Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1968

1.(III,68). Стрелките на часовникот покажуваат точно 9 часот. По колку време големата стрелка ќе ја стигне малата?

Решение. Прво да уочиме дека бројникот на часовникот е поделен на 60 еднакви делчиња и дека големата стрелка поминува едно делче за една минута, а малата исто такво делче поминува за 12 минути, т.е. изминатите "патишта" за исто време се однесуваат како 12:1.

Да го означиме со x "патот" што ќе го измине големата стрелка до моментот на поклопувањето со малата стрелка. За тоа време, малата стрелка ќе измине x–45 поделци, па, значи:

$$x : (x-45) = 12:1,$$

од каде што добиваме

$$x = 12(x-45), \text{ т.е. } x = 49\frac{1}{11}.$$

Значи, големата стрелка ќе ја стигне малата откако ќе помине $49\frac{1}{11}$ делчиња, т.е. по $49\frac{1}{11}$ минути.

2.(III,68). Дадена е равенката

$$kx^2 - (2k+1)x + k = 0, \qquad (1)$$

каде што k е цел број различен од нула. За кои вредности на k:

а) корените на равенката (1) се рационални броеви?

б) барем еден од корените на равенката (1) е цел број?

Решение. а) За корените на равенката (1) да бидат рационални броеви потребно е дискриминантата $D=(2k+1)^2-4k^2=4k+1$ да биде полн квадрат, т.е. k да е решение на равенката

$$4k+1=a^2, \qquad (2)$$

каде што a е цел број. Јасно е дека a мора да биде непарен број, т.е. $a=2c+1$, па од (2) добиваме $k=c(c+1)$, при што (поради $k\neq 0$), $c=1,\pm2,\pm3,\ldots$

Обратно, ако $k=c(c+1)$ ќе имаме:

$$4k+1=4c(c+1)+1=(2c+1)^2.$$

Значи, корените на равенката (1) се рационални броеви ако и само ако $k=c(c+1)$, каде што c е цел број различен од 0 и -1.

б) Барем еден од корените на равенката (1) да биде цел број, корените мора да бидат рационални броеви. Значи, мора да биде $k=$ $=c(c+1)$, $c=1,\pm2,\pm3,\ldots$. Во овој случај корените на равенката (1) се:

$$x_1=\frac{c}{c+1}, \qquad x_2=\frac{c+1}{c}. \qquad (3)$$

За $c=-2$ или $c=1$, т.е. за $k=2$ корените на равенката (1) се 2 и $\frac{1}{2}$. Ако $c\neq-2$ и $c\neq1$, тогаш ниеден од броевите (3) не е цел број, зашто броевите c и $c+1$ се заемно прости.

Следствено, барем еден од корените на равенката (1) е цел број ако и само ако $k=2$.

3.(III,68). Дадена е правилна тристрана пирамида со основен раб a. Рамнината што минува низ центарот на основата и е паралелна со два разминувачки раба на пирамидата, ја сече пирамидата во еден четириаголник.

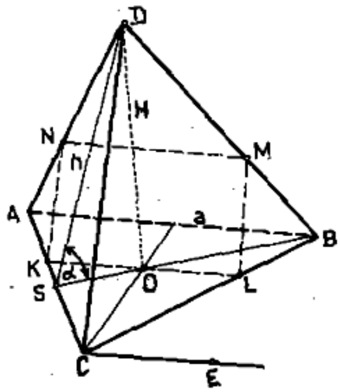
а) Да се докаже дека тој четириаголник е правоаголник.

б) Да се определи плоштината на правоаголникот во зависност од наклонетиот агол α на бочната страна кон основата на пирамидата.

в) Да се определи аголот α така што квадратите на страните на добиениот правоаголник да се однесуваат како 144:13.

Во тој случај да се најде волуменот на пирамидата.

Решение. а) Јасно е дека четириаголникот $KLMN$ е паралелограм (црт.1.68). Низ точката C да повлечеме права CE паралелна



Црт.1.68

со AB. Тогаш имаме $CE \perp CO$ и $CO \perp DO$, од каде што добиваме $CE \perp DO$. Значи, правата CE е нормална на рамнината што минува низ точките O, C и D, од што следува дека $CE \perp DC$. На крајот имаме:

$$\measuredangle NKL = \measuredangle DCE = 90^\circ,$$

т.е. паралелограмот $KLMN$ е правоаголник.

б) За плоштината P на правоаголникот $KLMN$ имаме $P = \overline{KL} \cdot \overline{KN}$. Јасно е дека $\overline{KL} = \frac{2}{3}\overline{AB} = \frac{2}{3}a$. Понатаму, поради сличноста на триаголниците AKN и ACD, добиваме:

$$\overline{KN}^2 = \frac{1}{9}\overline{DC}^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}a^2 + h^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{\overline{OS}^2}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{12\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{108\cos^2\alpha}\left(1 + 3\cos^2\alpha\right).$$

Значи, добиваме:

$$P = \overline{KL}\cdot\overline{KN} = \frac{a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\ .$$

в) Од $\overline{KL}^2 : \overline{KN}^2 = 144 : 13$ добиваме:

$$13\cos^2\alpha = 3 + 9\cos^2\alpha\ , \text{ т.е.}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{3}{5}\ .$$

За волуменот на пирамидата имаме:

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\overline{OS}\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\,\alpha =$$
$$= \frac{a^3}{24}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^3}{24}\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{a^3}{12\sqrt{6}}\ .$$

<u>4.(III.68)</u>. Меѓу аглите α и β во еден триаголник постои релацијата

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}\ . \qquad (1)$$

Да се докаже дека триаголникот е рамностран.

<u>Решение</u>. Имаме:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -1 + 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\ .$$

Користејќи ги овие равенства, од (1) добиваме:

$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 = 0.$$

Ако во ова равенство ставиме

$$1 = \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$

добиваме:

$$\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

т.е.

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Збирот од квадратите на два броја е нула ако и само ако и двата броја се нула, па, значи, имаме:

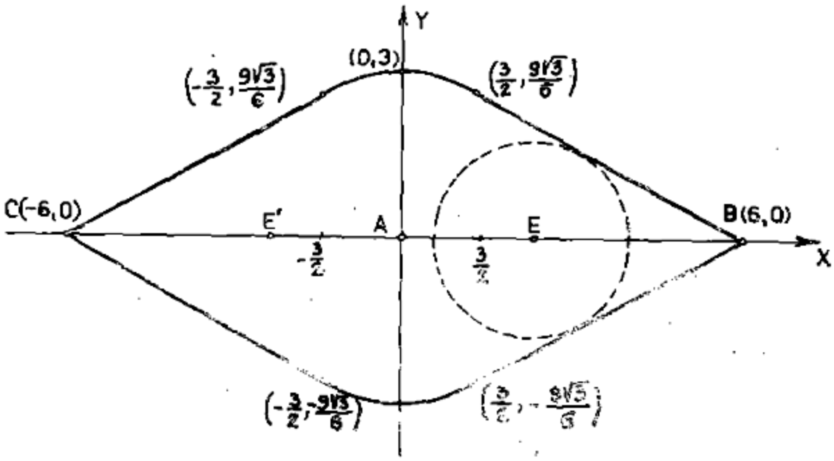
$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0,\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Од првото равенство, имајќи предвид дека α и β се агли на триаголник, добиваме $\alpha=\beta$, а ставајќи $\alpha=\beta$ во второто, добиваме $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, т.е. $\alpha=60^0$. Од тоа следува дека триаголникот е рамностран.

1.(IV,68). Еден човек се наоѓа во точката A на некој прав пат. Ако оди по патот тој може да помине најмногу 6км за еден саат. Ако слезе од патот и оди по полето, тогаш може да помине најмногу 3км за еден саат.

Да се определи геометриското место на точките до кои може да стигне човекот за време од еден саат.

Решение. Да го претставиме патот со правата p и да избереме правоаголен координатен систем со почеток во точката A и x-оска правата p (црт.2.68).



Црт.2.68

Ако во точката А слезе од патот и оди само по полето, тогаш тој може да стигне до која било точка од кругот

$$x^2 + y^2 \leqslant 9. \qquad (1)$$

Нека, сега, помине по патот x_0 километри, а потоа нека слезе од патот и нека оди само по патот. Точката Е ќе има координати $(\pm x_0, 0)$, па човекот, во тој случај, ќе стигне до сите точки од круговите:

$$(x - x_0)^2 + y^2 \leqslant (3 - \frac{x_0}{2})^2, \qquad (2)$$

$$(x + x_0)^2 + y^2 \leqslant (3 - \frac{x_0}{2})^2. \qquad (3)$$

Равенката на една од тангентите, повлечени од точката $B(6,0)$, на кружницата $x^2 + y^2 = 9$ е

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 6). \qquad (4)$$

Да ги најдеме пресечните точки на правата (4) и кружницата

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (3 - \frac{x_0}{2})^2. \qquad (5)$$

Имаме:

$$\frac{4}{3}x^2 - 2(x_0 + 2)x + 3 + 3x_0 + \frac{3}{4}x_0^2 = 0,$$

при што

$$D = (x_0 + 2)^2 - \frac{4}{3}(3 + 3x_0 + \frac{3}{4}x_0^2) =$$

$$= (x_0^2 + 4x_0 + 4) - (4 + 4x_0 + x_0^2) = 0.$$

Значи, правата (4) е тангента и на кружницата (5). Од ова следува дека точката B е центар на сличност на сите кружници со равенка (5) при што $0 \leqslant x_0 \leqslant 6$. Слично добиваме дека точката C е центар на сличност на сите кружници

$$(x + x_0)^2 + y^2 = (3 - \frac{x_0}{2})^2,$$

каде што $-6 \leqslant x_0 \leqslant 0$.

Од сето тоа следува дека бараното геометриско место на точки е множеството:

$$M = \{ (x,y) \mid -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2},\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \} \cup$$
$$\cup \{ (x,y) \mid -6 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3}(x+6) \leqslant y \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+6) \} \cup$$
$$\cup \{ (x,y) \mid \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 6,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6) \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}(x-6) \},$$

т.е. множеството точки од рамнината заградено со кружницата $(A,3)$ и тангентите на таа кружница повлечени од точките B и C (црт.2.68).

2.(IV,68). Да се пресмета збирот

$$S_n = 7 + 77 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{n}.$$

Решение. Имаме:

$$1 = \frac{10-1}{9},\quad 11 = \frac{10^2-1}{9},\ \dots,\ \underbrace{11\dots1}_{n} = \frac{10^n-1}{9}.$$

Користејќи ги овие равенства добиваме:

$$S_n = 7(1 + 11 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n}) =$$
$$= 7\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \dots + \frac{10^n-1}{9}\right) =$$
$$= \frac{7}{9}(10 + 10^2 + \dots + 10^n - n) =$$
$$= \frac{7}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right) =$$
$$= \frac{7}{81}(10(10^n-1) - 9n).$$

3.(IV,68). Дадени се n различни точки од рамнината, така што кои било три не лежат на една права. Земајќи ги овие точки за темиња, се формираат отсечки, триаголници, четириаголници итн.

а) Дали има повеќе отсечки или триаголници?

б) Да се определи кој вид многуаголници ги има најмногу.

Решение. Бидејќи кои било три од дадените точки не лежат на една права, кои било к точки образуваат еден к-аголник. Значи, бројот на к-аголниците е $\binom{n}{k}$.

а) Бројот на отсечките е $\binom{n}{2}$, а бројот на триаголниците е $\binom{n}{3}$. Имаме:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n-2}{3}\binom{n}{2},$$

од каде што добиваме:

1) ако $n=2, 3, 4$, тогаш бројот на отсечките е поголем од бројот на триаголниците;

2) ако $n=5$, тогаш бројот на отсечките е ист со бројот на триаголниците;

3) ако $n>5$, тогаш бројот на отсечките е помал од бројот на триаголниците.

б) Бидејќи важи равенството

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n ,$$

ќе ги разгледаме броевите:

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{k},$$

каде што $k \leqslant \frac{n}{2}$. Имаме:

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \left(\frac{n}{k}-1\right)\binom{n}{k-1}.$$

Ако $0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$, тогаш $\frac{n}{k}-1 \geqslant 1$, па, значи, за $0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$ имаме

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1},$$

од каде што добиваме:

1) ако n е парен број, тогаш најголем е бројот на $\frac{n}{2}$-аголниците;

2) ако n е непарен број, тогаш најголем е бројот на $\frac{n-1}{2}$-аголниците.

4.(IV.68). Од квадрат со страна $2a$ се исечени четири рамнокраки триаголници со висина x, чии основи се совпаѓаат со страните на квадратот. Останатиот дел од квадратот претставува мрежа на една правилна четиристрана пирамида.

а) Да се изрази волуменот V на пирамидата како функција од x.

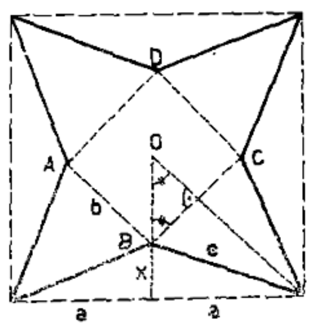
б) Да се определи x така што волуменот на пирамидата да биде најголем.

в) Да се скицира графикот на функцијата $V(x)$.

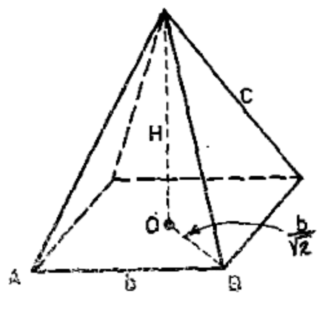
Решение. Темињата на исечените триаголници во квадратот ќе ги означиме со A, B, C, D (црт.3.68). Задачата има смисла ако

$$0 < x < a. \qquad (1)$$

Во тој случај четириаголникот $ABCD$ е квадрат и од добиената мрежа може да се состави правилна четиристрана пирамида (црт.4.68).



Црт.3.68



Црт.4.68

а) Должината на страната AB ќе ја означиме со b, должината на висината со H, а плоштината на квадратот $ABCD$ со P. Тогаш за волуменот V на пирамидата имаме:

$$V = \frac{1}{3}P \cdot H.$$

Бидејќи $\overline{OB} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ (од една страна) и $\overline{OB} = a - x$ (од друга страна), добиваме:

$$b = \sqrt{2}(a-x);$$

потоа:

$$H = c^2 - \frac{b^2}{2} = (a^2 + x^2) - (a-x)^2 = 2ax,$$

па, значи,

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2(a-x)^2 \cdot 2ax, \text{ т.е.}$$

$$V = \frac{4a}{3}(a^2 x - 2ax^2 + x^3). \qquad (3)$$

На тој начин волуменот V е изразен како функција од x.

б) Сега ќе испитаме за кои вредности на x волуменот V е максимален. За таа цел ќе ги најдеме првиот и вториот извод на функцијата V(x) по x:

$$V' = \frac{4a}{3}(a^2 - 4ax + 3x^2),$$

$$V'' = \frac{4a}{3}(-4a + 6x).$$

Од условот за постоење на екстрем, т.е. $V' = 0$, добиваме:

$$3x^2 - 4ax + a^2 = 0,$$

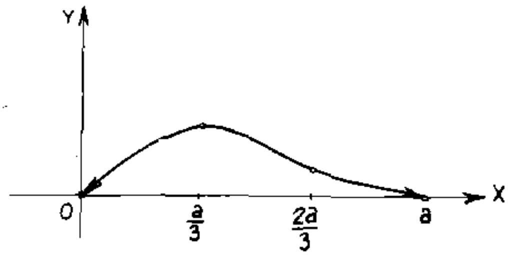
т.е. $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a}{3}$. Поради условот (1) решението $x_1 = a$ отпаѓа, а бидејќи

$$V''\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4a}{3}\left(-4a + 6\frac{a}{3}\right) = -\frac{8a^2}{3} < 0,$$

заклучуваме дека екстремот на V(x) во точката $x = \frac{a}{3}$ е максимум. Притоа имаме:

$$V_{max} = \frac{16a^4}{81}.$$

в) Функцијата е дефинирана за $0 < x < a$ (како што спомнавме); таа е позитивна за секој x од дефиниционата област; монотоно расте во интервалот $(0, \frac{a}{3})$, зашто во тој интервал $V'(x) > 0$, а монотоно опаѓа во интервалот $(\frac{a}{3}, a)$. Графикот на функцијата $V(x)$ е (приближно) како на црт.5.68.



Црт.5.68