a&=-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-a)^k(-1)^{k-1}}{k}\equiv-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-a)^k}{k}\cdot\frac{k}{p}\binom{p}{k}=-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}(-a)^k\\&=-\frac{1}{p}\Big(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-a)^k-1-(-a)^p\Big)=-\frac{1}{p}((1-a)^p-1-(-a)^p)\\&=\frac{(a-1)^p-a^p+1}{p}(\operatorname{mod}p)\end{aligned}$$

па затоа

$$S_3+S_4-3S_2\equiv\frac{(2^p-3^p+1)+(3^p-4^p+1)-3(1^p-2^p+1)}{p}=\frac{4\cdot2^p-4^p-4}{p}=-\frac{(2^p-2)^2}{p}(\operatorname{mod}p).$$

Од малата теорема на Ферма следува $2^p\equiv2(\operatorname{mod}p)$, т.е. $p\,|\,2^p-2$. Значи, $p^2\,|\,(2^p-2)^2$, т.е. $p\,|\,\frac{(2^p-2)^2}{p}$. Конечно, $p\,|\,S_3+S_4-3S_2$.

22. Нека a е најголемиот позитивен корен на равенката $x^3-3x^2+1=0$. Докажи дека $[a^{1788}]$ и $[a^{1988}]$ се деливи со 17.

Решение. Бидејќи $17\,|\,34x$ и $17\,|\,119$ имаме

$$x^3-3x^2+1\equiv x^3-3x^2-34x+120(\operatorname{mod}17).$$

Понатаму, бидејќи $x^3-3x^2-34x+120=(x-4)(x-5)(x+6)$, добиваме

$$x^3-3x^2+1\equiv(x-4)(x-5)(x+6)(\operatorname{mod}17).$$

Нека $a,b,c\ (a>b>c)$ се корените на равенката $x^3-3x^2+1=0$. Имаме,

$$-0,6<c<-0,5;\ 0,6<b<0,7 \text{ и } \sqrt{8}<a<3.$$

Од Виетовите правила за равенката $x^3-3x^2+1=0$ имаме

$$a+b+c=3,\ ab+bc+ca=0,\ abc=1.$$

Дефинираме низа $k_n=a^n+b^n+c^n$, $n=0,1,2,...$. Имаме

$$k_{n+3}=a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}=(a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})-$$
$$-(ab+bc+ca)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})+abc(a^{n}+b^{n}+c^{n})$$
$$=3k_{n+2}-k_n.$$

Бидејќи

$$k_0=3, k_1=a+b+c=3, k_2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)=9 \text{ и}$$
$$k_{n+3}=3k_{n+2}-k_n \text{ за } n\ge 0,$$

следува дека $\{k_n\}$ е низа природни броеви. Јасно, $0<b^n+c^n<1$, за секој $n\ge 2$, па оттука $[a^n]=[k_n-b^n-c^n]=k_n-1$. Од

$$x^3-3x^2+1\equiv(x-4)(x-5)(x+6)(\text{mod}17)$$

следува

$$a^n+b^n+c^n\equiv 4^n+5^n+(-6)^n(\text{mod}17).$$

Значи,

$$[a^n]=k_n-1=a_n+b^n+c^n-1\equiv 4^n+5^n+(-6)^n-1(\text{mod}17).$$

Останува да докажеме дека

$$17\,|\,4^{1788}+5^{1788}+(-6)^{1788}-1 \text{ и } 17\,|\,4^{1988}+5^{1988}+(-6)^{1988}-1.$$

Од малата теорема на Ферма имаме

$$4^{16k}\equiv 5^{16k}\equiv(-6)^{16k}\equiv 1(\text{mod}17),$$

па затоа

$$4^{1788}+5^{1788}+(-6)^{1788}-1=4^{16\cdot 111}\cdot 4^{12}+5^{16\cdot 111}\cdot 5^{12}+(-6)^{16\cdot 111}\cdot(-6)^{12}-1$$
$$\equiv 4^{12}+5^{12}+(-6)^{12}-1\equiv 1+4+13-1\equiv 0(\text{mod}17).$$

Аналогно се докажува дека

$$4^{1988}+5^{1988}+(-6)^{1988}-1\equiv 0(\text{mod}17).$$

23. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) такви што 3^a+7^b е точен квадрат на природен број.

Решение. Ако еден од броевите a или b е негативен, тогаш 3^a+7^b е збир од природен број и број помал од еден, па не е точен квадрат на природен број. Ако $a<0$ и $b<0$, тогаш $3^a+7^b\le\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$, па не е точен квадрат на природен број. Значи, $a,b\ge 0$.

Нека $3^a+7^b=n^2$, каде $n\in\mathbb{N}$. Равенката ја разгледуваме по модул 4 и добивам $n^2\equiv(-1)^a+(-1)^b(\text{mod}\,4)$. За секој природен број n важи $n^2\equiv 0$ или $1(\text{mod}\,4)$, па затоа броевите a и b имаат различна парност.

1) Нека a е парен број, b е непарен број.

Од $a=2k, k\in\mathbb{N}$ следува $7^b=(n-3^k)(n+3^k)$ и затоа постојат $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ такви што $n-3^k=7^{k_1}, n+3^k=7^{k_2}$, за кои важи $k_1<k_2$ и $k_1+k_2=b$. Спорд тоа, $2\cdot 3^k=7^{k_1}(7^{k_2-k_1}-1)$. Бидејќи $2\cdot 3^k$ не е делив со 7 следува дека $k_1=0,\ k_2=b$. Оттука $n-3^k=7^0$, т.е. $n=3^k+1$. Добиваме

$$3^{2k}+7^b=(3^k+1)^2=3^{2k}+2\cdot 3^k+1 \text{, т.е. } 7^b-1=2\cdot 3^k.$$

Според тоа,

$$(7-1)(7^{b-1}+7^{b-2}+...+7+1)=2\cdot 3^k \text{, т.е. } 7^{b-1}+7^{b-2}+...+7+1=3^{k-1}.$$

Ако $k=1$, тогаш $a=2k=2, b=1,$ т.е. парот $(2,1)$ е едно решение.

Ако $k\geq 2$, тогаш $b\geq 2$ и важи $3\,|\,7^{b-1}+7^{b-2}+...+7+1$. Од друга страна е исполнето

$$7^{b-1}+7^{b-2}+...+7+1\equiv 1+1+...+1\equiv b(\bmod 3).$$

Значи $b=3c,$ за некој природен број $c.$ Така, ја добиваме равенката $7^{3c}-1=2\cdot 3^k$, која е еквивалентна со равенката

$$(7^c-1)(7^{2c}+7^c+1)=2\cdot 3^k \qquad (1).$$

Јасно, $7^c-1\equiv 1-1\equiv 0(\bmod 6)$, т.е. $\frac{7^c-1}{6}\in\mathbb{N}$ и $7^{2c}+7^c+1\equiv 0(\bmod 3)$, т.е. $\frac{7^{2c}+7^c+1}{3}\in\mathbb{N}$. Од (1) следува

$$\frac{7^c-1}{6}\cdot\frac{7^{2c}+7^c+1}{3}=3^{k-2}. \qquad (2)$$

Ако $7^c-1=6d$, тогаш важи $\frac{7^{2c}+7^c+1}{3}=12d^2+6d+1$. Оттука

$$(\frac{7^c-1}{6},\frac{7^{2c}+7^c+1}{3})=(d,12d^2+6d+1)=1.$$

Од (2) следува дека $\frac{7^c-1}{6}=1,$ т.е. $c=1$ и $b=3c=3$. Конечно, имаме $3^k=\frac{7^{3c}-1}{2}=\frac{7^3-1}{2}=171$, од каде следува дека k не е природен број.

2) Нека a е непарен и b е парен број. Сега $b=2k, k\in\mathbb{N}$, па затоа важи

$$3^a=n^2-7^{2k}=(n-7^k)(n+7^k) \qquad (3)$$

Постојат природни броеви $k_1,k_2,(k_1<k_2)$ за кои важи $n-7^k=3^{k_1}$ и $n+7^k=3^{k_2}$ и притоа $k_1+k_2=a$. Имаме $2\cdot 7^k=3^{k_1}(3^{k_2-k_1}-1)$ и бидејќи $2\cdot 7^k$ не е делив со 3, следува дека $k_1=0$, од каде следува $k_2=a$. Важи $n=7^k+3^{k_1}=7^k+1.$ Заменуваме во (3) и добиваме $3^a=2\cdot 7^k+1.$ Јасно, $3^a\equiv 1(\bmod 7)$ и како според малата теорема на Ферма важи $3^6\equiv 1(\bmod 7)$,

добиваме дека $a=6s,\ s\in\mathbb{N}$. Последното не е можно бидејќи a е непарен број. Останува $k=0$ од каде добиваме $a=1, n=2$ и $b=0$.

Значи паровите $(2,1)$ и $(1,0)$ се единствените парови цели броеви за кои 3^a+7^b е точен квадрат на природен број.

24. Определи ги сите природни броеви $n>1$ за кои постои единствен цел број a таков што $0<a<n!$ и $n!\,|\,a^n+1$.

Решение. Ќе докажеме дека n е прост број. Ако $n=2$, тогаш $a=1$.

Нека $n>2$ е парен број. Важи $a^n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,4)$ и $4\,|\,n!$. Од $a^n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4)$ и $4\,|\,n!\,|\,a^n+1$ добиваме противречност. Нека n е непарен сложен број. За бројот $a=n!-1$ важи $0<a<n!$ и $n!\,|\,a^n+1$. Навистина,

$$a^n+1=(n!-1)^n+1\equiv(-1)^n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,n!).$$

Бидејќи n е сложен број постои прост делител p на n. Јасно, $0<\frac{n!}{p}-1<n!$.

Ќе докажеме дека $n!\,|\,(\frac{n!}{p}-1)^n+1$. Имаме

$$(\tfrac{n!}{p}-1)^n+1=(\tfrac{n!}{p})^n-\binom{n}{1}(\tfrac{n!}{p})^{n-1}+\binom{n}{2}(\tfrac{n!}{p})^{n-2}-...+\binom{n}{n-1}\tfrac{n!}{p}\,. \qquad (1)$$

Секој собирок во (1) е делив со $n!$, па затоа $n!\,|\,(\frac{n!}{p}-1)^n+1$. Значи, за секој непарен сложен број n постојат барем два природни броеви $a_1=n!-1$ и $a_2=\frac{n!}{p}-1$ за кои важи $0<a_i<n!$ и $n!\,|\,a_i^n+1$, за $i=1,2$.

Ако n е прост број ќе докажеме дека $a=n!-1$ е единствен број за кој се исполнети условите на задачата.

Ќе докажеме дека ако n е непарен прост број за кој $n!\,|\,a^n+1$, тогаш $n!\,|\,a+1$, од каде ќе следува дека $a=n!-1$ е единствен цел број за кој важи $0<a<n!$ и $n!\,|\,a^n+1$.

Нека $p\le n$ е прост број за кој важи $p\,|\,\frac{a^n+1}{a+1}$. Јасно $a^n\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$, па затоа

$$(-a)^n\equiv(-1)^n a^n\equiv(-1)^n(-1)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p),$$

т.е. $p\,|\,(-a)^n-1$. Јасно, $(-a,p)=1$, па од малата теорема на Ферма следува $p\,|\,(-a)^{p-1}-1$. Според тоа, $p\,|\,(-a)^{(n,p-1)}-1$, т.е. $p\,|\,-a-1$. Значи

$$a\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)\,. \qquad (1)$$

Важи

$$\frac{a^n+1}{a+1}=a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1\equiv n\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

па следува $n = p$. Бидејќи n е единствен прост број за кој $n \mid \frac{a^n+1}{a+1}$ следува дека $(\frac{a^n+1}{a+1},(n-1)!)=1$. Од $n! \mid a^n+1$ следува $(n-1)!n \mid \frac{a^n+1}{a+1}(a+1)$, па затоа $(n-1)! \mid a+1$. Од (1) добиваме дека $n \mid a+1$. Бидејќи $(n-1)!$ и n се заемно прости броеви следува дека $n! = (n-1)!n \mid a+1$, што и требаше да се докаже.

25. Докажи, дека за секои два природни броја m и n постојат бесконечно многу парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на $am^a + bn^b$.

Решение. Ако $m = n = 1$, тогаш условот е исполнет за секои два заемно прости броја a и b. Кога $mn \geq 2$ од

$$n^a(am^a + bn^b) = (a+b)n^{a+b} + a((mn)^a - n^{a+b}),$$

следува дека доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу парови заемно прости броеви a и b, за кои $a+b$ е делител на $(mn)^a - n^{a+b}$ и $(a+b,n)=1$.

Да земеме, дека $p = a+b$ е прост број. Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу парови (p,a), $1 \leq a \leq p-1$, за кои p е делител на $(mn)^a - n^p$.

Од малата теорема на Ферма следува, ако $a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\, p-1)$, $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1$, тогаш

$$(mn)^{a_1} \equiv (mn)^{a_2} (\mathrm{mod}\, p).$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу прости броеви p и природни броеви a, за кои p е делител на $(mn)^a - n$.

Да претпоставиме, дека постојат само конечно многу прости броеви $p_1, p_2, ..., p_r$ кои се делители на броевите од видот $(mn)^a - n$. Тогаш

$$(mn)^2 - n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}, \qquad (1)$$

каде α_i се ненегативни цели броеви. Исто така за

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_r - 1) + 2$$

имаме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r}, \qquad (2)$$

каде β_i се ненегативни цели броеви.

Ако p_i е делител на n, тогаш од (2) и $a > 2$ следува, дека $p_i^{\beta_i}$ е делител на n и затоа $p_i^{\beta_i}$ е делител на $(mn)^2 - n$. Сега од (1) следува дека $\beta_i \leq \alpha_i$.

Ако p_i не е делител на n, тогаш p_i не е делител и на m. Тогаш $(p_i^{\alpha_i+1}, mn) = 1$ и бидејќи $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})$ е делител на $a-2$, од теоремата на Ојлер следува, дека

$$(mn)^a - n \equiv (mn)^2 - n (\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i+1}).$$

Бидејќи $p_i^{\alpha_i+1}$ не е делител на $(mn)^2 - n$, претходната конгруенција означува дека $p_i^{\alpha_i+1}$ не е делител на $(mn)^a - n$. Според тоа, $\alpha_i \le \beta_i$, од каде добиваме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r} \le p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} = (mn)^2 - n,$$

што противречи на $a > 2$. Значи, постојат бесконечно многу прости броеви p и природни броеви a, за кои p е делител на $(mn)^a - n$.

26. За природниот број n ќе велиме дека е *специјален* ако постојат природни броеви a,b,c и d такви што $n = \frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.

б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

Решение. а) Ако земеме $a = nc, b = nd$ добиваме дека $\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3} = n^3 \frac{c^3+2d^3}{c^3+2d^3} = n^3$, што значи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.

б) *Прв начин*. Да забележиме дека $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Ако 2014 е специјален број, тогаш

$$x^3 + 2y^3 = 2014(u^3 + 2v^3) \tag{1}$$

за некои природни броеви x, y, u, v. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за така избраните вредности x, y, u, v вредноста на изразот $x^3 + 2y^3$ е најмала можна. Сега $19 | x^3 + 2y^3$. Ќе докажеме дека $19 | x$ и $19 | y$. Ако претпоставиме дека $19 | x$, тогаш очигледно $19 | y$ и обратно. Затоа нека претпоставиме дека $19 \nmid x$ и $19 \nmid y$. Тогаш од $x^3 \equiv -2y^3 (\mathrm{mod} 19)$ следува дека $(x^3)^6 \equiv (-2y^3)^6 (\mathrm{mod} 19)$, т.е. $x^{18} \equiv 2^6 y^{18} (\mathrm{mod} 19)$ и од малата теорема на Ферма следува дека $1 \equiv 2^6 (\mathrm{mod} 19)$ што е противречност.

Според тоа, $x = 19x_1, y = 19y_1$ за некои природни броеви x_1, y_1. Заменуваме во (1) и добиваме

$$19^2(x_1^3 + 2y_1^3) = 2 \cdot 53(u^3 + 2v^3), \tag{2}$$

т.е. $19 | u^3 + 2v^3$, од каде следува дека $u = 19u_1, v = 19v_1$ за некои природни броеви u_1, v_1. Заменуваме во (2) и добиваме

$$(x_1^3+2y_1^3)=2014(u_1^3+2v_1^3).$$

Бидејќи $x_1^3+2y_1^3<x^3+2y^3$, последното противречи со минималноста на x^3+2y^3. Затоа 2014 не е специјален број.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $2014=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$, за некои природни броеви a,b,c и d, т.е. дека $a^3+2b^3=2\cdot 19\cdot 53(c^3+2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $(a,b,c,d)=1$. Имаме $x^3\equiv 0,\pm 1,\pm 7,\pm 8(\mathrm{mod}19)$, па затоа $a^3+2b^3\equiv 0(\mathrm{mod}19)$ ако и само ако $19\,|\,a,b$. Но, тогаш од $19^3\,|\,a^3+2b^3$ следува дека $19^2\,|\,c^3+2d^3$, од каде следува $19\,|\,c,d$, што противречи на $(a,b,c,d)=1$.

27. а) Докажи дека за секој природен број $a\geq 3$ постојат бесконечно многу природни броеви n за кои $n\,|\,(a^n-1)$.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои $n\,|\,(2^n-1)$.

в) Нека $k\geq 2$ и нека $n_1,n_2,...,n_k$ се природни броеви такви што

$$n_{i+1}\,|\,(2^{n_i}-1),$$

за секој $1\leq i\leq k-1$ и $n_1\,|\,(2^{n_k}-1)$. Докажи дека $n_1=n_2=...=n_k=1$.

Решение. а) Нека претпоставиме дека природниот број n е делител на бројот $m=a^n-1$. Тогаш $m=nk$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа

$$a^m-1=(a^n)^k-1=(a^n-1)(a^{n(k-1)}+...+a^n+1).$$

Според тоа, $m\,|\,(a^m-1)$. Затоа, ако дефинираме низа

$$n_1=1,\quad n_{r+1}=a^{n_r}-1,\,(r\geq 1),$$

тогаш од претодните разгледувања непосредно следува дека секој член на оваа низа го има саканото својство. Останува уште да забележиме дека заради $a\geq 3$ разгледуваната низа е строго монотоно растечка, т.е. сите нејзини членови се различни.

б) Очигледно $n=1$ го задоволува бараниот услов. Да претпоставиме дека постои $n\geq 2$ кој го задоволува наведениот услов. Нека q_n е најмалиот прост делител на бројот n. Ќе докажеме дека важи: ако $n>1$ и $p\,|\,(2^n-1)$, тогаш $p>q_n$. Оттука ќе следува дека не постои $n\geq 2$ таков што $n\,|\,(2^n-1)$, бидејќи во спротивно ќе важи $q_n\,|\,(2^n-1)$, што е противречност.

Прво да забележиме дека ако за природните броеви a и b важи

$$2^a \equiv 2^b \equiv 1(\mathrm{mod}\, p),$$

тогаш

$$2^{(a,b)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p). \qquad (1)$$

Навистина, ако $a \geq b$ и $a = qb + r$, тогаш важи

$$2^r \equiv (2^b)^q 2^r = 2^a \equiv 1(\mathrm{mod}\, p).$$

Сега, ако Евклидовиот алгоритам го примениме на степените го добиваме равенството (1). Според малата теорема на Ферма имаме $2^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, па за $d = (n, p-1)$ имаме $2^d \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Затоа $d > 1$, па важи $d \geq q_n$. Од друга страна, $d \mid p-1$, што повлекува $p > d \geq q_n$.

Конечно, од горните разгледувања следува дека $n = 1$ е единствено решение.

в) Да претпоставиме $n_1 > 1$. Тогаш последователно $n_k > 1, ..., n_2 > 1$. Нека q_n како и под б) го означува најмалиот прост делител на бројот n. Од условот на задачата следува

$$q_{n_2} \mid 2^{n_1} - 1,$$

па ако го искористиме тврдењето од решението б), дека од $p \mid (2^n - 1)$ следува $p > q_n$, добиваме дека $q_{n_1} < q_{n_2}$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме

$$q_{n_1} < q_{n_2} < ... < q_{n_k} < q_{n_1},$$

што е противречност.

28. Определи ги сите природни броеви n, $n > 1$, такви што $\frac{2^n+1}{n^2} \in \mathbb{N}$.

Решение. Јасно бројот 3 е решение на задачата. Ќе докажеме дека тој е единствено решение. Нека $n = 3^k d$, каде $k \geq 0, (d,3) = 1$ е решение, т.е. $(3^k d)^2 \mid (2^{3^k d} + 1)$, при што d е непарен број. Ќе го користиме идентитетот

$$x^{3^k} + 1 = (x+1) \prod_{i=0}^{k-1} (x^{2\cdot 3^i} - x^{3^i} + 1),$$

кој се докажува со едноставна математичка индукција. За $x = 2^d$ имаме:

$$2^{3^k d} + 1 = (2^d + 1) \prod_{m=0}^{k-1} (2^{2\cdot 3^m d} - 2^{3^m d} + 1) \qquad (1)$$

Ако t е непарен број, тогаш

$$2^{2t} - 2^t + 1 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 9), \qquad (2)$$

што лесно се докажува со индукција по t. Заменуваме $t = 3^m d$ и добиваме:

$$3^k \mid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \quad \text{и} \quad 3^{k+1} \nmid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1).$$

Но, 3^{2k} треба да се содржи во десната страна на (1), а тоа е еквивалентно со $3^k \mid (2^d+1)$. Бидејќи d е непарен број, $3 \mid (2^d+1)$, но $9 \nmid (2^d+1)$, (имено, $9 \mid (2^d+1)$ ако и само ако $d=3+6r$ што не е можно, бидејќи $(d,3)=1$). Затоа

$$3^{k+1} \mid (2^{3^k d}+1), \quad \text{но} \quad 3^{k+2} \nmid (2^{3^k d}+1).$$

Бидејќи $(3^k)^2$ е делител на $2^{3^k d}+1$, следува дека $k+1 \geq 2k$, т.е. $k=0$ или $k=1$. Ќе докажеме дека $d=1$, од што непосредно ќе следува дека $k=1$ и $n=3$.

Нека $d>1$ и p е најмалиот прост делител на d. Бројот d е непарен и $(d,3)=1$, па затоа $p \geq 5$, $p \mid (2^n+1)$, што значи $2^n \equiv -1 \pmod p$, односно $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Понатаму, со помош на Евклидовиот алгоритам може да се докаже дека ако $j=(2n,p-1)$, тогаш $2^j \equiv 1 \pmod p$. Бројот j е делив со 2 бидејќи $2n$ и p се парни броеви, но не е делив со 4 бидејќи n е непарен број. Исто така j може да е делив со 3, но не и со 9, бидејќи $2n$ не е делив со 9. Освен тоа ако се има предвид дека $\frac{j}{2} \mid d$ и $\frac{j}{2} \mid p-1$, а p е најмалиот прост делител на d, добиваме дека j може да биде 2 или 6. Бидејќи $p \mid (2^j-1)$, следува дека p е делител на еден од броевите 3 или 63. Бидејќи $p \geq 5$, добиваме $p=7$. Но бројот 7 не е делител на бројот 2^m+1, за ниту еден цел број m, што противречи на претпоставката $p \mid (2^n+1)$.

Според тоа, единствената можност за $n=3^k d$ е $k=1$ и $d=1$, т.е. $n=3$.

29. За секој природен број n со канонично претставување $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_t^{a_t}$ ставаме $\omega(n)=t, \Omega(n)=a_1+a_2+...+a_t$. Докажи го или оповргни го следново тврдење: За дадени произволен природен број k и произволни позитивни реални броеви α и β постои природен број n, за кој

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha, \ \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta.$$

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето е точно. Од дефиницијата на ω и Ω следува, дека за секои природни броеви a и b важи:

$$\omega(ab) \leq \omega(a)+\omega(b), \tag{1}$$

$$\Omega(ab)=\Omega(a)+\Omega(b)\,. \tag{2}$$

За дадени природен број k и позитивни реални броеви α и β избираме природен број $m>(\omega(k)+1)\alpha$. Можеме да избереме доволно голем прост број p таков што $\frac{\Omega(k)+1}{p^m}+\log_p 2<\beta$ и m различни прости броеви $q_1,q_2,...,q_m$ секој од кои е поголем од p. Ќе докажеме дека бројот $n=2^{q_1q_2...q_m}k$ го има саканото својство.

Прво ќе докажеме дека $\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)}>\alpha$. Бидејќи $q_1,q_2,...,q_m$ се непарни прости броеви, добиваме дека за $n_1=\frac{n+k}{k}=2^{q_1q_2...q_m}+1$ важи $2^{q_1}\,|\,n_1$ и $d_i=\frac{2^{q_i}+1}{3}$ е природен број. Познато е дека за произволни природни броеви r и s важи

$$(2^r-1,2^s-1)=2^{(r,s)}-1. \tag{3}$$

Бидејќи $(q_i,q_j)=1,$ за $i\neq j$, добиваме

$$\begin{aligned}(d_i,d_j)&=\tfrac{1}{3}\cdot(2^{q_i}+1,2^{q_j}+1)\\ &\leq\tfrac{1}{3}\cdot(2^{2q_i}-1,2^{2q_j}-1)\\ &=\frac{2^{\text{NZD}(2q_i,2q_j)}}{2}=\frac{2^2-1}{3}=1.\end{aligned}$$

Значи, $d_1,d_2,...,d_m$ се различни заемно прости делители на n_1, па затоа $\omega(n_1)\geq m$. Од (1) и од изборот на m сега добиваме

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)}\geq\frac{\omega(n_1)}{\omega(n)}\geq\frac{\omega(n_1)}{\omega(k)+1}\geq\frac{m}{\omega(k)+1}>\alpha\,.$$

Останува да докажеме дека $\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)}<\beta$. Бидејќи $q_1q_2...q_m$ е непарен и не е делив со 3, важи $n_1=2^{q_1q_2...q_m}+1\equiv\pm3(\text{mod}\,9)$, т.е. $3\,|\,n_1$. Да претпоставиме дека q е прост делител на $\frac{n_1}{3}$ и $q\leq p$. Тогаш

$$2^{2q_1q_2...q_m}-1=(2^{q_1q_2...q_m}-1)n_1\equiv0(\text{mod}\,q)\,.$$

Од малата теорема на Ферма следува

$$2^{q-1}\equiv1(\text{mod}\,q)$$

и од (3) имаме $3\,|\,2^{2q_1q_2...q_m}-1$. Бидејќи $(q-1,2q_1q_2...q_m)=(q-1,2)=2$ и

$$q-1<p<q_i,\ i=1,2,...,m$$

следува, дека $q\,|\,2^2-1=3$, т.е. $q=3$. Последното противречи на $3\,|\,n_1$ и следствено секој прост делител на $\frac{n_1}{3}$ е поголем од p. Тогаш $\frac{n_1}{3}\geq p^{\Omega(\frac{n_1}{3})}$ и од (2) и од изборот на $p,q_1,q_2,...,q_m$ имаме

$$\begin{aligned}\Omega(n+k) &= \Omega(k)+\Omega(3)+\Omega(\tfrac{n_1}{3}) \\ &< \Omega(k)+1+\log_p \tfrac{n_1}{3} \\ &< \Omega(k)+1+\log_p(n_1-1) \\ &= \Omega(k)+1+q_1q_2...q_m \log_p 2.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \frac{\Omega(k)+1+q_1q_2...q_m \log_p 2}{q_1q_2...q_m} < \frac{\Omega(k)+1}{p^m} + \log_p 2 < \beta .$$

30. Определи ги сите непарни прости броеви p кои се делители на збирот

$$1^{p-1}+2^{p-1}+...+2004^{p-1}.$$

Решение. Имаме, ако $p\,|\,k$, тогаш $k^{p-1}\equiv 0(\operatorname{mod} p)$ и ако $p \nmid k$, тогаш од малата теорема на Ферма следува $k^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)$. Според тоа,

$$0\equiv 1^{p-1}+2^{p-1}+...+2004^{p-1}\equiv 0\cdot[\tfrac{2004}{p}]+1\cdot(2004-[\tfrac{2004}{p}])(\operatorname{mod} p),$$

од што следува

$$2004\equiv[\tfrac{2004}{p}](\operatorname{mod} p) \qquad (1)$$

(во случајов, $po<2004$). Нека $2004=qp+r,\ 0\le r<p$. Тогаш

$$[\tfrac{2004}{p}]=[q+\tfrac{r}{p}]=q$$

и (1) е еквивалентна на $r\equiv q(\operatorname{mod} p)$.

За $q<p$, од последната конгруенција добиваме $r=q$, од каде следува

$$2004=(p+1)q\le p^2-1,$$

и затоа $p\ge 47$. Бидејќи $p+1$ е делител на $2004=3\cdot 4\cdot 167$ добиваме дека $p=2003$ е решение на задачата.

За $q\ge p$, добиваме $2004\ge pq\ge p^2$, т.е. $p\le 43$. Со директна проверка на (1) се покажува дека во овој случај $p=17$ е еднинствено решение на задачата.

31. Докажи, дека за секој цел број $k\ne 1$ постојат бесконечно многу природни броеви n за кои бројот $2^{2^n}+k$ е сложен.

Решение. Нека a е произволен природен број и k е цел број различен од 1. Нека $k-1=2^s h$, каде 2^s е највисокиот степен на бројот 2 кој го дели $k-1$ и h е непарен број, позитивен или негативен. Избираме природен број m таков што $2^{2^m}>a-k$ и нека l е природен број, таков што $l\ge s$ и $l\ge m$. Ако бројот $2^{2^l}+k\ge 2^{2^m}+k>a$ е сложен тогаш имаме сложен број од зададениот облик поголем од a. Да претпоставиме дека бројот $p=2^{2^l}+k$ е прост. Бидејќи $l\ge s$ и $k-1=2^s h$ добиваме $p-1=2^{2^l}+k-1=2^s h_1$, каде h_1 е непарен позитивен број.

Од теоремата на Ојлер имаме

$$2^{\varphi(h_1)}\equiv 1(\bmod h_1)$$

и значи

$$2^{s+\varphi(h_1)}\equiv 2^s(\bmod p-1),$$

па бидејќи $l\ge s$ добиваме

$$2^{l+\varphi(h_1)}\equiv 2^l(\bmod p-1).$$

Понатаму од малата теорема на Ферма следува

$$2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k\equiv 2^{2^l}+k\equiv 0(\bmod p)$$

и бидејќи $2^{l+\varphi(h_1)}>2^l$, важи

$$2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k>2^{2^l}+k=p$$

и бројот $2^{2^{l+\varphi(h_1)}}+k$ е сложен број поголем од a, бидејќи

$$p=2^{2^l}+k\ge 2^{2^m}+k>a.$$

32. Определи ги сите парови (a,b) од природни броеви со следново својство: постои природен број $d\ge 2$ таков што a^n+b^n+1 е делив со d за секој природен број n.

Решение. Нека (a,b) е пар кој е делив со некое d. Нека p е прост делител на d (постои такво p, бидејќи $d\ge 2$). Бидејќи $d\,|\,a^n+b^n+1$ за секој n, важи $p\,|\,a^n+b^n+1$ за секој n. Нека $n=p-1$. Тогаш $a^n\equiv 0\ (\bmod p)$ ако $p\,|\,a$ и $a^n\equiv 1\ (\bmod p)$ ако $p\nmid a$ (мала теорема на Ферма). Аналогно важи и за b. Тогаш a^n+b^n+1 може да ги прими вредностите 1, 2, 3 по модул p. Од друга страна, a^n+b^n+1 мора да биде деливо со p, па мора $p=2$ или $p=3$. Ги разгледуваме двата случаја:

Случај 1. Нека $p=3$. Тогаш $3\nmid a$ и $3\nmid b$. Од случајот $n=1$ имаме дека $3\,|\,a+b+1$, па $a+b\equiv 2(\bmod 3)$. Ова заедно со $3\nmid a$ и $3\nmid b$ е еквивалентно со $a\equiv b\equiv 1(\bmod 3)$. Во овој случај, ова е точно за сите природни броеви n, па имаме $a^n+b^n+1\equiv 1+1+1\equiv 0(\bmod 3)$, па таков пар го задоволува условот на задачата, каде $d=3$.

Случај 2. Нека $p=2$. Тогаш 2 мора да биде делител на точно еден од броевите a и b. Во овој случај имаме дека за сите природни броеви n, важи $a^n+b^n+1\equiv 0+1+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, па таков пар го задоволува условот на задачата, каде $d=2$.

Значи сите парови кои го имаат својството на задачата се: (a,b) каде $a\equiv b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, $d=3$, (a,b) каде $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $b\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ и (a,b) каде $a\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ и $b\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$.

33. Ако $p>2$ епрост број и a е цел број кој не е делив со p, тогаш еден и само еден од броевите

$$A=a^{1+2+...+(p-1)}+1 \text{ и } B=a^{1+2+...+(p-1)}-1$$

е делив со p. Докажи!

Решение. Важи $A-B=2$ и $AB=(a^p)^{p-1}-1$. Бидејќи бројот $A-B$ не е делив со $p>2$, заклучуваме дека двата броја A и B не се деливи со p. Но, од малата теорема на Ферма следува дека бројот $AB=(a^p)^{p-1}-1$ е делив со p, па затоа еден и само еден од броевите A и B е делив со p.

15. ТЕОРЕМА НА ВИЛСОН

1. а) Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $2002!+1$ и $2003!$.
   б) Докажи дека броевите $2003!+1$ и $2004!$ се заемно прости.

   Решение. а) За секој прост број $p<2002$ важи $p\,|\,2002!$, па оттука следува дека $p\nmid 2002!+1$. Од друга страна, 2003 е прост број, $2003!$ нема прости делители поголеми од 2003 и како од теоремата на Вилсон следува $2003\,|\,2002!+1$, заклучуваме дека $(2002!+1,2003!)=2003$.

   б) Аналогно како во решението под а) добиваме дека за простите броеви $p<2004$ важи $p\nmid 2003!+1$. Но, бројот $2004!$ нема прости делители поголеми од 2003, па затоа е заемно прост со $2003!+1$.

2. Ако p е прост број, тогаш $p^3\,|\,(p!)^2-p^2$. Докажи!

   Решение. Имаме
   $$(p!)^2-p^2=(p!-p)(p!+p)=p^2[(p-1)!-1][(p-1)!+1]. \qquad (1)$$
   Од теоремата на Вилсон следува дека $(p-1)!+1=pn$, за некој природен број n и ако замениме во (1) добиваме
   $$(p!)^2-p^2=p^3n[(p-1)!-1],$$
   што значи дека $p^3\,|\,[(p!)^2-p^2]$.

3. (Теорема на Лајбниц). Природниот број $p>2$ е прост ако и само ако
   $$(p-2)!-1\equiv 0(\text{mod } p).$$
   Докажи!

   Решение. Според теоремата на Вилсон и нејзината последица следува дека природниот број p е прост ако и само ако
   $$(p-1)!+1\equiv 0(\text{mod } p),$$
   што значи ако и само ако
   $$(p-2)!(p-1)+1\equiv 0(\text{mod } p),$$
   односно ако и само ако
   $$(p-2)!\,p-[(p-2)!-1]\equiv 0(\text{mod } p),$$
   од што следува тврдењето на задачата.

4. Докажи дека природниот број n е прост ако и само ако $n\,|\,m$ каде

$$m=\sum_{r=1}^{n-3} r\cdot r!\,.$$

Решение. Од $r\cdot r!=(r+1)r!-r!=(r+1)!-r!$ следува

$$\begin{aligned} m&=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+(n-3)\cdot(n-3)!\\ &=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+[(n-2)!-(n-3)!]\\ &=(n-2)!-1. \end{aligned}$$

Конечно, тврдењето следува од теоремата на Лајбниц.

5. Нека p е прост број. Докажи, дека:

а) $a^p+a(p-1)!\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$,

б) $a^p(p-1)!+a\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$.

Решение. а) Од теоремата на Вилсон имаме $(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, па затоа

$$a(p-1)!+a\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Од малата теорема на Ферма следува

$$a^p-a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Конечно, тврдењето следува ако ги собереме последните две конгруенции.
б) Тврдењето следува од конгруенициите

$$(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p) \text{ и } a^p\equiv a\,(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

6. Нека p е прост број и $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ се последователни природни броеви. Определи го остатокот од делењето на бројот $a_1a_2...a_{p-1}$ со бројот p.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1<a_2<...<a_{p-1}$. Ако еден од овие броеви е делив со p, тогаш бараниот остаток е 0. Нека ниту еден од броевите $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ не се дели со p. Ако $a_1\equiv r(\mathrm{mod}\, p)$ и $2\le r\le p-1$, тогаш $2\le p-r+1\le p-1$ и притоа важи $a_{p-r+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, што е противречност. Според тоа, имаме

$$a_1\equiv 1(\mathrm{mod}\, p),\ a_2\equiv 2(\mathrm{mod}\, p),\ ...,\ a_{p-1}\equiv p-1(\mathrm{mod}\, p),$$

па затоа ако ја искористиме теоремата на Вилсон добиваме

$$a_1a_2...a_{p-1}\equiv (p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

7. Докажи, дека ако p е непарен прост број, тогаш

а) $1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\,(\mathrm{mod}\, p)$,

б) $2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\,(\mathrm{mod}\, p)$.

Решение. Од теоремата на Вилсон имаме

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (p-2)(p-1)\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)\,. \tag{1}$$

Понатаму, за секој $i=1,2,3,...,p-1$ важи

$$i\equiv -(p-i)(\mathrm{mod}\ p)\,.$$

Ако ги замениме $\frac{p-1}{2}$ парните броеви на левата страна на (1) ја добиваме конгруенцијата

$$1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot ...\cdot (p-2)^2(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$$

и ако последната конгруенција ја помножиме со $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, добиваме дека е точна конгруенцијата под а). Аналогно, ако ги замениме $\frac{p-1}{2}$ непарните броеви на левата страна на (1) ја добиваме конгруенцијата

$$2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot ...\cdot (p-1)^2(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$$

и ако последната конгруенција ја помножиме со $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, добиваме дека е точна конгруенцијата под б).

8. Докажи, дека равенството $(p-1)!+1=p^m$ не е исполнето за никои природни броеви $p>5$ и m.

Решение. Нека претпоставиме дека броевите $p>5$ и m го задоволуваат равенството $(p-1)!+1=p^m$. Значи, p мора да биде прост број (зошто?). Но, $p>5$, па затоа

$$2<\frac{p-1}{2}<p-1\,,$$

од каде добиваме дека

$$(p-1)^2=2\frac{p-1}{2}(p-1)\,|\,(p-1)!\,.$$

Но,

$$(p-1)!=p^m-1\,,$$

па затоа $(p-1)^2\,|\,p^m-1$, што значи дека $p-1$ е делител на

$$\frac{p^m-1}{p-1}=p^{m-1}+p^{m-2}+...+p^2+p+1\,.$$

Но, од $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ p-1)$ следува $p^k\equiv 1(\mathrm{mod}\ p-1)$, за секој $k\geq 0$, па затоа

$$m\equiv p^{m-1}+p^{m-2}+...+p^2+p+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p-1)\,.$$

Така, $(p-1)\,|\,m$, што значи дека $m\geq p-1$ и тогаш

$$p^m\geq p^{p-1}>2\cdot 2\cdot 3...(p-2)(p-1)=2(p-1)!>(p-1)!+1\,,$$

што е противречност.

9. Дали постојат единствени броеви $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ такви што

$$\frac{5}{7}=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}+\frac{a_7}{7!} \quad (1)$$

при што $0\le a_i<i$ за $i=2,3,4,5,6,7$. Определи го збирот

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 .$$

Решение. Ако во (1) помножиме со $7!$ добиваме

$$5\cdot 6! = (3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7)a_2+(4\cdot 5\cdot 6\cdot 7)a_3+(5\cdot 6\cdot 7)a_4+(6\cdot 7)a_5+7a_6+a_7 .$$

Од теоремата на Вилсон следува

$$7(3\cdot 4\cdot 5\cdot 6a_2+4\cdot 5\cdot 6a_3+5\cdot 6a_4+6a_5+a_6)+a_7=5\cdot 6!\equiv -5\equiv 2 \pmod 7,$$

па затоа

$$a_7\equiv 2 \pmod 7,$$

па како $0\le a_7<7$ добиваме $a_7=2$. Понатаму, имаме

$$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6a_2+4\cdot 5\cdot 6a_3+5\cdot 6a_4+6a_5+a_6=\frac{5\cdot 6!-2}{7}=514,$$

т.е.

$$6(60a_2+20a_3+5a_4+a_5)+a_6=514\equiv 4 \pmod 6,$$

од каде бидејќи $0\le a_6<6$ добиваме $a_6=4$. На потпшолно аналоген начин ги определуваме a_2, a_3, a_4, a_5 и добиваме $(a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=(1,1,1,0,4,2)$. Конечно,

$$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=9 .$$

10. Нека $a_0,a_1,...,a_{p-1}; b_0,b_1,...,b_{p-1}$ се две пермутации на броевите $0,1,...,p-1$, каде p е прост број број. Со $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ ги означуваме остатоците од делењето на броевите $a_0b_0, a_1b_1,...,a_{p-1}b_{p-1}$ со бројот p. Докажи дека броевите $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ не формираат пермутација на броевите $0,1,...,p-1$.

Решение. Нека $r_0,r_1,...,r_{p-1}$ е пермутација на броевите $0,1,...,p-1$. Тогаш во пермутациите $a_0,a_1,...,a_{p-1}$ и $b_0,b_1,...,b_{p-1}$ бројот 0 треба да се наоѓа на исто место, бидејќи во спротивно ќе добиеме дека за некои $i\ne j$ важи $r_i=r_j=0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_0=b_0=0$. Тогаш $r_0=0$ и $a_1,a_2,...,a_{p-1}$ и $b_1,b_2,...,b_{p-1}$ се пермутации на броевите $1,2,...,p-1$. Од теоремата на Вилсон следува

$$a_1a_2...a_{p-1}\equiv -1 \pmod p,$$
$$b_1b_2...b_{p-1}\equiv -1 \pmod p,$$
$$r_1r_2...r_{p-1}\equiv -1 \pmod p.$$

Затоа

$$1 \equiv (-1)(-1) \equiv (a_1 a_2 ... a_{p-1})(b_1 b_2 ... b_{p-1})$$
$$\equiv (a_1 b_1)(a_2 b_2)...(a_{p-1} b_{p-1}) \equiv r_1 r_2 ... r_{p-1} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p),$$

што е противречност.

11. Нека $a_i, i = 1, 2, ..., 22$ се 22 последователни природни броеви. Докажи, дека тие не може да се поделат во две групи така што производот на броевите од едната група е еднаков на производот на броевите од другата група.

Решение. Во 22 последователни природни броеви најмногу еден е делив со 23, па затоа доколку бараната поделба е можна меѓу дадените броеви ниту еден не е делив со 23. Нека претпоставиме дека

$$M = a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_t} = a_{j_1} a_{j_2} ... a_{j_s} = N, \quad s + t = 22,$$

каде $i_1, i_2, ..., i_t, j_1, j_2, ..., j_t$ е пермутација на броевите 1, 2, ..., 22. Тогаш

$$M^2 = MN = a_1 a_2 ... a_{22} \equiv 22! (\mathrm{mod}\, 23)$$

и од теоремата на Вилсон следува дека $M^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 23)$. Последното меѓутоа не е можно, бидејќи од $(M, 22) = 1$ и од малата теорема на Ферма следува дека

$$1 \equiv M^{22} \equiv (-1)^{11} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 23).$$

12. Нека $n \geq 5$ и $2 \leq b \leq n$. Докажи, дека

$$[\tfrac{(n-1)!}{b}] \equiv 0 (\mathrm{mod}\, b-1).$$

Решение. Ако $b \leq n-1$, тогаш

$$\tfrac{(n-1)!}{b} = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (b-1)(b+1)...(n-1)$$

и очигледно $(b-1) \,|\, \tfrac{(n-1)!}{b}$. Нека $b = n$. Ако n е сложен број и не е квадрат на прост број, тогаш $n = ac$, каде $2 \leq a < c \leq n-2$ и тогаш

$$\tfrac{(n-1)!}{n} = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (a-1)(a+1)...(c-1)(c+1)...(n-1)$$

пак е цел број и се дели со $n-1$. Нека $n = p^2$, каде p е прост број. Од $n \geq 5$ следува $p \neq 2$ и затоа $2p < n-1$. Тогаш

$$\tfrac{(n-1)!}{n} = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1)(p+1)...(2p-1) \cdot 2 \cdot (2p+1)...(n-1)$$

пак е цел број и се дели со $n-1$. Останува да го разгледаме случајот кога $n = p$ е прост број. Од теоремата на Лајбниц имаме $(p-2)! \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $(p-2)! = 1 + up$, $u \in \mathbb{N}$. Ако помножиме со $p-1$ добиваме

$$(p-1)! = p(1 + u(p-1)) - 1, \text{ т.е. } \tfrac{(p-1)!}{p} = 1 + u(p-1) - \tfrac{1}{p}.$$

Според тоа,

$$[\tfrac{(p-1)!}{p}] = u(p-1)\text{, т.е. } [\tfrac{(p-1)!}{p}] \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p-1).$$

13. Низата $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ е определена со $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1}\text{, за } n \geq 3.$$

Докажи дека x_n е цел број ако и само ако n е прост број.

Решение. Со смената $nx_n = y_n$ дадената релација го добива видот

$$(n-2)y_{n+1} = (n^2 - n - 1)y_n - (n-1)^2 y_{n-1},$$

што е еквивалентно на

$$y_{n+1} - y_n = \tfrac{(n-1)^2}{n-2}(y_n - y_{n-1}).$$

Оттука, со индукција лесно следува дека

$$y_{n+1} - y_n = (n-1)(n-1)! = n! - (n-1)! \text{ и } y_n = (n-1)! + 1.$$

Според тоа, $x_n = \frac{y_n}{n}$ е цел број ако и само ако $n \mid (n-1)! + 1$, што според теоремата на Вилсон значи ако и само ако n е прост број.

14. Низата a_n е дадена со

$$a_0 = 3 \text{ и } a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1),\ n \geq 0.$$

Определи ги ги сите броеви m за кои $(m, a_n) = 1$, за сите $n \geq 0$.

Решение. Рекурентната релација може да се запише како

$$a_{n+1} - 1 - (a_n - 1) = n(a_n - 1)$$
$$a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1)$$

Според тоа:

$$\begin{cases} a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1) \\ a_n - 1 = n(a_{n-1} - 1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2 - 1 = 2(a_1 - 1) \\ a_1 - 1 = a_0 - 1 \end{cases},$$

од каде $a_{n+1} - 1 = (n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 \cdot 2 = 2(n+1)!$.

Па, $a_n = 2 \cdot n! + 1$. Нека $m > 1$ е природен број. Ги разгледуваме следниве случаи:

- Ако $m = 2^s$, бидејќи сите членови од низата се непарни, $(m, a_n) = 1$.
- Ако постои прост број p поголем или еднаков од 3, каде $p \mid m$, ќе докажеме дека $(m, a_{p-3}) \neq 1$. Всушност, од теоремата на Вилсон, имаме

$$a_{p-3}=2(p-3)!+1\equiv(p-1)+1\equiv 0(\text{mod}\, p)\,.$$

Па, имаме $p\,|\,a_{p-3}$, од каде $p\,|\,(m,a_{p-3})$.

Конечно сите броеви кои го задоволуваат условот на задачата се од облик $m=2^s$, каде $s\geq 0$.

15. Докажи дека за секој непарен прост број p при делење на броевите 2^p-2 и

$$p(p-1)!(-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{p-1})$$

со p^2 се добива ист остаток.

Решение. Имаме

$$2^p-2=(1+1)^p-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}=p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)...(i+1)}{(p-i)!}\,.$$

Нека x е остатокот при делењето на бројот $\sum\limits_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)...(i+1)}{(p-i)!}$ со p. Треба да докажеме дека остатокот при делењето на бројот

$$(p-1)!(-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{p-1})=(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i i^{-1}$$

со p исто така е еднаков на x. Имаме

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)(p-2)...(i+1)\cdot(p-1)!}{(p-i)!}\equiv x(p-1)!\,(\text{mod}\, p)\,,$$

од каде, согласно со теоремата на Вилсон добиваме

$$\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)(p-2)...(i+1)\cdot(p-1)(p-2)...(p-i+1)\}\equiv x(p-1)!\equiv -x\,(\text{mod}\, p)\,.$$

Од друга страна, од теоремата на Вилсон следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)...(i+1)\cdot(p-1)(p-2)...(p-i+1)\}&\equiv\sum_{i=1}^{p-1}\{(p-1)...(i+1)\cdot(-1)^{i-1}(i-1)!\}\\&\equiv\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}\frac{(p-1)!}{i}\\&\equiv(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}i^{-1}\,(\text{mod}\, p)\end{aligned}$$

Според тоа, $(p-1)!\sum\limits_{i=1}^{p-1}(-1)^i i^{-1}\equiv x\,(\text{mod}\, p)$.

16. Докажи, дека постојат бесконечно многу сложени броеви n, за кои бројот $n!-1$ има барем два различни прости делители.

Решение. Нека $p>5$ е прост број, $n=p-2$ и да означиме

$$N=n!-1=(p-2)!-1.$$

Од теоремата на Лајбниц имаме

$$(p-2)!\equiv 1(\bmod p).$$

Според тоа, $p\,|\,N$. Нека претпоставиме дека N нема друг прост делител, т.е. дека $N=p^m, m\in\mathbb{N}$. Тогаш $N\equiv 1(\bmod p-1)$. Од друга страна, од $p>5$ следува $2<\frac{p-1}{2}<p-2$, па затоа 2 и $\frac{p-1}{2}$ се различни множители на $(p-2)!$ и тогаш $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ е делител на $(p-2)!$. Оттука следува дека

$$N\equiv -1(\bmod p-1),$$

што противречи на $N\equiv 1(\bmod p-1)$. Значи, N има прост делител различен од p, т.е. N има барем два различни прости делители.

На крајот, да избереме p од видот $3k+2, k>1$. Како што е познато, постојат бесконечно многу прости броеви од овој вид. Тогаш $n=3k$ е сложен број и тврдењето е докажано.

17. Определи ги сите цели броеви $m\geq 2$ за кои секој природен број n таков што $\frac{m}{3}\leq n\leq\frac{m}{2}$ е делител на биномниот коефициент $\binom{n}{m-2n}$

Решение. Јасно, $2n\leq m\leq 3n$. Ако $m=2n$ или $m=3n$, тогаш $\binom{n}{m-2n}=1$, од каде следува дека $n=1$. Во овој случај добиваме дека $m=2$ и $m=3$. Ќе ги разгледаме случаите кога m не е делив со 2 и 3. Јасно, m е непарен број.

Прво ќе разгледаме кога m е сложен број, т.е. нека $m=(2k+1)s$, s е прост број. Од условот на задачата имаме $(\frac{2}{3}k+\frac{1}{3})s\leq n\leq(k+\frac{1}{2})s$. Јасно е дека важи $(\frac{2}{3}k+\frac{1}{3})s\leq ks\leq(k+\frac{1}{2})s$, па може да избереме $n=ks.$ Тогаш треба да биде исполнето $ks\,|\,\binom{ks}{(2k+1)s-2ks}=\binom{ks}{s}$. Значи, треба да важи

$$ks\,|\binom{ks}{s}=\frac{k\cdot(ks-1)\cdot(ks-2)...(ks-s+1)}{(s-1)!}, \text{ т.е. } s\,\Big|\,\frac{(ks-1)\cdot(ks-2)...(ks-s+1)}{(s-1)!}.$$

Земаме $\frac{(ks-1)\cdot(ks-2)...(ks-s+1)}{(s-1)!}=t$. Важи

$$t(s-1)!\equiv(-1)(-2)...(-(s-1)\equiv(-1)^{s-1}(s-1)!(\bmod s).$$

Од теоремата на Вилсон имаме $(s-1)!\equiv -1(\bmod s)$. Според тоа, $t\not\equiv 0(\bmod s)$, т.е. t не е делив со s.

Сега нека m е прост број. Имаме:

$$\binom{n}{m-2n}=\frac{n(n-1)!}{(3n-m)(3n-m-1)!(m-2n)!}=\frac{n}{3n-m}\binom{n-1}{m-2n}$$

Бројот m е прост, па затоа $(n,3n-m)=1$ и оттука $3n-m\,|\binom{n-1}{m-2n}$. Значи, $n\,|\frac{n}{3n-m}\binom{n-1}{m-2n}$, т.е. $n\,|\binom{n}{m-2n}$. Конечно, одговорот на задачата е m е прост број.

18. Докажи, дека броевите p и $p+2$ се прости ако и само ако

$$4((p-1)!+1)+p\equiv 0(\operatorname{mod} p^2+2p)\,. \tag{1}$$

Решение. Јасно, p е прост број ако и само ако важи

$$4((p-1)!+1)+p\equiv 0(\operatorname{mod} p)\,.$$

Од $p\equiv -2(\operatorname{mod} p+2)$ следува

$$p(p+1)\equiv -2(p+1)\equiv 2(\operatorname{mod} p+2)\,.$$

Ако последната конгруенција ја помножиме со $2(p-1)!$ добивмае

$$2(p+1)!\equiv 4(p-1)!(\operatorname{mod} p+2)\,,$$

односно

$$2((p+1)!+1)+(p+2)\equiv 4((p-1)!+1)+p(\operatorname{mod} p+2)\,.$$

Но, $p+2$ е прост број ако и само ако $(p+1)!+1\equiv 0(\operatorname{mod} p+2)$, па од претходната конгруенција следува дека $p+2$ е прост број ако и само ако

$$4((p-1)!+1)+p\equiv 0(\operatorname{mod} p+2)\,.$$

Конечно, од досега изнесеното следува дека броевите p и $p+2$ се прости ако и само ако важи (1).

19. а) Нека за природните броеви x,y,z важи $xy-z^2=1$. Докажи дека постојат ненегативни цели броеви a,b,c,d такви што

$$x=a^2+b^2,\ y=c^2+d^2,\ z=ac+bd\,.$$

б) Докажи, ако p е прост број таков што $p\equiv 1(\operatorname{mod} 4)$, тогаш p може да се претстави како збир на два квадрати на природни броеви.

Решение. а) За подредената тројка природни броеви (x,y,z) за која важи $xy-z^2=1$ ќе велиме дека е лоша ако $x\le y$ и не постојат природни броеви a,b,c,d такви што

$$x=a^2+b^2, y=c^2+d^2, z=ac+bd\,.$$

Ќе докажеме дека лоши тројки не постојат.

Нека претпоставиме дека (x,y,z) е лоша тројка. Од $xy=z^2+1$ и $x\le y$, заклучуваме дека $x^2 \le xy = z^2 + 1$, па затоа $x \le z$. Ако $x = z$, тогаш

$$1 = xy - x^2 = x(y - x),$$

што е можно само ако $x = 1, y = 2$. Но, тогаш важи

$$x = 0^2 + 1^2,\ y = 1^2 + 1^2,\ z = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1,$$

што противречи на претпоставката дека разгледуваната тројка е лоша. Според тоа, мора да важи $x < z$.

Сега нека $t = z - x$. Со замена во $xy - z^2 = 1$, добиваме

$$1 = xy - (x + t)^2 = x(yx - 2t) - t^2 .$$

Според тоа, тројката $(x, y - x - 2t, t) = (x, x + y - 2z, z - x)$ исто така е решение на равенката $xy - z^2 = 1$. Бидејќи оваа равенка е симетрична во однос на x, y, првите две компоненти на секое решение може да се пермутираат. Затоа, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \le x + y - 2z$. Освен тоа, разгледуваната тројка се состои од природни броеви. Имено, веќе видовме дека $z - x > 0$. Понатаму, важи

$$z^2 = xy - 1 < xy \le (\tfrac{x+y}{2})^2,$$

па затоа $2z < x + y$, т.е. $x + y - 2z > 0$.

Сега ќе докажеме дека вака добиената тројка исто така е лоша. Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш постојта броеви m, n, p, q така што важи

$$x = m^2 + n^2,\ x + y - 2z = p^2 + q^2,\ z - x = mp + nq .$$

Од овој систем добиваме

$$z = m(m + p) + n(n + q),$$

а потоа и

$$y = (m + p)^2 + (n + q)^2,$$

што противречи на претпоставката дека тројката (x, y, z) е лоша. Според тоа, и тројката $(x, x + y - 2z, z - x)$ е лоша.

Меѓутоа, важи $z - x < z$, па затоа ако претпоставиме дека множеството од сите лоши тројки не е празно, добиваме дека меѓу сите такви тројки (x, y, z) не постои тројка со минимален z (од секоја лоша тројка може да се конструира лоша тројка со помал елемент). Последното не е можно, па оттука следува дека лоши тројки всушност нема, што и требаше да се докаже.

б) Нека $p = 4k + 1$ е прост број. Од теоремата на Вилсон следува

$$(4k)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p) .$$

Но, важи и $p - i \equiv -i (\mathrm{mod}\, p)$, за $1 \le i \le 2k$, па со множење на сите овие конгруенции добиваме

$$\frac{(4k)!}{(2k)!} \equiv (-1)^{2k}(2k)! (\mathrm{mod}\, p),$$

од каде добиваме

$$[(2k)!]^2 \equiv (4k)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Да означиме $u=(2k)!$. Добиваме $p \mid (u^2+1)$, односно дека важи $pv-u^2=1$ за некој природен број v. Ако го примениме тврдењето под а) на овој специјален случај, добиваме дека p може да се претстави како збир на два квадрати на природни броеви.

16. ЛИНЕАРНА КОНГРУЕНТНА РАВЕНКА. КИНЕСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТОЦИ

1. Реши ја линеарната конгруентна равенка:

а) $3x \equiv 5 (\bmod 8)$, б) $5x \equiv 7 (\bmod 12)$,

в) $2x \equiv 3 (\bmod 9)$, г) $7x \equiv 1 (\bmod 10)$,

д) $8x \equiv 4 (\bmod 5)$, ѓ) $2x \equiv 1 (\bmod 17)$,

е) $5x \equiv -1 (\bmod 8)$,

Решение. а) Бидејќи $(3,8) = 1$, решението на дадената равенка е

$$x \equiv 5 \cdot 3^{\varphi(8)-1} \equiv 5 \cdot 3^{4-1} \equiv 135 \equiv 7 (\bmod 8).$$

б) $x \equiv 11 (\bmod 12)$, в) $x \equiv 6 (\bmod 9)$,

г) $x \equiv 3 (\bmod 10)$, д) $x \equiv 3 (\bmod 5)$,

ѓ) $x \equiv 9 (\bmod 17)$, е) $x \equiv 1 (\bmod 8)$.

2. Реши ја линеарната конгруентна равенка:

а) $21x \equiv 1 (\bmod 17)$, б) $21x \equiv -5 (\bmod 29)$

в) $7x \equiv 15 (\bmod 9)$, г) $7x \equiv 9 (\bmod 10)$

Одговор. а) $x \equiv 10 (\bmod 17)$, б) $x \equiv -3 (\bmod 29)$,

в) $x \equiv 6 (\bmod 9)$, г) $x \equiv 7 (\bmod 10)$.

3. Реши ја линеарната конгруентна равенка:

а) $72x \equiv 2 (\bmod 10)$, б) $6x \equiv 27 (\bmod 12)$,

в) $10x \equiv 15 (\bmod 35)$

Одговор. а) $x \equiv 1 (\bmod 10)$, $x \equiv 6 (\bmod 10)$.

б) Нема решение. в) $x \equiv 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33 (\bmod 35)$,

4. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:

а) $x \equiv 2 (\bmod 5),\quad x \equiv 8 (\bmod 11)$,

б) $x \equiv 7 (\bmod 33),\quad x \equiv 3 (\bmod 63)$,

в) $4x \equiv 3 (\bmod 7),\quad 5x \equiv 4 (\bmod 6)$.

Одговор. а) $x \equiv -3 (\bmod 55)$,

б) нема решение, в) $x \equiv 20 (\bmod 42)$.

5. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:
а) $17x \equiv 2 \pmod{5}, \quad 2x \equiv 1 \pmod{3}, \quad 2x \equiv 2 \pmod{5}$,
б) $3x \equiv 5 \pmod{7}, \quad 2x \equiv 3 \pmod{5}, \quad 3x \equiv 3 \pmod{9}$,
в) $5x \equiv 200 \pmod{251}, \quad 11x \equiv 192 \pmod{401}, \quad 3x \equiv -151 \pmod{907}$.
Решение. а) $x \equiv 11 \pmod{30}$,
б) $x \equiv 4 \pmod{105}$,
в) Дадениот систем се сведува на следниот еквивалентен систен
$$x \equiv 40 \pmod{251}, \qquad x \equiv 382 \pmod{401}, \qquad x \equiv 252 \pmod{907},$$
чие решение е $x \equiv 7777777 \pmod{91290457}$.

6. Реши го системот линеарни конгруентни равенки:
а) $x \equiv a \pmod{6}, \quad x \equiv 1 \pmod{8}$,
б) $x \equiv 2 \pmod{6}, \quad x \equiv a \pmod{8}$.
Одговор. а) $x \equiv 4a - 3 \pmod{24}$, $a \equiv 1 \pmod{2}$
б) $x \equiv 8 - 3a \pmod{24}$, $a \equiv 0 \pmod{2}$.

7. Најди ја вредноста на параметарот a за која постои решение на системот линеарни конгруентни равенки:
а) $x \equiv a \pmod{6}, \quad x \equiv 1 \pmod{10}, \quad x \equiv 2 \pmod{21}, \quad x \equiv 3 \pmod{11}$,
б) $2x \equiv a \pmod{4}, \quad 3x \equiv 4 \pmod{10}$.
Одговор. а) Потребно и доволно е $a \equiv 1 \pmod{2}$ и $a \equiv 2 \pmod{3}$, од што следува $a \equiv 5 \pmod{6}$.
б) $a \equiv 0 \pmod{4}$.

8. Даден е непарен прост број p. За $1 \le k \le p-1$ со a_k да го означиме бројот на делителите на $kp+1$, кои се поголеми од k и се помали од p. Определи го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}$.
Решение. *Одговор*: $p-2$.
Секој број $m \in \{2, 3, ..., p-1\}$ допринесува по еден во збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}$, бидејќи конгруенцијата $mx \equiv 1 \pmod{p}$ има единствено решение. Според тоа, бараниот збир е еднаков на бројот на можните вредности на m, т.е. на $p-2$.

9. Докажи дека разликата $10^{900} - 2^{1000}$ е делива со бројот 1994.
Решение. Бидејќи $1994 = 2 \cdot 997$ доволно е да докажеме дека простиот број 997 е делител на разликата $10^{900} - 2^{1000}$. Од малата теорема на Ферма следува

$$10^{996} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 997) \text{ и } 2^{996} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 997).$$

Оттука

$$2^{1000} \equiv 2^4 = 16 (\mathrm{mod}\, 997) \text{ и } 10^{900} \cdot 10^{96} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 997)$$

Понатаму, $10^3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 997)$, па затоа

$$10^{96} = (10^3)^{32} \equiv 3^{32} = (3^{16})^2 \equiv 249^2 = 187 (\mathrm{mod}\, 997).$$

Според тоа, ако ставиме $x = 10^{900}$, тогаш конгруенцијата

$$10^{900} \cdot 10^{96} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 997)$$

можеме да ја сфатиме како линеарна конгруентна равенка $187x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 997)$. Оваа линеарна конгруентна равенка има единствено решение по модул 997. Решението е $x \equiv a (\mathrm{mod}\, 997)$, каде $a \in \mathbb{Z}$ е таков што $187a + 997b = 1$. Целите броеви a и b ги определуваме со помош на Евклидовиот алгоритами добиваме $a = 16$ и $b = -3$. Затоа $x \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 997)$. Конечно,

$$10^{900} - 2^{1000} \equiv 16 - 16 = 0 (\mathrm{mod}\, 997).$$

10. Нека x и y се природни броеви од интервалот $[2,100]$. Докажи дека постои природен број n таков што бројот $x^{2^n} + y^{2^n}$ е сложен.

Решение. Ако $x = y$, тогаш бројот $n = 1$ го има саканото својство. Нека $x \neq y$. Ќе докажеме дека за некој n бројот $x^{2^n} + y^{2^n} > 257$ е делив со 257.

Нека претпоставиме дека $x^{2^n} + y^{2^n} = 257$. Земаме $a = x^{2^{n-1}}, b = y^{2^{n-1}}$. Тогаш $a^2 + b^2 = 257$. Ако $a \geq b$, тогаш со непосредна проверка добиваме дека $a = 16$, $b = 1$ што противречи на $x, y > 1$. Значи, $x^{2^n} + y^{2^n} \neq 257$.

Понатаму, бидејќи y не е делив на простиот број 257, постои $q \in \mathbb{N}$ таков што $x \equiv qy (\mathrm{mod}\, 257)$. Бидејќи $x \neq y$ и $0 < x + y < 257$, заклучуваме дека $q \not\equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 257)$. Освен тоа, $q \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 257)$, бидејќи и x не е делив со 257. Бидејќи 257 е прост број, од малата теорема на Ферма следува дека бројот

$$q^{256} - 1 = q^{2^8} - 1 = (q-1)(q+1)(q^2+1)(q^{2^2}+1)...(q^{2^7}+1)$$

е делив со 257. Броевите во првите две загради не се деливи со 257, па затоа за некој $n \in \{1, 2, ..., 7\}$ бројот $q^{2^n} + 1$ е делив со 257. Сега тврдењето на задачата следува од конгруенцијата $x^{2^n} + y^{2^n} \equiv y^{2^n}(q^{2^n} + 1)(\mathrm{mod}\, 257)$.

11. Реши го системот линеарни конгруентни равенки

$$x \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 5),\ x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 3),\ x \equiv 11 (\mathrm{mod}\ 7),\ x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4).$$

Решение. Бидејќи секои два модули се заемно прости вроеви, од Кинеската теорема на остатоци следува дека постои единствено решение по модул $53\cdot 7\cdot 4=420$. Од првата конгруенција добиваме $x=8+5a$, каде a е цел број. Со замена во втората конгруенција и решавање на истата добиваме $a\equiv 0(\text{mod }3)$, т.е. $a=3b$, каде b е цел број. Според тоа, $x=8+15b$ и со замена во третата конгруенција и нејзино решавање добиваме $b\equiv 3(\text{mod }7)$, т.е. $b=3+7c$, каде c е цел број. Оттука имаме $x=53+105c$. Со замена во четвртата конгруенција и нејзино решавање имаме $c\equiv 1(\text{mod }4)$, односно $c=1+4d$, каде d е цел број. Конечно,

$$x=158+420d\text{, т.е. } x\equiv 158(\text{mod }420)$$

е единствено решение на дадениот систем линеарни конгруентни равенки.

12. Кои услови треба да ги задоволуваат броевите m и n за да системот линеарни конгруентни равенки

$$x\equiv 3(\text{mod }4),\ x\equiv 4(\text{mod }m),\ x\equiv 6(\text{mod }n)$$

има решение.

Одговор. Потребно и доволно е $(m,n)=(m,4)=(n,4)=1$.

13. Линеарната конгруентна равенка $13x\equiv 17\ (\text{mod }42)$ реши ја со сведување на систем линеарни конгруентни равенки со прости модули.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на системот

$$\begin{array}{lcl} 13x\equiv 17(\text{mod }2) & & x\equiv 1(\text{mod }2) \\ 13x\equiv 17(\text{mod }3) & \Leftrightarrow & x\equiv 2(\text{mod }3) \\ 13x\equiv 17(\text{mod }7) & & x\equiv 4(\text{mod }7) \end{array}$$

чие решение е $x\equiv 11(\text{mod }42)$.

14. Реши го системот линеарни конгруентни равенки

а) $x\equiv 28(\text{mod }29),\ x\equiv 30(\text{mod }31),\ x\equiv 10(\text{mod }11)$,

б) $5x\equiv 11(\text{mod }17),\ 3x\equiv 19(\text{mod }32),\ 11x\equiv 6(\text{mod }37)$.

Одговор. а) $x\equiv -1(\text{mod }9889)$,

б) $x\equiv 12113(\text{mod }20128)$.

15. Реши ги системите линерни конгруентни равенки

а) $\begin{cases} x+5y\equiv 5(\text{mod }6) \\ 5x+3y\equiv 1(\text{mod }6) \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-y\equiv 3(\text{mod }6) \\ 2x+2y\equiv -1(\text{mod }6) \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y\equiv 2(\text{mod }6) \\ 4x+2y\equiv 2(\text{mod }6) \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-y\equiv 2(\text{mod }6) \\ 2x+2y\equiv 0(\text{mod }6). \end{cases}$

Решение. а) Имаме,

$$\begin{cases} x = 5 \pmod 6 \\ y = 0 \pmod 6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2 \pmod 6 \\ y = 3 \pmod 6 \end{cases}$$

б) Системот нема решение, бидејќи нема решение втората конгруентна равенка на системот. Имено, $(2,6) = 2$ и $2 \nmid -1$.

в) Множеството решенија на системот се совпаѓа со множеественото решенија на конгруентната равенка $x - y \equiv 2 \pmod 6$.

г) Имаме

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 6 \\ y \equiv 2 \pmod 6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \equiv 4 \pmod 6 \\ y \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}.$$

16. Определи ги сите трицифрени природни броеви броеви кои се деливи со 7, а при делење со 9 дваат остаток 5.

Решение. Треба да ги определиме сите броеви

$$x = 100a + 10b + c,\ 0 \le a, b, c \le 9,\ a \ne 0$$

такви што

$$x \equiv 0 \pmod 7 \text{ и } x \equiv 5 \pmod 9.$$

Последниот систем ги исполнува условите од Кинеската теорема за остатоци, па затоа тој има единствено решенмие по модул 63. Сите решенија на втората конгруенција во системот ненегативни остатоци по модул 63 се

5, 14, 23, 32, 41, 50, 59,

а единствен меѓу нив кој е делив со 7 е 14, па затоа

$$x \equiv 14 \pmod{63}.$$

Останува уште да ги определиме сите трицифрени броеви кои се конгруентни со 14 по модул 63, т.е. да ги определиме оние $n \in \mathbb{N}$ такви што $n = 63k + 14$ и $100 \le n \le 999$. Значи, $\frac{86}{63} \le k \le \frac{985}{63}$, т.е. $k = 2, 3, ..., 15$ и притоа ги добиваме броевите

140, 203, 266, 329, 392, 455, 518, 581, 644, 707, 770, 833, 896 и 959.

17. Определи ја цифрата на единиците на производот на првите сто природни броеви кои при делење со 5 даваат остаток 3.

Решение. Природните броеви кои приу делење со 5 даваат остаток 3 се од видот $5k + 3,\ k \in \mathbb{N}_0$. Да го запишеме производот на првите сто такви броеви:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 28 \cdot 33 \cdot ... \cdot (5k+3) \cdot ... \cdot 493 \cdot 498 = \\ &= (3 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 18) \cdot (23 \cdot 28) \cdot ... \cdot ((5k-2) \cdot (5k+3)) \cdot ... \cdot (493 \cdot 498). \end{aligned}$$

Секој од педесетте производи во заградите има цифра на единиците 4. Навистина

$$n = (5k-2)(5k+3) \equiv -6 \equiv 4 \pmod 5$$

и како броевите $5k - 2$ и $5k + 3$ се со различлна парност, производот

$(5k-2)(5k+3)$ е парен број, т.е. $n\equiv 0(\bmod 2)$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека системот

$$n\equiv 4(\bmod 5) \text{ и } n\equiv 0(\bmod 2)$$

има единствено решение по модул 10, на пример, $n\equiv 4(\bmod 10)$.

Според тоа, цифрата на единиците на разгледуваниот производ е еднаква на цифрата на единиците на бројот 4^{50}, па како

$$4^{50}=16^{25}\equiv 6^{25}\equiv 6(\bmod 10),$$

заклучуваме дека таа е 6.

18. Најди го најмалиот број делив со 10, а при делење со 3 дава остаток 2 и при делење со 7 дава остаток 3.

Решение. Нека x е бараниот број. Тогаш ги имаме следниве конгруенции:

$$x\equiv 2(\bmod 3),\quad x\equiv 3(\bmod 7),\ x\equiv 0(\bmod 2) \text{ и } x\equiv 0(\bmod 5).$$

Бидејќи 2, 3, 5, 7 се по парови заемно прости, користејќи ја Кинеската теорема за остатоци имаме единствено решение по модул $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$.За да го најдеме, прво пресметуваме

$$M_2=\tfrac{210}{2}=105 \qquad y_2\equiv(105)^{-1}(\bmod 2)=1$$

$$M_3=\tfrac{210}{3}=70 \qquad y_3\equiv(70)^{-1}(\bmod 3)=1$$

$$M_5=\tfrac{210}{5}=42 \qquad y_5\equiv(42)^{-1}(\bmod 5)=3$$

$$M_7=\tfrac{210}{7}=30 \qquad y_7\equiv(30)^{-1}(\bmod 7)=4.$$

Оттука,

$$x\equiv 0M_2y_2+2M_3y_3+0M_5y_5+3M_7y_7\equiv 500(\bmod 210)\equiv 80(\bmod 210).$$

Значи, бараниот број е 80.

19. Кошницата на стара жена, која одела на пазар, била згазната од коњ. Во кошницата имало јајца. Сопственикот на коњот се понудил да ги плати јајцата, кои биле во кошницата. Старата жена не се сеќавала на точниот број на јајца, но се сетила дека кога ги редела во кошницата, земајќи по две јајца истовремено, останувало едно јајце. Истото се случувало кога таа земала три, четири, пет и шест јајца истовремено, но кога земала по седум јајца истовремено, не останало ниту едно јајце. Кој е најмалиот број на јајца, кој можело да ги има во кошницата?

Решение. Нека x е бројот на скршени јајца. Тогаш тој мора да го задоволува системот:

$$x\equiv 1(\bmod 2),\quad x\equiv 1(\bmod 3),\quad x\equiv 1(\bmod 4),$$
$$x\equiv 1(\bmod 5),\quad x\equiv 1(\bmod 6),\quad x\equiv 0(\bmod 7).$$

Од првата конгруенција јасно е дека x е непарен.

За да може да ја искористиме Кинеската теорема за остатоци, ќе ја отфрлиме и конгруенцијата модул 6, па модулите на конгруенциите што остануваат $(3,4,5,7)$ се по парови заемно прости. Од Кинеската теорема за остатоци имаме дека постои единствено решение по модул $3\cdot 4\cdot 5\cdot 7=420$ и како:

$$M_3=\frac{420}{3}=140 \qquad y_3\equiv(140)^{-1}(\mathrm{mod}\,3)=2$$

$$M_4=\frac{420-}{4}=105 \qquad y_4\equiv(105)^{-1}(\mathrm{mod}\,4)=1$$

$$M_5=\frac{420}{5}=84 \qquad y_5\equiv(84)^{-1}(\mathrm{mod}\,5)=4$$

$$M_7=\frac{420}{7}=60 \qquad y_7\equiv(60)^{-1}(\mathrm{mod}\,7)=2,$$

добиваме

$x\equiv 1\cdot 140\cdot 2+1\cdot 105\cdot 1+1\cdot 84\cdot 4+0\cdot 60\cdot 2=280+105+336=721\equiv 301(\mathrm{mod}\,420)$.

Бидејќи оваа вредност за x е непарна, и уште е задоволено $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,6)$, најмалиот број на скршени јајца е $x=301$.

20. Докажи дека постојат k последователни природни броеви секој од кои е делив со квадрат на природен број поголем од 1.

Решение. Нека $p_1,p_2,...,p_k$ се различни природни броеви. Според Кинеската теорема за остатоци системот

$$x\equiv -1(\mathrm{mod}\,p_1^2),\ \ x\equiv -2(\mathrm{mod}\,p_2^2),...,\ x\equiv -k(\mathrm{mod}\,p_k^2),$$

има решение. Последното значи дека броевите $x+1,x+2,...,x+k$ го имаат саканото својство.Имено, $x+i$ е делив со p_i^2, за $i=1,2,...,k$.

21. Определи ги последните три цифри на бројот

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$\begin{aligned}2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}&=2^{2010}(2^5-2^3+1)=25\cdot 2^{2010}\\&=25\cdot 2^2\cdot 2^{2008}=100\cdot 2^{2008}.\end{aligned}$$

Стешените на бројот 2 имаат цифра на единиците 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... Тоа значи дека ако степеновиот показател е делив со 4, тогаш цифрата на единиците е 6. Значи, цифрата на единиците на бројот 2^{2008} е 6, па затоа последните три цифри на бројот $2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}$ се 006.

Втор начин. Треба да се определи $x\in\mathbb{Z}$ таков што $0\le x<1000$ и

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}\equiv x(\mathrm{mod}1000).$$

Бидејќи $(2,1000)=2>1$ за степените на бројот 2 и модул $m=1000$ не може да ја примениме теоремата на Ојлер. Но, $1000=2^3\cdot 5^3$, па затоа теоремата на

Ојлер можеме да ја примениме за $n=125$. Имаме,

$$2^{100}=2^{\varphi(125)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,125),$$

па затоа

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}=(2^{100})^{20}(2^{15}-2^{13}+2^{10})\equiv 100(\mathrm{mod}\,125).$$

Бидејќи $2^3\,|\,2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}$ следува дека x го задоволува системот линеарни конгруентни равенки

$$x\equiv 0(\mathrm{mod}\,8),\quad x\equiv 100(\mathrm{mod}\,125).$$

Според Кинеската теорема за остатоци овој систем има единствено решение по модул 1000. Сите решенија на втората конгруенција

$$x\equiv 100(\mathrm{mod}\,125),\text{ за } 0\le x<1000$$

се 100, 225, 350, 475, 600, 725, 850 и 975. Меѓу нив само 600 е делив со 8, па затоа $x=600$.

22. Определи го најмалиот природен број a со следново својство: постои природен број n таков што бројот $17^n+87^n a$ е делив со 455.

Решение. Нека a и n се такви што $A=17^n+87^n a$ е делив со 455. Бидејќи $455=5\cdot 7\cdot 13$, одделно ќе го разгледаме A по модул 5, 7 и 13.

Имаме $0\equiv A\equiv 2^n+2^n a(\mathrm{mod}\,5)$, од каде следува $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$ и аналогно $0\equiv A\equiv 3^n+3^n a(\mathrm{mod}\,7)$, од каде следува $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$, $0\equiv A\equiv 4^n+(-4)^n a$ $(\mathrm{mod}\,13)$, од каде следува $a\equiv(-1)^{n+1}(\mathrm{mod}\,13)$.

За n непарен број ја добиваме Кинеската теорема за остатоци во видот $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$, $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$ и $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$, а за n парен го добиваме системот $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$, $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$ и $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,13)$. Решенијата на овие два системи се $a\equiv 209(\mathrm{mod}\,455)$ за n непарен и $a\equiv 454(\mathrm{mod}\,455)$ за n парен. Според тоа, бараната вредност е $a=209$ и притоа имаме $455\,|\,17^n+209\cdot 87^n$, кога n е непарен, во случајов и за $n=1$.

23. Докажи дека за секој парен број $2k$ при даден природен број m може да се запише како разлика на два природни броја, заемно прости со m.

Решение. Нека k е природен број, m е природен број чие канонично претставување има облик $m=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_s^{\alpha_s}$. Нека $f(x)=x(x+2k)$ и нека i е еден од броевите $1,2,...,s$. Ако $q_i\,|\,x(x+2k)$, за секој цел број x, тогаш за $x=1$ добиваме $q_i\,|\,2k+1$ и за $x=-1$ добиваме $q_i\,|\,2k-1$, па затоа $q_i\,|\,2$ и како $q_i\,|\,2k+1$ добиваме $q_i\,|\,1$, што не е можно. Значи постои цел број x_i, таков што $q_i\nmid x_i(x_i+2k)=f(x_i)$.

Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои природен број x_0, таков што $x_0 \equiv x_i(\mathrm{mod}\, q_i)$, за $i=1,2,...,s$, па затоа $f(x_0) \equiv f(x_i) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, q_i)$, за $i=1,2,...,s$. Така, $(f(x_0),q_i)=1$ за $i=1,2,...,s$, па затоа

$$(f(x_0),m)=1 \text{ или } (x_0(x_0+2k),m)=1.$$

Значи, ако ставиме $a=x_0+2k, b=x_0$, тогаш имаме $2k=a-b$, каде $(a,m)=(b,m)=1$.

24. На таблата се запишани $n>2$ цели броеви со најголем заеднички делител 1. Во еден чекор е дозволено да се додаде (или одземе) на еден од запишаните броеви производот на некој од преостанатите броеви со некој цел број. Определи го најмалиот број k таков што со помош на k вакви чекори секогаш може да се запише бројот 1.

Решение. *Лема*. Ако a,b,m се цели ненулти броеви и $(a,b)=1$, тогаш постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $(a+kb,m)=1$.

Доказ. Нека m' е производот на простите делители на бројот m кои не се делители на бројот b. Од $(m',b)=1$ следува дека постојат цели броево x и y такви што $xb+ym'=1$. Тогаш за $k=x(1-a)$ добиваме дека бројот

$$a+kb=a+xb(1-a)=1+ym'(a-1),$$

е заемно прост со m', а со самото тоа и со m. ■

Ќе докажеме дека n чекори се секогаш доволни. Ако $(a_1,...,a_{n-1})=1$, тогаш за некои цели броеви x_i имаме $x_1a_1+x_2a_2+...+x_{n-1}a_{n-1}=1-a_n$, па со додавање на бројот a_n последователно на производите x_ia_i, за $i=1,2,...,n-1$ во $n-1$ чекори го добиваме бројот 1. Сега да го разгледаме општиот случај. Нека $d=(a_n,a_{n-1})$ и $e=(a_1,a_2,...,a_{n-2})$. Јасно,

$$(e,d)=1=(\tfrac{a_{n-1}}{d},\tfrac{a_n}{d}),$$

па од лемата следува дека постои цел број k таков што $\frac{a_{n-1}}{d}+k\frac{a_n}{d}$ е заемно прост со e. Тогаш исто така важи $(a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1}+ka_n)=1$, па како претходно со дополнителни $n-1$ чекори постигнуваме на местото на бројот a_n да е бројот 1.

Од друга страна, $n-1$ чекори не се секогаш доволни. Нека $p_1,...p_n>2$ се различни прости броеви. Според Кинеската теорема за остатоци постојат цели броеви $a_1,...,a_n$ такви што $a_i \equiv 0(\mathrm{mod}\, p_j)$ за $j \neq i$ и $a_i \equiv 2(\mathrm{mod}\, p_i)$. Да претпоставиме дека на нив се применети $n-1$ чекори. Тогаш (за некој i) на ниту еден број не сме додале содржател на бројот a_i, што значи дека овие броеви не се менувале по модул p_i. Бидејќи ниту еден број не е конгруентен со 1 по модул p_i не сме можеле да го добиеме бројот 1.

25. Докажи дека постои аритметичка прогресија со произволно многу членови составена од различни броеви кои се степени на природни броеви со природни степенови показатели.

Решение. Нека p_k е $k-$тиот по ред прост број. Нека s е произволен природен број и нека $p = p_1 p_2 ... p_s$. Согласно со Кинеската теорема за остатоци, за секој природен број $k \le s$ постои природен број a_k, таков што

$$a_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \frac{p}{p_k}) \text{ и } a_k \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p_k).$$

Нека $Q = 1^{a_1} 2^{a_2} ... s^{a_s}$. Броевите $kQ, k = 1, 2, ..., s$, очигледно формираат растечка аритметичка прогресија, чиј број на членови е s. Од дефиницијата на броевите $a_k, k = 1, 2, ..., s$ следува дека $p_k \mid a_k + 1$ и $p_k \mid a_n$, за $k \ne n$ каде n е природен број помал или еднаков на s. Според тоа, броевите

$$Q_k = k^{\frac{a_k + 1}{pk}} \prod_{n=1,\, n \ne k}^{s} n^{\frac{a_n}{p_k}}$$

се природни и важи $kQ = Q_k^{p_k}$, за $k = 1, 2, ..., s$, т.е. броевите $kQ, k = 1, 2, ..., s$ се степени на природни броеви со природни степенови показатели поголеми од 1.

26. Докажи дека постои низа со произволен број членови, составена од природни броеви секој од кои не е степен на природен број со степенов показател од 1.

Решение. Нека m е произволен природен број. Согласно со Кинеската теорема за остатоци постои природен број x таков што за $i = 1, 2, ..., m$ важи

$$x \equiv p_i - i + 1 \,(\mathrm{mod}\, p_i^2) \qquad (1)$$

каде p_i е $i-$тиот прост број.

Броевите $x, x+1, x+2, ..., x+m-1$ го имаат саканото својство бидејќи согласно со (1) за $i = 1, 2, ..., m$ имаме $x + i - 1 = k_i p_i^2 + p_i$, каде k_i е цел број, па затоа $x + i - 1$ е делив со p_i, но не е делив со p_i^2, што значи дека не може да е степен на природен број со степенот показател поголем од 1.

27. Докажи, дека ако a, b, c се различни цели броеви, тогаш постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите $a+n, b+n, c+n$ се по парови заемно прости.

Решение. Бидејќи a, b, c се различни цели броеви добиваме дека

$$h = (a-b)(a-c)(b-c)$$

е цел број различен од 0 и од ±1. Со $q_1,q_2,...,q_s$ да ги означиме сите прости броеви поголеми од 3 кои се делители на h.

Ако два или повеќе од броевите a,b,c се парни, тогаш нека $r=1$, а во спротивен случај $r=0$. Јасно, најмалку два од броевите $a+r,b+r,c+r$ се непарни.

Ако a,b,c при делење со 3 даваат различни остатоци, тогаш ставаме $r_0=0$, а ако пак два или повеќе од броевите a,b,c при делење со 3 даваат еден и ист остаток, да го означиме со ρ, тогаш ставаме $r_0=1-\rho$. Јасно, во секој случај најмалку два од броевите $a+r_0,b+r_0,c+r_0$ не се деливи со 3.

Нека сега i е еден од броевите $1,2,...,s$. Бидејќи $q_i>3$ постои цел број r_i таков што ниту еден од броевите $a+r_i,b+r_i,c+r_i$ не е делив со q_i. Од Кинеската теорема за остатоци заклучуваме дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што

$$n\equiv r \pmod 2, n\equiv r_0 \pmod 3 \text{ и } n\equiv r_i \pmod{q_i}, \text{ за } i=1,2,...,s.$$

Ќе докажеме дека броевите $a+n,b+n,c+n$ се по парови заемно прости. Да го претпоставиме спротивното, на пример, дека $(a+n,b+n)>1$. Тогаш постои прост број q таков што $q\,|\,a+n$ и $q\,|\,b+n$, па е $q\,|\,a-b$ и значи $q\,|\,h$ и $h\neq\pm1$. Бидејќи $n\equiv r \pmod 2$ и бидејќи најмалку два од броевите $a+r,b+r,$ $c+r$ се непарни, најмалку два од броевите $a+n,$ $b+n,c+n$ се непарни, па значи дека $q\neq2$. Бидејќи $n\equiv r_0 \pmod 3$ и најмалку два од броевите $a+r_0,$ $b+r_0,c+r_0$ не се деливи со 3 заклучуваме дека најмалку два од броевите $a+n,b+n,c+n$ не се деливи со 3 и затоа $q\neq3$. Понатаму, бидејќи q е еден од простите делители на h, сега можеме да ставиме $q=q_i$, каде i прима вредност на еден од броевите $1,2,...,s$. Но, тогаш сметајќи дека

$$n\equiv r_i \pmod{q_i} \text{ или } n\equiv r_i \pmod q$$

и дека ниту еден од броевите $a+r_i,$ $b+r_i,$ $c+r_i$ не е делив со q_i, заклучуваме дека ниту еден од броевите $a+n,b+n,c+n$ не е делив со q_i или со q, спротивно на претпоставката дека $q\,|\,a+n$ и $q\,|\,b+n$. Според тоа, докажавме дека $(a+n,b+n)=1$.

Аналогно докажуваме дека $(a+n,c+n)=(b+n,c+n)=1$.

Значи броевите $a+n,b+n,c+n$ се по парови заемно прости и ова важи за бесконечно многу природни броеви.

28. Определи ги сите природни броеви n со следново својство: постојат природни броеви a,b и c, не поголеми од n, такви што квадратниот трином

ax^2+bx+c има две различни реални нули кои се разликуваат најмногу за $\frac{1}{n}$.

Решение. Разликата на двете нули на триномот е $d=\frac{1}{a}\sqrt{b^2-4ac}\geq\frac{1}{a}$, па од $d\leq\frac{1}{n}$ следува дека мора да важи $a=n$ и $b^2-4ac=1$. Оттука следува дека $b=2m+1$ и $nc=\frac{b^2-1}{4}=m(m+1)$.

- Ако $n=p^k$, $k\geq 0$ е степен на прост број p, тогаш $n\,|\,m$ и $n\,|\,m+1$, па затоа $b=2m+1\geq 2n-1$, што не е можно.
- Ако n не е степен на прост број, тогаш може да се запише во обликот $n=st$, каде s и t се заемно прости броеви поголеми од 1. Според Кинеската теорема за остатоци постои природен број $l<n$ таков што
$$l\equiv 0(\mathrm{mod}\,s) \text{ и } l\equiv -1(\mathrm{mod}\,t).$$
Тогаш $n\,|\,l(l+1)$ и $n\,|\,(n-l-1)(n-l)$. Можеме да земеме
$$m=\min\{l,n-l-1\},\ b=2m+1 \text{ и } c=\frac{m(m+1)}{n}.$$
Јасно, $b\leq 2\cdot\frac{n-1}{2}+1=n$ и $c<\frac{n}{4}$.

Според тоа, бараните броеви се сите природни броеви кои не се степени на прост број.

29. Нека n е природен број и нека $a_1,a_2,...,a_k,(k\geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1,2,...,n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1}-1)$ се деливи со n за секој $i\in\{1,2,...,k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1-1)$ не е делив со n.

Решение. *Прв начин*. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека
$$a_ia_{i+1}\equiv a_i\ (\mathrm{mod}\,n) \text{ за } i=1,2,...,k$$
(индексите се сметаат по модул k). Тогаш за секој j важи
$$a_j\equiv a_ja_{j+1}\equiv a_ja_{j+1}a_{j+2}\equiv...\equiv a_ja_{j+1}...a_{j+k-1}=a_1a_2...a_k(\mathrm{mod}\,n),$$
па затоа $a_1\equiv a_2\equiv...\equiv a_k\ (\mathrm{mod}\,n)$, што е противречност.

Втор начин. Ако a,b и c се такви цели броеви што n е делител на $a(b-1)$ и $b(c-1)$, тогаш n е делител на $a(c-1)=ab(c-1)-a(b-1)(c-1)$. Оттука по индукција следува дека n е делител на $a_1(a_{i+1}-1)$ за $i=1,2,..,k-1$. Во случајов n е делител на $a_1(a_k-1)=a_k(a_1-1)+a_k-a_1$. Според тоа, n е делител на $a_k(a_1-1)$ ако и само ако n е делител на a_k-a_1. Последното не е можно, бидејќи $0<|a_k-a_1|<n$.

Трет начин. Нека $a_0=a_k$, $a_{k+1}=a_1$ и нека $n\,|\,a_i(a_{i+1}-1)$ за $i=0,1,...,k$. Нека

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_l^{\alpha_l}$ е каноничната репрезентација на бројот n. Ако $p_i\,|\,a_j$ за некој $j\in\{1,...,k-1\}$, од $p_i\,|\,a_{j-1}(a_j-1)$ и $(a_{j-1},a_j)=1$ следува $(p_i,a_j-1)=1$, па затоа $p_i^{\alpha_i}\,|\,a_{j-1}$. Слично, ако $p_i\,|\,a_j-1$ за некој $j\in\{1,...,k-1\}$, од $p_i\,|\,a_j(a_{j+1}-1)$ и $(a_j,a_j-1)=1$ следува $(p_i,a_j)=1$, па затоа $p_i^{\alpha_i}\,|\,a_{j+1}-1$. Значи, за секој $j\in\{1,2,...,k\}$ важи $a_j\equiv c_i\ (\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i})$, каде $c_i\in\{0,1\}$ за секој $i\in\{1,2,...,l\}$. Сега од Кинеската теорема за остатоци следува дека

$$a_1\equiv a_2\equiv ...\equiv a_k\ (\mathrm{mod}\,n),$$

што е противречност.

Четврт начин. Нека $a_0=a_k,\,a_{k+1}=a_1$ и нека $n\,|\,a_i(a_{i+1}-1)$ за $i=0,1,...,k$. Да означиме $d_i=(a_i,n)$. Од $(d_i,a_i-1)=1$ и $d_i\,|\,n\,|\,a_{i-1}(a_i-1)$ следува $d_i\,|\,a_{i-1}$ и оттука $d_i\,|\,(a_{i-1},n)=d_{i-1}$. Според тоа, $d_k\,|\,d_{k-1}\,|...|\,d_1\,|\,d_0=d_k$ и оттука следува $d_k=d_{k-1}=...=d_1=d$ за некој d. На потполно идентичен начин добиваме дека $e_k=e_{k-1}=...=e_1=e$ за некој e каде $e_i=(a_i-1,n)$.

Понатаму, од $n\,|\,a_i(a_{i+1}-1)$ следува $n\,|\,de$. Сега од $s_i\equiv a_j\equiv 0(\mathrm{mod}\,d)$ и $s_i\equiv a_j\equiv 1(\mathrm{mod}\,e)$ следува $d_i\equiv a_j\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$, што е противречност.

30. Определи ги сите вредности на функцијата $f(x,y)=7x^2+5y^3,\ x,y\in\mathbb{Z}$ кои припаѓаат на интервалот $[2000,2012]$.

Решение. Нека $f(x,y)=k\in[2000,2012]$ за некои цели броеви x и y. Ако $5\,|\,x$, тогаш $5\,|\,k$ и ако $7\,|\,y$, тогаш $7\,|\,k$. Ако $(5,x)=(7,y)=1$, тогаш

$$k\equiv 7x^2\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\,5)\text{ и }k\equiv 5y^3\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\,7).$$

Од Кинеската теорема за остатоци следува дека имаме четири можности за k по модул 35, но само една од нив, 2007, е во разгледуваниот интервал.

Сега имаме 6 можности за k и тоа: 2000, 2002, 2005, 2009, 2010 и 2007. Притоа важи $7\cdot 21^2+5(-6)^2=2007$. Ќе докажеме дека останатите случаи не се реализираат.

Ако $7x^2+5y^3=2000$, тогаш $5\,|\,x$, па затоа $5\,|\,y$, од што следува дека $5^3\,|\,7x^2$, што доведува до противречност по модул 5^4. Ако $7x^2+5y^3=2005$ или 2010, тогаш $x=5a,\,a\in\mathbb{Z}$ и добиваме $35a^2+y^3=401$ или 402, што не е можно по модул 7. Ако $7x^2+5y^3=2009$, тогаш $7\,|\,y$, па затоа $7\,|\,x$ и тогаш имаме противречност по модул 7^3. Ако $7x^2+5y^3=2002$, тогаш $y=7b,$

$b \in \mathbb{Z}$ и добиваме $x^2 + 5 \cdot 49 y^3 = 286$, што не е можно по модул 7.

31. Определи го бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c') такви што

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' (\mathrm{mod}\, 15)$$

и $a,b,c,a',b',c' \in \{1,2,3,...,14\}$.

Решение. За секој цел број k со N_k да го означиме бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c'), за кои

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' (\mathrm{mod}\, k)$$

и $a,b,c,a',b',c' \in \{1,2,3,..., k-1\}$. Од Кинеската теорема за остатоци следува, дека $N_{mn} = N_m N_n$, кога $(m,n) = 1$. Според тоа, доволно е да ги определиме N_3 и N_5. Всушност ќе го определиме N_p за секој прост број p. За секое решение (a,b,a',b') на конгруенцијата $ab + a'b' \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ ќе го пресметаме бројот на решенијата на системот

$$bc + b'c' \equiv ca + c'a' (\mathrm{mod}\, p). \qquad (*)$$

Разгледуваме три случаи.

Прв случај. Нека $(1,a') \not\equiv t \cdot (b,b') (\mathrm{mod}\, p)$ за секој $t \in \{1,2,..., p-1\}$. Тогаш системот (*) има единствено решение

$$c \equiv \tfrac{a'-b'}{a'b-b'a} (\mathrm{mod}\, p) \text{ и } c' \equiv \tfrac{a-b}{ab'-ba'} (\mathrm{mod}\, p).$$

Втор случај. Нека $(1,a') \equiv t \cdot (b,b') (\mathrm{mod}\, p)$, за некој $t \neq 1$. Тогаш системот (*) нема решение.

Трет случај. Нека $(1,a') \equiv (b,b') (\mathrm{mod}\, p)$. Системот (*) се сведува на равенката $bc + b'c' \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Бидејќи $bc + b'c' \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, можеме да земеме дека $b \neq 0$. Според тоа, при секој избор на c' имаме единствен избор за

$$c \equiv \tfrac{1-b'c'}{b} (\mathrm{mod}\, p).$$

Тоа значи дека системот (*) има точно p репенија.

Со T_p да го означиме бројот на подредени четворки (a,b,a',b') за кои важи $ab + a'b' \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ и $a,b,a',b' \in \{0,1,2,3,..., p-1\}$. За секој подреден пар $(a,a') \neq (0,0)$ постојат точно p парови (b,b') кои ја задоволуваат равенката. Според тоа, $T_p = p(p^2 - 1)$.

32. Даден е природен број a. Докажи, дека

а) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p \mid a^n + n$,

б) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p^2 \mid a^n + n$.

Решение. Очигледно а) следува од б), но ќе дадеме одделни докази за двете тврдења. Јасно, ако $p \mid a$, тогаш доволно е да ги земеме природните броеви n кои се деливи со p^2, а такви има бесконечно многу.

а) Малата теорема на Ферма дава идеја да бараме n таков што се исполнети конгруенциите

$$n \equiv 0 (\bmod p-1) \text{ и } n \equiv -1 (\bmod p),$$

бидејќи тогаш важи

$$a^n \equiv 1 (\bmod p) \text{ и } n \equiv -1 (\bmod p),$$

па затоа $a^n + n \equiv 0 (\bmod p)$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постојат бесконечно многу такви броеви n. Од $n \equiv 0 (\bmod p-1)$ следува $n = s(p-1)$ и тогаш од $n \equiv -1 (\bmod p)$ добиваме $s \equiv 1 (\bmod p)$, т.е. $s = kp+1$. Според тоа, $n = (p-1)(kp+1), k \geq 0$ е цел број.

б) Ако ја искористиме теоремата на Ојлер за

$$a^{\varphi(p^2)} \equiv 1 (\bmod p^2), \ \varphi(p^2) = p(p-1)$$

за најдените вредности во а) добиваме

$$a^n + n = a^{kp(p-1)} a^{p-1} + kp^2 - kp + p - 1 \equiv a^{p-1} - kp + p - 1 (\bmod p^2).$$

Според тоа, доволно е да избереме k таков што $k \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p} + 1 (\bmod p)$ и да добиеме $a^n + n \equiv 0 (\bmod p^2)$.

33. Природниот број r го нарекуваме *степен*, ако $r = t^s$, каде $t \geq 2, s \geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои множество A од природни броеви, кое ги задоволува следните услови:

a) A има n елементи;

b) секој елемент од A е степен; и

c) за секои $r_1, r_2, ..., r_k \in A, \ 2 \leq k \leq n$ бројот $\frac{r_1 + r_2 + ... + r_k}{k}$ е *степен.*

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секој $m \in \mathbb{N}$ постои таков $d \in \mathbb{N}$, што сите броеви од множеството $\{d, 2d, ..., md\}$ се степени.

Доказ. Нека $p_1, p_2, ..., p_k$ се сите прости делители на $m!$, а $q_1, q_2, ..., q_m$ се првите m прости броеви. Ќе бараме d од облик $p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$ така, што dl да е точно q_l – ти степен на $l = 1, 2, ..., m$. Ако го запишеме l во обликот $p_1^{\alpha_1(l)} p_2^{\alpha_2(l)} ... p_k^{\alpha_k(l)}$ добиваме, дека треба да е

$$x_i+\alpha_i(l)\equiv 0(\mathrm{mod}\, q_l),\; i=1,2,...,k,$$

т.е. секој x_i треба да го задоволува условот

$$x_i+\alpha_i(l)\equiv 0(\mathrm{mod}\, q_l), \text{ за } l=1,2,...,m.$$

Бидејќи броевите $q_1,q_2,...,q_m$ се по парови заемно прости, од Кинеската теорема за остатоци следува дека последниот систем има решение, што значи дека лемата е докажана. ■

Сега решението на задачата следува ако во претходната лема ставиме $m=n!\frac{n(n+1)}{2}$ и земеме $r_j=jn!d$, за $j=1,2,...,n$. Очигледно аритметичката средина на било кои k од дадените броеви е од облик id, каде

$$i<n!\frac{n(n+1)}{2}=m$$

па затоа таа е степен.

34. Даден е природен број $n\geq 3$. Докажи, дека постои природен број m кој припаѓа на интервалот $(\sqrt[4]{5}n,\frac{n^4+4}{2})$ таков што n^4+4 е делител на m^4+4.

Решение. За бројот $x\in[1,n^4+4]$ ќе велиме дека е *добар* ако $\frac{x^4+4}{n^4+4}$ е цел број.

Лесно се докажува дека:

1) Ако x е добар број, тогаш n^4+4-x исто така е добар број.
2) Ако $x>n$ е добар број, тогаш $\frac{x^4+4}{n^4+4}\geq 5$. Ако $x^4+4=2(n^4+4)$, ќе добиеме дека n е парен број; ако $x^4+4=3(n^4+4)$ ќе добиеме противречност по модул 3 и ако $x^4+4=4(n^4+4)$ ќе добиеме за $x=2a$ дека

$$(2a^2-n^2)(2a^2+n^2)=3,$$

што е можно само за $a=n=1$.

Имаме

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

Нека ставиме $a=n^2-2n+2$ и bn^2+2n+2, при што $n^4+4=ab$ и $a>1,b>1$ се непарни заемно прости броеви.

Согасно Кинеската теорема за остатоци постои природен број $x\in[1,n^4+4]$ таков што

$$x\equiv n(\mathrm{mod}\, a) \text{ и } x\equiv -n(\mathrm{mod}\, b).$$

Тогаш n^4+4 е делител на $(x^4+4)-(n^4+4)$, па затоа x е добар број.

Лесно се гледа дека случаите $x=n$ и $x=n^4-n+4$ доведуваат до противречност. Освен тоа $x<n$ не е можно, а од 1) следува дека $x<n^4-n+4$.

Ако претпоставиме дека $x \geq \frac{n^4+4}{2}$, тогаш $x' = n^4 + 4 - x$ е добар број, за кој $x' < \frac{n^4+4}{2}$ (бидејќи $\frac{n^4+4}{2}$ не е цел број). Според тоа, можеме да сметаме, дека $x < \frac{n^4+4}{2}$. Ако $x \leq \sqrt[4]{5}n$, тогаш од 2) следува дека $5n^4 + 4 \geq x^4 + 4 \geq 5n^4 + 20$, што е противречност. Значи, $x \in (\sqrt[4]{5}n, \frac{n^4+4}{2})$.

35. Определи ги сите природни бреови n за кои постои природен број m таков што $2^n - 1$ е делител на $m^2 + 9$.

Решение Нека претпоставиме дека n има непарен делител $d > 1$. Тогаш $2^d - 1 \mid 2^n - 1$, па од условот на задачата следува $2^d - 1 \mid m^2 + 9$. Бидејќи $2^d - 1 \equiv 0 - 1 = -1 \pmod 4$ постои прост делител p на $2^d - 1$ кој е во облик $4k - 1$. Во спротивно, ако сите прости делители на $2^d - 1$ се од облик $4k + 1$, тогаш и $2^d - 1$ е од истиот таков облик.

Лема. Ако $p = 4k - 1$ е прост број и $p \mid a^2 + b^2$, тогаш $p \mid a$ и $p \mid b$.

Доказ. Нека $p = 4k - 1$ е прост број, $p \mid a^2 + b^2$ и нека претпоставуваме дека a и b не се деливи со p. Според тоа, $(p, a) = 1 = (p, b)$. Од малата теорема на Ферма имаме

$$a^{p-1} \equiv a^{4k-2} \equiv 1 \pmod p \text{ и } b^{p-1} \equiv b^{4k-2} \equiv 1 \pmod p.$$

Оттука

$$a^{p-1} + b^{p-1} \equiv (a^2)^{2k-1} + (b^2)^{2k-1} \equiv 2 \pmod p \tag{1}$$

Бидејќи $p \mid a^2 + b^2 \mid (a^2)^{2k-1} + (b^2)^{2k-1}$ следува дека

$$a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 0 \pmod p. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$2 \equiv 0 \pmod p \text{ т.е. } p = 2 \neq 4k - 1,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $p \mid a$ или $p \mid b$. Но, $p \mid a^2 + b^2$, па затоа $p \mid a$ и $p \mid b$.■

Да се вратиме на задачата. Од $p \mid m^2 + 3^2$ следува $p \mid m$ и $p \mid 3$, па затоа $p = 3$ и $3 \mid 2^d - 1$. Последното не е можно бидејќи кога d е непарен број важи $2^d \equiv 2 \pmod 3$. Затоа $n = 2^t$ за некој природен број t, т.е. n нема непарен делител.

Со помош на математичка индукција по степенот t ќе ја докажеме егзистенцијата на m.

За $t=1$ имаме $2^n-1=3$ и избираме $m=3$.

Сега, нека за секој $2\le t\le s$ постои природен број m таков што $2^{2^t}-1$ е делител на m^2+9. Имаме

$$2^{2^{s+1}}-1=(2^{2^s}-1)(2^{2^s}+1).$$

Според индуктивната претпоставка постои природен број m_s таков што $2^{2^s}-1\,|\,m_s^2+9$. Важи $2^{2^s}+1\,|\,9(2^{2^s}+1)$ и

$$9(2^{2^s}+1)=(3\cdot 2^{2^{s-1}})^2+3^2.$$

Нека $m_s^*=3\cdot 2^{2^{s-1}}$ и да го разгледаме системот конгруентни равенки:

$$\begin{cases} m\equiv m_s(\bmod 2^{2^s}-1) \\ m\equiv m_s^*(\bmod 2^{2^s}+1). \end{cases} \tag{3}$$

Бидејќи $(2^{2^s}-1,2^{2^s}+1)=1$ од Кинеската теорема за остатоци следува дека системот (3) има единствено решение m по модул $(2^{2^s}-)(2^{2^s}+1)$.

Од (3) имаме

$$m^2+9\equiv m_s^2+9(\bmod 2^{2^s}-1),$$

па затоа $2^{2^s}-1\,|\,m^2+9$. Аналогно се добива $2^{2^s}+1\,|\,m^2+9$. Сега, бидејќи $(2^{2^s}-1,2^{2^s}+1)=1$ добиваме дека $(2^{2^s}-)(2^{2^s}+1)\,|\,m^2+9$, т.е. $2^{2^{s+1}}-1\,|\,m^2+9$, со што индуктивниот доказ е завршен.

Значи, решение на задачата се природните броеви од видот $n=2^t, t\in\mathbb{N}$.

36. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е растечка функција за која постојат прости броеви $p_1,p_2,...,p_n$ и природни броеви $s_1,s_2,...,s_n$ такви што за секои $i=1,2,...,n$ множеството $\{f(p_ir+s_i)\,|\,r=1,2,...\}$ е бесконечна аритметичка прогресија. Докажи, дека постои $a\in\mathbb{N}$ таков, што $f(a+1),f(a+2),...,\ f(a+n)$ е аритметичка прогресија.

Решение. Нека $d_i>0$ е разликата на прогресијата $\{f(p_ir+s_i)\,|\,r=1,2,...\}$. Согласно Кинеската теорема на остатоци, за секои $i,j\in\{1,2,...,n\}$ постои $x_{ij}\in\mathbb{N}$ таков што $x_{ij}\equiv s_i(\bmod p_i)$, $x_{ij}\equiv s_j(\bmod p_j)$. Тогаш

$$f(x_{ij}+p_ip_j)=f(x_{ij})+d_ip_j,\qquad f(x_{ij}+p_ip_j)=f(x_{ij})+d_jp_i$$

па затоа $d_i p_j = d_j p_i$, т.е. $\frac{d_i}{p_i} = d \in \mathbb{N}$ е константа за секој i. Повторно согласно Кинеската теорема за остатоци постојат $x, y \in \mathbb{N}$ такви, што за секој i важи

$$x \equiv s_i (\operatorname{mod} p_i), \quad y \equiv -i (\operatorname{mod} p_i).$$

Тогаш

$$f(x+y+i) = f(x) + \frac{y+i}{p_i} d_i = f(x) + d(y+i)$$

и следствено бројот $a = x + y$ го има саканото својство.

37. Множеството природни броеви го нарекуваме *убаво* ако содржи најмалку два елементи и секој негов елемент има заеднички прост делител со барем еден од преостанатите елементи. Нека $P(n) = n^2 + n + 1, n \in \mathbb{N}$. Определи ја најмалата вредност на природниот број b за која постои ненегативен цел број a таков што множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), ..., P(a+b)\}$$

е убаво.

Решение. На почетокот да забележиме дека $P(n)$ е непарен број за секој $n \in \mathbb{N}$. Понатаму, ако простиот број $p > k$ е делител на $P(n)$ и $P(n+k)$, тогаш $p \mid P(n+k) - P(n) = k(2n+k+1)$, па затоа $2n \equiv -k-1 (\operatorname{mod} p)$ и оттука $4P(n) \equiv (k+1)^2 - 2(k+1) + 4 = k^2 + 3 (\operatorname{mod} p)$, па затоа $p \mid k^2 + 3$. Според тоа:

1) $(P(n), P(n+1) = 1,\ P(n) = n^2 + n + 1$
2) $(P(n), P(n+2)) \in \{1, 7\}$, и притоа важи $(P(n), P(n+2)) = 7$ ако и само ако $n \equiv 2 (\operatorname{mod} 7)$,
3) $(P(n), P(n+3)) \in \{1, 3\}$, и притоа важи $(P(n), P(n+3)) = 3$ ако и само ако $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$,
4) $(P(n), P(n+4)) \in \{1, 19\}$, и притоа важи $(P(n), P(n+4)) = 19$ ако и само ако $n \equiv 7 (\operatorname{mod} 19)$.

Пример на убаво множество за $b = 6$ може да се добие ако земеме број a таков што

$$a \equiv 2 (\operatorname{mod} 3),\ a \equiv 6 (\operatorname{mod} 7) \text{ и } a \equiv 5 (\operatorname{mod} 19),$$

што се сведува на $a \equiv 62 (\operatorname{mod} 399)$, бидејќи тогаш

$$3 \mid P(a+1), P(a+4),\ 7 \mid P(a+3), P(a+5) \text{ и } 19 \mid P(a+2), P(a+6).$$

Нека претпоставиме дека постои убаво множество за $b \le 5$. Бидејќи $P(a+2)$ е заемно прост со $P(a+1)$ и $P(a+3)$, мора да важи $b \ge 4$. Понатаму, $P(a+3)$ е заемно прост со $P(a+2)$ и $P(a+4)$, па мора да важи

$$(P(a+3),P(a+1))>1$$

(случајот $(P(a+3),P(a+5))>1$ е аналоген). Значи, $a\equiv 1(\text{mod}\,7)$, но тогаш $(P(a+2),P(a+4))=1$. Затоа $P(a+2)$ и $P(a+4)$ може да имаат заеднички прост делител само со $P(a+5)$ и $P(a+1)$, соодветно. Но, тогаш $3\,|\,a+1,a+2$, што не е можно.

38. Дадени се по парови различни природни броеви a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 и b_3, за кои $(n+1)a_1^n+na_2^n+(n-1)a_3^n$ е делител на $(n+1)b_1^n+nb_2^n+(n-1)b_3^n$, за секој природен број n. Докажи, дека постои природен број k таков што $b_i=ka_i$, за секој $i=1,2,3$.

Решение. Нека r е произволен природен број и p е прост број таков, што $p>(a_1^r+a_2^r+a_3^r)(b_1^r+b_2^r+b_3^r)$. Бидејќи p е прост број, следува дека важи $(p,a_1^r+a_2^r+a_3^r)=1$. Освен тоа, p е заемно прост со $p-1$. Од Кинеската теорема за остатоци следува, дека постои природен број n таков, што

$$n\equiv r(\text{mod}\,p-1) \text{ и } n(a_1^r+a_2^r+a_3^r)+a_1^r-a_3^r\equiv 0(\text{mod}\,p).$$

Од последните конгруенции и малата теорема на Ферма наоѓаме

$$(n+1)a_1^n+na_2^n+(n-1)a_3^n\equiv n(a_1^r+a_2^r+a_3^r)+a_1^r-a_3^r\equiv 0(\text{mod}\,p).$$

Од условот на задачата сега добиваме

$$(n+1)b_1^n+nb_2^n+(n-1)b_3^n\equiv 0(\text{mod}\,p)$$

и како погоре добиваме

$$n(b_1^r+b_2^r+b_3^r)+b_1^r-b_3^r\equiv 0(\text{mod}\,p).$$

После елиминирањето на n од добиените конгруенции добиваме

$$(a_1^r+a_2^r+a_3^r)(b_1^r-b_3^r)\equiv(b_1^r+b_2^r+b_3^r)(a_1^r-a_3^r)(\text{mod}\,p).$$

Оттука и од изборот на p следува дека последната конгруенција всушност е равенство, т.е.

$$(a_1^r+a_2^r+a_3^r)(b_1^r-b_3^r)=(b_1^r+b_2^r+b_3^r)(a_1^r-a_3^r),$$

односно

$$(a_2b_1)^r+2(a_3b_1)^r+(a_3b_2)^r=(a_1b_2)^r+2(a_1b_3)^r+(a_2b_3)^r,$$

при што последното равенство важи за секој природен број r.

Лема. Дадени се реални броеви $0<x_1\le x_2\le...\le x_s, 0<y_1\le y_2\le...\le y_s$ такви што за секој природен број r важи

$$x_1^r+x_2^r+...+x_s^r=y_1^r+y_2^r+...+y_s^r.$$

Тогаш $x_i=y_i$, за $i=1,2,...,s$.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по s. За $s=1$ земаме $r=1$ и добиваме дека $x_1=y_1$. Нека претпоставиме, дека тврдењето важи за $s=t$. За $s=t+1$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_{t+1}<y_{t+1}$. Тогаш

$$(\frac{x_1}{y_{t+1}})^r+...+(\frac{x_t}{y_{t+1}})^r+(\frac{x_{t+1}}{y_{t+1}})^r=(\frac{y_1}{y_{t+1}})^r+...+(\frac{y_t}{y_{t+1}})^r+1\geq 1\ .$$

Бидејќи $0<\frac{x_i}{y_{t+1}}<1$, за $1\leq i\leq t+1$, ако во последното равенство земеме $r\to\infty$ добиваме $0\geq 1$, што е противречност. Според тоа, $x_{t+1}=y_{t+1}$, со што доказот е завршен. ■

Од лемата, за $s=4$, следува дека броевите a_2b_1,a_3b_1,a_3b_2 во некаков редослед се еднакви на броевите a_1b_2,a_1b_3,a_2b_3. Бидејќи дадените броеви се по парови различни, не е тешко да види, дека можни се два случаи.

Случај 1. $a_2b_1=a_3b_2=a_1b_3$ и $a_3b_1=a_1b_2=a_2b_3$ и тогаш $\frac{a_2b_1}{a_3b_1}=\frac{a_3b_2}{a_1b_2}=\frac{a_1b_3}{a_2b_3}$, од каде добиваме $\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=t$. Тогаш $t^2=t$, т.е. $t=1$ и $a_1=a_2=a_3$, што е противречност.

Случај 2. $a_2b_1=a_1b_2,a_3b_1=a_1b_3,a_3b_2=a_2b_3$ и тогаш $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$. Нека $\frac{b_1}{a_1}=\frac{k}{t}$, $(k,t)=1$. Добиваме $b_i=\frac{k}{t}a_i$, $i=1,2,3$. Од $2b_1+b_2=\frac{k}{t}(2a_1+a_2)$ и условот на задачата (за $n=1$) имаме дека $2a_1+a_2$ е делител на $2b_1+b_2$, т.е. $\frac{k}{t}$ е цел број. Значи $t=1$ и $b_i=ka_i$, за $i=1,2,3$.

17. НЕЛИНЕАРНИ КОНГРУЕНТНИ РАВЕНКИ

1. Нека $p>2$ е прост број. Докажи дека секоја од конгруентните равенки

$$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p), \qquad x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(\mathrm{mod}\, p) \tag{1}$$

има точно по $\frac{p-1}{2}$ решение.

Решение. Според малата теорема на Ферма конгруентната равенка

$$x^{p-1}-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p),$$

има точно $p-1$ решение. Но,

$$x^{p-1}-1=(x^{\frac{p-1}{2}}-1)(x^{\frac{p-1}{2}}+1),$$

па затоа секоја од конгруенциите (1) има точно по $\frac{p-1}{2}$ решение.

2. Нека $p>2$ е прост број и $a,b\in\mathbb{Z}$. При кои услови кингруентната равенка $x^2+ax+b\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ има решение.

Решение. Од $(4,p)=1$ следува дека равенката $x^2+ax+b\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ има решение ако и само ако равенката $4x^2+4ax+4b\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. равенката $(2x+a)^2\equiv a^2-4b(\mathrm{mod}\, p)$ има решение. Нека $D=a^2-4b$. Можни се следниве случаи:

- Ако D не е конгруентен со квадрат на природен број по модул p, тогаш дадената равенка нема решение.
- Ако $D\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, тогаш во множеството $\{0,1,...,p-1\}$ дадената равенка има точно едно решение.
- Ако $D\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ и D е конгруентен на квадрат на прирдоен број по модул p, тогаш дадената равенка има две решенија.

3. Определи ги сите цели броеви n за кои $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ е делив со 199.

Решение. Да забележиме дека 199 е прост број. Од друга страна

$$\begin{aligned}(n-1)(n^5+n^4+n^3+n^2+n+1)&=n^6-1=(n^3-1)(n^3+1)\\&=(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1).\end{aligned}$$

Бидејќи 199 е прост број $199 \mid n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ ако и само ако 199 е делител на еден од броевите $n+1,\ n^2-n+1,\ \ n^2+n+1$.

i) 199 е делител на $n+1$ ако и само ако $n \equiv 198 \pmod{199}$.

ii) Ќе ги определиме сите природни броеви n такви што

$$n^2-n+1 \equiv 0 \pmod{199}.$$

Да забележиме дека

$$n^2-n+1 \equiv n^2-200n+1 \equiv (n-100)^2-100^2+1 \pmod{199}.$$

Од друга страна

$$100^2-1=200\cdot 50-1=199\cdot 50+49 \equiv 49 \pmod{199},$$

па

$$n^2-n+1 \equiv 0 \pmod{199}$$

е еквивалентна со

$$(n-100)^2 \equiv 49 \pmod{199}.$$

Но, 199 е прост број, па последната конгруенција има точно две решенија

$$n-100 \equiv \pm 7 \pmod{199},$$

т.е.

$$n \equiv 107 \pmod{199} \text{ и } n \equiv 93 \pmod{199}.$$

iii) Ќе ги определиме целите броеви такви што

$$n^2+n+1 \equiv 0 \pmod{199}. \qquad (*)$$

Да забележиме дека $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$, па затоа (*) е еквивалентна со

$$(n+1)^2-(n+1)+1 \equiv 0 \pmod{199}.$$

Според *ii*)

$$n+1 \equiv 107 \pmod{199} \text{ и } n+1 \equiv 93 \pmod{199}$$

т.е.

$$n \equiv 108 \pmod{199} \text{ и } n \equiv 92 \pmod{199}.$$

Конечно $n^5+n^4+n^3+n^2+n+1$ е делив со 199 ако и само ако n е конгруентен со 92, 93. 106, 107 или 198 по модул 199.

4. Докажи, дека конгруентната равенка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \equiv 0 \pmod{p}, \qquad (1)$$

каде p е прост број, $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, $n-i>p, i=0,1,\dots,k<n$ и $n-i=pq_i+r_i$, $0 \le r_i < p$ е еквивалентна со равенката

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{q_i+r_i} + \sum_{i=k+1}^{n} a_i x^{n-i} \equiv 0 (\operatorname{mod} p).$$

Решение. Од $x^p \equiv x (\operatorname{mod} p)$ следува $a_i x^{n-i} \equiv a_i x^{q_i+r_i} (\operatorname{mod} p), i = 0,1,2,...,k$. Значи,

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{n-i} \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i x^{q_i+r_i} (\operatorname{mod} p),$$

т.е.

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^{q_i+r_i} + \sum_{i=k+1}^{n} a_i x^{n-i} \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} (\operatorname{mod} p).$$

5. Реши ги равенките

а) $x^8 - x + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$.

б) $x^{12} - 2x^7 + x^3 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 5)$.

Решение. а) Од претходната задача следува $x^4 - x + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$. Сега, испитувајќи го системот остатоци по модул 3 добиваме $x \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$.

б) Имаме, $x^4 - x^3 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 5)$. Сега, испитувајќи го системот остатоци по модул 5 добиваме $x \equiv 3 (\operatorname{mod} 5)$.

6. Докажи, дека со смената $x = y + t$ конгруентната равенка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \equiv 0 (\operatorname{mod} m),$$

каде $(na_0, m) = 1$, може да се сведе на равенка од облик

$$a_0 y^n + \sum_{i=2}^{n} b_i y^{n-i} \equiv 0 (\operatorname{mod} m). \quad (1)$$

Решение. Со помош на дадената смена добиваме

$$a_0 y^n + (na_0 t + a_1) y^{n-1} + ... + (a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n) \equiv 0 (\operatorname{mod} m). \quad (2)$$

Бидејќи $(na_0, m) = 1$, постои t_0 таков што $na_0 t_0 + a_1 \equiv 0 (\operatorname{mod} m)$. Вака добиениот t_0 го заменуваме во (2) и ја добиваме (1).

7. Докажи, дека равенката $x^n \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, p е прост број, има n решенија ако $p \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$.

Решение. Бидејќи $n \mid p-1$, добиваме $x^{p-1} - 1 = (x^n - 1) Q(x)$, каде $Q(x)$ е полином со целобројни коефициенти и степен $p - n - 1$. Значи, конгруенцијата $(x^n-1)Q(x)\equiv 0(\mod p)$ има $p-1$ решение (зошто?). Но, тоа значи дека конкруенциите $x^n\equiv 1(\mod p)$ и $Q(x)\equiv 0(\mod p)$ соодветно имаат по n и $p-n-1$ решение.

8. Нека $f(x), \deg f=n$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти и p, $p<n$ е прост број. Ако $f(x)=(x^p-x)q(x)+r(x)$, докажи дека равенката $f(x)\equiv 0(\mod p)$ е еквивалентна со равенката $r(x)\equiv 0(\mod p)$. Докажи!

Решение. Според малата теорема на Ферма имаме $x^p-x\equiv 0(\mod p)$, па затоа важи

$$\begin{aligned}&(x^p-x)q(x)\equiv 0(\mod p),\\&(x^p-x)q(x)+r(x)\equiv r(x)(\mod p),\\&f(x)\equiv r(x)(\mod p).\end{aligned}$$

Според тоа, $f(x)\equiv 0(\mod p)$ ако и само ако $r(x)\equiv 0(\mod p)$.

9. Реши ја конгруентната равенка

$$x^7-3x^6+x^5-x^3+4x^2-4x+2=0(\mod 5)\,. \tag{1}$$

Решение. Имаме,

$$x^7-3x^6+x^5-x^3+4x^2-4x+2=(x^5-x)(x^2-3x+1)+x^2-3x+2\,,$$

па од претходната задача следува дека равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$x^2-3x+2\equiv 0(\mod 5)\,.$$

Со проверка на сите елементи на комплетниот систем на остатоци по модул 5 добиваме дека решенијата на последната равенка, т.е. на равенката (1) се $x\equiv 1(\mod 5)$ и $x\equiv 2(\mod 5)$.

10. Нека $f(x)$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти. Докажи дека конгруентната равенка $f(x)\equiv 0(\mod p)$ има решение за бесконечно многу прости броеви p.

Решение. Нека $p_1,p_2,...,p_k$ се конечно многу прости броеви за кои конгруенциите $f(x)\equiv 0(\mod p_i)$ имаат решение. Имаме

$$f(x+y)=f(x)+\varphi_1(x)y+\varphi_2(x)y^2+...+\varphi_n(x)y^n\,,$$

каде n е степенот на полиномот $f(x)$, а $\varphi_i(x), i=1,2,...,n$ се полиноми со целобројни коефициенти. Да ставиме $y=xf(x)$. Тогаш

$$f(x+xf(x))=f(x)g(x)\,, \tag{1}$$

каде

$$g(x)=1+x\varphi_1(x)+x^2 f(x)\varphi_2(x)+...+x^n f^{n-1}(x)\varphi_n(x)=1+x\psi(x).$$

Притоа, полиномот $g(x)$ е различен од константа, бидејќи ако $g(x)$ е константен полином, од (1) ќе следува дека степенот на полиномот $f(x+xf(x))$ е n, а како што може да се види тој е $n(n+1)\neq n$. Бидејќи $g(x)\neq \text{const}$, добиваме дека $g(x)\neq \pm 1$, за доволно големи вредности на x. Да ставиме $x_0=cp_1p_2...p_k+cp_1p_2...p_k f(cp_1p_2...p_k)$, каде c е цел број избран така што важи $g(cp_1p_2...p_k)\neq \pm 1$. Нека p_{k+1} е произволен прост множител на бројот $g(cp_1p_2...p_k)$. Бидејќи

$$g(cp_1p_2...p_k)=1+cp_1p_2...p_k\psi(cp_1p_2...p_k)$$

добиваме дека p_{k+1} е различен од $p_1,p_2,...,p_k$. Конечно, од (1) следува

$$f(x_0)=f(cp_1p_2...p_k)g(cp_1p_2...p_k),$$

па затоа p_{k+1} е делител на $f(x_0)$, т.е. x_0 е решение на конгруенцијата $f(x)\equiv 0(\text{mod}\, p_{k+1})$, од што следува тврдењето на задачата.

11. Нека $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Ако

$$a^n+bn+c\equiv 0(\text{mod}\, m) \tag{1}$$

за секој $n\in\mathbb{N}$, докажи дека $b^2\equiv 0(\text{mod}\, m)$. Дали мора да важи $b\equiv 0(\text{mod}\, m)$.

Решение. Ако во (1) последователно ставиме $n=1, n=2$ и $n=3$ добиваме

$$\begin{aligned} a+b+c&\equiv 0(\text{mod}\, m),\\ a^2+2b+c&\equiv 0(\text{mod}\, m),\\ a^3+3b+c&\equiv 0(\text{mod}\, m). \end{aligned} \tag{2}$$

Од првите две конгруенции во (2) следува

$$a^2-a+b\equiv 0(\text{mod}\, m), \tag{3}$$

а од последните две конгруенции во (2) следува

$$a^3-a^2+b\equiv 0(\text{mod}\, m). \tag{4}$$

Сега, од (3) и (4) добиваме $a^3-2a^2+a\equiv 0(\text{mod}\, m)$, т.е. $a(a-1)^2\equiv 0(\text{mod}\, m)$ и затоа од (3) и претходната конгруенција следува

$$b^2\equiv (a(a-1))^2=a(a(a-1)^2)\equiv a\cdot 0=0(\text{mod}\, m).$$

Ако земеме $m=4, a=3, b=2$ и $c=3$, лесно се проверува дека

$$3^n+2n+3\equiv 0(\text{mod}\, 4),$$

но $2\not\equiv 0(\text{mod}\, 4)$, што значи дека не мора да важи $b\equiv 0(\text{mod}\, m)$.

12. Определи ги сите природни броеви n за кои постои природен број x таков што $n!$ е делител на $x^3+4x-680$.

Решение. Нека $f(x)=x^3+4x-680$. Ако $f(x)$ е делив со $n!$, тогаш конгруенцијата $f(x)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$ треба да има решение за секој модул p^α, каде p е прост број кој учествува во каноничното претставување на $n!$.
Бидејќи конгруенцијата $f(x)\equiv 0(\bmod 7)$ не е исполнета за ниту еден природен број x (провери ги остатоците на x по модул 7), заклучуваме дека $n\le 6$.
Ако $f(x)$ е делив на $16=2^4$, тогаш x е парен. Бидејќи

$$f(2y)=8(y^3+y-85)$$

е делив со 8, но не е делив со 16, заклучуваме дека $n=6$ не е решение. Јасно, ако некој n е решение, тогаш помалите броеви од n се исто така решенија. Ќе докажеме дека $n=5$ е решение.
Од $5!=2^3\cdot 3\cdot 5$ следува дека е доволно да најдеме решение на конгруенциите $f(x)\equiv 0(\bmod 8),\ f(x)\equiv 0(\bmod 3),\ f(x)\equiv 0(\bmod 5)$. Првата конгруенција е исполнета кога x е парен број, втората кога $x\equiv 1(\bmod 3)$ и третата кога $x\equiv 0(\bmod 5)$, па затоа $x\equiv 10(\bmod 30)$.

13. Нека k е природен број и m е цел непарен број. Докажи дека постои природен број n таков што $2^k\mid n^n-m$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k.
За $k=1$ можеме да земеме било кој непарен број n, т.е. тврдењето важи.
Нека $n_0\in\mathbb{N}$ е таков што $n_0^{n_0}\equiv m(\bmod 2^k)$. Јасно, n_0 е непарен број.
Ако $n_0^{n_0}\equiv m(\bmod 2^{k+1})$, тогаш нема што да се докажува. Во спротивно ќе докажеме дека бројот $n=n_0+2^k$ го задоволува условот на задачата.
Нека $n_0^{n_0}-m=2^k d$, каде d е непарен број. Тогаш $n_0^{n_0}-m-d=2^k(d-1)$ е делив со 2^{k+1}. Од теоремата на Ојлер следува дека $n^{2^k}\equiv 1(\bmod 2^{k+1})$. Тогаш

$$\begin{aligned}n^n&=n^{n_0+2^k}=n^{n_0}n^{2^k}\equiv n^{n_0}\equiv(n_0+2^k)^{n_0}\equiv n_0^{n_0}+\tbinom{n_0}{1}n_0^{n_0-1}2^k\\&\equiv m+2^k+n_0^{n_0}2^k=m+(n_0^{n_0}+1)2^k(\bmod 2^{k+1}).\end{aligned}$$

Според тоа,

$$n^n-m\equiv(n_0^{n_0}+1)2^k\equiv 0(\bmod 2^{k+1})..$$

14. Нека m и n се природни броеви, $m,n\ge 2$. Докажи дека, ако $a^n\equiv 1(\bmod m)$

за секој $a \in \{1,2,...,n\}$, тогаш $(m,n)=(p,p-1)$ за некој прост број p.

Решение. Нека p е прост делител на m. Тогаш $p>n$, бидејќи во спротивно условот не е исполнет за $a=p$. Да го разгледаме полиномот

$$f(x)=(x-1)(x-2)...(x-n)-(x^n-1).$$

Имаме

$$f(a)=-a^n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

за секој $a \in \{1,2,...,n\}$. Според тоа, конгруенцијата

$$f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

е од степен $n-1$ и има најмалку n решенија, што значи дека сите коефициенти на полиномот $f(x)$ се дели во со p. Во случајов p е делител на водечкиот коефициент на $f(x)$, т.е. p е делител на

$$1+2+...+n=\tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Оттука и од $p>n$ следува дека $p=n+1$. Уште пвеќе од претходните разгледувања следува дека m нема други делители, т.е. $m=p^k$, каде k е природен број. Ќе докажеме дека $k=1$.

Нека претпоставиме дека $k>1$ и да ја разгледаме конгруенцијата

$$n^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, m) \quad \Leftrightarrow \quad (p-1)^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p^k).$$

Тогаш

$$0\equiv (p-1)^{p-1}-1\equiv -p(p-1)\equiv p(\mathrm{mod}\, p^2),$$

што не е можно. Значи, $m=p$.

15. Докажи дека не постои неконстантен полином $f(x)$ кој прима само прости вредности за сите доволно големи целобројни вредности на x.

Решение. Нека $f(x)$ неконстантен полином кој прима само прости вредности за сите доволно големи целобројни вредности на x. Нека $f(y)=p$ за некој $y\in\mathbb{N}$ и некој прост број p. Да го разгледаме полиномот $g(t)=f(y+tp)$. Јасно, $\deg g=\deg f$, што значи дека полиномот $g(t)$ исто така не е константен. Освен тоа,

$$g(t)\equiv f(y)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p),$$

што значи дека за сите доволно големи t ќе важи $g(t)=p$. Но, тоа значи дека $g(t)$ е константата p, што е противречност.

16. Нека p е прост број, а $k\in\mathbb{N}$ е делител на $p-1$. Докажи дека x^k прима точ-

но $\frac{p-1}{k}+1$ различни вредности по модул p, кога x се менува од 0 до $p-1$.

Решение. Нека различните остатоци, кои x^k ги прима по модул p се $0, y_1$, $y_2,...,y_s$. Бидејќи $y_1, y_2,..., y_s$ се различни решнија на конгруенцијата

$$x^{\frac{p-1}{k}}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p),$$

добиваме дека $s\leq\frac{p-1}{k}$. Нека $A_i, 1\leq i\leq s$ е множеството остатоци за кои

$$x^k\equiv y_i(\mathrm{mod}\, p).$$

Тогаш $|A_i|\leq k$ за секој i. Но, $\sum_{i=1}^{s}|A_i|=p-1$, па затоа важи $s=\frac{p-1}{k}$ и $|A_i|=k$ за секој i.

18. РЕД НА БРОЈ ПО МОДУЛ

1. Определи ги сите природни броеви n, за кои $n\,|\,2^n-1$.

   Решение. Очигледно е дека $n=1$ е едно решение. Нека $n\geq 2$. Случајот кога 2 е делител на n не е можен, бидејќи броевите 2 и 2^n-1 се заемно прости. Нека p е најмалиот прост делител на n. Во тој случај, за да $n\,|\,2^n-1$, треба бројот p да е делител на 2^n-1. Нека k е редот на 2 по модул p. Тогаш, $k>1$ и $k\,|\,n$. Според малата теорема на Ферма, $2^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)$, па затоа $k\,|\,p-1$. Значи, k е делител на броевите n и $p-1$, па како p е најмалиот прост делител на n заклучуваме дека $k=1$, што епротивречност. Конечно, од добиената противречност следува дека n е единствениот природен број за кој важи $n\,|\,2^n-1$.

2. Ако a,b и n се природни броеви, за кои a и n, и b и n се заемно прости, тогаш најмалиот природен број k за кој $a^k\equiv b^k\ (\operatorname{mod}\ n)$ се нарекува *степен* на a и b по модул n.

   Да забележиме дека, согласно теоремата на Ојлер имаме $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n)$ и $b^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} n)$, па затоа $a^{\varphi(n)}-b^{\varphi(n)}\equiv 0(\operatorname{mod} n)$. Значи, горната дефи-ниција е коректна. На аналоген начин се определува степен на повеќе броеви кои се взаемно прости со даден природен број n.
   Ако a,b и n се природни броеви, за кои a и n, и b и n се заемно прости, k е степенот на a и b по модул n, тогаш $a^m\equiv b^m(\operatorname{mod} n)$ за некој m ако и само ако $k\,|\,m$.

   Решение. Доказот е потполно аналоген на доказот на соодветната теорема за ред на број по даден модул. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

3. Определи ги сите природни броеви n такви што $n\,|\,3^n-2^n$.

   Решение. Очигледно е дека $n=1$ е едно решение. Нека $n\geq 2$ и нека p е најмалиот прост делител на n. Ако $n\,|\,3^n-2^n$ е цел број, тогаш $p\,|\,3^n-2^n$, па според тоа $p\neq 2$ и $p\neq 3$. Нека k е редот на 2 и 3 по модул p. Тоа занчи, дека k е делител n. Од друга страна, според малата теорема на Ферма $3^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ и $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Сега, од задача 2 следува дека k е делителна $p-1$. Според тоа $k \leq p-1$ и k истовремено ги дели n и $p-1$. Од минималноста на p, добиваме $k=1$. Значи $3^1 \equiv 2^1 (\mathrm{mod}\, p)$, што не е можно. Значи, единствено решение на задачата е $n=1$.

4. Определи ги сите природни броеви m и n, за кои бројот $n \mid (m+1)^n - m^n$ е исто така природен.

Решение. Јасно, $n=1$ е решение на задачата, и заради тоа ќе разгледуваме случај $n \geq 2$. Нека p е најмалиот прост делител на бројот n. Бројот $(m+1)^n - m^n$ е непарен како разлика на два броја со различна парност и ако $n \mid (m+1)^n - m^n$, тогаш $p \neq 2$. Освен тоа броевите $m+1$ и m не се деливи со p. Нека k е редот на $m+1$ и m по модул p. Затоа k е делител на n. Според малата теорема на Ферма $(m+1)^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ и $m^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, од каде што $(m+1)^{p-1} \equiv m^{p-1} (\mathrm{mod}\, p)$ и според задача 2 добиваме дека $k \mid p-1$. Имаме, k е делител на n и на $p-1$, па затоа $k \leq p-1$ и од минималноста на p добиваме $k=1$. Значи, $m+1 \equiv m (\mathrm{mod}\, p)$, што не е можно. Значи, единствено решение на задачата е $n=1$.

5. Ако $m, n \neq 1$ и l се природни броеви такви што $n \mid (m+l)^n - m^n$, тогаш најмалиот прост делител на n е делител на l.

Решение. Нека p е најмалиот прост делител на n и да претпоставиме дека p не е делител на l. Според условот на задачата $n \mid (m+l)^n - m^n$, па значи, p не е делител на m, бидејќи во спротивен случај p ќе биде делител на

$$(m+l)^n = m^n + nm^{n-1}l + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2} l^2 + \ldots + nml^{n-1} + l^n,$$

од каде следува дека p е делител l^n, па според тоа p е делител на l, што противречи на претпоставката. Значи, p не е делител на m. Од истите причини p не е делител на $m+l$. Значи, конечно p не е делител ниту на m ниту на $m+l$. Нека k е редот на $m+l$ и m по модул p. Како и во претходната задача со помош на задача 2 и малата теорема на Ферма заклучуваме дека $k=1$. Тогаш $m+l \equiv m (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, штокое противречи на претпоставката.

6. Нека m е природен број. Докажи дека ако $2^{m+1}+1$ е делител на $3^{2^m}+1$, тогаш $2^{m+1}+1$ е прост број.

Решение. Нека $q=2^{m+1}+1$. Тогаш од условот следува

$$3^{2^m}\equiv -1(\mathrm{mod}\, q)), \qquad (1)$$

па затоа $(3,q)=1$. АКо ги квадрираме двете страни на конгруенцијата (1), добиваме $3^{2^{m+1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\, q))$, од каде што следува дека редот на бројот 3 по модул q е делител на $2^{m+1}=q-1$. Според тоа, редот на бројот 3 по модул q е од видот 2^r за некој природен број $r\le m+1$. Ако $r\le m$, тогаш ќе важи $3^{2^m}\equiv 1(\mathrm{mod}\, q))$, што противречи на (1). Значи, $r=m+1$.

Од друга страна, од теоремата на Ојлер следува дека редот на бројот 3 по модул q е делител на $\varphi(q)$. Според тоа, $2^{m+1}=q-1$ е делител на $\varphi(q)$. Но, $\varphi(q)\le q-1$, па затоа $\varphi(q)=q-1$, што значи дека бројот q е прост.

7. Определи ги сите природни броеви $n>1$ кои имаат најмногу два различни прости делители и за кои n е делител на 3^n+1.

Решение. Нека $n=p^k$, каде p е прост број и $k\ge 1$. Тогаш од малата теорема на Ферма следува $3^{p^k}\equiv 3(\mathrm{mod}\, p)$, а од условот следува $3^{p^k}\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$. Според тоа, $3\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p=2$, од каде заради $3^n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$ заклучуваме дека $k=1$ и $n=2$.

Нека $n=p^kq^m$, каде p и q се прости броеви и $k,m\ge 1$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $p<q$. Сега, $3^{p^k}\equiv 3(\mathrm{mod}\, p)$ добиваме дека $3^n\equiv 3^{q^m}(\mathrm{mod}\, p)$. Оттука и од условот следува $3^{q^m}\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$, па затоа $3^{2q^m}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Освен тоа, $3^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, па затоа p е делител на броевите $3^{2q^m}-1$ и $3^{p-1}-1$, односно p е делител на

$$(3^{2q^m}-1,3^{p-1}-1)=3^{(2q^m,p-1)}-1=3^2-1=8.$$

Според тоа, $p=2$. Сега, како погое имаме $k=1$, што значи $n=2q^m$.

Понатаму, како погоре добиваме $3^n\equiv 9^{q^m}\equiv 9(\mathrm{mod}\, q)$, а од условот следува $3^n\equiv 9^{q^m}\equiv -1(\mathrm{mod}\, q)$. Затоа, $9\equiv -1(\mathrm{mod}\, q)$, што значи $q=5$ и $n=2q^m$. Ќе докажеме дека овие броеви го имаат саканото својство. Бидејќи $3^{2\cdot 5^m}+1$ е парен број, доволно е да докажеме дека тој е делив со 5^m.

Бидејќи $\varphi(5^{m+1})=4\cdot 5^m$, од теоремата на Ојлер добиваме $3^{4\cdot 5^m}\equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^{m+1})$ што значи дека 5^{m+1} е делител на $3^{4\cdot 5^m}-1=(3^{2\cdot 5^m}-1)(3^{2\cdot 5^m}+1)$. Но, 5 не е делител на првиот множител (Докажи!), па заоа 5^{m+1} е делител на $3^{2\cdot 5^m}+1$ со што тврдењето е докажано.

8. Определи ги сите природни броеви n, за кои $n^2\mid 2^n+1$.

Решение. Јасно е дека $n=1$ е решение на задачата. Нека n е природен број поголем од еден и нека тој е решение на задачата. Ако p е најмалиот прост делител на n, тогаш $p\neq 2$, бидејќи во спротивен случај $p^2\mid 2^n+1$, што не е точно. Значи $p\geq 3$. Ако $n^2\mid 2^n+1$, тогаш $n\mid 2^n+1$. Во тој случај бројот n е делител и на бројот $(2^n+1)(2^n-1)=4^n-1$, т.е. $n\mid (1+3)^n-1$. Од задача 5 следува дека p е делител на 3. Бидејќи p е прост број, добиваме $p=3$. Нека $n=3^m l$, каде m и l се природни броеви и 3 не е делител на l. Јасно, $m\geq 1$. Ќе покажеме дека $m=1$.

Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $m\geq 2$. Тогаш

$$\begin{aligned}
2^n+1&=2^{3^m\cdot l}+1=(2^{3^{m-1}l})^3+1^3\\
&=(2^{3^{m-1}l}+1)(2^{2\cdot 3^{m-1}l}-2^{3^{m-1}l}+1)\\
&=((2^{3^{m-2}l})^3+1^3)(2^{2\cdot 3^{m-1}l}-2^{3^{m-1}l}+1)\\
&=(2^{3^{m-2}l}+1)(2^{2\cdot 3^{m-2}l}-2^{3^{m-2}l}+1)(2^{2\cdot 3^{m-1}l}-2^{3^{m-1}l}+1)
\end{aligned}$$

и ако продолжиме на истиот начин ќе добиеме дека

$$2^n+1=(2^l+1)\prod_{j=0}^{m-1}(2^{2\cdot 3^j l}-2^{3^j l}+1) \tag{1}$$

Но

$$2^{2\cdot 3^j l}=4^{3^j l}=(3+1)^{3^j l}=3^{3^j l}+3^j l\cdot 3^{3^j l-1}+...+3^j l\cdot 3+1\equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$$

за секој $j=1,2,...,m-1$. Освен тоа, за секој $j=1,2,...,m-1$ имаме

$$2^{3^j l}=(3-1)^{3^j l}=3^{3^j l}-3^j l\cdot 3^{3^j l-1}+...+3^j l\cdot 3-1\equiv -1(\mathrm{mod}\, 9)$$

бидејќи l е непарен. Значи, $2^{2\cdot 3^j l}-2^{3^j l}+1\equiv 3(\mathrm{mod}\, 9)$. Аналогно како и претходно, за $j=0$, добиваме $2^{2l}-2^l+1\equiv 3(\mathrm{mod}\, 9)$. Тогаш највисок степен на 3 во производот $\prod_{j=0}^{m-1}(2^{2\cdot 3^j l}-2^{3^j l}+1)$ е m. Значи, за да $(3^m l)^2$ е делител

на 2^n+1, потребно е 3^m да е делител на 2^l+1. Ако $m\ge 2$, тогаш $4^l\equiv 1(\bmod 9)$. Но, редот на 4 по модул 9 е 3, и според тоа 3 е делител на l, што според претпоставката не е можно. Значи $m=1$.
Нека $n=3l$ и 3 не е делител на l. Најмалиот прост делител q на l, бидејќи $n^2\,|\,2^n+1$ е делител и на 2^n+1, па според тоа е делител и на 4^n-1. Ако s е редот на 4 по модул q, т.е. $4^s\equiv 1(\bmod q)$, тогаш s е делител на n. Од друга страна, според малата теорема на Ферма $4^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$ и затоа s е делител на $q-1$, $s\le q-1$. Од минималноста на q добиваме дека s е делител на 3. Според тоа, за s имаме две можности и тоа $s=1$ или $s=3$.

Ако $s=3$, тогаш $4^3\equiv 1(\bmod q)$. За простите броеви кои се поголеми од 64, очигледно последното не е можно. За простите броеви кои се помали од 64 и се различни од 3, само за $q=7$ е исполнето $64\equiv 1(\bmod 7)$. Но, со директна проверка добиваме дека 7 не е делител на $2^{21i}+1$. Имено, лесно се добива дека за секој природен број i, $2^{21i}+1\equiv 2(\bmod 7)$. Значи единствена можност е $s=1$. Но $4^1\equiv 1(\bmod q)$ важи само за $q=3$. Тоа не е можно бидејќи l не е делив со 3. Конечно $l=1$.
Значи решенија на задачата се $n=1$ и $n=3$.

9. Определи ги сите непарни природни броеви n за кои n е делител на 3^n+1 .
Решение. Очигледно $n=1$ е решение на задачата.
Нека претпоставиме дека $n>1$ е решение и нека p е најмалиот прост делител на n. Јасно, p е непарен број. Од условот на задачата следува дека n е делител на $3^{2n}-1$, што значи дека p е делител на $3^{2n}-1$.
Нека $k=\mathrm{ord}_p 3$. Тогаш k е делител на $2n$ и на $p-1$. Ако k е непарен, тогаш k е делител на n и од изборот на p следува дека $k=1$, односно $3\equiv 1(\bmod p)$, што не е можно. Нека $k=2m$ е парен број. Тогаш m е делител на n и $m<k\le p-1$, што заради изборот на p е можно само кога $m=1$. Но, сега $3^2\equiv 1(\bmod p)$ и повторно $p=2$, што е противречност.
Според тоа, единствено решение на задачата е $n=1$.

10. Нека a, m и n се природни броеви, каде a е парен и $m<n$. Докажи дека еден од броевите $a^m+1, a^{m+1}+1, a^{m+2}+1,\dots,a^n+1$ е заемно прост со секој од останатите броеви.

Решение. Со k да го означиме најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на некој од броевите $m, m+1, ..., n$. Нека претпоставиме дека има два броја кои се деливи со 2^k. Овие броеви можеме да ги запишеме во видот $2^k t_1$ и $2^k t_2$, каде $t_1 < t_2$ се непарни броеви. Но, тогаш бројот $2^k(t_1+1) < 2^k t_2$ е делив со 2^{k+1}, што противречи на изборот на k.

Според тоа, постои број r, $m \le r \le n$ кој е делив со 2^k и сите други броеви не се деливи со 2^k. Ќе докажеме дека бројот a^r+1 е заемно прост со секој од останатите броеви. Нека p е прост делител на a^r+1. Бидејќи a е парен, добиваме дека p е непарен и тогаш p не е делител на a^r-1. Ако l е редот на a по модул p, тогаш l е делител на $2r$ (бидејќи $a^{2r}-1$ е делив со p), но не е делител на r (бидејќи a^r-1 не е делив со p). Според тоа, l е делив со 2^{k+1}.

Нека претпоставиме дека p е делител на a^s+1 за $r \ne s$. Тоа значи дека l е делител на $2s$, т.е. 2^k е делител на s, што е противречност.

Докажавме, дека секој прост делител на a^s+1 не е делител на ниту еден од останатите броеви, т.е. бројот a^r+1 го има саканото својство.

11. Нека p е прост број и нека n е природен број. Докажи дека ако $p \| 2^n-1$ тогаш $p \| 2^{p-1}-1$.

Решение. Јасно $p \ne 2$, што значи дека p е непарен прост број. Нека со m го означиме редот на 2 по модул p. Имаме, $p \mid 2^m-1$. Јасно, $m \mid n$ и $m \mid p-1$. Од $m \mid n$, следува дека $p \mid 2^m-1 \mid 2^n-1$.

Од $p \| 2^n-1$ следува дека бројот 2^n-1 има точно еден степен на p во неговото канонично претставување, па оттука следува дека 2^m-1 има точно еден степен на p (има најмалку еден бидејќи $p \mid 2^m-1$ и има најмногу еден бидејќи $p \mid 2^n-1$). Останува да покажеме дека ако $p \mid 2^m-1$, тогаш во $2^{p-1}-1$ не се јавува дополнителен степен на p. Да го разгледаме изеазот

$$\frac{2^{p-1}-1}{2^m-1} = 1 + 2^m + (2^m)^2 + ... + (2^m)^{\frac{p-1}{m}-1}.$$

Ако докажеме дека овој израз не е делив со p, сме го докажале тврдењето на задачата. Во случајотв, земајќи по модул p, добиваме

$$\frac{2^{p-1}-1}{2^m-1} \equiv \underbrace{1+1+...+1}_{\frac{p-1}{m}} = \frac{p-1}{m} \pmod p .$$

Но, $0 < \frac{p-1}{m} < p$, па затоа разгледуваниот израз не е делив со p, од каде добиваме дека $p \| 2^{p-1}-1$.

12. Нека $a \in \mathbb{N}$ и p и q се непарни прости броеви такви што $a^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$. Докажи дека или q е делител на $a-1$ или $q = 1+2np$.

    Решение. Јасно, $(a,q) = 1$. Нека k е редот на a по модул q. Имаме $k \mid p$ и како p е прост број, можни се два случаја:

    1) $k = 1$ и тогаш $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, т.е. $q \mid (a-1)$,
    2) $k = p$ и тогаш $k \mid \varphi(q) = q-1$, т.е. $p \mid q-1$. Но, броевите p и q се непарни, па затоа $q-1$ се дели со $2p$, што значи $q = 1+2np$.

13. Нека p и q се прости броеви и $2^p \equiv -1 (\mathrm{mod}\, q)$. Докажи, дека или $q = 3$ или $q = 1+2np$.

    Решение. Ако $p = 2$, тогаш $q = 5$, т.е. q е од облик $1+2np$. Нека $p > 2$. Јасно, $q \neq 2$. Ако $q = 3$, $2^p \equiv (-1)^p = -1 (\mathrm{mod}\, 3)$ и условот е исполнет. Нека $q > 3$. Тогаш од конгруенцијата $2^p \equiv -1 (\mathrm{mod}\, q)$ следува $2^{2p} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$. Но, редот k на 2 по модул q е делител на $2p$, па затоа можни се следниве случаи:

    1) $k = 1$ и тогаш $2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, т.е. $q = 1$, што е противречност.
    2) $k = 2$ и тогаш $2^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, т.е. $q = 3$, што е противречност.
    3) $k = p$ и тогаш $2^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, па заедно со $2^p \equiv -1 (\mathrm{mod}\, q)$ добиваме $q = 2$, што е противречност.
    4) $k = 2p$ и како $k \mid \varphi(q) = q-1$, добиваме $2p \mid q-1$, што значи дека $q = 1+2np$.

14. Докажи, дека ако $(x,y) = 1$, тогаш секој непарен прост делител на бројот $x^{2^n} + y^{2^n}$ е од облик $2^{n+1}m+1$.

Решение. Нека p е непарен прост делител на бројот $x^{2^n}+y^{2^n}$, каде $(x,y)=1$. Јасно, $p\nmid y$, бидејќи во спротивно од $p\,|\,(x^{2^n}+y^{2^n})$ ќе следува $p\,|\,x$, што противречи на $(x,y)=1$. Ставаме $z=xy^{p-2}$. Од конгруенцијата

$$x^{2^n}+y^{2^n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

после множењето со $(y^{p-2})^{2^n}$ добиваме

$$z^{2^n}+(y^{p-1})^{2^n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)\ .$$

Од малата теорема на Ферма имаме $y^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, па затоа од последната конгруенција следува $z^{2^n}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$, од каде наоѓаме $z^{2^{n+1}}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$

Нека k е редот на бројот z по модул p. Тогаш $k\,|\,2^{n+1}$, па затоа $k=2^m$, $m\le n+1$. Но, ако $m\le n$, тогаш $z^{2^m}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, од каде по степенување на 2^{n-m} добиваме $z^{2^n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, што противречи на $z^{2^n}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$, бидејќи $p\ne 2$. Значи, $m=n+1$ и $k=2^{n+1}$. Конечно,

$$k=2^{n+1}\,|\,\varphi(p)=p-1,\ \text{т.е.}\ p=2^{n+1}m+1\,.$$

15. Определи ги сите парови природни броеви (n,p) такви што
   1) p е прост број,
   2) $n\le 2p$ и
   3) $n^{p-1}\,|\,(p-1)^n+1$.

Решение. Единствени решенија за $n<3$ или $p<3$ се $(2,2)$ и $(1,p)$ за произволен прост број p. Понатаму, ќе сметаме дека p, а со само тоа и n е непарен број.

Нека q е најмалиот прост делител на бројот n. Од $q\,|\,(p-1)^n+1\,|\,(p-1)^{2n}-1$ следува дека редот k на бројот $p-1$ по модул q е делител на $2n$. Од друга страна, знаеме дека $k\,|\,q-1$, па затоа $k\,|\,(2n,q-1)=2$. Според тоа,

$$q\,|\,(p-1)^2-1=p(p-2)\,.$$

Притоа не е можно $q\,|\,p-2$, бидејќи тогаш

$$(p-1)^n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\,q)\,.$$

Значи, $q=p$ и бидејќи $n<2p$ заклучуваме дека $n=p$. Сега, од 3) следува дека

$$p^{p-1}\,|\,(p-1)^p+1=p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}-...-\binom{p}{p-2}p^2+\binom{p}{p-1}p\,. \quad (1)$$

Меѓутоа, на десната страна во (1) сите собирци освен последниот се деливи со p^3, па затоа $p^3 \nmid (p-1)^p+1$. Затоа $p=3$. Навистина, парот $(n,p)=(3,3)$ ги задоволува условите на задачата.

16. Определи го најмалиот природен број кој не може да се претстави во облик $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ каде a,b,c,d се природни броеви.

Решение. Од $2^k=\frac{2^{k+2}-2^{k+1}}{2^2-2}$ следува дека секој број од облик 2^k може да се претстави во дадениот облик. Ако природниот број n може да се претстави во облик $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ тогаш истото важи и за бројот $2^k n$. Навистина

$$2^k n=\frac{2^{k+2}-2^{k+1}}{2^2-2}\cdot\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}=\frac{2^{k+a+2}-2^{k+a+1}-2^{k+b+2}+2^{k+b+1}}{2(2^c-2^d)}=\frac{2^{k+a}-2^{k+b}}{2^c-2^d}.$$

Важи $3=\frac{2^3-2}{2^2-2}$, $5=\frac{2^5-2}{2^3-2}$, $7=\frac{2^4-2}{2^2-2}$ и $9=\frac{2^7-2}{2^4-2}$. Оттука и броевите $6=2^1\cdot 3$ и $10=2^1\cdot 5$ може да се запишат во обликот $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$. Ќе докажеме дека 11 не може да се претстави во дадениот облик. Нека претпоставиме спротивно, т.е. нека $11=\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$ за некои природни броеви a,b,c,d. Јасно, $a>b$ и $c>d$. Имаме

$$2^b(2^{a-b}-1)=11\cdot 2^d(2^{c-d}-1). \qquad (1)$$

Јасно, $b=d$, па оттука $11\,|\,2^{a-b}-1$. Бидејќи $2^{10}\equiv 1(\bmod 11)$ следува дека $a-b=10k$ за некој природен број k. Равенката (1) добива облик

$$2^{a-b}+10=11\cdot 2^{c-d}.$$

Ако $c-d\geq 2$, тогаш $4\,|\,11\cdot 2^{c-d}$, но за $a-b=10k$ бројот $2^{a-b}+10$ не е делив со 4. Значи, $c-d=1$. Значи, $2^{a-b}+10=11\cdot 2$, т.е. $2^{a-b}=12$, што не е можно.

Значи бројот 11 е најмалиот природен број кој неможе да се претстави во облик $\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$.

17. Даден е прост број p. Докажи, дека постои прост број q таков што за секој цел број n бројот n^p-p не е делив со q.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека за секој прост број q постои цел број n таков што $n^p\equiv p(\bmod q)$. Знаеме дека за $q\not\equiv 1(\bmod p)$ степените n^p ги даваат сите можни остатоци по модул q. Затоа бројот q ќе го побараме во облик $q=kp+1, k\in\mathbb{N}$. Бидејќи $p^k\equiv n^{kp}=n^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$, добиваме дека $q\,|\,p^k-1$ за секој таков q.

Нека q е прост делител на бројот $N=\frac{p^p-1}{p-1}=p^{p-1}+p^{p-2}+...+p+1$. Бидејќи $q\nmid p-1$ од $N\equiv p\equiv 1(\bmod p-1)$, следува дека редот на бројот p по модул q е p, па навистина е $q=kp+1$ за некој k. Сега од $q\,|\,(p^k-1, p^p-1)$ следува дека $q\,|\,p^{(p,k)}-1$, па затоа $(p,k)>1$, т.е. $p\,|\,k$. Понатаму, од $q=kp+1$ и $p\,|\,k$ следува дека $q\equiv 1(\bmod p^2)$. Последното значи дека сите прости делители на бројот N се од видот p^2x+1, што не е можно бидејќи $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$.

Втор начин. Ако $p=2$, тогаш $q=3$ ги има саканите својства.

Нека p е непарен. Да го разгледаме бројот $N=1+p+p^2+...+p^{p-1}$. Јасно, N е непарен и $N\equiv p+1(\bmod p^2)$. Според тоа, $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$ и затоа N има прост делител q за кој $q\not\equiv 1(\bmod p^2)$. Ќе докажеме дека q ги има саканите својства.

Бидејќи p не е делител на N, важи $q\neq p$. Освен тоа, ако претпоставиме дека q е делител на $p-1$, тогаш $N\equiv 1+1+...+1=p(\bmod q)$, т.е. q е делител на p, што не е можно. Значи, q не е делител на $p-1$. Уште да забележиме дека од равенството $(p-1)N=p^p-1$ следува дека $p^p\equiv 1(\bmod q)$.

Нека претпоставиме дека $n^p\equiv p(\bmod q)$ за некој природен број n. Од претходните разгледувања следува дека q не е делител на n и $n\not\equiv 1(\bmod q)$. Конгруенцијата $n^p\equiv p(\bmod q)$ ја степенуваме на степен p и добиваме $n^{p^2}\equiv p^p\equiv 1(\bmod q)$.

Нека k е редот на n по модул q. Тогаш од малата теорема на Ферма следува дека k е делител на $q-1$, а од конгрунцијата $n^{p^2}\equiv 1(\bmod q)$ следува дека k е делител на p^2. Од изборот на q следува дека $q-1$ не е делител на p^2, поа затоа $k=1$ или $k=p$. Првото противречи на $n\not\equiv 1(\bmod q)$. Во вториот случја добиваме $n^p\equiv 1(\bmod q)$, од што заедно со $n^p\equiv p(\bmod q)$ добиваме $p\equiv 1(\bmod q)$, што е противречност.

18. Нека $m, n\in\mathbb{N}$ се такви што $n>m\geq 1$ и последните три цифри на броевите

1978^m и 1978^n (во декаден броен систем) се еднакви.
Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. *Прв начин*. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000=8\cdot125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме

$$8\,|\,1978^m \quad \text{и} \quad 125\,|\,(1978^{n-m}-1).$$

Но, $1978=2\cdot989$ па од првиот услов следува $m\geq3$, а од вториот услов

$$1978^{n-m}\equiv(-2)^{n-m}\equiv1(\bmod 5).$$

Ова е можно само за $n-m=4k$, $k\geq1$. Останува да се определи најмалиот природен број k, таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125. Од

$$1978^4\equiv6(\bmod 125)$$

добиваме $6^k\equiv1(\bmod 125)$. Најмалиот таков број е 25, па решението на задачата е $m=3$, $n=103$.

Втор начин. Ќе користиме две леми. Првата лема е познатото тврдење за редод на број по даден модул.

Лема 1. Нека $(a,n)=1$ и $d\in\mathbb{N}$ е најмал број, таков што $a^d\equiv1(\bmod n)$. Ако $a^k\equiv1(\bmod n)$, тогаш $d\,|\,k$. ■

Лема 2. Најмалиот природен број $x>0$, таков што

$$1978^x\equiv1(\bmod 5^n),$$

т.е. редот на 1978 по модул 5^n е $x=\varphi(5^n)$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Покрај тоа ќе докажеме дека $1978^x\not\equiv1(\bmod 5^{n+1})$, каде $x=\varphi(5^n)$.

Нека $n=1$. Лесно се гледа дека $1978^x\equiv3^x\not\equiv1(\bmod 5)$ за $x=1,2,3$ и дека

$$1978^4\equiv3^4\equiv1(\bmod 5), \text{ но } 1978^4\equiv3^4\not\equiv1(\bmod 5^2).$$

Нека за $n=k$ бројот $x=\varphi(5^k)$ е најмалиот природен број, таков што

$$1978^x\equiv1(\bmod 5^k) \text{ и } 1978^x\not\equiv1(\bmod 5^{k+1}).$$

Природниот број y нека задоволува $1978^y\equiv1(\bmod 5^{k+1})$. Од лема 1 следува $y=tx$, па затоа $1978^{tx}-1\equiv0(\bmod 5^{k+1})$, односно

$$(1978^x-1)(1978^{x(t-1)}+1978^{x(t-2)}+...+1978^x+1)\equiv0(\bmod 5^{k+1}).$$

Бидеќи 1978^x-1 е делив со 5^k, а не е делив со 5^{k+1} се добива

$$1978^{x(t-1)}+1978^{x(t-2)}+...+1978^{x}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$$
$$(1978^{x(t-1)}-1)+(1978^{x(t-2)}-1)+...+(1978^{x}-1)+t\equiv 0(\mathrm{mod}\,5).$$

Броевите $1978^{xm}-1$, $m=1,2,...,t-1$ се деливи со 5, бидејќи $5^k \mid 1978^x-1$ и $1978^x-1 \mid 1978^{xm}-1$. Според тоа, $t\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Најмалиот природен број t кој е делив со 5 е $t=5$. Значи,

$$y=5x=5\cdot\varphi(5^k)=5\cdot 4\cdot 5^{k-1}=4\cdot 5^k=\varphi(5^{k+1})$$

и

$$1978^{y}\not\equiv 1(\mathrm{mod}\,5^{k+2})$$

бидејќи

$$(1978^{4x}-1)+(1978^{3x}-1)+(1978^{2x}-1)+(1978^{x}-1)+5\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,5^2).$$

Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Со помош на горните леми ќе ја генерализираме почетната задача.

Нека m и n се природни такви што $n>m\geq 1$. Последните k цифри на бројот 1978^m се еднакви, соодветно, на последните k цифри на бројот 1978^n (во декаден запис). Определи ги m и n така што $m+n$ има најмала можна вредност.

Решение. Бројот 1978^n-1978^m завршува на k нули, па затоа

$$1978^m(1978^{n-m}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,5^k),$$

од каде што следува

$$1978^{n-m}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5^k).$$

Од лема 2 и лема 1 следува дека

$$n-m=s\varphi(5^5)=4\cdot 5^{k-1}s,\ (s\neq 0).$$

Исто така мора да важи

$$1978^m(1978^{n-m}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^k).$$

Бидејќи $1978^{n-m}-1$ е непарен број, следува дека $2^m\cdot 989^m\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^k)$, од каде што следува дека $m\geq k$.

Збирот $n+m=4\cdot 5^{k-1}s+2m$, при услов $m\geq k$ ќе биде најмал за $s=1$ и $m=k$, па затоа бараните броеви се $m=k$ и $n=4\cdot 5^{k-1}+k=k+\varphi(5^k)$.

19. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ и

$$A(m,n)=m^{3^{4n}+6}-m^{3^{4n}+4}-m^5+m^3.$$

Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m,n)$ е делив со 1992 за секој $m\in\mathbb{N}$.

Решение. Да забележиме дека $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ и
$$A(m,n) = m^3(m^2-1)(m^{3^{4n}+1}-1).$$
Лесно се докажува дека 24 е делител на $A(m,n)$. Имено, $m(m^2-1)$ е производ на три последователни броеви, па затоа $3\,|\,m(m^2-1)$, што значи $3\,|\,A(m,n)$. Ако m е парен број, тогаш $2^3\,|\,m^3$, т.е. $2^3\,|\,A(m,n)$. Ако m е непарен број, тогаш m^2-1 е производ на два последователни парни броеви, едниот од кои е делив со 4, па затоа $2^3\,|\,A(m,n)$. Броевите 2, 3 и 83 се заемно прости и значи $1992\,|\,A(m,n)$ ако и само ако $83\,|\,A(m,n)$. Нека n е таков што $83\,|\,A(m,n)$ за секој $m \in \mathbb{N}$. Во случајов имаме $83\,|\,A(2,n) = 2^{3^{4n}+1}-1$. Ако s е редот на 2 по модул 83, тогаш $s\,|\,3^{4n}+1$. Да го определиме s. Бидејќи $(2,83)=1$ од малата теорема на Ферма следува $2^{82} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 83)$, па значи $s\,|\,82$, т.е. $s \in \{1,2,41,82\}$. Но, $2^1 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 83)$, $2^2 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 83)$ и
$$2^{41} \equiv 1024^4 \cdot 2 \equiv 28^4 \cdot 2 \equiv 784^4 \cdot 2 \equiv 37^4 \cdot 2 \equiv 82 (\mathrm{mod}\, 83),$$
односно $2^{41} \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 83)$. Според тоа, $s = 82$, па значи $82\,|\,3^{4n}+1$. Од друга страна $3^{4n} = 81^n$ и $81 \equiv -1(\mathrm{mod}\, 82)$, па затоа $82\,|\,3^{4n}+1$ само ако n е непарен број. ќе докажеме дека последното е доволно, т.е. дека за секој непарен број важи $83\,|\,A(m,n)$. За $m=1$ имаме $83\,|\,0 = A(1,n)$ и уште можеме да сметаме дека 83 не е делител на m. Но, 83 е прост број и затоа $(m,83)=1$. Повторно од малата теорема на Ферма следува дека $m^{82} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 83)$. Сега, бидејќи n е непарен број добиваме
$$3^{4n}+1 = 81^n + 1 = 82(81^{n-1} - 81^{n-2} + \ldots + 1) = 82K,\ K \in \mathbb{N}.$$
Значи, $m^{3^{4n}+1} = m^{82K} = (m^{82})^K \equiv 1^K = 1(\mathrm{mod}\, 83)$.

20. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $3p^{q-1}+1$ е делител на $11^p + 17^p$.

Решение. За $p=2$ непосредно се проверува дека задачата нема решение. Понатаму, нека $p>2$.

Бидејќи $N = 11^p + 17^p \equiv 4(\mathrm{mod}\, 8)$, следува дека $8 \nmid 3p^{q-1}+1 > 4$. Да разгледаме некој непарен прост делител r на бројот $3p^{q-1}+1$. Јасно, $r \notin \{3,11,17\}$. Ако $n \in \mathbb{Z}$ е таков што $17n \equiv -1(\mathrm{mod}\, r)$, тогаш $r\,|\,n^pN \equiv m^p - 1(\mathrm{mod}\, r)$, каде

$m=11n$. Значи, редот на бројот m по модул r е делител на p, т.е. $\text{ord}_r(m)\in\{1,p\}$. Притоа, ако $\text{ord}_r(m)=1$, имаме $r\,|\,m-1\equiv(11+17)n(\text{mod}\,r)$, што како единствена можност дава $r=7$. Од друга страна, ако $\text{ord}_r(m)=p$, тогаш $p\,|\,r-1$. Според тоа, каноничното разложување на бројот $3p^{q-1}+1$ има облик

$$3p^{q-1}+1=2^a7^b\,p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,, \qquad (*)$$

каде $p_i\notin\{2,7\}$ се прости броеви такви што $p_i\equiv 1(\text{mod}\,p)$.
Видовме дека $a\le 2$. Според тоа, ако $p=7$, тогаш $b=0$, а во спротивно

$$\tfrac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-...+17^{p-1}\equiv 4^{p-1}p(\text{mod}\,7),$$

па 11^p+17^p не е делив со 7^2. Во двата случаја е $b\le 1$.
За $q=2$ од (*) добиваме

$$3p+1=2^a7^b\,p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,,$$

па како важи $p_i\ge 2p+1$ ова е можно само ако $c_i=0$ за секој i, т.е. $3p+1=2^a7^b\in\{2,4,14,28\}$. Од овде не добиваме ниту едно решение.

Останува случајот $q>2$, а тогаш имаме $4\,|\,3p^{q-1}+1$, т.е. $a=2$. Сега во (*) десната страна е конгруентна со 4 или 28 по модул p, од каде што следува $p=3$. Во овој случај $3^q+1\,|\,6244$, што важи само за $q=3$. Навистина, парот $(p,q)=(3,3)$ е решение на задачата.

21. За еден прост број p ќе велиме дека е *добар,* ако:

1) не постои природен број $n\ge 2$ таков што $\frac{p^n-1}{n}$ е природен број заемно прост со n,
2) за бесконечно многу $k\in\mathbb{N}$ постојат $n_1,n_2,...,n_k\in\mathbb{N}$, поголеми од $\frac{p}{2}$ такви што за секој $1\le i\le k$ бројот $\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$ е природен број и заемно прост со n_{i+1} $(n_{k+1}=n_1)$.

Докажи дека 2 не е добар број, но сите непарни прости броеви се добри.

Решение. Нека $p=2$. Од $n\,|\,2^n-1$ следува $n=1$, па затоа 2 не е добар број. Навистина, нека допуштиме дека $n\,|\,2^n-1$ и $n>1$. Јасно, n е непарен број и нека $q,q\ge 3$ е неговиот најмал прост делител. Ако $s\ge 2$ е редот на 2 по модул q, т.е. најмалиот број за кој $q\,|\,2^s-1$, тогаш од $q\,|\,2^{q-1}-1$ (согласно

малата теорема на Ферма) и $q\,|\,2^n-1$ (бидејќи $q\,|\,n$ и $n\,|\,2^n-1$) следува, дека $s\,|\,q-1$ и $s\,|\,n$. Значи, s, па затоа и n има прост делител кој е помал од q што е противречност.
Нека $p\geq 3$. Прво ќе докажеме дека условот 1) е исполнет. Како и претходно следува, дека ако $n\,|\,p^n-1,\ n\geq 2$, тогаш најмалиот прост делител q на n е делител на $p-1$. Ако $n=q^e m$, тогаш од

$$p^n-1=(p^m-1)\prod_{j=0}^{e-1}\frac{p^{q^{j+1}m}-1}{p^{q^j m}-1}$$

следува, дека $q^{e+1}\,|\,p^n-1$. Значи, $q\,|\,n$, $q\,|\,\frac{p^n-1}{n}$, па затоа $q=1$, што е противречност.
Постојат повеќе начини за конструирање на низа, кои го задоволуваат условот 2). На пример, нека S е множеството прости делители на $p-1$ и $q\in S$. Нека $n_1=p-1$ и $q^{e_{q,1}}\,\|\,p-1$. При $i\geq 1$ индуктивно дефинираме $e_{q,i+1}$ и n_{i+1}: $q^{e_{q,i+1}}\,\|\,p^{n_i}-1$ и $n_{i+1}=\prod_{q\in S}q^{e_{q,i+1}}$. На читателот му останува да докаже, дека за доволно голем $k\in\mathbb{N}$ броевите $n_1,n_2,...,n_k$ ги имаат саканите својства.

22. Дадени се различни прости броеви p и q и природен број n такви што pq е делител на $n^{pq}+1$. Докажи дека, ако p^3q^3 е делител на $n^{pq}+1$, тогаш некој од броевите p^2 или q^2 е делител на $n+1$.

Решение. Јасно, $(p,n)=(q,n)=1$. Нека $p<q$. Ќе докажеме дека $p^2\,|\,n+1$.
Од условот и од малата теорема на Ферма следува $0\equiv n^{pq}+1\equiv n^q+1 (\bmod p)$. Според тоа, $n^{2q}\equiv 1 (\bmod p)$ и затоа редот на n по модул p е делител на $2q$. Но, редот на n по модул p е делител $p-1$, па затоа тој е делител на $(2q,p-1)=2$. Бидејќи $n\equiv 1 (\bmod p)$ не е можно, добиваме $n^2\equiv 1 (\bmod p)$, од каде следува $p\,|\,n+1$. Нека $n+1=pk,\ k\in\mathbb{N}$. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}n^{pq-1}-n^{pq-2}+...-n+1&\equiv\sum_{i=0}^{pq-1}(1-ap)^i\equiv\sum_{i=0}^{pq-1}(1-aip)\\&\equiv pq-\frac{ap^2q(pq-1)}{2}\equiv pq (\bmod p^2),\end{aligned}$$

па затоа $p\,|\,n^{pq-1}-n^{pq-2}+...-n+1$. Конечно, бидејќи

$$p^3\,|\,n^{pq}+1=(n+1)(n^{pq-1}-n^{pq-2}+...-n+1)$$

заклучуваме дека $p^2 \mid n+1$.

23. Докажи дека, ако постојат природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ за кои производот

$$(a_1^{2017}+a_2)(a_2^{2017}+a_3)...(a_{2016}^{2017}+a_{2017})(a_{2017}^{2017}+a_1)$$

е точен степен на прост број со степенов показател k, тогаш $k=2017$ или $k \geq 2017 \cdot 2018$.

Решение. За пократко испишување да ставиме $2017=m$. Нека p е прост број таков што $a_i^m + a_{i+1} = p^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}, i=1,2,...,m, a_{m+1}=a_1$. Ако ги собереме овие равенства, тогаш на левата страна добиваме парен број, па затоа $p=2$, бидејќи во спротивно десната страна би била непарен број како збир на непарен број непарни собирци.

Ќе докажеме дека за секој i бројот a_i е непарен. Навистина, ако $a_i = 2^{\alpha_i}\beta_i$, каде α_i е ненегативен цел број, а β_i е непарен број, тогаш од равенството $a_i^m + a_{i+1} = 2^{k_i}$ следува $m\alpha_i = \alpha_{i+1}$, бидејќи во спротивно на десната страна на претпоследното равенство ќе имаме степен на бројот 2, а на левата страна број од видот $2^u(2v+1)$, $u,v \geq 1$, што е противречност. Сега, ако ги собереме равенствата $m\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i=1,2,...,m$ добиваме $m\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$, од каде следува $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0$, па затоа $\alpha_i = 0$, $i=1,2,...,m$.

Ќе докажеме дека, ако $a_i = 1$ за некој i, тогаш $k=2018$. Да ја разгледаме Диофантовата равенка $a^m + 1 = 2^t$. Ако таа има решение за кое $a>1$, тогаш редот на a по модул 2^t е делител на $2 \cdot 2017$ и на $\varphi(2^t) = 2^{t-1}$, па затоа е делител на 2, што значи дека $2^t \mid a^2-1$. Тогаш $a^2 - 1 \geq 2^t = a^m + 1 > a^2$, што е противречност. Сега, ако $a_i = 1$за некој i, од претходните разгледувања следува дека $a_{i-1} = 1$ итн. т.е. $a_1 = a_2 = ... = a_m = 1$ и соодветно $k = 2018$.

Бидејќи $a_i^m + a_{i+1} > 2^m + a_{i+1}$, добиваме $k_i \geq m+1$ и затоа

$$k = \sum_{i=1}^{m} k_i \geq m(m+1) = 2017 \cdot 2018.$$

19. ПРИМИТИВНИ КОРЕНИ

1. Нека a и b се природни броеви такви што
$$2^a \equiv 2^b (\mathrm{mod} 101).$$
Докажи дека $a \equiv b (\mathrm{mod} 100)$.

Решение. Лесно се проверува дека 2 е приметивен корен по модул 101. Сега тврдењето следува од дефиницијата и својствата на примитивен корен.

2. Ако p е непарен прост број и a е примитивен корен по модул p, тогаш $a+p$ е примитивен корен по модул p. Докажи!

Решение. Непосредно следува од конгруенцијата
$$(a+p)^k = a^k + p\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} p^{i-1} \equiv a^k (\mathrm{mod}\, p).$$

3. Ако p е непарен прост број и a е примитивен корен по модул p, тогаш барем еден од броевите a^{p-1} и $(a+p)^{p-1}$ не е конгруентен со 1 по модул p^2. Докажи!

Решение. Ако го петпоставиме спротивното, тогаш добиваме дека p^2 е делител на разликата
$$(a+p)^{p-1} - a^{p-1} = (p-1)pa^{p-2} + \binom{p-1}{2} p^2 a^{p-3} + \dots + p^{p-1},$$
од каде следува дека $p \mid (p-1)a^{p-2}$, што не е можно.

4. За секој природен број a нека $n_a = 101a - 100 \cdot 2^a$. Нека $0 \le a,b,c,d \le 99$. Докажи дека од
$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d (\mathrm{mod} 10100)$$
следува дека $a=c, b=d$ или $a=d, b=c$.

Решение. Имаме $10100 = 101 \cdot 100$ и $(101,100)=1$, па затоа условот на задачата е еквивалентен на
$$n_a + n_b \equiv n_c + n_d (\mathrm{mod} 100) \text{ и } n_a + n_b \equiv n_c + n_d (\mathrm{mod} 101).$$
Ако во горните конгруенции замениме за n_a, n_b, n_c и n_d, по средувањето добиваме

$$a+b \equiv c+d \pmod{100} \tag{1}$$

и

$$2^a + 2^b \equiv 2^c + 2^d \pmod{101}. \tag{2}$$

Бидејќи 101 е прост број и $(2,101)=1$, од малата теорема на Ферма и (1) следува

$$2^{a+b} \equiv 2^{c+d} \pmod{101}.$$

Сега, од последната конгруенција и од (2) следува па затоа

$$2^a(2^c+2^d-2^a) \equiv 2^{c+d} \pmod{101},$$
$$(2^a-2^d)(2^a-2^c) \equiv 0 \pmod{101}.$$

Според тоа, $101 \mid (2^{a-d}-1)(2^{a-c}-1)$, па од $0 \le a,b,c,d \le 99$ и фактот дека 2 е примитивен корен по модул 101 добиваме $a-d=0$ или $a-c=0$,од што следува тврдењето на задачата.

5. Определи ги сите двоцифрени броеви $n=10a+b$, a,b се цифри, $a \neq 0$ такви што $n \mid k^a - k^b$ за секој природен број k.

Решение. Очигледно броевите 11, 22, 33, ..., 99 се решенија на задачата. Нека $a \neq b$. Нека p е прост делител на n и нека x е примитивен корен по модул p. Тогаш од $p \mid n \mid x^a - x^b$ следува дека $p-1$ е делител на $|a-b| \le 9$, па затоа $p=2,3,5,7$. Со непосредна проверка се добива дека решенија на задачата се и броевите 15, 28 и 48.

6. Нека p прост број. Секој примитивен корен по модул $p^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ е примитивен корен и по модул p. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека a не е примитивен корен по модул p. Тогаш постои природен број n таков што $1 \le n < p-1$ и важи $a^n \equiv 1 \pmod{p}$, т.е. $a^n = 1+pq$, за некој $q \in \mathbb{N}$. Сега, од Њутновата биномна формула следува

$$\begin{aligned} a^{np^{\alpha-1}} &= (1+pq)^{p^{\alpha-1}} \\ &= 1+p^{\alpha-1}pq + \frac{p^{\alpha-1}(p^{\alpha-1}-1)}{1\cdot 2}(pq)^2 + \dots \\ &\equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \end{aligned}$$

при што важи

$$tp^{\alpha-1} < p^{\alpha-1}(p-1) = \varphi(p^\alpha),$$

што значи дека a не е примитивен корен по модул p^α.

7. Нека p е прост број и $\alpha \geq 2$. Ако a е примитивен корен по модул p и важи

$$a^{p^{\alpha-2}(p-1)} \not\equiv 1(\bmod p^{\alpha}),$$

тогаш a е примитивен корен по модул p^{α}. Докажи!

Решение. Нека n е редот на бројот a по модул p^{α}. Тогаш $a^n \equiv 1(\bmod p^{\alpha})$ и $n \mid p^{\alpha-1}(p-1)=\varphi(p^{\alpha})$. Бидејќи $a^n \equiv 1(\bmod p)$ и a е примитивен корен по модул p, т.е. $\operatorname{ord}_p a = p-1$, добиваме дека $p-1 \mid n$, т.е. $n=(p-1)q$, за некој природен број q. Значи, $(p-1)q \mid p^{\alpha-1}(p-1)$, од каде следува дека $q \mid p^{\alpha-1}$, односно $q = p^{\beta}$, за некој β, $0 \leq \beta \leq \alpha-1$, па затоа

$$a^{p^{\beta}(p-1)} \equiv 1(\bmod p^{\alpha}). \qquad (1)$$

Ако $0 \leq \beta \leq \alpha-2$, тогаш со сепенување на конгруенцијата (1) со $p^{\alpha-2-\beta}$, добиваме

$$a^{p^{\alpha-2}(p-1)} \equiv 1(\bmod p^{\alpha}),$$

што противречи на претпоставката. Значи, $\beta=\alpha-1$, па затоа

$$n = p^{\alpha-1}(p-1)=\varphi(p^{\alpha}),$$

т.е. a е примитивен корен по модул p^{α}.

8. Определи ги сите прости броеви $p=5n+1$, $n \in \mathbb{N}$, за кои остатоците на $1^5, 2^5, ..., n^5$ при делење со p се по парови различни.

Решение. Нека степените $1^5, 2^5, ..., n^5$ се по парови различни по модул p. Ако x е примитивен корен по модул p, тогаш $y=x^5$ има ред n по модул p (Зошто?). Тоа значи дека $1^5, 2^5, ..., n^5$ се сите различни степени на y по модул p. Според тоа, збирот $1^5+2^5+...+n^5$ е делив со p, бидејќи од

$$1^5+2^5+...+n^5 \equiv a(\bmod p) \text{ и } (a,p)=1,$$

по множењето на последната конгруенција со $y=x^5$ се добива противречност.

Бидејќи

$$1^5+2^5+...+n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

а броителот во последната дропка е заемно прост со $5n+1=p$ кога $p \neq 11$, заклучуваме дека единствено решение е $p=11$.

9. Даден е прост број $p>3$. За произволно множество $S\subseteq\mathbb{Z}$ и $a\in\mathbb{Z}$, нека

$$S_a=\{x\in\{0,1,2,...,p-1\}\mid(\exists s\in S),\ x\equiv as(\mathrm{mod}\ p)\}.$$

а) Определи го бројот на множествата $S\subseteq\{1,2,...,p-1\}$ такви што низата $S_1,S_2,...,S_{p-1}$ содржи точно два различни члена.

б) Определи ги сите вредности на бројот $k\in\mathbb{N}$ за кои постои множество $S\subseteq\{1,2,...,p-1\}$ такво што низата $S_1,S_2,...,S_{p-1}$ содржи точно k различни членови.

Решение. Нека g е примитивен корен по модул p. Множествата $S_1,S_2,...,$ S_{p-1} се множествата $S_1,S_g,...,S_{g^{p-2}}$ во некој редослед. Низата $S_1,S_g,S_{g^2},...$ има период $p-1$, па затоа нејзиниот минимален период е делител на $p-1$. Притоа множествата $S_1,S_g,...,S_{g^{d-1}}$ се по парови различни (ако $S_{g^i}=S_{g^j}$, тогаш $S_1=S_{g^{|i-j|}}$). Понатаму, сите множења се по модул p.

б) Од претходно изнесеното следува дека $k\mid p-1$. Од друга страна, ако $k\mid p-1$ тогаш можеме да земеме $S=\{1,g^k,g^{2k},...\}$.

а) Минималниот период на низата $S_1,S_g,S_{g^2},...$ е 2, па затоа $S_0=S_2\neq S_1$. Тоа значи, дека од $x\in S$ следува $q^2x\in S$. Ако $a,ga\in S$, тогаш од претходно изнесеното следува дека $g^na\in S$, за секој $n\in\mathbb{N}_0$, т.е. $S=\{1,2,...,p-1\}$ што не е можно. Според тоа, од $x\in S$ следува $gx\notin S$ и $q^2x\in S$. Оттука следува дека S е едно од множествата $\{1,g^2,g^4,...,g^{p-3}\}$ и $\{g^3,g^5,...,g^{p-2}\}$, т.е. постојат две такви множества.

10. Докажи, дека меѓу произволни 100000 последователи природни 100-цифрени броеви постои број n за кој периодот на дропката $\frac{1}{n}$ е поголем од 2011.

Решение. Да забележиме дека ако $n=2^a5^bt$, каде $(t,10)=1,t>1$, тогаш периодот на дропка од видот $\frac{m}{n}$ е делив со редот на 10 по модул t. Според тоа, доволно е да најдеме број $t<100000$ за кој редот на 10 по модул t е поголем од 2011. Еден таков број е $7^4=2401$. Навистина, редот на 10 по модул 7^4 е $\varphi(7^4)=7^3\cdot6=2058$ (провери!).

Забелешка. Горното кратко решение се базира на фактот, дека 10 е примитивен корен по модул $7^4=2401$. Последното може да се види со непосредна проверка, но тоа следува и од општото тврдење, дека ако g е примитивен корен по модул p (p е непарен прост број) и $g^{p-1} \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, p^2)$, тогаш g е примитивен корен по модул p^k, за секој $k \in \mathbb{N}$. Во нашиот случај е $p=7$, $g=10$ и $k=4$. Изборот на 7^4 не е неприроден, бидејќи тоа е првиот степен на мал непарен прост број, кој е поголем од 2011 и ги задоволува условите.

11. Нека $m \geq 2$ е природен број. За природниот број n ќе велиме дека е добар за m, ако за секој природен број a заемно прост со n, бројот n е делител на $a^m - 1$. Докажи дека, ако n е добар за m, тогаш $n \leq 4m(2^m - 1)$.

Решение. Ако m е непарен број и n е добар за m, тогаш n е делител на $(n-1)^m - 1 = An + 2$, па затоа n е делител на 2,т.е. $n \leq 2 < 4m(2^m - 1)$.

Нека $m = 2^t q, t \geq 1$ и q е непарен број. Ако $n = 2^u(2v+1)$, $u, v \geq 1$ е добар за m, тогаш за $a = 2v - 1$ добиваме дека $2v+1$ е делител на $(2v-1)^m - 1$, па затоа $2v+1$ е делител на $2^m - 1$, т.е. $2v+1 \leq 2^m - 1$. На сличен начин за $a = 8v + 5$ добиваме дека 2^u е делител на

$$a^m - 1 = (a^q)^{2^t} - 1 = (a^q - 1)(a^q + 1)(a^{2q} + 1)...(a^{2^{t-1}q} + 1).$$

Одпретходните разгледувања следува дека $2^{t+2} \,\|\, a^m - 1$, што значи дека $u \leq t + 2$. Според тоа, во овој случај имаме

$$n = 2^u(2v+1) \leq 2^{t+2}(2^m - 1) \leq 4 \cdot 2^t q(2^m - 1) = 4m(2^m - 1).$$

20. ЦИКЛОМАТИЧНИ ПОЛИНОМИ. ТЕОРЕМА НА ЖИГИМОНДИ

1. Докажи дека $\Phi_n(x)$ е симетричен полином, т.е. во записот

$$\Phi_n(x)=\sum_{i=0}^{\varphi(n)} a_i x^i$$

следува $a_k = a_{\varphi(n)-k}$ за секој $k=0,1,...,\varphi(n)$.

Решение. За $n>2$ корените на $\Phi_n(x)$ се групираат во парови од видот $(e^{\frac{2k\pi i}{n}}, e^{\frac{2(n-k)\pi i}{n}})$. Имаме

$$(x-e^{\frac{2k\pi i}{n}})(x-e^{\frac{2(n-k)\pi i}{n}})=x^2-(e^{\frac{2k\pi i}{n}}+e^{\frac{2(n-k)\pi i}{n}})x+1,$$

кој е симетричен полином. Останува да забележиме дека производ на симетрични полиноми е симетричен полином.

2. Нека $n>1$ и $a>1$. Докажи, дека

$$(a-1)^{\varphi(n)} \le \Phi_n(a) \le (a+1)^{\varphi(n)} \quad (1)$$

Решение. Нека $\theta=\cos t+i\sin t,\ t\in[0,2\pi)$. Тогаш

$$a^2-2a+1\le a^2-2a\cos t+1\le a^2+2a+1$$
$$(a-1)^2\le(a-\cos t)^2+\sin^2 t\le(a+1)^2$$
$$a-1\le|a-\theta|\le a+1.$$

Сега неравенството (1) следува од формулите

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{\operatorname{ord}(\theta)=n\\ \theta^n=1}}(x-\theta) \text{ и } \deg\Phi_n=\varphi(n).$$

3. Нека $n>1$, $a\ge 3$ и p е прост број таков, што $p\mid n$. Докажи, дека $\Phi_n(a)\ge p$.

Решение. Бидејќи $p\mid n$ важи $\varphi(n)\ge\varphi(p)=p-1$. Од друга страна $2^{p-1}\ge p$, па од претходната задача следува

$$\Phi_n(a)\ge(a-1)^{\varphi(n)}\ge 2^{\varphi(n)}\ge 2^{p-1}\ge p.$$

4. Докажи дека постојат бесконечно многу парови различни прости броеви

(p,q) такви што $p\,|\,2^{q-1}-1$ и $q\,|\,2^{p-1}-1$.

Решение. Ќе користиме некои познати својства на цикломатичните полиноми: $n-$тиот цикломатичен полином

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{0<k<n\\ \mathrm{NZD}(k,n)=1}}(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

е моничен полином со целобројни коефициенти и $\deg\Phi_n(x)=\varphi(n)$, кој е делител на x^n-1. Се покажува дека ако $a\in\mathbb{Z}$ и p е прост делител на $\Phi_n(a)$, тогаш или $p\,|\,n$ или редот $\mathrm{ord}_p\,a$ на бројот a по модул p е еднаков на n (значи $n\,|\,p-1$). Притоа, ако $p\,|\,n$, тогаш $p^1\,\|\,\Phi_n(a)$. Оттука следува дека, ако $\Phi_n(a)>n$, тогаш $\Phi_n(a)$ има бареме ден прост делител p закој важи $\mathrm{ord}_p\,a=n\,|\,p-1$. За $n\geq 7$ важи $\Phi_n(2)>n$.

Нека $p>7$ е прост број таков што $p\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,8)$. Бројот $\Phi_{p-1}(2)\geq p$ има барем еден прост делител q таков што $p-1\,|\,q-1$, па затоа е исполнето $p\,|\,2^{2^{n+1}}-1\,|\,2^{q-1}-1$. Според Ојлеровиот критериум важи $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv1(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $\mathrm{ord}_p\,2\neq p-1$, па затоа $q\neq p$. Бидејќи $q\,|\,\Phi_{p-1}(2)\,|\,2^{p-1}-1$, заклучуваме дека патот (p,q) ги задоволува условите на задачата.

5. Нека p е прост број. Докажи дека постои прост број q таков што $q\nmid n^p-p$ за секој природен број n.

Решение. Да забележиме дека ако $q\,|\,n^p-p$, тогаш $1\equiv n^{q-1}\equiv p^{\frac{q-1}{p}}(\mathrm{mod}\,q)$, па затоа доволно е да докажеме дека постои прост број q таков што редот на бројот p по модул q е еднаков на p и $p^2\nmid q-1$.

Нека q е прост делител на бројот $1+p+...+p^{p-2}+p^{p-1}$. Тогаш, $q\equiv1(\mathrm{mod}\,p)$. Но, $q\nmid p-1$, па затоа $\mathrm{ord}_q\,p=p$. Нека претпоставиме дека за секој ваков број q важи $p^2\,|\,q-1$. Тоа повлекува дека

$$1+p+...+p^{p-2}+p^{p-1}\equiv1(\mathrm{mod}\,p^2),$$

што не е можно. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

6. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што ниту еден од простите делители на бројот n^2+n+1 не е поголем од $\sqrt{n}$.

Решение. Да ги разгледаме броевите $n=k^m$, каде $(m,3)=1$. Од својствата на цикломатичните полиноми имаме, ако $(a,n)=1$, тогаш

$$\Phi_a(x^n)=\prod_{d|n}\Phi_{ad}(x).$$

Понатаму, $n^2+n+1=\Phi_3(k^m)$, па затоа важи

$$n^2+n+1=\Phi_3(k^m)=\prod_{d|m}\Phi_{3d}(k).$$

Очигледно, важи $(k+1)^{\varphi(3n)}>\Phi_{3n}(k)$, за секој n бидејќи $k+1>k-\theta$, каде θ е произволен $3n-$ корен на единицата. Затоа сакаме да докажеме дека за некој k постои број m, таков што $(k+1)^{\varphi(3m)}<k^{\frac{m}{2}}$, бидејќи тогаш тврдењето ќе биде исполнето, затоа што секој множител во производот нема да биде поголем од $\sqrt{n}$.

Бидејќи $\frac{\varphi(x)}{x}$ може да биде произволно блиску до 0 (Зошто?), можеме да изберме x таков што $\frac{\varphi(x)}{x}<0,01$. Ако земеме $m=x$ добиваме

$$(k+1)^{\varphi(3m)}<(k+1)^{3\cdot 0,01m}.$$

Тогаш за доволно големо k важи $(k+1)^{3\cdot 0,01m}<k^{\frac{m}{2}}$, со доказот е завршен.

7. Определи ги сите четворки природни броеви (x,r,p,n) такви што p е прост број, $n,r>1$ и важи

$$x^r-1=p^n.$$

Решение. Очигледно $x>1$, па од теоремата на Жигимонди следува дека x^r-1 има делител кој не е делител на $x-1$, што значи дека сигурно има најмалку два прости делители, што противречи на условот на задачата, освен во исключоците на теоремата на Жигимонди. Ако $x=2$ и $r=6$, тогаш равенката нема решение, додека за $r=2$ и $x=2^s-1$ имаме $p=2$, па затоа важи $(2^s-1)^2-1=2^n$, т.е. $2^{s-1}-1=2^{n-s-1}$, од каде добиваме $s=2$, па затоа $x=3$ и $n=3$. СПоред тоа, единствено решение е четворката $(x,r,p,n)=(3,2,3,3)$.

8. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,p) такви што p е прост број и важи

$$p^x-y^p=1.$$

Решение. Слично како во претходната задача знаеме дека за $y,p>1$ бројот y^p+1 има најмалку два различни прости делители, што е можно само во исклучоците на последицата на теоремата на Жигимонди, т.е. $y=2, p=3$ и тогаш $x=2$. За $y=1$ лесно се добива дека $p=2$ и $x=1$.

9. Нека a,b се прости броеви такви што $a>b>2$. Докажи дека $2^{ab}-1$ има најмалку три различни прости делители.

Решение. Јасно, $2^a-1 \mid 2^{ab}-1$ и $2^b-1 \mid 2^{ab}-1$. Бидејќи $ab>6$, заклучуваме дека $2^{ab}-1$има прост делител кој не е делител ниту на 2^a-1 ниту на 2^b-1. Исто така, и 2^a-1 има делител кој не е делител на 2^b-1, а и бројот 2^b-1 има најмалку еден прост делител. Со тоа тврдењето на задачата е докажано.

10. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5^x-3^y=z^2.$$

Решение. Со разгледување по модул 3 и по модул 4 се добива дека x и y се парни броеви, а од самата равенка следува дека и z е парен број. Според тоа,

$$3^{2b}=5^{2a}-z^2=(5^a-z)(5^a+z).$$

Бидејќи важи

$$(5^a-z,5^a+z)=(5^a-z,2z)=(5^a-z,z)=(5^a,z)=1,$$

па затоа $5^a-z=1$ и $5^a+z=3^{2b}$. Со собирање на овие равенки добиваме дека $2\cdot 5^a=3^{2b}+1$. Ако $b=1$, тогаш $a=1$, па затоа $(x,y,z)=(2,2,4)$ е едно решение на задачата. Ако $b>1$, тогаш $3^{2b}+1$ има делител кој не е делител на $3^2+1=10$, т.е. делител различен од 2 и 5, што е противречност. Од добиената противречност следува дека не постојат други решенија на почетната равенка.

11. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,p) такви што

$$2^a+p^b=19^a.$$

Решение. Ако равенката ја запишеме во видот $19^a-2^a=p^b$, тогаш од теоремата на Жигимонди непосредно следува дека $a=1=b$ и $p=17$.

21. КВАДРАТНИ ОСТАТОЦИ

1. Дали конгруенцијата

а) $x^2 \equiv 68 \pmod{113}$,

б) $x^2 \equiv 310 \pmod{521}$,

в) $x^2 + 174 \equiv 0 \pmod{619}$,

има решение.

Решение. Прво да забележиме дека броевите 113, 521 и 619 се прости.

а) Имаме:

$$\begin{aligned}(\tfrac{68}{113}) &= (\tfrac{2}{113})^2(\tfrac{17}{113}) = (\tfrac{113}{17}) = (\tfrac{11}{17}) = (\tfrac{17}{11}) = (\tfrac{6}{11})\\ &= (\tfrac{2}{11})(\tfrac{3}{11}) = -(\tfrac{3}{11}) = (\tfrac{11}{3}) = (\tfrac{2}{3}) = -1,\end{aligned}$$

што значи дека дадената конгруенција нема решение.

б) Од равенството

$$(\tfrac{310}{521}) = (\tfrac{2}{521})(\tfrac{5}{521})(\tfrac{31}{521}) = (\tfrac{521}{5})(\tfrac{521}{31}) = (\tfrac{1}{5})(\tfrac{25}{31}) = (\tfrac{5}{31})^2 = 1,$$

следува дека дадената конгруенција има две решенија.

в) Од равенствата

$$\begin{aligned}(\tfrac{-174}{619}) &= (\tfrac{-1}{619})(\tfrac{2}{619})(\tfrac{3}{619})(\tfrac{29}{619}) = (\tfrac{3}{619})(\tfrac{29}{619}) = -(\tfrac{619}{3})(\tfrac{619}{29})\\ &= -(\tfrac{1}{3})(\tfrac{10}{29}) = -(\tfrac{2}{29})(\tfrac{5}{29}) = (\tfrac{29}{5}) = (\tfrac{2}{5})^2,\end{aligned}$$

следува дека дадената конгруенција има две решенија.

2. Нека $\{a_n\}_{n\geq 2}$ е низа природни броеви определена со

$$a_n = n^6 + 5n^4 - 12n^2 - 36.$$

Докажи дека:

а) секој прост број е делител на барем еден член на оваа низа,

б) постои природен број кој не е делител на ниту еден член на оваа низа.

Решение. а) Лесно се гледа дека

$$a_n = (n^2+6)(n^2+2)(n^2-3).$$

Да претпоставиме дека постои прост број p таков што $p \nmid a_n$, т.е.

$$(\tfrac{-2}{p}) = (\tfrac{3}{p}) = (\tfrac{-6}{p}) = -1.$$

Според тоа,

$$-1 = (\tfrac{-6}{p}) = (\tfrac{-2}{p}) \cdot (\tfrac{3}{p}) = (-1)^2 = 1,$$

што е противречнсост.

б) Тоа е, на пример, $n=8$. Квадратните остатоци по модул 8 се 0, 1 и 4, а a_n е конгруентен со 4 или 6 по модул 8, па затоа не може да биде делив со 8.

3. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што бројот n^2+1 има прост делител поголем од $2n+\sqrt{2n}$.

Решение. Како што знаеме, постојат бесконечно многу прости броеви од облик $p=4k+1, k\in\mathbb{N}$ и дека за секој таков број p важи $(\frac{-1}{p})=1$, што значи дека постои точно еден природен број n, $n<\frac{p-1}{2}$ таков што $n^2\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$. Тогаш n^2+1 има прост делител p поголем од $2n$. Ќе докажеме дека за $p>20$ всушност важи $p>2n+\sqrt{2n}$.

Нека $k=p-2n$. Од $p\,|\,(2n)^2+4\equiv k^2+4\,(\mathrm{mod}\, p)$ и $k\geq\sqrt{p-4}>4$ следува дека $k^2\geq p-4=2n+k-4>2n$. Затоа, $p=2n+k>2n+\sqrt{2n}$ и $p\,|\,n^2+1$.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу парови различни прости броеви (p,q) такви што $p\,|\,2^{q-1}-1$ и $q\,|\,2^{p-1}-1$.

Решение. За $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, да избереме прости делители $p\,|\,2^{2^n}+1$ и $q\,|\,2^{2^{n+1}}+1$. Редот на бројот 2 по модул p е 2^{n+1}, па затоа $2^{n+1}\,|\,p-1$. Уште повеќе според Ојлеровиот критериум важи

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv(\tfrac{2}{p})=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=1(\mathrm{mod}\, p),$$

па затоа $2^{n+1}\,|\,\frac{p-1}{2}$, т.е. $2^{n+2}\,|\,p-1$. Аналогно, $2^{n+3}\,|\,q-1$. Сега очигледно $p\,|\,2^{2^{n+1}}-1\,|\,2^{q-1}-1$ и $q\,|\,2^{2^{n+2}}-1\,|\,2^{p-1}-1$.

5. Определи ги сите точни квадрати во низата $a_n=2^n+2021n$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $n=2k+1$ и да претпоставиме дека $2^{2k+1}+2021n=x^2, x\in\mathbb{N}$. Бидејќи $2021=43\cdot 47$ добиваме $x^2\equiv 2\cdot 2^{2k}(\mathrm{mod}\, 43)$. Нека $y\in\mathbb{N}$ е таков што $2^k y\equiv 1(\mathrm{mod}\, 43)$. Тогаш $(xy)^2\equiv 2(2^k y)^2\equiv 2(\mathrm{mod}\, 43)$, т.е. 2 е квадратен остаток по модул 43, што е противречност.

Нека $n=2k$ и $2^{2k}+2021n=x^2, x\in\mathbb{N}$. Тогаш $(x-2^k)(x+2^k)=2021n$, па затоа

$$x-2^k=d_1n_1,\ \ x+2^k=d_2n_2,\ d_1d_2=2021,\ n_1n_2=n,\ d_1,d_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}.$$

Имаме $2^{k+1}=\frac{2021n}{d_1n_1}-d_1n_1<2021n$, па затоа $2^k<2021k$. Но, функцијата $f(k)=\frac{2^k}{k}$ монотоно расте и $f(15)>2021$. Според тоа, $k\in\{1,2,...,14\}$, при што со непосредна проверка (случаите лесно се отфрлаат по различни модули) добиваме дека единствено решение е $k=2, x=90, n=4$.

6. Нека a и b се заемно прости природни броеви и a_n и b_n се цели броеви, дефинирани со равенството

$$(a+b\sqrt{2})^{2n}=a_n+b_n\sqrt{2}.$$

Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број $n\leq p$ таков што p е делител на b_n.

Решение. Бидејќи $b_1=2ab$, т.е. $p=2$ и сите прости делители на ab се решенија на задачата, во натамошноте разгледувања ќе претпоставиме дека p е непарен прост број, заемно прост со a и со b.

Од условот добиваме

$$\begin{aligned}a_n+b_n\sqrt{2}&=(a+b\sqrt{2})^{2n}=(a+b\sqrt{2})^{2(n-1)}(a^2+2b^2+2ab\sqrt{2})\\&=(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2})(a^2+2b^2+2ab\sqrt{2})\end{aligned}$$

од каде следуваат рекурзиите

$$\begin{aligned}a_n&=(a^2+2b^2)a_{n-1}+4abb_{n-1}\\b_n&=2aba_{n-1}+(a^2+2b^2)b_{n-1}.\end{aligned}$$

Ќе разгледаме два случаја: $p\,|\,a^2-2b^2$ и $(p,a^2-2b^2)=1$.

Прв случај. Нека $p\,|\,a^2-2b^2$, p е непарен и $(p,ab)=1$. Тогаш p не е делител на $b_1=2ab$. Нека претпоставиме дека p е делител на некој $b_r, r\geq 2$ и нека r е најмалиот индекс со тоа својство. Тогаш

$$\begin{aligned}0\equiv b_r&=2ab((a^2+2b^2)a_{r-2}+4abb_{r-2})+(a^2+2b^2)b_{r-1}\\&=2ab((a^2+2b^2)a_{r-2}+4abb_{r-2})+\\&\quad+2(a^2+2b^2)b_{r-1}-(a^2+2b^2)(2aba_{r-2}+(a^2+2b^2)b_{r-2})\\&=2(a^2+2b^2)b_{r-1}-(a^2-2b^2)^2b_{r-2}\\&\equiv 2(a^2+2b^2)b_{r-1}(\operatorname{mod}p)\end{aligned}$$

Од претпоставките следува дека $(p,2(a^2+2b^2))=1$, па затоа од претходните конгруенции следува $p\,|\,b_{r-1}$, што противрели на изборот на r. Според тоа, во овој случај немаме решение на задачата.

Втор случај. Нека $(p, a^2-2b^2)=1$, p е непарен и $(p,ab)=1$. Да забележиме дека

$$b_n = \frac{(a+b\sqrt{2})^{2n}-(a-b\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}} = \sum_{k-\text{непарен}} \binom{2n}{k} a^{2n-k} b^k 2^{\frac{k-1}{2}} .$$

Нека претпоставиме дека постои цел број m таков што $m^2 \equiv 2 (\bmod p)$, т.е. дека 2 е квадратен остаток по модул p. Тогаш

$$b_n \equiv \sum_{k-\text{непарен}} \binom{2n}{k} a^{2n-k} b^k m^{k-1} = \frac{(a+bm)^{2n}-(a-bm)^{2n}}{m} (\bmod p) .$$

Од $(a+bm)(a-bm) \equiv a^2-2b^2 (\bmod p)$, имаме $(a+bm,p)=(a-bm,p) =1$ и можеме да ја примениме теоремата на Ферма за $n=\frac{p-1}{2}$, при што добиваме $b_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 (\bmod p)$.

Нека сега конгруенцијата $x^2 \equiv 2 (\bmod p)$ нема решенија и да го разгледаме $n=\frac{p+1}{2}$. Тогаш $\binom{2n}{k} = \binom{p+1}{k} \equiv 0 (\bmod p)$. Сега, ако ја искористиме теоремата на Ферма и фактот дека од критериумот на Ојлер следува $2^{\frac{p+1}{2}} \equiv -1 (\bmod p)$ добиваме

$$b_{\frac{p+1}{2}} \equiv (p+1)a^p b + (p+1)ab^p 2^{\frac{p+1}{2}} \equiv ab(1+2^{\frac{p+1}{2}}) (\bmod p) .$$

Од претходно изнесеното следува, дека секој прост број p таков што $(p, a^2-2b^2)=1$, p е непарен и $(p,ab)=1$ е решение на задачата.

7. Даден е полиномот

$$f(x) = x^8+4x^6+2x^4+28x^2+1 .$$

Нека $p>3$ е прост број таков што постои $z \in \mathbb{N}$ за кој $p \mid f(z)$. Докажи дека постојат цели броеви $z_1, z_2, ..., z_8$ такви што за $g(x)=(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_8)$ важи дека сите коефициенти на полиномот $f(x)-g(x)$ се деливи со p.

Решение. Воведуваме смена $X=x^2$ и дадениот полином го сведуваме на полиномот

$$f_1(X) = X^4+4X^3+2X^2+28X+1.$$

Потоа, воведуваме смена $y=X+1$ и го добиваме полиномот

$$h(y) = y^4-4y^2+32y-28 .$$

Идејата на решението е по модул p да го факторизираме овој полином. Прво $h(y)$ ќе го претставиме како разлика на квадрати. Имено, забележуваме дека

важи
$$h(y)=(y^2+2)^2-2(2y-4)^2 .$$
Ќе докажеме дека при дадените претпоставки постои квадрат на цел број кој дава остаток 2 при делење со p, т.е. дека 2 е квадратен остаток по модул p.

Бидејќи $p \mid f(z)=h(t)$, каде $t=z^2+1$, добиваме дека
$$(t^2+2)^2 \equiv 2(2t-4)^2 (\operatorname{mod} p) .$$
Сега, $2t-4$ не е делив со p, бидејќи во спротивно ќе важиу или $p=2$ или $t \equiv 2(\operatorname{mod} p)$. Во вториот случај од горната конгруенција ќе следува $p \mid 6^2$, што противречи на претпоставката $p>3$. Значи, постои u таков што $u(2t-4) \equiv 1(\operatorname{mod} p)$, па затоа
$$(u(t^2+2))^2 \equiv 2(\operatorname{mod} p) .$$
Да означиме $a=u(t^2+2)$. Сега имаме
$$h(y) \equiv (y^2+2)^2-(2a(y-2))^2 (\operatorname{mod} p) .$$
Во горната конгруенција, при претставување на десната страна како разлика на квадрати, едниот од множителите е
$$y^2+2-2a(y-2)=(y-a)^2+(2+4a-a^2) ,$$
што по модул p е конгруентно со $(y-a)^2+4a$. На потполно аналоген начин се добива дека другиот множител по модул p е конгруентен со $(y+a)^2-4a$ и така
$$h(y) \equiv ((y-a)^2+4a)((y+a)^2-4a)(\operatorname{mod} p) .$$
Сега за горните множители ја применуваме претходната идеја, докажувајќи дека двата броја a и $-a$ се квадратни остатоци по модул p. Бидејќи $h(t)$ е делив со p, еден од броевите $(t-a)^2+4a$ и $(t+a)^2-4a$ е делив со p. Бидејќи $p \neq 2$, барем еден од броевите a, $-a$ е конгруентен на некој квадрат по модул p, т.е. постои b таков што
$$b^2 \equiv \pm a (\operatorname{mod} p) .$$
Во двата случаја заклучуваме дека за некој цел број b важи
$$h(y) \equiv ((y-b^2)^2+4b^2)((y+b^2)^2-4b^2)(\operatorname{mod} p) \tag{1}$$
и p е делител на целиот број
$$\begin{aligned}((t-b^2)^2+4b^2)((t+b^2)^2-4b^2) &= ((t-b^2)^2+4b^2)(t+b^2-2b)(t+b^2+2b)\\ &= ((t-b^2)^2+(2b)^2)(z^2+(b-1)^2)(z^2+(b+1)^2).\end{aligned}$$
Според тоа, p е делител на збир на два квадрати. Уште повеќе, во прашање е

збир на два квадрати од кои ниту еден не е делив со p (доволно е да се воочи дека според условот на задачата $p \nmid z$, како и дека $p \nmid 2b$ бидејќи $p > 3$ и од $p \mid b$ ќе следува дека $p \mid a$, што не е можно заради изборот на a). Според тоа, за некои цели броеви v, w такви што $p \nmid v, p \nmid w$ важи $v^2 \equiv -w^2 (\mathrm{mod}\, p)$. Ако c е цел број таков што $cw \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, тогаш

$$(cv)^2 \equiv -(cw)^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p), \tag{2}$$

т.е. -1 е квадратен остаток по модул p. Ако замениме во (1), добиваме дека $h(y)$ по модул p се разложува на линеарни множители

$$h(y) = (y - b^2 - 2bcv)(y - b^2 + 2bcv)(y + b^2 - 2b)(y + b^2 + 2b).$$

Враќајќи ја смената $y = x^2 + 1$ и водејќи сметка за (2) добиваме дека

$$(x^2 - (b+cv)^2)(x^2 - (b-cv)^2)(x^2 - ((b-1)cv)^2)(x^2 - ((b+1)cv)^2)$$

е разложување на полиномот $f(x)$ по модул p, па осумте броеви

$$\pm(b+cv), \pm(b-cv), \pm(b-1)cv, \pm(b+1)cv$$

ги задоволуваат бараните услови.

8. а) Нека $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ е прост број. Докажи дека бројот $q = 2p+1$ е прост број ако и само ако $2^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$.

б) Докажи дека Мерсеновиот број $M_{251} = 2^{251} - 1$ не е прост.

Решение. а) Ако $q = 2p+1$ е прост број, тогаш

$$(\tfrac{2}{p}) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} = 1\ .$$

Сега, од критериумот на Ојлер следува

$$2^p = 2^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p).$$

Обратно, нека $2p+1 \mid 2^p - 1$. Така, p е ред на 2 по модул $2p+1$ и затоа важи $p \mid \varphi(2p+1) \le 2p$. Бидејќи $\varphi(2p+1)$ е парен број, единствена можност е $\varphi(2p+1) = 2p$, што значи дека $2p+1$ е прост брпој.

б) Броевите 251 и $2 \cdot 251 + 1 = 503$ се прости и важи $251 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, па од а) следува дека $503 \mid M_{251}$, што значи дека бројот M_{251} не е прост.

9. Нека $(\frac{a}{p}) = 1$. Реши ја конгруенцијата $x^2 \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$ ако $p = 4k+3$ или $p = 8k+5$.

Решение. Ако $p = 4k+3$, тогаш

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{2k+1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p),$$

па затоа $(a^{k+1})^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $x \equiv \pm a^{k+1} (\mathrm{mod}\, p)$.

Ако е $p = 8k+5$, тогаш

$$a^{\frac{p-1}{2}} = a^{4k+2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Според тоа, $a^{2k+1} \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, p)$, па е $a^{2k+2} \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$. Бидејќи $(\frac{2}{p}) = -1$, добиваме $2^{4k+2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Според тоа, решенијата се

$$x \equiv \pm a^{k+1} (\mathrm{mod}\, p) \text{ или } x \equiv \pm a^{k+1} 2^{2k+1} (\mathrm{mod}\, p).$$

10. Докажи дека $4kxy - 1$ не е делител на бројот $x^m + y^n$ за било кои природни броеви x, y, k, m, n.

Решение. Да забележиме дека $(x^m, y^n, 4kxy-1) = 1$. Нека $m' = [\frac{m}{2}]$ и $n' = [\frac{n}{2}]$. Имаме три можности:

1) $m = 2m'$ и $n = 2n'$. Тогаш од $4kxy \mid (x^{m'})^2 + (y^{n'})^2$ следува $(\frac{-1}{4kxy-1}) = 1$, што не е можно.

2) $m = 2m'$ и $n = 2n'+1$ (случајот $m = 2m'+1$ и $n = 2n'$ е аналоген). Тогаш $4kxy \mid (x^{m'})^2 + y(y^{n'})^2$, па затоа $(\frac{-y}{4kxy-1}) = 1$, што не е можно. Навистина, ако y е непарен број, тогаш

$$(\frac{-y}{4kxy-1}) = (\frac{-1}{4kxy-1})(\frac{y}{4kxy-1}) = (-1) \cdot (-1)^{\frac{y-1}{2}} (\frac{-1}{y}) = -1,$$

а ако $y = 2^t y'$, при што $t, y' \in \mathbb{N}$ и $t \geq 1$, тогаш

$$(\frac{-y}{4kxy-1}) = (\frac{2}{4kxy-1})^t (\frac{-y'}{4kxy-1}) = 1^t \cdot (\frac{-y'}{4 \cdot 2^t kxy' - 1}) = -1.$$

3) $m = 2m'+1$ и $n = 2n'+1$. Тогаш $4kxy \mid x(x^{m'})^2 + y(y^{n'})^2$, па затоа важи $(\frac{-xy}{4kxy-1}) = 1$. Од друга страна

$$(\frac{-xy}{4kxy-1}) = (\frac{-4xy}{4kxy-1}) = (\frac{-1}{4kxy-1}) = -1,$$

што е противречност.

11. За фиксиран природен број a дефинираме низа $x_1, x_2, \ldots$ со

$$x_1 = a, \ x_{n+1} = 2x_n + 1, n \in \mathbb{N}.$$

Нека $y_n = 2^{x_n} - 1$. Определи го најголемиот можен број k за кој постои таков a што сите броеви $y_1, y_2, ..., y_k$ се прости.

Решение. Лесно се гледа дека ако y_i е прост број, тогаш и x_i е прост број. Според тоа, $x_1 = a$ е прост број. За $a = 2$ броевите $y_1 = 3$ и $y_2 = 31$ се прости, но $y_3 = 2047$ не е прост број.

Нека претпоставиме дека за некој непарен прост број a броевите y_1, y_2, y_3 се прости. Тогаш x_1, x_2, x_3 се прости броеви, $x_1 \geq 3$ е непарен, $x_2 > 3$, $x_2 \equiv 3 \pmod 4$ и $x_3 \equiv 7 \pmod 8$.

Последното значи дека 2 е квадратен остаток по модул x_3, па од критериумот на Ојлер следува $2^{\frac{x_3-1}{2}} \equiv 1 \pmod{x_3}$. Од друга страна,

$$2^{\frac{x_3-1}{2}} - 1 = 2^{x_2} - 1 = y_2$$

е прост број. Според тоа, $x_3 = y_2$, односно $2x_2 - 1 = 2^{x_2} + 1$. Лесно се гледа дека последната равенка неме решение.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1.$$

Решение. Ако $n = 1$, тогаш очигледно $(m, n) = (1,1)$ е решение на равенката. Нека $n > 1$. Ако n е непарен, тогаш од неравенствата

$$(n^{\frac{n+1}{2}})^2 < n^{n+1} + n - 1 = m^6 < (n^{\frac{n+1}{2}} + 1)^2$$

следува дека m^6 е меѓу два квадрати, што не е можно. Слично, ако $3 | n+1$ се покажува дека m^6 е меѓу два куба, што повторно не е можно. Понатаму, ако $3 | n$, тогаш $m^6 \equiv -1 \pmod 3$, што повоторно не е можно. Останува единствената можност $n \equiv 4 \pmod 6$.

Бидејќи $n+1 | n^{n+1} + 1 + n + 1 = m^6 + 3$, добиваме $m^6 \equiv -3 \pmod p$ за произволен прост делител p на $n+1$. Според тоа, -3 е квадратен остаток по модул p, што значи дека $p \equiv 1 \pmod 3$. Но, тогаш $n+1 \equiv 1 \pmod 3$, што противречи на претходните разгледувања.

13. Нека n еприроден број. Докажи дека бројот $3^n + 2$ нема прост делител од видот $24k + 13$.

Решение. Нека претпоставиме дека $p \equiv 13 \pmod{24}$ е прост делител на бројот $3^n + 2$ за некој природен број n.

Ако n е парен број, тогаш -2 е квадратен остаток по модул p, па затоа последователно добиваме

$$1=(\frac{-2}{p})=(\frac{-1}{p})(\frac{2}{p})=(\frac{2}{p})=-1,$$

што е противречност.

Ако n е непарен, тогаш $p\,|\,3^{n+1}+6$, т.е. -6 е квадратен остаток по модул p, па затоа последователно добиваме

$$1=(\frac{-6}{p})=(\frac{2}{p})(\frac{-3}{p})=(\frac{2}{p})(\frac{p}{3})=-1,$$

што повторно е противречност.

14. Дадени се природни броеви $a>1$ и b со различна парност. Докажи дека $2^a-1\nmid 3^b-1$.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Ако a е парен број, тогаш $2\,|\,2^a-1\,|\,3^b-1$, што е противречност.

Нека a е непарен број. Тогаш, лесно се докажува дека $2^a-1\equiv 7 \pmod{12}$. Оттука следува дека постои прост број $p\equiv\pm 5 \pmod{12}$ кој е делител на 2^a-1. Тогаш $p\,|\,3^b-1$. Бидејќи b е непарен, од $3^{b+1}\equiv 3 \pmod p$ следува дека 3 е квадратен остаток по модул p. Тогаш од Гаусовиот закон за реципроцитет следува $(\frac{p}{3})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Лесно се проверува дека последното равенство не е исполнето за $p\equiv\pm 5 \pmod{12}$, па повторно добиваме противречност.

15. Нека p е прост број и $a\in\mathbb{Z}$ е заемно прост со p. Докажи дека $-a$ е квадратен остаток по модул p ако и само ако постојат $x,y\in\mathbb{Z}$, заемно прости со p такви што $p\,|\,x^2+ay^2$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема (*Туе*). За секој цел број a и секој прост број p, $(a,p)=1$ постојат цели броеви x,y такви што

$$ay\equiv x \pmod p,\ 0<|x|,|y|<\sqrt{p}.$$

Доказ. Нека f е најмалиот цел број кој е поголем од $\sqrt{p}$ и да ги разгледаме остатоците кои се добиваат при делење со p на броевите од видот $u+av$, каде $0\le u,v<f$. Имаме $f^2>p$ такви остатоци, па затоа два од нив се совпаѓаат. Нека u,u',v,v' се такви што $u+av\equiv u'+av' \pmod p$.

Ставаме $x=u-u'$ и $y=v-v'$ и добиваме $x\equiv ay \pmod p$ и освен тоа важи $-f<u,v<f$. ■

Нека $-a$ е квадратен остаток по модул p, т.е. $t^2\equiv -a \pmod p$ за некој цел број t. Јасно, $(t,p)=1$. Тогаш од лемата на Туе следува дека постојат цели броеви x и y такви што $ty\equiv x(\mod p)$. Тоа значи, дека $t^2y^2\equiv x^2(\mod p)$ и како $t^2y^2\equiv -ay^2(\mod p)$, добиваме $x^2\equiv -ay^2(\mod p)$, т.е. $p\,|\,x^2+ay^2$.

Обратно, ако $p\,|\,x^2+ay^2$ за некои $x,y\in\mathbb{Z}$ заемно прости со p, тогаш избираме $z\in\mathbb{Z}$ таков што $yz\equiv 1(\mod p)$, односно $y^2z^2\equiv 1(\mod p)$. Според тоа, имаме $x^2z^2+ay^2z^2\equiv 0(\mod p)$ и $ay^2z^2\equiv a(\mod p)$, па затоа точна е конгруенцијата $(xz)^2\equiv -a(\mod p)$, т.е. $-a$ е квадратен остаток по модул p.

22. ДИОФАНТОВИ АПРОКСИМАЦИИ

1. Докажи дека
$$\langle 2;2,\dots,2\rangle=\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}\,. \tag{1}$$

Решение. За $n=1$ точно е равенството $2=\frac{(1+\sqrt{2})^{2}-(1-\sqrt{2})^{2}}{1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})}$. Нека (1) е точно за $n=k$. Ако левата страна на (1) ја означиме со α_k, тогаш
$$\alpha_{k+1}=\langle 2;\alpha_k\rangle=2+\frac{(1+\sqrt{2})^{k}-(1-\sqrt{2})^{k}}{(1+\sqrt{2})^{k+1}-(1-\sqrt{2})^{k+1}}=\frac{(1+\sqrt{2})^{k+2}-(1-\sqrt{2})^{k+2}}{(1+\sqrt{2})^{k+1}-(1-\sqrt{2})^{k+1}}\,.$$
Според тоа (1) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција заклучуваме дека важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

2. Докажи дека дропката $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}, a\in\mathbb{N}$ не може да се скрати.

Решение. *Прв начин.* Од $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}=\langle a;a,a,a\rangle$ заклучуваме дека дропката $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ не може да се скрати.

Втор начин. Имаме:
$$\begin{aligned}(a^4+3a^2+1,a^3+2a)&=(a^4+3a^2+1-a(a^3+2a),a^3+2a)=(a^2+1,a^3+2a)\\&=(a^2+1,a^3+2a-a(a^2+1))=(a^2+1,a)=(1,a)=1,\end{aligned}$$
што значи дека дропката не може да се скрати.

3. Докажи дека за симетричната конечна обична верижна дропка
$$a_n=a_0,\ a_{n-1}=a_1,...$$
важи релацијата $p_{n-1}=q_n$.

Решение. Од
$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=\langle a_n;a_{n-1},\dots,a_1,a_0\rangle=\langle a_0;a_1,\dots,a_0\rangle=\frac{p_n}{q_n}$$
и фактот дека дропките $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ се нескратливи добиваме $p_{n-1}=q_n$.

4. Докажи дека за обичните верижни дропки важи
$$q_n\ge 2^{\frac{n-1}{2}}, n\ge 2\,. \tag{1}$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n, при што ќе ја користиме релацијата $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}$.

За $n=2$ имаме $q_2 \geq 2q_0 = 2 > \sqrt{2} = 2^{\frac{2-1}{2}}$, т.е. точно е неравенството (1). Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за $n=k$, т.е. $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}, k \geq 2$. За $n=k+1$ добиваме

$$q_{k+1} \geq 2q_{k-1} \geq q_n \geq 2 \cdot 2^{\frac{(k-1)-1}{2}} = 2^{\frac{(k+1)-1}{2}}.$$

Според тоа (1) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција заклучуваме дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

5. Користејќи ја релацијата

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \tag{1}$$

реши ја линеарната конгруентна равенка

$$ax \equiv b (\bmod m), (a,m)=1.$$

Решение. Го разложуваме $\frac{m}{a}$ во обична верижна дропка $\langle a_0; a_1, \ldots, a_n \rangle$ и наоѓаме дека $m = p_n$ и $a = q_n$. Според (1) имаме

$$\begin{aligned}
&mq_{n-1} - ap_{n-1} = (-1)^{n-1},\\
&ap_{n-1} = (-1)^n + mq_{n-1},\\
&a[(-1)^n bp_{n-1}] \equiv b (\bmod m),\\
&x \equiv (-1)^n bp_{n-1} (\bmod m).
\end{aligned}$$

6. Реши ја линеарната конгруентна равенка
   а) $95x \equiv 59 (\bmod 308)$
   б) $91 \equiv 1 (\bmod 132)$.

Решение. а) Според задача 5 имаме: $\frac{308}{95} = \langle 3; 4, 7, 1, 2 \rangle$, па е $n=4$, $p_3 = 107$ и $x \equiv 59 \cdot 107 \equiv 153 (\bmod 308)$.

б) $x \equiv -29 (\bmod 132)$.

7. Користејќи ја релацијата

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \tag{1}$$

во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$ реши ја равенката $x + by = c$.

Решение. Ќе сметаме дека $a > 0, b > 0, (a,b) = 1$. Ја разложуваме $\frac{a}{b}$ во верижна дропка. Потоа релацијата (1) ја запишуваме во облик

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

и оттука наоѓаме

$$a[(-1)^{n-1}cq_{n-1}]+b[(-1)^{n}cp_{n-1}]=c\ .$$

Според тоа,

$$x_0=(-1)^{n-1}cq_{n-1}\ ,\ y_0=(-1)^{n}cp_{n-1}$$

и општото решение е $x=x_0+bt, y=y_0-at, t\in\mathbb{Z}$.

8. Во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, реши ги равенките
а) $70x+33y=1$,
б) $60x-91y=2$.

Решение. а) Според задача 7 имаме $\frac{70}{33}=\langle 2;8,4\rangle$ и оттука $n=2$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{17}{8}$ и $x=-8+33t,\ y=17-70t,\ t\in\mathbb{Z}$.

б) Имаме $60x+91(-y)=2$. Сега $\frac{60}{91}=\langle 0;1,1,1,14,2\rangle$, па е $n=5$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{29}{44}$ и $x=88+91t,\ y=-58-60t,\ t\in\mathbb{Z}$.

9. Докажи дека позитивниот корен на триномот $bx^2-abx-a$ каде $a,b\in\mathbb{N}$ се разложува во чиста периодична обична верижна дропка со должина на периодот еднаква на 2.

Решение. Ставаме $x=\langle\overline{a;b}\rangle$ и добиваме

$$x=a+\frac{1}{b+\frac{1}{a+...}}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{x}}\ ,$$

т.е. $bx^2-abx-a=0$. Според тоа, $\langle\overline{a;b}\rangle$ е позитивен корен на разгледуваниот трином, односно $\langle\overline{a;b}\rangle=\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2b}$.

10. Ако квадратната равенка со целобројни коефициенти $bx^2-abx-a=0$ има корен $x_1=\langle\overline{a;b}\rangle$, тогаш вториот нејзин корен е $-\frac{1}{\langle\overline{b;a}\rangle}$. Докажи!

Решение. Бидејќи $x_2+x_1=a$, добиваме $x_2=a-\langle\overline{a;b}\rangle=-\frac{1}{\langle\overline{b;a}\rangle}$.

11. Ако $x=\langle a;\overline{b,c}\rangle$ е корен на квадратна равенка со целобројни коефициенти, тогаш вториот нејзин корен е $a-\langle\overline{c;b}\rangle$. Докажи!

Решение. Бидејќи $x=\langle a;\overline{b,c}\rangle=a+\frac{1}{\langle\overline{b;c}\rangle}$ добиваме $\langle\overline{b;c}\rangle=\frac{1}{x-a}$. Но, бројот $\langle\overline{b;c}\rangle$ е корен на равенката $cx^2-bcx-b=0$, па затоа за вториот корен на оваа равенка важи

$$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{\langle\overline{c;b}\rangle}\text{, т.е. } x=a-\langle\overline{c;b}\rangle .$$

12. Определи го производот на верижните дропки $\langle\overline{a;b}\rangle$ и $\langle 0;\overline{b,a}\rangle$.

Решение. Имаме, $\langle\overline{a;b}\rangle$ е корен на равенката $bx^2-abx-a=0$, а вториот корен е $-\frac{1}{\langle\overline{b;a}\rangle}=-\langle 0;\overline{b,a}\rangle$. Значи, $\langle\overline{a;b}\rangle\cdot\langle 0;\overline{b,a}\rangle=\frac{a}{b}$.

13. Докажи, дека броевите $\alpha=\langle a;b,c\rangle$ и $\beta=\langle c;b,a\rangle$ се пропорционални со броевите $x=\langle\overline{a;b,c}\rangle$ и $y=\langle\overline{c;b,a}\rangle$.

Решение. Имаме, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ab+1}{bc+1}$. Броевите x и y ги задоволуваат соодветно равенките

$$(bc+1)x^2-(abc+a+c-b)x-(ab+1)=0,$$
$$(ab+1)x^2-(abc+a+c-b)x-(bc+1)=0.$$

Затоа $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ab+1}{bc+1}=\frac{x}{y}$.

14. а) Пресметај ја вредноста на верижната дропка $\beta=\langle 2;3,2,3,2,3,...\rangle=\langle\overline{2,3}\rangle$.

б) Пресметај ја вредноста на верижната дропка $\alpha=\langle 4;1,\overline{2,3}\rangle$.

Решение. а) Имаме

$$\beta=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\beta}},$$

што значи дека β е решение на квадратната равенка $3\beta^2-6\beta-2=0$. Но, $\beta>0$, па затоа $\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{3}$.

б) Имаме

$$\alpha=4+\frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}=4+\frac{\beta}{\beta+1}=\frac{29+\sqrt{15}}{7}.$$

15. Определи го разложувањето во верижна дропка на $\sqrt{D}$, каде

$$D=[(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1,\ \ m,n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Јасно,

$$[(4m^2+1)n+m]^2<D<[(4m^2+1)n+m+1]^2,$$

па затоа целиот дел од $\sqrt{D}$ е бројот $\alpha_0=(4m^2+1)n+m$ и $D-\alpha_0^2=4mn+1$. Според тоа,

$$\sqrt{D}=\alpha_0+\frac{1}{x_1}\text{ и } x_1=\frac{1}{\sqrt{D}-\alpha_0}=\frac{\sqrt{D}+\alpha_0}{D-\alpha_0^2}.$$

Бидејќи $\alpha_0 = [\sqrt{D}]$, имаме $\alpha_0 < \sqrt{D} < \alpha_0 + 1$, па е

$$2\alpha_0 < \sqrt{D} + \alpha_0 < 2\alpha_0 + 1$$

и како $\alpha_0 = (4mn+1)m+n$ наоѓаме

$$2m + \frac{2n}{4mn+1} < \frac{\sqrt{D}+\alpha_0}{D-\alpha_0^2} < 2m + \frac{2n+1}{4mn+1},$$

од што, бидејќи $\frac{2n+1}{4mn+1} < 1$, следува дека $\alpha_1 = [x_1] = [\frac{\sqrt{D}+\alpha_0}{D-\alpha_0^2}] = 2m$. Според тоа, $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 = \frac{1}{x_1 - \alpha_1}$. Но,

$$x_1 - \alpha_1 = \frac{\sqrt{D}+\alpha_0}{4mn+1} - 2m = \frac{\sqrt{D}-[(4mn+1)m-n]}{4mn+1},$$

па е

$$x_2 = \frac{(\sqrt{D}+(4mn+1)m-n)(4mn+1)}{D-[(4mn+1)m-n]^2}.$$

Понатаму, $D = [(4mn+1)m-n]^2 + (4mn+1)^2$, па затоа

$$x_2 = \frac{\sqrt{D}+(4mn+1)m-n}{4mn+1}.$$

Бидејќи $\alpha_0 < \sqrt{D} < \alpha_0 + 1$, односно

$$(4mn+1)m+n < \sqrt{D} < (4mn+1)m+n+1$$

добиваме

$$2m < x_2 < 2m + \frac{1}{4mn+1},$$

па затоа $\alpha_2 = [x_2] = 2m$. Значи, $x_2 = \alpha_2 + \frac{1}{x_3}$, од каде наоѓаме $x_3 = \frac{1}{\alpha_2 - x_2}$. Но,

$$x_2 - \alpha_2 = \frac{\sqrt{D}+(4mn+1)m-n}{4mn+1} - 2m = \frac{\sqrt{D}-(4mn+1)m-n}{4mn+1}$$

и

$$x_3 = \frac{(4mn+1)(\sqrt{D}+(4mn+1)m+n)}{D-[(4mn+1)m+n]^2} = \sqrt{D} + (4mn+1)m+n = \sqrt{D} + \alpha_0,$$

па затоа $\alpha_3 = [x_3] = 2\alpha_0$.

Конечно,

$$\sqrt{D} = \langle \alpha_0; \overline{2m, 2m, 2\alpha_0} \rangle.$$

16. Нека $d \geq 2$ е природен број. Докажи дека

$$\sqrt{d^2 - d} = \langle d-1; \overline{2, 2d-2} \rangle.$$

Решение. Јасно,

$$\alpha_0 = [\sqrt{d^2 - d}] = d - 1.$$

Според тоа,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{d^2-d}-(d-1)} = \frac{\sqrt{d^2-d}+d-1}{d-1} = 1+\sqrt{\frac{d}{d-1}} = 1+\sqrt{1+\frac{1}{d-1}}\,,$$

па затоа

$$\alpha_1 = [\boldsymbol{x}_1] = [1+\sqrt{1+\tfrac{1}{d-1}}] = 1+[\sqrt{1+\tfrac{1}{d-1}}] = 2\,.$$

Понатаму, $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 = \frac{1}{x_1-\alpha_1}$. Но,

$$x_1-\alpha_1 = \sqrt{\frac{d}{d-1}}-1 = \frac{\sqrt{d^2-d}-(d-1)}{d-1}\,,$$

па е

$$x_2 = \frac{d-1}{\sqrt{d^2-d}-(d-1)} = \frac{(d-1)(\sqrt{d^2-d}+(d-1))}{d-1} = d-1+\sqrt{d^2-d}\,,$$

па затоа

$$\alpha_2 = [\boldsymbol{x}_2] = [d-1+\sqrt{d^2-d}] = d-1+[\sqrt{d^2-d}] = 2(d-1)\,.$$

Сега имаме, $x_2 = \alpha_2 + \frac{1}{x_3}$ и $x_3 = \frac{1}{x_2-\alpha_2}$. Но,

$$x_2-\alpha_2 = d-1+\sqrt{d^2-d}-2(d-1) = \sqrt{d^2-d}-(d-1)\,,$$

па е

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{d^2-d}-(d-1)} = x_1\,,$$

па затоа

$$\alpha_3 = [\boldsymbol{x}_3] = [\boldsymbol{x}_1] = 2\,.$$

Сега лесно се добива дека $x_4 = x_2$ и $\alpha_4 = \alpha_2$, па затоа

$$\sqrt{d^2-d} = \langle \alpha_0; \overline{\alpha_1, \alpha_2}\rangle = \langle d-1; \overline{2, 2d-2}\rangle\,.$$

17. Ако $p,q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} < \sqrt{7}$, докажи дека важи $\sqrt{7}-\frac{p}{q} > \frac{1}{pq}$.

Решение. Ако $\frac{p}{q} < 2$, тврдењето на задачата очигледно важи. Во спротивно имаме $q < \frac{1}{2}p$ и

$$\sqrt{7}-\frac{p}{q} = \frac{1}{q}(q\sqrt{7}-p) = \frac{7q^2-p^2}{q(q\sqrt{7}+p)} > \frac{7q^2-p^2}{pq(\frac{\sqrt{7}}{2}+1)}\,.$$

Бидејќи изразот $7q^2-p^2$ е позитивен и не може да биде 1 или 2 (по модул 7), следува дека

$$\sqrt{7}-\frac{p}{q} \geq \frac{3}{pq(\frac{\sqrt{7}}{2}+1)} > \frac{1}{pq}\,.$$

18. Ако $z=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, каде a и b се природни броеви такви што и двата не се точни квадрати, докажи дека $2z^3\{z\}>3$.

Решение. Имаме, $(x-\sqrt{a})^2=b$, па затоа $x^2-2x\sqrt{a}+a=b$. Според тоа,

$$(x^2+a-b)^2=(2x\sqrt{a})^2,$$

т.е.

$$\begin{aligned}P(x)&=x^4-2(a+b)x^2+a^2+b^2-2ab\\&=(x-\sqrt{a}-\sqrt{b})(x+\sqrt{a}+\sqrt{b})(x+\sqrt{a}-\sqrt{b})(x-\sqrt{a}+\sqrt{b})\end{aligned}$$

е минималниот полином на бројот $z=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, т.е. полиномот со најмал степен чија нула е бројот $z=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. За $c=[z]$ имаме

$$\{z\}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-c,\ c+\sqrt{a}+\sqrt{b}<2z \text{ и } (c+\sqrt{a}-\sqrt{b})(c-\sqrt{a}+\sqrt{b})\le c^2<z^2,$$

па затоа

$$2z^3\{z\}>(\sqrt{a}+\sqrt{b}-c)(c+\sqrt{a}+\sqrt{b})(c+\sqrt{a}-\sqrt{b})(c-\sqrt{a}+\sqrt{b})=-P(c).$$

Притоа $-P(c)\equiv-(x^2+a+b)^2\equiv 0$ или $3 \pmod 4$, па како $-P(c)>0$ мора да е $-P(c)\ge 3$.

19. Дали постои ограничена низа реални броеви (x_n) која го задоволува условот $|x_m-x_n|\ge\frac{1}{|m-n|}$ за секои $m,n\in\mathbb{N}, m\ne n$.

Решение. Ќе докажеме дека низата $x_n=c\{n\sqrt{2}\}$ за некоја константа $c>0$ го задоволува бараниот услов. За $m-n=q>0$ и некој $p\in\mathbb{Z}$ имаме

$$|x_m-x_n|\ge c|q\sqrt{2}-p|=\frac{c(2q^2-p^2)}{q\sqrt{2}+p},$$

па бидејќи $|q\sqrt{2}-p|<1$, следува дека

$$|m-n|\cdot|x_m-x_n|>\frac{cq}{2q\sqrt{2}+1}>\frac{c}{2\sqrt{2}+1}.$$

Значи, можеме да земеме $c=2\sqrt{2}+1$.

20. Докажи дека меѓу 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството $n\sqrt{d}\cdot\{n\sqrt{d}\}>\frac{5}{2}$ важи за секој природен број n.

Решение. Бидејќи за $m=[n\sqrt{d}]$ ажи

$$n\sqrt{d}\cdot\{n\sqrt{d}\}=n\sqrt{d}\cdot(n\sqrt{d}-m)=n\sqrt{d}\cdot\frac{dn^2-m^2}{n\sqrt{d}+m}>n\sqrt{d}\cdot\frac{dn^2-m^2}{2n\sqrt{d}}=\frac{dn^2-m^2}{2},$$

доволно е да избереме d таков што за секои $m,n\in\mathbb{N}$ ќе биде исполнето $dn^2-m^2\notin\{1,2,3,4\}$. Последното се постигнува со изборот на $d=5(4k+3)$

за $k\in\mathbb{N}_0$. Навистина, тогаш m^2+2 и m^2+3 не се деливи со 5, додека m^2++1 и m^2+4 немаат делители од видот $4k+3$, па така ниту еден од броевите m^2++1, m^2+2, m^2+3 и m^2+4 не може да е делив со d.

21. Нека $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ и $m_1,m_2,...,m_n\in\mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $q_1,q_2,...,q_n$ и p кои не се сите еднакви на нула такви што $|q_i|\le m_i$ за секој i и $|q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+...+q_n\alpha_n-p|<\frac{1}{(m_1+1)(m_2+1)...(m_n+1)}$.

Решение. Да го поделиме интервалот $[0,1]$ на $M=(m_1+1)(m_2+1)...(m_n+1)$ подинтервали со должина $\frac{1}{M}$. Ги разгледуваме сите броеви од видот $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$, $0\le x_i\le m_i$. Ако некој од нив припаѓа на интервалот $[0,\frac{1}{M}]$, тогаш задачата е решена. Во спротивно сите овие броеви лежат во преостанатите $M-1$ подинтервали, па затоа во некој подинтервал лежат два од овие броеви, на пример $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\alpha_i$. Тогаш растојанието од бројот $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\alpha_i$ до најблискиот цел број е помало од $\frac{1}{M}$.

22. Нека $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ се реални броеви и $m\in\mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $p_1,p_2,...,p_n$ и природен број $q\le m^n$ такви што $|q\alpha_i-p_i|\le\frac{1}{m}$ за $i=1,2,...,n$.

Решение. Да ја поделиме хиперкоцката $[0,1]^n$ на m^n хиперкоцки со должина на раб $\frac{1}{m}$. За $q=1,2,...,m^n$ ја разгледуваме точките $A_q(\{q\alpha_1\},...,\{q\alpha_n\})$. Ако некоја од нив припаѓа на хиперкоцката $[0,\frac{1}{n}]^n$, тогаш задачата е решена. Во спротивно две точки припаѓаат на иста хиперкоцка, на пример точките A_k и A_l ($k<l$), па тогаш $\{(l-k)\alpha_i\}\in[0,\frac{1}{m}]\cup[1-\frac{1}{m},1]$ за секој i.

23. Нека $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Со X_n да го означиме множеството од сите парови заемно прости природни броеви (a,b) такви што важи $a<b\le n<a+b$. Докажи дека

$$\sum_{(a,b)\in X_n}\frac{1}{ab}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Нека $0=\frac{x_0}{y_0},\frac{x_1}{y_1},...,\frac{x_k}{y_k}=\frac{1}{2}$ е дел од низата на Фареј од ред m во интервалот $[0,\frac{1}{2}]$. Да забеежиме дека секој од паровите во X_n се појавува точно еднаш меѓу паровите (y_{i-1},y_i) и (y_i,y_{i-1}), $i=1,2,...,k$. Навистина, за даден $(a,b)\in X_n$ постојат единствени $c,d\in\mathbb{N}_0$ такви што важи $c\le\frac{a}{2}$, $d\le\frac{b}{2}$ и $|bc-ad|=1$ и тогаш $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$ се соседни членови во низата на Фареј од ред m. Според тоа,

$$\sum_{(a,b)\in X_n}\frac{1}{ab}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{y_{i-1}y_i}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{y_i}-\frac{x_{i-1}}{y_{i-1}}\right)=\frac{1}{2}.$$

24. Докажи дека за секој ирационален број α постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\{n\alpha\}<\frac{1}{n}$.

Решение. Довлно е да го разгледаме случајот кога $\alpha\in(0,1)$. Нека $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ се два соседни членови на низата на Фареј од некој ред m меѓу кои се наоѓа α. Ако го избереме m така што важи $b<d$, тогаш имаме

$$\alpha-\frac{a}{b}<\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}<\frac{1}{b^2},$$

односно $\{b\alpha\}=b\alpha-a<\frac{1}{b}$.

Останува да докажеме дека саканиот m можеме да го избереме на бесконечно многу начини. Тргнуваме од произволен ред m_0 и соодветни соседни членови $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Бидејќи $\frac{a+kc}{b+kd}\to\frac{c}{d}$ кога $k\to\infty$, важи $\frac{a+kc}{b+kd}<\alpha<\frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Можеме да земеме $m=b+(k+1)d$ и тогаш членовите $\frac{a+kc}{b+kd}$ и $\frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$ се соседни во низата на Фареј од ред m.

25. Докажи дека константата 1 од броителот во претходната задача не може да се подобри, односно дека за секој $K<1$ постои ирационален број α таков што неравенката $\{n\alpha\}<\frac{K}{n}$ има само конечно многу решенија $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $\alpha=\sqrt{k^2-1}, k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. За $m=[n\alpha]$ имаме

$$\{n\alpha\}=n\alpha-m=\frac{(k^2-1)n^2-m^2}{n\alpha+m}>\frac{K}{2n\sqrt{k^2-1}}$$

каде

$$K=\min\{(k^2-1)x^2-y^2\mid x,y\in\mathbb{Z},\ y^2<(k^2-1)x^2\}.$$

Ќе докажеме дека $K=2k-2$ и оттука ќе следува дека $\{n\alpha\}>\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$. Од теоријата ма равенките од Пелов тип знаеме дека равенката

$$(k^2-1)x^2-y^2=K$$

има барем едно решение во кое $2y^2 \le K(k-1)$, а бидејќи $x \ge 1$ имаме

$$k^2 - 1 \le y^2 + K \le \frac{K(k+1)}{2}, \text{ т.е. } K \ge 2k-2.$$

26. За реалниот број α велиме дека е *апроксимабилен со степен* k ако постои константа C (која зависи од α) таква што неравенката $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ има бесконечно многу решенија $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$). Нека $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Ако ирационалниот број α има степен на апроксимабилност k, тогаш и бројот $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ има степен на апроксимабилност k. Докажи!

Решение. Дефинираме $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Неравенката $|z - \frac{p}{q}| < \frac{M}{q^n}$ има бесконечно многу решенија $\frac{p}{q}$.Според теоремата на Лагранж важи

$$|f(z) - \frac{ap+bq}{cp+dq}| = |f(z) - f(\frac{p}{q})| = f'(\xi)|z - \frac{p}{q}|$$

за некој ξ меѓу $\frac{p}{q}$ и z. Бидејќи $f'(\xi)$ и $\frac{cp+dq}{q}$ од претходното неравенство следува дека $|f(z) - \frac{ap+bq}{cp+dq} < \frac{N}{(cp+dq)^n}$ за некоја константа N.

Слично, бидејќи $g(f(z)) = z$ за функцијата $g(x) = \frac{b-dx}{cx-a}$, добиваме дека степенот на апроксимабилност на бројот z не е помал од степенот на апроксимабилност на бројот $f(z)$.

23. ФЕРМАТОВИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите прости броеви p од обликот $p=2^{u_n}+1$, каде $u_1=u_2=1,$ $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$, $n=1,2,3,...$ е низата на Фибоначи.

Решение. Бројот $2^{u_n}+1$ е прост само ако е Ферматов број, т.е. само ако u_n е степен на бројот 2. Такви се $u_1=u_2=1, u_3=2, u_6=8$.

Да ги разгледаме остатоците на $u_n, n=1,2,3,...$ при делење со 1. Со помош на математичка индукција се докажува дека тие остатоци формираат периодична низа со период 24, при што на 16 се делат само броевите u_{12m}. Меѓутоа, ако ги разгледаме остатоците на $u_n, n=1,2,3,...$ при делење со 3, ќе добиеме дека секој број u_{4k} се дели со 3. Според тоа, ниту еден број $u_n, n>6$ не е степен на бројот 2, па затоа единствени прости броеви од дадениот вид се $3=2^1+1, 5=2^2+1$ и $257=2^8+1$

2. Докажи, дека за Ферматовите броеви $f_0, f_1,..., f_n, f_{n+1}$ важи

$$f_{n+1}=f_0 f_1 \cdots f_n+2.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
f_0 f_1 \cdots f_n+2 &= (2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&= (2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&= (2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&= (2^{2^2}-1)(2^{2^2}+1)...(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= (2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&= (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)+2 \\
&= 2^{2^{n+1}}-1+2=2^{2^{n+1}}+1=f_{n+1},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

3. Докажи, дека бројот $2^{2^n}-1$ има најмалку n различни прости делители.

Решение. Според претходната задача имаме

$$2^{2^n}-1=f_n-2=f_0 f_1 f_2 \cdots f_{n-1},$$

што значи дека тој се дели со првите n Ферматови броеви. Но, секои два различни Ферматови броеви се заемно прости, што значи дека немаат заеднички прости делители, па затоа бројот $2^{2^n}-1$ има најмалку n различни прости делители.

4. Докажи дека за секој $n>5$ брјот од видот $2^{2^n}-1$ има прост делител поголем од 1000000.

Решение. Имаме

$$2^{2^n}-1=f_n-2=f_0 f_1 f_2 ... f_{n-1},$$

што значи дека бројот $2^{2^n}-1$ е делив со секој Ферматов број $f_i, 0\le i\le n-1$.

Според тоа, за $n>5$ имаме $f_5 \mid 2^{2^n}-1$ и како $f_5=6700417\cdot 641$, а бројот $6700417>1000000$ е прост, следува тврдењето на задачата.

5. Докажи, дека Ферматов број не може да биде точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме $f_0=3$ и $f_1=5$ и тоа не се точни квадрати. Понатаму, за $n\ge 2$ Ферматовиот број f_n има цифра на единици 7, па тој не може да биде точен квадрат, бидејќи цифрата на единиците на секој точен квадрат е 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

6. Докажи дека ниту еден од Ферматовите броеви $f_n=2^{2^n}+1, n=0,1,2,3,...$ не е точен куб.

Решение. Нека претпоставиме дека $2^{2^n}+1=k^3$ за некои природни броеви n и k. Јасно, k е непарен број и важи

$$2^{2^n}=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1).$$

Според тоа, $k-1=2^s$ и $k^2+k+1=2^t$ за некои природни броеви s и t. Тогаш

$$2^t-2^{2s}=k^2+k+1-(k-1)^2=3k,$$

што не е можно, бидејќи 2^t-2^{2s} е парен, а $3k$ е непарен број.

7. Докажи, дека Ферматовиот број $f_5=2^{2^5}+1$ е сложен.

Решение. Јасно, $f_5>641$, па затоа доволно е да докажеме дека $641\mid f_5$. Имаме

$5^4=625\equiv -16=-2^4 \pmod{641}$.

Но, $641 = 5\cdot 2^7 + 1$, па затоа $5\cdot 2^7 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 641)$, од што следува

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 641) .$$

Конечно,

$$2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 641) ,$$

па затоа $f_5 = 2^{2^5} + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 641)$, т.е. f_5 е сложен број.

8. Докажи дека бројот $f_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ е запишан со повеќе од $3\cdot 10^{582}$ цифри и најди со колку цифри е запишан бројот $5\cdot 2^{1947} + 1$, за кој се знае дека е најмал прост делител на f_{1945}.

Решение. Имаме $2^{10} = 1024 > 10^3$. Оттука следува

$$2^{1945} = 2^5 (2^{10})^{194} > 10\cdot 10^{3\cdot 194} = 10^{583} ,$$

па е

$$2^{2^{1945}} > 2^{10^{583}} = (2^{10})^{10^{582}} > (10^3)^{10^{582}} = 10^{3\cdot 10^{582}} ,$$

што значи дека f_{1945} е запишан со повеќе од $3\cdot 10^{582}$ цифри.

Очигледно, бројот $5\cdot 2^{1947} + 1$ е запишан со ист број цифри како и бројот $5\cdot 2^{1947} = 10\cdot 2^{1946}$. Но, $\log_{10} 2 = 0{,}30103...$, па затоа

$$2^{1946} = 10^{1946 \log_{10} 2} = 10^{585{,}8...}$$

и оттука следува дека бројот $5\cdot 2^{1947} + 1 = 10\cdot 2^{1946} + 1$ е запишан со 587 цифри.

9. Нека $f_n = 2^{2^n} + 1$ е $n-$тиот Ферматов број. Докажи дека за $n \geq 5$ бројот $f_n + f_{n-1} - 1$ има најмалку $n+1$ прост делител.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} f_{n+1} + f_n - 1 &= 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = (2^{2^n})^2 + 2\cdot 2^{2^n} + 1 - (2^{2^{n-1}})^2 \\ &= (2^{2^n} + 1)^2 - (2^{2^{n-1}})^2 = (2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1) \\ &= a_n (f_n + f_{n-1} - 1), \end{aligned}$$

каде $a_n = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1 > 1$, за секој природен број n.

Со математичка индукција ќе докажеме дека за $n \geq 5$ бројот $f_n + f_{n-1} - 1$ има најмалку $n+1$ прост делител.

За $n = 5$ имаме $f_5 + f_4 - 1 = 3\cdot 7\cdot 13\cdot 97\cdot 241\cdot 673$, т.е. $f_5 + f_4 - 1$ има шест прости делители.

Нека претпоставуваме дека за некој $k \geq 5$ бројот $f_k + f_{k-1} - 1$ има најмалку $k+1$ прост делител. За $n = k+1$ важи $f_{k+1} + f_k - 1 = a_k(f_k + f_{k-1} - 1)$, па затоа доволно е да докажеме дека a_k и $f_k + f_{k-1} - 1$ се заемно прости, од што ќе следува дека секој прост делител на a_k е различне од простите делители на $f_k + f_{k-1} - 1$, па затоа $f_{k+1} + f_k - 1$ има најмалку $k+2$ прости делители. Имаме:

$$\begin{aligned}(a_k, f_k + f_{k-1} - 1) &= (f_k - f_{k-1} + 1, f_k + f_{k-1} - 1)\\ &= (f_k - f_{k-1} + 1, 2f_{k-1} - 2)\\ &= (f_k - f_{k-1} + 1, 2 \cdot 2^{2^{k-1}}) = 1.\end{aligned}$$

10. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$xy + x + y = 2^{32}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2^{2^5} + 1 = (x+1)(y+1).$$

Бидејќи Ферматовиот број $f_5 = 2^{2^5} + 1$ е производ на два прости броја, едниот од кои е 641 добиваме дека решенија на дадената равенка се подредените парови $(640, \frac{2^{32}+1}{641} - 1)$ и $(\frac{2^{32}+1}{641} - 1, 640)$.

11. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што n е делител на $2^{\sigma(n)}$.

Решение. За Ферматовите броеви $f_n = 2^{2^n} + 1, n = 0,1,2,...$ важи $(f_n, f_m) = 1$ за $m \neq n$. Нека k е природен број и p_i е прост делител на $f_i, i = 0,1,...,k$. Ќе докажеме дека производот $n_k = p_0 p_1 ... p_{k-1}$ го има саканото својство.

Броевите $p_0, p_1, ..., p_{k-1}$ се по парови различни и нивниот производ n_k е делител на бројот $2^{2^k} - 1$. Освен тоа,

$$\sigma(n_k) = (1 + p_0)(1 + p_1)...(1 + p_{k-1})$$

е делив со 2^k бидејќи сите множители се парни. Според тоа, $n_k \mid 2^{2^k} - 1 \mid 2^{\sigma(n_k)} - 1$.

12. Докажи дека постои природен број k таков што бројот $2^n k + 1$ е сложен за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $n = 2^r p$, каде p е непарен број. Ако бројот M е таков што $k \equiv 1 (\text{mod}\, M)$, тогаш

$$2^n k+1 \equiv 2^n+1=2^{2^r p}+1=(2^{2^r})^p+1=(2^{2^r}+1)A(\mathrm{mod}\, M)$$

за некој природен број A. Оттука следува дека ако за M земеме токму $2^{2^r}+1$ (или било кој негов делител), тогаш од дадените претпоставки следува дека $2^n k+1$ е делив со $2^{2^r}+1$.

Задачата ќе ја решиме со помош на Кинеската теорема за остатоци, со која ќе го определиме бројот k така што за секој n бројот $2^n k+1$ ќе биде делив со некој од броевите $f_0, f_1, ..., f_4$ или со 641 или со $G=\frac{f_5}{641}$. Ќе разгледуваме случаи според најголемиот степен на бројот 2 кој е делител на n.

Веќе видовме дека за $0 \le r \le 4$ имаме дека ако важи $n=2^r p$ за некој непарен број p и $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, f_r)$, тогаш $f_r \mid 2^n k+1$. Исто така, ако $n=2^5 p$ за некој непарен број p и $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 641)$, тогаш $641 \mid 2^n k+1$.

Останува да го разгледаме случајот кога $n=2^6 q$ за некој $q \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned} 2^n k+1 &= k(2^n-1)+(k+1)=k((2^{64})^q-1)+(k+1) \\ &= k(2^{64}-1)B+(k+1)=kf_5(f_5-2)B+(k+1), \end{aligned}$$

за некој природен број B, па ако $k \equiv -1(\mathrm{mod}\, G)$, добиваме дека $G \mid 2^n k+1$.

Резимирајќи ги претходните разгледувања, бараме природен број k за кој важи:

$$k \equiv 1(\mathrm{mod}\, f_r),\ r=0,1,2,3,4, \qquad k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 641), \qquad k \equiv -1(\mathrm{mod}\, G).$$

Бидејќи броевите $f_0, f_1, ..., f_4$, 641 се прости, а f_5 не е делив со 641^2 (Провери!), може да се примени Кинеската теорема за остатоци. Уште повеќе, горниот систем има произволно големо решение k, па така и решение за кое важи $k \ge \max\{f_0, f_1, ..., f_4, 641, G\}$. Затоа

$$2^n k+1 > \max\{f_0, f_1, ..., f_4, 641, G\},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Од друга страна, покажавме дека бројот од облик $2^n k+1$ (за на опишаниот начин избран k) секогаш делив со еден од броевите f_0, f_1, ..., $f_4, 641, G$, па затоа $2^n k+1$ е сложен за секој $n \in \mathbb{N}$, што и требаше да се докаже.

13. Докажи дека ако Ферматовиот број f_n е прост, тогаш

$$3^{\frac{f_n-1}{2}} \equiv -1(\mathrm{mod}\, f_n).$$

Решение. Нека f_n е прост број. Тогаш според критериумот на Ојлер имаме

$$3^{\frac{f_n-1}{2}} \equiv (\tfrac{3}{f_n}) (\bmod f_n) .$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека 3 е квадратен неостаток по модул f_n . Бидејќи f_n-1 е делив со 4, од квадратниот закон за реципроцитет добиваме дека $(\frac{3}{f_n})=(\frac{f_n}{3})$. Понатаму,

$$f_n \equiv (-1)^{2^n}+1 \equiv 2 (\bmod 3) ,$$

па затоа $(\frac{f_n}{3})=(\frac{2}{3})=-1$, т.е.3 е квадратен неостаток по модул f_n.

Обратно, нека $3^{\frac{f_n-1}{2}} \equiv -1 (\bmod f_n)$. Тогаш редот на 3 по модул f_n е еднаков на $f_n-1=2^{2^n}$, што значи дека $\varphi(f_n)=f_n-1$, од каде што следува дека f_n е прост број.

24. ДЕЛИВОСТ НА БИНОМНИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Докажи, дека за секој прост број $p>2$ и за секој $k=1,2,...,\ p-1$ важи

$$\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p.$$

Решение. Имаме,

$$\binom{p-1}{k}=\frac{(p-1)(p-2)...(p-k)}{1\cdot2\cdot...\cdot k}\equiv(-1)^k\frac{1\cdot2\cdot...\cdot k}{1\cdot2\cdot...\cdot k}\equiv(-1)^k \pmod p .$$

2. а) Докажи дека $(n+1)\,|\,\binom{2n}{n}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) За секој $k\in\mathbb{N}$ определи го најмалиот природен број C_k таков што

$$(n+k+1)\,|\,C_k\binom{2n}{n+k},$$

за секој $n\ge k$.

Решение. а) Важи

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1},$$

од каде добиваме

$$n\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n-1}.$$

Но, $(n,n+1)=1$, па од последното равенство следува $(n+1)\,|\,\binom{2n}{n}$.

б) Од а) следува дека $C_0=1$, па затоа нека претпоставиме дека $k>0$. Ако $n=k$, тогаш $\binom{2n}{n+k}=1$, па затоа мора да е $C_k\ge 2k+1$. Ќе докажеме дека $C_k=2k+1$, т.е. дека важи

$$(n+k+1)\,|\,(2k+1)\binom{2n}{n+k},$$

за секој $n\ge k$. Имаме:

$$(2k+1)\binom{2n}{n+k}=((n+k+1)-(n-k))\binom{2n}{n+k},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $(n+k+1)\,|\,(n-k)\binom{2n}{n+k}$. Сега, на потполно аналоген начин како во решението под а) добиваме

$$(n-k)\binom{2n}{n+k}=\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k-1)!}=(n+k+1)\binom{2n}{n-k-1},$$

од каде следува дека $(n+k+1)\,|\,(n-k)\binom{2n}{n+k}$.

3. Нека p е непарен прост број. Дали постојат природни броеви $a, b_1, b_2, ..., b_6 \in \{1, 2, ..., p-2\}$ за кои е исполнето равенството

$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1} = \binom{p-1}{b_1}^2 + \binom{p-1}{b_2}^2 + ... + \binom{p-1}{b_6}^2. \qquad (1)$$

Решение. За секој прост број p и за секој $k \in \{1, 2, ..., p-2\}$ важи

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k (\mathrm{mod}\, p). \qquad (2)$$

Нека претпоставиме дека постојат броеви со саканите својства. Да забележиме дека $a = p-2$ не дава решение (Зошто?). Тогаш од (2) следува дека левата страна на даденото равенство е конгруентна со

$$(-1)^a (-1)^{a+1} = -1,$$

а десната страна е конгруентна со

$$(-1)^{2b_1} + (-1)^{2b_2} + ... + (-1)^{2b_6} = 6.$$

Според тоа, $-1 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, p)$, од каде следува $p = 7$.

За $p = 7$ од својствата на биномните коефициенти следува дека левата страна на даденото равенство може да прима само две различни вредности, кои се добиваат за $a = 1$ и $a = 2$ и соодветните вредности се $\binom{6}{1}\binom{6}{2} = 90$ и $\binom{6}{2}\binom{6}{3} = 300$. Најмалата вредност на десната страна е $6 \cdot \binom{6}{1}^2 = 216$, а следната по големина е $5 \cdot \binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 = 405$, па затоа равенството (1) не е можно.

4. Ако p е прост број, тогаш $N = \frac{(2p)!}{(p!)^2} - 2$ е делив со p^2. Докажи!

Решение. За секој реален број x важи $(1+x)^p (1+x)^p = (1+x)^{2p}$. Ако овие изрази ги развиеме по биномната формула и ги срамниме коефициентите пред x^p добиваме

$$1 + \binom{p}{1}\binom{p}{p-1} + \binom{p}{2}\binom{p}{p-2} + ... + \binom{p}{p-1}\binom{p}{1} + 1 = \binom{2p}{p}$$

односно

$$N = \frac{(2p)!}{(p!)^2} - 2 = \binom{2p}{p} - 2 = \binom{p}{1}\binom{p}{p-1} + \binom{p}{2}\binom{p}{p-2} + ... + \binom{p}{p-1}\binom{p}{1}. \qquad (1)$$

Бидејќи p е прост број, секој од броевите $\binom{p}{i}, i = 1, 2..., p-1$ е делив со p, т.е. десната страна на (1) е делиvа со p^2.

5. Нека p е прост број. Биномните коефициенти $\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, ..., n-1$ истовремено се деливи со p ако и само ако $n = p^k$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Докажи!

Решение. Нека $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$\binom{n}{s} = \frac{p^k(p^k-1)\dots(p^k-s+1)}{s!}, \text{ за } 1 \le s \le p^k - 1. \qquad (1)$$

Степенот на бројот p во производот $s!$ е

$$\alpha = [\tfrac{s}{p}] + [\tfrac{s}{p^2}] + \dots + [\tfrac{s}{p^r}],$$

каде r е најмалиот природен број t, таков што $s \le p^t$. Но, како $s \le p^k - 1$ имаме $r \le k$. Највисокиот степен p во броителот на дропката (1) е

$$\beta = k + [\tfrac{s-1}{p}] + [\tfrac{s-1}{p^2}] + \dots + [\tfrac{s-1}{p^r}],$$

r е веќе определениот број за α. Треба да докажеме дека $\beta > \alpha$. Бидејќи $0 \le [\frac{s}{p^i}] - [\frac{s-1}{p^i}] \le 1$ и $1 \le r \le k$ следува $\beta \ge \alpha$. Ако $\beta = \alpha,$ тогаш $r = k$ и $[\frac{s}{p^k}] - [\frac{s-1}{p^k}] = 1,$ што значи $s \ge p^k$, а тоа противречи на $s \le p^k - 1$. Значи, $\beta > \alpha$.

Обратно, да претпоставиме дека n не е од облик p^k. Нека $mp^k = n, m > 1$ и $(m, p) = 1$. Ќе докажеме дека бројот

$$\binom{n}{p^k} = \frac{mp^k(mp^k-1)\dots(mp^k-p^k+1)}{(p^k)!} \qquad (2)$$

не е делив со p. Навистина, највисокиот степен на бројот p во броителот на дропката (2) е

$$k + [\tfrac{p^k-1}{p}] + [\tfrac{p^k-1}{p^2}] + \dots + [\tfrac{p^k-1}{p^{k-1}}] = p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p^2 + p + 1$$

и највисокиот степен на бројот p во именителот на дропката (2) е

$$[\tfrac{p^k}{p}] + [\tfrac{p^k}{p^2}] + \dots + [\tfrac{p^k}{p^{k-1}}] = p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p^2 + p + 1.$$

Конечно, од $1 < p^k < n$ следува $p \nmid \binom{n}{p^k}$.

6. Ако p е прост број и $a \in \mathbb{N}$ тогаш $(\binom{p^a}{1}, \binom{p^a}{2}, \dots, \binom{p^a}{p^a-1}) = p$. Докажи!

Решение. Нека $d = (\binom{p^a}{1}, \binom{p^a}{2}, \dots, \binom{p^a}{p^a-1})$. Од $d \mid \binom{p^a}{1} = p^a$ имаме $d = p^b$, каде $b \le a$. Понатаму, сите биномни коефициенти $\binom{p^a}{i}, i = 1, 2, \dots, p^a - 1$ се деливи со p, па затоа за да го докажеме тврдењето доволно е да докажеме дека постои k таков што биномниот коефициент $\binom{p^a}{k}$ не е делив со p^2. Навистина, за $k=p^{a-1}$ добиваме

$$\binom{p^a}{p^{a-1}}=\frac{(p^a)!}{(p^{a-1})!(p^a-p^{a-1})!}=\frac{(p^a)!}{(p^{a-1})!(p^a-p^{a-1})!}.$$

Степенот на бројот p во каноничното разложување на производот $(p^a)!$ е

$$\alpha=[\frac{p^a}{p}]+[\frac{p^a}{p^2}]+...+[\frac{p^a}{p^a}]=p^{a-1}+p^{a-2}+...+p^2+p+1,$$

степенот на бројот p во каноничното разложување на производот $(p^{a-1})!$ е

$$\beta=[\frac{p^{a-1}}{p}]+[\frac{p^{a-1}}{p^2}]+...+[\frac{p^{a-1}}{p^{a-1}}]=p^{a-2}+p^{a-3}+...+p+1$$

и степенот на бројот p во каноничното разложување на бројот $(p^a-p^{a-1})!$ е

$$\begin{aligned}\gamma&=[\frac{p^{a-1}(p-1)}{p}]+[\frac{p^{a-1}(p-1)}{p^2}]+...+[\frac{p^{a-1}(p-1)}{p^{a-1}}]\\&=p^{a-2}(p-1)+p^{a-3}(p-1)+...+p(p-1)+(p-1)\\&=p^{a-1}+p^{a-2}+...+p^2+p-(p^{a-2}+p^{a-3}+...+p+1).\end{aligned}$$

Според тоа, степенот на бројот p каноничното разложување на биномниот коефициент $\binom{p^a}{p^{a-1}}$ е $\alpha-(\beta+\gamma)=1$, што значи дека тој е делив со p, но не е делив со p^2, што значи дека $d=p$.

7. Ако природниот број n има најмалку два различни прости делители, тогаш $(\binom{n}{1},\binom{n}{2},...,\binom{n}{n-1})=1$. Докажи!

Решение. Тврдењето на задачата е директна последивца од претходната задача. Навистина, ако n има најмалку два различни прости делители, тогаш $n\neq p^k$ за секој прост број p, па од претходната задача следува дека не постои прост број p кој е делител на сите биномни коефициенти $\binom{n}{1},\binom{n}{2},...,\binom{n}{n-1}$. Последното значи дека $(\binom{n}{1},\binom{n}{2},...,\binom{n}{n-1})=1$.

8. Определи го најголемиот заеднички делител на биномните коефициенти

$$\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1}.$$

Решение. Од биномната формулата следува

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3}+...+\binom{2n}{2n-1}+\binom{2n}{2n}=2^{2n},$$
$$\binom{2n}{0}-\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}-\binom{2n}{3}+...-\binom{2n}{2n-1}+\binom{2n}{2n}=0,$$

и ако ги одземеме последните две равенства добиваме

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+...+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1},$$

па затоа

$$(\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1})=2^t,\ t\le 2n-1.$$

Нека $n=2^k q$, каде q е непарен број. Сега лесно се докажува дека секој од броевите $\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1}$ е делив со 2^{k+1}, што е и најголемиот заеднички делител бидејќи $\binom{2n}{1}=2n=2^{k+1}q$.

9. Определи ги сите природни броеви $n\ge 2$ со следново својство: за секои $i,j\in\{0,1,2,...,n\}$ броевите $i+j$ и $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ имаат еднаква парност.

Решение. Прво ќе докажеме дека сите биномни коефициенти $\binom{n}{0},\binom{n}{1},...,\binom{n}{n}$ се непарни ако и само ако $n=2^k-1$, за некој природен број $k\ge 2$.

Нека $n=2^m+s$, каде $s<2^m$ е природен број, т.е. $2^m\le n<2^{m+1}$. Ако биномниот коефициент

$$\binom{n}{2^m-1}=\frac{(2^m+s)(2^m+s-1)...(2^m+1)2^m}{s!(s+1)}$$

е непарен, тогаш $2^m\mid s+1$ (бидејќи степенот на 2 во 2^m+i и i, $1\le i\le 2^m-1$, е еднаков, докажи!!). Но $s+1$ е природен број, кој е помал или еднаков на 2^m и затоа $s+1=2^m$, од каде следува $n=2^{m+1}-1$. Обратно, ако $n=2^k-1$, за некој природен број $k\ge 2$, тогаш од формулата

$$\binom{n}{i}=\frac{(2^k-1)(2^k-2)...(2^k-i)}{i!}$$

и фактот дека степените на 2 во 2^m-i и i с еднакви, следува дека $\binom{n}{i}$ е непарен број.

Сега, нека $n\ge 2$ го има својството од условот на задачата. Тоа е еквивалентно на барањето броевите $\binom{n}{i}-i$ да имаат иста парност за $i=0,1,2,...,n$. Во спротивно, ако броевите $\binom{n}{i}-i$ и $\binom{n}{j}-j$ имаат различна парност, тогаш нивниот збир ќе биде непарен, што доведува до противречност. Според тоа, секои два соседни биномни коефициенти $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{i+1}$ имаат различна парност. Тогаш сите биномни коефициенти

$$\binom{n+1}{i+1}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1},\ i=1,2,...,n-1$$

се непарни. Последното значи, дека $n+1=2^k-1$, т.е. $n=2^k-2$, за некој природен број $k\geq 2$.

10. Нека $k,n\in\mathbb{N}$ и $k\leq n$. Докажи, дека броевите $\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k}{k}$ се заемно прости броеви.

Решение. *Прв начин*. Со индукција по k може да се докаже равенството

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{k}=(-1)^k. \qquad (1)$$

Ако $d=(\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k}{k})$, тогаш од (1) следува дека $d\,|\,(-1)^k$, т.е. $d=1$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ако го искористиме равенството

$$\binom{n+i+1}{k}-\binom{n+i}{k}=\binom{n+i}{k-1},$$

можеме да докажеме дека ако еден број е делител на сите броеви од некој ред на таблицата

$$\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k-1}{k},\binom{n+k}{k}$$

$$\binom{n}{k-1},\binom{n+1}{k-1},...,\binom{n+k-1}{k-1}$$

$$..............................$$

$$\binom{n}{0}$$

тогаш тој број е делител и на сите броеви од следниот ред. Според тоа, $d=(\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k}{k})$ е делител на $\binom{n}{0}=1$, па затоа $\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},...,\binom{n+k}{k}$ се заемно прости броеви.

11. Нека $k\in\mathbb{N}$. Докажи, дека низата $\binom{k}{k},\binom{k+1}{k},...,\binom{k+n}{k},...$ содржи бесконечно многу по парови заемно прости броеви.

Решение. Нека $k\in\mathbb{N}$. Јасно, $\binom{k}{k}=1$ и $\binom{k+1}{k}=k+1$ се заемно прости броеви. Нека $a_1,a_2,...,a_i$ се по парови заемно прости членови на низата. Ставаме $N=a_1a_2...a_i$ и $A=\binom{k+N\cdot k!}{k}$. Тогаш

$$A=\frac{(k+N\cdot k!)(k+N\cdot k!-1)...(k+N\cdot k!-k+1)}{k!}=(1+N\frac{k!}{k})(1+N\frac{k!}{k-1})...(1+N\frac{k!}{1}),$$

од каде следува $(A,a_t)=1$, за $t=1,2,...,i$.

12. Ако p е прост број, тогаш за секои $k,l\in\mathbb{N}$, $l\leq k$ важи

$$\binom{pk}{pl} \equiv \binom{k}{l} \pmod p . \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. *Прв начин*. За биномните коефициенти ја проширувамe дефиницијата, со тоа што ставаме $\binom{n}{k}=0$ ако $k<0$ или $k>n$. Тогаш

$$\binom{n}{s}+\binom{n}{s+1}=\binom{n+1}{s+1}, \qquad (2)$$

од кое со индукција по m следува равенството

$$\binom{n+m}{s}=\binom{n}{s}+\binom{m}{1}\binom{n}{s-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{s-2}+...+\binom{m}{n-1}\binom{n}{s-m+1}+\binom{n}{s-m}, \qquad (3)$$

За секои $n,m,s; n\geq 0, m\geq 0$. Конгруенцијата (1) ќе ја докажеме со индукција по k. Нека за некој k важи (1) за секој $l\leq k$. Од (3) следува

$$\binom{p(k+1)}{pl}=\binom{pk+p}{pl}=\binom{pk}{pl}+\binom{p}{1}\binom{pk}{pl-1}+\binom{p}{2}\binom{pk}{pl-2}+...+\binom{p}{p-1}\binom{pk}{pl-p+1}+\binom{pk}{p(l-1)} .$$

Но, $\binom{p}{i}\equiv 0 \pmod p$, за $i=1,2,...,k-1$ и од индуктивната претпоставка имаме

$$\binom{pk}{pl}\equiv\binom{k}{l}\pmod p \text{ и } \binom{pk}{p(l-1)}\equiv\binom{k}{l-1}\pmod p,$$

па затоа

$$\binom{p(k+1)}{pl}\equiv\binom{k}{l}+\binom{k}{l-1}\pmod p,$$

што според (2) значи дека

$$\binom{p(k+1)}{pl}\equiv\binom{k+1}{l}\pmod p .$$

Втор начин. Имаме

$$(1+x)^{pk}\equiv(1+x^p)^k \pmod p .$$

Биномниот коефициент пред x^{pl} во развојот на $(1+x)^{pk}$ е еднаков на $\binom{pk}{pl}$, а биномниот коефициент пред x^{pl} во развојот на $(1+x^p)^k$ е $\binom{k}{l}$. Оттука добиваме дека важи

$$\binom{pk}{pl}\equiv\binom{k}{l}\pmod p .$$

13. Ако p е прост број, тогаш $\binom{n}{p}\equiv[\frac{n}{p}]\pmod p$. Докажи!

Решение. Меѓу броевите $n,n-1,...,n-p+1$ има точно еден кој е делив со p. Да го означиме со N и да ставиме $\frac{N}{p}=m$. Јасно, $[\frac{n}{p}]=m$. Тогаш

$$\binom{n}{p}-[\tfrac{n}{p}]=\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}-\frac{N}{p}=m\left(\frac{n(n-1)...(N+1)(N-1)...(n-p+1)}{(p-1)!}-1\right).$$

Да ги разгледаме остатоците при делењето на броевите $n,n-1,...,N+1,N-1,$ $...,n-p+1$ со бројот p. Имаме вкупно $p-1$ броеви кои не се делат со p и по парови не се конгруентни по модул p, па затоа остатоците се $1,2,...,p-1$, со точност до редослед на истите. Но, тогаш

$$n(n-1)...(N+1)(N-1)...(n-p+1)\equiv(p-1)!(\mathrm{mod}\,p),$$

т.е.

$$n(n-1)...(N+1)(N-1)...(n-p+1)=(p-1)!+kp,$$

и затоа

$$\binom{n}{p}-[\tfrac{n}{p}]=\frac{mkp}{(p-1)!}.$$

Но, $p\,|\,mkp$ и $(p,(p-1)!)=1$, па од последното равенство следува

$$\binom{n}{p}\equiv[\tfrac{n}{p}](\mathrm{mod}\,p).$$

14. Нека $p>3$ е прост број. Докажи дека бројот

$$\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+...+\binom{p}{[2p/3]}$$

е делив со p^2.

Решение. Со S да го означиме дадениот збир на биномните коефициенти и $q=[\frac{2p}{3}]$. За $1\le k\le q$ имаме

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!}=\frac{p\cdot[(p-1)(p-1)...(p-k+1)]\cdot[(k+1)...q]}{q!}.$$

Јасно, бидејќи $q<p$ важи $p\nmid q!$. Исто така, секој биномен коефициент од збирот S е делив со p, па затоа тврдењето кое треба да го докажеме е еквивалентно со тврдењето $p\,|\,\frac{q!}{p}S$. Притоа, од горното равенство следува

$$\frac{q!}{p}\binom{p}{k}=[(p-1)(p-1)...(p-k+1)]\cdot[(k+1)...q].$$

За изразот во првата средна заграда имаме

$$(p-1)(p-1)...(p-k+1)\equiv(-1)^{k-1}(k-1)!(\mathrm{mod}\,p),$$

па затоа

$$\frac{q!}{p}\binom{p}{k}\equiv(-1)^{k-1}(k-1)!(k+1)...q=(-1)^{k-1}\frac{q!}{k}(\mathrm{mod}\,p).$$

Според тоа,

$$\frac{q!}{p}S\equiv q!\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^k}{k}(\mathrm{mod}\,p).$$

Затоа доволно е да докажеме дека по скратувањето броителот на рационалниот број $\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^k}{k}$ е делив со p.

Бидејќи $p>3$, простиот број p мора да е од видот $6m\pm1$. Ако $p=6m+1$, тогаш $q=4m$ и

$$\begin{aligned}-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{4m}&=-(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{4m}-2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{4m}))\\&=-(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{4m}-1-\tfrac{1}{2}-\ldots-\tfrac{1}{2m})\\&=-(\tfrac{1}{2m+1}+\tfrac{1}{2m+2}+\ldots+\tfrac{1}{4m})\\&=-(\tfrac{6m+1}{4m(2m+1)}+\tfrac{6m+1}{(4m-1)(2m+2)}+\ldots+\tfrac{6m+1}{3m(3m+1)})\\&=-p(\tfrac{1}{4m(2m+1)}+\tfrac{1}{(4m-1)(2m+2)}+\ldots+\tfrac{1}{3m(3m+1)})\\&=-\frac{pA}{(2m+1)(2m+2)\ldots 4m}=-\frac{pA(2m)!}{q!},\end{aligned}$$

за некој природен број A. Сега, бидејќи $p\nmid q!$, разгледуваната дропка по скратувањето ќе има броител кој е делив со p.

Случајот $p=6m-1$ се разгледува аналогно.

15. Нека p е прост број, а n е природен број. Докажи дека следниве две тврдења се еквивалентни:

1) Ниту еден биномен коефициент $\binom{n}{k}$, $1\le k\le n$ не е делив со p.

2) $n=p^s q-1$ за некои цели броеви s,q такви што $s\ge 0$ и $0<q<p$.

Решение. $1)\Rightarrow 2)$. Бидејќи според претпоставката p не е делител на

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

за секој $1\le k\le n-1$, имаме дека оваа претпоставка важи и за секој $k<p$ (освен ако $n<p-1$, но тогаш тривијално е $n=p^s q-1$ за $s=0$ и $q=n+1$, па импликацијата е докажана), па и за $k=p-1$. Од $p\nmid (p-1)!$ следува дека бројот $n(n-1)\ldots(n-p+2)$ не е делив со p, што значи дека при делење со p бројот n не може да даде ниту еден од остатоците $0,1,2,\ldots,p-2$. Со други зборови $n\equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p\mid n+1$. Затоа, за некои $s,q>0$ важи $n=p^s q-1$ и $p\nmid q$. Останува да докажеме дека мора да е $q<p$.

За биномните коефициенти важи

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1}. \tag{1}$$

Затоа, броителот и именителот на дропката $\frac{n+1-k}{k}$ мораат за секој $1\le k\le n$ да содржат прост фактор p со ист степен, бидејќи во спротивно за најмалиот k кој го нема тоа својство биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ ќе биде делив со p. Но, $\frac{n+1-k}{k}=\frac{p^s q-k}{k}$, па добиваме дека важи равенство на најголемите степени со кои p ги дели броителот и именителот на разгледуваната дропка кога $p^s \nmid k$. Според тоа, доволно е да се разгледаат броевите од видот $k = p^s m$, $m \le q$. Тогаш

$$\frac{n+1-k}{k} = \frac{p^s q - p^s m}{p^s m} = \frac{q-m}{m}.$$

Ако $q > p$ (случајот $q = p$ не е можен бидејќи $p \nmid q$), тогаш за $m = q - p$ имаме контрадикција со 1): броителот на разгледуваната дропка ќе биде $q-(q-p) = p$, а именителот $q - p$, при што $p \nmid q - p$. Оттука заклучуваме дека мора да е $q < p$.

$2) \Rightarrow 1)$. Тврдењето непосредно се докажува со индукција, користејќи го равенството (1). Имено, за $k=1$ бројот $\binom{n}{k} = n$ очигледно не е делив со p. Нека претпоставиме дека $p \nmid \binom{n}{k-1}$. Тогаш, имајќи го предвид равенството (1) за комплетирање на индуктивниот чекор доволно е да докажеме дека највисоките степени со кои p ги дели $n+1-k$ и k се еднакви. Нека $k = p^r m$, каде $p \nmid m$ и $r \ge 0$. Ако $r < s$, тогаш

$$n+1-k = p^s q - p^r m = p^r (p^{s-r} q - m)$$

е делив со p^r, но не е делив со p^{r+1}, исто како и k. Од друга страна, ако $r = s$ ($r > s$ не е можно, бидејќи тогаш ќе имаме $k \ge p^{s+1} > p^s q > n$), тогаш

$$n+1-k = p^s (q-m)$$

и притоа $p \nmid q-m$, бидејќи $m < q < p$. Затоа $n+1-k$ и k се делив со p^s, но не и со p^{s+1}. Со тоа е завршен доказот на индуктивниот чекор, па непосредно следува точноста на тврдењето.

16. **(Теорема на Лукас).** Нека m и n се ненегативни цели броеви и нека p е прост број. Нека $m = \overline{m_k m_{k-1} ... m_0}_p$ и $n = \overline{n_k n_{k-1} ... n_0}_p$ се записите на m и n во бројниот систем со основа p. Докажи дека

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_k}{n_k}\binom{m_{k-1}}{n_{k-1}}...\binom{m_1}{n_1}\binom{m_0}{n_0} (\text{mod}\, p).$$

Решение. Имаме

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + .. + m_1 p + m_0,\ n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + ... + n_1 p + n_0 \text{ и}$$

$$(1+x)^m \equiv (1+x)^{m_k p^k + ... + m_1 p + m_0} \equiv (1+x)^{m_k p^k} (1+x)^{m_{k-1} p^{k-1}} ... (1+x)^{m_1 p} (1+x)^{m_0}.$$

Понатаму, следува $(1+x)^{p^i} \equiv 1 + x^{p^i} (\text{mod}\, p)$, за $i \in \{0,1,...,k\}$. Според тоа,

$$(1+x)^m \equiv (1+x^{p^k})^{m_k}(1+x^{p^{k-1}})^{m_{k-1}}\cdots(1+x^p)^{m_1}(1+x)^{m_0} \pmod p .$$

Биномниот коефициент пред x^n во $(1+x)^m$ е $\binom{m}{n}$. За десната страна добиваме

$$x^n = x^{n_k p^k} x^{n_{k-1}p^{k-1}} \dots x^{n_1 p} x^{n_0},$$

па коефициентот пред x^n е еднаков на $\binom{m_k}{n_k}\binom{m_{k-1}}{n_{k-1}}\dots\binom{m_1}{n_1}\binom{m_0}{n_0}$. Оттука добиваме

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_k}{n_k}\binom{m_{k-1}}{n_{k-1}}\dots\binom{m_1}{n_1}\binom{m_0}{n_0} \pmod p .$$

17. **(Теорема на Кумер).** Нека m и n се природни броеви, а p е прост број. Тогаш степенот на p во каноничното претставување на биномниот коефициент $\binom{n}{m}$ е еднаков на бројот на преноси кои треба да бидат извршени при собирањето на m и $n-m$ во бројниот систем со основа p. Докажи!

Решение. Нека бараниот степен е v_p. Со $v_p(x)$ го означуваме степенот на p во каноничното претставување на x. Нека записите на броевите n, m и $n-m$ во бројниот систем со основа p соодветно се $\overline{n_k n_{k-1}\dots n_0}$, $\overline{m_k m_{k-1}\dots m_0}$ и $\overline{x_k x_{k-1}\dots x_0}$ (ако е потребно, од лево допишуваме нули). Имаме

$$v_p = v_p\left(\tfrac{n!}{m!(n-m)!}\right) = v_p(n!) - v_p(m!) - v_p((n-m)!)$$

при што важи

$$v_p(n!) = \sum_{t=1}^{\infty}\left[\tfrac{n}{p^t}\right] = \sum_{i=1}^{k} \overline{n_k n_{k-1}\dots\dots n_i} .$$

Значи,

$$\begin{aligned} v_p &= \sum_{i=1}^{k} \overline{n_k n_{k-1}\dots n_i} - \sum_{i=1}^{k} \overline{m_k m_{k-1}\dots m_i} - \sum_{i=1}^{k} \overline{x_k x_{k-1}\dots x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\overline{n_k n_{k-1}\dots n_i} - \overline{m_k m_{k-1}\dots m_i} - \overline{x_k x_{k-1}\dots x_i}). \end{aligned}$$

Но, од друга страна, за секој i имаме

$$\overline{m_k m_{k-1}\dots m_i} + \overline{x_k x_{k-1}\dots x_i} + \varepsilon_i = \overline{n_k n_{k-1}\dots n_i} ,$$

каде $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_i = 0$ во зависност од тоа дали има или нема пренос од $\overline{m_k m_{k-1}\dots m_i} + \overline{x_k x_{k-1}\dots x_i}$. Според тоа, горниот збир е од нули и единици и бројот на единиците во неа, т.е. бројот на преносите, е еднаков на v_p.

18. Определи ги сите цели броеви k за кои постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n+k$ не е делител на биномниот коефициент $\binom{2n}{n}$.

Решение. Ќе разгледаме три случаи.

Случај 1. $k<0, k\neq -n$. Нека $m=-k$ и p е прост број, $p>2m$. Ќе докажеме дека ако $n=p+m$, тогаш $n+k$ не е делител на $\binom{2n}{n}$. Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш $n+k=p$ е делител на $\binom{2(p+m)}{p+m}$. Бидејќи $p>2m$, записите на $2(p+m)$ и $p+m$ во броен систем со основа p се $\overline{2(2m)}$ и $\overline{1m}$, соодветно. Сега, од теоремата на Лукас следува дека $p\nmid\binom{2(p+m)}{p+m}$, што е противречност.

Случај 2. $k=0$. Нека $n=2^a$, каде $a\geq 0$. Тогаш од теоремата на Кумер непосредно следува дека $v_2(\binom{2^{a+1}}{2^a})=1$, што значи дека 2^a не еделител на $\binom{2^{a+1}}{2^a}$, т.е. и $k=0$ е решение на задачата.

Случај 3. $k=1$. Нека p е прост број и $v_p(n+1)=a$. Тогаш записот на $n+1$ во броен систем со основа p завршува на a нули,т.е. $n+1=\overline{A\underbrace{00...0}_{a}}$, а записот на n завршува на a цифри $p-1$, т.е. $n=\overline{B\underbrace{(p-1)(p-1)...(p-1)}_{a}}$.

Собирајќи $n+n$ очигледно треба да извршиме пренос при собирање на секоја од последните a цифри, па од теоремата на Кумер следува дека степенот на p во $\binom{2n}{n}$ е поголем или еднаков на $a=v_p(n+1)$, т.е. $k=1$ не е решение на задачата.

Случај 4. $k>1$. Нека $n=2^a-k$, каде $a\in\mathbb{N}$ е таков што $2^a>4k$. Тогаш бинарниот запис на n содржи барем една нула и има a цифри, односно $n=\overline{n_{a-1}...0...n_0}$. При собирањето $n+n$ можеме да имаме најмногу $a-1$ преност (на сите позиции без таа на која е нулата). Според тоа, $n+k=2^a$ не е делител на $\binom{2n}{n}$.

19. Нека n е природен број, а p е прост број. Определи го бројот на коефициентите на полиномот $(x+1)^n$ кои не се деливи со p.

Решение. Коефициентите на $(x+1)^n$ се $\binom{n}{i}$, каде $0\leq i\leq n$. Нека $\overline{n_k n_{k-1}...n_0}$ и $\overline{a_k a_{k-1}...a_0}$ се соодветно записите на n и i во бројниот систем со основа p. Од теоремата на Лукас следува

$$\binom{n}{i}\equiv\binom{n_k}{a_k}\binom{n_{k-1}}{a_{k-1}}...\binom{n_1}{a_1}\binom{n_0}{a_0}(\mathrm{mod}\, p).$$

Но, по дефиниција $n_j < p$ за секој j и затоа p е делител на $\binom{n_j}{a_j}$ ако и само ако $n_j < a_j$. Значи, p не е делител на $\binom{n_j}{a_j}$ ако и само ако $0 \le a_j \le n_j$. Последното значи дека за секој a_j има точно n_j+1 можност и бараниот број е $(n_0+1)(n_1+1)...(n_k+1)$.

20. Определи ги сите природни броеви m такви што за секој природен број n таков што $\frac{m}{3} \le n \le \frac{m}{2}$ важи $n \mid \binom{n}{m-2n}$.

Решение. Случаите $m=2,3$ се очигледни. Нека $m>3$. Да претпоставиме дека m е сложен број. Ако $m=3k$ или $m=2k$ за некој $k>1$, тогаш земаме $n=k$ и добиваме дека треба да важи $k \mid 1$, што е противречност. Значи, $(6,m)=1$. Понатаму, бидејќи m е сложен број, постојат прост број p и природен број a таков што $m=(2a+1)p$. Ставаме $n=aq$ и добиваме дека $v_p(n)=v_p(a)+1$, а

$$v_p(\binom{n}{m-2n}) = v_p(\binom{ap}{p}) = v_p(a),$$

што води до противречност.

Ако m е прост број, тогаш за секој природен број n таков што $\frac{m}{3} \le n \le \frac{m}{2}$ важи

$$n \mid \binom{n}{m-2n} = \frac{n!}{(m-2n)!(3n-m)!} = \frac{n}{3n-m}\binom{n-1}{m-2n}.$$

21. Нека n е природен број. Докажи дека броевите

$$\binom{2^n-1}{0}, \binom{2^n-1}{1}, \binom{2^n-1}{2}, ..., \binom{2^n-1}{2^{n-1}-1}$$

во некој редослед се конгруентни со броевите $1,3,5,...,2^n-1$ по модул 2^n.

Упатство. Докажи дека се точни конгруенциите

$$\binom{2^n-1}{2k}\binom{2^n-1}{2k-1} \equiv 0 \pmod{2^n}$$

и

$$\binom{2^n-1}{2k} \equiv (-1)^k \binom{2^{n-1}-1}{k} 0 \pmod{2^n}$$

и со нивна помош спроведи индукција по n.

25. ПОЛИНОМНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Нека $a,b,c\in\mathbb{N}$ се такви што било кои два се заемно прости. Докажи дека
$$2abc-ab-bc-ca$$
е најголемиот цел број кој не може да се претстави во облик
$$xca+yca+zab$$
каде што x,y,z се ненегативни цели броеви.

Решение. На почеток ќе докажеме дека секој број $n>2abc-ab-bc-ac$ може да се претстави во облик $n=abz+bcx+acy$, каде x, y и z се природни броеви, а потоа дека бројот $n=2abc-ab-bc-ac$ не може да се претстави во тој облик.

Нека (x_0,y_0,z_0) е некое целобројно решение на равенката
$$abz+bcx+acy=n,$$
кое сигурно постои за секој цел број n бидејќи
$$(a,b)=(b,c)=(c,a)=1.$$
Доволно е да докажеме дека може да се избере ненегативно решение, т.е. такво што $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $z\geq 0$. Со одземање на равенствата добиваме
$$ab(z-z_0)+bc(x-x_0)+ac\,(y-y_0)=0\,.$$
Од $(a,b)=(c,a)=1$ добиваме $a\,|\,(x-x_0)$ т.е. $x-x_0=as$, $s\in\mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме
$$b(z-z_0)+bcs+c(y-y_0)=0\,.$$
Од $(c,a)=1$ следува $b\,|\,(y-y_0)=bt$, $t\in\mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $cs+ct+z-z_0=0$, т.е. $z-z_0=-c(s+t)$.

Во релациите $x=x_0+as$ и $y=y_0+bt$ броевите s и t можат да се изберат така што $0\leq x\leq a-1$ и $0\leq y\leq b-1$. Тогаш
$$abz=n-bcx-acy>(2abc-ab-bc-ca)-bc(a-1)-ca(b-1)=-ab,$$
од каде што добиваме $z>-1$, т.е. $z\geq 0$. Аналогно се добива и за x и y, со што го докажавме првиот дел од тврдењето.

За да го докажеме вториот дел, претпоставуваме дека
$$2abc-ab-bc-ca=bcx+cay+abz,\ x,y,z\geq 0.$$
Тогаш,
$$bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc,$$

при што $x+1\geq 1$, $y+1\geq 1$, $z+1\geq 1$. Од $(a,b)=(c,a)=1$ следува $a\,|\,(x+1)$, па затоа $a\leq x+1$. Слично добиваме $b\leq y+1$ и $c\leq z+1$, па според тоа

$$bca+cab+abc\leq bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc,$$

т.е. $3abc\leq 2abc$, што не е можно бидејќи a,b,c се природни броеви.

2. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме најголемиот природен број со својството: за секој природен број k, $1<k<S(n)$, бројот n^2 може да се претстави како збир од k квадрати на природни броеви.

а) Докажи дека $S(n)\leq n^2-14$, за секој $n>14$.

б) Определи природен број n за кој $S(n)=n^2-14$.

в) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $S(n)=n^2-14$.

Решение. а) Бројот n^2 можеме да го запишеме како

$$n^2=1^2+1^2+...+1^2.$$

Ако групираме четири единици добиваме 2^2 и со тоа бројот на квадратите се намалува за 3. Со групирање на 9 единици добиваме 3^2 и бројот на квадратите се намалува за 8. Ако k пати групираме по 4 единици и l пати по 9 единици, тогаш бројот на квадратите се намалува за $3k+8l$. На опишаниот начин бројот на квадратите може да се намали за 3, 6, 8, 9, 11, 12, но не и за 13. Тоа е затоа што Диофантовата равенка $3k+8l=13$ нема позитивни решенија. (општото решение е $k=-1+8m, l=2-3m, m\in\mathbb{Z}$). Затоа $S(n)\leq n^2-14$.

б) Ако $S(n)=n^2-14, n\geq 4$, тогаш $S(n)\geq 2$. Бројот n^2 мора да биде еднаков на збирот на два квадрати. Може да биде $n=5,10,13,...$. За $n=5$ и $n=10$, $S(n)=2$. Најмалиот можен број n за кој $S(n)=n^2-14$ е $n=13$. Треба да докажеме дека бројот $169=13^2$ е еднаков на збирот од k квадрати за секој $k\leq 13^2-14=155$.

Ако n^2 е збир од k квадрати од кои еден е парен, на пример $(2r)^2$, кој можеме да го запишеме како $r^2+r^2+r^2+r^2$, добиваме дека n^2 е збир од $k+3$ квадрати. Од $169=8^2+8^2+4^2+4^2+3^2$, следува дека бројот 169 може да се запише како збир од $2+3t$ квадрати за $1\leq t\leq 53$. Ако 3^2 го запишеме како $2^2+2^2+1^2$, бројот 169 може да се прикаже како збир од $1+3t$ квадрати за $1\leq t\leq 54$ (за $t=1, 169=10^2+8^2+2^2+1^2$). За $k=153, 169=3^2+3^2+151\cdot 1^2$.

Групирајќи 4 единици во 2^2, четири 2^2 во 4^2 и четири 4^2 во 8^2 се добива запис на 169 со помош на $k=153-3t$ квадрати, за $1\le t\le 48$. За $t=49$, имаме $169=6^2+6^2+6^2+6^2+4^2+3^2$, а за $t=50$, $169=12^2+4^2+3^2$.

Со тоа го добивме прикажувањето на бројот $13^2=169$ како збир од k квадрати за секој $k\le 155$.

в) Доволно е да докажеме дека за секој $n=2^k\cdot 13$, важи $S(n)=(2^k\cdot 13)^2-14$. Тоа може да се направи со разгледување на

$$(2^k\cdot 13)^2=(2^k\cdot 8)^2+(2^k\cdot 8)^2+(2^k\cdot 4)^2+(2^k\cdot 4)^2+(2^k\cdot 3)^2 \quad \text{и}$$

$$(2^k\cdot 13)^2=3^2+3^2+[(2^k\cdot 13)^2-18]\cdot 1^2$$

и групирање така да се добиваат збирови на квадрати.

3. Нека x,y,z се природни броеви такви што $(x,y)=1$ и $x^2+y^2=z^4$. Докажи дека $7\,|\,xy$. Дали условот $(x,y)=1$ е потребен?

Решение. Условот $(x,y)=1$ е потребен. Навистина, на пример, за броевите $x=15, y=20$ и $z=5$ важи $15^2+20^2=5^4$, но $7\nmid 15\cdot 20$.

Нека $(x,y)=1$ и x,y,z се такви да $x^2+y^2=z^4$. Тогаш постојат природни броеви m и n такви што $x=m^2-n^2, y=2mn$ и $z^2=m^2+n^2$. Да претпоставиме дека $7\nmid y$. Тоа значи дека $7\nmid m$ и $7\nmid n$. Но, квадрат на цел број кој не се дели со 7, при делење со 7 дава остаток 1, 2 или 4. Бидејќи ниту еден од збировите $1+2$, $1+4$ и $2+4$ не е еднаков на 1, 2 или 4 и не е делив со 7, од равенството $z^2=m^2+n^2$ следува дека броевите m и n при делење со 7 имаат еднакви остатоци, па затоа $7\,|\,x=m^2-n^2$.

4. Во множеството рационални броеви реши ја равенката

$$(1+x^2)(1+y^2)=2\,.$$

Решение. Дадната равенка е еквивалентна на равенката

$$y^2=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}\,.$$

Со смената $z=(1+x^2)y$ горната равенка се сведува на равенката $1-x^4=z^2$. Понатаму ставаме $x=\frac{b}{a}, z=\frac{c}{a^2}$ со што последната равенка се сведува на

$$a^4-b^4=c^2. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека равенката (1) нема решенија во множеството цели броеви кои се различни од нула.

Понатаму, ако (x, y, z) е примитивна Питагорова троја, т.е. $x^2 + y^2 = z^2$ за $x, y, z \in \mathbb{N}$, тогаш

$$(x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2) \text{ или } (x, y, z) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2),$$

за некои природни броеви u и v.

Нека претпоставиме дека (1) има решение во $\mathbb{N}$ и дека (a, b, c) е решение со најмал a. Очигледно, a, b, c се заемно прости. Тројката (b^2, c, a^2) е Питагорова, па затоа важи $a^2 = m^2 + n^2$ и $b^2 \in \{2mn, m^2 - n^2\}$ за некои $m, n \in \mathbb{N}$. Ако $b^2 = m^2 - n^2$, добиваме $m^4 - n^4 = (ab)^2$, но $m < a$, што не е можно заради минималноста на a во решението (a, b, c). Според тоа, мора да важи $b^2 = 2mn$.

Понатаму, тројката (m, n, a) е Питагорова и бидејќи $(a, b, c) = 1$ добиваме $(m, n, a) = 1$, па затоа постојат $p, q \in \mathbb{N}$ такви што $\{m, n\} = \{p^2 - q^2,\ 2pq\}$. Тогаш $b^2 = 2mn = 4pq(p^2 - q^2)$. Бидејќи броевите $p, q, p^2 - q^2$ се попарови заемно прости, а нивниот производ е точен квадрат сите тие мора да се точни квадрати. Значи, за некои $r, s, t \in \mathbb{N}$ важи

$$p = r^2, q = s^2 \text{ и } r^4 - s^4 = p^2 - q^2 = t^2.$$

Тоа значи дека (r, s, t) е решение на (1) за кое важи $r < a$, што повторно е противречност.

Според тоа, (1) нема решенија во $\mathbb{Z}$ освен оние за кои $b = 0$ или $c = 0$. Така, единствени решенија на задачата се тривијалните, т.е. $(x, y) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

5. Даден е системот равенки

$$\begin{cases} x + y = z + u \\ 2xy = zu. \end{cases} \tag{1}$$

Определи ја најголемата вредност за реалната константа m таква што $m \le \frac{x}{y}$ за секое решение природни броеви (x, y, z, u) на (1) такво што $x \ge y$.

Решение. Имаме,

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = z^2 + u^2,$$

што значи дека $(z, u, x - y)$ е Питагорова тројка. Од $x \ge y$ следува $x - y \ge 0$. Затоа постојат природни броеви a, b, c $(a > b)$ такви што

$$z = c(a^2 - b^2),\ u = 2abc \text{ и } x - y = c(a^2 + b^2).$$

Сега од системот

$$\begin{cases} x-y=c(a^2+b^2) \\ x+y=c(a^2-b^2)+2abc \end{cases}$$

добиваме $x=c(a^2+ab), y=c(ab-b^2)$. Нека $\frac{a}{b}=k$. Имаме

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{k^2+k}{k-1}=k+1+\frac{1}{k-1}=3+(k-1+\frac{2}{k-1})\geq 3+2\sqrt{(k-1)\frac{2}{k-1}}=3+2\sqrt{2}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $k-1=\frac{2}{k-1}$, т.е. $k=1+\sqrt{2}$. Конечно, бараната константа е $m=3+2\sqrt{2}$.

6. Докажи дека секој прост број од облик $4k+1$ е должина на хипотенуза на правоаголен триаголник, чии страни се изразуваат со природни броеви.

Решение. Секој прост број од облик $4k+1$ е збир на два точни квадрати на природни броеви. Затоа, за таков број p важи $p=a^2+b^2$, $a,b\in\mathbb{N}$, $a\neq b$. Оттука $p^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$, т.е. p е должина на хипотенуза на правоаголен триаголник чии катети имаат должини $|a^2-b^2|$ и $2ab$ и се природни броеви.

7. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=2xyz.$$

Решение. Очигледно едно решение на равенката е $(0,0,0)$. Затоа да претпоставиме дека (x,y,z) е решение на равенката во кое сите три броеви x,y,z се различни од нула. Тогаш секој од броевите можеме да го запишеме во обликот $2^k t$, каде t е непарен број, т.е.

$$x=2^p x_1, y=2^q y_1, z=2^s z_1,$$

за непарни x_1,y_1,z_1. Од симетричноста на равенката следува, дека не се губи од општоста ако претпоставиме $p\leq q\leq s$. Тогаш равенката може да се скрати со 2^{2p} и добиваме

$$x_1^2+(2^{q-p}y_1)^2+(2^{s-p}z_1)^2=2^{q+s-p+1}x_1y_1z_1.$$

Ако $q>p$, тогаш левата страна на последната равенка е непарна, а десната е парна, што е противречност. Значи мора да е $q=p$. Но, тогаш равенката го добива обликот

$$x_1^2+y_1^2+(2^{s-p}z_1)^2=2^{s+1}x_1y_1z_1$$

Ако $s=p$, тогаш левата страна на последната равенка е непарна, а десната парна, што е противречност. Значи мора да е $s>p$. Но тогаш $x_1^2+y_1^2$ е делив со 2, а $(2^{s-p}z_1)^2$ и $2^{s+1}x_1y_1z_1$ се деливи 4, па повторно добиваме противречност.

Значи, дадената равенка во множеството цели броеви има единствено решение $(0,0,0)$.

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-2009y+2y^2=0.$$

Решение. Од $7|2009$ следува $7|x^2+2y^2$. Понатаму, од $7|x^2+2y^2$ следува $7|x$ и $7|y$. Нека $x=7a$ и $y=7b$, каде a и b се цели броеви. Тогаш $a^2=b(41-2b)$, при што $b\geq 0$. Бидејќи $(b,41-2b)=1$ или 41 ќе рагледаме два случаја.

Ако $(b,41-2b)=41$, тогаш 41 е делител на a и b, па затоа $a=b=x=y=0$.

Ако $(b,41-2b)=1$, тогаш b и $41-2b$ се точни квадрати на заемно прости броеви, па затоа $b=16$ и $a^2=144$, т.е. $x=\pm 7^2\cdot 12$ и $y=7^2\cdot 16$.

Според тоа, во множеството цели броеви сите решенија на разгледуваната равенка се $(0,0),(588,784)$ и $(-588,784)$.

9. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2,$$
$$(xy-6)^2-(x+y)^2=-13,$$
$$\big(xy-6-(x+y)\big)\big(xy-6+(x+y)\big)=-13.$$

Оттука, ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases}xy-6-(x+y)=-1\\ xy-6+(x+y)=13\end{cases} \text{ и } \begin{cases}xy-6-(x+y)=-13\\ xy-6+(x+y)=1\end{cases}.$$

Овие системи се еквивалентни со системите равенки

$$\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x+y=7\\ xy=0\end{cases}.$$

Конечно, решенијата на дадената равенката се $(3,4),(4,3),(0,7),(7,0)$.

10. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

Решение. Воведуваме смени $x=u+1$, $y=v+1$ и дадената равенка се сведува на равенката $(u+1)^2v+(v+1)^2u=1$, која е еквивалентна со равенката

$$uv(u+v)+4uv+(u+v)=1,$$

т.е. на равенката

$$(u+v+4)(uv+1)=5.$$

Бидејќи $5=5\cdot 1=(-5)\cdot(-1)$ дд последната равенка ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases} u+v+4=5 \\ uv+1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} u+v+4=-5 \\ uv+1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} u+v+4=1 \\ uv+1=5 \end{cases} \quad \begin{cases} u+v+4=-1 \\ uv+1=-5 \end{cases}.$$

Од добиените системи само првиот и последниот систем имаат целобројни решенија и тоа $(0,1),(1,0),(-6,1),(1,-6)$. Конечно, бидејќи $(x,y)=(u+1,v+1)$, решенијата на почетната равенка се паровите $(1,2),(-5,2),(2,1),(2,-5)$.

11. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1).$$

Решение. Да забележиме дека x и y мора да бидат со иста парност, па $u=\frac{x+y}{2}$ и $v=\frac{x-y}{2}$ се цели броеви. Равенката го добива обликот

$$u^3+uv^2=2(3u^2+v^2+1),$$

односно

$$(u-2)(u^2+v^2)=4u^2+2.$$

Очигледно, $u>2$, па затоа $4u^2+2<5(u^2+v^2)$, од каде што следува дека $u-2<5$. Со проверка на броевите $u\in\{3,4,5,6\}$ се добиваат целобројни решенија $u=5$, $v=\pm 3$. Според тоа $(x,y)=(8,2)$ или $(x,y)=(2,8)$.

12. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=20122012. \tag{1}$$

Решение. Имаме,

$$x^2+y^2+z^2\equiv 20122012\equiv 0(\bmod 4).$$

Сега од $t^2\equiv 0$ или $1(\bmod 4)$, следува $x^2\equiv y^2\equiv z^2\equiv 0(\bmod 4)$, што значи дека постојат цели броеви a,b,c такви што $x=2a, y=2b, z=2c$. Оттука следува

$$a^2+b^2+c^2=503503.$$

Ако последната равенка ја разгледуваме по одул 8 добиваме

$$a^2+b^2+c^2\equiv 7(\bmod 8). \tag{2}$$

Но, $t^2\equiv 0,1$ или $4(\bmod 8)$, па затоа остатокот при делење на $a^2+b^2+c^2$ со 8 припаѓа на множеството $\{0,1,2,3,4,5.6\}$, што противречи на (2). Конечно, од добиената противречност следува дека равенката (1) нема решение во множеството цели броеви.

13. Докажи дека равенката

$$x^5+y^5+z^5=20152015$$

нема целобројни решенија.

Решение. Ќе разгледуваме остатоци при делење со 11.

За десната страна на равенката имаме

$$20152015\equiv 4(\text{mod}\,11).$$

Понатаму, од малата теорема на Ферма следува: ако $11\nmid a$, тогаш $11\,|\,a^{10}-1=(a^5-1)(a^5+1)$, па затоа $a^5\equiv\pm1(\text{mod}\,11)$. Според тоа, левата страна на равенката по модул 11 е конгруентна на некој од броевите $-3,-2,-1,$ $0,1,2,3$, т.е. со некој од броевите $8,9,10,0,1,2,3$. Но, 4 не е меѓу овие броеви, па затоа разгледуваната равенка нема целобројни решенија.

14. Докажи дека равенката

$$3x^4+2013=25y^2-24x^2$$

нема целобројни решенија.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3x^4+24x^2-25y^2+2013=0.$$

На десната страна трите собирци се деливи со 3, па затоа мора и $25y^2$ да е делив со 3, односно y мора да е делив со 3. Нека $y=3u$. Ако замениме и поделиме со 3, ја добиваме равенката

$$x^4+8x^2-75u^2+671=0.$$

Ако $3\,|\,x$, тогаш сите собирци освен 671 се деливи со 3, што не е можно. Ако x не е делив со 3, тогаш неговиот квадрат при делење со 3 дава остаток 1, а истото важи и за неговиот четврт степен (односно 1 е квадратен остаток по модул 3). Последното значи дека

$$x^4+8x^2\equiv 1+8\cdot 1\equiv 0(\text{mod}\,3),$$

па затоа $x^4+8x^2-75u^2$ е делив со 3, а 671 не е делив со 3, што е противречност. Конечно, од претходните разгледувања следува дека дадената равенка нема целобројни решенија.

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

каде p е прост број поголем од 3.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=p\,.$$

Бидејќи $x+y+z>1$, мора да важи

$$x+y+z=p \text{ и } x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2\,.$$

Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека $x\ge y\ge z$. Ако $x>y>z$, имаме $x-y\ge 1, y-z\ge 1$ и $x-z\ge 2$, од каде добиваме

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 6>2\,.$$

Затоа мора да важи $x=y=z+1$ или $x-1=y=z$. Простиот број p е од облик $3k+1$ или $3k+2$. Во првиот случај решенијата се $(\frac{p+2}{3},\frac{p-1}{3},\frac{p-1}{3})$ и сите пермутации. Во вториот случај решенија се $(\frac{p+1}{3},\frac{p+1}{3},\frac{p-2}{3})$ и сите пермутации.

16. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$2x^2-y^{14}=1.$$

Решение. Ставаме $y^2=z$ и дадената равенка ја запишуваме во видот

$$2x^2=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)\,.$$

Бидејќи најголемиот заеднички делител на двата множители на десната страна е делител на 7 (зошто?), а 7 не е делител на $z+1=y^2+1$ (зошто?), овие два множители се заемно прости и очигледно $z+1$ е парен број. Значи,

$$z+1=2a^2,\ z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=b^2,$$

каде a и b се заемно прости броеви и $x=ab$. Равенката

$$z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=b^2$$

се решава стандардно со методот на заклучување меѓу точни квадрати. Имаме

$$(16z^3-8z^2+6z-5)^2<16b^2<(16z^3-8z^2+6z-4)^2,$$

кога $z\ge 4$. Сега, од $y^2=z$ следува дека единствена можност е $z=1$, од каде го добиваме единственото решение $(x,y)=(1,1)$.

17. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(b^2+11(a-b))^2=a^3b\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a-b)(a^2b+ab^2+b^3-22b^2-121(a-b))=0.$$

Од последната равенка следува $a-b=0$, па решенија на задачата се паровите $(t,t), t\in\mathbb{Z}$. Нека $a\neq b$ и $a^2b+ab^2+b^3-22b^2-121(a-b)=0$. Ако $b=0$, добиваме $a=0$, што противречи на $a\neq b$. Еквивалентната равенка

$$ba^2+(b^2-121)a+b^3-22b^2+121b=0$$

е квадратна по a со дискриминанта $D=(3b+11)(11-b)^2$. Условот $D\geq 0$ дава $-\frac{11}{3}\leq b\leq 11$ и со непосредна проверка се добива дека решение на почетната равенка е само парот $(0,11)$.

18. За целиот број a велиме дека е *пријателски* ако равенката

$$(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3 \qquad (1)$$

има решение во множеството природни броеви.

а) Докажи дека множеството $\{1,2,...,2012\}$ содржи најмалку 500 пријателски броеви.

б) Провери дали бројот $a=2$ е пријателски.

Решение. а) Лесно се проверува дека секој број $a=4k-3,\ k\geq 2$ е пријателски број. Навистина, за $m=2k-1$ и $n=k-1$ важи:

$$\begin{aligned}(m^2+n)(n^2+m)&=(4k^2-4k+1+k-1)(k^2-2k+1+2k-1)\\&=(4k^2-3k)k^2=(4k-3)k^3=a(m-n)^3\end{aligned}$$

т.е. $a=4k-3,\ k\geq 2$ равенката (1) има решение во множеството природни броеви. Броевите $5,9,13,17,21,...,2009$ се од облик $4k-3$, тие се помали од 2012 и вакви броеви има $\frac{2009-1}{4}=502$. Значи, множеството $\{1,2,...,2012\}$ содржи најмалку $502>500$ пријателски броеви.

б) Нека $a=2$. Јасно, $m>n$. Од

$$m^2+n-(n^2+m)=(m-n)(m+n-1),$$

ако земеме $y=n^2+m$ добиваме $m^2+n=y+(m-n)(m+n-1)$. Оттука добиваме

$$y(y+(m-n)(m+n-1))=2(m-n)^3,$$

т.е. ја добиваме квадратната равенка

$$y^2+y(m-n)(m+n-1)-2(m-n)^3=0.$$

Од $y\in\mathbb{N}$ следува дека

$$D=(m-n)^2(m+n-1)^2+8(m-n)^3=(m-n)^2((m+n-1)^2+8(m-n))$$

е точен квадрат. Значи, $(m+n-1)^2+8(m-n)$ мора да е точен квадрат. Јасно,

$$(m+n-1)^2 < (m+n-1)^2 + 8(m-n) = m^2 + n^2 + 6m - 10n + 2mn + 1 < (m+n+3)^2,$$

па затоа можни се три случаи.

1) $(m+n-1)^2 + 8(m-n) = (m+n)^2$, при што добиваме $6m-10n+1=0$, што не е можно.

2) $(m+n-1)^2 + 8(m-n) = (m+n+1)^2$, се добива $m=3n$ и со ако замениме во $(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$ ја добиваме равенката $3n^2+4n+1=0$ која нема решение во множеството природнио броеви.

3) $(m+n-1)^2 + 8(m-n) = (m+n+2)^2$, при што добиваме $2m=14n+3$, што не е можно.

Според тоа, равенката $(m^2+n)(n^2+m) = 2(m-n)^3$ нема решение во множеството природни броеви, т.е. $a=2$ не е пријателски број.

19. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$x+y+u+v = n\sqrt{xyuv}$$

има решение (x,y,u,v) во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y+u+v)^2 = n^2xyuv,$$

т.е. со равенката

$$x^2 + 2(y+u+v) + (y+u+v)^2 = n^2xyuv. \qquad (*)$$

Нека n е природен број за кој равенката има решение (a,b,c,d) и притоа збирот $a+b+c+d$ е најмал. Без ограничлување на општоста можеме да земеме дека $a \ge b \ge c \ge d$. Од $(b+c+d)^2 = n^2abcd - 2a(b+c+d) - a^2$ следува $a \mid (b+c+d)^2$. Исто така a е природен број кој е решение на квадратната равенка

$$f(x) = x^2 + x(2(b+c+d) - n^2bcd) + (b+c+d)^2 = 0. \qquad (1)$$

Од Виетовите правила следува дека квадратната равенка има второ решение a' за кое важи $aa' = (b+c+d)^2$, т.е. $a' = \frac{(b+c+d)^2}{a}$ е природен број. Според тоа и четворката (a',b,c,d) е решение на равенката (*) и како претпоставивме дека збирот $a+b+c+d$ е најмал, добиваме дека $a' \ge a$. Понатаму, $b \notin [a,a']$ и бидејќи за $x \in (-\infty,a) \cup (a',\infty)$ важи $f(x) \ge 0$ следува дека $f(b) \ge 0$. Имаме:

$$\begin{aligned} 0 \le f(b) &= b^2 + b(2(b+c+d) - n^2bcd) + (b+c+d)^2 \\ &\le b^2 + 2b(b+b+b) + (b+b+b)^2 - n^2b^2cd = 16b^2 - n^2b^2cd \end{aligned}$$

т.е. $n^2cd \le 16$. Јасно, $n^2 \le n^2cd \le 16$, од каде добиваме $n \in \{1,2,3,4\}$. Сега, лесно се добива дека за секоја вредност $n = 1,2,3,4$ дадената равенка, до пермутации, има единствено решение $(4,4,4,4)$, $(2,2,2,2)$, $(1,1,2,2)$ и $(1,1,1,1)$.

20. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Решение. Јасно, броевите x и y треба да се со различна парност. Тогаш $x - y = k$ е непарен број и дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(3k-6)y^2 + (3k^2 + 10)y + k^3 + 10k - 1 = 0$$

која е квадратна по y. Нејзината дискриминанта

$$D = -3k^4 + 24k^3 - 60k^2 + 252k + 76$$

треба да е точен квадрат. Бидејќи $D = -k^2(3k^2 - 24k + 60) + 252k + 76$, добиваме дека $D < 0$ кога $k \le -1$. Од друга страна

$$D = 3k^3(8-k) + 2(38-k^2) + 2k(126-29k)$$

и затоа $D < 0$ кога $k \ge 8$. Исто така $D = -71 < 0$ за $k = 7$. Остануваат случаите $k = 1,3,5$. Тогаш соодветно $D = 289 = 17^2, d = 697, D = 961 = 31^2$, од што следуваат решенијата $(x, y) \in \{(6,5),(2,-3)\}$.

21. Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = y^3.$$

Решение. Нека

$$P(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784.$$

Ако $x \ge 0$, тогаш

$$\begin{aligned}(2x+7)^3 &= 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343 < P(x)\\ &< 8x^3 + 120x^2 + 600x + 1000 = (2x+10)^3,\end{aligned}$$

па затоа $2x + 7 < y < 2x + 10$. Оттука $y = 2x + 8$ или $y = 2x + 9$. Но, ниту една од равенките

$$P(x) - (2x+8)^3 = -12x^2 + 36x + 272 = 0$$

$$P(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 - 66x + 55 = 0$$

нема цели корени, па нема решенија за $x \ge 0$. Понатаму, да забележиме дека за P важи $P(-x-7) = -P(x)$, па затоа (x, y) е решение ако и само ако $(-x-7, -y)$ е решение. Тоа значи, дека не постојат решенија на равенката за $x \le -7$. За да (x, y) биде решение, мора да важи $-6 \le x \le -1$. За $-3 \le x \le -1$, имаме $P(-1)=440$ кој не е точен куб, а за $P(-2)=216=6^3$ и $P(-3)=64=4^3$, ги добиваме решенијата $(-2,6)$ и $(-3,4)$ кои се единствени за $-3\le x\le -1$. Понатраму, $(-4,-4)$ и $(-5,-6)$ се единствените решенија кога $-6\le x\le -4$. Конечно, единствените решенија на равенката се

$$(-2,6),\ (-3,4),\ (-4,-4),\ (-5,-6).$$

22. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^{2010}-2006=4y^{2009}+4y^{2008}+2007y.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^{2010}+1=4y^{2009}+4y^{2008}+2007y+2007=(y+1)(4y^{2008}+2007) \qquad (1)$$

Бидејќи $4y^{2008}+2007=4(y^{2008}+501)+3$ заклучуваме дека барем еден прост делител на $4y^{2008}+2007$ е од облик $4t+3$. Од друга страна,

$$x^{2010}+1=(x^{1005})^2+1=a^2+1,$$

што значи дека сите прости делители $p>3$ на $x^{2010}+1$ се од облкк $4k+1$. Според тоа дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

23. Докажи дека равенката $x^2+y^2=6z^2$ во множеството $\mathbb{Z}$ нема решение различно од $(0,0,0)$.

Решение. Нека (a,b,c), $(a,b,c)=1$ е решение на дадената равенка. Десната страна на равенката е делива со 3, па затоа и левата страна мора да е делива со 3. Но, тоа значи дека $3\,|\,a$ и $3\,|\,b$. Имено, ако $a=3k\pm1$ или $b=3n\pm1$, тогаш $a^2+b^2=3m\pm1$, што е противречност. Затоа $9\,|\,a^2$ и $9\,|\,b^2$, од што следува дека $9\,|\,6c^2$, т.е. $3\,|\,2c^2$. Но, $(2,3)=1$, па затоа $3\,|\,c$ што противречи на претпоставката дека $(a,b,c)=1$.

24. Докажи дека равенката $x^7+7=y^2$ нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Со проверка по модул 4 добиваме дека мора да важи $x\equiv 1 \pmod 4$. Тогаш $2\,|\,y$. Почетната равенка ја запишуваме во видот

$$(x+2)A=x^7+2^7=y^2+11^2,$$

каде

$$A=x^6-2x^5+4x^4-8x^3+16x^2-32x+64.$$

Бидејќи $x+2\equiv 3 \pmod 4$ и $x+2\,|\,y^2+11^2$, мора да биде $(y,11)>1$, т.е. $11\,|\,y$, а исто така $11|x+2$ и $11|A$. Меѓутоа $A\equiv 7\cdot 64(\mathrm{mod}\, x+2)$, па затоа треба да важи $11|7\cdot 64$, што е противречност.

25. Докажи дека равенката $7x^3-13y=5$ нема целобројни решенија.

Решение. Нека претпоставиме дека a и b се цели броеви за кои важи $7a^3-13b=5$.

Јасно, $7a^3\equiv 5(\mathrm{mod}13)$, па затоа $14a^3\equiv 10(\mathrm{mod}13)$, т.е. $a^3\equiv -3(\mathrm{mod}13)$. По стапенување на четврти степен последната конгруенција го добива обликот $a^{12}\equiv 81(\mathrm{mod}13)$. Понатаму, 13 не делител на a, па од малата теорема на Ферма следува $a^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}13)$. Од последните две конгруенции добиваме $80\equiv 0(\mathrm{mod}13)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равебка нема целобројни решенија.

26. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{10}^4=2011.$$

Решение. Ако некој x_i е парен број, $x_i=2k$, тогаш $x_i^4=16k^4\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,16)$. Ако x_i е непарен број, тогаш

$$x_i^4-1=(x_i-1)(x_i+1)(x_i^2+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,16)$$

(првите два множитела се последователни парни броеви, а и третиот множител е парен број), од каде $x_i^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,16)$. Тоа значи дека

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{10}^4\equiv k\ (\mathrm{mod}\,16),\ k\le 10.$$

Од друга страна, $2011\equiv 11(\mathrm{mod}\,16)$, што значи дека дадената равенка нема решенија.

27. Определи го најголемиот природен број n таков што равенката

$$(x+1)^2+y_1^2=(x+2)^2+y_2^2=...=(x+n)^2+y_n^2$$

има решение $(x,y_1,y_2,...,y_n)$ во множеството цели броеви.

Решение. Ќе докажеме дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви ако $n=4$, па според тоа ќе нема решение и за секој природен број $n>4$. Ако m е цел број, тогаш

$$m^2\equiv\begin{cases}1(\mathrm{mod}8), & m=4k+1, m=4k+3,\\ 0(\mathrm{mod}8), & m=4k,\\ 4(\mathrm{mod}8), & m=4k+2.\end{cases}$$

Оттука следува дека за два цели броја m и l важи

$$m^2+l^2\equiv\begin{cases}2,1,5(\text{mod}\,8), & m=4k+1, m=4k+3,\\ 1,0,4(\text{mod}\,8), & m=4k,\\ 5,4,0(\text{mod}\,8), & m=4k+2.\end{cases}$$

Нека претпоставиме дека постојат цели броеви x,y_1,y_2,y_3,y_4 за кои важи

$$(x+1)^2+y_1^2=(x+2)^2+y_2^2=(x+3)^2+y_3^2=(x+4)^2+y_4^2.$$

Според тоа, постои $s\in\mathbb{N}$ таков што

$$(x+1)^2+y_1^2=(x+2)^2+y_2^2=(x+3)^2+y_3^2=(x+4)^2+y_4^2\equiv s(\text{mod}\,8)$$

Бидејќи броевите $x+1,x+2,x+3,x+4$ имаат различни остатоци при делење со 4 следува дека нивните квадрати ќе имат остатоци 0,1,4 при делење со 8. Оттука следува дека $s\in\{2,1,5\}\cap\{1,0,4\}\cap\{5,4,0\}=\varnothing$, што не е можно.

За $n=3$ лесно се гледа дека $(-2,0,1,0)$ е решение на равенката. Значи, $n_{\max}=3$.

28. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$n^{2002}=m(m+n)(m+2n)...(m+2001n). \tag{1}$$

Решение. Лесно се зебележува дека $(0,0)$ е едно целобројно решение на дадената равенка. Ќе докажеме дека равенката нема други решенија. Нека претпоставиме дека $m,n\neq 0$. Имаме, $(m,n)=(m+kn,n), k\in\mathbb{N}$. Ако $(m,n)=1$, тогаш $(m+kn,n)=1$ за $k=1,2,...,2001$, па затоа

$$m(m+n)(m+2n)...(m+2001n)$$

не е делив со n, што е противречност. Значи, $(m,n)=d>1$. Постојат цели броеви a,b такви што $m=ad$, $n=bd$ и $(a,b)=1$. Заменуваме во (1) и добиваме

$$b^{2002}=a(a+b)(a+2b)...(a+2001b). \tag{2}$$

Сега $(a+kb,b)=1$ за $k=1,2,...,2001$, па затоа равенката (2) нема решение.

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$z^2+1=xy(xy+2y-2x-4).$$

Решение. Воведуваме смени $x=u-1, y=v+1$ и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката $z^2+1=(u^2-1)(v^2-1)$. Лесно се покажува дека u,v и z се парни. Понатаму, ако $|u|>1$, тогаш u^2-1 има прост делител p таков што $p\equiv 3(\text{mod}\,4)$. Затоа $z^2+1\equiv 0(\text{mod}\,p)$ што не е можно (познато е дека ако p е прост број таков што $p\equiv 3(\text{mod}\,4)$ и p е делител на a^2+b^2, тогаш p е делител и на x и на y). Според тоа, $u=0$. Аналогно се добива дека $v=0$. Според тоа, $z=0$ и единствено решение на дадената равенка е $x=-1, y=1, z=0$.

30. Нека p и q се прости броеви. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}.$$

Решение. Равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ е еквивалентна на равенката
$$(x-pq)(y-pq)=p^2q^2.$$
Да забележиме дека $\frac{1}{x}<\frac{1}{pq}$, па затоа $x>pq$. Разгледувајќи ги сите позитивни делители на p^2q^2 ги добиваме следниве системи равенки:
$$\begin{cases}x-pq=1\\ y-pq=p^2q^2\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=p\\ y-pq=pq^2\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=q\\ y-pq=p^2q\end{cases}$$
$$\begin{cases}x-pq=p^2\\ y-pq=q^2\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=pq\\ y-pq=pq\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=pq^2\\ y-pq=p\end{cases}$$
$$\begin{cases}x-pq=p^2q\\ y-pq=q\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=q^2\\ y-pq=p^2\end{cases}\quad \begin{cases}x-pq=p^2q^2\\ y-pq=1\end{cases}$$
од каде ги добиваме решенијата:
$$(1+pq, pq(1+pq)),\quad (p(1+q), pq(1+q)),\quad (q(1+p), pq(1+p)),$$
$$(p(p+q), q(p+q)),\quad (2pq, 2pq),\quad (pq(1+q), p(1+q),$$
$$(pq(1+p), q(1+p)),\quad (q(p+q), p(p+q)),\quad (pq(1+pq), 1+pq)./$$

31. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}.$$

Решение. Бз губење на општоста можеме да земеме дека $2\le x\le y\le z$. Од овде го добиваме неравенството $\frac{3}{x}\ge\frac{3}{5}$, па затоа $x\in\{2,3,4,5\}$.

Ако $x=2$, тогаш $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$, од каде следува $z=10+\frac{100}{y-10}$, т.е. $y-10\,|\,100$. Сега, лесно се добиваат решенијата
$$(2,11,110),\ (2,12,60),\ (2,14,35),\ (2,15,30),\ (2,20,20).$$
Ако $x=3$, имаме $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{15}$ и слично како погоре ги добиваме решенијата
$$(3,4,60),\ (3,5,15),\ (3,6,10).$$
Ако $x=4$, тогаш $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{20}$, па решение е $(4,4,10)$.

Ако $x=5$, тогаш $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}$ и го добиваме решението $(5,5,5)$.

32. Определи ги сите ненегативни цели броеви n такви што $\sqrt{n}+\sqrt{n+2005}$ е природен број.

Решение. *Лема*. Ако s,t се природни броеви такви што $\sqrt{s}+\sqrt{t}\in\mathbb{N}$, тогаш s и t се точни квадрати.

Доказ. Нека $s,t\in\mathbb{N}$, $\sqrt{s}+\sqrt{t}=a\in\mathbb{N}$ и нека t не е точен квадрат. Тогаш $\sqrt{t}$ е ирационален број. Добиваме

$$s=(\sqrt{s})^2=(a-\sqrt{t})^2=a^2-2a\sqrt{t}+t \text{ т.е. } 2a\sqrt{t}=a^2+t-s.$$

Бидејќи $a\neq 0$, од последното равенство следува $\sqrt{t}=\frac{a^2+t-s}{2a}$, т.е. $\sqrt{t}$ е рационален број, што противречи на претпоставката дека $\sqrt{t}$ е ирационален број. Конечно, од добиената противречност следува дека s и t се точни квадрати. ■

Сега од лемата следува $n=a^2$ и $n+2005=b^2$, $a,b\in\mathbb{N}$. Со одземање на последните равенки добиваме

$$(b-a)(b+a)=2005.$$

Но, $2005=1\cdot 2005=5\cdot 501$, па затоа ако се земем предвид дека $b>a$ од последната равенка ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2005 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b-a=5 \\ b+a=401 \end{cases}$$

чии решенија се $a=1002, b=1003$ и $a=198, b=203$. Конечно, $n=1002^2$ или $n=198^2$.

33. Најди ги сите подредени тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$\sqrt{\frac{2015}{x+y}}+\sqrt{\frac{2015}{y+z}}+\sqrt{\frac{2015}{z+x}}$$

е природен број.

Решение. *Лема*. Ако p,q,r и $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ се рационални броеви, тогаш и $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$ се рационални броеви.

Доказ. Нека $S=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. Од претпоставката дека S е рационален број имаме $\sqrt{p}+\sqrt{q}=S-\sqrt{r}$, од каде добиваме

$$p+q+2\sqrt{pq}=S^2+r-2S\sqrt{r},$$

т.е.

$$2\sqrt{pq}=S^2+r-p-q-2S\sqrt{r}.$$

Нека сега ставиме $T=S^2+r-p-q$. Тогаш T е позитивен рационален број и

$$2\sqrt{pq}=T-2S\sqrt{r}\,,$$

па затоа

$$4pq=T^2+4S^2r-4ST\sqrt{r}\,,$$

од каде следува

$$\sqrt{r}=\tfrac{T^2+4S^2r-4pq}{4ST}\,,$$

што значи дека $\sqrt{r}$ е рационален број. ■

Сега од лемата имаме дека $\sqrt{\tfrac{2015}{x+y}},\sqrt{\tfrac{2015}{y+z}},\sqrt{\tfrac{2015}{z+x}}$ се рационални броеви. Нека

$$N=2015\,,\ \sqrt{\tfrac{2015}{x+y}}=\tfrac{a}{b}\,,\ \sqrt{\tfrac{2015}{y+z}}=\tfrac{c}{d}\ \text{ и }\ \sqrt{\tfrac{2015}{z+x}}=\tfrac{e}{f}$$

каде a,b,c,d,e,f се природни броеви и $(a,b)=(c,d)=(e,f)=1$. Тогаш од $\sqrt{\tfrac{2015}{x+y}}=\tfrac{a}{b}$ имаме $Nb^2=a^2(x+y)$, па затоа a^2 е делител на 2015, па $a=1$. Аналогно $c=e=1$. Според ова,

$$\sqrt{\tfrac{2015}{x+y}}+\sqrt{\tfrac{2015}{y+z}}+\sqrt{\tfrac{2015}{z+x}}=\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{d}+\tfrac{1}{f}$$

е природен број. Но, b,d,f се природни броеви, па затоа

$$1\le\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{d}+\tfrac{1}{f}\le 3\,.$$

Случај 1. Нека $\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{d}+\tfrac{1}{f}=1$. Без ограничување на општоста м,ожеме да земеме дека $b\le d\le f$ и притоа добиваме $(b,d,f)=(3,3,3),(2,3,6),(2,4,4)$.

- $(b,d,f)=(3,3,3)$. Имаме $x+y=9N$, $y+z=9N$ и $z+x=9N$, па според ова $x=y=z=\tfrac{9N}{2}=9067,5$, што не е природен број.
- $(b,d,f)=(2,3,6)$. Имаме $x+y=9N$, $y+z=36N$, $z+x=4N$, од каде повторно се добива дека x,y,z не се природни броеви.
- $(b,d,f)=(2,4,4)$. Имаме $x+y=4N$, $y+z=16N$, $z+x=16N$ од каде добиваме $x=y=2N=4030$ и $z=14N=28210$.

Случај 2. Нека $\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{d}+\tfrac{1}{f}=2$. Во овој случај, ако земеме дека $b\le d\le f$ имаме $(b,d,f)=(1,2,2)$. Тогаш имаме $x=y=\tfrac{N}{2}=1007,5$ и $z=\tfrac{7N}{2}=7052,5$ што не се природни броеви.

Случај 3. Нека $\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{d}+\tfrac{1}{f}=3$. Јасно мора да е $b=d=f=1$, па добиваме $x=y=z=\tfrac{N}{2}=1007,5$, што не е природен број.

Значи, решение на задачата се сите пермутации на тројката $(x,y,z)=(4030,4030,28210)$.

34. Докажи, дека за секој $s \in \mathbb{N}$ равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=1 \qquad (1)$$
има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. За секој $s \in \mathbb{N}$ равенката (1) има барем едно решение, на пример $x_1 = x_2 = ... = x_s = s$.

За да докажеме дека равенката (1) има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$ ќе докажеме поопшто тврдење: за секој позитивен рационален број w и за секој $s \in \mathbb{N}$ равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=w$$
има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Очигледно тврдењето е точно за $s=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број s. Да претпоставиме дека природните броеви
$$x_1 < x_2 < ... < x_s < x_{s+1}$$
ја задоволуваат равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u, \qquad (2)$$
каде u е даден позитивен рационален број. Тогаш од (2) следува $\frac{s+1}{x_1} \ge u$, т.е. $x_1 \ge \frac{s+1}{u}$, што значи дека x_1 од множеството $\mathbb{N}$ може да прима само конечно многу различни вредности. Ако за x_1 избереме било која од овие вредности, тогаш $s-$те броеви $x_2,...,x_s,x_{s+1}$ ја задоволуваат равенката
$$\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u-\frac{1}{x_1}, \qquad (3)$$
каде, при веќе избран x_1, десната страна е позитивен рационален број, па од претпоставката следува дека равенката (3) во множеството $\mathbb{N}$ има конечно многу решенија. Но, x_1 може да прима само конечно многу вредности, па затоа и равенката (2) има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$, за кои $x_1 = \min\{x_1, x_2,..., x_s, x_{s+1}\}$. Последното значи, дека равенката (2) има конечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

35. Докажи, дека за секој $s > 2$ равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_s}=1 \qquad (1)$$
во множеството $\mathbb{N}$ има решение $x_1, x_2,..., x_s$ такво што $x_1 < x_2 < ... < x_s$. Ако со k_s го означиме бројот на решенијата на равенката (1) докажи, дека $k_{s+1} > k_s$.

Решение. За $s=3$ равенката има решение $x_1=2, x_2=3, x_3=6$, кое го задоволува условот $x_1<x_2<x_3$.

Ако за даден природен број $s\geq 3$ природните броеви $x_1<x_2<...<x_s$ се решение на равенката (1), тогаш бидејќи $s\geq 3$ имаме $x_1>1$ и затоа $2<2x_1 <2x_2<...<2x_s$. Но, тоа значи дека за броевите $t_1=2, t_2=2x_1, t_3=2x_2,...,$ $t_{s+1}=2x_s$ важи $t_1<t_2<...<t_s<t_{s+1}$ и

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_{s+1}}=1, \tag{2}$$

шзначи дека и за $s+1$ равенката (1) има решение кое го задоволува условот на задачата. Конечно, од принципот на математичка индукција следува, дака за секој $s>2$ равенката (1) има решение во множеството $\mathbb{N}$ кое го задоволува бараниот услов.

Од претходно изнесеното следув, дека имаме k_s различни решенија на (2) кои го задоволуваат условот на задачата. Затоа $k_{s+1}\geq k_s$.

За $s=3$ равенката (1) во множеството $\mathbb{N}$ има само едно решение кое го задоволува условот на задачата. Навистина, од $x_1>1$ следува $x_1=2$, бидејќи ако $x_1\geq 3$, тогаш $x_2\geq 4, x_3\geq 5$, па затоа $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, што е противречност. Значи, $x_1=2$ и $x_2\geq 3$, при што ако $x_2\geq 4$ добиваме $x_3\geq 5$, што не е можно бидејќи $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$. Според тоа, $x_2=3$, па затоа $x_3=6$. Од досега изнесеното следува дека $k_3=1$. Понатаму, за $s=4$ решенија на равенката (1) се, на пример, $2,3,7,42$ и $2,3,8,24$, па затоа $k_4>1$.

Нека сега $s\geq 4$. Во овој случај равенката

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_{s-1}}=1$$

има најмалку едно решение $x_1<x_2<...<x_{s-1}$, а броевите

$$t_1=2, t_2=3,\ t_3=6x_1, t_4=6x_2,...,t_{s+1}=6x_{s-1}$$

се решение на (2). Ова решение е различно од сите претходно добиени решенија на (2), бидејќи истите содржеа само парни природни броеви, а во случајов бројот $t_2=3$ е непарен. Според тоа, $k_{s+1}\geq k_s+1>k_s$, за $s\geq 3$.

36. Определи го најмалиот природен број n за кој равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{n}{4z^2+1}$ нема решение x,y,z во множеството природни броеви.

Решение. За $n=1,2,3$ имаме решенија

$$x=y=10,\ z=1;\ x=y=5,\ z=1 \text{ и } x=10,\ y=2,\ z=1,$$

соодветно.

Ќе докажеме дека за $n=4$ равенката нема решение.

Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x+y)(4z^2+1)=4xy$. Нека $x=2^a x_1,\ y=2^b y_1$, каде $a,b\geq 0$ и x_1,y_1 се непарни броеви. Ако $a>b$, тогаш

$$(2^{a-b}x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1y_1,$$

што не е можно, бидејќи левата страна на последната равенка е непарен број. Аналогно, случајот $b>a$ не е можен. Според тоа,

$$(x_1+y_1)(4z^2+1)=4\cdot 2^a x_1y_1.$$

Тогаш 4 е делител на x_1+y_1, што значи дека x_1 и y_1 се непарни броеви кои даваат различни остатоци при делење со 4. Нека $x_1=4x_2+1$ и $y_1=4y_2-1$. Но, тогаш y_1 има прост делител p од видот $4k-1$, кој е делител на $4z^2+1$, што не е можно.

37. Определи го најмалиот природен број n за кој постои множество $\{s_1,s_2,\ ...,s_n\}$ кое се состои од n различни природни броеви такви што важи

$$(1-\tfrac{1}{s_1})(1-\tfrac{1}{s_2})...(1-\tfrac{1}{s_n})=\tfrac{51}{2010}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме $s_1<s_2<...<s_n$. Јасно, $s_1\geq 2$, бидејќи за $s_1=1$ добиваме $1-\frac{1}{s_1}=0$, што не е можно. Значи $2\leq s_1, 3\leq s_2,...,n+1\leq s_n$. Според тоа,

$$\tfrac{51}{2010}=(1-\tfrac{1}{s_1})(1-\tfrac{1}{s_2})...(1-\tfrac{1}{s_n})\geq(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})...(1-\tfrac{1}{n+1})=\tfrac{1}{n+1},$$

од каде добиваме $n+1\geq\frac{2010}{51}>39$, т.е. $n\geq 39$.

За $n=39$ го разгледуваме множеството

$$\{s_1,s_2,...,s_{39}\}\{2,3,...,32,33,35,36,...,40,67\},$$

за кое важи

$$(1-\tfrac{1}{s_1})(1-\tfrac{1}{s_2})...(1-\tfrac{1}{s_{39}})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot...\cdot\tfrac{32}{33}\cdot\tfrac{33}{34}\cdot\tfrac{34}{35}\cdot\tfrac{35}{36}\cdot...\cdot\tfrac{38}{39}\cdot\tfrac{39}{40}\cdot\tfrac{66}{67}=\tfrac{51}{2010}$$

Значи, $n=39$ е најмалиот природен број кој ги задоволува условите на задачата.

38. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2=3(x+2y)z.$$

Решение. Лесно се добива дека едно нетривијално решение е $(x_0,y_0,z_0)=(4,5,1)$. За $z=0$ нема други решенија освен тривијалното $(0,0,0)$. Нека $z\neq 0$ и да ставиме $a=\frac{x}{z}, b=\frac{y}{z}$. Тогаш равенката го добива обликот

$$a^2+b^2+1=3a+6b$$

и едно нејзино решение е $M=(a_1,b_1)=(4,5)$. Нека (a,b) е некое решение и нека $t\in\mathbb{Q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $p^2+q^2\neq 0$ се такви што $a=4+pt$, $b=5+qt$. Со замена во равенката $a^2+b^2+1=3a+6b$ добиваме

$$5pt+4qt+(p^2+q^2)t^2=0\ ,$$

од каде после наоѓаме $t=-\frac{5p+4q}{p^2+q^2}$ и

$$a=\frac{-p^2-4pq+4q^2}{p^2+q^2}\ ,\ b=\frac{5p^2-5pq+q^2}{p^2+q^2}\ . \tag{1}$$

Сега, од (1) дследува дека општото решение на почетната равенка е

$$x=k(-p^2-4pq+4q^2),\ y=k(5p^2-5pq+q^2)\ ,\ z=k(p^2+q^2)\ ,$$

каде $p,q\in\mathbb{Z}$, а $k\in\mathbb{Q}$

39. Реши ја равенката $2x^2+7y^2=z^2$ во множеството

а) $\mathbb{Q}$,

б) $\mathbb{Z}$.

Решение. а) Едно нетривијално решение на равенката е $(1,1,3)$. Ако ставиме $z=0$, тогаш единствено решение на равенката е $(0,0,0)$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $z\neq 0$. Воведуваме смена $a=\frac{x}{z}, b=\frac{y}{z}$ и дадената равенка ја сведуваме на равенката $2a^2+7b^2=1$ чии решенија ги бараме во множеството рационални броеви $\mathbb{Q}$. Тројката $(1,1,3)$ ни го дава решението $M=(a_1,b_1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Нека (a,b) е некое решение и нека $t\in\mathbb{Q}$ и $p,q\in\mathbb{Z}$, $p^2+q^2\neq 0$ се такви што $a=\frac{1}{3}+pt, b=\frac{1}{3}+qt$. Со замена во равенката $2a^2+7b^2=1$ добиваме $2(\frac{1}{3}+pt)^2+7(\frac{1}{3}+qt)^2=1$, односно

$$4pt+14qt+3(2p^2+7q^2)t^2=0\ ,$$

од каде по скратувањето со t добиваме $-2(p+7q)=3(2p^2+7q^2)t$, па затоа $t=-\frac{2(p+7q)}{3(2p^2+7q^2)}$ и

$$a=\frac{-2p^2-14pq+7q^2}{3(2p^2+7q^2)}\ ,\ b=\frac{2p^2-4pq-7q^2}{3(2p^2+7q^2)}\ . \tag{1}$$

Од друга страна, за секое рационално решение, т.е. точка N со рационални координати, правата $(l)=MN$ има рационален коефициент на правец, што значи дека сите рационални решенија на равенката $2a^2+7b^2=1$ се дадени со (1). Јасно, сите решенија на почетната равенка се $(ka,kb,k), k\in\mathbb{Q}$.

б) Што се однесува до целобројните решенија, бидејќи $a=\frac{x}{z}, b=\frac{y}{z}$, можеме да земеме

$$x=k(-2p^2-14pq+7q^2),\ y=k(2p^2-4pq-7q^2),\ z=3k(2p^2+7q^2),$$

каде $p,q\in\mathbb{Z}$, а $k\in\mathbb{Q}$ е таков што $x,y,z\in\mathbb{Z}$. Притоа, не може да се ограничиме само на $k\in\mathbb{Z}$, бидејќи во тој случај, на пример, решението $(x,y,z)=(3,1,5)$ не се добива,

40. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$(y^3+xy-1)(x^2+x-y)=(x^3-xy+1)(y^2+x-y).$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$x-y=\frac{x^2-1}{x^2+x-y}+\frac{y^2-1}{y^2+x-y},$$

при што случаите $x^2+x=y$ и/или $y^2+y=x$ се елементарни и треба оделно да се разгедаат. Ако $y=x$, тогаш $x^2=1$, од каде ги добиваме решенијата $(1,1)$ и $(-1,-1)$. За $|x|\le 1$ и/или $|y|\le 1$ ги добиваме уште и решенијата $(0,0), (0,1),\ (-1,0), (1,2)$ и $(-2,-1)$. Сега, нека $|x|,|y|\ge 2$ и $x\ne y$.

Нека $k=x-y>0$, $k=\frac{x^2-1}{x^2+k}+\frac{y^2-1}{y^2+k}$. Очигледно и двете дропки се меѓу 0 и 1, што значи, дека $k=1$ и $\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{y^2-1}{y^2+1}=1$. Но, сега и двете дропки се од интервалот $(\frac{1}{2},1)$ што е противречност.

Нека $t=y-x>0$ и да ја запишеме равенката во видот

$$t+2=\frac{t-1}{t-x^2}+\frac{t-1}{t-y^2}.$$

Ако истовремено $t>x^2$ и $t>y^2$, тогаш $2(y-x)=2t>x^2+y^2$, па затоа

$$(x+1)^2+(y-1)^2<2,$$

што не е можно бидејќи $|x|,|y|\ge 2$. Според тоа, една од дропките помала или еднаква на нула. Но очигледно другата е помала или еднаква на $t-1$, што значи дека нивниот збир е помал или еднаков на $t-1$, што е противречност.

41. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и $(ab+1)\,|\,(a^2+b^2)$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е точен квадрат.

Решение. Нека $\frac{a^2+b^2}{1+ab}=k$ не е точен квадрат. Ако $a=b$, тогаш

$$k=(2-k)a^2\ge 0,$$

за $k \leq 2$, и тоа е можно само за $k=1$, кој е точен квадрат. Нека (a,b) е решение на Диофантовата равенка $x^2+y^2=k(1+xy)$, во множеството $\mathbb{N}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a>b$ и дека a е најмал меѓу сите такви решенија, т.е.

$$a=\min\{x\in\mathbb{N} \mid \exists y\in\mathbb{N}, x>y, x^2+y^2=k(1+xy)\}.$$

Равенката

$$a^2+b^2=k(1+ab)$$

ја разгледуваме како квадратна равенка со непозната a. Нека a' е другото нејзино решение. Тогаш, $a+a'=kb$, т.е. $a'\in\mathbb{Z}$ и a' не е нула, бидејќи во спротивно $k=a^2$, односно k е точен квадрат. Понатаму, од

$$k(a'b+1)=a'^2+b^2$$

следува $a'\geq 0$, т.е. $a'\in\mathbb{N}$. Освен тоа

$$aa'=b^2-k<b^2<ab,$$

па затоа $a'<b$. Значи парот (b,a') е решение на разгледуваната Диофантова равенка, во множеството $\mathbb{N}$, $b>a'$ и $b<a$, што противречи на минималноста на бројот a.

Од досега изнесеното следува дека ако a и b ги задоволуваат условите на задачата, тогаш $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ е точен квадрат.

42. Докажи, дека равенката $m^2=n^5-4$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Од условот следува дека n е природен број и $n\geq 2$, т.е. доволно е да бараме решенија во множеството природни броеви. Лесно се проверува дека можните остатоци на квадрат на еден природен број при делење со 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, т.е. $m^2\equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11}$. Аналогно $n^5\equiv 0,1,10 \pmod{11}$, па затоа $n^5-4\equiv 6,7,8 \pmod{11}$. Од горните конгруенции следува дека $m^2\not\equiv n^5-4 \pmod{11}$, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

43. Определи ги сите подредени парови природни броеви (x,y) за кои важи

$$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2.$$

Решение. Нека $x=da, y=db, d=(x,y)$. Дадената равенка може да се запише во видот

$$d(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^2-ab+b^2+43ab. \qquad (1)$$

од каде следува дека $a^2-ab+b^2\,|\,43ab$. Бидејќи

$$(a,a^2-ab+b^2)=(b,a^2-ab+b^2)=(a,b)=1,$$

од (1) следува дека $a^2-ab+b^2\,|\,43$. Притоа $a^2-ab+b^2>0$.

Ако $a^2-ab+b^2=1$, тогаш мора да е $a=b=1$ и од (1) следува $x=y=d=22$.

Нека $a^2-ab+b^2=43$, т.е. $(2a-b)^2+3b^2=172$ и нека без ограничување на општоста земеме $a\le b$. Тогаш $3b^2\le 172\le 4b^2$, што важи само за $b=7$. Оттука $a=1, d=1$ или $a=6, d=\frac{43}{13}$. Само првата можност има смисол и за истата се добива решението $(x,y)=(1,7)$.

Конечно, сите решенија (x,y) се дадени со паровите $(1,7), (7,1), (22,22)$.

44. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3=(x-y)(3xy+1).$$

Решение. *Прв начин.* Ако ставиме $x=y+z$, после смената во дадената равенка ја добиваме равенката

$$z(z^2-1)=(-y)^3. \qquad (1)$$

Ако $z>1$, тогаш $-y>0$. Бидејќи броевите z и z^2-1 се заемно прости, следува дека $z=a^3$ и $z^2-1=b^3$, каде $a,b\in\mathbb{N}$. Оттука добиваме

$$(a^2)^3-b^3=1,$$

што не е можно (докажи!). Ако $z<-1$, ставаме $t=-z$ и (1) го прима видот $t(t^2-1)=y^3$, па според претходно изнесеното повторно немаме решение. Според тоа, $z=0, z=\pm1, y=0$ и добиваме дека решенија на дадената равенка се $(x,y)=(0,0), (1,0), (-1,0)$.

Втор начин. Нека $x\ne 0, x\ne y$. Бидејќи броевите x и $3xy+1$ се заемно прости добиваме, дека x е делител на $x-y$, т.е. x е делител на y. Ставаме $x=ky$, каде $k\in\mathbb{Z}$. Заменуваме во дадената равенка и добиваме

$$(1-k)(3ky^2+1)=x^2.$$

Ако $k>1$ или $k<0$, десната страна на последната равенка е негативна, што не е можно. За $k=0,1$ ги добиваме решенијата $(x,y)=(0,0), (1,0), (-1,0)$.

45. Дадени се два заемно прости природни броја m и n. Докажи, дека равенката

$$x^m u^n+y^m v^n=z^m w^n$$

има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.

Решение. Бидејќи m и n се заемно прости броеви, постојат броеви $1\le k\le n$ и $1\le l\le m$ такви што $km-nl=1$. Тогаш за секој $i\in\mathbb{N}$ броевите

$$x=y=2^m,\ u=v=2^{mi},\ z=2^{ni+k},\ w=2^{mi-l}$$

се решенија на дадената равенка.

46. Во една компанија има $m\ge 1$ мажи и $j\ge 1$ жени, $j<2004$. Секој пратил на секого (освен на самиот себе) по една честитка. Се покажало дека бројот на честитките пратени од мажите е еднаков на бројот на честитките пратени од жените на жени. Определи ги сите можни вредности на j.

Решение. Од условот на задачата следува равенството $m(m+j-1)=j(j-1)$, кое е еквивалентно на равенството $m^2=(j-1)(j-m)$. Ако p е прост делител на $j-m$ и $j-1$, тој е делител и на m, па значи и на j, од каде следува дека е делител на 1, што е противречност. Според тоа, $j-m$ и $j-1$ се заемно прости броеви и затоа $j-m=u^2,\ j-1=v^2$ за некои природни броеви u,v. Сега имаме $uv=m$ и $u^2+uv=j=v^2+1$, а од условот $1\le j<2004$ добиваме $0\le v\le 44$. Според тоа, во множеството ненегативни цели броеви треба да ја решиме равенката

$$u^2+uv=v^2+1. \qquad (1)$$

За $v=0$ добиваме $u=1$. Нека претпоставиме дека подредениот пар (u_0,v_0) е решение на (1) и $v_0\ge 1$. Тогаш $u_0\ge 1$ и како $u_0v_0\ge 1$ добиваме $u_0\le v_0$. Да ставиме $v_1=v_0-u_0,\ 0\le v_1<v_0$. Имаме

$$u_0^2=v_0(u_0-u_0)+1=(u_0+v_1)v_1+1=u_0v_1+v_1^2+1.$$

Да ставиме $u_1=u_0-v_1$. Тогаш

$$(u_1+v_1)^2=(u_1+v_1)v_1+v_1^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad u_1^2+u_1v_1=v_1^2+1,$$

т.е. добивме ново решение на (1). Ако $v_1=0$, добиваме $u_1=1$. Нека $v_1\ge 1$, што значи $u_1\ge 1$. Тогаш ставајќи $v_2=v_1-u_1<v_1$ и $u_2=u_1-v_2$ аналогно добиваме ново решение. Така добиваме низа од ненегативни цели броеви $v_0>v_1>v_2>\dots$, од каде следува дека за некој k важи $v_k=0$. Тогаш $u_k=1$ и ако по обратен редослед ги определиме $u_{k-1},v_{k-1},\dots,u_0,v_0$ ја добиваме низата на Фибоначи. Според тоа, решенија на (1) се

$(u,v)=(1,0),(1,1),(2,3),(5,8),(13,21)$

и при следното решение важи $v>44$. За првото решение имаме

$$j=v^2+1=0^2+1=1$$

и имаме $m=uv=0$, што според условот на задачата не е можно. Останатите решенија ги даваат решенијата

$$j=1^2+1=2,\ j=3^2+1=10,\ j=8^2+1=65,\ j=21^2+1=442\,.$$

47. Дали равенката

$$x^2+xy+y^2=2$$

има рационални решенија.

Решение. Нека претпоставиме дека равенката има рационално решение (x,y). Тогаш имаме $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$, при што овие дропки не може да ги скратиме со ист природен број, т.е. $(a,b,c)=1$, каде $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Имаме:

$$a^2+ab+b^2=2c^2. \qquad (1)$$

Од (1) следува дека броевите a и b мора да се парни. Според тоа, c мора да е непарен број, бидејќи во спротивно ќе важи $2\,|\,(a,b,c)=1$, што не е можно. Но сега левата страна на (1) е делива со 4, а десната страна е делива со 2, но не е делива со 4, што е противречност. Од добиената противречност следува дека дадената равенка нема рационални решенија.

48. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3-y^3=2xy+8.$$

Решение. За $x=0$ добиваме $y=-2$, а за $y=0$ добиваме $x=2$.

Сега, нека претпоставиме дека x и y се цели броеви различни од 0. Ако $x>0$, а $y<0$, тогаш

$$x^3=y^3+2xy+8<8,$$

па затоа мора да е $x=1$ и $y^3+2y+7=0$, што не е исполенто за ниту еден цел број y. Ако $x<0$ и $y>0$, тогаш од една страна

$$y^3-x^3=-2xy-8<-2xy\,,$$

а од друга страна

$$y^3-x^3=y^3+(-x)^3\geq y^2+(-x)^2\geq -2xy\,,$$

што исто така не е можно. Значи, x и y се со ист знак, т.е. $xy>0$. Сега имаме

$$0<2xy+8=x^3-y^3=(x-y)[(x-y)^2+3xy]\,,$$

па како множителот во средните загради на последното неравенство е позитивен, мора да е и другиот множител позиивен, т.е. мора да важи $x-y>0$. Ако $x-y\geq 2$, тогаш

$$2xy+8\geq 2(4+3xy)=6xy+8,$$

што не е можно за $xy>0$. Затоа, единствена можност е $x-y=1$, од каде добиваме $2xy+8=3xy+1$, т.е. $x(x-1)=7$, што повторно не е можно за било кој цел број.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствени решенија на дадената равенка се $x=0$, $y=-2$ и $x=2$, $y=0$.

49. Нека $n\geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$x^n+1=y^{n+1}$$

нема решение $x,y\in\mathbb{N}$ за кое важи $(x,n+1)=1$.

Решение. Дадената равенка еeквивалентна на равенката

$$x^n=(y-1)(y^n+y^{n-1}+...+y+1).$$

Притоа, важи

$$y^n+y^{n-1}+...+y+1\equiv n+1(\bmod y-1),$$

од каде следува дека $d=\text{NZD}(y-1,y^n+y^{n-1}+...+y+1)$ е делител на $n+1$.

Ако $d=1$, тогаш и двата заемно прости броеви $y-1$ и $y^n+y^{n-1}+...+y+1$ ќе бидат степени на цели броеви. Но,

$$y^n<y^n+y^{n-1}+...+y+1<(y+1)^n,$$

па добиваме контрадикција.

Ако p е прост делител на d, тогаш $p\,|\,x^n$, па затоа $p\,|\,x$. Но, како што видовме $p\,|\,n+1$. Оттука следува тврдењето на задачата.

50. Докажи дека равенката

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30 \qquad (1)$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Воведуваме смени $m=x-y, n=y-z, p=z-x$ и добиваме

$$m+n+p=0 \text{ и } m^3+n^3+p^3=30.$$

Сега $p=-m-n$, па затоа

$$30=m^3+n^3+p^3=m^3+n^3+(-m-n)^3=-3m^2n-3n^2m=-3mn(m+n)=3mnp,$$

т.е. $mnp=10$. Од последната равенка следува $m,n,p\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Со непосредна проверка се добива дека не постојат $m,n,p\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$ такви што $mnp=10$ и $m+n+p=0$. Според тоа, равенката (1) нема решение во множеството цели броеви.

51. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2+x=y^3+y^2+y.$$

Решение. Дадената равенка последователно ја запишуваме во видот

$$x^2+x-y^2-y=y^3,$$

$$(x-y)(x+y+1)=y^3. \qquad \textbf{(1)}$$

Ако постои прост број p таков што $p\,|\,x+y+1$ и $p\,|\,x-y$, тогаш $p\,|\,y^3$, па затоа $p\,|\,y$. Сега од $p\,|\,x-y$ и $p\,|\,y$ скедува $p\,|\,x$, па како $p\,|\,x+y+1$ добиваме $p\,|\,1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои заеднички прост делител на $x-y$ и $x+y+1$, што значи дека $x-y$ и $x+y+1$ се заемно прости. Но, тоа значи дека $x-y$ и $x+y+1$ се точни кубови, т.е. $x-y=u^3$ и $x+y+1=v^3$. Сега со замена во (1) добиваме $y=uv$, па затоа

$$v^3-u^3=2y+1=2uv+1. \qquad (2)$$

Јасно, $u\neq v$, па затоа $u^2+uv+v^2\geq|uv|+1$ и оттука следува

$$\begin{aligned}|v^3-u^3|&=|v-u|\cdot|v^2+uv+u^2|>|v-u|\cdot||uv|+1|\\&\geq|u-v|\cdot|uv+1|>\tfrac{1}{2}|v-u|\cdot|2uv+1|.\end{aligned}$$

Сега од последното неравенство и од (2) следува $|v-u|<2$, па затоа $v-u=\pm1$. Оттука едноставно наоѓаме $(u,v)=(-1,0)$ или $(0,1)$, па затоа $(x,y)=(-1,0)$ или $(0,0)$.

52. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy+yz+zx-xyz=2.$$

Решение. Без губење на општоста можеме да земеме дека $x\geq y\geq z$. Според тоа, $xy+yz+zx\leq 3xy$, односно $2+xyz\leq 3xy$. Од последната неравенка добиваме $xy(3-z)\geq 2$, па затоа $z<3$, т.е. $z=1$ или $z=2$. Ако $z=1$, тогаш $x+y=2$, па затоа $x=y=1$. Ако $z=2$, тогаш

$$xy+2y+2x-2xy=2\text{, т.е. } (x-2)(y-2)=2.$$

Решение на последната равенка е $x=4, y=3$.

Конечно, $(1,1,1), (4,3,2), (4,2,3), (3,4,2), (3,2,4), (2,3,4), (2,4,3)$ се решенија на дадената равенката.

53. Определи ги сите природни броеви n кои може да се запишат во видот $n=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$, каде a,b,c се природни броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2+b^2+c^2=nabc$. За даден n да ги разгледаме решенијата (a,b,c) во $\mathbb{N}$ со најмал збир

$a+b+c$ и нека $a\le b\le c$. Бидејќи $(a,b,nab-c)$ исто така е решене на оваа равенка (како квадратна по c), од $nab-c=\frac{a^2+b^2}{c}>0$ следува дека $\frac{a^2+b^2}{c}\ge c$, т.е. $2b^2\ge a^2+b^2\ge c^2$. Оттука следува

$$a^2+b^2+c^2<bc+bc+2bc\le 4abc,$$

па затоа $n<4$.

За $n=2$ равенката нема решенија. Навистина, од претходните разгледувања во најмалото решение мора да биде $a=1$, барем еден од b,c е парен, па $4\,|\,b^2+c^2+1$, што не е можно.

За $n=1$ и $n=3$ непосредно се проверува дека равеката има решенија, на пример, $(3,3,3)$ и $(1,1,1)$, соодветно.

54. Определи ги сите природни броеви k за кои равенката $x(x+k)=y(y+1)$ има решение во множеството природни броеви.

Решение. Ако равенката ја помножиме со 4 и на двете страни додадеме k^2 добиваме $k^2-1=(2x+k)^2-(2y+1)=a^2-b^2=uv$, каде $u=a-b,\ v=a+b$, т.е. $2x=\frac{u+v}{2}-k$ и $2y=\frac{u-v}{2}-1$. Ќе докажеме дека решение (x,y) во $\mathbb{N}$ постои ако и само ако $k=1$ или $k\ge 4$.

За $k=1$ секој пар (x,y) е тривијално решение. За $k=2$ и $k=3$ равенката го добива видот $a^2-b^2=3$ и $a^2-b^2=8$, чие решение е $(a,b)=(2,1)$ и $(3,1)$, соодветно. Во двата случаја $y=0$, па затоа почетната равенка нема решение.

За парно $k\ge 4$ доволно е да земеме $u=1$ и $v=k^2-1$, па добиваме

$$(x,y)=(\tfrac{k^2}{4}-\tfrac{k}{2},\tfrac{k^2}{4}-1).$$

За непарно $k\ge 5$ доволно е да земеме $u=2$ и $v=\frac{k^2-1}{2}$, па добиваме

$$(x,y)=(\tfrac{k^2-4k+3}{8},\tfrac{k^2-9}{8}).$$

55. а) Природните броеви x и y се такви што бројот $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ е природен број и е делител на 1978. Докажи дека $x=y$.

б) Докажи дека за кружница опишана околу квадрат со темиња (0,0), (1978,0), (1978,1978) и (0,1978) нема целобројни точки освен наведените.

Решение. а) Да ја разгледаме равенката

$$x^2+y^2=m(x+y), \tag{1}$$

каде $m\,|\,1978$. Ќе докажеме дека за наведените вредности на m равенката (1) има единствено решение $x=y=m$. Равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$(2x-m)^2+(2y-m)^2=2m^2.$$

Ќе докажеме дека за разгледуваните вредности на m број од видот $2m^2$ како збир на два квадрати може да се прикаже на единствен начин, т.е. $2m^2=m^2+m^2$.

За $m=1$, последното тврдење е очигледно. Нека, за $m>1$ претпоставиме дека $2m^2=a^2+b^2$, каде $a<b$. Тогаш $a<m$, па како $m\,|\,2\cdot 23\cdot 43$, постои прост множител p на m кој не е делител на a. Но, $p\,|\,(a^2+b^2)$ и како $(p,a)=1$, следува дека постои природен број u таков што $au\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Од друга страна, $p\,|\,((au)^2+(bu)^2)$, па затоа

$$(bu)^2\equiv -(au)^2\equiv -1(\mathrm{mod}\,p).$$

Сега,ако горната конгруенција ја степенуваме со $\frac{p-1}{2}$ (при претпоставка дека $p>2$) и ја искористиме малата теорема на Ферма добиваме

$$1\equiv (bu)^{p-1}\equiv ((bu)^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\,p),$$

па затоа $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$. Но, $1978=2\cdot 23\cdot 43$ нема такви прости множители, па затоа не можеда ги има ниту m. Според тоа, преостанува единствена можност $p=2$, додека за секој друг прост множител q важи $q\,|\,a$ и $q\,|\,b$. Ако равенката $a^2+b^2=2m^2$ ја скратиме со таков прост множител q, добиваме равенка од видот $c^2+d^2=8$, која има единствено решение $c=d=2$, така што во овој случај имаме $a=b=m$, со што тврдењето е докажано.

б) Равенката на дадената кружница е

$$(x-989)^2+(y-989)^2=2\cdot 989^2.$$

Јасно, ако (x,y) е целобројна точка на оваа кружница, тогаш тоа е и точката $(1978-x,1978-y)$, која е дијаметрално спротивно на (x,y). Меѓутоа, како полукружниот лак зафатен со точките (0,1978) и (1978,0) која ја содржи точката (1978,1978) целиот лежи во првиот квадрант, горната равенка има решение во множеството цели броеви ако и само ако има решение во множеството ненегативни цели броеви. Но, $989=\frac{1978}{2}=23\cdot 43$, што значи дека од разгледувањата од делот под а) следува $x-989=y-989=\pm 989$, а тоа се токму точките наведени во задачата. Овие точки формираат два дијаметрално спротивни пара, па следува дека тоа се и единствени целобројни точки на наведената кружница, што и требаше да се докаже.

56. Нека a,b,c се цели ненулти броеви. Познато е дека равенката

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

има целоброjно решение различно од $x=y=z=0$. Докажи дека равенката

$$ax^2+by^2+cz^2=1 \qquad (1)$$

има рационално решение.

Решение. Нека x_0, y_0, z_0 се цели броеви такви што

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=0, \qquad (2)$$

каде барем еден од x_0, y_0, z_0 е различен од 0. Јасно, најмногу еден од броевите x_0, y_0, z_0 може да е еднаков на 0. Без ограничување на општоста нека $x_0, z_0 \neq 0$. Треба да определиме рационални броеви x, y, z а кои важи (1). Во (2) воведува смена $z=z_0t$ и по средувањето добиваме

$$ax_0^2t^2+by_0^2t^2+cz^2=0.$$

Сега, ако последната равенбка ја одземеме од (1) добиваме

$$a(x^2-x_0^2t^2)+b(y^2-y_0^2t^2)=1.$$

Според тоа, задачата ќе биде решена ако најдеме барем едно рационално решение (x,y,t) на последната равенка. Ќе побараме решение за кое

$$a(x^2-x_0^2t^2)=1 \text{ и } b(y^2-y_0^2t^2)=0.$$

Вториот услов ќе биде исполнет ако на пример $y=y_0t$. Од друга страна условот $a(x^2-x_0^2t^2)=1$ може да се запише во видот

$$a(x-x_0t)(x+x_0t)=1. \qquad (3)$$

Но, ако сега r,s се произволни рационални броеви такви што $rs=\frac{1}{a}$, тогаш решението на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x-x_0t=r, \\ x+x_0t=s, \end{cases}$$

ќе биде истовремено и решение на равенката (3). Овој систем има детерминанта $2x_0 \neq 0$ и рационални коефициенти, па за неговото решение мора да важи $x,t \in \mathbb{Q}$. Тогаш и $y=y_0t$ и $z=z_0t$ исто така се рационални броеви. Од претходните разгледувања лесно следува дека вака определените броеви x,y,z навистина се решение на (1), со што задачата е решена.

На пример, ако во горното решение земеме $r=1$ и $s=\frac{1}{a}$ добиваме $x=\frac{1+a}{2a}$ и $t=\frac{1-a}{2ax_0}$, па затоа $y=\frac{(1-a)y_0}{2ax_0}$ и $z=\frac{(1-a)z_0}{2ax_0}$.

57. Нека a и b се цели броеви кои не се точни квадрати. Докажи, ако равенката

$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0 \qquad (1)$$

има нетривијално целобројно решение, тогаш тоа важи и за равенката

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = 0. \qquad (2)$$

Решение. Прво, бидејќи a и b не се точни квадрати, важи $a,b \neq 0$. Понатаму, a и b не може да се истовремено негативни, па без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > 0$. Нека (X,Y,Z,W) е нетривијално решение на равенката (1). Тогаш

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 + abW^2 = 0,$$

т.е.

$$X^2 - aY^2 - b(Z^2 - aW^2) = 0.$$

Ако последното равенство го помножиме со $Z^2 - aW^2$ и искористиме дека

$$(X^2 - aY^2)(Z^2 - aW^2) = (XZ - aYW)^2 - a(YZ + XW)^2,$$

добиваме

$$(XZ - aYW)^2 - a(YZ + XW)^2 - b(Z^2 - aW^2)^2 = 0,$$

што значи дека

$$x_0 = XZ - aYW,$$
$$y_0 = YZ + XW,$$
$$z_0 = Z^2 - aW^2,$$

е целобројно решение на равенката (2). Останува да докажеме дека барем еден од броевите x_0, y_0, z_0 е различен од 0. Поточно, ќе докажеме дека $z_0 \neq 0$. Во спротивно ќе важи $Z^2 = aW^2$, па како a не е точен квадрат, од последното равенство ќе следува $Z = W = 0$. Но, тогаш $X^2 - aY^2 = 0$, па затоа $X = Y = 0$, што противречи на претпоставката дека (X,Y,Z,W) е нетривијално решение на равенката (1). Значи, (x_0, y_0, z_0) е нетривијално целобројно решение на равенката (2).

58. Определи целобројно решение на равенката

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{29}^2 = 29x_1x_2...x_{29} \qquad (1)$$

такво што барем за еден $1 \leq k \leq 29$ важи $x_k \geq 1988^2$.

Решение. Јасно, $x_1 = x_2 = ... = x_{29} = 1$ е едно решение на равенката (1). Нека $(y, x_2, ..., x_{29})$ е друго решение на равенката (1), односно нека

$$y^2 + x_2^2 + ... + x_{29}^2 = 29yx_2...x_{29}. \qquad (2)$$

Ако од (2) ја одземеме (1) добиваме

$$y^2 - x_1^2 = 29(y - x_1)x_2 ... x_{29},$$

од каде по скратувањето со $y - x_1$ добиваме $y + x_1 = 29x_2 ... x_{29}$, односно

$$y = 29x_2 ... x_{29} - x_1. \qquad (3)$$

Лесно се пшроверува дека (3) дава ново решение на равенката (1).

Сега, доволно е да обезбедиме воочената трансформација навистина да ги зголемува компонентите на решението. Ако претпоставивме дека на почетокот имавме

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_{29},$$

тогаш

$$29x_2 ... x_{29} - x_1 \ge 29x_{29} - x_{29} = 28x_{29} > x_{29}, \qquad (4)$$

па како разгледуваната равенка е симетрична по сите променливи, целисходно е нашата трансформација на решението да ја разгледуваме во видот

$$(x_1, x_2, ..., x_{29}) \to (x_2, ..., x_{29}, 29x_2 ... x_{29} - x_1),$$

со што ќе се зачува растечкото пофдредување и со тоа ќе се обезбеди неравенството (4) да важи по секоја примена на горната трансформација.

Сега, ако тргнеме од воочeното нетривијално решение $(1,1,...,1)$, тогаш последователно ги добиваме решенијата

$(1,...,1,28),$

$(1,...,1,28,29 \cdot 28 - 1),$

$(1,...,1,28,29 \cdot 28 - 1, 29 \cdot 28(29 \cdot 28 - 1) - 1),$

$(1,...,1,28,29 \cdot 28 - 1, 29 \cdot 28(29 \cdot 28 - 1) - 1, 29 \cdot 28(29 \cdot 28 - 1)(29 \cdot 28(29 \cdot 28 - 1) - 1) - 1)$

и последната компонента на четвртото решение е очиглено поголема од 1988^2.

59. Докажи, дека за секој природен број n равенката

$$x(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^n + y(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} = 1$$

има точно едно целобројно решение (x, y).

Решение. Ставаме $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогаш $u^2 + u = 1$. Според тоа, при $n = 1$, едно целобројно решение на равенката е $(x_1, y_1) = (1,1)$. Нека (x_k, y_k) е целобројно решение на равенката за $n = k$. Ќе докажеме дека равенката

$$xu^{k+1} + yu^{k+2} = 1$$

има исто така целобројно решение $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + y_k,\ x_k)$. Навистина

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x_k + y_k) + u^{k+2}x_k &= (u^{k+1} + u^{k+2})x_k + u^{k+1}y_k \\ &= u^k(u^2 + u)x_k + u^{k+1}y_k \\ &= u^k x_k + u^{k+1}y_k = 1. \end{aligned}$$

Ако за некој $n \in \mathbb{N}$ постојат две различни целобројни решенија (x, y) и (x', y'), тогаш нивната разлика $(x_0, y_0) = (x - x', y - y')$ е целобројно решение на равенката $u^n x + u^{n+1} y = 0$, што противречи на фактот дека u е ирационален број.

60. Најди алгоритам за решавање во множеството $\mathbb{N}$ на равенката

$$x^n - y^n = a, \tag{1}$$

каде a и n се дадени природни брооеви.

Решение. Ако $n = 1$, тогаш сите решенија на равенката (1) во множеството $\mathbb{N}$ се дадени со $y = t, x = a + t, t \in \mathbb{N}$.

Ако $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$a = x^{2k+1} - y^{2k+1} = (x - y)(x^{2k} + x^{2k-1}y + ... + y^{2k}).$$

Бидејќи $a > 0, x - y \geq 1$, добиваме $x^{2k} + y^{2k} < a$, па затоа $x < \sqrt[2k]{a} = \sqrt[n-1]{a}$ и $y < \sqrt[2k]{a} = \sqrt[n-1]{a}$. Според тоа, за да равенката (1) се реши во множеството $\mathbb{N}$ треба да се направат конечен број проверки.

Ако $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$a = x^n - y^n = x^{2k} - y^{2k} = (x^k - y^k)(x^k + y^k).$$

Бидејќи $a > 0, x^k - y^k \geq 1$, добиваме $x^k + y^k < a$, па затоа $x < \sqrt[k]{a}$ и $y < \sqrt[k]{a}$. Според тоа, за да равенката (1) се реши во множеството $\mathbb{N}$ треба да се направат конечен број проверки.

61. Нека p е прост број и k е природен број поголем од 1. Докажи дека постои најмногу еден пар природни броеви (x, y) таков што важи

$$x^k + px = y^k. \tag{1}$$

Решение. Јасно, $x < y$. Нека $(x, y) = d$ и a, b се природни броеви такви што $x = ad$ и $y = bd$, $(a, b) = 1$. Добиваме, $p = \frac{d^{k-1}(b^k - a^k)}{a}$. Сега од $(a, b) = 1$ следува $(a, b^k - a^k) = 1$, па затоа $a \mid d^{k-1}$. Бидејќи $b^k - a^k \neq 1$ и p е прост број следува $a = d^{k-1}$ и $p = b^k - a^k$. Понатаму, од $b - a \mid b^k - a^k$ и $b - a \neq b^k - a^k$, следува $b - a = 1$, т.е. $b = a + 1$. Значи, $p = (1 + a)^k - a^k$.

Функцијата $f(t) = (1 + t)^k - t^k$ монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$, па затоа само за една вредност на a е можно

$$p = (1 + a)^k - a^k.$$

Оттука следува дека постои најмногу еден пар (x, y) природни броеви таков што важи (1).

62. Во множеството природни броеви решеија равенката

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1},$$

при што важат ограничувањата $n \geq 2$ и $z \leq 5 \cdot 2^{2n}$.

Решение. Јасно, $x > y \geq 1$. Исто така, да забележиме дека x и y мора да се со иста парност. Имено, ако y е парен број, тогаш сите членови на равенката освен x^{2n+1} се апрни, па затоа мора и x да е парен број. Слично, парноста на x повлекува парност на y. Затоа $x - y \geq 2$ и $x \geq 3$.

Понатаму,

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + ... + y^{2n}),$$

па затоа

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} > (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y) > 2(x-y)x^{2n-1}y \geq 4x^{2n-1}y.$$

Од друга страна, $z \leq 5 \cdot 2^{2n}$, па затоа

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} \leq 5 \cdot 2^{2n}xy + 2^{2n+1} = 2^{2n}(5xy + 2).$$

Од последните две неравенства следува

$$4x^{2n-1}y < 2^{2n}(5xy+2),$$

$$(\tfrac{x}{2})^{2n-2} < 5 + \tfrac{2}{xy} < 6.$$

Бидејќи $2n - 2 \geq 2$ заклучуваме дека $x < 2\sqrt{6} < 5$, па затоа единствени можности се $(x, y) \in \{(3,1), (4,2)\}$. Од првата можност следува неравенството $(\tfrac{3}{2})^{2n-2} < 6$, од каде добиваме $n \leq 3$, а од втората добиваме $2^{2n-2} < 6$, што е можно само за $n = 2$.

За $x = 3, y = 1, n = 2$ добиваме $z = 70$, за $x = 3, y = 1, n = 3$ добиваме $z = 686$ и за $x = 4, y = 2, n = 2$ добиваме $z = 120$.

Бидејќи за $n = 3$ треба да е $z \leq 320$, второто решение отпаѓа, а како за $n = 2$ треба да важи $z \leq 80$, отпаѓа и третото решение. Конечно, единствено решение со саканите својства е $(x, y, z) = (3, 1, 70)$ и $n = 2$.

63. Нека p е прост број и $m \geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p + y^p}{2} = (\frac{x+y}{2})^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x, y) \neq (1,1)$ само ако $m = p$.

Решение. Јасно, ако $m = p$, тогаш дадената равенка има бесконечно многу решенија од видот $(x,x),\ x \in \mathbb{N}$.

Нека (x,y) е решение на равенката. Ако $x = y$, тогаш $x^p = x^m$, па затоа $m = p$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x \neq y$. Да забележиме дека од

$$(\tfrac{x+y}{2})^m = \tfrac{x^p+y^p}{2} > (\tfrac{x+y}{2})^p$$

следува дека $m > p$.

Нека $(x,y) = d$, $x = du$ и $y = dv$, каде $(u,v) = 1$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$u^p + v^p = 2d^{m-p}(\tfrac{u+v}{2})^m. \qquad (1)$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(u+v)^m$ е делител на $u^p + v^p$, што не е можно, бидејќи $(u+v)^m > (u+v)^p \geq u^p + v^p$. Според тоа, u и v се непарни броеви. Нека $u + v = 2^a t$, каде a е природен број и t е непарен број. Да забележиме дека $(t,u) = (t,v) = 1$. За $p = 2$ имаме $u^2 + v^2 \equiv 2(\bmod 4)$, а кога p е непарен прост број имаме

$$\begin{aligned} u^p + v^p &= (2^a t - v) + v^p \\ &= 2^a t[(2^a t)^{p-1} - \tbinom{p}{1}(2^a t)^{p-2} v + \ldots - 2^a t v^{p-2}\tbinom{p}{p-2} + p v^{p-1}], \end{aligned}$$

каде pv^{p-1} е непарен број, а сите собирци освен него во средната заграда се парни броеви. Според тоа, ако p е непарен број, тогаш највисокиот степен на 2 кој е делител на $u^p + v^p$ е 2^a, а ако $p = 2$, тогаш е 2. Но десната страна на (1) е делива барем со $2^{1+(m-1)a}$. Затоа $1 + (m-1)a \leq a$, а тоа е можно само за $a = 1$. Добивме $u + v = 2t$, каде t е непарен број, при што очигледно $t \geq 3$. Сега равенката (1) го добива видот

$$(2t - v)^p + v^p = 2d^{m-p} t^m.$$

За $p = 2$ имаме $t \mid 2v^2$, што не е можно бидејќи $(t,v) = 1$. Ако p е непарен прост број, добиваме

$$2^p t^{p-1} - \tbinom{p}{1} 2^{p-1} t^{p-2} v + \ldots - \tbinom{p}{p-2} 4 t v^{p-2} + 2 p v^{p-1} = 2 d^{m-p} t^{m-1},$$

од каде следува дека $t \mid p$, т.е. $t = p$. Но, сега сите членови со исклучок на $2pv^{p-1}$ се деливи со p^2, што не е можно.

Според тоа, равенката нема решенија за кои $x \neq y$, со што тврдењето е докажано.

64. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{a^7-1}{a-1}=b^5-1.$$

Решение. *Лема.* Ако p е прост делител на бројот $\frac{a^7-1}{a-1}$, тогаш $p\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$ или $p=7$.

Доказ. Нека $p-1$ не е делив со 7. Тогаш $(p-1,7)=1$. Од $p\,|\,a^7-1$ следува дека $a^7\equiv 1(\operatorname{mod} p)$, т.е. $(a,p)=1$. Според теоремата на Безу постојат цели броеви m,n такви што $m(p-1)+7n=1$, а од малата теорема на Ферма следува $a^{p-1}\equiv 1(\operatorname{mod} p)$. Според тоа, $a\equiv a^{m(p-1)}a^{7n}\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$. Значи,

$$\frac{a^7-1}{a-1}=a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1\equiv 7(\operatorname{mod} p),$$

т.е. $p\,|\,7$, од каде следува $p=7$. ■

Нека $b-1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Бидејќи $p_i\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$ или $p_i=7$ за $i\in\{1,2,...,k\}$ важи $b-1\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$ или $b-1\equiv 0(\operatorname{mod} 7)$, т.е. $b\equiv 2(\operatorname{mod} 7)$ или $b\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$.

Нека d е произволен делител на $\frac{a^7-1}{a-1}$. Тогаш $d=q_1^{\alpha_1}...q_t^{\alpha_t}$ и притоа $q_i\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$ или $q_i=7$. Оттука следува $d\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$ или $d\equiv 0(\operatorname{mod} 7)$. Ако $b\equiv 2(\operatorname{mod} 7)$, тогаш $b^4+b^3+b^2+b+1\equiv 3(\operatorname{mod} 7)$, што не е можно бидејќи секој делител на $\frac{a^7-1}{a-1}$ при делење со седум има остаток нула или еден.

Ако $b\equiv 1(\operatorname{mod} 7)$, тогаш $b^4+b^3+b^2+b+1\equiv 5(\operatorname{mod} 7)$, што не е можно од истите причини. Значи дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

65. Докажи, дека за секој природен број $k>1, k\neq 3$ постојат бесконечно многу природни броеви кои можат да се запишат како разлика на два $k-$ти степени на природни броеви, но не можат да се запишат како збир на два $k-$ти степени на природни броеви.

Решение. Такви броеви се $(2^k-1)2^{nk}, n=0,1,2,...$. Навистина

$$(2^k-1)2^{nk}=(2^{n+1})^k-(2^n)^k,$$

па останува да докажеме дека равенката

$$(2^k-1)2^{nk}=u^k+v^k. \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$. Ова е точно за $n=0$, бидејќи

$$1^k+1^k<2^k-1<2^k+1^k.$$

Да претпоставиме дека, постои природен број n за кој равенката (1) има решение во множеството $\mathbb{N}$ и нека n е најмалиот од нив.

Ако броевите n и v се и двата парни $n=2u_1, v=2v_1$, тогаш од (1) имаме

$$(2^k-1)2^{(n-1)k}=u_1^k+v_1^k$$

што противречи на претпоставката за минимланоста на бројот n. Но, левата страна на (1) е парен број, па затоа броевите u и v треба да се непарни.
Да претпоставиме, дека k е непарен број поголем од 3. Тогаш од формулата

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=u^{k-1}-u^{k-2}v+u^{k-3}v^2+\ldots+v^{k-1},$$

каде на десната страна имаме k собирци кои се непарни, следува дека левата страна е непарен број, а бидејќи тој е делител на бројот $(2^k-1)2^{nk}$, добиваме $\frac{u^k+v^k}{u+v}\le 2^k-1$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $u>v$. Тогаш $v^{k-1}\le\frac{u^k+v^k}{u+v}$, па затоа, $v^{k-1}<2^k$, т.е. $v<2^{\frac{k}{k-1}}<3$, а бидејќи v е непарен имаме $v=1$. Оттука

$$\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{u^k+1}{u+1}>u^{k-2}(u-1)>(u-1)^{k-1}.$$

Според тоа $(u-1)^{k-1}<2^k$, па затоа $u-1<3$ и како u е непарен број добиваме $u=1$ или $u=3$. Случајот $u=1$ не е можен бидејќи доведува до равенството $u^k+v^k=2$, што противречи на (1). Случајот $u=3$ исто така не е можен бидејќи се добива $\frac{u^k+v^k}{u+v}=\frac{3^k+1}{4}>2^k-1,$ за $k>3$.
Сега да претпоставиме дека k е парен природен број. Бидејќи u и v се непарни, следува дека u^k+v^k дава остаток 2 при делење со 4, што не е можно, бидејќи левата страна на (1) се дели со 4.

66. Нека x,y,z се по парови заемно прости природни броеви и $p\ge 5$, q се прости броеви, за кои се исполнети условите
а) $6p$ не е делив со $q-1$,

б) q не е делител на x^2+xy+y^2,

в) q не е делител на $x+y-z$.

Докажи, дека $x^p+y^p\ne z^p$.

Решение. Нека претпоставиме дека $x^p+y^p=z^p$. Ако $q\,|\,x$, тогаш од $q\,|\,x^2+xy+y^2$ добиваме $q\,|\,y$, што противречи на $(x,y)=1$. Нека r е природен број, за кој $xr\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$. Ставаме $u=yr$ и $v=zr$. Тогаш

$$(x^2+xy+y^2)r^2=(xr)^2+(xr)u+u^2\equiv 1+u+u^2(\mathrm{mod}\,q) \text{ и}$$

$$(x^p+y^p-z^p)r^p=(xr)^p+u^p-v^p\equiv 1+u^p-v^p(\mathrm{mod}\,q).$$

Но, како $x^p+y^p=z^p$ и $q\mid x^2+xy+y^2$ добиваме

1) $1+u+u^2\equiv 0 \pmod q$

2) $1+u^p-v^p\equiv 0 \pmod q$.

Од 1) следува дека $u^3-1\equiv 0 \pmod q$, т.е. $u^3\equiv 1 \pmod q$. Ќе ги докажеме дека $u\not\equiv 1 \pmod q$. Навистина, ако $u\equiv 1 \pmod q$, тогаш $xr\equiv yr \pmod q$, т.е. $x\equiv y \pmod q$ и $3x^2\equiv 0 \pmod q$, што значи $q=3$, бидејќи q е прост број и $q\nmid x$. Тогаш или $x\equiv y\equiv 1 \pmod q$ и $z\equiv 2 \pmod q$ или $x\equiv y\equiv 2 (\mathrm{mod})$ и $z\equiv 1 \pmod q$, бидејќи $x^p+y^p=z^p$. И во двата случаја добиваме $q\mid (x+y-z)$, што е противречност.

Значи, $u^3\equiv 1 \pmod q$, но $u\not\equiv 1 \pmod q$. Од малата теорема на Ферма имаме $u^{q-1}\equiv 1 \pmod q$, па затоа $3\mid q-1$. Според тоа $q>3$, т.е. $q-1$ е парен број и добиваме $6\mid (q-1)$. Според условот на задачата $p\nmid (q-1)$, т.е. $(p,q-1)=1$. Но, тогаш постојат природни броеви *m* и *n* такви, што $mp-n(q-1)=1$ и како $q-1$ е парен број добиваме дека *m* е непарен број и од $mp\equiv 1 \pmod 3$ ќе следува дека $m\equiv p \pmod 3$.

Сега за простиот број $p\ge 5$ постојат две можности.

3) $p\equiv 1 \pmod 3$, т.е. $p=3k+1$. Тогаш

$$v^p\equiv 1+u^p\equiv 1+u^{3k+1}\equiv 1+u\equiv -u^2 \pmod q$$

и значи $q\nmid v$. Според малата теорема на Ферма имаме

$$v^{q-1}\equiv 1 \pmod q,\ v^{n(q-1)}\equiv 1 \pmod q,\ \text{т.е. } v^{n(q-1)}=ql+1.$$

Од овде ако земеме во предвид дека $m\equiv p \pmod q$, т.е. дека *m* е од облик $3s+1$, последователно добиваме

$$v=v^{mp-n(q-1)}=\frac{v^{mp}}{v^{n(q-1)}}=\frac{v^{mp}}{ql+1}$$

$$v^{mp}=v\left(ql+1\right)\equiv v \pmod q$$

$$v\equiv (v^p)^m\equiv (-u^2)^m\equiv -u^{6s+2}\equiv -u^2\equiv 1+u \pmod q.$$

Значи, $1+u-v\equiv 0 \pmod q$. Последната конгруенција покажува дека q е делител на $r(x+y-z)$, па значи $q\mid (x+y-z)$, што е противрешност.

4) $p\equiv 2 \pmod 3$, т.е. $p=3k+2,\ m=3s+2$. Аналогно како во претходниот случај имаме

$$v^p\equiv 1+u^p\equiv 1+u^{3k+2}\equiv 1+u^2\equiv -u \pmod q \text{ и}$$

$$v\equiv (v^p)^m\equiv (-u)^m\equiv -u^{3s+2}\equiv 1+u \pmod q.$$

Значи, $1+u-v\equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$, што одново е противречност со $q \nmid (x+y-z)$.

Од досега изнесеното конечно следува дека претпоставката $x^p+y^p=z^p$ не е точна.

67. Докажи, ако a и b се природни броеви и a^2+b^2-a е делив со $2ab$, тогаш a е точен квадрат.

Решение. Од условот на задачата следува дека постои $q\in\mathbb{N}$ таков што

$$a^2+b^2-a=2qab\,,$$

Нека $d=(a,b), a=rd, b=sd$. Заменуваме во горното равенство и добиваме

$$r^2d+s^2d-r=2qrsd\,,$$

па затоа $d\,|\,r$. Но, од друга страна $r\,|\,s^2d$, па од $(r,s)=1$ следува $r\,|\,d$. Значи, $r=d$ и $a=r^2$.

68. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-mxy+y^2=n, \tag{1}$$

каде m е природен број и n е цел број.

Решение. Често пати множествата решенија на Диофантовите равенки се инваријантни на определени линеарни трансформации, така што од претпоставката дека (x,y) е решение следува дека и $(ax+by,cx+dy)$ е решение, каде a,b,c,d се погодно избрани коефициенти. Притоа, ако сакаме да го примениме Ферматовиот метод на бесконечно спуштање, тогаш најчесто разгледуваме пресликувања кај кои $a=0$ и $b=1$, т.е. $(x,y)\to(y,cx+dy)$. Во случајов, ако $x^2-mxy+y^2=n$, тогаш

$$y^2-my(cx+dy)+(cx+dy)^2=n+(c^2-1)+(m-cm+2cd)xy+(d^2-dm)y^2\,.$$

Очигледно, условите $c^2-1=m-cm+2cd=d^2-dm$ даваат коефициенти c и d со саканите својства. Значи, $c=\pm 1$. За $c=1$ добиваме $d=0$, и овој случај го дава парот (y,x) па затоа нема да не интересира. Затоа земаме $c=-1$, од каде добиваме $d=m$. Последното значи дека множеството целобројни решенија на равенката (1) е инваријатно на трансформацијата

$$g(x,y)=(y,my-x)\,. \tag{2}$$

Понатаму, бидејќи равенката (1) е симетрична, можеме да се ограничиме само на решенијата кај кои $x>y>0$ (можни се и решенија $x=y$, но само ако $m\neq 2$ и $\frac{n}{2-m}$ е точен квадрат, или $m=2$ и $n=0$). Затоа е важно да определиме кога решението од видот (2) има прва компонента поголема од втората. Очигледно овој услов е изразен со неравенството $y > my - x$, т.е. со неравенството $(m-1)y < x$. Од друга страна, компонентите на решението (2) треба да се природни броеви, па затоа мора да важи $my - x > 0$, односно $x < my$. Според тоа, ако (x, y) е решение на равенката (1) во множеството природни броеви за кое важи $x > y$ и ако притоа важат неравенствата

$$(m-1)y < x < my, \tag{3}$$

тогаш со (2) е дадено решение $g(x, y) = (x', y')$ на (1) во множеството природни броеви за кое $x' > y'$. Притоа има е $x' < x$. На овој начин е дефинирана итеративна постапка за добивање на нови решенија на равенката (1). Оваа постапка ќе заврши по конечен број чекори, при што добиваме таканареќено минимално решение (x_0, y_0) за кое не важи едно од неравенствата (3), т.е. за кое или $x_0 \le (m-1)y_0$ или $x_0 \ge my_0$.

Сега разликуваме два случаја. Ако $n \ge 0$, тогаш за произволно решение (x, y) на (1) имаме

$$x(my - x) = mxy - x^2 = y^2 - n \le y^2 < xy,$$

т.е. $(m-1)y < x$. Така, минималноста на решението во овој случај е еквивалентна со $x_0 \ge my_0$. Притоа важи

$$0 \ge x_0(my_0 - x_0) = y_0^2 - n,$$

па затоа $y_0 \le \sqrt{n}$. Последното значи дека има конечно многу минимални решенија, бидејќи за фиксиран y, равенката (1) е квадратна по x, па затоа за секој $y_0 \in \{1, 2, ..., [\sqrt{n}]\}$ има најмногу два броја x_0 такви што (x_0, y_0) може да е минимално решение. Затоа минималните решенија може да се определат со непосредна проверка.

Од друга страна, ако $n < 0$, тогаш од (1) следува

$$x(my - x) = y^2 - n > 0.$$

Значи, секое решение на (1) задоволува $x < my$, па минималноста на решението е еквивалентна на $x_0 \le (m-1)y_0$, при што одма можеме да претпоставиме дека $m > 2$, бидејќи за $m = 1$ имаме

$$x^2 - xy + y^2 = (x - \tfrac{y}{2})^2 + \tfrac{3}{4}y^2 \ge 0,$$

а за $m = 2$ важи

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \ge 0.$$

Понатаму, неравенството $x_0 \le (m-1)y_0$ е еквивалентно со неравенството

$$x_0(my_0 - x_0) \ge x_0 y_0,$$

па од $x_0(my_0-x_0)=y_0^2+|n|$ добиваме $y_0(x_0-y_0)\leq|n|$. Оттука или $x_0=y_0$ (во случај кога $\frac{n}{2-m}$ е точен квадрат), или $y_0\leq|n|$. Како и во случајот $n\geq 0$ последното неравенство гарантира дека имаме конечно многу минимални решенија и дава можност истите да се определат со непосредна проверка.
Според тоа, ако се познати сите минимални решенија (x_0,y_0), тогаш при претпоставка $x>y$ сите други решенија на равенката (1) се од видот $f^k(x_0,y_0)$, $k\in\mathbb{N}$, каде f е инверзното пресликување на g, односно

$$f:(x,y)\to(mx-y,x),$$

бидејќи за секое решение $(x,y), x>y$, $g^k(x,y)$ мора да е минимално решение за доволно големо k.

69. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што за даден $q\in\mathbb{N}$ важи

$$\tfrac{a^2+b^2-a}{2ab}=q.$$

Решение. Во задачата 67 видовме дека ако за даден $q\in\mathbb{N}$ важи $\frac{a^2+b^2-a}{2ab}=q$, тогаш $a=r^2, b=rs$, каде (r,s) е решение на равенката

$$x^2-2qxy+y^2=1. \qquad (1)$$

Ревнката (1) всушност е равенка од видот Диофантови равенки кои ги разгледавме во задачата 68, при што $m=2q$ и $n=1$. Според задачата 68, сите решенија на равенката (1) се од видот $f^k(x_0,y_0)$, $k\in\mathbb{N}_0$, каде (x_0,y_0) е некое минимално решение, а $f(x,y)=(2qx-y,x)$. Бидејќи $n\geq 0$, минималните решенија се определени од условот $x_0\geq 2qy_0$, од каде наоѓаме $y_0\leq 1$. Значи, $y_0=1$ и $x_0^2-2qx_0=0$, т.е. $x_0=2q$ е единствено минимално решение, па затоа сите решенија на равенката (1) за кои $x>y$ се од видот $f^k(2q,1)$, $k\geq 0$. Со други зборови, сите барани решенија се дадени со паровите последователни членови на низата $a_k,k\in\mathbb{N}$, каде

$$a_{k+2}=2qa_{k+1}-a_k,$$

за $k\geq 1$ и $a_1=1,\ a_2=2q$.

70. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2-5xy+y^2+5=0.$$

Решение. Дадената равенка е всушност е специјален случај на равенката (1) од задачата 68, во кој $m=5, n=-5$. Тоа значи дека таа нема решенија за кои

$x = y$, па затоа можеме да се ограничиме на решенија за кои $x > y$.

Бидејќи $n < 0$, од решението на задачата 68 следува дека минималноста на решението (x_0, y_0) е еквивалентна со $x_0 \le 4y_0$, од што следува

$$y_0(x_0 - y_0) \le 5 \text{ и } y_0 \le 5.$$

Случајот $y_0 = 1$ дава квадратна равенка $x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0$, односно минимални решенија $(2,1)$ и $(3,1)$. Од друга страна, ако $y_0 \ge 2$, тогаш $x_0 \ge 3$, па добиваме

$$(x_0 - y_0)^2 + 5 = 3x_0 y_0 \ge 18,$$

од каде следува $x_0 - y_0 \ge 4$ и $y_0(x_0 - y_0) \ge 8$, што не е можно. Значи, претходните две минимални решенија се и единствени, па затоа множеството од сите решенија на разгледуваната равенка (при ограничување $x > y$) се

$$\{ f^k(2,1),\ f^k(3,1) \mid k \in \mathbb{N}_0 \},$$

каде $f(x, y) = (5x - y, x)$.

26. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. За природен број n кој не е степен на 2, дефинираме $t(n)$ да биде најголемиот позитивен непарен делител на n и $r(n)$ да биде најмалиот позитивен непарен делител на n, различен од 1. Определи ги сите природни броеви n кои не се степен на 2 за кои важи $n=3t(n)+5r(n)$.

   Решение. Нека p е најмалиот непарен прост делител на n. Тогаш $r(n)=p$. Можеме n да го запишеме како $n=2^t mp$, за m непарен и $t\geq 0$. Тогаш $t(n)=pm$, па равенството во условот на задачата преминува во
$$2^t mp=3mp+5p,$$
   односно
$$(2^t-3)m=5.$$
   Јасно, m мора да биде делител на 5, па затоа $m=1$ или $m=5$.
   Ако $m=1$, тогаш $2^t-3=5$, односно $2^t=8$, т.е. $t=3$. Тогаш имаме решение $n=8p$, за p прост непарен број.
   Ако $m=5$, тогаш $2^t-3=1$, од каде $t=2$. Тогаш имаме $n=4\cdot 5\cdot p$, за p прост непарен број.
   Бидејќи p е најмалиот прост делител на n, мора $p=3$ во првиот случај и $p=5$ во вториот случај. Значи сите природни броеви се $n=60$ и $n=100$.

2. Одреди го најмалиот збир на цифрите на број од облик $3n^2+n+1$, каде n е природен број.

   Решение. За $n=1$ имаме $3n^2+n+1=5$, па збирот на цифрите е 5. За $n=8$ имаме $3n^2+n+1=201$, па збирот на цифрите е 3. Ќе докажеме дека ова е најмалиот можен збир на цифри на броевите од дадениот облик.
   Јасно $3n^2+n+1=2n^2+n(n+1)+1$ е непарен број, па збирот на цифри на ваквите броеви не може да биде 1, бидејќи збир на цифрите 1 имаат само броевите од облик 10^m кои се парни. Од непарноста на $3n^2+n+1$ следува дека тој број не е од облик $2\cdot 10^m$. Останува да провериме дали бројот $3n^2+n+1$ е од облик 10^m+1, односно дали равенката $3n^2+n+1=10^m+1$ има решенија во множеството природни броеви.

Бидејќи

$$3n^2+n=n(3n+1)=10^m=2^m5^m$$

прво земаме $n=2^m$. Тогаш $3\cdot 2^m+1=5^m$. Но, $5^m>3\cdot 2^m+1$ за $m\geq 2$,што значи дека равенката нема решение. Сега, ако $n=5^m$, тогаш $3\cdot 5^m+1=2^m$ што очигледно не е можно. Ако земеме $n=1, 3n+1=10^m$ добиваме $4=10^m$, што не е можно. Според тоа равенката нема решение, па затоа најмалиот збир на цифри на број од облик $3n^2+n+1$ е 3.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Решение. Ако (x,y) е решение, тогаш очигледно $x\geq 0$ и $(x,-y)$ е решение. За $x=0$, имаме две решенија $(0,2)$ и $(0,-2)$.

Нека сега, (x,y) е решение со $x>0$ и без губење на општоста да претпоставиме $y>0$. Равенката е еквивалентна на равенката

$$2^x(1+2^{x+1})=(y-1)(y+1),$$

од каде следува дека $y-1$ и $y+1$ се парни, а дополнително точно еден од нив е делив со 4. Значи, $x\geq 3$ и еден од множителите е делив со 2^{x-1}, но не е делив со 2^x. Така, $y=2^{x-1}m+\varepsilon$, каде m е непарен и $\varepsilon=\pm 1$. Заменуваме во почетната равенка и добиваме

$$2^x(1+2^{x-1})=(2^{x-1}m+\varepsilon)^2-1=2^{2x-2}m^2+2^x m\varepsilon$$

односно

$$1-\varepsilon m=2^{x-2}(m^2-8) \tag{1}$$

За $\varepsilon=1$, добиваме $m^2-8\leq 0$, и во овој случај немаме решение на (1).

За $\varepsilon=-1$, равенката (1) добива облик $1+m=2^{x-2}(m^2-8)\geq 2(m^2-8)$, од каде добиваме $2m^2-m-17\leq 0$.

Следува $m\leq 3$. Јасно, за $м=1$ равенката нема рфешение, а за $m=3$ добиваме $x=4$, $y=2^{4-1}\cdot 3-1=23$.

Значи сите решенија на равенката се: $(0,-2),(0,2),(4,23),(4,-23)$.

4. Определи ги сите парови $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $a\neq b$, такви што $a+b$ и $ab+1$ се степени на 2.

Решение. Ако $a=1$ или $b=1$, добиваме дека се решенија

$$(1,2^n-1) \text{ и } (2^n-1,1)\text{, за } n>1.$$

Нека $a,b\geq 2$ и $a<b$. Да забележиме дека $a+b<ab+1$, бидејќи

$$(ab+1)-(a+b)=(a-1)(b-1)>0.$$

Нека $a+b=2^n$, $n\geq 2$. Тогаш $n\geq 3$, бидејќи за $n=2$ имаме $a=b=2$ и ова не е решение. Сега, $a=2^{n-1}-c$, $b=2^{n-1}+c$, каде $1\leq c<2^{n-1}$. Имаме

$$2^n=a+b<ab+1=2^{2(n-1)}-c^2+1<2^{2(n-1)},$$

од каде следува $ab+1=2^k$, каде $n+a\leq k\leq 2(n-1)$. Значи,

$$2^k=2^{2(n-1)}-c^2+1,$$

односно

$$(c-1)(c+1)=2^{2(n-1)}-2^k.$$

Сега, бидејќи $k\leq 2(n-1)$, добиваме $2^k\mid(c-1)(c+1)$.

Од друга страна, $n+1\leq k$, па $2^{n+1}\mid(c-1)(c+1)$. Јасно $c-1$ и $c+1$ се два последователни парни броеви. Бидејќи еден од нив е делив со 2, но не е делив со 4, едниот од нив е делив со 2^n. Сега од неравенствата $1\leq c<2^{n-1}$, имаме $c-1=0$, т.е. $c=1$. Следува $a=2^{n-1}-1$, $b=2^{n-1}+1$, за $n\geq 3$ и тоа се решенија на задачата.
Конечно, решенијата се

$$(1,2^n-1),(2^n-1,1),(2^n-1,2^n+1),(2^n+1,2^n-1) \text{ за } n>1.$$

5. За кои цели броеви a и b системот

$$\begin{cases}\frac{m^n-1}{m^n+1}=a\\ m^2+n^2=b\end{cases}$$

Има, во множеството $\mathbb{Z}$, решенија по m и n, ?

Решение. Од првата равенка добиваме $m^n=\frac{1+a}{1-a}=1+\frac{2a}{1-a}$, што значи $\frac{2a}{1-a}$ треба да биде цел број. Бидејќи $(a,a-1)=1$, за $a\neq 0$, бројот $\frac{2a}{1-a}=-2-\frac{2}{1-a}$ е цел ако и само ако $a=-1,0,2,3.$.

За $a=-1$ имаме $m^n=0$, од што добиваме $m=0$ и n е произволен број различен од 0.

За $a=0$ имаме $m^n=1$, од што добиваме $n=0$ и m е произволен цел број различен од 0 или $m=1$ и n е произволен цел број или $m=-1$ и n е произволен парен цел број.

За $a=2$ добиваме $m^n=-3$, односно $m=-3,n=1$.

За $a=3$ добиваме $m^n=-2$, односно $m=-2,n=1$.

Значи, системот има решение во множеството на цели броеви ако

1) $a=-1$, $b=n^2$ и $n\neq 0$,

2) $a=0$, $b=m^2$, $m\neq 0$ или $b=1+n^2$,

3) $a=2, b=10$, и
4) $a=3, b=5$.

6. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x-5^y=z^2.$$
Решение. Прво да забележиме дека $2 \mid z$, па затоа
$$4 \mid z^2=3^x-5^y \equiv (-1)^x-1 \pmod 4,$$
од каде следува дека x е парен број, т.е. $x=2k$. Сега равенката го добива видот
$$(3^k-z)(3^k+z)=5^y,$$
па затоа $3^k-z=5^n$ и $3^k+z=5^{y-n}$, за некој цел број $n \geq 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n+5^{y-n}=2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n=0$, односно
$$1+5^y=2 \cdot 3^k.$$
Нека претпоставиме дека $k \geq 2$. Тогаш $9 \mid 5^y+1$, т.е. $5^y \equiv -1 \pmod 9$. Бидејќи степенот на 5 по модул 9 е еднаков на 6 (Провери!) и $5^3 \equiv -1 \pmod 9$, од последната конгруенција следува дека $y \equiv 3 \pmod 6$. Но, тогаш
$$2 \cdot 3^k=5^y+1 \equiv 5^3+1 \equiv 0 \pmod 7,$$
што не е можно.
Според тоа, $k \leq 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z)=(2,1,2)$.

7. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}=2^y+1.$$
Решение. Јасно, за $x \leq 1$ решенија на дадената равенка се $(0,2015)$ и $(1,2016)$.
Нека $x>1$. Од $3 \mid 2^{2015}+1$ следува $(2^{2015}+1)^x+2^{2015} \equiv 2^{2015} \equiv 5 \pmod 9$, па затоа $2^y \equiv 4 \pmod 9$, од каде добиваме дека $y=6k+2$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Сега, по модул 13 имаме $2^{2015} \equiv 7 \pmod{13}$ и $2^y=(2^6)^k \cdot 2^2 \equiv \pm 4 \pmod{13}$, па така добиваме $8^x+6 \equiv \pm 4 \pmod{13}$. Меѓутоа, 8^x дава еден од остатоците $1,5,8,12$ по модул 13, па затоа последната конгруенција не е можна.

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5+4^y=2013^z.$$

Решение. *Прв начин*. Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5+4^y\equiv 0(\mathrm{mod}11)$, при што важи $x^5\equiv\pm1(\mathrm{mod}11)$, па мора да важи $4^y\equiv\pm1(\mathrm{mod}11)$. Конгруенцијата $4^y\equiv-1(\mathrm{mod}11)$ не важи за ниту еден y, а додека конгруенцијата $4^y\equiv1(\mathrm{mod}11)$ важи ако и само ако $5\,|\,y$.

Воведуваме смена $t=4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката

$$x^5+t^5=A\cdot B=2013^z,$$

каде $(x,t)=1$, $A=x+t$ и $B=x^4-x^3t+x^2t^2-xt^3+t^4$. Понатаму, од

$$B=A(x^3-2x^2t+3xt^2-4t^3)+5t^4$$

следува дека $(A,B)=(A,5t^4)\,|\,5$, но $5\nmid 2013^z$, па мора да важи $(A,B)=1$. Според тоа, $A=a^z$ и $B=b^z$, за некои природни броеви a и b такви што $ab=2013$.

Меѓутоа, од неравенството $\frac{1}{16}A^4\le B\le A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме

$$\tfrac{1}{16}a^4\le b\le a^4\text{, т.е. }\tfrac{1}{16}a^5\le ab=2013\le a^5.$$

Оттука следува $5\le a\le 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители меѓу броевите 5, 6, 7 и 8.

Втор начин. Имаме $4^y\equiv 4,5,9,3,1(\mathrm{mod}11)$, $x^5\equiv 0,1,10(\mathrm{mod}11)$, па затоа $2013^z\equiv 0(\mathrm{mod}11)$, па затоа мора да е $4^y\equiv 0(\mathrm{mod}11)$, од каде добиваме $5\,|\,y$. Нека $y=5t,\ t\in\mathbb{N}$ и равенката да ја запишеме во видот

$$(x+4^t)(x^4-4^tx^3+4^{2t}x^2-4^{3t}x+4^{4t})=(3\cdot11\cdot61)^z.$$

Како и при првиот начин на решавање заклучуваме дека множителите на левата страна на последната равенка се заемно прости и бидејќи 3 не е делител на вториот множител (Докажи!), заклучуваме дека $3^z\,|\,x+4^t$. Ќе разгледаме два случаја. Ако $(x+4^t,11\cdot61)=1$, тогаш

$$3^z=x+4^t\text{ и }2013^z=x^5+4^{5t}<(x+4^t)^5=243^z,$$

што е противречност. Ако пак $(x+4^t,11\cdot61)>1$, тогаш

$$x+4^t\ge 33^z\text{ и }2013^z=x^5+4^{5t}\ge\tfrac{(x+4^t)^5}{15}\ge\tfrac{33^{5z}}{16}>2\cdot(33^4)^z>2013^z,$$

што е противречност.

9. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3^m + 7^n = k^2.$$

Решение. Од $7^n = k^2 - 3^m$ следува дека k^2 и 3^m мора да даваат ист остаток при делење со 7, а тоа е можно само ако m е парен број. Навистина, $k^2 \equiv 1,2,4 \pmod 7$, а $3^m \equiv 1,2,4 \pmod 7$ само ако m е парен број. Значи, $m = 2l$ за некој природен број l, па затоа

$$7^n = (k - 3^l)(k + 3^l).$$

Од последната равенка следува дека

$$k - 3^l = 7^a,$$
$$k + 3^l = 7^b,$$

каде a и b се ненегативни цели броеви и $a < b$. Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме

$$2 \cdot 3^l = 7^a (7^{b-a} - 1),$$

па како 7^a треба да е делител на $2 \cdot 3^l$, добиваме дека $a = 0$ и

$$1 + 2 \cdot 3^l = 7^b.$$

За $l = 1$ добиваме $m = 2, b = 1$ и $k = 4$, па затоа $n = 1$.

Ако $l \geq 2$, тогаш $1 + 2 \cdot 3^l = 7^b$ дава остаток 1 при делење со 9. Од теоремата на Ојлер следува

$$7^6 = 7^{\varphi(9)} \equiv 1 \pmod 9.$$

За редот d на бројот 7 по модул 9 важи $d \mid \varphi(9) = 6$. Имаме $7^2 \equiv 4 \pmod 9$ и $7^3 \equiv 1 \pmod 9$, па затоа $d = 3$. Значи, $7^{3s} \equiv 1 \pmod 9$ за секој $s \in \mathbb{N}$, па затоа $7^{3s} - 1 = 2 \cdot 3^l$, за некој $s \in \mathbb{N}$. Очигледно, левата страна на претходното равенство е делива со $7^3 - 1 = 342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, т.е. со 19, а десната не е делива со 19, што е противречност. Од добиената противречност следува дека не постои решение за кое $l \geq 2$.

Конечно, единствено решение на равенката е $(m, n, k) = (2, 1, 4)$.

10. Определи ги сите природни броеви n такви што за некои заемно прости броеви x и y и природен број k, $k > 1$ важи

$$3^n = x^k + y^k.$$

Решение. Нека $3^n = x^k + y^k$, $(x, y) = 1$, $x > y$, $k > 1$ и n е природен број. Јасно, $3 \nmid x$ и $3 \nmid y$. Затоа, ако k е парен број, тогаш остатоците при делење на x^k и y^k со 3 се еднакви на 1, од каде следува дека нивниот збир при делење со 3 дава остаток 2, што значи дека не е степен на бројот 3.

Значи, k е непарен и $k>1$. Од

$$3^n=(x+y)(x^{k-1}-x^{k-2}y+...-xy^{k-2}+y^{k-1})$$

следува $x+y=3^m, m\geq 1$. Ќе докажеме дека $n\geq 2m$.

Претходно ќе докажеме, дека $k=3^t$, за некој $t\in\mathbb{N}$.
Да означиме

$$x^{k-1}-x^{k-2}y+...-xy^{k-2}+y^{k-1}=A.$$

Јасно, $A>1$. Од $y=3^m-x$ следува

$$\begin{aligned}A&=x^{k-1}-x^{k-2}(3^m-x)+x^{k-3}(3^m-x)^2-...-x(3^m-x)^{k-2}+(3^m-x)^{k-1}\\&=kx^{k-1}+3B.\end{aligned}$$

Бидејќи $3\,|\,A$ и $(3,x)=1$ од последното равенство следува $3\,|\,k$. Нека $k=3q$. Тогаш $x^{3q}+y^{3q}=3^n$, т.е. $(x^3)^q+(y^3)^q=3^n$. Ако $q>1$, тогаш повторувајќи ја постапката добиваме дека $3\,|\,q$. Ако $q=1$, тогаш $k=3$. Значи, $k=3^t$, за некој $t\in\mathbb{N}$.

Да се вратиме на задачата. Бидејќи $3\,|\,k$, ако земеме $x_1=x^{\frac{k}{3}}, y_1=y^{\frac{k}{3}}$, можеме да сметаме дека $k=3$. Значи,

$$x^3+y^3=3^n,\ x+y=3^m.$$

За да го докажеме неравенството $n\geq 2m$, доволно е да докажеме дека $x^3+y^3\geq(x+y)^2$, т.е. $x^2-xy+y^2\geq x+y$. Од $x\geq y+1$ следува

$$x^2-x=x(x-1)\geq xy,$$

па затоа

$$(x^2-x-xy)+y^2-y\geq y^2-y\geq 0.$$

Од равенството

$$(x+y)^3-(x^3+y^3)=xy(x+y)$$

следува

$$3^{2m-1}-3^{n-m-1}=xy. \qquad (1)$$

Но, $2m-1\geq 1$ и

$$n-m-1\geq n-2m\geq 0. \qquad (2)$$

Затоа, ако во (2) важи строго неравенство, тогаш левата страна во (1) е делива со 3, а десната страна не е делива со 3. Значи, $n-m-1=n-2m=0$, т.е. $m=1$. Конечно, единствен број кој ги задоволува условите на задачата е $n=2$. Притоа, $3^2=2^3+1^3$.

11. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$A=n(n+2)(n+3)(n+5)$$

има точно три различни прости делители. (Некои од простите делители може да го делат A и со степен повисок од 1.)

Решение. Очигледно еден од простите делители е 2. Ако ниту еден од броевите $n, n+2,$ $n+3$ и $n+5$ не е делив со 3, тогаш двата непарни броеви се степени на различни непарни прости броеви, а тогаш двата парни се степени на 2, со евентуален исклучок на случајот кога $5|n$. Добиваме $n=2$ и соодветно $A=2\cdot4\cdot5\cdot7$, кој ги има саканите својства или $n=5\cdot2^x$, $n+2=2^y>2$ и $n+5=5^z$, што значи дека $x=1$ и тогаш $n+2=12$ е делив со 3 (противречност) или $n=5^x, n+3=2^y>2$ и $n+5=2\cdot5^z$, при што мора да е $x=z=1$, па добиваме $n=5$ и $A=5\cdot7\cdot8\cdot10$.

Во натамошните разгледувања ги искористиме следниве две познати леми.

Лема 1. Во множеството цели ненегативни броеви сите решенија на равенката $2^x-3^y=1$ се $(x,y)=(1,0)$ и $(2,1)$.

Доказ. За $y=0$ добиваме $x=1$. Ако $y>0$, тогаш по модул 3 заклучуваме дека x е парен број, т.е. $x=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Сега, од $(2^k-1)(2^k+1)=3^y$ добиваме $2^k-1=1$, т.е. $k=1$, па затоа $x=2, y=1$. ■

Лема 2. Во множеството цели ненегативни броеви сите решенија на равенката $3^x-2^y=1$ се $(x,y)=(1,1)$ и $(2,1)$.

Доказ. За $y=0$ равенката нема решение, за $y=1$ добиваме $x=1$ и за $y=2$ равенката нема решение. Ако $y>2$, тогаш по модул 4 добиваме дека x е парен број, т.е. $x=2k,$ $k\in\mathbb{N}$. Сега, од $(3^k-1)(3^k+1)=2^y$ добиваме $3^k-1=2$, т.е. $k=1$ и тогаш $x=2, y=3$. ■

Нека два од броевите $n, n+2,$ $n+3$ и $n+5$ се деливи со 3. Притоа, точно еден од овие два броја е парен, а другиот е степен на бројот 3 (зошто?). Имаме два случаја:

1) Ако двата броја деливи со 3 се n и $n+3$, тогаш $n=3\cdot2^u$ и $n+3=3^v$ или $n=3^u$ и $n+3=3\cdot2^v$. Добиваме $3=3^v-3\cdot2^u$, т.е. $1=3^{v-1}-2^u$ или $3=3\cdot2^v-3^u$, т.е. $1=2^v-3^{u-1}$. Сега, соодветно на лема 1 и лема 2 добиваме $n=6$ ($A=6\cdot8\cdot9\cdot11$ го има саканото својство), $n=24$ ($A=24\cdot26\cdot27\cdot29$ не дава решение), $n=3$ ($A=3\cdot5\cdot6\cdot8$ го има саканото својство) и $n=9$ ($A=9\cdot11\cdot12\cdot14$ не дава решение).
2) Ако двата броја деливи со 3 се $n+2$ и $n+5$, тогаш со аналогни расудувања добиваме уште едно решение $n=4$ ($A=4\cdot6\cdot7\cdot9$ го има саканото својство).

12. Докажи дека не постојат природни броеви x, y такви што $x \neq y$ и $x^{y^x} = y^{x^y}$.

Решение. Нека $x^{y^x} = y^{x^y} = a > 1$. Означуваме $y^x = k$ и $x^y = m$. Со средување на равенката добиваме $a^{\frac{x}{m}-\frac{y}{k}} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$. Според тоа, постои $n \in \mathbb{N}$ таков, што $k = mn$ или $m = kn$. За $k = mn$ со замена добивме $x^{x^{nx}} = x^{nx^{x^n}}$, од што следува $x = 1$ или $k = 1$. Но, тоа значи $x = y$. Слично, за $m = kn$ добивме $x = y$.

13. Определи ги сите парови на природните броеви (m,n), $m,n > 1$, за кои бројот $2^m + 3^n$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $2^m + 3^n = t^2$, за некој природен број *t*. Очигледно $2 \nmid t$ и $3 \nmid t$. Според тоа, $t = 2k+1$. Но, тогаш $t^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Бидејќи $m > 1$, од равенката $2^m + 3^n = t^2$ следува $3^n \equiv t^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Но, тоа значи дека *n* е парен број, бидејќи при $n = 2k+1$ имаме $3^n = 9^k \cdot 3 = (8+1)^k \cdot 3 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тогаш

$$2^m = t^2 - 3^n = (t - 3^{\frac{n}{2}})(t + 3^{\frac{n}{2}}).$$

Значи, броевите $t - 3^{\frac{n}{2}}$ и $t + 3^{\frac{n}{2}}$ се степени на 2. Затоа нивната разлика

$$t + 3^{\frac{n}{2}} - (t - 3^{\frac{n}{2}}) = 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}$$

се дели само со 2, па имаме $t - 3^{\frac{n}{2}} = 2$ и $t + 3^{\frac{n}{2}} = 2^{m-1}$. Од овие равенства добиваме $3^{\frac{n}{2}} = 2^{m-2} - 1$. Од друга страна, квадратот на секој природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Бидејќи *t* и t^2 не се делат со 3 имаме $t^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Следствено, $2^m \equiv t^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Од овде, повторно следува дека m е парен број. Имено, ако $m = 2l+1$, тогаш

$$2^m = 2^{2l+1} = 4^l \cdot 2 = (3+1)^l \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Затоа

$$3^{\frac{n}{2}} = 2^{m-2} - 1 = (2^{\frac{m}{2}-1} - 1)(2^{\frac{m}{2}-1} + 1).$$

Бидејќи броевите $2^{\frac{m}{2}-1} - 1$ и $2^{\frac{m}{2}-1} + 1$ треба да се степени на 3 и бидејќи разликата не се дели со 3, добиваме $2^{\frac{m}{2}-1} - 1 = 1$ и $2^{\frac{m}{2}-1} + 1 = 3^{\frac{n}{2}}$. Но, тоа значи $m = 4$ и $n = 2$.

14. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$n^x + n^y = n^z.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \le y < z$. Јасно, $n \ge 2$. Имаме, $n^x = n^z - n^y = n^x(n^{z-x} - n^{y-z})$ и оттука добиваме $n^{z-x} - n^{y-z} = 1$. Ако $y > x$, добиваме $n | 1$, што не е можно. Според тоа, $y = x$ и затоа $n^{z-x} = 2$, од каде следува $n = 2$ и $z - x = 1$. Конечно, решенија на равенката се $n = 2, y = x, z = x + 1$.

15. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$n^x + n^y + n^z = n^t. \qquad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \le y \le z < t$. Јасно, $n \ge 2$. Ако $n = 2$, тогаш од (1) следува

$$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{t-x},$$

па затоа не е можно $y > x$. Според тоа, $y = x$ и затоа $2 + 2^{z-x} = 2^{t-x}$, од што следува $z - x = 1$ и $t - x = 2$. Според тоа, во овој случај решенија на (1) се $n = 2, y = x, z = x + 1, t = x + 2$.

Ако $n \ge 3$, тогаш од (1) имаме $1 + n^{y-x} + n^{z-x} = n^{t-x}$, од што следува дека мора да е $y = x$, па затоа $2 + n^{z-x} = n^{t-x}$. Но, $n > 2$, па од последната равенка следува $z = x$, т.е. $3 = n^{t-x}$, па затоа $n = 3$ и $t = x + 1$. Значи, ако $n > 2$, тогаш решенија на (1) се $n = 3, x = y = z, t = x + 1$.

Конечно, сите решенија на равенката (1) се;

$$n = 2, y = x, z = x + 1, t = x + 2 \text{ и } n = 3, x = y = z, t = x + 1.$$

16. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$4^x + 4^y + 4^z = 4^t. \qquad (1)$$

Решение. Од решението на претходната задача следува дека равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$. Навистина, ако такво решение постои, тогаш

$$2^{2x} + 2^{2y} + 2^{2z} = 2^{2t}$$

и во случај кога $x \le y \le z < t$ добиваме $2z - 2x = 1$, што не е можно.

17. Определи ги сите природни броеви x, y и z такви што бројот $4^x + 4^y + 4^z$ е точен квадрат.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \le y \le z$. Нека $4^x + 4^y + 4^z = n^2$. Тогаш $(2^x)^2(1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}) = n^2$, па затоа бројот $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$ мора да биде точен квадрат. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Бројот $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$ е непарен, т.е.

$$1+4^{y-x}+4^{z-x}=(2k+1)^2.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$4^{y-x-1}+4^{z-x-1}=k(k+1),$$

односно на равенството

$$4^{y-x-1}(1+4^{z-y})=k(k+1).$$

Постојат две можности.

1) Бројот k е парен. Тогаш $k+1$ е непарен број, па затоа $k=4^{y-x-1}$ и $k+1=1+4^{z-y}$. Од последните две равенства следува $4^{y-x-1}=4^{z-y}$. Според тоа, $y-x-1=z-y$, т.е. $z=2y-x-1$. Притоа важи

$$4^x+4^y+4^z=4^x+4^y+4^{2y-x-1}=(2^x+2^{2y-x-1})^2,$$

што значи дека решение на задачата се сите броеви $x\le y\le z$ за кои важи $z=2y-x-1$.

2) Бројот k е непарен. Тогаш $k+1$ е парен, па затоа $k=1+4^{z-y}$ и $k+1=4^{y-x-1}$, од каде добиваме $4^{y-x-1}-4^{z-y}=2$. Последното равенство е еквивалентно со равенството $2^{2y-2x-3}=2^{2z-2y-1}+1$, кое не е можно, бидејќи $2z-2y-1\neq 0$.

Случај 2. Бројот $1+4^{y-x}+4^{z-x}$ е парен. Тоа значи дека или $y=x$ или $z=x$. Ако $y=x$, тогаш бројот $2+4^{z-x}$ треба да е точен квадрат, што не е можно бидејќи овој број при делење со 4 дава остаток 2, а точен квадрат при делење со 4 дава остаток 0 или 1. Аналогно се разгледува случајот кога $z=x$.

18. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^{b^2}=b^a.$$

Решение. *Прв начин*. Равенката

$$x^{y^2}=y^x \qquad (1)$$

ја запишуваме во облик

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{y^2}=y^{x-2y^2}. \qquad (2)$$

Очигледно, потребно е $x^2\neq 2y^2$.

Ако $x^2>2y^2$, тогаш $\frac{x}{y^2}=k\in\mathbb{N}, x=ky^2$, па од (2) добиваме:

$$k^{y^2}=y^{ky^2-2y^2}, \text{ т.е. } k=y^{k-2}.$$

За $k=1$ решение е $(1,1)$. За $k=2$ нема решение. За $k=3$ решение е $(27,3)$. За $k=4$ решение е $(16,2)$. За $k\ge 5$ имаме:

$$y^{k-2} \geq 2^{k-2} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{k-3}{k-1} \cdot \ldots \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{1} = 4(k-3) > k\,.$$

Ако $x^2 < 2y^2$ од (2) добиваме:

$$(\tfrac{y^2}{x})^{y^2} = y^{2y^2-x} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{y^2}{x} = m \in \mathbb{N}, \quad y^2 = mx\,.$$

Оттука и од (1) добиваме:

$$x^{2y^2} = y^{2x} \;\Rightarrow\; x^{2m} = (mx)^x, \;\; x^{2m} = mx\,, \;\; \text{т.е.} \;\; x^{2m-1} = m\,.$$

За $m = 1$, решение е (1,1), кое веќе го најдовме.

За $m \geq 2$ имаме:

$$x^{2m-1} \geq 2^{2m-1} = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \geq \tfrac{2m-1}{2m-1} \cdot \tfrac{2m-2}{2m-3} \cdot \ldots \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{1} = 2m-1 > m$$

па во овој случај равенката нема решение.

Втор начин. Нека m и n се заемно прости броеви такви што $\frac{a}{b^2} = \frac{m}{n}$. Од $a^{b^2} = b^a$ следува $a^n = b^m$. Бројот $z = a^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{n}}$ е цел, бидејќи ако $k, l \in \mathbb{N}$ се такви што $km - ln = 1$, тогаш $z = \frac{z^{km}}{z^{nl}} = \frac{a^k}{b^l}$. Почетната равенка го добива обликот $z^{mz^{2n}} = a^{b^2} = b^a = z^{nz^m}$, па затоа $mz^{2n} = nz^m$, т.е.

$$z^{m-2n} = \frac{m}{n}\,.$$

Можни се два случаја.

1) $m < 2n$. Тогаш $\frac{m}{n} = \frac{1}{z^{2n-m}}$, па затоа $m = 1$ и $n = z^{2n-m} = z^{2m-1}$. Бидејќи $z^{2n-1} > 2n-1 \geq n$ за $z > 1$, мора да важи $z = 1$, па затоа $n = 1$. Значи, едно решение е паротот $(a,b) = (1,1)$.

2) $m \geq 2n$. Тогаш $n = 1$ и $m = z^{m-2n} = z^{m-2}$. За $z > 4$ имаме $z^{m-2} > m$. За $z = 3$ единствено решение е $m = 3$, од каде што го добиваме решението $(a,b) = (27,3)$. За $z = 2$ единствео решение е $m = 4$, од каде што го добиваме решението $(a,b) = (16,2)$.

Според тоа, единствени решенија се $(1,1), (16,2)$ и $(27,3)$.

19. Докажи дека не постојат природни броеви n и $p > 5$, такви што важи

$$(p-1)! + 1 = p^n\,. \tag{1}$$

Решение. Да претпоставиме дека за природните броеви $p > 5$ и n важи (1). Тогаш, бидејќи p и $(p-1)!$ се заемно прости броеви, добиваме дека p е прост број. Но,

$$(p-2)! = \frac{(p-1)!}{p-1} = \frac{p^n - 1}{p-1} = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-2} + p^{n-1}\,.$$

За $p>5$ важи $2<\frac{p-1}{2}\leq p-2$ и како $\frac{p-1}{2}$ е природен број, следува дека броевите 2 и $\frac{p-1}{2}$ се делители на бројот $(p-2)!$. Значи, бројот $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ е делител на бројот $(p-2)!$. Бидејќи

$$\begin{aligned}(p-2)! &= p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p^2+p+1\\ &=(p-1+1)^{n-1}+(p-1+1)^{n-2}+\ldots+(p-1+1)+1\ ,\\ &\equiv n(\operatorname{mod} p-1)\end{aligned}$$

добиваме дека и бројот n се дели со $p-1$. Затоа, важи $p-1\leq n$, т.е. $p-2\leq n-1$. Но, тоа значи дека

$$(p-1)!+1<p^{p-2}+1\leq p^{n-1}+1<p^n,$$

што противречи на претпоставката.

Забелешка. За $p=2$ и $n=1$; за $p=5$ и $n=2$; за $p=3$ и $n=3$ важи равенсвото (1).

20. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+2x+1=2^n.$$

Решение. Со непосредна проверка се добива дека за $n\leq 2$ единствено решение е парот $(1,2)$. Ќе докажеме дека равенката нема решенија за $n\geq 3$.

Бројот x мора да биде непарен, па затоа

$$x^2+2\equiv 3(\operatorname{mod} 8)\ .$$

Сега од

$$x(x^2+2)\equiv -1(\operatorname{mod} 8)$$

следува дека $x\equiv 5(\operatorname{mod} 8)$. Уште повеќе, бидејќи $3\,|\,x(x^2+2)$ мора да важи $2^n\equiv 1(\operatorname{mod} 3)$, што значи дека n е парен број. Ако на двете страни на равенката го додадеме бројот 2 добиваме

$$(x+1)(x^2-x+3)=2^n+2\ .$$

Бидејќи n е парен број и 2^n е точен квадрат, па затоа бројот -2 е квадратен остаток по секој непарен прост делител p на бројот $(x+1)(x^2-x+3)$. Затоа

$$1=(\tfrac{-2}{p})=(\tfrac{-1}{p})(\tfrac{2}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{(p-1)(p-5)}{8}},$$

од каде следува дека p е од облик $8k+1$ или $8k+3$. Како производ на такви прости броеви и бројот x^2-x+3 мора да биде од истиот облик. Меѓутоа, бидејќи $x\equiv 5(\operatorname{mod} 8)$, важи $x^2-x+3\equiv 7(\operatorname{mod} 8)$, што е противречност.

Конечно, единствено решение на равенката е $(x,n)=(1,2)$.

21. Во множеството $\mathbb{N}$ реши го системот равенки

$$x_1^{x_2} = x_2^{x_3} = x_3^{x_4} = \dots = x_{n-1}^{x_n} = x_n^{x_1},\ n \ge 2.$$

Решение. Прво ќе го докажеме следнава лема:

Лема. Ако $x^y = z^t$, каде $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ и ако $x = \min\{x, y, z, t\}$, тогаш $x \mid z$.

Доказ. Навистина, секој прост делител p на x е делител и на c. Ако во каноничните претставувања на a и c степените на p се a и c, соодветно, тогаш $ay = ct$. Но, $x \le z$, па затоа $y \ge t$, од што следува $a \le c$, па затоа $p^a \mid p^c$, т.е. $x \mid z$. ■

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 = \min\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Од лемата следува дека $x_1 \mid x_k$, за $k = 2, 3, \dots, n$. Според тоа, $x_{n-1} = a_{n-1} x_1$ и $x_n = a_n x_1$. Значи, $(a_{n-1}x_1)^{a_n x_1} = (a_n x_1)^{x_1}$, т.е.

$$a_{n-1}^{a_n} x_1^{a_n - 1} = a_n. \tag{1}$$

Ако $a_n = 1$, тогаш лесно се добива дека $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ и ова е тривијално решение.

Нека $a_n > 1$. Од неравенството на Бернули следува

$$x_1^{a_n - 1} > 1 + (a_n - 1)(x_1 - 1) \ge a_n. \tag{2}$$

Јасно, во претходното неравенство можеме да претпоставиме дека $x_1 > 1$, бидејќи случајот $x_1 = 1$ доведува до тривијалното решение $x_1 = \dots = x_n = 1$. Ако $a_n - 1 > 1$, тогаш од (2) следува $a_{n-1}^{a_n} x_1^{a_n - 1} > a_{n-1}^{a_n} a_n > a_n$, што противречи на (1). Останува да го разгледаме случајот $a_n = 2$. Тогаш од (1) имаме $2 = a_{n-1}^2 x_1$, т.е. $x_1 = 2, a_{n-1} = 1$. Оттука следува, дека

$$x_n = 4,\ 2^{x_2} = x_2^{x_3} = x_3^{x_4} = \dots = x_{n-1}^4 = 4^2,$$

од каде ги добиваме решенијата

$$x_2 = 4, x_3 = 2, \dots, x_{2k} = 4, x_{2k+1} = 2.$$

Конечно, решенија на системот се:

- за секој $n \ge 1$ важи $x_1 = x_2 = \dots = x_n$,
- ако $n = 2k$, тогаш $x_1 = x_3 = \dots = x_{2k-1} = 2$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{2k} = 4$ или $x_1 = x_3 = \dots = x_{2k-1} = 4$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{2k} = 2$.

22. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$x^2+y^2\geq 2xy,$$

па според тоа

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^m\geq(2xy)^m=2^m(xy)^m>(xy)^m.$$

Значи, за секое решение на равенката е исполнето

$$n>m. \qquad (*)$$

Нека $d=(x,y)$ и нека p е прост делител на d. Постојат природни броеви a и b такви што

$$x=p^a x_1,\; y=p^b y_1, \qquad (1)$$

при што $(p,x_1)=1$ и $(p,y_1)=1$. Ако равенствата (1) ги замениме во равенката, добиваме

$$(p^a p^b x_1 y_1)^n=(p^{2a}x_1^2+p^{2b}y_1^2)^m,$$

$$p^{(a+b)n}(x_1y_1)^n=(p^{2a}x_1^2+p^{2b}y_1^2)^m. \qquad (2)$$

Значи,

$$p^{(a+b)n}\,|\,(xy)^n \text{ и } (p,x_1y_1)=1.$$

Од причини на симетрија можеме да претпоставиме дека $a<b$. Тогаш (2) можеме да ја претставиме во облик

$$p^{(a+b)n}(x_1y_1)^n=p^{2am}(x_1^2+p^{2(b-a)}y_1^2)^m.$$

Бидејќи $(p,x_1)=1$, добиваме дека $(p,x_1^2+p^{2(b-a)}y_1^2)=1$. Од последното равенство имаме $(a+b)n=2ma$. Но од друга страна

$$2ma=(a+b)n>2an,$$

односно $m>n$, што противречи на (*). Од добиената противречност следува $a=b$. Сега равенката го добива обликот,

$$p^{2ak}(x_1y_1)^n=(x_1^2+y_1^2)^m,$$

каде $k=n-m$.

Повторувајќи ја претходната постапка со секој прост делител p на

$$d=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_s^{a_s},$$

добиваме

$$p_1^{2a_1k}p_2^{2a_2k}...p_s^{2a_sk}(x_sy_s)^n=(x_s^2+y_s^2)^m,$$

каде $(x_s,y_s)=1$. Според тоа $(x_sy_s)^n\,|\,(x_s^2+y_s^2)^m$, односно $x_s\,|\,(x_s^2+y_s^2)$. Значи, $x_s\,|\,y_s$ и аналогно се добива дека $y_s\,|\,x_s$, па затоа $x_s=y_s$, односно $x=y$. Сега почетната равенка го добива обликот

$$x^{2n}=2^m x^{2m},\; x^{2k}=2^m$$

од каде имаме $x=2^t$ и

$$2^{2nt}=2^{2mt+m}.$$

Конечно, $2nt=m(2t+1)$, од каде добиваме $m=2kt,n=k(2t+1)$, односно решенијата на равенката се $x=y=2^t,m=2kt,n=(2t+1)k$.

23. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката:

$$m^2+2\cdot 3^n=m(2^{n+1}-1).$$

Решение. За фиксирани вредности на n дадената равенка добива облик на квадратна равенка по m.

1) За $n=0$ се добива квадратната равенка $m^2-m+2=0$ која нема целобројни решенија.
2) За $n=1$ се добива квадратната равенка $m^2-3m+6=0$ која нема целобројни решенија.
3) За $n=2$ се добива квадратната равенка $m^2-7m+18=0$ која нема целобројни решенија.
4) За $n=3$ се добива квадратна равенка $m^2-15m+54=0$ која има решенија $m=6$ и $m=9$. Оттука $(6,3)$ и $(9,3)$ се решенија на дадената равенка.
5) За $n=4$ се добива квадратната равенка $m^2-31m+162=0$ која нема целобројни решенија.
6) За $n=5$ се добива квадратна равенка $m^2-63m+486=0$ која има решенија $m=9$ и $m=54$. Оттука $(9,5)$ и $(54,5)$ се решенија на дадената равенка.

Ќе докажеме дека за $n\geq 6$ равенката нема решение. Нека (m,n) е пар кој ја задоволува дадената равенка и притоа $n\geq 6$. Имаме, $2\cdot 3^n=m(2^{n+1}-1-m)$, т.е. $m\,|\,2\cdot 3^n$. Значи $m=3^a, 0\leq a\leq n$ или $m=2\cdot 3^b, 0\leq b\leq n$.

Во првиот случај нека $n-a=c$. Добиваме $3^a+2\cdot 3^c=2^{n+1}-1$ и $c=n-a$.

Во вториот случај нека $d=n-b$. Добиваме $2\cdot 3^b+3^d=2^{n+1}-1$ и $d=n-b$.

Според тоа, треба да се реши равенката

$$2^{n+1}-1=3^p+2\cdot 3^q, \tag{1}$$

каде p и q се ненегативни цели броеви за кои важи $p+q=n$.

Од (1) добиваме:

$$3^p<2^{n+1}=8^{\frac{n+1}{3}}<9^{\frac{n+1}{3}}=3^{\frac{2(n+1)}{3}}$$

и

$$2\cdot 3^q<2^{n+1}=2\cdot 2^n=2\cdot 8^{\frac{n}{3}}<2\cdot 9^{\frac{n}{3}}=2\cdot 3^{\frac{2n}{3}}<2\cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}}.$$

Според тоа имаме $p,q<\frac{2(n+1)}{3}$. Од $p,q<\frac{2(n+1)}{3}$ следува

$$q=n-p>n-\frac{2(n+1)}{3}=\frac{n-2}{3} \text{ и } p=n-q>n-\frac{2(n+1)}{2}=\frac{n-2}{2}.$$

Нека $r=\min\{p,q\}$. Јасно, $r>\frac{n-2}{3}\geq\frac{5-2}{3}=1$. Десната страна на (1) ја делиме со 3^h, и бидејќи $r>1$ следува дека $9\,|\,3^r\,|\,2^{n+1}-1$. Важи $2^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, па затоа $n+1=6k$.

Добиваме

$$\begin{aligned}2^{n+1}-1=2^{6k}-1=4^{3k}-1&=(4^k-1)(4^{2k}+4^k+1)\\&=(2^k-1)(2^k+1)(4^{2k}+4^k+1).\end{aligned}$$

Јасно, $4^{2k}+4^k+1\equiv 1+1+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, но $4^{2k}+4^k+1$ не е делив со 9 бидејќи $4^{2k}+4^k+1=(4^k-1)^2+3\cdot 4^k\equiv 3\cdot 4^k(\mathrm{mod}\,9)$ и 4^k не е делив со 3. Следува дека $3^{r-1}\,|\,(2^k-1)(2^k+1)$. Броевите 2^k-1 и 2^k+1 се непарни и заемно прости, па затоа важи $3^{r-1}\,|\,2^k-1$ или $3^{r-1}\,|\,2^k+1$. И во двата случаи важи $3^{r-1}\leq 2^k+1$. Тогаш $3^{r-1}\leq 2^k+1\leq 3^k=3^{\frac{n+1}{6}}$, од каде следува $r-1\leq\frac{n+1}{6}$. Сега важи, $\frac{n-2}{3}-1<r-1\leq\frac{n+1}{6}$, па затоа $\frac{n-2}{3}-1<\frac{n+1}{6}$, т.е. $n<11$.

Бидејќи $6\,|\,n+1$ и $6\leq n\leq 11$ следува дека не постои $n\geq 6$ за кој дадената равенка има решение во множеството ненегативни цели броеви.

24. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$11^a5^b-3^c2^d=1. \qquad (1)$$

Решение. Јасно е дека $d>0$. Разликуваме неколку случаи.

1) $c>0, d>1$. Имаме $11^a5^b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $11^a5^b\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, од каде соодветно следува $2\,|\,a+b$ и $2\,|\,a$, па затоа $2\,|\,b$. Ставаме $n=11^{\frac{a}{2}}5^{\frac{b}{2}}\in\mathbb{N}$ и добиваме $(n-1)(n+1)=3^c2^d$. Можни се два подслучаи.

- $n+1=2^{d-1}$, $n-1=2\cdot 3^c$, од каде добиваме $2^{d-2}-3^c=1$, па затоа $2\,|\,d-2$, односно $(2^{\frac{d-2}{2}}-1)(2^{\frac{d-2}{2}}+1)=3^c$. Значи $2^{\frac{d-2}{2}}\pm 1$ се степени на бројот 3, па затоа се еднакви на 1 и 3. Според тоа, $(c,d)=(1,4)$, а тогаш (a,b) нема решенија.
- $n+1=2\cdot 3^c$, $n-1=2^{d-1}$, од каде добиваме $3^c-2^{d-2}=1$. За $d\leq 3$ добиваме решение $(a,b,c,d)=(0,2,1,3)$. За $d>3$ имаме $3^c\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, па затоа $2\,|\,c$, од каде следува $(3^{\frac{c}{2}}-1)(3^{\frac{c}{2}}+1)=2^{d-2}$. Единствена мож-

ност е $(c,d)=(2,5)$, а тогаш (a,b) нема решенија.

2) $c=0$, т.е. $11^a5^b=2^d+1$. Имаме два подслучаја.

- $a>0$. Тогаш $11\,|\,2^d+1$, па затоа $d\equiv 5(\mathrm{mod}\,10)$, што значи $2\nmid d$, па затоа $3\,|\,2^d+1$, што не е можно.
- $a=0$. Тогаш $5^b=2^d+1$. Ако $d>2$, тогаш $8\,|\,5^b-1$, па затоа $2?b$, односно $(5^{\frac{b}{2}}-1)(5^{\frac{b}{2}}+1)=2^d$ и оваа равенка нема решение. Останува можноста $(b,d)=(1,2)$ и тогаш го добиваме решението $(a,b,c,d)=(0,1,0,2)$.

3) $d=1$ и $11^a5^b=2\cdot 3^c+1$. Тогаш $4\nmid 11^a5^b-1$, па затоа $2\nmid a$, т.е. $a>0$. Ќе користиме дека $11^2\,|\,3^5-1$. Од $11\,|\,2\cdot 3^c+1$ следува $c\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, па затоа $2\cdot 3^c+1\equiv 2\cdot 3^3+1=55(\mathrm{mod}\,11^2)$. Значи, $11^2\nmid 2\cdot 3^c+1$, па затоа $a=1$. Сега $11\cdot 5^b=2\cdot 3^c+1$. За $b=1$ го добиваме решението $(a,b,c,d)=(1,1,3,1)$. За $b>1$ важи $5^2\,|\,2\cdot 3^c+1$, па затоа $c\equiv 7(\mathrm{mod}\,20)$, од каде добиваме $c\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, што е противречност со $c\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$.

Конечно, единствени решенија се: $(a,b,c,d)\in\{(1,1,3,1),(0,1,0,2),(0,2,1,3)\}$.

25. Определи ги сите парови од природни броеви (m,n) за кои важи
$$3^m-7^n=2.$$
Решение. *Прв начин.* Ако $n=1$, тогаш $m=2$.

Ако $n\geq 2$, тогаш $3^m\geq 51$, па затоа $m\geq 4$. Нека $a=m-2\geq 2$ и $b=n-1\geq 1$. Имаме
$$\begin{aligned}&3^m-7^n=2,\\&3^m-9=7^n-7,\\&9(3^a-1)=7(7^b-1).\end{aligned}$$
Од последната равенка следува дека $7\,|\,3^a-1$, а како од малата теорема на Ферма следува $7\,|\,3^{6k}-1$ добиваме дека $6\,|\,a$. Од $3^6-1\,|\,3^a-1$ и $13\,|\,3^6-1$ следува $13\,|\,3^a-1$. Значи, $13\,|\,7^b-1$, а како од малата теорема на Ферма следува $13\,|\,7^{12k}-1$, добиваме дека $12\,|\,b$. Значи, $7^{12}-1\,|\,7^b-1$. Сега, $43\,|\,7^{12}-1$, па затоа $43\,|\,3^a-1$. На аналоген начин следува $42\,|\,a$, па оттука добиваме

дека $3^{42}-1\,|\,3^{a}-1$. Понатаму, од теоремата на Ојлер имаме $3^{42}=3^{\varphi(49)}\equiv 1$ $(\mathrm{mod}\,49)$, т.е. $49\,|\,3^{42}-1$, па затоа $49\,|\,7(7^{b}-1)$, што е противречност. Значи, парот $(2,1)$ е единствено решение на равенката.

Втор начин. Од $3^{m}\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, заклучуваме дека $m\equiv 2(\mathrm{mod}\,6)$ (степенот, односно редот на 3 по модул 7 е 6 и $3^{2}\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$). Во случајов, $m=2r$ е парен број, при што за $r=1$ го добиваме решението $m=2,n=1$.

Нека $r\geq 2$. Тогаш $7^{n}\equiv -2(\mathrm{mod}\,27)$ и бидејќи редот (степенот) на 7 по модул 27 е 9 и $7^{4}\equiv -2(\mathrm{mod}\,27)$, заклучуваме дека $n=9s+4$, каде s е цел ненегативен број. Бидејќи $7^{9}\equiv 1(\mathrm{mod}\,37)$, добиваме

$$2+7^{9s+4}\equiv 2+7^{4}\equiv 35(\mathrm{mod}\,37).$$

Но, редот на 9 по модул 37 е 9 и имаме

$$9^{l}\equiv 1,9,7,26,12,34,19,16,33(\mathrm{mod}\,37),$$

соодветно за $t=0,1,2,3,4,5,6,7,8$. Значи, конгруенцијата $9^{r}\equiv 35(\mathrm{mod}\,37)$ не е можна, па затоа дадената равенканема други решенија освен $m=2,n=1$.

26. Определи ги сите позитивни рационални броеви $r\neq 1$ такви што $r^{\frac{1}{r-1}}$ е рационален број.

Решение. Нека $r=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$. Тогаш $r^{\frac{1}{r-1}}=(\frac{p}{q})^{\frac{q}{p-q}}$. Нека $a,b\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$ се такви што

$$(\tfrac{p}{q})^{\frac{q}{p-q}}=\tfrac{a}{b},\text{ т.е. } (\tfrac{p}{q})^{q}=(\tfrac{a}{b})^{p-q}.$$

Бидејќи $(p,q)=(q,p-q)=1$ дропката $\frac{a}{b}$ е $q-$ти степен на дропка $\frac{c}{d}$, т.е $a=c^{q},b=d^{q}$, $(c,d)=1$ и добиваме $\frac{p}{q}=(\frac{c}{d})^{p-q}$.

Сега, ако $p-q>0$, тогаш $k=p-q$ е природен број и важи $p=c^{k},q=d^{k}$. Равенката $c^{k}-d^{k}=k$ каде k е природен број има решение само кога $k=1$. Значи, $p-q=1$, т.е. барaниот рационален број е од облик $\frac{q+1}{q}$.

На ист начин, ако $q-p>0$ добиваме решение од облик $\frac{q}{q+1}$.

Според тоа $r\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n}\}$.

27. Во множеството природни броеви реши ја равенката $2^a + 17 = b^4$.

Решение. Дадената равенка ја разгледуваме по модул 17. Од $(17,b)=1$, $2^a \equiv b^4 (\mathrm{mod}\,17)$ и малата теорема на Ферма следува $2^{4a} \equiv b^{16} \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17)$. Но, $2^8 \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17)$, па затоа од својствата на ред на цел број по даден модул следува $8 \mid 4a$, односно $2 \mid a$. Според тоа, $a = 2k$ и дадената равенка го добива видот

$$17 = (b^2 - 2^k)(b^2 + 2^k),$$

од каде добиваме $b^2 + 2^k = 17$ и $b^2 - 2^k = 1$. Во множеството природни броеви решенијата на последниот систем се $b=3$ и $k=3$, па затоа единствено решение на почетната равенка е $a=6$ и $b=3$.

28. За природниот број ќе велиме дека е *двоен* ако неговиот декаден запис се состои од два исти блока цифри. Докажи дека меѓу двојните броеви постојат бесконечно многу точни квадрати.

Решение. Нека $2k$ е бројот на цифрите на двоен број кој се состои од два блока a. Сега тврдењето на задачата е еквивалентно на тоа дека равенката

$$a(10^k + 1) = b^2 \tag{1}$$

има бесконечно многу решенија (a,b,k) такви што a има точно k цифри, т.е.

$$10^{k-1} \le a < 10^k .$$

Задачата ќе ја решиме така што прво за погодни вредности на k (кои ќе бидат бесконечно многу) ќе најдеме по едно решение (a_1, b_1, k) на равенката (1) такво што a_1 има најмногу k цифри, т.е. $a_1 < 10^k$. Потоа, бидејќи од (a_1, b_1, k) е решение на (1) следува дека и $(n^2 a_1, n b_1, k)$, $n \in \mathbb{N}$ е решение на (1), ќе одбереме $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $a = n_0^2 a_1$ важат ограничувањата $10^{k-1} \le a < 10^k$.

Јасно, ако равенката (1) ја разгледуваме без било какви ограничувања, тогаш $a = 10^k + 1$ е едно нејзино очигледно решение. За да определиме решение во кое $a < 10^k$, доволно е да определиме бесконечно многу вредности на k за кои бројот $10^k + 1$ е делив со точен квадрат $d^2 > 1$. Имено, тогаш

$$a_1 = \frac{10^k + 1}{d^2}, \quad b_1 = \frac{10^k + 1}{d}$$

ќе бидат решенија на равенката (1).

Прво да забележиме дека

$$10^3+1=(10+1)(10^2-10+1)=11\cdot 91,$$

т.е. важи $10^3=-1+11c$, за $c=91$. Ако последното равенство го степенуваме на степен 11 и ја искористиме Њутновата биномна формула, добиваме

$$10^{33}=(-1+11c)^{11}=-1+\binom{11}{1}11c-\binom{11}{2}11^2c^2+...=-1+11^2c',$$

за некој $c'\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$10^{33(2m-1)}\equiv -1(\bmod 11^2),$$

за секој $m\in\mathbb{N}$, т.е. $11^2\,|\,(10^{66m-33}+1)$. Тоа значи дека $k=66m-33$ и $d=11$ се погоден избор, т.е. за секоја вредност на m имаме по едно решение на (1). Најпосле, треба да го определиме $n_0\in\mathbb{N}$ така што ќе важи

$$10^{k-1}\le n_0^2\frac{10^k+1}{11^2}<10^k,$$

каде $k=66m-33$. Очигледно горните неравенства се еквивалентни со

$$\frac{10^{k-1}}{10^k+1}\le\left(\frac{n_0}{11}\right)^2<\frac{10^k}{10^k+1}.$$

Последните неравенства ќе бидат исполнети за секој $k\in\mathbb{N}$ ако

$$\frac{1}{10}\le\left(\frac{n_0}{11}\right)^2<\frac{10}{11},$$

што важи за секој $n_0\in\{4,5,6,7,8,9,10\}$.

Конечно, докажавме дека за секој $m\in\mathbb{N}$, акоземеме $n_0=4$, двојниот број кој се состои од два блока

$$a=\frac{16}{121}(10^{66m-33}+1)$$

е точен квадрат.

29. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+x^2=2^y+16.$$

Решение. Јасно е дека $y\ge 0$. Бидејќи $2^6+16\equiv 3,4,6(\bmod 7)$ соодветно кога $y\equiv 0,1,2(\bmod 3)$, а $x^3+x^2\equiv 0,1,2,3,5(\bmod 7)$, добиваме дека $y=3z$. Понатаму, од $x\,(x+1)>16$ следува $x\ge 3$. Бидејќи $(x+1)^3>x^3+x^2-16>x^3$ за $x\ge 5$ и $(2^z)^3=x^3+x^2-16$, заклучуваме дека $x=3$ или $x=4$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $x=4, y=6$.

27. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

1. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p^3-q^3=pq^3-1.$$

Решение. Да забележиме дека $q\le p$. Во спротивно левата страна на равенката ќе биде негативна, додека десната страна на равенката ќе биде позитивна, што е контрадикција. Имаме,

$$p^3-q^3=pq^3$$

$$p^3+1=pq^3+q^3$$

$$(p+1)(p^2-p+1)=q^3(p+1)$$

$$p(p-1)=q^3-1$$

$$p(p-1)=(q-1)(q^2+q+1)\ .$$

Бидејќи $p\,|\,p(p-1)$, имаме $p\,|\,(q-1)(q^2+q+1)$. Но, $p\nmid q-1$, бидејќи $q-1<p$, па $p\,|\,q^2+q+1$ или $q^2+q+1=kp$, за $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$p(p-1)=(q-1)kp$$

$$p-1=k(q-1)$$

$$p=k(q-1)+1.$$

Оттука,

$$q^2+q+1=kp$$

$$q^2+q+1=k^2(q-1)+k \qquad (2)$$

Ако $k>3$, имаме

$$q^2+q+1=k^2(q-1)+k,$$

па следува

$$(q-1)(q+2)+3=k^2(q-1)+k$$

$$(q-1)(q+2)-k^2(q-1)=k-3.$$

Следува,

$$q-1\,|\,k-3\text{, од каде } k\ge q-1+3=q+2\text{, па}$$

$$(q-1)(q+2)=k^2(q-1)+k-3\ge(q+2)^2(q-1)+q-1>(q-1)(q+2),$$

што е невозможно. Значи, немаме решенија кога $k>3$. Останува да ги провериме случаите кога $k=1,2,3$.

Нека $k=1$. Од (2) имаме $q^2+q+1=q$, односно $q^2+1=0$, што нема решенија во множеството прости броеви.

За $k=2$, од (2), имаме $q^2+q+1=4(q-1)+2$, од каде добиваме $q^2-3q+3=0$. Лесно се проверува дека оваа равенка нема решенија во множеството од прости броеви.

Нека $k=3$. Од (2), имаме $q^2+q+1=9(q-1)+3$, односно $q^2-8q+7=0$, од каде добиваме дека $q=1$ и $q=7$.

Бидејќи 1 не е прост број, па $q=7$ е решение, од каде $p=3(q-1)+1=19$. Значи, единствено решение е $p=19$ и $q=7$.

2. Определи ги сите прости броеви такви што p^3-4p+9 е точен квадрат.

Решение. Со директна проверка добиваме дека $p=2$ е решение. Навистина, $2^3-4\cdot 2+9=3^2$. Со проверка добиваме дека $p=3$ не е решение на проблемот. Нека сега $p>3$. Ако $p^3-4p+9=n^2$, за некое $n\in\mathbb{N}$, тогаш $p^3-4p=n^2-9$, односно $(p-2)p(p+2)=(n-3)(n+3)$. Еден од броевите $p-2, p, p+2$ е делив со 3, па мора и n да биде делив со 3. Нека $n=3k$, $k\geq 1$, тогаш $(p-2)p(p+2)=9(k-1)(k+1)$. Двете страни се различни од нула, бидејќи $p\neq 2$. Простиот број $p>3$ го дели $9(k-1)(k+1)$, односно p дели точно еден од броевите $k-1$ и $k+1$.

Нека $p\,|\,k-1$. Запишуваме $k-1=lp$, па добиваме $(p-2)(p+2)=9l(lp+2)$. Гледајќи ј а последната равенка по модул p имаме $18l+4\equiv 0(\bmod p)$. Бидејќи p е непарен, $9\,|\,9l+2$. Всушност, $p\leq 9l+2$, односно $p-2\leq 9l$, па $(p-2)(p+2)=9l(lp+2)$ повлекува $p+2\geq lp+2$. Оттука единствената можност е ако $l=1$, па $p=9l+2=11$. Јасно е дека $p=11$ е решение. ($11^3-4\cdot 11+9=36^2$)

Нека $p\,|\,k+1$, па $k+1=lp$. Тогаш $(p-2)(p+2)=9l(lp-2)$. Гледајќи ја равенката по модул p, имаме $18l-4\equiv 0(\bmod p)$. Следува дека $p\,|\,9l-2$. Всушност $p\leq 9l-2$, $p+2\leq 9l$, па од $(p-2)(p+2)=9l(lp-2)$, следува $p-2\geq lp-2$. Оттука $l=1$, па $p=9l-2=7$. Па, $p=7$ е уште едно решение на проблемот. ($7^3-4\cdot 7+9=18^2$)

Конечно, сите решенија на проблемот се $p=2,7,11$.

3. Определи ги сите природни броеви a,b,c за кои се исполнети условите:

1) a^2+1, b^2+1 се прости броеви,

2) $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$.

Решение. Без губење на општоста можеме да земеме дека $a \ge b$. Тогаш

$$c^2+1=(a^2+1)(b^2+1) \le (a^2+1)^2,$$

па затоа

$$c^2 < c^2+1 \le (a^2+1)^2, \text{ т.е. } c < a^2+1.$$

Јасно, $a^2+1 | a^2+1$ и $a^2+1 | c^2+1$, па затоа $a^2+1 | (c^2+1)-(a^2+1)$, т.е. $a^2+1 | (c-a)(c+a)$. Забележуваме дека

$$0 < c-a < c+a < a^2+a+1 < 2(a^2+1).$$

Бидејќи a^2+1 е прост број, добиваме дека $c+a=a^2+1$ и $c-a=1$. Од последните две равенства лесно се добива дека $a=2$ и $c=3$, апотоа од условот 2) следува дека $b=1$.

4. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) за кои p^2+q^3 и q^2+p^3 се точни квадрати.

Решение. Ако $p=q$, тогаш имаме $p^3+p^2=a^2$, т.е. $p^2(p+1)=a^2$. Јасно, $p+1=b^2$, т.е. $p=(b-1)(b+1)$. Но, p е прост број, па затоа $b-1=1$, т.е. $b=2$ и $p=3$.

Нека $p \ne q$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p<q$. Јасно, $q \ge 3$. Од $p^2+q^3=a^2$ следува добиваме $q^3=(a-p)(a+p)$. Од

$$(a-p,a+p)=(a-p,2p) \le (q,2p)=1$$

следува дека $a-p$ и $a+p$ се заемно прости броеви, па од равенството $q^3=(a-p)(a+p)$ следува $a-p=1$ и $a+p=q^3$. Сега, од последните две равенства добиваме $2p=q^3-1=(q-1)(q^2+q+1) \ge 2q$, што противречи на $p<q$.

Конечно, $(3,3)$ е единствениот пар прости броеви кој го задоволува условот на задачата.

5. Определи ги сите прости броеви p такви, што збирот на сите природни делители на бројот p^4 е квадрат на природен број.

Решение. Ако p е прост број, тогаш збирот на сите природни делители на бројот p^4 е $1+p+p^2+p^3+p^4$. Ако

$$1+p+p^2+p^3+p^4=n^2$$

каде n е природен број, тогаш лесно се покажува важат неравенствата

$$(2p^2+p)^2<(2n)^2<(2p^2+p+2)^2,$$

од кои следува дека $(2n)^2=(2p^2+p+1)^2$, т.е $4n^2=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$ и како $4n^2=4p^4+4p^3+4p^2+4p+4$ добиваме $p^2-2p-3=0$, па затоа $p\,|\,3$, т.е. $p=3$. Навистина, за $p=3$ имаме $1+3+3^2+3^3+3^4=11^2$. Значи постои само еден прост број $p=3$ кој го задоволува условот на задачата.

6. Определи ги сите прости броеви p за кои $\frac{p^2-p-2}{2}$ е куб на природен број.

Решение. Условот на задачата ќе го запишеме во обликот

$$p(p-1)=2n^3+2=2(n+1)(n^2-n+1)\,\textbf{.}$$

Бидејќи $p=2$ не е решение, p е делител на $n+1$ или n^2-n+1. Ако $p\,|\,n+1$, тогаш $p\le n+1$, па затоа

$$p(p-1)\le n(n+1)\le 2(n+1)(n^2-n+1).$$

Според тоа, $p\,|\,n^2-n+1$.

Нека $n^2-n+1=kp,\ k\in\mathbb{N}$. Тогаш $p-1=2k(n+1)$, т.е. $p=2kn+2k+1$ и $n^2-n+1=2k^2n+2k^2+k$, па имаме квадратна равенка по n:

$$n^2-(2k^2+1)n-(2k^2+k-1)=0.$$

Нејзината дискриминанта $D=(2k^2+1)^2+4(2k^2+k-1)$ мора да е точен квадрат. Бидејќи D е непарен број и

$$(2k^2+1)^2<D<(2k^2+1)^2+4(4k^2+6)=(2k^2+5)^2,$$

следува дека $D=(2k^2+3)^2$, од каде лесно се добива $k=3$. Сега, добиваме $n^2-19n-20=0$, т.е. $n=20$ и оттука $p=2k(n+1)=127$.

7. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^2-p+1 е точен куб.

Решение. *Прв начин*. Равенката $p^2-p+1=b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1)=(b-1)(b^2+b+1).$$

Од $b<p$ следува дека $p\,|\,b^2+b+1$, т.е. $b^2+b+1=kp$ и $p-1=k(b-1)$, за некој цел број $k>1$. Уште повеќе $k\geq 3$ бидејќи b^2+b+1 е непарен број. Сега $p=kb-k+1$ и

$$b^2+b+1-kp=b^2-(k^2-1)b+(k^2-k+1)=0 \qquad (1)$$

што е квадратна равенка по b. Нејзината дискриминананата

$$D=(k^2-1)^2-4(k^2-k+1)=k^4-6k^2+4k-3$$

мора да биде точен квадрат. Сега од $(k^2-3)^2\leq D<(k^2-2)^2$, следува $D=(k^2-3)^2$, па затоа $k=3$. Конечно, од (1) следува $b=7$ и $p=19$ и тоа е единствено решение.

Втор начин. Равенката $p^2-p+1=b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1)=(b-1)(b^2+b+1)\,.$$

Од $b<p$ следува дека $p\,|\,b^2+b+1$, т.е. $b^2+b+1=kp$ и $p-1=k(b-1)$, за некој цел број $k>1$. Оттука следува $b^2+b+1=k(k(b-1)+1)$. Лесно се проверува дека $k>2$ и тогаш

$$b+1<\tfrac{b^2+b+1}{b}<k^2<\tfrac{b^2+b-1}{b-1}\leq b+3.$$

Значи, $k^2=b+2$. Сега, последователно добиваме

$$b^2+b+1=k^2(b-1)+k,$$
$$b^2+b+1=(b+2)(b-1)+k,\,,$$
$$k=3,$$

па затоа, $b=3^2-2=7$ и $p=3\cdot(7-1)+1=19$.

8. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

Решение. Нека p е прост број таков што

$$xy^3=p^3(x+y)\,. \qquad (1)$$

Ако $p\nmid y$, тогаш $p^3\,|\,x$. Значи, $x=p^3h$ и следствено $p^3hy^3=p^3(p^3h+y)$, од каде наоѓаме $y(hy^2-1)=p^3h$. Бидејќи $p\nmid y$, добиваме дека $p^3\,|\,hy^2-1$ и $y\,|\,h$. Нека $h=yk$. Тогаш $y(ky^3-1)=p^3yk$, па затоа $k(y^3-p^3)=1$. Според тоа, $y^3-k^3=\pm1$, што не е можно.

Нека $p\,|\,y$, т.е. $y=ps$. Од (1) следува $xp^3s^3=p^3(x+ps)$, од каде наоѓаме $x(s^3-1)=ps$. Бидејќи $s\nmid s^3-1$, добиваме $s\,|\,x$. Тогаш $s^3-1\,|\,p$, што значи дека $s^3-1=p$. Последното е можно само за $s-1=1$ и $s^2+s+1=p$. Значи, $x=s=2,\ p=7$, т.е. $x=2$ и $y=14$.

9. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2-3p-1$ е точен куб на природен број.
Решение. Од равенството
$$2p^2-3p-1=n^3 \tag{1}$$
добиваме $n^3\le 2p^2-3p-1\le 2p^2\le p^3$, па затоа $n<p$, т.е. $n+1\le p$.
Ако $p=n+1$, тогаш од (1) добиваме $n^3-2n^2-n+2=0$, од каде наоѓаме $(n-2)(n-1)(n+1)=0$. Значи, $n\in\{1,2\}$, па затоа $p\in\{2,3\}$.
Ако $p>n+1$, тогаш од (1) следува
$$p(2p-3)=(n+1)(n^2-n+1) \tag{2}$$
и бидејќи $p>n+1$ и p е прост број следува дека p е делител на n^2-n+1. Тогаш
$$n^2-n+1=kp \tag{3}$$
за некој природен број k. Од (2) и (3) добиваме $2p=k(n+1)+3$ и ако во (3) замениме $p=\frac{k(n+1)+3}{2}$ добиваме $2n^2-(k^2+2)n-(k^2+3k-2)=0$.
Дискриминантата на оваа квадратна равенка $D=k^4+12k^2+24^2-12$ треба да е точен квадрат. Ако $k\ge 9$, тогаш
$$(k^2+6)^2<k^4+12k^2+24^2-12<(k^2+7)^2$$
и D не може да биде точен квадрат. Според тоа, $1\le k\le 8$ и со непосредна проверка се покажува дека ниту едно од овие броеви не дава решение.
Конечно, бараните прости броеви се 2 и 3.

10. Определи ги сите тројки (m,p,q) такви што m е природен број, p,q се прости броеви и важи $2^m p^2+1=q^5$.
Решение. Од $q-1\,|\,q^5-1$ следува $q-1\,|\,2^m p^2$. Значи, $q-1\,|\,2^n p^k$ каде $n\le m$ и $k\in\{0,1,2\}$. Бидејќи $2^{m-n}p^{2-k}=\frac{2^m p^2}{2^n p^k}=q^4+q^3+q^2+q+1$ е непарен број добиваме $m=n$. Понатаму, $2^m p^2+1\ge(2^m p^k+1)^5\ge 2^{5m}p^{5k}+1$, па затоа

$p^{2-5k} \geq 2^{4m} \geq 1$, од каде следува $2-5k \geq 0$, т.е. $k=0$. Значи, $q-1 \mid 2^m$, па затоа $q=2^m+1$. Ако замениме во дадената равенка добиваме

$$p^2 = 2^{4m} + 5 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 10 \cdot 2^m + 5 .$$

Ако $m \geq 2$, добиваме $p^2 \equiv 5 \pmod 8$ што не е можно, бидејќи $p^2 \equiv 0,1$ или $4 \pmod 8$. Значи $m=1$, т.е. $q=3$ и $p=\sqrt{\frac{3^5-1}{2}}=11$.

Конечно, $(1,11,3)$ е единствената тројка која ја задоволува дадената равенка.

11. Определи ги сите прости броеви p и q за кои $p^{q+1}+q^{p+1}$ е точен квадрат.

Решение. Очигледно едно решение е $p=q=2$. Нека претпоставиме дека p е непарен и $p^{q+1}+q^{p+1}=x^2$. Тогаш $p^{q+1}=(x-q^{\frac{p+1}{2}})(x+q^{\frac{p+1}{2}})$. Ако двата множители $x \pm q^{\frac{p+1}{2}}$ се деливи со p, тогаш $p \mid 2q^{\frac{p+1}{2}}$, па мора да е $p=q$. Но, тогаш $x^2=2p^{p+1}$, што е противречност. Според тоа, единствена можност е $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1$ и $x+q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}$, т.е. $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1$ и $2q^{\frac{p+1}{2}}+1=p^{q+1}$. Последното не е можно за непарен q, бидејќи во тој случај

$$p^{q+1} \equiv 1 \pmod 4 \text{ и } 2q^{\frac{p+1}{2}}+1 \equiv 3 \pmod 4) .$$

Значи, мора да е $q=2$. Тогаш добиваме

$$2^{\frac{p+3}{2}} = p^3-1=(p-1)(p^2+p+1) .$$

Но, p^2+p+1 е непарен број поголем од 1, што е противречност.

Конечно, единствено решение е $p=q=2$.

12. Во множеството прости броеви реши ја равенката $2^p-q^2=1999$.

Решение. Лесно се добива дека единствено решение за $p \leq 11$ е $p=11$ и $q=7$. Нека $p>11$, што значи $q>7$. Ќе ги разгледаме двете можности: $p=3k+1$ и $p=3k+2$. Бидејќи редот на 2 по модул 7 е 3, добиваме дека за $p=3k+1$ важи $2^p \equiv 2 \pmod 7$, а за $p=3k+2$ важи $2^p \equiv 4 \pmod 7$. Но, можните остатоци на q^2+1999 по модул 7 се 1, 5 и 6. Според тоа, единствено решение е $p=11$ и $q=7$.

28. РАВЕНКА НА ПЕЛ И РАВЕНКИ ОД ПЕЛОВ ТИП

1. Нека n и d се природни броеви такви што d не е точен квадрат. Докажи дека равенката $x^2-dy^2=1$ има бесконечно многу решенија (x,y) такви што $n\,|\,y$.

Решение. Бидејќи d не е точен квадрат равенката $u^2-dn^2v^2=1$ има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви. Но за секое решение (u_0,v_0) на последната равенка парот (u_0,nv_0) е решение на дадената равенка, што значи дека таа има бесконечно многу решенија.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

а) $x^2-(a^2-1)y^2=1$, $x\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$,

б) $x^2-(a^2+1)y^2=1$, $x\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Јасно, a^2-1 не е точен квадрат, па вослучајов имаме равенка на Пел чие фундаментално решение е $(x_0,y_0)=(a,1)$. Според тоа, сите решенија на равенката се дадени со

$$x_n=\tfrac{1}{2}((a+\sqrt{a^2-1})^n+(a-\sqrt{a^2-1})^n),$$

$$y_n=\tfrac{1}{2\sqrt{a^2-1}}((a+\sqrt{a^2-1})^n-(a-\sqrt{a^2-1})^n),\ n=1,2,...$$

б) Јасно, a^2+1 не е точен квадрат, па во случајов имаме равенка на Пел чие фундаментално решение е $(x_0,y_0)=(2a^2+1,2a)$. Според тоа, сите решенија на равенката се дадени со

$$x_n=\tfrac{1}{2}((2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1})^n+(2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1})^n),$$

$$y_n=\tfrac{1}{2\sqrt{a^2+1}}((2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1})^n-(2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1})^n),\ n=1,2,...$$

3. Докажи дека ако равенките од Пелов тип $x^2-5y^2=a$ и $x^2-5y^2=b$ имаат решение, тогаш и равенката $x^2-5y^2=ab$ има решение.

Решение. Нека претпоставиме дека $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ се решенија на равенките од Пелов тип $x^2-5y^2=a$ и $x^2-5y^2=b$. Тогаш важи $x_1^2-5y_1^2=a$ и

$x_2^2 - 5y_2^2 = b$, па затоа

$$\begin{aligned} ab &= (x_1^2 - 5y_1^2)(x_2^2 - 5y_2^2) \\ &= x_1^2 x_2^2 + 25y_1^2 y_2^2 - 5x_1^2 y_2^2 - 5x_2^2 y_1^2 \\ &= (x_1x_2)^2 + (5y_1y_2)^2 + 10x_1x_2y_1y_2 - 5(x_1y_2)^2 - 5(y_1x_2)^2 - 10x_1x_2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + y_1x_2)^2 \end{aligned}$$

Според тоа, целите броеви $x = x_1x_2 + 5y_1y_2$ и $y = x_1y_2 + y_1x_2$ ја задоволуваат равенката $x^2 - 5y^2 = ab$.

4. Ако $d \equiv 3 \pmod 4$, тогаш равенката $x^2 - dy^2 = -1$ нема решение во множеството цели броеви. Докажи!

Решение. Од $d \equiv 3 \pmod 4$ следува дека d има прост делител p од облик $4k+3$, бидејќи во спротивно ќе важи $d \equiv 1 \pmod 4$. Од $p \mid dy^2$ следува дека $p \mid x^2 + 1$. Но, секој прост делител на број од облик $x^2 + 1$ е од облик $4k+1$, што противречи на фактот дека бројот $p = 4k+3$ е делител на $x^2 + 1$. Конечно, од добиената противречност следува дека во случај кога $d \equiv 3 \pmod 4$ не постојат цели броеви (x, y) такви што $x^2 - dy^2 = -1$, т.е. дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

5. Ако $d \equiv 1, 2 \pmod 4$ е природен број кој не е точен квадрат, тогаш равенката $x^2 - dy^2 = -1$ има решение ако и само ако $x_0 \equiv -1 \pmod{2d}$, каде (x_0, y_0) е фундаменталното решение на равенката $x^2 - dy^2 = 1$. Докажи!

Решение. Нека равенката $x^2 - dy^2 = -1$ има решение и нека (a_0, b_0) е нејзиното фундаментално решение, а парот (x_0, y_0) е фундаменталното решение на равенката на Пел $x^2 - dy^2 = 1$. Тогаш

$$x_0 + y_0\sqrt{d} = (a_0 + b_0\sqrt{d})^2, \text{ т.е. } x_0 + dy_0 = a_0^2 + 2a_0b_0\sqrt{d} + db_0^2,$$

од каде добиваме $x_0 = a_0^2 + db_0^2$. Сега, од $a_0^2 = -1 + db_0^2$ добиваме

$$x_0 = a_0^2 + db_0^2 = -1 + 2db_0^2 \equiv -1 \pmod{2d}.$$

Обратно, нека претпоставиме дека $x_0 \equiv -1 \pmod{2d}$ каде (x_0, y_0) е фундаменталното решение на равенката $x^2 - dy^2 = 1$. Од $x_0 \equiv -1 \pmod{2d}$ следува дека постои $k \in \mathbb{Z}$ таков што $x_0 = 2kd - 1$. Заменуваме во $x^2 - dy^2 = 1$ и добиваме $(2kd-1)^2-dy_0^2=1$, односно $y_0^2=4k(kd-1)$. Јасно, y_0 е делив со 2, т.е. $y_0=2y_1$. Сега, $y_1^2=k(kd-1)$ и како $(k,kd-1)=1$ добиваме дека $k=m^2$ и $kd-1=n^2$. Според тоа,

$$-1=n^2-kd=n^2-dm^2,$$

од каде следува дека парот (n,m) е решение на равенката $x^2-dy^2=-1$.

6. Нека S е множеството природни броеви n за кои n^4 има делител во множеството $\{n^2+1,n^2+2,...,n^2+2n\}$. Докажи дека S содржи бесконечно многу броеви од видовите $7k$, $7k+1$, $7k+2$, $7k+5$ и $7k+6$, но не содржи броеви од видовите $7k+3$ и $7k+4$, $k\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $n^2+k\,|\,n^4$ за некој $k\in\{1,2,...,2n\}$. Тогаш

$n^2+k\,|\,n^4-(n^2+k)(n^2-k)=k^2<4n^2$.

Според тоа, $\frac{k^2}{n^2+k}\leq 3$ и затоа можни се точно три случаи.

Случај 1. Ако $n^2+k=k^2$, тогаш $n^2<n^2+k=k^2<n^2+2n+1$, што не е можно.

Случај 2. Ако $2(n^2+k)=k^2$, ја добиваме равенката $(k+1)^2-2n^2=1$. Ако $n\equiv 3(\bmod 7)$ или $n\equiv 4(\bmod 7)$, тогаш $(k+1)^2\equiv 5(\bmod 7)$, што не е можно. За сите преостанати случаи добиваме дека рекурентната формула (фундаментално решение е $(k+1,n)=(3,2)$), ќе има решение за n, конгруентно со соодветниот остаток по модул 7.

Случај 3. Ако $3(n^2+k)=k^2$, добиваме $(2k-3)^2-12n^2=9$. Последната равенка има решение ако $k=3k_1, n=3n_1$, па ја добиваме равенката

$$(2k_1-1)^2-12n_1^2=1.$$

Понатаму, задачата ја решаваме како во Случајот 2.

7. Кој е најмал природен број n поголем од 1, за кој квадратната средина на броевите $1,2,...,n$ е природен број?

Решение. Квадратната средина на броевите $1,2,...,n$ е еднаква на

$$\sqrt{\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n}}=\sqrt{\frac{n(n+1))2n+1)}{6n}}=\sqrt{\frac{(n+1))2n+1)}{6}}\;.$$

Според тоа, проблемот се сведува на определување на најмалиот природен број n за кој постои природен број m таков што

$$\frac{(n+1))2n+1)}{6}=m^2\;.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 48 и дополниме до точен квадрат, ја добиваме еквивалентната равенка

$$(4n+3)^2-3(4m)^2=1,$$

т.е. Пеловата равенка

$$x^2-3y^2=1,$$

каде $x=4n+3, y=4m$. Фундаментално решение на оваа Пелова равенка е парот $(2,1)$, па затоа сите нејзини решенија се определени со рекурзијата

$$x_{k+1}=2x_k+3y_k,\ y_{k+1}=x_k+2y_k,\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Бидејќи $x=4n+3$ и $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ во предвид доаѓаат само решенијата $x_k>7$, за кои $x_k\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ и $y_k\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$. Првите неколку решенија на оваа Пелова равенка се $(7,4), (26,15), (97,56), (362,209), (1351,780)$. Последниот пар е првиот кој ги задоволува наведените услови. Значи, $4n+3=1351$, односно $n=337$.

Забелешка. Да ја разгледаме низата решенија (x_k,y_k) по модул 4 на Пеловата равенка $x^2-3y^2=1$. Имаме:

$$\begin{aligned}
&x_1=2,\ y_1=1,\\
&x_2=2x_1+3y_1=7\equiv 3(\mathrm{mod}\,4),\quad y_2=x_1+2y_1=4\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\\
&x_3=2x_2+3y_2=6\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),\quad y_3=x_2+2y_2=3\equiv 3(\mathrm{mod}\,4),\\
&x_4=2x_3+3y_3=13\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\ y_4=x_3+2y_3=8\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\\
&x_5=2x_4+3y_4=2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),\quad y_5=x_4+2y_4=1\equiv 1(\mathrm{mod}\,4).
\end{aligned}$$

Забележуваме дека $x_1=x_5\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ и $y_1=y_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, па заклучуваме дека остатоците при делење со 4 периодично ќе се повторуваат со период со должина 4. Првото решение кое ги задоволува условите на задачата е $(x_6,y_6)=(1351,780)$, следното е $(x_{10},y_{10})=(262087,151316)$ и сите решенија се дадени со $(x_{2+4s},y_{2+4s}), s\in\mathbb{N}$. Сега, сите природни броеви поголеми мод 1 за кои квадратната средина на броевите $1,2,...,n$ е природен број се дадени со

$$n_s=\tfrac{x_{2+4s}-3}{4},\ s\in\mathbb{N}.$$

8. Докажи дека низата броеви $[n\sqrt{2}]$, $n\in\mathbb{N}$ содржи бесконечно многу точни квадрати.

Решение. Условот $[n\sqrt{2}]=k^2$ е еквивалентен на $k^2\le n\sqrt{2}<k^2+1$, односно на условот

$$k^4\le 2n^2<(k^2+1)^2. \tag{1}$$

Треба да определиме бесконечно многу парови природни броеви (n,k) кои го задоволуваат условот (1). Барањето, броевите $(k^2)^2$ и $2n^2$ да се блиски еден до друг асоцира на равенката од Пелов тип

$$x^2-2y^2=-1. \qquad (2)$$

Ако оваа равенка ја запишеме во видот $2y^2=x^2+1$ и ја помножиме со x^2 добиваме $2(xy)^2=x^4+x^2$. Но, за секој цел број y важи

$$x^4\le x^4+x^2<x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2,$$

што значи дека за секое решение на (a,b) на горната равенка, броевите $n=ab$ и $k=a$ го задоволуваат условот (1). Затоа останува да докажеме дека разгледуваната равенка има бесконечно многу решенија.

Навистина, фундаменталното решение на равенката (2) е $x_1+y_1\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$, па затоа сите нејзини решенија се дадени со

$$x_{2n+1}+y_{2n+1}\sqrt{2}=(x_1+y_1\sqrt{2})^{2n+1}=(1+\sqrt{2})^{2n+1},\ n\in\mathbb{N},$$

и тие се бесконечно многу. Со тоа задача е решена, бидејќи

$$[x_{2n+1}y_{2n+1}\sqrt{2}]=x_{2n+1}^2,\ n\in\mathbb{N}.$$

9. Определи го најмалиот непарен природен број $a>5$ за кој постојат природни броеви m_1,m_2,n_1 и n_2 такви што

$$a=m_1^2+n_1^2,\ a^2=m_2^2+n_2^2 \text{ и } m_1-n_1=m_2-n_2. \qquad (1)$$

Решение. Од $261=15^2+6^2, 261^2=189^2+180^2$ и $15-6=189-180$ следува дека бројот 261 ги задоволува условите (1). Ќе докажемедека тоа е најмалиот непарен природен број кој ги задоволува условите (1). Нека претпоставиме дека $a<261$ исто така ги задоволува условите (1). Бидејќи $a=m_1^2+n_1^2$ е непарен број, заклучуваме дека m_1 и n_1 се со различна парност. Според тоа, $d=m_1-n_1$ е непарен број. Освен тоа, од $d<m_1<\sqrt{a}<\sqrt{261}=17$ следува дека можни вредности за d се $d=1,3,5,7,9,11,13,15$.

Имаме $m_2=n_2+d$, па затоа $a^2=(n_2+d)^2+n_2^2$, од каде следува

$$2a^2-d^2=(2n_2+d)^2. \qquad (2)$$

Ако $d=1$, тогаш равенката (2) е равенка од Пелов тип $x^2-2y^2=-1$, каде $(x,y)=(2n_2+1,a)$. Оваа равенка има фундаментално решение $(a,y)=(1,1)$ и $x+y\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2k-1}$, каде $k\in\mathbb{N}$. Според тоа, вредностите на y, т.е. на a, кои се решенија на оваа равенка се 5, 29, 169, 985, ... Значи, можни вредности на a се 29 и 169. Лесно се проверува дека 29 и 169 не може да се претстават во облик $(n_1+1)^2+n_1^2$. Значи, $d\neq 1$.

10. Дадена е низата $a_k=[\sqrt{k^2+(k+1)^2}]$, $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $n^2+(n+1)^2$ е точен квадрат,

$$a_n-a_{n-1}>1 \text{ и } a_{n+1}-a_n=1.$$

Решение. Ако $n^2+(n+1)^2=m^2$, тогаш

$$4n^2+4n+2=2m^2\text{, т.е. } (2n+1)^2-2m^2=-1.$$

Ставаме $x=2n+1$ и ја добиваме равенката од Пелов тип $x^2-2m^2=-1$, која има фундаментално решение $(x,m)=(1,1)$. Значи, во множеството природни броеви равенката $x^2-2m^2=-1$ има бесконечно многу решенија и секој $x=2n+1$ е непарен. За секое од овие бесконечно многу решенија имаме

$$a_n=[\sqrt{n^2+(n+1)^2}]=[\sqrt{m^2}]=m$$

и

$$a_{n-1}=[\sqrt{(n-1)^2+n^2}]=[\sqrt{2n^2-2n+1}]=[\sqrt{2n^2+2n+1-4n}]=[\sqrt{m^2-4n}].$$

Од $n^2+(n+1)^2=m^2$ следува $n>2$ и

$$a_{n-1}=[\sqrt{m^2-4n}]\leq\sqrt{m^2-4n}<m-1=a_n-1.$$

Значи $a_n-a_{n-1}>1$, за бесконечно многу n. Исто така, за овие броеви n важи

$$a_{n+1}=[\sqrt{(n+1)^2+(n+2)^2}]=[\sqrt{m^2+4n+4}]$$

и бидејќи $m+1<\sqrt{m^2+4n+4}<m+2$, добиваме $a_{n+1}=m+1$. Конечно,

$$a_{n+1}-a_n=m+1-m=1.$$

11. Нека n е природен број. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x,y,z) такви што е исполнето равенството

$$nx^2+y^3=z^4.$$

Решение. Имаме

$$y^3=z^4-nx^2=(z^2-x\sqrt{n})(z^2+x\sqrt{n})$$

и ако избереме $y=s^2-nt^2$, $(n,t)=1$, добиваме

$$\begin{aligned}y^3&=(s-t\sqrt{n})^3(s+t\sqrt{n})^3\\&=(s^3-3s^2t\sqrt{n}+3nst^2-nt^3\sqrt{n})(s^3+3s^2t\sqrt{n}+3nst^2+nt^3\sqrt{n})\\&=(z^2-x\sqrt{n})(z^2+x\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Непосредно се проверува, дека

$$z^2=s^3+3nst^2 \text{ и } x=3s^2t+nt^3$$

го задоволуваат горното равенство. Бидејќи секогаш постои цел број $x=3s^2t+nt^3$, останува да докажеме, дека постојат бесконечно z кои го задоволуваат равенството

$$z^2=s^3+3nst^2. \tag{1}$$

Случај 1. Нека $3n$ не е точен квадрат и да земеме $s=1$. Тогаш (1) преминува во равенка на Пел $z^2-3nt^2=1$, која има бесконечно многу решенија и ако (z_1,t_1) е нејзиното фундаментално решение, тогаш нејзиното $k-$то решение е дадено со

$$z_k+\sqrt{3n}t_k=(z_1+\sqrt{3n}t_1)^k.$$

Лесно се проверува, дека ако k е парен, тогаш и t_k е парен. Останува да докажеме, дека постојат бесконечно многу парови (z_k,t_k), за кои броевите

$$x_k=3t_k+nt_k^3,\ y_k=1-nt_k^2,\ z_k^2=1+3nt_k^2$$

се по парови заемно прости. Ќе ги разгледаме само парните вредности на t_k. Имаме

$$(x_k,z_k^2)=(t_k(3+nt_k^2),1+3nt_k^2)=(3+nt_k^2,1+3nt_k^2)=(3+nt_k^2,-8)=1$$

и аналогно

$$(y_k,z_k^2)=(1-nt_k^2,4)=1 \text{ и } (x_k,y_k)=(4,1-nt_k^2)=1.$$

Случај 2. Ако $3n=m^2$ за некој природен број m, да земеме $s=u^2$ и $z=uv$. Тогаш (1) го добива обликот $u^4=v^2-3nt^2=(v-mt)(v+mt)$. Непосредно се проверува дека за секој природен број k броевите

$$u_k=2mk+1, t_k=\tfrac{u_k^4-1}{m}, v_k=mt_k+1$$

се решенија на последната равенка. Освен тоа u_k е непарен, а t_k е парен и важи

$$(t_k,v_k)=(t_k,mt_k+1)=1.$$

Останува да докажеме, дека за тројката

$$x_k=3u_k^4t_k+nt_k^3, y_k=u_k^4-nt_k^2, z_k=u_kv_k=u_k(mt_k+1)$$

која ја задоволува равенката од условот, важи

$$(x_k,y_k)=(y_k,z_k)=(z_k,x_k)=1.$$

Имаме

$$(x_k, y_k) = (3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k^4 - nt_k^2) = (4u_k^4 t_k, u_k^4 - nt_k^2) = (4, u_k^4 - nt_k^2) = 1,$$
$$(y_k, z_k) = (u_k^4 - nt_k^2, u_k v_k) = (u_k^4 - nt_k^2, 4nt_k^2) = (u_k^4 - nt_k^2, 4) = 1,$$
$$(z_k, x_k) = (3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k v_k) = (3u_k^4 + nt_k^2, u_k v_k)$$
$$= (3u_k^4 + nt_k^2, v_k) = (u_k^4 + 3nt_k^2, 8) = 1.$$

Според тоа, постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x, y, z) такви што е исполнето равенството $nx^2 + y^3 = z^4$.

12. Нека $a, b > 1$ се заемно прости природни броеви такви што ab не е точен квадрат. Ако равенката $ax^2 - by^2 = 1$ има решение и нејзиното фундаментално решение е паротот (A, B), тогаш сите нејзини решенија се дадени со

$$x_n = Au_n + bBv_n,\ y_n = Bu_n + aAv_n, \qquad (1)$$

каде (u_n, v_n) е решение на равенката $x^2 - aby^2 = 1$. Докажи!

Решение. Лесно се проверува дека со (1) навистина се дадени решенија на равенката $ax^2 - by^2 = 1$. Единственоста следува од фактот дека, ако (x, y) е решение на равенката $ax^2 - by^2 = 1$, тогаш $(aAx - bBy, Bx - Ax)$ е решение на равенката $x^2 - aby^2 = 1$ и обратно. Двете насоки се докажуваат со едноставни пресметувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

13. Нека $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ е прост број. Докажи дека равенката

$$(p+2)x^2 - (p+1)y^2 + px + (p+2)y = 1$$

има бескнечно многу решенија во множеството цели броеви и ако (x_0, y_0) е решение на равенката, тогаш $p \mid x_0$.

Решение. Прво ќе докажеме дека $p \mid x$. Воведуваме смена $y = z + 1$ и ја добиваме равенката

$$x^2 = (z - x)((p+1)(z + x) + p). \qquad (1)$$

Ако

$$d = (z - x, (p+1)(z + x) + p), \qquad (2)$$

тогаш $d \mid x$, па затоа $d \mid z$, што според (2) значи $d \mid p$. За $d = 1$ добиваме дека $(p+1)(z + x) + p$ е точен квадрат и

$$(z + x)(p+1) + p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4),$$

што е противречност. Значи, $d = p$, односно $p \mid x$ и $p \mid z$.

Нека $x = pu$ и $z = pv$. Со замена во (1) ја добиваме равенката

$$u^2=(v-u)((p+1)(v+u)+1)\,, \tag{3}$$

во која двата множители на десната страна се заемно прости. Според тоа,

$$v-u=a^2,\ \ (p+1)(v+u)+1=b^2 \text{ и } u=ab\,,$$

каде a и b се природни броеви. Ако од овие равенства ги елиминираме u и v, последователно добиваме

$$b^2=(p+1)(a^2+2ab)+1,$$
$$(p+2)b^2-(p+1)(a+b)^2=1.$$

Понатаму, бидејќи последната равенка има решение $(a,b)=(0,1)$, од претходната задача следува дека таа има бесконечно многу решенија. На секое такво решение (a,b) соодветствува решение $(u,v)=(ab,ab+a^2)$ на равенката (3), односно решение $(x,y)=(pab,\,p(ab+a^2)+1)$ на почетната равенка.

14. Докажи дека системот

$$\begin{cases} a^2+b^2+3=4ab,\\ c^2+d^2+3=4cd,\\ 4c^3-3c=a, \end{cases}$$

има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

Решение. Равенката $x^2+y^2+3=4xy$ е еквивалентна на равенката

$$(2x+y)^2-3x^2=-3\,. \tag{1}$$

Имаме $3\,|\,2x-y$, па затоа $2x-y=3w$ и ја добиваме равенката $x^2-3w^2=1$. Јасно од секое решение на последната равенка се добива решение на почетната равенка.

Од равенката на Пел $x^2-3w^2=1$ во множеството природни броеви ги добиваме решенијата

$$x_n=\tfrac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n) \text{ и } w_n=\tfrac{1}{2\sqrt{3}}((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n)\,,\ n=1,2,...$$

Според тоа, решенија на (1) се $(x_n,y_n)=(x_n,2x_n-3w_n)$, $n=1,2,...$

Ставаме $t=2+\sqrt{3}$. Тогаш $\frac{1}{t}=2-\sqrt{3}$ и затоа $x_n=\frac{1}{2}(t^n+\frac{1}{t^n})$. Оттука добиваме

$$4x_n^3-3x_n=\tfrac{1}{2}(t^{3n}+\tfrac{1}{t^{3n}})=x_{3n}\,.$$

Сега, ако земеме

$$c=x_n\,,\ a=x_{3n}\,,\ d=y_n \text{ и } b=3y_n, \text{ за } n=1,2,...$$

добиваме дека дадениот систем има бесконечно многу решенија.

15. Докажи дека равенката
$$x^3+y^3+z^2=t^4 \qquad (1)$$
има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.
Решение. Имаме
$$1^3+2^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3+n^3=(\tfrac{n(n+1)}{2})^2,$$
$$(\tfrac{(n-2)(n-1)}{2})^2+(n-1)^3+n^3=(\tfrac{n(n+1)}{2})^2.$$
Според тоа, за да докажеме дека равенката (1) има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви, доволно е да докажеме дека за бесконечно многу природни броеви n бројот $\frac{n(n+1)}{2}$ е точен квадрат. Имаме, $\frac{n(n+1)}{2}=u^2$, т.е. $(2n+1)^2-2(2u)^2=1$. Последната равенка е равенка на Пел, која во множеството природни броеви има бесконечно многу решенија, од што следува тврдењето на задачата.

16. Определи ги сите природни броеви n такви што $\binom{n}{k-1}=2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ за некој природен број $k<n$.

Решение. Ако помножиме со $\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ дадената равенка последователно ја сведуваме на еквивалентната равенка
$$k(k+1)=2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1),$$
$$n^2+3n+2=2k^2+2k,$$
$$(2n+3)^2-2(2k+1)^2=-1.$$
Фундамнталното решение на равенката $x^2-2y^2=-1$ е $(x_0,y_0)=(1,1)$, па затоа сите нејзини решенија (x_i,y_i) се дадени со $x_i+y_i\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2i+1}$. Притоа x_i и y_i се непарни за секој i, па затоа $n_i=\frac{x_i-3}{2}$, $i=1,2,3,...$ се единствените природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

17. Ако $m=2+2\sqrt{28n^2+1}$ е цел број за $n\in\mathbb{N}$, докажи дека m е точен квадрат.
Решение. Прво ги определуваме оние n за кои m е цел број. Од условот на задчата имаме $(\frac{m}{2}-1)^2-28n^2=1$, што значи дека $(\frac{m}{2}-1,n)$ е решение на равенката на Пел $x^2-28y^2=1$. Фундаменталното решение на оваа равенка е $(x_0,y_0)=(127,24)$, па имаме $\frac{m}{2}-1+n\sqrt{28}=(127+24\sqrt{28})^k$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$\frac{m}{2}-1=\frac{1}{2}((127+24\sqrt{28})^k+(127-24\sqrt{28})^k)$$
$$m=2+(127+24\sqrt{28})^k+(127-24\sqrt{28})^k=A_k^2,$$
при што $A_k=(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ е природен број.

18. Нека y е природен број. Докажи дека y е член на низата на Фибоначи ако и само ако еден од броевите $5y^2\pm4$ е точен квадрат.

Решение. Фундаменталното решение на равенката $x^2-5y^2=1$ е $(x,y)=(9,4)$. Сите решенија на равенките $x^2-5y^2=\pm4$ се добиваат од решенијата во кои $2x^2\le4(9+1)$, т.е. $x\le4$. За равенката $x^2-5y^2=-4$ тие решенија се $(x,y)\in\{(\pm4,\pm2),(\pm1,\pm1)\}$, а за равенката $x^2-5y^2=4$ тие решенија се $(x,y)\in(\pm3,\pm1)$. Според тоа, сите решенија на равенките $x^2-5y^2=\pm4$ се дадени со формулите

$$x+y\sqrt{5}\in\{\pm2(2+\sqrt{5})^n,\pm(3\pm\sqrt{5})^n(2+\sqrt{5})^n,\pm(4\pm2\sqrt{5})^n(2+\sqrt{5})^n\mid n\in\mathbb{Z}\}.$$

Бидејќи

$$2+\sqrt{5}=\phi^3 \text{ и } 3\pm\sqrt{5}=2\phi^{\pm2},$$

каде $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ сите решенија можеме да ги запишеме во облик

$$x+y\sqrt{5}=\pm2\phi^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Понатаму,

$$x-y\sqrt{5}=\pm2(-\phi)^{-n},$$

па затоа

$$y=\frac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}=u_n,$$

каде u_n е $n-$тиот Фибоначиев број. Со ова тврдењето на задачата е докажано.

19. Докажи дека $\{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}}$ за секој природен број n. Дали може константата $2\sqrt{2}$ во именителот да се подобри?

Решение. Имаме $m=[n\sqrt{2}]$ и

$$\{n\sqrt{2}\}=n\sqrt{2}-m=\frac{2n^2-m^2}{n\sqrt{2}+m}>\frac{1}{n\sqrt{2}+m}>\frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

Константата во именителот не може да се подобри, бидејќи равенство не се достигнува, но како равенка од Пелов тип равенката $2n^2-m^2=1$ има бесконено многу решенија $(m_i, n_i)_{i=1}^{\infty}$, за секое од тие решенија важи

$$n_i\{n_i\sqrt{2}\} = \frac{1}{\frac{m_i}{n_i}+\sqrt{2}},$$

што за доволно големи вредности големи m_i, n_i е доволно блику до бројот $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

20. Ако a е природен број кој не е точен квадрат, определи го минимумот на изразот $q^2|\sqrt{a}-\frac{p}{q}|$ по $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$.

Решение. Можеме да сметаме дека $p>0$. Разгледуваниот израз е еднаков на

$$f(p,q) = \frac{|p^2-aq^2|}{\frac{p}{q}+\sqrt{a}}.$$

Ако $\frac{p}{q}<\sqrt{a}$, тогаш $f(p,q)>\frac{1}{2\sqrt{a}}$. Ако $\frac{p}{q}>\sqrt{a}+1$, тогаш $f(p,q)>1$. Исто така, ако $\sqrt{a}<\frac{p}{q}<\sqrt{a}+1$ и $p^2-aq^2>1$, тогаш

$$f(p,q) > \frac{2}{2\sqrt{a}+1} > \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Нека $p^2-aq^2=1$. Во овој случај најголемата вредност за $\frac{p}{q}$ и со тоа најмалата вредност на $f(p,q)$, се достигнува за фундаменталното решение на равенката на Пел $(p,q)=(p_0,q_0)$ и важи

$$f(p,q) = \frac{1}{\frac{p_0}{q_0}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

29. ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

1. Нека е даден полиномот
$$P(x)=(x+d_1)(x+d_2)...(x+d_9),$$
каде $d_1,d_2,...,d_9$ се девет различни цели броеви. Докажи дека постои цел број N, така што за сите цели броеви $x\geq N$, бројот $P(x)$ е делив со прост број поголем од 20.
Решение. Да забележиме дека тврдењето во задачата е инваријантно во однос на транслации по x, па без губење на општоста можеме да претпоставиме дека броевите $d_1,d_2,...,d_9$ се позитивни.
Главната идеја во задачата е дека има точно осум прости броеви помали од 20, додека $P(x)$ има повеќе од осум множители.
Ќе докажеме дека $N=d^8$ го задоволува бараното својство, каде
$$d=\max\{d_1,d_2,...,d_9\}.$$
Нека сега претпоставиме дека постои број $x\geq N$, така што $P(x)$ е сложен број кој е делив со прости броеви помали од 20. Тогаш за секој индекс $i\in\{1,2,...,9\}$, бројот $x+d_i$ може да се запише како производ на степените од првите 8 прости броеви.
Бидејќи $x+d_i>x\geq d^8$, постои некој степен на прост број $f_i>d$ кој е делител на $x+d_i$. Од принципот на Дирихле, постојат два различни индекси i и j така што $f_i\leq f_j$. Сега и двата броја $x+d_i$ и $x+d_j$ се деливи со f_i, од каде имаме дека и нивната разлика d_i-d_j е деливо со f_i. Но,
$$0<|d_i-d_j|\leq\max\{d_i,d_j\}\leq d<f_i,$$
што е противречност. Значи, бројот $N=d^8$ го задоволува условот на задачата.

2. Определи ги сите монични полиноми f со целобројни коефициенти кои го имаат следново својство: постои природен број N таков што $2(f(p)!)+1$ е делив со p за секој прост број $p>N$ за кој $f(p)$ е природен број.
Решение. Јасно е дека полиномот f не е константен. Од друга страна, од условот на задачата следува дека $p\nmid f(p)!$, т.е. $f(p)<p$ за секој $p>N$, па затоа мора да важи $\deg f=1$. Според тоа, $f(x)=x-c$, за некој $c\in\mathbb{N}$. Бидеј-

ќи според теоремата на Вилсон

$$2(p-c)!\equiv -1\equiv (p-1)!\equiv (-1)^{c-1}(c-1)!(p-c)!\,(\mathrm{mod}\,p)$$

за секој прост број $p>N$, следува дека

$$(-1)^{c-1}(c-1)!\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,p),$$

односно $(-1)^{c-1}(c-1)!=2$. Од последното равенство добиваме $c=3$, па затоа $f(x)=x-3$.

3. Нека p е прост број и нека $f(x)$, $\deg f(x)=d$ е полином со целобројни коефициенти таков што:

1) $f(0)=0,\ f(1)=1,$

2) за секој природен број n, остатокот при делење на $f(n)$ со p е 0 или 1.

Докажи дека $d\geq p-1$.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба.

Лема. За секој полином со целобројни коефициенти P, $\deg P=n$ важи:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}P(i)=0.\ \square \tag{1}$$

Нека претпоставиме дека степенот d на полиномот f е помал или еднаков на $p-2$. Ако во (1) ставиме $n=p-2$ добиваме

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}f(i)=0.$$

Јасно, $\binom{p-1}{i}$ е природен број и

$$\binom{p-1}{i}=\frac{(p-1)(p-2)...(p-i)}{i!}\equiv\frac{(-1)(-2)...(-i)}{i!}\equiv(-1)^i\,(\mathrm{mod}\,p),$$

па затоа

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}f(i)\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{2i}f(i)\equiv\sum_{i=0}^{p-1}f(i)(\mathrm{mod}\,p). \tag{2}$$

Сега од 2) имаме $f(i)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ или $f(i)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ за $i\in\{0,1,...,p-1\}$. Но, $f(1)=1$, па од (1) следува дека $f(i)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ за $i\in\{0,1,...,p-1\}$, што противречи на $f(0)=0\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

4. Нека $n>1$ е природен број. Секоја дропка $\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n}$ ја запишуваме како нескратлива и со $f(n)$ го означуваме збирот на броителите на добиените дропки. За кои вредности на $n>1$ броевите $f(n)$ и $f(2015n)$ се со различна парност?

Решение. *Одговор*: За секој природен број $n>1$.

Нека $n=2^t m$ за $t\ge 0$ и m е непарен број. Да ја разгледаме дропката $\frac{k}{n}$. Ако k е делив со 2^{t+1}, тогаш по скратувањето на броителот тој ќе биде парен, а во спротивно тој ќе биде непарен. Меѓу броевите $1,2,...,n-1$ има точно $\frac{m-1}{2}$ деливи со 2^{t+1}. Така во збирот $f(n)$ имаме $n-1-\frac{m-1}{2}$ непарни собирци. Според тоа, $f(n)$ е парен ако и само ако $n-1$ и $\frac{m-1}{2}$ се со иста парност, т.е. кога n е непарен и $m\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ или кога n е парен и $m\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$.

Останува да забележиме дека броевите n и $2015n$ се со иста парност и дека за непарен m броевите m и $2015m$ даваат различни остатоци при делење со 4. Според тоа, броевите $f(n)$ и $f(2015n)$ се со различна парност.

5. Определи полином $f(x)$ со целобрјни коефициенти, кој за m различни природни вредности на x дава m различни прости броеви.

Решение. Таков е, на пример, полиномот

$$f(x)=[(x-p_1)(x-p_2)...(x-p_m)+1]x,$$

каде p_k е $k-$от прост број. Јасно, $f(p_k)=p_k$, за $k=1,2,\dots,m.$

6. Определи за кои природни броеви $m>1$ постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти, кој при делење со m за едни цели броеви дава остаток 0, а за други цели броеви дава остаток 1.

Решение. Нека $m=p^k$, каде p е прост број и k е природен број. Тогаш за $f(x)=x^{\varphi(p^k)}$, ако $p\nmid x$ од теоремата на Ојлер следува $f(x)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^k)$, а ако $p\,|\,x$ имаме $p^k\,|\,x^k$ и бидејќи $\varphi(p^r)\ge p^{k-1}\ge k$ добиваме $p^k\,|\,x^{\varphi(p^k)}$, т.е $f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^k)$.

Ако m е природен број поголем од 1 и m не е степен на прост број, тогаш m има барем два различни прости делитела p и $q\ne p$. Да претпоставиме дека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти и дека постојат цели броеви x_1 и x_2 такви што $f(x_1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)$ и $f(x_2)\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$. Тогаш, бидејќи $p\,|\,m$ и $q\,|\,m$ добиваме $f(x_1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$ и $f(x_2)\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$. Но, p и q се различни прости броеви, па затоа од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои цел број, x_0 таков што $x_0\equiv x_1(\mathrm{mod}\,p)$ и $x_0\equiv x_2(\mathrm{mod}\,q)$ и затоа $f(x_0)\equiv f(x_1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ и $f(x_0)\equiv f(x_2)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,q)$. Од $f(x_0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$ заклучуваме дека не е можно $f(x_0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,m)$, а од $f(x_0)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,q)$ дека не е можно $f(x_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$. Значи, $f(x_0)$ при делење со m не дава ниту остаток 0 ниту остаток 1. Конечно, решение на задачата е $m=p^k$, каде p е прост број.

7. Нека $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Докажи дека постојат само конечен број прости броеви a_n од видот

$$a_n=\binom{n}{k}-1,\ n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Решение. Да го разгледаме полиномот

$$f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-k+1)-k!\,. \tag{2}$$

Бидејќи $f(k)=0$ добиваме

$$f(x)=(x-k)g(x), \tag{3}$$

каде $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти и степен $k-1$. Од (1), (2) и (3) следува

$$a_n=\frac{(n-k)g(n)}{k!}\,. \tag{4}$$

Полиномот $g(x)$ има позитивен степен и водечки коефициент еднаков на 1, па затоа $g(x)\to\infty$, кога $x\to\infty$. Според тоа, постои константа N таква да кога $n>N$ истовремено се точни неравенствата

$$n-k>k!,\ \ g(n)>k!. \tag{5}$$

Од (4) и (5) дека кога $n>N$, тогаш бројот a_n е сложен, т.е. што значи дека постојат само конечен број прости броеви од видот (1).

8. Докажи, дека не постои неконстантен полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков што сите броеви $f(k), k\in\mathbb{N}$ се прости.

Решение. Нека $n>1$, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ е полином со целобројни коефициенти $a_0,a_1,...,a_n$ и нека $f(k_0)=p$ е прост број за некој природен број k_0. Тогаш за секој $m\in\mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}f(k_0+pm)&=a_0(k_0+pm)^n+a_1(k_0+pm)^{n-1}+...+a_{n-1}(k_0+pm)+a_n\\&=f(k_0)+pg(m)=p(1+g(m)),\end{aligned}$$

каде $g(x)$ е полином од $n-$ти степен. Понатаму, бидејќи равенките $g(x)=0$ и $g(x)+2=0$ имаат најмногу по n целобројни решенија, добиваме дека постојат бесконечно многу природни броеви m такви да $1+g(m)\neq\pm1$, што значи дека за бесконечно многу природни броеви m бројот $f(k_0+pm)$ е сложен.

9. Докажи, дека не постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков

што $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$, но дека за секој природен број $m>1$ постои полином $f(x)$ со рационални коефициенти, таков што $f(k)=p_k$, $k=1,2,...,$ m каде p_k е $k-$тиот прост број.

Решение. Да претпоставиме дека постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков што $f(1)=2$, $f(2)=3$ и $f(3)=5$. Тогаш $g(x)=f(x)-2$ е полином со целобројни коефициенти таков што $g(1)=0$, па значи $g(x)=(x-1)h(x)$, каде $h(x)$ е полином на целобројни коефициенти. Од $f(3)=5$ следува $g(3)=3$, па значи $2h(3)=3$, што не е можно бидејќи $h(3)$ е цел број.

Нека m е даден природен број поголем од 1. Тогаш, за секој $k=1,2,...,m$ полиномот со целобројни коефициенти $g_k(x)=\frac{(x-1)(x-2)...(x-m)}{x-k}$ има степен $m-1$. Очигледно, $g_k(x)=0$ за секој природен број $x\le m$ различен од k, а $g_k(k)$ е цел број различен од 0. Нека $f_k(x)=\frac{g_k(x)}{g_k(k)}$. Тогаш $f_k(x)$ е полином од $(m-1)-$ви степен со рационални коефициенти при што $f_k(x)=0$, за секој природен број $x\le m$ различен од k и $f_k(k)=1$.

Нека $f(x)=p_1f_1(x)+p_2f_2(x)+...+p_mf_m(x)$. Јасно, $f(x)$ е полином со рационални коефициенти и $f(k)=p_k$, за $k=1,2,...,m$ каде p_k е $k-$тиот прост број.

10. Нека m е природен број и $r_1,r_2,...,r_m$ се позитивни рационални броеви такви што $r_1+r_2+...+r_m=1$. Дефинираме функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ со

$$f(n)=n-[nr_1]-[nr_2]-...-[nr_m].$$

Определи ги минимумот и максимумот на функцијата f.

Решение. За секој $r_i, i=1,2,,.m$ и за секој природен број n важи неравенството $0\le nr_i-[nr_i]<1$.

Нека s е најмалиот заеднички содржател на именителите на рационалните броеви $r_i, i=1,2,,.m$. Тогаш

$$f(n)=n-[nr_1]-[nr_2]-...-[nr_m]=\sum_{i=1}^{m}(nr_i-[nr_i])\ge 0,$$

за секој природен број n и $f(s)=0$, па затоа минимумот на функцијата f е 0. Понатаму, од

$$f(n)=\sum_{i=1}^{m}(nr_i-[nr_i])<m$$

за секој природен број n и

$$\begin{aligned} f(s-1) &= s-1-\sum_{i=1}^{m}[sr_i - r_i] \\ &= s-1-\sum_{i=1}^{m}(sr_i - 1) \\ &= s-1-s+m = m-1, \end{aligned}$$

следува дека максимумот на функцијата f е $m-1$.

11. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со

$$f(m) = m+[\sqrt{m}],\text{ за } m\in\mathbb{N}.$$

Докажи дека за секој $m\in\mathbb{N}$ постои $k\in\mathbb{N}$ таков што

$$f^k(m) = f(f(...(f(m))...))$$

е точен квадрат.

Решение. Прво да забележиме дека за секој природен број m постои природен број n таков што се точни неравенствата

$$n^2 \le m \le n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1.$$

Ако $m = n^2$, тогаш

$$\begin{aligned} & f(m) = f(n^2) = n^2 + n, \\ & f^2(n^2) = n^2 + 2n, \\ & f^3(n^2) = n^2 + 3n = (n+1)^2 + n - 1, \\ & f^5(n^2) = (n+1)^2 + n - 1 + 2(n+1) = (n+2)^2 + n - 2, \\ & f^7(n^2) = (n+2)^2 + n - 2 + 2(n+2) = (n+3)^2 + n - 3, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & f^{2n-1}(n^2) = (2n-1)^2 + 1, \\ & f^{2n+1}(n^2) = (2n-1)^2 + 1 + 2(2n-1) = (2n)^2. \end{aligned}$$

Слично за $m = n^2 + \alpha n + \beta,\ \alpha\in\{0,1\},\ \beta\in\{1,2,...,n\}$ се добива

$$f^{2\beta-\alpha}(m) = f^{2\beta-\alpha}(n^2+\alpha n+\beta) = (m+\beta)^2.$$

12. Докажи дека не постои бикеција $f:\{1,2,...,n,...\}\to\{0,1,2,...,n,...\}$ таква што

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n),\text{ за секои } m,n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција $f(x)$ со саканите својства и да ја разгледаме функцијата $g(x) = 3f(x)+1$. Лесно се проверува дека g е инјекција и $g(mn) = g(m)g(n)$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Да забележиме дека $g(x)$ не е сурјекција, т.е. за секој $y\in\{0,1,2,...\}$ не постои $x\in\{1,2,...\}$ таков што $g(x)=y$. Имено, g го пресликува множеството $\{1,2,...\}$ во множеството природни броеви од видот $3n+1$, каде $n\in\{1,2,...\}$.

Освен тоа важи $g(1)=g(1^2)=g^2(1)=1$, па затоа важи $g(1)=1$.

Нека p,q и r се природни броеви за кои $g(p)=4, g(q)=10$ и $g(r)=25$. Бидејќи ниту еден од броевите 4, 10 и 25 не може да се запише како производ на два броја од множеството $\{4,7,10,...\}$, заклучуваме дека p,q и r се различни прости броеви. Но,

$$4\cdot 25=10^2 \quad\Leftrightarrow\quad g(p)g(r)=g^2(q) \quad\Leftrightarrow\quad g(pr)=g(q^2) \quad\Leftrightarrow\quad pr=q^2,$$

што не е можно за различни прости броеви.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постои функција со саканите својства.

13. Функцијата $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ е таква што за секои цели броеви m и n разликата $f(m)-f(n)$ е делива со $f(m-n)$. Докажи дека за секои цели броеви m и n такви што $f(m)\le f(n)$, бројот $f(n)$ е делив со бројот $f(m)$.

Решение. *Прв начин*. Нека $x,y\in\mathbb{Z}$ се такви што $f(x)<f(y)$. Од

$$f(x-y)\,|\,f(y)-f(x)>0$$

следува дека $f(x-y)<f(y)$. Од друга страна, $f(y)$ е делител на

$$|f(x)-f(x-y)|<f(y),$$

па мора да важи $f(x)=f(x-y)$. Оттука добиваме

$$f(x)=f(x-y)\,|\,f(y)-f(x),$$

па затоа $f(x)\,|\,f(y)$.

Втор начин. Нека вредностите на функцијата се $a_1<a_2<...$ и нека $a_1|...|a_k$, $f(x)=a_k$, $f(y)=a_{k+1}$. Со замена на $(m,n)=(x,y)$ во условот на задачата добиваме $f(x-y)\,|\,f(y)-f(x)>0$, па затоа

$$a_{k+1}=f(y)>f(x-y)=a_j$$

за некој $j\le k$. Со замена $(m,n)=(x,x-y)$ во условот на задачата добиваме

$$a_{k+1}=f(y)\,|\,f(x)-f(x-y)=a_k-a_j,$$

па како $0\le a_k-a_j<a_{k+1}$, следува $a_k=a_j$. Според тоа,

$$a_k=f(x)=f(x-y)\,|\,f(x)-f(y)=a_k-a_{k+1},$$

што значи $a_k\,|\,a_{k+1}$, од што следува тврдењето на задачата.

Трет начин. Со замена на $(m,n)=((m+1)n,mn)$ во условот на задачата добиваме дека $f(n)\,|\,f((m+1)n)-f(mn)$, па како $f(n)\,|\,f(1\cdot n)$ со индукција следува $f(n)\,|\,f(mn)$ за $m,n\in\mathbb{Z}$. За $a,b\in\mathbb{Z}$, ако $c=(a,b)$, тогаш за некои

$x, y \in \mathbb{Z}$ важи $c = ax + by$. Без ограничување на општоста, нека $f(by) \le f(ax)$. Тогаш $c \mid by$, па затоа $0 \le f(by) - f(c) < f(ax)$. Меѓутоа, со замена $(m,n) = (c, by)$ во условот на задачата добиваме $f(ax) \mid f(c) - f(by)$, па затоа $f(by) = f(c)$, од што следува $f(by) = f(c) \mid f(b) \mid f(by)$ (бидејќи $c \mid b \mid by$), па затоа $f(b) = f(c)$ и $f(b) = f(c) \mid f(a)$ (бидејќи $c \mid a$).

Четврт начин. Ќе ги опишеме сите функции со саканото својство. Како и во третиот начин на решавање заклучуваме дека $f(n) \mid f(mn)$ за $m, n \in \mathbb{Z}$. Според тоа, $f(n) \mid f(-n) \mid f(n)$, па затоа $f(n) = f(-n)$. Понатаму, функцијата f е ограничена, бидејќи $f(n) \mid f(0)$ за секој $n \in \mathbb{Z}$. Нека

$$b_1 = \max_{x \in \mathbb{N}} f(x) \text{ и } a_1 = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = b_1\}.$$

За $m \in \mathbb{N}$ важи $f(a_1) \mid f(ma_1) \le f(a_1)$, што значи $f(ma_1) = b_1$, а исто така $f(a_1) \mid | f(x + a_1) - f(x)| < b_1$, па затоа f е периодична на $\mathbb{N}$ со периода a_1. Понатаму, нека

$$b_2 = \max_{a_1 \nmid x} f(x) \text{ и } a_2 = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = b_2\}.$$

За $m \in \mathbb{N}$ важи $b_2 \mid f(ma_2)$ и уште повеќе $f(ma_2) = b_2$ ако $a_1 \nmid ma_2$. Ако $a_2 \nmid a_1$, тогаш $a_1 < ra_2 - q$ за некои $q, r \in \mathbb{N}$, $q < a_2$, па затоа

$$b_2 \le f(ra_2) = f(q),$$

што противречи на изборот на a_2. Според тоа, $a_2 \mid a_1$ и оттука $b_2 \mid b_1$. Како и погоре заклучуваме дека f е периодична на $\mathbb{N} \setminus a_2\mathbb{N}$ со период a_2.

Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека за некои две строго опаѓачки низи природни броеви $\{a_i\}_{i=1}^k$ и $\{b_i\}_{i=1}^k$, такви што $a_k \mid a_{k-1} \mid \dots \mid a_2 \mid a_1$ и $b_k \mid b_{k-1} \mid \dots \mid b_2 \mid b_1$ важи $f(x) = b_{i(x)}$ каде $i(x)$ е најмалиот i за кој важи $a_i \mid x$, за $x \ne 0$ и $a_1 \mid f(0)$.

14. Со $\mathbb{P}$ да го означиме множеството од сите прости броеви. Определи ги сите функции $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ такви што важи

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q, \tag{1}$$

за секои $p, q \in \mathbb{P}$.

Решение. Да претпоставиме дека $f(2) > 2$. Тогаш (1) следува дека

$$f(p)^{f(2)} = f(2)^{f(p)} + p^2 - 2^p,$$

е парно за секој $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$, па мора да важи $f(p) = 2$, за секој $p > 2$. Последното не е можно бидејќи тогаш за $(p,q) = (3,5)$ од (1) следува $3^5 = 5^3$, што не е точно. Според тоа, $f(2) = 2$ и сега за $q = 2$ добиваме

$$f(p)^2+2^p=2^{f(p)}+p^2. \qquad (2)$$

Од (2) следува дека $f(p)\neq 2$ за $p>2$. Од друга страна, за секои природни броеви $x>y>2$ важи

$$2^x-x^2>2^y-y^2.$$

Последното неравенство се добива со индукција од неравенството

$$2^{y+1}-(y+1)^2-(2^y-y^2)=2^y-2y-1>0$$

за $y\geq 3$. Сега од (2) непосредно следува дека $f(p)=p$, за секој $p\in \mathbf{P}$. Јасно, оваа функција ја задоволува равенката (1).

15. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е определена со

$$f(1)=1,\ f(2)=2 \text{ и } f(n+1)=f(n+1-f(n))+f(n-f(n-1)),\text{ за } n\geq 2.$$

Определи ги сите природни брови n за кои важи $f(n)=2^{20}$.

Решение. Првите неколку вредности на функцијата се 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8. Со индукција по n ќе докажеме декаважи ($k\in\mathbb{N}$):

1) $\frac{n+1}{2}\leq f(n)\leq n$ и

2) $f(n)=\begin{cases} f(n-2^k+1)+2^{k-1}, & 2^k\leq n<2^{k+1}-1,\\ 2^k, & n=2^{k+1}-1.\end{cases}$

За $n\leq 2$ ова е тривијално. Нека претпоставиме дека важи за $1,2,3,...,n-1$ и нека $2^k+2\leq n\leq 2^{k+1}-2$.

Од $\frac{x+1}{2}\leq f(x)<x$ следува $n-f(n-1),n-1-f(n-2)\in[2^{k-1},2^k1)$. Ако го примениме 2) неколку пати добиваме

$$\begin{aligned} f(n)&=f(n-f(n-1))+f(n-1-f(n-2))\\ &=f(n-2^{k-1}-f(n-2^k))+f(n-2^{k-1}-1-f(n-2^k-1))\\ &=f(n-2^k+1-f(n-2^k))+2^{k-2}+f(n-2^k-f(n-2^k-1))+2^{k-2}\\ &=f(n-2^k+1)+2^{k-1}.\end{aligned}$$

Оттука следува

$$n\geq n-2^k+1+2^{k-1}\geq f(n)\geq \tfrac{n-2^k-2}{2}+2^{k-1}>\tfrac{n+1}{2},$$

со што е докажано 1). Понатаму, ако $2^k-1\leq n\leq 2^k+1$, користејќи ја рекурентната формула и 2) непосредно ја пресметуваме f во точките 2^k-1, 2^k, 2^k+1, $2^{k-1}+1$ и $2^{k-1}+2$ и индукцијата е готова.

Ако $f(n)=2^{20}$, тогаш $2^{20}\leq n\leq 2^{21}-1$, па затоа $f(n-2^{20}+1)=2^{19}$ или $n=2^{21}-1$. Продолжувајќи ја оваа постапка наоѓаме дека $f(n)=2^{20}$ ако и само ако $2^{21}-21\le n\le 2^{21}-1$.

16. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $f(n!)=f(n)!$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $m-n$ е делител на $f(m)-f(n)$ за секои $m,n\in\mathbb{N}, m\ne n$.

Решение. *Прв начин*. Нека f е функција која ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои $a>2$ таков што $f(a)=a$. Тогаш $a!,(a!)!,...$ се неподвижни точки за f. Според тоа, постои растечка низа $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ од неподвижни точки на f. За секој n бројот a_k-n е делител на $f(a_k)-f(n)=a_k-f(n)$ за секој k. Но, од $a_k-n=f(a_k)-n$ следува дека a_k-n е делител на $f(a_k)-n$ за секој k. Според тоа, a_k-n е делител на $f(n)-n$ за секој k, од каде следува дека $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Сега, да претпоставиме дека f нема фиксни точки поголеми од 2. За прост број $p>3$ според теоремата на Лајбниц имаме $(p-2)!\equiv 1(\text{mod}\, p)$, па затоа

$$f(p-2)!-f(1)=f((p-2)!)-f(1)$$

е делив со p. Јасно е дека $f(1)=1$ или 2. Бидејќи $p>3$ и p е делител на $f(p-2)!-f(1)$ добиваме $f(p-2)<p$. Сега, од теоремата на Вилсон следува дека $(p-1)!-f(1)$ не е делив со p, па затоа $f(p-2)\le p-2$. Но, $p-2>2$, а f нема фиксни точки поголеми од 2, па затоа $f(p-2)<p-2$. Од друга страна $p-3$ е делител на $f(p-2)-f(1)$ и како $f(p-2)<p-2$, заклучуваме дека $f(p-2)=f(1)$ за секој прост број $p>3$. За произволен природен број n добиваме дека $p-2-n$ е делител $f(n)-f(p-2)$ и како $p-2-n$ е делител на $f(p-2)-f(1)=0$, заклучуваме дека $p-2-n$ е делител на $f(n)-f(1)$ и тоа е точно за сите големи прости броеви p. Според тоа, $f(n)=f(1)$, т.е. f е константа. Непосредно се проверува дека функциите $f(n)=1$ или $f(n)=2$ се решенија на задачата.

Втор начин. Ако $f(n_0)=n_0$ за некој $n_0\ge 3$ добиваме дека $f(n_k)=n_k$ за секој цел број $k\ge 0$, каде $n_k=n_{k-1}!$. Од друга страна,

$$m-n_k\mid f(m)-f(n_k)=f(m)-n_k=f(m)-m+m-n_k,$$

па затоа $m-n_k\mid f(m)-m$. Според тоа, $f(m)-m$ има бесконечно многу делители, па затоа $f(m)=m$ за секој $m\in\mathbb{N}$.

Од $f(1)=f(1!)=f(1)!$ и $f(2)=f(2!)=f(2)!$ следува дека $f(1),f(2)\in\{1,2\}$. Оттука и од

$$4=3!-2\mid f(3!)-f(2)=f(3)!-f(2)$$

следува дека $f(3)\le 3$.

Ако $f(3)=3$, тогаш од претходните разгледувања следува $f(m)=m$ за секој $m\in\mathbb{N}$.

Нека $f(3)\in\{1,2\}$ и $n>3$ е произволен број. Тогаш

$$n!-3\,|\,f(n!)-f(3)=f(n)!-f(3)$$

следува дека $f(n)!$ не е делив со 3, па затоа $f(n)\in\{1,2\}$.

Ако f не е константа, тогаш постојат природни броеви m и n за кои $f(n)=1$ и $f(m)=2$. Тогаш за $k=2+\max\{m,n\}$ од

$$k-m\,|\,f(k)-f(m)\in\{-1,0,1\}$$

следува дека $f(k)=f(m)=2$ и аналогно $f(k)=1$, што е противречност.

Според тоа, решение на задачата се функциите $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, $f\equiv1$ и $f\equiv2$.

17. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n+f(m) \text{ е делител на } f(n)+nf(m)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$n+f(m)\,|\,f(n)+nf(m)-n(n+f(m)=f(n)-n^2.$$

За $m=n=1$ добиваме $f(1)+1\,|\,f(1)-1$, па затоа $f(1)=1$.

Функцијата $f(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека за некој a важи $f(a)\neq a^2$. Од $a+f(m)\,|\,|f(a)-a^2|$ следува

$$f(m)\leq A=|f(a)-a^2|-a\,.$$

Од друга страна, за $m=1$ имаме $n+1\,|\,f(n)+n$, односно $f(n)\equiv1(\bmod n)$, но $f(n)<A+1$, па мора да е $f(n)=1$ за секој $n\geq A$. Конечно, за секој $n>A$ важи

$$n+f(m)\,|\,f(m)(n+f(m))-(f(n)+nf(m))=f(m)^2-1\,,$$

па затоа $f(m)=1$, за секој $m\in\mathbb{N}$, што исто така е решение на задачата.

Според тоа, сите решенија се функциите $f(x)=x^2$ и $f(x)=1$.

18. Дали постои функција $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ која не е полином и таква што за секои $a,b\in\mathbb{Z}$ важи $a-b\,|\,f(a)-f(b)$?

Решение. Индуктивно ќе конструираме функција, која не е полином и ги задоволува условите на задачата.

Нека $f(-1)=-1$, $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Да претпоставиме дека вредностите на функцијата $f(-t), f(-t+1), f(-t+2),..., f(s)$ се определени така што $a-b$ е

делител на $f(a)-f(b)$, за произволни $-t \le a < b \le s$. За произволен прост број $p < s+t+1$ постои $\alpha(p) \in \mathbb{N}$ таков што $0 < p^{\alpha(p)} \le s+t+1 < p^{\alpha(p)+1}$.
Нека x_0 е решение на системот

$$x \equiv f(s+t-p^{\alpha(p)}) (\bmod p^{\alpha(p)}),$$

каде p се менува меѓу сите прости броеви помали или еднакви на $s+t+1$.
Нека

$$f(s+1) = x_0 + ((s+t+1)!)^{s+1}.$$

За секој $b, -t \le b < s,$ ако $s+1-b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, тогаш

$$f(b) = f(s+1-p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}) \equiv f(s+1-p_i^{\alpha(p_i)}) \equiv x_0 \equiv f(s+1) (\bmod p_i^{\alpha_i}).$$

Аналогно дефинираме $f(-t-1)$. Бидејќи $f(s) > s^s$, за секој цел број $s > 2$, вака дефинираната функција не е полином.

19. Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е неконстантна функција таква што $a-b \mid f(a)-f(b)$ за секои $a, b \in \mathbb{N}, a \ne b$. Докажи дека бројот на сите прости делители на броевите од множеството $\{f(1), f(2), f(3), ...\}$ е бесконечен.

Решение. Нека претпоставуваме дека за секој природен број n бројот $f(n)$ има прости делители од конечното множество $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$.

Нека $f(1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, каде α_i, за $i = 1, 2, ..., k$ се ненегативни цели броеви. Нека $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ се природни броеви такви што $\beta_i > \alpha_i$ за $i = 1, 2, ..., k$ и нека $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$. Нека $f(b+1) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k}$. Од условот на задачата следува $b \mid f(b+1) - f(1)$, т.е. $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k} \mid (p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k} - p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}) = A$. Највисокиот степен на p_i за кој $p_i \mid A$ е еднаков на $\min\{\alpha_i, \gamma_i\}$, т.е. $p_i^{\min\{\alpha_i, \gamma_i\}} \mid A$. Од друга страна $p_i^{\beta_i} \mid A$ и $\beta_i > \alpha_i \ge \min\{\alpha_i, \gamma_i\}$ што е противречност. Според тоа, $\alpha_i = \gamma_i$, $i = 1, 2, ..., k$, од каде следува $f(b+1) = f(1)$.
Нека n е природен број таков што $f(n) \ne f(1)$. Имаме

$$b+1-n \mid f(b+1) - f(n), \text{ т.е. } b+1-n \mid f(1) - f(n).$$

Постојат бесконечно многу низи ($\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$) такви што $\beta_i > \alpha_i$ за $i = 1, 2, ..., k$, па затоа постојат бесконечно многу броеви $b+1-n$. Последното значи дека $f(1) - f(n)$ има бесконечно многу делители, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува точноста на тврдењето на задачата.

20. Нека k е даден природен број. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $m^2+f(n^k)\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Очигледно $f(n)=n$ е решение на задачата. Ќе докажеме дека тоа е единствено решение. Од условот следува дека $m^2+f(n^k)\le mf(m)+n^k$, т.е. $m(f(m)-m)\ge f(n^k)-n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Во случајов за $n-1$ добиваме дека $f(m)\ge m$, за секој $m\in\mathbb{N}$. Од друга страна, ако во условот m го замениме со $f(n^k)$, тогаш добиваме дека $f(n^k)\,|\,n^k$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Но, како што веќе докажавме $f(n^k)\ge n^k$, па затоа $f(n^k)=n^k$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, условот го добива видот $m^2+n^k\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$, од каде следува дека

$$m^2+n^k\,|\,(mf(m)+n^k)-(m^2+n^k)=m(f(m)-m),$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Последно е можно ако и само ако $f(m)=m$, за секој $m\in\mathbb{N}$.

21. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества: $\{f(1),f(2),...,f(n),...\},\{g(1),g(2),...,g(n),...\}$ такви што

$$f(1)<f(2)<...<f(n)<...,\ g(1)<g(2)<...<g(n)<...$$

и

$$g(n)=f(f(n))+1,\ \text{за секој } n\ge 1$$

Определи го бројот $f(240)$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $g(n)=f(f(n))+1$ и $f(f(n))$ е член на низата f, постојат точно $n-1$ членови на низата g кои што се помали од $f(f(n))$. Според тоа

$$f(f(n))=f(n)+n-1. \qquad (1)$$

Бидејќи $g(1)=f(f(1))+1>1$ добиваме $f(1)=1$ и $g(1)=f(1)+1=2$. Да забележиме уште дека бројот кој што претходи на членот на низата g мора да припаѓа на низата f, т.е. не може два последователни броја да бидат членови на низата g. Навистина, ако за некој n важи $g(n+1)=g(n)+1$, тогаш според условот на задачата ќе важи

$$f(f(n+1))=f(f(n))+1,$$

па од (1) ќе следува

$$f(f(n))+1=f(n)+n-1 \text{ и } f(f(n+1))=f(n+1)+n,$$

т.е. $f(n)=f(n+1)$, што противречи на условот на задачата .

Од досега изнесеното и од формулата (1) добиваме:

$f(2)=3$,
$f(3)=f(f(2))=f(2)+1=4$,
$f(4)=f(f(3))=f(3)+2=6$,
$f(6)=f(f(4))=f(4)+3=9$,
$f(9)=9+5=14$,
$f(14)=22$,
$f(22)=35$,
$f(35)=56$,
$f(56)=90$,
$f(90)=145$,
$f(145)=234$,
$f(234)=378$.

Понатаму, од $f(35)=56$ следува $91=f(f(35))+1=g(35)$, па според тоа $f(57)=92$. Сега повторно со примена на (1) добиваме:

$$f(92)=148,\quad f(148)=239,\quad f(239)=386.$$

Конечно, $378=f(f(148))+1=g(148)$, па според тоа $f(240)=388$.

Втор начин. Нека M е множеството од сите природни броеви од 1 до $g(n)$, каде што n е произволен природен број. Според условот на задачата бројот $g(n)$ е еднаков на збирот од кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $f(k)$ и кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $g(k)$.

Броевите од обликот $g(k)$ во множеството M очигледно ги има n, а броевите од обликот $f(k)$ ги има $f(n)$, бидејќи најголемиот број од тој облик е $f(f(n))=g(n)-1$. Според тоа, за секој природен број n ќе важи

$$g(n)=f(n)+n.$$

За секој природен број ќе ги определиме вредностите на $f(n)$ и $g(n)$. За таа цел ќе ја користиме следнава теорема.

Теорема (*Бети*). За произволен позитивен ирационален број α и број $\beta>0$ такви што $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, множествата

$$\{[\alpha],[2\alpha],...,[n\alpha],...\} \text{ и } \{[\beta],[2\beta],...,[n\beta],...\}$$

се дисјунктни, а нивната унија е множеството природни броеви $\mathbb{N}$ и

$$[k\alpha]\neq[n\alpha] \text{ и } [k\beta]\neq[n\beta]$$

за различни природни броеви k и n.

Доказ. Го оставаме на читателот за вежба. ■

Според условот на задачата теоремата на Бети асоцира дека $f(n)=[n\alpha]$ и $g(n)=[n\beta]$, за некои α, $\beta>0$. За да ги определиме α и β треба да го решиме системот равенки

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \text{ и } \beta-\alpha=1,\ \alpha,\ \beta>0.$$

Решение на овој систем е $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Забележуваме дека α и β се ирационални броеви. Користејќи ја горната теорема за да докажеме дека $f(n)=[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n]$ и $g(n)=[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n]$ доволно е да докажеме дека

$$[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}n]-[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]=n.$$

Навистина, од својствата на функцијата цел дел следува

$$\begin{aligned}[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}n]-[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]&=[(1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})n]-[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]=[n+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]-[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]\\&=n+[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]-[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n]=n.\end{aligned}$$

22. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција за која важи: За секои $m,n\in\mathbb{N}$ бројот $(m^2+n)^2$ е делив со $f^2(m)+f(n)$. Докажи дека $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. За $m=n=1$ важи $f^2(1)+f(1)\,|\,4$, па затоа $f(1)=1$.

Ќе докажеме дека $f(p-1)=p-1$ за секој прост број p. За $m=1,n=p-1$ добиваме $(f^2(1)+f(p-1))\,|\,(1+p-1)^2$, т.е. $(1+f(p-1))\,|\,p^2$. Според тоа, $1+f(p-1)=p$ или $1+f(p-1)=p^2$. Ако $f(p-1)=p^2-1$, тогаш за $m=p-1$ и $n=1$ добиваме дека важи $(f^2(p-1)+f(1))\,|\,((p-1)^2+1)^2$, од каде следува дека

$$\begin{aligned}&(p^2-1)^2+1\le((p-1)^2+1)^2,\\&p^4+2p^2+2\le((p-1)^2+1)^2.\\&10p^2+2\ge4p^3+8p.\end{aligned}$$

Ќе докажеме дека последното неравенство не е точно. Од неравенството меѓу аритметичкаа и геометриската средина следва

$$\begin{aligned}4p^3+8p&=3p^3+(p^3+4p)+4p\ge3p^3+4p^2+4p\\&=3p\cdot p^2+4p^2+4p\ge3p\cdot p^2+4p^2+4p\\&\ge3\cdot2\cdot p^2+4p^2+4p=10p^2+4p>10p^2+2.\end{aligned}$$

Според тоа, $f(p-1)=p-1.$

Нека $n\in\mathbb{N}$ и $m=p-1$. Тогаш $(f(n)+(p-1)^2)\,|\,((p-1)^2+n)^2$. Имаме:

$$\begin{aligned}((p-1)^2+n)^2 &= (p-1)^4+2n(p-1)^2+n^2\\ &= ((p-1)^2+f(n))^2-2(p-1)^2 f(n)-f^2(n)+2(p-1)^2 n+n^2\\ &= ((p-1)^2+f(n))^2-2(p-1)^2(f(n)-n)-(f(n)-n))(f(n)+n)\\ &= ((p-1)^2+f(n))^2-(f(n)-n))(2(p-1)^2+f(n)+n)\end{aligned}$$

Тоа значи дека $\frac{(f(n)-n)(2(p-1)^2+f(n)+n)}{f(n)+(p-1)^2}$ е цел број за секој прост број p и за секој $n\in\mathbb{N}$. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{(f(n)-n)(2(p-1)^2+f(n)+n)}{f(n)+(p-1)^2} &= \frac{(f(n)-n)(2((p-1)^2+f(n))-(f(n)-n))}{f(n)+(p-1)^2}\\ &= 2(f(n)-n)-\frac{(f(n)-n)^2}{f(n)+(p-1)^2}.\end{aligned}$$

Ако за некој природен број n важи $f(n)\neq n$, тогаш постои постои прост број p таков што важи $0<(f(n)-n)^2<f(n)+(p-1)^2$, па затоа $\frac{(f(n)-n)^2}{f(n)+(p-1)^2}$ не е цел број, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $f(n)-n=0$, т.е. $f(n)=n$.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ со својството

$$f(x-(y))=f(f(x))-f(y)-1 \tag{1}$$

за сите $x,y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Сите функции кои го задоволуваат (1) се $f(x)=-1$ и $f(x)=x+1$. Нека f е функција која го задоволува (1) за секои $x,y\in\mathbb{Z}$. Ставаме $x=0$ и $y=f(0)$ во (1) и за бројот $z=-f(f(0))$ добиваме $f(z)=-1$. Ставаме $y=z$ во (1) и добиваме

$$f(x+1)=f(f(x)) \tag{2}$$

за секој $x\in\mathbb{Z}$. Според тоа (1) го добива обликот

$$f(x+f(y))=f(x+1)-f(y)-1. \tag{3}$$

Понатаму, ќе докажеме дека f е линеарна со тоа што ќе ја разгледуваме разликата $f(x+1)-f(x)$, за секој $x\in\mathbb{Z}$. Заменувајќи во (3) со $y=x$ и имајќи предвид (2), добиваме

$$f(x+1)-f(x)=f(x-f(x))+1=f(f(x-1-f(x)))+1.$$

Од (3) имаме $f(x-1-f(x))=f(x)-f(x)-1=-1$, од каде можеме да запишеме $f(x+1)-f(x)=A$, односно $f(x+1)=f(x)+A$, каде $A=f(-1)+1$.

Со индукција по x, можеме да докажеме дека f е линеарна функција, т.е. $f(x)=Ax+B$, за сите $x\in\mathbb{Z}$, каде $B=f(0)$. Заменувајќи го ова во (2) добиваме дека

$$Ax+(A+B)=A^2x+(AB+B),$$

важи за сите $x\in\mathbb{Z}$, каде $B=f(0)$. Ставаме $x=0$ и $x=1$, и добиваме

$$A+B=AB+B \text{ и } A^2=A.$$

Од втората равенка добиваме дека $A=0$ и $A=1$. Кога $A=1$, од првата равенка имаме $B=1$, односно $f(x)=x+1$. Ако $A=0$, тогаш f е константна, па од (1) добиваме $f(x)=-1$. Со ова ги најдовме сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ што го задоволуваат (8).

24. За секој природен број n со $f(n)$ да го означиме бројот на различните можни избори на знаците $+$ и $-$ за кои важи $\pm1\pm2\pm...\pm n=0$. Докажи дека

а) $f(n)=0$, за $n\equiv1,2(\bmod 4)$

б) $f(n)\ge 2^{\frac{n}{2}-1}$, за $n\equiv0,3(\bmod 4)$.

Решение. Нека $n\ge2$. Од секој распоред на знаците за n со додавање на $\pm(n+1)\mp(n+2)\mp(n+3)\pm(n+4)$ може да се направат два за $n+4$. Уште еден се добива со замена на знакот пред 1 и додавање или одземање на

$$(n+1)-(n+2)+(n+3)-(n+4)=-2.$$

Потоа, уште еден распоред се добива со замена на знакот пред 2 и додавање или одземање на

$$(n+1)+(n+2)-(n+3)-(n+4)=-4.$$

Според тоа, $f(n+4)\ge4f(n)$. Сега тврдењето следува од претходно изнесеното и фактот дека $f(1)=f(2)=0$ и $f(3)=f(4)=2$.

30. ТЕОРЕМИ НА ЧЕБИШЕВ И ДИРИХЛЕ

1. Нека $n>10$ е природен број. Докажи, дека во каноничното разложување на $n!$ учествуваат барем два прости броја со степен 1.

   Решение. Во каноничното разложување на $11!$ простите броеви 7 и 11 учествуваат со степен 1. Затоа ќе претпоставиме дека $n>11$. Сега, ако $n=2k+r$, $r=0$ или 1, тогаш $k>5$ и согласно теоремата на Чебишев постојат барем два прости броја p и q такви што $k<p<q<2k$. Имаме $k+1\le p<q<n$ и $n<2p<2q$, па затоа во каноничното разложување на бројот $n!$ секој од броевите p и q е со степен 1.

2. Докажи, дека за секој природен број $n>4$ меѓу броевите n и $2n$ има најмалку еден број кој е производ на два различни прости броја.

   Решение. Нека $n=2k$, каде $k>2$. Согласно теоремата на Чебишев постои прост број p, за кој важи $k<p<2k$. Но, $p>k>2$, па затоа p е непарен прост број. Тогаш
$$n=2k<2p<4k=2n,$$
   па затоа бројот $2p$ го задоволува условот на задачата. Нека $n=2k+1, k\ge 2$. Повторно од теоремата на Чебишев следува дека постои прост број p, за кој важи $k<p<2k$. Но, $p>k\ge 2$, па затоа p е непарен прост број. Тогаш
$$n=2k+1<2k+2\le 2p<4k<4k+2=2n,$$
   па затоа бројот $2p$ го задоволува условот на задачата.

3. Ако $n>1$ и p_n е $n-$тиот прост број, тогаш $p_n<2^n$. Докажи!

   Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Од $p_2=3<2^2$ следува дека тврдењето важи за $n=2$.

   Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека $p_k<2^k$.

   За $n=k+1$ имаме $p_k<p_{k+1}$. Ако $p_{k+1}<2^k$, тогаш е јасно дека $p_{k+1}<2^{k+1}$. Нека $2^k<p_{k+1}$ и да ги разгледаме броевите $m=2^k$ и $2m=2^{k+1}$. Од теоремата на Чебишев следува дека меѓу броевите $m=2^k$ и $2m=2^{k+1}$ има нај-

малку два прости броја q и r. Но, $p_k < 2^k$ и $2^k < p_{k+1}$, па затоа p_{k+1} и p_{k+2} се меѓу m и $2m$, т.е. $p_{k+1} < 2m = 2^{k+1}$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $p_n < 2^n$, за секој $n > 1$.

4. Докажи, дека за секој природен број $n > 15$ меѓу броевите n и $2n$ постои најмалку еден природен број, кој е производ на три различни прости броеви.

Решение. За $n = 16, 17, 18, ..., 29$ имаме $n < 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 < 2n$. Нека $n \geq 30$. Тогаш $n = 6k + r$, каде $k \geq 5$ и $0 \leq r \leq 5$. Од теоремата на Чебишев следува дека постои прост број $p > 5$ таков да $k < p < 2k$. Според тоа, $k + 1 \leq p < 2k$, па затоа

$$n = 6k + r < 6(k+1) \leq 2 \cdot 3p < 12k \leq 2n$$

и бројот $2 \cdot 3p$ го задоволува условот на задачата.

5. Докажи, дека за секои природни броеви n и s, $n > p_1 p_2 ... p_s$, меѓу броевите n и $2n$ постои најмалку еден природен број кој е производ на s различни прости множители (p_k е $k-$тиот прост број).

Решение. Нека $n = kp_1 p_2 ... p_{s-1} + r$, каде r е остатокот од делењето на n со $p_1 p_2 ... p_{s-1}$. Од $n > p_1 p_2 ... p_s$, следува

$$k \geq p_s \text{ и } 0 \leq r < p_1 p_2 ... p_{s-1}.$$

Сега, од теоремата на Чебишев следува дека постои прост број p таков, да $k < p < 2k$. Точни се неравенствата

$$p > p_s, \; k + 1 \leq p < 2k$$

и

$$\begin{aligned} n &= kp_1 p_2 ... p_{s-1} + r \\ &< p_1 p_2 ... p_{s-1}(k+1) \\ &\leq p_1 p_2 ... p_{s-1} p \\ &< 2 p_1 p_2 ... p_{s-1} k \leq n \end{aligned}$$

па затоа бројот $p_1 p_2 ... p_{s-1} p$ го задоволува условот на задачата.

6. Определи ги сите природни броеви n со својство: ако природниот број m, $1 < m < n$ е заемно прост со n, тогаш тој е прост.

Решение. За секој прост број p бројот p^2 е сложен. Затоа, ако за бројот $n \in \mathbb{N}$ со својството од формулацијата на задачата важи $p^2 < n$, тогаш n и p^2 не смее да се заемно прости, т.е. $p \mid n$. Со други зборови, ако $p \nmid n$, тогаш $n < p^2$.

Нека $p_1 = 2, p_2, p_3, \ldots$ е низата прости броеви. Ако $q = p_{k+1}$ е најмалиот прост број кој не е делител на природниот број n, тогаш од претходните разгледувања следува дека $n < q^2$. Од друга страна броевите $p_1, \ldots, p_k$ се делители на n, па затоа $p_1 \ldots p_k \mid n$ и $n \geq p_1 \ldots p_k$. Според тоа, важи неравенството

$$p_1 \ldots p_k \leq p_{k+1}^2. \qquad (1)$$

Но, од постулатот на Бертран следува $p_{k+1} < 2p_k < 4p_{k-1}$ (претпоставуваме дека $k \geq 2$, додека случаите $k \in \{0,1\}$ ќе ги разгледаме дополнително). Оттука $p_{k+1}^2 \leq 8p_{k-1}p_k$, па од (1) следува $p_1 \ldots p_{k-2} \leq 8$, т.е. $k \leq 4$, (имено $2 \cdot 3 = 6 < 8$ и $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 8$). Значи, треба да ги разгледаме случаите $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

За $k = 0$ имаме $q = p_1 = 2$, па е $n < 4$ и $2 \nmid n$, односно $n \in \{1,3\}$ и лесно се проверува дека тоа се решенија на задачата.

За $k = 1$ имаме $q = 3$, па е $n < 9$ и $2 \mid n$, $3 \nmid n$, од каде лесно следува дека $n \in \{2,4,8\}$ и лесно се проверува дека тоа се решенија на задачата.

За $k = 2$ имаме $q = 5$, па е $n < 25$ и $6 \mid n$, $5 \nmid n$, од каде лесно следува дека $n \in \{6,12,18,24\}$ и лесно се проверува дека тоа се решенија на задачата.

За $k = 3$ имаме $q = 7$, па е $n < 49$ и $30 \mid n$, $7 \nmid n$, од каде лесно следува дека $n \in \{30\}$ и лесно се проверува дека тоа е решение на задачата.

За $k = 4$ имаме $q = 11$, па е $n < 121$ и $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \mid n$, што не е можно.

Конечно, множеството решенија на задачата е:

$$\{1,2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$$

7. За простите броеви p и q, $p > q$ ќе велиме дека се прости броеви близнаци ако $p = q + 2$. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не припаѓаат на паровите прости броеви близнаци.

Решение. Согласно теоремата на Дирихле во аритметичката прогресија $15k + 7$, $k = 1,2,\ldots$ се содржат бесконечно многу прости броеви. Ниту еден од овие броеви не припаѓа на ниту еден пар прости броеви близнаци, бидејќи

$$(15k+7)+2 = 3(5k+3) \text{ и } (15k+7)-2 = 5(3k+1)$$

се сложени броеви.

8. Докажи, дека за секој природен број m постои прост број, во чиј декаден запис има најмалку m нули.

Решение. Нека m е даден природен број. Бидејки $(10^{m+1},1)=1$ од теоремата на Дирихле следува, дека постои природен број k, таков што $p=10^{m+1}k+1$ е прост број. Последните $m+1$ цифра на бројот 10^{m+1} се нули, па затоа во декадниот запис на бројот бројот p има најмалку m нули.

9. Докажи дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ со целиобројни коефициенти, таков што $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)$ при што сите овие вредности се прости броеви.

Решение. Нека n е даден природен број. За $k\le n$ индуктивно ќе определиме природни броеви t_k на следниов начин.

Нека $t_0=1$. Да претпоставиме дека за даден $k\le n$ е определен бројот t_{k-1}. Според теоремата на Дирихле постои природен број t_k таков што бројот

$$q_k=(k-1)!(n-k)!t_k+1$$

е прост и кога $k>1$ тој е поголем од бројот

$$(k-2)!(n-k+1)!t_{k-1}+1.$$

Така, броевите $q_1,q_2,\ldots,q_n$ се прости и притоа важи $q_1<q_2<\ldots<q_n$. Нека

$$f(x)=1+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\,\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{x-j}\ .$$

Јасно, $f(x)$ е полином со степен помал или еднаков на $n-1$ со цели коефициенти и

$$f(k)=1+(k-1)!(n-k)!t_k=q_k.$$

10. Докажи дека за секој природен број n постои прост број p таков што секој од броевите $p-1$ и $p+1$ има повеќе од n различни природни делители.

Решение. Нека n е даден природен број. Согласно теоремата на Дирихле во аритметичката прогресија $6^n k+2\cdot 3^{2^{n-1}}-1$, каде $k\in\mathbb{N}$ постојат прости броеви. Оттука бидејќи $2^{n-1}\ge n$, за $n\in\mathbb{N}$ добиваме дека $3^n\,|\,6^n k+2\cdot 3^{2^{n-1}}=p+1$ и бројот $p+1$ има повеќе од n различни природни делители, на пример $1,3,3^2,\ldots,3^n$. Согласно со теоремата на Ојлер имаме $3^{\varphi(2^n)}\equiv 1(\operatorname{mod} 2^n)$, па е $2^n\,|\,3^{2^{n-1}}-1$, што значи $2^n\,|\,6^n k+2\cdot 3^{2^{n-1}}-2=p-1$ и бројот $p-1$ има најмалку n различни природни делители, на пример броевите $1,2,2^2,\ldots 2^n$.

11. Докажи, за секој природен број n постојат прост број p и природен број m,

такви што

1) $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$,

2) p не е делител на n,

3) $n \equiv m^3 (\mathrm{mod}\, p)$.

Решение. Од теоремата на Дирихле следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $6k+5$. Да избереме прост број $p = 6k+5$ кој е поголем од n. Јасно, бројот p ги задоволува условите 1) и 2). За $m = n^{4k+3}$ од малата теорема на Ферма следува

$$m^3 \equiv n^{12k+9} \equiv n^{6k+4} n^{6k+4} n \equiv n^{p-1} n^{p-1} n \equiv n (\mathrm{mod}\, p).$$

12. Докажи, дека за секој природен број n постои прост број p таков, што секој од броевите $p-1, p+1, p+2$ има најмалку n различни прости делители.

Решение. Нека n е даден природен број, а p_i е $i-$тиот прост број. Од кинеската теорема за остатоци следува дека постои природен број b, таков што

$$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_1 p_2 \cdots p_n),$$
$$b \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n}),$$
$$b \equiv -2 (\mathrm{mod}\, p_{2n+1} p_{2n+2} \cdots p_{3n}).$$

Бидејќи $(b, p_1 p_2 \ldots p_{3n}) = 1$ од теоремата на Дирихле следува дека постои природен број k таков што

$$p = p_1 p_2 \cdots p_{3n} k + b$$

е прост број. Во овој случај $p_i \mid (b-1)$, за $i = 1, 2, ..., n$ и $p_i \mid (b+1)$, за $i = n+1, n+2, ..., 2n$, што значи $p_i \mid (p-1)$, за $i = 1, 2, ..., n$ и $p_i \mid (p+1)$, за $i = n+1, n+2, ..., 2n$. Аналогно $p_i \mid (b+2)$, за $i = 2n+1, ..., 3n$, па затоа $p_i \mid (p+2)$, за $i = 2n+1, 2n+2, ..., 3n$.

Конечно, секој од броевите $p-1, p+1, p+2$ има најмалку n различни прости делители.

13. Даден е природен број n поголем од 2. Нека V_n е множество броеви од облик $1+kn$, $k \in \mathbb{N}$. За бројот $m \in V_n$ велиме дека е неразложлив во V_n ако не постојат броеви $p, q \in V_n$, такви што $m = pq$.

Докажи дека постои број $r \in V_n$ кој на повеќе од еден начин, може да се претстави како производ неразложливи множители во V_n. (Разложувањата кои се разликуваат само во редоследот на множителите во V_n ги сметаме за еднакви).

Решение. *Прв начин*. Нека за секој $n > 2$ важи

$$(n-1)^2, (2n-1)^2,\ (n-1)(2n-1) \in V_n.$$

Ставаме

$$r = (n-1)^2 (2n-1)^2.$$

Тогаш, $r \in V_n$. Броевите $(n-1)^2$ и $(2n-1)^2$ не може да се разложат во V_n. Во спротивно,

$$(n-1)^2 = pq \geq (n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2 = pq = (n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2 = (n+1)(2n+1),$$

што не е можно. Го претставуваме бројот r на друг начин како производ на два броја од V_n:

$$r = [(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)].$$

Доволно е да забележиме дека $(n-1)^2$ не е делител на $(n-1)(2n-1)$. Затоа оваа факторизација на бројот r е различна од претходната.

Втор начин. Нека p е било кој прост делител на бројот $n-1$. Тогаш p не е делител на n и $p \neq 1$. Нека s е најмалиот природен број за кој

$$p^s \equiv 1 \,(\bmod n),$$

(според теоремата на Ојлер $s \leq \varphi(n)$) и тогаш $p^s \in V_n$. Единствени делители на бројот p^s, поголеми од 1 и помали од p^s, се од облик p^k, $0 < k < s$. Ниту еден од тие броеви не припаѓа на множеството V_n и затоа p^s не е разложлив во V_n. Нека

$$r = p^s[(p^{s-1} + n)(p + n)].$$

Значи, $r \in V_n$ и ова е едно од претставувањата на тој број во облик на производ на неразложливи броеви p^s и $(p^{s-1}+n)(p+n)$ од V_n. Сега ќе го запишеме бројот r како друг произод на неразложливи броеви од V_n. Еден од множителите во горниот запис е делив со p^s. Меѓутоа во претставувањето

$$r = (p^s + np)(p^s + np^{s-1}),$$

двата множители се од V_n и се неразложливи, и ниту еден од нив не е делив со p^s.

Трет начин. Ќе ја користиме теоремата на Дирихле: Ако $(a,b) = 1$, тогаш постојат бесконечно многу прости броеви од видот $ak + b,\ k \in \mathbb{N}$.

Од теоремата на Дирихле следува дека прости броеви од видот $nk-1$ има бесконечно многу. Производот на било кои два броја од множеството $U_n=\{nk-1 \mid k\in\mathbb{N}\}$ припаѓа на множеството $V_n=\{nk+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$, бидејќи

$$(nk_1-1)(nk_2-1)=n(nk_1k_2-k_1-k_2)+1.$$

Ако $p_1=nk_1-1$ и $p_2=nk_2-1$ се два прости броја од множеството U_n, тогаш бројот $p_1p_2\in V_n$ и е неразложлив во V_n. Според тоа, и квадратот на секој прост број од U_n припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Да го разгледаме бројот $r=(p_1p_2)^2$. Овој број може да се претстави на два начина

$$r=(p_1p_2)(p_1p_2) \text{ и } r=p_1^2p_2^2.$$

Броевите p_1^2 и p_2^2 припаѓаат на множеството V_n и се неразложливи во V_n, а исто така и бројот p_1p_2 припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Според тоа, бројот $r=p_1^2p_2^2$, каде p_1 и p_2 се прости броеви од видот $nk-1$ се разложува на два различни начини како производ од неразложливи броеви во V_n

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
2. Bingulac, S., Matić, I.: Kineski teorem o ostatcima za polinome, Osječki matematički list, 12, 2012
3. Burazin, K.: Nelinearne diofantske jednadžbe, Osječki matematički list, 7, 2007
4. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
5. Cassels, J. W. S.: An Introduction to Diophantine Approximation, Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
6. Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 (Second Edition), Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
7. Dolinka, I.: Teorija brojeva: moji omiljeni zadaci, DMS, Beograd, 2007
8. Dujella, A., Bombardelli, M., Slijepčević, S.: Matematička natjecanja učenika srednjih škola, Element, Zagreb, 1997
9. Duverney, D.: Number Theory: An Elementary Introduction Through Diophantine Problems, World Scientific, 2010
10. Gallot, Y.: Cyclotomic Polynomials and Prime Numbers, http://perso.orange.fr/yves.gallot/papers/cyclotomic.pdf
11. Ge, Y.: Elementary Properties of Cyclotomic Polynomials, http://www.yimin-ge.com/doc/cyclotomic polynomials.pdf
12. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
13. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
14. Hensley, D.: Continued Fractions, World Scientific, Singapore, 2006
15. Hong - Bing, Y.: Problems od Number Theory in Mathematical Competitions (Mathematical Olympiad Series), World Scientific Publishing Company, 2009
16. Ilišević, I.: Wilsonov teorem, Osječki matematički list, 4, 2004
17. Khinchin, A. Y.: Continued Fractions, Dover, New York, 1997
18. Khintchie, A. Y.: Continued Fractions, Noordhoff, Groningen, 1963
19. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
20. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
21. Lang, S.: Introduction to Diophantine Approximations, Springer-Verlag, New York, 1995
22. Lehman, R. S.: Factoring Large Integers, Math. Com. 28 (1974), 637-646
23. Loo, A.: Zsigmondys Theorem, Mathematical excalibur, Vol. 16, No. 4, 2012

24. Malčeski, A., Manova - Erakovic, V., Malčeski, R. and all. Mathematical Olympiads 2015, SMM, Skopje, 2015
25. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R., Brsakovska, S., Dimovski, P., Dimovski, T., Andova, V., Treneski, D.: Mathematical Olympiads 2017, SMM, Skopje, 2017
26. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R., Brsakovska, S., Dimovski, P., Dimovski, T., Andova, V., Treneski, D. Filiposki, P.: Mathematical Olympiads 2018, SMM, Skopje, 2018
27. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R., Dimovski, P., Dimovski, T. and all: Mathematical Olympiads 2016, SMM, Skopje, 2016
28. Mandić, I., Soldo, I.: Pellova jednadžba, Osječki matematički list, 8, 2008
29. Matić, I.: Uvod u teoriji brojeva, Osijek, 2014
30. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
31. Neville, R.: Beginning Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
32. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
33. Niven, I.: Diophantine Approximations, John Wiley & Sons, New York, 1963.
34. Santos, D. A.: Number Theory for Mathematical Contests, http://docplayer.net/217662-Number-theory-for-mathematical-contests-david-asantos-dsantos-ccp-edu.html
35. Schmidt, W. M.: Diophantine Approximation and Diophantine Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1996
36. Schmidt, W. M.: Diophantine Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1996
37. Shortlisted Problems with Solutions, 47th International Mathematical Olympiad, Slovenia, 2006
38. Shortlisted Problems with Solutions, 48th International Mathematical Olympiad, Vietnam, 2007
39. Shortlisted Problems with Solutions, 49th International Mathematical Olympiad, Spain, 2008
40. Shortlisted Problems with Solutions, 50th International Mathematical Olympiad, Germany, 2009
41. Shortlisted Problems with Solutions, 51th International Mathematical Olympiad, Kazakhstan, 2010
42. Shortlisted Problems with Solutions, 52th International Mathematical Olympiad, Netherlands, 2011
43. Shortlisted Problems with Solutions, 53th International Mathematical Olympiad, Argentina, 2012
44. Shortlisted Problems with Solutions, 54th International Mathematical Olympiad, Colombia, 2013
45. Shortlisted Problems with Solutions, 55th International Mathematical Olympiad, South Africa, 2014

46. Shortlisted Problems with Solutions, 56th International Mathematical Olympiad, Thailand, 2015
47. Shortlisted Problems with Solutions, 57th International Mathematical Olympiad, Hong Kong, 2016
48. Shortlisted Problems with Solutions, 58th International Mathematical Olympiad, Brazil, 2017
49. Shortlisted Problems with Solutions, 59th International Mathematical Olympiad, Romania, 2018
50. Shortlisted Problems with Solutions, 60th International Mathematical Olympiad, United Kingdom, 2019
51. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
52. Sitaramachandrarao, R., Suryanarayana, D.: On $\sum_{n\leq x}\sigma^*(n)$ and $\sum_{n\leq x}\varphi^*(n)$, Proc. Of the Amer. Math. Soc., Vol. 41, 1973
53. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
54. Sun, L.: Cyclotomic Polynomials in Olympiad Number Theory, http://lessol.w.staszic.waw.pl/pdfy/h.pdf
55. Tafro, A.: Kongruencije, Playmath, 1, 2003
56. Thompson, L.: Zsigmondy's Theorem, 2009, www.artofproblemsolving.com/Forum/download/file.php?id=25872
57. Tonov, I., Bankov, K., Vitanov, T., Rakovska, D.: Bulgarian Mathematics Competitions, Selected Problems, Regalia, Sofia, 2001
58. Vandendriessche, P., Lee, H.: Problems in elementary number theory, http://www.problem-solving.be/pen/published/pen-20070711.pdf
59. Varošanec, S.: Diofantske jednadžbe, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/diofant.pdf
60. Velinov, D., Atanasova, S., Brsakoska, S., Malcheski, A., Malcheski, R., Malcheski, S. Dimovski, P., Dimovski, T., Andova, V., Treneski, D., Filiposki, P.,: Mathematical Olympiads 2019, SMM, Skopje, 2019
61. Williams, H. C.: A $p+1$ Method of Factoring, Nordisk Tidskrift for Informationbehandling (BIT) 15, 1975
62. Xiong Bin, Lee Peng Yee: Mathematical Olympiad in China (Problem and Solutions), East China Normal University Press & World Scientific, 2007
63. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
64. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
65. Ашић, М., Божић, М., Чукић, Љ., Јанковић, В., Каделбург, З., Мићић, В., Милин, Л., Вукмировић: Међународне математичке олимпијаде, ДМС, Београд, 1986
66. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018

67. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
68. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
69. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
70. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2006-2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
71. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
72. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Български математически състезания 2016-2020, УНИМАТ СМБ, София, 2020
73. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
74. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
75. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
76. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
77. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
78. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
79. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
80. Бухштаб, А. А.: Теория чисел, Москва, 1966
81. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
82. Вудуров, С.: Математически олимпиади, Народна просвета, София, 1972
83. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
84. Давыдов, У. С:. Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
85. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
86. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б:. Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
87. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
88. Драговић, В., Дугошија, Ђ., Младеновић, П.: Републичка и савезна такмичења из математике 1990-2001, ДМС, Београд, 2002

89. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
90. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
91. Ђукић, Д.: Апроксимације ирационалних бројева рационалним, Београд, 2015
92. Ђукић, Д.: Пелова једначина, Београд, 2015
93. Јанковић, В., Каделбург, З., Младеновић, П.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС; Београд, 1996
94. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
95. Каделбург, З., Младеновић, П.: Савезна такмичења из математике, ДМС, Београд, 1990
96. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
97. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
98. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
99. Малешевић, Б.: Рационалне апроксимације реалних бројева и неке примене, Настава математике XLIII, 3, 1998
100. Малчески, А., Малчески, Р.: Функционални равенки во множествата природни и цели броеви, Армаганка, Скопје, 2021
101. Малчески, А., Малчески, Р., Аневска, К., Малчески, С., Треневски, Д.: Репетиториј по елементарна математика – четврт дел, Армаганка, Скопје, 2020
102. Малчески, А., Малчески, Р., Главче, М., Малчески, С., Треневски, Д.: Репетиториј по елементарна математика – трет дел, Армаганка, Скопје, 2020
103. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р. (2011). Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје
104. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
105. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (конкурсни задачи 1-144), СММ, Скопје, 2012
106. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
107. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
108. Малчески, Р., Ибраими, А., Малчески, А.: Математички талент С10 (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование), Армаганка, Скопје, 2020

109. Малчески, Р., Ибраими, А., Малчески, А.: Математички талент C9 (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование), Армаганка, Скопје, 2020
110. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (трето издание), Армаганка, Скопје, 2020
111. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), Армаганка, Скопје, 2020
112. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Главче, М., Треневски, Д.: Репетиториј по елементарна математика – прв дел, Армаганка, Скопје, 2019
113. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Главче, М., Треневски, Д.: Репетиториј по елементарна математика – втор дел, Армаганка, Скопје, 2019
114. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
115. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т.: Математички талент C8 (збирка задачи за IV година, втор дел), Армаганка, Скопје , 2019
116. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C1 (збирка задачи за I година, прв дел), Армаганка, Скопје , 2019
117. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C3 (збирка задачи за II година, прв дел), Армаганка, Скопје , 2019
118. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С.: Математички талент C5 (збирка задачи за III година, прв дел), Армаганка, Скопје , 2019
119. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Балкански математички олимпијади 1984-2020, Армаганка, Скопје, 2021
120. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Маѓународни математички олимпијади 1959-2019, Армаганка, Скопје, 2021
121. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
122. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
123. Малчески, Р., Малчески, С.: Диофантови апроксимации, Математика, София, 2021
124. Малчески, Р., Малчески, С.: Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
125. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
126. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
127. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002

128. Малчески, Р.: Математички талент C12 – збирка задачи: идентитети, неравенства, низи, полиноми и функции, Скопје, 2021
129. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
130. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа (трето издание), Армаганка, Скопје, 2019
131. Малчески, Р.: Теорема на Луивил, Скопје, 2020,
132. Малчески, Р.: Теорија на броеви, Скопје
133. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, Скопје, 2015
134. Малчески, С.: Математички талент 26 – збирка задачи по елементарна теорија на броеви, Скопје, 2021
135. Марчевский, М. Н.: Теория чисел, Издательство Харьковского Университета, Харьков, 1958
136. Мићић, В., Каделбург, З.: Увод у теорији бројева, ДМС, Београд, 2001
137. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
138. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
139. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
140. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
141. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
142. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
143. Тошић, Р., Вукосавчевић, В.: Елементи теорије бројева, Алеф, Нови сад, 1995
144. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
145. Трост, Э.: Простые числа, Гусадарственное издатечьство физико-математической литературы, Моска, 1959
146. Филиповски, С.: 200 –теорија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
147. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
148. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
149. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на една класа Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
150. Чупона, Ѓ., Трпеновски, Б.: Алгебра, Просветно дело, Скопје
151. Шидловский, А. Б.: Диофантовы приближения и трансцедентные числа, Изд. Московского универзитета, Москва, 1982
152. Шнилерман, Л. Г.: Простые числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940