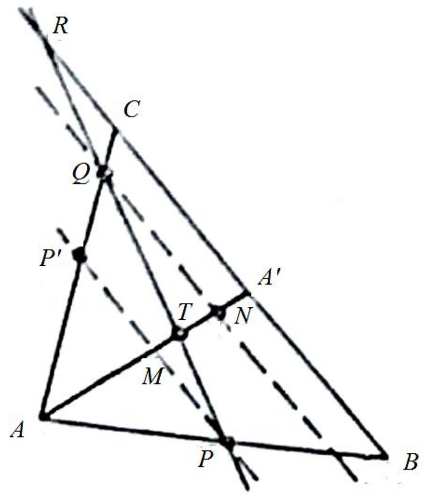
Сојузен натпревар 1990

I година

1. Права минува низ тежиштето T на триаголникот ABC и ги сече страните AB и AC и продолжението на страната BC во точките P, Q и R, соодветно, при шт точката C е меѓу точките B и R. Докажи дека

$$\frac{1}{TP}=\frac{1}{TQ}+\frac{1}{TR}.$$

Решение. Нека тежишната линија TA ја сече страната BC во точката A', цртеж десно. Правата која минува низ Q и е паралелна на BC нека ја сече тежишната линија AA' во точката N, а правата која минува низ P и е паралелна со BC нека ги сече тежишната линија AA' и страната AC во точките M и P', соодветно. Да ставиме $TA'=a$, $TA=2a$, $TM=xa$ и $TN=ya$. Бидејќи $\triangle QTN \sim \triangle PTM$ и $PM=MP'$, добиваме



$$\frac{TN}{TM}=\frac{QN}{MP}=\frac{QN}{MP'}=\frac{NA}{MA}=\frac{NT+TA}{TA-MT}.$$

Значи,

$$\frac{ya}{xa}=\frac{ya+2a}{2a-xa}, \qquad \frac{y}{x}=\frac{y+2}{2-x}, \qquad y=x(y+1),$$

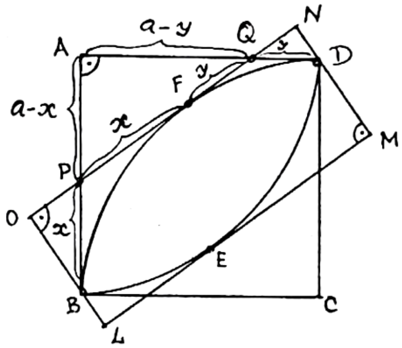
$$\frac{y}{x}=y+1, \qquad \frac{ya}{xa}=1+\frac{ya}{a}, \qquad \frac{TN}{TM}=1+\frac{TN}{TA'}.$$

Но, бидејќи $\triangle QTN \sim \triangle PTM$ имаме $\frac{TN}{TM}=\frac{TQ}{TP}$, а како $\triangle QTN \sim \triangle RTA'$ имаме $\frac{TN}{TA'}=\frac{TQ}{TR}$, па затоа од $\frac{TN}{TM}=1+\frac{TN}{TA'}$ следува $\frac{TQ}{TP}=1+\frac{TQ}{TR}$, односно $\frac{1}{TP}=\frac{1}{TQ}+\frac{1}{TR}$.

2. Фигурата F се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата F, такви што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата F, имаат еднакви периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата F, и нека допирните точки на фигурата F со правоаголникот се B, D, E и F, цртеж десно. Нека страната ON на правоаголникот ги сече страните AB и AD на квадратот $ABCD$ во точките P и Q, соодветно.

Нека $PF = x$ и $FQ = y$. Тогаш $BP = x$, $AP = a - x$, $QD = y$ и $AQ = a - y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Од $\measuredangle BPO = \measuredangle QPA$ и $\measuredangle BOP = \measuredangle QAP = 90^\circ$ следува $\triangle BPO \sim \triangle QPA$, па затоа



$$\frac{OP}{BP} = \frac{AP}{QP} \text{ и } \frac{OB}{BP} = \frac{AQ}{QP},$$

односно

$$OP = x\frac{a-x}{x+y} \text{ и } OB = x\frac{a-y}{x+y}.$$

Аналогно се докажува дека $\triangle QPA \sim \triangle QDN$, па од оваа сличност аналогно се добива дека $DN = y\frac{a-x}{x+y}$ и $QN = y\frac{a-y}{x+y}$. Понатаму, добиваме

$$\begin{aligned} BO + ON + ND &= x\frac{a-y}{x+y} + x\frac{a-x}{x+y} + x + y + y\frac{a-y}{x+y} + y\frac{a-x}{x+y} \\ &= x + y + (x+y)\frac{a-x}{x+y} + (x+y)\frac{a-y}{x+y} \\ &= x + y + a - x + a - y = 2a. \end{aligned}$$

Аналогно се добива дека $BL + LM + MD = 2a$, па затоа

$$LM + MN + NO + OL = 4a = \text{const}.$$

3. Дали постои низа со должина 3982 за која важи:

а) секој број $k \in \{1, 2, 3, ..., 1991\}$ во низата се јавува два пати,

б) секој број k во таа низа се јавува по втор пат точно на $k-$тото место по првото појавување.

Решение. Нека претпоставиме дека постои низа со должина 3982 за која се исполнети условите а) и б). Бројот $k \in \{1, 2, 3, ..., 1991\}$ нека се јавува на m_k-тото место и на $(m_k + k)-$тото место. Тогаш

$$1 + 2 + 3 + ... + 3982 = (m_1 + (m_1 + 1)) + (m_2 + (m_2 + 2)) + ... + (m_{1991} + (m_{1991} + 1991)),$$

$$\frac{3982 \cdot (3982+1)}{2} = 2(m_1 + m_2 + ... + m_{1991}) + \frac{1991 \cdot (1991+1)}{2},$$

$$7930153 = 2(m_1 + m_2 + ... + m_{1991}) + 1983036,$$

што е противречност, бидејќи во последното равенство левата страна е непарен, а десната е парен број. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои низа со саканите својства.

4. Ако $a \geq 1$, $b \geq 1$, тогаш

$$3\left(\frac{a^2-b^2}{8}\right)^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}} \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Означуваме $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и $A=\frac{a+b}{2}$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме $K \ge A \ge 1$, па затоа $A^3 \ge 1$, $K-A \ge 0$ и $3(K+A) \ge 2(K+2A)$.

Имаме,

$$ab = 2A^2 - K^2, \quad (a^2-b^2)^2 = (a+b)^2(a^2+b^2-2ab) = 16A^2(K^2-A^2)$$

па затоа неравенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\frac{3}{4}A^2(A^2-K^2) + \frac{2A^2-K^2}{2A} \ge \frac{K}{2},$$

т.е. во еквивалентно неравенство

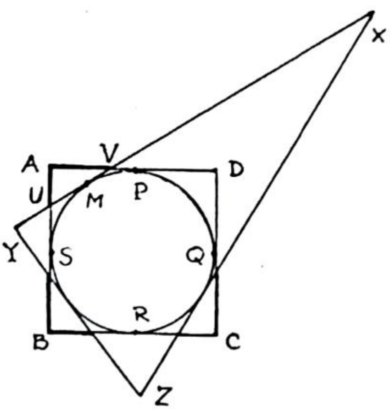
$$3A^3(K-A)(K+A) \ge 2(K-A)(K+2A),$$

кое очигледно е исполнето.

II година

1. Околу кружница со дијаметар 1 се опишани триаголник и квадрат, кои немаат страни кои припаѓаат на иста права. Докажи дека периметарот на делот од квадратот кој што се наоѓа надвор од триаголникот има должина помала од 1,8.

Решение. Нека опишаниот квадрат е $ABCD$, цртеж десно. Бидејќи триаголникот и квадратот немаат страни кои припаѓаат на иста права, три од темињата на квадратот $ABCD$ лежат надвор од триаголникот, а едно теме е во неговата внатрешност. Ќе го разгледаме делот од квадратот кој е сврзан со темето A. Истата дискусија важи и за темињата B и C, кои што се надвор од триаголникот.



Нека P,Q,R,S се допирните точки на квадратот и кружницата, а X,Y,Z се темињата на триаголникот. Нека страната XY ги сече страните на квадратот AB и AD во точките U и V, соодветно и нека ја допира кржницата во точката M. Ставаме $MU=x$ и $MV=y$.Тогаш $SU=x$, $VP=y$, $AU=\frac{1}{2}-x$ и $AV=\frac{1}{2}-y$. Од Питагоровата теорема, применета на триаголникот AUV следува:

$$(\tfrac{1}{2}-x)^2+(\tfrac{1}{2}-y)^2=(x+y)^2, \text{ т.е. } (x+\tfrac{1}{2})(y+\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}.$$

Според тоа,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})(y+\tfrac{1}{2})} \le \frac{(x+\frac{1}{2})+(y+\frac{1}{2})}{2},$$

$$x+y \ge \sqrt{2}-1.$$

Значи,

$$AU + AV = 1-(x+y) \leq 2-\sqrt{2}\ .$$

Конечно, заради симетрија, добиваме дека периметарот на делот од квадратот кој што се наоѓа надвор од триаголникот има должина помала или еднаква на

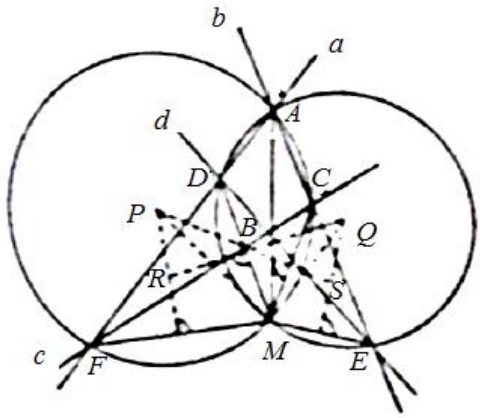
$$3(2-\sqrt{2}) \approx 1,757359 < 1,8\ .$$

2. Дадени се четири прави такви што секои две се сечат и ниеи три не минуваат низ иста точка. Овие прави определуваат четири триаголници.

а) Докажи дека опишаните кружници околу четирите триаголници имаат заедничка точка X.

б) Докажи дека центрите на опишаните кружници околу четирите триаголници припаѓаат на една кружница која минува низ точката X.

Решение. Нека дадените прави се a,b,c,d и нека тие се сечат во точките A,B,C,D,E,F како на цртежот десно.



а) Со M да ја означиме втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците ACF и ADE. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle BCM &= \measuredangle FCM = \measuredangle FAM \\ &= \measuredangle DAM = \measuredangle DEM \\ &= \measuredangle BEM,\end{aligned}$$

па затоа точките B,C,E,M се конциклични, т.е. опишаната кружница околу триаголникот BCE минува низ точката M. Аналогно се докажува дека опишаната кружница оклу триаголникот BDF минува низ точката M.

б) Центрите P,Q,R,S на кружниците опишани оклу триаголниците ACF, ADE, BDF, BCE припаѓаат на симетралите на отсечките MC, MD, MF, ME, соодветно. Потоа

$$\measuredangle MPS = \tfrac{1}{2}\measuredangle MPC = \measuredangle MAC = \measuredangle MAE = \tfrac{1}{2}\measuredangle MQE = \measuredangle MQS\ ,$$

од каде што следува дека точките M,P,Q,S припаѓаат на иста кружница k. Покрај тоа,

$$\measuredangle RPS = \tfrac{1}{2}\measuredangle FPC = \measuredangle FAC = \measuredangle DAE = \tfrac{1}{2}\measuredangle DQE = \measuredangle RQS\ ,$$

што значи дека точките P,Q,R,S лежат на истата кружница k, што и требаше да се докаже.

3. Доажи дека за позитивните броеви a,b,c важи неравеството

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Решение. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&(x-y)^2\geq 0,\\
&x^2-xy+y^2\geq xy,\\
&(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y),\\
&x^3+y^3\geq xy(x+y),\\
&x^3+y^3+xyz\geq xy(x+y+z),\\
&\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{xy(x+y+z)}.
\end{aligned}$$

Сега, од докажаното неравенство следува дека за позитивните релани броеви a,b,c важи

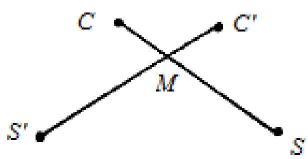
$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}&\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}\\
&=\frac{c+a+b}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.
\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

4. Во рамнината се дадени $2n$ точки такви што никои три не лежат на иста права. Половината од дадените точки се обоени во сина, а половината во црвена боја. Докажи дека постојат n отсечки чии крајни точки се различно обоени и такви што никои две од нив не се сечат.

Решение. Нека секоја црвена точка ја поврземе со сина точка, при што различните сини точки ги поврзуваме со различни црвени точки и обратно. На тој начин добиваме поврзување кое има n отсечки. Меѓу сите можни вакви поврзувања да го разгледаме поврзувањето кај кое збирот на должините на добиените отсечки е најмал. Ќе докажеме дека ова поврзување ги задоволува условите на задачата.

Навистина, да претпоставиме дека отсечките CS и $C'S'$ се сечат во точката M, при што точките C и C' се црвени, а точките S и S' се сини (цртеж десно). Тогаш од неравенството на триаголник следува



$$CS'+C'S<(CM+MS')+(MC'+MS)=CS+C'S'.$$

Затоа поврзувањето кое го добиваме од разгледуваното поврзување со замена на отсечките CS и $C'S'$ со отсечките CS' и $C'S$, а другите отсечки остануваат непроменети има помал збир на должините на отсечките, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека во поврзувањето со најмал збир на должините на отсечките не постојат две отсчки кои се сечат.

III и IV година

1. Нека $a \in \mathbb{N}$ и нека низата (x_n) е определена со:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е парен број,} \\ \frac{3x_n+1}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е непарен број.} \end{cases}$$

Докажи дека барем еден член на низата (x_n) е парен број.

Решение. Ако a е парен рбој, тогаш нема што да се докажува. Затоа нека претпоставиме дека a е неапрен број и $a+1 = 2^k R$, каде $R = 2R_1 + 1$ е непарен природен број. Тогаш

$$\begin{aligned} x_1 &= 2^{k+1}R_1 + 2^k - 1, \\ x_2 &= \tfrac{3x_1+1}{2} = 2^k(3R_1+1) + 2^{k-1} - 1 = 2^k R_2 + 2^{k-1} - 1, \\ x_3 &= \tfrac{3x_2+1}{2} = 2^{k-1}R_3 + 2^{k-2} - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= 2^{k-n+2}R_n + 2^{k-n+1} - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= 4R_k + 1, \\ x_{k+1} &= 6R_k + 2. \end{aligned}$$

Значи, x_{k+1} е парен број.

2. Определи го бројот на пермутациите $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ такви што за секој $k \in \{2, 3, ..., n\}$ важи: меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ постои барем еден кој од бројот a_k се разликува за 1.

Решение. Нека бројот на разгледуваните пермутации е S_n. Со индукција по n ќе докажеме дека $S_n = 2^{n-1}$. За $n = 1$ и $n = 2$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека за бројот n важи $S_n = 2^{n-1}$. За да ги најдеме сите пермутации на броевите $1, 2, ..., n+1$ кои го имаат разгледуваното својство, прво ќе докажеме дека во секоја таква пермутација последниот број не може да биде некој од броевите $2, 3, ..., n$.

Нека е дадена произволна пермутација $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ на броевите $1, 2, ..., n+1$ таква што $a_{n+1} \neq 1$ и $a_{n+1} \neq n+1$. Бројот $a_{n+1}+1$ се наоѓа пред бројот a_{n+1}. Според својството на пермутацијата следува дека $a_{n+1}+2$ се наоѓа пред $a_{n+1}+1$, потоа $a_{n+1}+3$ е пред $a_{n+1}+2$ итн. Значи, бројот $n+1$ се наоѓа пред бројот n и освен тоа мора да е прв. Од друга страна, пак, јасно е дека бројот $a_{n+1}-1$ се наоѓа пред бројот a_{n+1}. Сега, од својството на пермутацијата следува дека $a_{n+1}-2$ мора да е пред $a_{n+1}-1$, потоа $a_{n+1}-3$ мора да е пред $a_{n+1}-2$ итн. Значи, бројот 1 е пред бројот 2 и затоа 1 мора да е на прво место. Со тоа добивме дека на прво место треба да се и 1 и $n+1$, што е противречност.

Од претходните разгледувања следува дека во пермутацијата на последното место мора да е бројот 1 или бројот $n+1$. Ако на последното место е бројот $n+1$, тогаш пермуатцијата $(a_1, a_2, ..., a_n, n+1)$ го има саканото својство ако и само ако пермутацијата $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на бровите $1, 2, ..., n$ го има саканото својство, а такви пермуатции има 2^{n-1}. Ако бројот 1 е на последното место, тогаш пермуацијата $(a_1, a_2, ..., a_n, 1)$ го има саканото својство ако и само ако пермутацијата $(a_1-1, a_2-1, ..., a_n-1)$ на броевите $1, 2, ..., n$ го има саканото својство, а такви пермутации има 2^{n-1}. Конечно, од принципот на збир следува дека

$$S_{n+1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n,$$

со што доказот е завршен.

3. Ако $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0$ и ако α е нула на полиномот

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n,$$

докажи дека $|\alpha| \leq 1$.

Решение. Да претпоставиме дека $r = |\alpha| > 1$. Ќе докажеме дека $p(\alpha) \neq 0$, со што задачата ќе биде решена.

Да го разгледаме полиномот

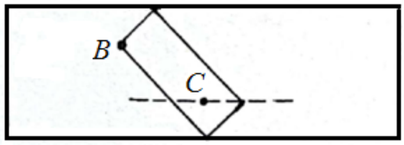
$$\begin{aligned} q(x) &= p(x)(1-x) \\ &= (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n)(1-x) \\ &= a_0 x^n - a_0 x^{n+1} + a_1 x^{n-1} - a_1 x^n + ... + a_n - a_n x \\ &= a_n + (a_{n-1} - a_n)x + ... + (a_0 - a_1)x^n - a_0 x^{n+1}. \end{aligned}$$

Оттука следува

$$\begin{aligned} |p(\alpha)(1-\alpha)| &= |a_n + (a_{n-1} - a_n)\alpha + ... + (a_0 - a_1)\alpha^n - a_0 \alpha^{n+1}| \\ &\geq a_0 r^{n+1} - |a_n + (a_{n-1} - a_n)\alpha + ... + (a_0 - a_1)\alpha^n| \\ &\geq a_0 r^{n+1} - r^n (a_n + a_{n-1} - a_n + ... + a_0 - a_1) \\ &= a_0 r^n (r-1) > 0. \end{aligned}$$

Според тоа, $|p(\alpha)| \cdot |1-\alpha| > 0$, па затоа $p(\alpha) \neq 0$.

4. Дадена е правоаголна табла која има m колони и n редици, каде што $m > n$ и броевите m и n се со иста парност. Во долниот лев агол на таблата се наоѓа бел ловец, а во горниот десен агол се наоѓа црн ловец. Играчите B и C наизменично повлекуваат потези со ловците според правилата на шаховската игра. Играта ја започнува играчот B и тој секогаш игра со белиот ловец, а играчот C секогаш игра со црниот ловец. Играта ја добива играчот кој ќе го постави својот ловец под удар на противничкиот ловец. Кој играч има победничка стратегија?



Решение. Играта ја добива црниот ловец. Неговата победничка стратегија е следнава: Ако белиот ловец B се наоѓа на $k-$тиот ред од горниот раб на таблата, тогаш црниот ловец C доаѓа до $k-$тиот ред од долниот дел на таблата, при што ако има повеќе можности за таков потез, тој го избира потезот со кој ќе биде поблиску до белиот ловец. Јасно, со оваа стратегија на црниот ловец белиот ловец не може да ја добие играта. Освен тоа, по конечен број чекори со оваа стратегија, црниот ловец ќе успее да влезе во внатрешноста на малиот правоаголник (види цртеж), чие едно теме е ловецот B, или пак по дијагонала да е наспроти B. Сега, како и да игра белиот ловец, црниот ловец во следниот чекор ја добива играта.