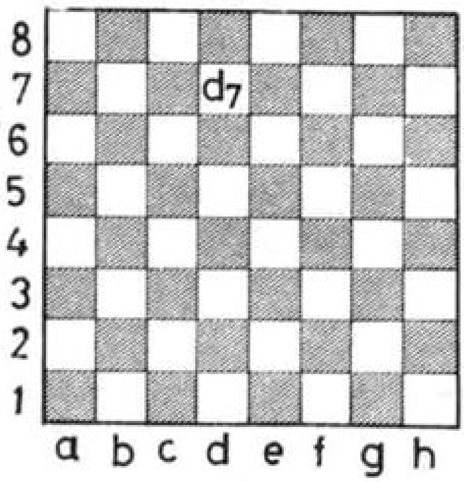
TOPOVI NA ŠAHOVSKOJ TABLI

Šah je veoma popularna igra. Poznato je da se on igra na kvadratnoj tabli od 64 polja i da je svaki od dva igrača koji ga igraju ustvari „vojskovođa" drvene vojske od po 16 figura. Da bi se odredio položaj figure na nekom od polja, ona su obeležena po jednim slovom i jednim brojem, kao što je prikazano na sl. 1. Tako se, na primer, polje d7 nalazi u preseku linije pri čijem je dnu upisano slovo d (obično se to zove d-linija) i reda na čijem je levom kraju upisan broj 7 (to je sedmi red). Na taj je način svako polje na tabli određeno linijom u kojoj se nalazi i redom na kome se nalazi. Figure se u šahovskoj igri kreću po strogo određenim pravilima. Top je figura čije je kretanje po tabli veoma jednostavno. Ustvari, kao što je većini čitalaca poznato, top se kreće slobodno po liniji ili redu u kome se nalazi, ukoliko pri tome ne naiđe na neku drugu figuru koja bi mu u kretanju zasmetala.



Сл. 1

Šahovska tabla i kretanje figura po njoj često su predmet interesovanja nezavisno od šahovske igre. Postoji velik broj interesantnih matematičkih zadataka koji se formulišu pomoću njih. Pri tome se, obično, susrećemo s problemima kombinatornog karaktera, a dozvoljeno je uvođenje različitih pretpostavki, koje omogućuju da se na tabli nađe figura koja ne postoji među šahovskim figurama, da se figure kreću po pravilima koja nisu zapisana u pravilima šahovske igre, da se na tabli nađe i po dvadeset topova i sl. Tako ćemo i mi posmatrati šahovsku tablu i topove na njoj, ali će topova biti više nego što ih ima u šahovskoj garnituri.

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo dovoljan broj jednakih topova (iste boje i potpuno identičnog oblika, tako da se ničim međusobno ne razlikuju). Dva takva topa, ukoliko se nađu na istoj liniji ili redu, međusobno se tuku, jer se kreću po pravilima šahovske igre.

Zadatak 1. Koliko se jednakih topova može postaviti na šahovsku tablu a da se pri tome nikoja dva od njih međusobno ne tuku?

Rešenje. Lako je na šahovskoj tabli poređati osam topova tako da se pri tome nikoja dva međusobno ne tuku. Dovoljno je, recimo, poređati ih po jednoj dijagonali. Dakle, osam se topova može postaviti. A može li više? Zaista, ako više od osam topova treba postaviti na tablu, na kojoj ima osam linija, treba ih rasporediti u tih osam linija. Ali onda na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da mora postojati linija u koju će biti smeštena bar dva topa. No, takva se dva topa tuku. Prema tome, zaključujemo da se na šahovsku tablu može postaviti najviše osam topova tako da se nikoja dva međusobno ne tuku.

Kao što vidimo, ovo je jednostavan zadatak. Upravo dobijeni rezultat će nam poslužiti da se pozabavimo i nešto složenijim problemima.

Zadatak 2. Na koliko se načina osam jednakih topova može rasporediti na šahovskoj tabli tako da se pri tome nikoja dva od njih međusobno ne tuku?

Rešenje. Pretpostavimo da je u početnom trenutku tabla prazna. Prilikom raspoređivanja topova moramo paziti da dva od njih ne smestimo u isti red niti na istu liniju. Raspoređivaćemo topove redom po redovima. Top koji će biti smešten u prvi red ima na raspolaganju svih osam polja u tom redu. Prema tome, postoji osam mogućnosti za smeštanje topa u prvi red. Prilikom smeštanja topa u drugi red moramo paziti da ga ne smestimo u istu liniju u kojoj se već nalazi top iz prvog reda. Dakle, za svaki od osam rasporeda prvog topa postoji po sedam mogućnosti da se top smesti u drugi red i da se oni međusobno ne tuku. Ukupno postoji $8 \cdot 7 = 56$ mogućnosti da se dva topa smeste u prva dva reda i da se ne tuku. Kad pređemo na raspoređivanje topa u treći red moramo paziti da ga ne smestimo na liniju u kojoj se već nalazi top iz prvog reda ili top iz drugog reda. Prema tome, za svaki od mogućnih 56 rasporeda dva topa u prva dva reda postoji po šest mogućnosti da se top smesti u treći red i da se pri tome ta tri topa ne tuku. Na taj način dobijamo da je ukupan broj mogućnosti za smeštanje tri topa u prva tri reda, pri čemu se nikoja dva ne tuku, jednak $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Produžujući na taj način raspoređivanje topova, pazeći pri svakom koraku da se top ne smesti u već zauzetu liniju, dobijamo da je ukupan broj mogućnosti za raspoređivanje osam topova na šahovsku tablu, uz uslov da se nikoja dva ne tuku, jednak $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$.

Jedan je matematičar, zabavljajući se šahovskom tablom, obeležio šahovska polja dvocifrenim brojevima tako da je svuda slovo *a* zamenio cifrom 1, slovo *b* cifrom 2, slovo *c* cifrom 3, slovo *d* cifrom 4, slovo *e* cifrom 5, slovo *f* cifrom 6, slovo *g* cifrom 7 i slovo *h* cifrom 8, pa je te brojeve upisao u odgovarajuća polja na šahovskoj tabli. Dobio je šahovsku tablu čija su polja bila popunjena kao na sl. 2. Uzeo je zatim osam topova (pošto ih u garnituri nije imao osam, zamenio ih je pešacima) i rasporedio ih tako da se nikoja dva ne tuku. Sabrao je zatim brojeve upisane u polja na kojima su se topovi nalazili. Rasporedio je zatim topove na drugi način, tako da se opet nikoja dva od njih ne tuku, i opet sabrao brojeve upisane u polja na kojima su se nalazili topovi. Dobio je isti zbir. To ga je zainteresovalo, malo se zamislio, i formulisao sledeći zadatak:

8	18	28	38	48	58	68	78	88
7	17	27	37	47	57	67	77	87
6	16	26	36	46	56	66	76	86
5	15	25	35	45	55	65	75	85
4	14	24	34	44	54	64	74	84
3	13	23	33	43	53	63	73	83
2	12	22	32	42	52	62	72	82
1	11	21	31	41	51	61	71	81
	a	b	c	d	e	f	g	h

Сл. 2

Zadatak 3. U polja šahovske table upisani su brojevi 11, 12, 13, . . . , 18, 21, 22, . . . , 87, 88 kao na slici. Ako se osam topova rasporedi na tabli tako da se nikoja dva ne tuku, dokazati da je zbir brojeva, upisanih u polja na kojima se nalaze topovi, jednak za svaki od mogućnih rasporeda topova.

Rešenje. Jasno je da neposredno proveravanje ovog tvrđenja ne dolazi u obzir. Trebalo bi računati odgovarajuće zbirove za svaki od mogućnih 40 320 rasporeda. Postupićemo na sledeći način. Pretpostavimo da su u početnom trenutku svi topovi bili smešteni u prvu, *a*-liniju. Zbir brojeva upisanih u polja na kojima se topovi nalaze pri takvom rasporedu jednak je $11+12+13+14+15+16+17+18=116$. Da bi se dobio raspored pri kome se nikoja dva topa neće tući moramo sedam od njih da pomeramo duž redova u kojima se nalaze, ali tako da dva od njih ne smestimo u istu liniju. Jedan će od topova ostati na svom mestu i broj koji je upisan u njegovo polje se neće menjati. Pri tome je bitno da to može biti bilo koji od osam topova. Jedan od njih mora se pomeriti u drugu, *b*-liniju. Time će se broj, upisan u polje na kome se on nalazio, povećati za 10, jer će umesto cifre 1 na prvom mestu da se nađe cifra 2, dok se druga cifra ne menja. Jedan od topova biće pomeren u treću, *c*-liniju. Na taj će se način broj, koji je bio upisan u njegovo polje, povećati a 20 (prva cifra se povećava za dva, a druga se ne menja). Produžavajući tako redom ovo razmeštanje topova, zaključujemo da će se zbir brojeva upisanih u polja na kojima su se topovi nalazili u početnom položaju povećati za $10+20+30+40+50+60+70=280$. Na taj način dobijamo da je ukupan zbir brojeva upisanih u polja na kojima se nalaze topovi, pri proizvoljnom rasporedu topova kad se nikoja dva ne tuku, jednak $116+280=396$.

Zadaci

1. Na koliko se načina može na šahovsku tablu smestiti jedan lovački par (jedan lovac je na belom a jedan na crnom polju) pod uslovom da se ne nalaze na istoj liniji i u istom redu.

2. U polja šahovske table upjsani su redom neparni brojevi: u prvom redu brojevi 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, u drugom redu brojevi 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 tako da je 17 iznad broja 1, 19 iznad 3 itd., u treći red brojevi 33, 35, ... i tako redom do popune table. Osam brojeva izabrano je među njima tako da se u svakoj liniji i svakom redu nalazi tačno jedan od njih. Dokazati da je zbir tih brojeva konstantan bez obzira na način biranja. Koliki je taj zbir?

3. Na koliko se načina osam topova obojenih različitim bojama (pazi, ima osam različitih boja) može rasporediti na šahovsku tablu tako da se nikoja dva od njih međusobno ne tuku?

V. R.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија