РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАРИ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ ВО РЕПУБЛИКА СРПСКА 1994-2019 И 2021-2022

Во Република Српска математичките натпревари за учениците од средното образование се организираат од 1994 година. Во овој материјал се дадени сите Републички натпревари од 1994-2019 и 2021-2022 година, при што за натпреварот во 2009 и натпреварите по 2016 година се содржани и решенијата на задачите. Материјалот е на српски јазик, бидејќи едноставно истиот е компилација на достапните содржини на одделни интернет сајтови. Се надеваме дека тоа нема да биде проблем за евентуалните корисници на овој материјал и дека истиот ќе придонесе за подобра подготовка на учениците за следните натпревари.

Ристо Малчески

ПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 02.04.1994.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за цијеле бројеве a, b, c, d вриједи $ab - cd = 12$, $ad + bc = 43$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1994$.

2. У троуглу ABC се висина AD и симетрала BE угла ABC сијеку у тачки S ($D \in BC, E \in AC$). Ако је $AS = 2\,SD$, $BS = SE$, наћи углове тог троугла.

3. Свако тјеме и центар правилног шестоугла обојени су једном од двије боје. Доказати да постоји једнакостранични троугао или правоугаоник, чија су сва тјемена исте боје.

4. Ако је n природан број доказати да једначине

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{n}$$

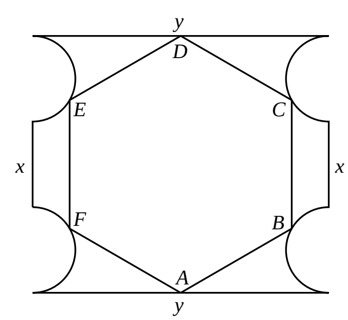
имају једнак број рјешења у скупу природних бројева ако и само ако је n непаран.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x-x^2} + \sqrt{2x^2-x-1} = 1.$$

2. Дат је билијарски сто као на слици 1, гдје су лукови полукружнице полупречника 1. Одредити дужине x и y тако да играч билијара може из неке тачке стола упутити куглу која ће прећи пут правилног шестоугла $ABCDEFA$ као на слици 1.



Слика 1:

(Куглу сматрамо тачком која се креће праволинијски и одбија се од кружнице или праве тако да је упадни угао једнак одбојном углу.)

3. Нека су p и q различити прости бројеви. Доказати да једначина $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{p}{q}$ има рјешења у скупу природних бројева ако и само ако $p \mid q + 1$.

4. Ако је $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ бијекција са особином

$$f(1) < 2f(2) < \cdots < nf(n)$$

доказати да је f идентитет.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Правилан петоугао странице a и дијагонале d уписан је у круг јединичног полупречника. Доказати да је $a^2 + d^2 = 5$.

2. У равни је дата цјелобројна мрежа. Доказати да је сваки конвексни четвороугао јединичне површине, чија су тјемена чворови мреже, паралелограм.

3. Нека је n природан број и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сви природни дјелиоци броја n, изузев n. Ако је $k \geq 3$ и

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

доказати да је $n = p(2p-1)$, гдје су p и $2p-1$ прости бројеви.

4. Нека је

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2 + k} - 2n^2.$$

Доказати да је $\lfloor S_n \rfloor = n$, $\lfloor 2S_n \rfloor = 2n$.

(Са $\lfloor x \rfloor$ је означен цијели дио од x, тј. највећи цио број који није већи од x.)

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако су m, n, k природни бројеви и $m < n < k$ доказати да је

$$\left(1 - \frac{m}{k}\right)^n > \left(1 - \frac{n}{k}\right)^m.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Ако сви природни дјелиоци броја n, изузев n, образују аритметичку прогресију (са бар 3 члана) доказати да је $n = p(2p-1)$, гдје су p и $2p-1$ прости бројеви.

4. Ако су сва рјешења једначине

$$x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\, x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_n = 0 \quad (n > 2)$$

цијели бројеви доказати да је

$$a_k = \binom{n}{k}, \quad k \in \{3, 4, \ldots, n\}.$$

ДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Приједор, 01.04.1995.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да за позитивне бројеве a и b вриједи

$$\sqrt{ab} + \frac{a+b}{2} \leq \frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

2. У јединична поља квадрата 4×4 уписани су бројеви 1 и -1 тако да је у свако поље уписан број једнак производу бројева у њему сусједним пољима. Доказати да су сви уписани бројеви једнаки 1.

(Два поља су сусједна ако им ивице имају заједничку тачку.)

3. Нека је O центар описане кружнице, S центар уписане кружнице и H ортоцентар правоуглог троугла. Доказати да је $\sphericalangle OSH > 135°$.

4. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 2$ има бесконачно много рјешења у скупу рационалних бројева.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је n природан број већи од 12. У децималном запису броја $\sqrt{n^2+n}$ одредити прве двије цифре иза децималног зареза.

2. Нека је T тежиште, а S центар уписане кружнице троугла ABC. Ако је $\overrightarrow{AC} = 12\,\overrightarrow{TS}$ доказати да је тај троугао „египатски" тј. да му је однос страница $3:4:5$.

3. Доказати да се за $n > 1$ скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ може разбити на 3 дисјунктна подскупа са по n елемената и једнаким сумама елемената.

4. Квадрат странице 9 покривен је са 27 правоугаоника формата 3×1 (*тримино* фигурама). Доказати да 3 од њих покривају неки квадрат странице 3.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити једначину

$$\cos x + \cos 2x + \cos 4x + 4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 0.$$

Наћи сва рјешења која припадају интервалу $(-\pi, \pi)$.

2. Одредити број рјешења једначине

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{1995}$$

у скупу природних бројева.

3. Нека је r полупречник уписане кружнице троугла ABC, D средиште странице AB и S_1, S_2 центри кружница уписаних у троуглове CDA и CDB. Доказати да је

$$r < S_1S_2 < \frac{AB}{2}\,.$$

4. У равни са цјелобројном мрежом дат је конвексан шестоугао чија су тјемена чворови мреже, а површина једнака 3. Доказати да је он централно симетричан.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a и d релативно прости природни бројеви и нека аритметичка прогресија

$$a, a+d, \ldots, a+nd, \ldots$$

садржи неки степен природног броја q. Доказати да она садржи бесконачну геометријску прогресију чији су сви чланови степени броја q.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Доказати да за природне бројеве n, m $(n > m)$ вриједи

$$(n-m)^{n-m} \cdot n^{n(m-1)} \geq (n-1)^{m(n-1)}.$$

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 30.03.1996.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нормале из тјемена A и B оштроуглог троугла ABC на његове наспрамне странице сијеку кружницу описану око тог троугла у тачкама D и E редом. Ако је $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, доказати да је четвороугао $ABDE$ једнакокраки трапез.

2. Нека су a, b, c, d бројеви из интервала $[200, 300]$, а K, L, M тачке на бројној оси које редом одговарају бројевима

$$\frac{a}{b}\,, \quad \frac{c}{d}\,, \quad \frac{a+c}{b+d}$$

и N средиште дужи KL. Доказати да је $MN \leq \dfrac{KL}{10}$.

3. Ако је n природан број, доказати да $2^n + 3^n$ није потпун квадрат.

4. Нека су a, b катете и r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла. Ако су a, b, $\dfrac{a}{r}$ и $\dfrac{b}{r}$ цијели бројеви, доказати да је тај троугао „египацки”, тј. да му је однос страница $3:4:5$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Двије кружнице се сијеку у тачкама A и B. Кроз тачку K једне кружнице конструисане су праве KA и KB које сијеку другу кружницу у тачкама M и N. Ако је O центар прве кружнице, доказати да су праве MN и OK нормалне.

2. Нека је k цио број. Доказати да постоје природни бројеви x и y такви да је

$$2^x + x - y - \lfloor \log_2 y \rfloor = k$$

ако и само ако је $k \neq 1$.

3. Ако је n природан број, доказати да број $2^n + 1$ није дељив са 247.

4. Доказати да једначина

$$\overline{DVA} \cdot \overline{PET} = \overline{DESET}$$

нема рјешења ако различитим словима одговарају различите цифре $(D \neq 0,\ P \neq 0)$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да у оштроуглом троуглу вриједи

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c} < \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

2. Нека је a позитиван реалан број. Доказати да су сљедеће тврдње еквивалентне:

(i) У правоуглом координатном систему постоји квадрат странице a чија су тјемена тачке са цјелобројним координатама.

(ii) Постоје цијели бројеви m и n исте парности такви да је $m^2+n^2=2a^2$.

3. У једнакостраничном троуглу странице 1 дато је 1996 тачака. Доказати да постоји круг полупречника $\dfrac{1}{24}$ у коме се налази бар 20 од тих тачака.

4. Нека је P полином са цјелобројним коефицијентима. Доказати да су скупови цјелобројних рјешења једначина

$$P(P(P(x)))=x, \quad P(x)=x$$

једнаки.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ вриједи

$$\sin x\ \mathrm{tg} x > x^2.$$

2. Нека је x_1 произвољан реалан број и

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\, x_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да је низ (x_n) неограничен и опадајући почев од неког члана.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Добој, 29.03.1997.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да четири подножја нормала спуштених из подножја једне висине троугла на остале његове висине и странице припадају истој правој.

2. Доказати да за позитивне бројеве a и b вриједи

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}\,.$$

3. Одредити све правоугле троуглове код којих су све странице цјелобројне и површина једнака обиму.

4. Нека су тјемена једнакостраничног троугла, 6 тачака које дијеле његове странице на три једнака дијела и тежиште троугла обојени са двије боје. Доказати да постоји једнакостранични троугао чија су сва тјемена исте боје.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Тачке D и E дијеле редом странице AB и CA једнакостраничног троугла ABC у односу $1:2$. Нека је F пресјечна тачка правих BE и CD. Доказати да су праве AF и BE међусобно нормалне.

2. Доказати да у сваком троуглу вриједи

$$(4a+3b)^2 \geq 96P.$$

3. Ријешити једначину

$$\overline{ab} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cdc} = \overline{ababcc} \quad (a \neq 0),$$

ако слова означавају цифре.

4. Правоугаоник формата 8×7 покривен је доминама формата 2×1. Доказати да га можемо подијелити на два правоугаоника разрезавши при томе највише једну домину.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Риjешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{z}{1997}\,.$$

2. Ако у троуглу вриједи

$$2R + r = s,$$

доказати да је троугао правоугли.

3. Ако су тјемена троугла цјелобројне тачке у правоуглом координатном систему, доказати да су сви његови углови различити од 60°.

4. Доказати да међу било којих пет тјемена правилног десетоугла постоје четири тјемена која чине једнакокраки трапез.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Датум рођења мале Јаглике написан је у облику $J.\overline{AG}.\overline{LIKA}.$, при чему сваком слову одговара нека цифра. Одредити тај датум ако вриједи

$$\overline{JA} \cdot \overline{GL} \cdot \overline{IAK} = \overline{JAGLIK} \cdot A\,.$$

2. Доказати да за природан број $n > 1$ вриједи

$$n^{2n} < (n+1)^{n+1} \cdot (n-1)^{n-1}.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ПЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Приједор, 28.03.1998.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за цијеле бројеве a, b, c вриједи

$$a^2 + b = c^2,$$

доказати да је број abc дјељив са 6.

2. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине спуштене из тјемена C правог угла. Ако је $CD \leq 1$, доказати да је

$$\frac{1}{1+AD} + \frac{1}{1+BD} \leq \frac{2}{1+CD}.$$

Да ли вриједи обрнуто?

3. Доказати да свака кружница са центром у тачки $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ садржи највише једну цјелобројну тачку.

4. Нека су D, E, F подножја нормала спуштених из центра O уписане кружнице троугла ABC на његове странице BC, CA, AB респективно и нека је AB најмања страница тог троугла. Ако се праве AO и FD сијеку у тачки M, а праве BO и FE у тачки N, доказати да је $MN \parallel AB$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све цијеле бројеве x за које је

$$\frac{1}{9}(x + \sqrt{x^2 - 90x + 1998})$$

такође цио број.

2. Нека је ABC правоугли троугао, а D подножје висине спуштене из тјемена C правог угла. У троуглове ACD и BCD уписане су кружнице са центрима у тачкама R и S. Доказати да симетрала правог угла сијече праву RS под правим углом.

3. Ријешити у скупу простих бројева једначину

$$p^2 - qr = 36100.$$

4. Доказати да се правоугаона табла може покрити фигурама облика као на слици 2.2, тако да ниједан правоугаоник димензије 3×2 унутар те табле није покривен са двије овакве фигуре, ако и само ако је та табла димензије

$$6m \times 2n \ \ (m, n \in \mathbb{N},\ n > 1).$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако у правоуглом троуглу вриједи

$$\frac{12}{a} + \frac{12}{b} = \frac{35}{c},$$

доказати да је он „египатски”, тј. да му је однос страница $3 : 4 : 5$.

2. Квадратни полином p је такав да једначина $p(x) = x$ нема реалних рјешења. Доказати да ни једначина $p(p(x)) = x$ нема реалних рјешења.

3. Нека су тјемена оштроуглог троугла цјелобројне тачке у равни. Доказати да његова површина није мања од $\frac{3}{2}$.

4. Доказати да за сваки природан број n већи од 1 постоји n узастопних природних бројева међу којима се налазе тачно два проста броја.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за сваки реалан број a једначина

$$43x^3 - 19ax^2 + 2a^2x - 1 = 0$$

има бар једно рјешење у интервалу $[0, 1]$.

2. За низ позитивних бројева $a_0, a_1, \ldots, a_{1998}$ вриједи

$$a_0 = 1,\ a_{1998} = 2 \ \text{ и } \ a_k^2 \leq a_{k-1}a_{k+1}, \ \ k \in \{1, 2, \ldots, 1997\}.$$

Доказати да ниједан члан овог низа није већи од 2 и да је $a_{999} \leq \sqrt{2}$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ШЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Модрича, 20.03.1999.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако је

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$

доказати да је

$$x^3+y^3+z^3=1.$$

2. Нека је O центар описане кружнице и H ортоцентар троугла ABC. Ако је $\sphericalangle ACB=60^\circ$, доказати да је права OH симетрала једног од углова између правих AH и BH.

3. Унутар јединичног квадрата се налази 9 тачака, од којих су сваке 3 неколинеарне. Доказати да 3 од њих образују троугао површине мање од $\dfrac{1}{8}$.

4. Доказати да једначина

$$m^4-n^4=7(m^3+n^3)$$

нема рјешења у скупу природних бројева.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{25-x}=5.$$

2. Нека је O пресјечна тачка дијагонала паралелограма $ABCD$ $(\sphericalangle ABC>90^0)$ и K,L,M подножја нормала спуштених из тачке D редом на праве AB, BC и AC. Доказати да тачка O лежи на кружници описаној око троугла KLM.

3. Нека су m и n природни бројеви већи од 1. Доказати да се правоугаона табла $m\times n$ може покрити фигурама облика као на слици 2.3, ако и само ако је број mn дјељив са 8.

4. Ако за природне бројеве a и b вриједи

$$(a-1)^2+(b+1)^2=6ab+1,$$

доказати да су a, b, $2a-1$ и $2b+1$ потпуни квадрати.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ вриједи

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2 + \sqrt{2}\,.$$

2. Ријешити у скупу цијелих бројева систем:

$$x^2 = 3x + yz,$$
$$y^2 = 3y + zx,$$
$$z^2 = 3z + xy.$$

Доказати да за свако реално рјешење овог система вриједи

$$-4 \leq xyz \leq 0.$$

3. Ако за пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бројева $1, 2, \ldots, n$ вриједи

$$\frac{1 + a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k}\,, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

доказати да је она идентична.

(Нека је $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Пермутација* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ је бијекција $\pi : S \to S$, таква да је $\pi(i) = a_i$.)

4. Нека су m, n цијели бројеви за које је

$$\frac{m^3 - n^3 + 1999m}{mn^2}$$

такође цио број. Доказати да је један од бројева $m, 1999m$ потпун куб.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$x^4 - y^4 = 5(x^3 + y^3).$$

2. Нека је $x_1 \in \mathbb{R}$ и нека је бесконачан низ (x_n) реалних бројева дефинисан рекурентном формулом

$$x_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Наћи x_{1999}.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

СЕДМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 01.04.2000.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Одредити најмањи природан број n такав да у децималном запису броја $\sqrt{n^2+4}$ прве три цифре послије децималног зареза буду нуле.

2. У поља шаховске табле 8×8 су уписани бројеви од 1 до 64 (редом од доњег лијевог до горњег десног угла). Ако се на таблу постави 8 топова тако да се међусобно не нападају, доказати да је збир бројева на којима се топови налазе увијек исти.

3. Нека су r_1 и r_2 полупречници кружница са центрима на хипотенузи AB правоуглог троугла ABC, при чему прва кружница додирује катету AC и висину троугла повучену из тјемена C, а друга кружница катету BC и исту висину. Доказати да је $r_1 + r_2 = 2r$, гђе је r полупречник кружнице уписане у троугао ABC.

4. Доказати да не постоје цијели бројеви m и n такви да је $m^3 + 3n^2 + 3$ потпун куб.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да не постоји природан број n за који би једначина

$$x^2 + (n+3)x - n = 0,$$

имала рјешење у скупу рационалних бројева.

2. Нека су D и E средишта страница BC и AC троугла ABC и T његово тежиште. Доказати да се око четвороугла $CDTE$ може описати кружница ако и само ако је $a^2 + b^2 = 2c^2$.

3. У оштроугли троугао уписана су три квадрата тако да два тјемена сваког квадрата леже на једној страници троугла, а друга два тјемена леже на друге двије странице. Доказати да квадрат чија страница лежи на најмањој страници троугла има највећу површину.

4. Ријешити у скупу цијелих бројева систем

$$x + y - z = 20,$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = 10.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ такве да за све $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вриједи

$$f(mn) = f(m)f(n),$$
$$f(|m-n|) = |f(m) - f(n)|.$$

2. Нека подножје D висине CD троугла ABC припада страници AB тог троугла и нека су r, r_1, r_2 полупречници кружница уписаних у троуглове ABC, ACD, BCD редом. Доказати да је

$$r + r_1 + r_2 = CD$$

ако и само ако је $\gamma = 90^o$.

3. Шаховска табла 8×8 је покривена са 16 Т–тетрамино фигура. Уочимо 14 правих које сијеку ту таблу, паралелне су некој ивици табле и налазе се на цјелобројном растојању од те ивице. Доказати да бар 10 од тих правих сијеку тачно 4 Т–тетрамино фигуре.

(T*–тетрамино* фигура је фигура која има облик слова T и састављена је од 4 јединична квадрата.)

4. Одредити све природне бројеве n за које је $2^n + n^2 + 1$ потпун квадрат.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Низ (x_n) је дефинисан рекурентном формулом

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \quad \text{и} \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказати да за свако $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вриједи

$$1 - 2^{-2^n} < x_n < x_{n+1}^2 < 1.$$

2. Одредити за које позитивне m једначина

$$x^3 - 2x^2 + x - m = 0$$

има два коријена који су по модулу мањи од 1.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ОСМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Пале, 07.04.2001.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Конструисати троугао ако су дате пресјечне тачке кружнице описане око тог троугла са продужецима његових висина.

2. Доказати да једначина
$$2x^2 - 11y^2 = 2001$$
нема цјелобројних рјешења.

3. Доказати да у правоуглом троуглу вриједи
$$(1+\sqrt{2})r \le R.$$

4. Шаховска табла 8×8 је покривена доминама. Неке од њих су постављене хоризонтално, а преостале вертикално. Доказати да и хоризонталних и вертикалних домина има паран број.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да једначина
$$x^3 + 10y^3 = 2001$$
нема цјелобројних рјешења.

2. Ријешити у скупу реалних бројева једначину
$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{4x-2}\,.$$

3. Око једнакостраничног троугла ABC странице 1 је описана кружница. Нека је M средиште лука AB, коме не припада тачка C, и нека је N тачка на правој CA таква да је A средиште дужи CN. Нека кружница описана око троугла CMN сијече страницу AB у тачки D. Наћи дужину дужи AD.

4. Доказати да се правилни шестоугао странице 1 може покрити са три круга полупречника $\dfrac{3}{4}$, а да се не може покрити са три квадрата странице 1.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека су K, L, M, N редом средишта страница AB, BC, CD, DA конвексног четвороугла $ABCD$. Унутар тог четвороугла одредити тачку P такву да површине четвороуглова $AKPN$, $BLPK$, $CMPL$, $DNPM$ буду једнаке.

2. Нека је p прост број. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{p}\,.$$

3. Квадрат странице 10 је покривен повезаним фигурама састављеним од 4 јединична квадрата (тзв. *тетрис* фигурама). Доказати да међу њима има бар шест подударних.

4. Доказати да у троуглу вриједи

$$\frac{6}{7} \leq \frac{1}{3+\cos\alpha} + \frac{1}{3+\cos\beta} + \frac{1}{3+\cos\gamma} < 1.$$

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Исти као задатак 1 за трећи разред.

2. Нека је p прост број. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{p}\,.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Низови (a_n) и (b_n) су дефинисани са

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, & a_2 = 2, & a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, & (n > 1), \\ b_1 = 1, & b_2 = 4, & b_{n+1} = 7b_n - b_{n-1} - 2, & (n > 1). \end{array}$$

Доказати да је $b_n = a_n^2$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

ДЕВЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 27.04.2002.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за реалне бројеве x, y, z важи

$$\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x},$$

доказати да су они међусобно једнаки.

2. На страници BC једнакокраког троугла ABC $(AC = BC)$ дата је тачка D $(D \neq C)$ таква да је $AD^2 = BD \cdot BC$. Доказати да је $AD = AB$.

3. Доказати да не постоји природан број n такав да је број $2^n + n^2$ дјељив са 2002.

4. Нека је $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и нека је у правоуглом координатном систему означено, на произвољан начин, 17 тачака из скупа $S \times S$. Доказати да постоје три означене тачке A, B, C такве да је B средиште дужи AC.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $a > 0$ и $0 < b < 1$ вриједи

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

2. Нека су D, E редом средишта страница AB и AC троугла ABC и M пресјечна тачка симетрале угла BAC са страницом BC. Доказати да вриједи:

(и) Ако је четвороугао $ADME$ тетиван, онда је $AD \cdot AE = MD \cdot ME$.

(ии) Ако је $AD \cdot AE = MD \cdot ME$, тада је четвороугао $ADME$ тетиван или је ромб.

3. Доказати да је број $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ ирационалан, гђе је

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је број простих дјелитеља броја } n \text{ непаран}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

4. Коначно много равни дијеле простор на неколико области. Доказати да се могу одабрати двије области које се налазе са различитих страна сваке од тих равни.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Једнакостранични троугао ABC је уписан у кружницу k. На страницама AC и AB узете су тачке M и N, редом, тако да је $AM = 2MC$ и $AN = NB$. Полуправа MN сијече кружницу k у тачки P. Доказати да је

$$\frac{PA}{PB} - \frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $xyz = x + y + z + 2$. Доказати неједнакост

$$5(x + y + z) + 18 \geq 8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}).$$

3. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да је укупан број уређених тројки (A, B, C) подскупова скупа S таквих да је

$$A \subseteq B \subseteq C \quad \text{и} \quad \mid B \mid = \frac{\mid A \mid + \mid C \mid}{2}$$

једнак $\binom{2n}{n}$. (Са $\mid X \mid$ је означен број елемената скупа X.)

4. За природан број n означимо са $\varphi(n)$ број природних бројева који нису већи од n и који су релативно прости са n. Наћи све природне бројеве n за које $\varphi(n) \mid n$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су D, E редом средишта страница BC и AC троугла ABC и O, S редом центри описане и уписане кружнице. Доказати да тачке D, E, O, S припадају истој кружници ако и само ако је

$$AC + BC = 2AB.$$

2. Нека су x_1, $x_2, \ldots, x_n$ бројеви из интервала $(0, \pi/2)$ такви да је

$$\mathrm{tg} x_1 + \mathrm{tg} x_2 + \cdots + \mathrm{tg} x_n \leq n.$$

Доказати да је

$$\sin x_1 \, \sin x_2 \ldots \sin x_n \leq (\sqrt{2})^{-n}.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Србац, 05.04.2003.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је $xy + yz + 2zx \le \dfrac{1}{2}$.

2. Означимо са $F(k)$ број цифара у децималном запису природног броја k, које су различите од 1. Низ (a_n) је дефинисан рекурентном формулом

$$a_{n+1} = a_n + F(a_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

при чему је почетни члан a_1 произвољан природан број.
Да ли је низ (a_n) обавезно константан почевши од неког члана?

3. Дата је полукружница са центром O и пречником AB. Нека је M произвољна тачка дужи AO, а C и D тачке на тој полукружници такве да је $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$. Доказати да тачке O, C, D, M леже на једној кружници.

4. У некој скупштини је подијељено 200 посланичких мјеста између 8 политичких странака тако да никојих 5 странака нема двотрећинску већину. Доказати да постоје двије странке које имају једнак број посланика.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 3$. Доказати да је $xy + yz + zx - xyz \le \dfrac{9}{4}$.

2. Доказати да ако у конвексном четвороуглу вриједе било које двије од сљедећих тврдњи, тада вриједи и трећа тврдња:

(i) четвороугао је тангентни;

(ii) дијагонале четвороугла су нормалне;

(iii) једна од дијагонала четвороугла полови другу дијагоналу.

3. Природан број k називамо *добрим* ако постоји бесконачно много уређених парова (a, b) природних бројева таквих да трином $kx^2 + ax + b$ има цјелобројне коријене и да постоји природан број n такав да су a и b редом сума и производ цифара броја n. Доказати да постоји бесконачно много добрих природних бројева.

4. У фудбалском првенству неке државе учествује 18 екипа. Након 6 одиграних кола све екипе су имале различит број освојених бодова. Одредити колико је било неријешених утакмица.
(У сваком колу се одигра 9 утакмица. Свака екипа за побједу добија 3 бода, за неријешен резултат 1 бод, а за пораз 0 бодова.)

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека су a и b реални бројеви. Доказати да једначина

$$x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx + 1 = 0$$

има 4 различита коријена модула 1 ако и само ако је $a = b$ и $2 < |a| < \dfrac{5}{2}$.

2. Дат је трапез $ABCD$ са основицама $AB = 2$ и $CD = 1$, краком $BC = \sqrt{3}$ и углом $\sphericalangle ABC = 70^\circ$. Нека је E тачка унутар тог трапеза таква да је $\sphericalangle ECB = 10^\circ$ и $\sphericalangle EBC = 20^\circ$. Доказати да је троугао AED једнакостраничан.

3. Природан број $n > 1$ је *тотално практичан* ако се сваки природан број који је мањи од n може на јединствен начин представити у облику збира различитих дјелилаца броја n. Доказати да је сваки тотално практичан број степен броја 2.

4. У унутрашњости конвексног n–угла $A_1A_2\ldots A_n$ дата је тачка M, која се не налази ни на једној његовој дијагонали. За $i = 1, 2, \ldots, n$ конструисане су полуправе A_iM. Свака од тих полуправих сијече неку страницу многоугла у њеној унутрашњој тачки. Уочене су све пресјечне тачке полуправих A_iM са страницама многоугла. Нека је e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ број уочених тачака на страници A_iA_{i+1} $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Доказати да је број $1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + \ldots + n \cdot e_n$ дјељив са n.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a и x_1 реални бројеви и

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot x_n + \frac{a}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Доказати да је низ (x_n) конвергентан и одредити његову граничну вриједност.

2. На свакој од страна тетраедра уочена је по једна тачка, тако да је свака од 6 правих које одређују 2 од 4 уочене тачке паралелна са неком од ивица тетраедра. Доказати да су уочене тачке тежишта страна тетраедра.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

11. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Теслић, 24.04.2004.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да се куб сваког природног броја већег од 1 може представити у облику разлике квадрата двају природних бројева.

2. Нека је T тежиште и S центар уписане кружнице троугла ABC. Доказати да су сљедећа тврђења еквивалентна:

(i) права TS је паралелна некој страници троугла ABC;

(ii) једна од страница троугла ABC је једнака полузбиру двије преостале странице.

3. Углови на основици AB једнакокраког троугла ABC су по $80°$. Права која пролази кроз тјеме B и центар кружнице описане око тог троугла сијече страницу AC у тачки D. Доказати да је $AB = CD$.

4. Скуп $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ је најприје разбијен на m непразних подскупова, а затим на m^2 непразних подскупова. Доказати да су неких m елемената скупа S у првом разбијању били сви у једном скупу, а у другом разбијању сви у различитим скуповима.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}\,.$$

2. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB и углом код тјемена C мањим од $60°$. Нека су O, S редом центри описане и уписане кружнице троугла ABC и D пресјечна тачка кружнице описане око троугла AOS са страницом AC. Доказати да је $SD \parallel BC$ и
$AS \perp OD$.

3. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да су сви коријени једначина

$$x^2 - ax + a + b - 3 = 0,$$
$$x^2 - bx + a + b - 3 = 0,$$

такође природни бројеви.

4. Шаховска табла 8×8 је на произвољан начин покривена доминама 2×1. Доказати да краљ може обићи таблу тако да на сваком пољу буде тачно једанпут и тако да иде домину по домину (тј. кад први пут стане на поље неке домине, краљ одмах прелази на друго поље те домине).

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. (a) Низ (a_n) реалних бројева је дефинисан са

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = p\,, \quad a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} \ \ (n > 1).$$

Доказати да је за $n > 1$ полином $x^n - a_n x + a_{n-1}$ дјељив са $x^2 - px + 1$.

(b) Користећи резултат под (a) ријешити једначину $x^4 - 56x + 15 = 0$.

2. Доказати да за позитивне бројеве x, y, z такве да је $x + y + z = 1$ важи

$$\sqrt{3xyz}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}\right) \geq 4 + \frac{4xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\,.$$

3. Шаховска табла 8×8 је на произвољан начин разбијена на домине 2×1. Доказати да је могуће уписати по један природан број у свако поље табле, тако да у свим доминама буде једнак збир и тако да бројеви уписани у сусједна поља (са заједничком ивицом) буду узајамно прости ако и само ако припадају једној домини.

4. Конвексан многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ је дијагоналама које се не сијеку разбијен на неколико троуглова, тако да из сваког тјемена тог n–тоугла полази паран број дијагонала (могуће и ниједна), осим из тјемена A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_k}, гдје је $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Доказати да је тада k парно и

$$\begin{aligned} n &\equiv i_1 - i_2 + \cdots + i_{k-1} - i_k \pmod 3, \quad \text{za} \quad k > 0, \\ n &\equiv 0 \pmod 3, \quad \text{za} \quad k = 0. \end{aligned}$$

(Овакво разбијање на троуглове назива се *триангулација* многоугла.)

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Исти као задатак 1 за трећи разред.

2. Доказати да за $0 < x < \pi/2$ важи неједнакост $\sin x > \dfrac{4x}{x^2+4}$.

3. Дат је низ (a_n) реалних бројева са коначним скупом вриједности. Ако за свако $k > 1$ подниз (a_{kn}) периодичан, да ли је тада и низ (a_n) обавезно периодичан?

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

12. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 23.04.2005.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је у правоуглом троуглу ABC тачка D подножје висине из тјемена C правог угла и O_1, O_2 центри кружница уписаних у троуглове ACD и BCD редом. Нека кружница са центром C и полупречником CD сијече катете AC и BC редом у тачкама M и N.

(а) Доказати да су тачке O_1, O_2, M, N колинеарне.

(б) Доказати да је $MN > 2\,O_1O_2$.

2. Одредити међусобно различите цифре a, b, c, d ($a \neq 0,\ b \neq 0$) тако да важи

$$\overline{abc} \cdot \overline{bac} = \overline{adabc}.$$

3. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

4. Нека су m, n природни бројеви већи од 2. У поља правоугаоне табле $m \times n$ је уписан по један број, тако да за свако поље вриједи: *збир бројева у том пољу и њему сусједним пољима једнак је нули.* Доказати да на тој табли постоје два једнака броја.
(Два поља су сусједна ако имају бар једно заједничко тјеме.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је конвексан многоугао $A_1A_2\ldots A_n$. Нека је B_i пресјечна тачка дијагонала A_iA_{i+2} и $A_{i+1}A_{i+3}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Познато је да су симетрале унутрашњих углова многоугла $A_1A_2\ldots A_n$ истовремено симетрале страница многоугла $B_1B_2\ldots B_n$ (симетрала угла $\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ је симетрала странице $B_{i-1}B_i$).

(а) Доказати да је многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ тангентан, а многоугао $B_1B_2\ldots B_n$ тетиван.

(б) Ако је $n = 2005$, доказати да је многоугао $A_1A_2\ldots A_{2005}$ правилан.

2. Ако средњи по величини међу позитивним бројевима a, b, c није већи од геометријске средине остала два броја, доказати да је

$$abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3.$$

3. Наћи све сложене бројеве n за које важи: ако су $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k < d_{k+1} = n$ сви дјелиоци броја n, тада су $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3, \ldots, d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ такође дјелиоци броја n.

4. Свако поље квадратне таблице 30×30 обојено је црном или бијелом бојом, при чему има 450 бијелих и 450 црних поља. У потезу је дозвољено разрезати таблицу на правоугаонике 3×1, па од тих правоугаоника саставити нову таблицу 30×30. Да ли је увијек могуће послије неколико таквих потеза добити таблицу у којој су сва бијела поља на горњој половини, а сва црна поља на доњој половини?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је у троуглу ABC $(AB \neq AC)$ симетрала угла $\sphericalangle BAC$ такође симетрала угла између висине AD и тежишнице AE. Одредити угао $\sphericalangle BAC$.

2. Доказати да у оштроуглом троуглу важи

$$\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma} + \sqrt{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha} + \sqrt{\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta} \leq \frac{3\sqrt{6}}{4}\,.$$

3. Наћи све сложене бројеве n за које важи: ако су $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k < d_{k+1} = n$ сви дјелиоци броја n, тада су $d_1 + d_2$ и $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ такође дјелиоци броја n.

4. Доказати да за свако n постоји граф чији су сви циклуси дужине бар $2n + 3$ и чији се чворови могу означити бројевима од 1 до $2n + 1$, тако да се бројеви којима су означена било која два сусједна чвора разликују за 1 по модулу $2n + 1$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Над висином BD троугла ABC, као над пречником, конструисана је кружница која сијече странице AB и BC у тачкама K и L. Тангенте ове кружнице у тачкама K и L се сијеку у тачки M. Доказати да права BM полови дуж AC.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. У затвор је доведено 100 заробљеника. Надзорник им је рекао: „*Даћу вам једно вече да поразговарате међусобно, затим ћу вас распоредити по одвојеним ћелијама па више нећете моћи комуницирати. Понекад ћу неког од вас доводити у просторију у којој се налази лампа (на почетку је лампа искључена). Одлазећи из собе ви можете оставити лампу укључену или искључену, како хоћете.*
Ако ми у неком тренутку неко од вас каже да сте сви ви већ били у соби и ако буде у праву, онда ћу вас наставити доводити у собу све док ми још неко други не каже да сте сви већ били у соби. Ако и он буде у праву, све ћу вас пустити на слободу. Ако било ко погријеши, све ћу вас бацити крокодилима. И немојте се бринути да ћу неког заборавити – ако будете ћутали, сви ћете бити у соби са лампом и никоме ниједна посјета собе неће бити посљедња."
Могу ли заробљеници смислити стратегију која им гарантује избављење?

13. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 29.04.2006.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Природни бројеви a, b и c су такви да су $a+c$ и $b+c$ квадрати узастопних природних бројева. Доказати да су $ab+c$ и $ab+a+b+c$ такође квадрати узастопних природних бројева.

2. У троуглу ABC су углови у тјеменима A, B, C редом $70°$, $60°$ и $50°$. Нека су D и E тачке на страницама BC и AC такве да је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE = 20°$. Нека је F пресјечна тачка правих AD и BE и G подножје нормале из E на BC. Доказати да је $FG \parallel AC$.

3. Конструисати троугао ако су му дати положајем тежижте и подножја висине и симетрале угла из тјемена A.

4. На табли је записано 5 природних бројева. У једном кораку се бирају нека два записана броја a и b, таква да је $a < b$ и a не дијели b. Они се бришу и умјесто њих се на таблу записују бројеви НЗД(a, b) и НЗС(a, b). Колико је максимално оваквих корака могуће направити? Навести примјер петорке за коју се тај максималан број може остварити.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека су над страницама троугла ABC, површине P, извана конструисани квадрати ACC_2A_1, BAA_2B_2 и CBB_1C_1. Доказати да се од дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 може конструисати троугао и израчунати му површину.

2. Ако је површина троугла са цјелобројним дужинама страница рационалан број, доказати да је његов обим паран број.

3. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt{x-x^2} - \sqrt{3x-x^2} + \sqrt{1-4x+2x^2} = 1.$$

4. Дата је таблица $2 \times n$, гђе је n паран природан број. Петар на произвољан начин уписује у поља те таблице бројеве $1, 2, \ldots, 2n$ (сваки број по једанпут и у свако поље по један број). Затим Павле такође на произвољан начин разбија дату таблицу на домине 2×1 (међу којима може бити и хоризонталних и вертикалних). Рачуна се производ бројева записаних у пољима сваке домине, па се ти производи саберу и добија се број s. Доказати да Петар увијек може постићи да буде

$$s \leq \frac{n(4n^2+6n+5)}{6}.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У правоуглом координатном систему у равни дат је цјелобројан троугао чија је површина 1/2. Доказати да центар његове описане кружнице није цјелобројна тачка.

(*Цјелобројна тачка* је тачка чије су обје координате цијели бројеви. *Цјелобројан троугао* је троугао чија су сва три тјемена цјелобројне тачке.)

2. Нека су r_1, r_2, r_3 и r_4 полупречници четири круга који додирују краке CA и CB троугла ABC, тако да прва два још додирују страну AB изнутра и извана, а трећи и четврти још описани круг троугла ABC изнутра и извана, редом. Доказати да је

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}\,.$$

3. Ако за природне бројеве a, b, c, d важи

$$2(ac + bd) \leq a^2 + b^2 \leq c^2 + d^2,$$

доказати да је

$$|ad - bc| \geq 15.$$

4. На табли је записано n природних бројева. У једном кораку се бирају нека два записана броја a и b, таква да је $a < b$ и a не дијели b. Они се бришу и умјесто њих се на таблу записују бројеви $\mathrm{NZD}(a, b)$ и $\mathrm{NZS}(a, b)$. Колико је максимално оваквих корака могуће направити? Навести примјер n–торке за коју се тај максималан број може остварити.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > n - 1.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Дат је конвексан петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Нека су M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 редом средишта страница A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1. Ако је

$$\frac{A_1M_3}{A_3A_4} = \frac{A_2M_4}{A_4A_5} = \frac{A_3M_5}{A_5A_1} = \frac{A_4M_1}{A_1A_2} = \frac{A_5M_2}{A_2A_3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}\,,$$

доказати да је петоугао правилан.

14. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Зворник, 21.04.2007.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Одредити све просте бројеве p за које се разломак $\dfrac{p}{14}$ може представити у облику збира реципрочних вриједности два природна броја.

2. Одредити све природне бројеве n за које се све странице и дијагонале конвексног $n-$угла могу обојити са двије боје тако да из сваког његовог тјемена излази једнак број дужи обје те боје.

3. На страницама AD и BC конвексног четвороугла $ABCD$ дате су тачке M и N. Права MN сијече дијагонале AC и BD редом у тачкама P и Q ($P \neq Q$). Ако се описане кружнице троуглова AMP, BNQ, CNP, DMQ сијеку у једној тачки, доказати да је $AM : MD = CN : NB$.

4. Ако за реалне бројеве x, y, z важи $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, доказати да је

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}\,.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да постоји бесконачно много тројки узастопних природних бројева од којих се сваки може представити у облику збира квадрата два цијела броја.

2. У равни је дат конвексан петоугао чији су сви углови тупи. Доказати да се могу наћи двије његове дијагонале, такве да два круга конструисана над тим дијагоналама као пречницима покривају читав петоугао.

3. На страницама AB и AC троугла ABC дате су произвољне тачке B' и C'. Описани кругови троуглова ABC и $AB'C'$ сијеку се у тачкама A и P. Подножја нормала из тачке P на праве AB и AC су тачке M и N. Доказати да је $MN \parallel HH'$, при чему су H и H' ортоцентри троуглова ABC и $AB'C'$.

4. На почетку су на табли написани полиноми $P_1(x) = x^2 + x - 2$, $P_2(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ и $P_3(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$. Сваке минуте се бришу нека два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ и умјесто њих на таблу се записују полиноми $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$. Да ли је могуће да се послије извјесног времена на табли нађе полином у коме се појављују само парни степени од x?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити систем

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= 3, \\ y^2 - zx &= 4, \\ z^2 - xy &= 5. \end{aligned}$$

2. Конвексан $n-$угао $(n > 5)$ је дијагоналама које се не сијеку разбијен на троуглове. Доказати да постоји дијагонала која од тог $n-$угла одсијеца четвороугао или петоугао.

3. Наћи све парове (p, q) простих бројева такве да $pq \mid p^2 - q^2 + 1$.

4. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ сијеку се у тачки S. Ако је $\angle SAB = 15^\circ$, $\angle SBC = 45^\circ$, $\angle SCD = 45^\circ$, $\angle SDA = 75^\circ$, доказати да је четвороугао $ABCD$ или тетивни или тангентни.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дијагонале AC и BD тетивног четвороугла $ABCD$ сијеку се у тачки S под правим углом. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови страницу AD.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Доказати да за сваки паран природан број k постоји природан број n такав да остатак при дијељењу полинома $(x+1)^n - 1$ са полиномом $x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1$ има све коефицијенте парне.

15. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 12.04.2008.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и ACтакве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

(a) $AE = BF = CD$,

(b) Четвороуглови $ADPF$, $BEPD$ и $CFPE$ су тетивни.

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 + q^2 = r^3 + 2.$$

3. Доказати да за ненегативне бројеве x и y важи

$$(x + y)^2(x^2 + 27y^2) \geq 64x^2y^2.$$

4. У поља шаховске табле 8×8 уписани су бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 16\}$ тако да је сваки број уписан у тачно четири поља. Доказати да постоје два сусједна поља у која су уписани бројеви чија разлика није мања од 3.
(Два поља су сусједна ако имају заједничку тачку.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све природне бројеве k за које се скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ може подијелити на k дисјунктних подскупова, тако да су суме елемената у свим подскуповима једнаке.

2. Дат је четвороугао $ABCD$ који је тетиван и тангентан. Уписани круг додирује странице AB, BC, CD, DA редом у тачкама K, L, M, N. Доказати да су средишта страница четвороугла $KLMN$ тјемена тетивног четвороугла.

3. Доказати да за позитивне бројеве a, b и природан број $n > 1$ важи

$$(a^n + b^n)^2 \geq 2(ab)^{n-1}(a^2 + b^2)$$

.

4. Доказати да се у сваки троугао површине 1 може смјестити једнакокраки троугао површине $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и AC такве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

$$PC \geq PE + PF \geq 2\,PD.$$

2. Два играча наизмјенично уписују произвољне природне бројеве у слободна поља таблице 8×8. Кад се таблица попуни рачунају се суме бројева по врстама и колонама. Број поена првог играча је број колона са парном сумом, а број поена другог играча је број врста са парном сумом.

(a) Доказати да други играч увијек може играти тако да освоји већи број поена.

(b) Колику највећу разлику поена може гарантовати други играч?

3. Ријешити у скупу реалних бројева систем

$$x + y^2 = z^3,$$

$$y + z^2 = x^3,$$

$$z + x^2 = y^3.$$

4. Ако су m, n p природни бројеви такви да је

$$\frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m} + \frac{p}{n-m} = 2008,$$

доказати да се бар један од разломака $\dfrac{m}{n-p}$, $\dfrac{n}{p-m}$, $\dfrac{p}{n-m}$ може скратити.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и AC такве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF).$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је n природан број. Доказати да се скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1}\}$ може подијелити на два дисјунктна подскупа тако да су суме $k-$тих степена елемената оба подскупа једнаке, за $k = 0, 1, \ldots, n$.

16. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 11.04.2009.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати да из $a^2+b^2=c^2$ слиједи

$$\frac{a^2+(c-b)^2}{b^2+(c-a)^2}=\frac{c-b}{c-a}\,.$$

Да ли важи обрнуто тврђење?

2. Наћи све парове (p,q) простих бројева такве да су бројеви

$$pq+p+q,\ \ pq+p-q,\ \ pq-p+q,\ \ pq-p-q$$

такође прости.

3. Доказати да у конвексном $n-$углу $A_1A_2\dots A_n$ постоји $i\in\{1,2,\dots,n\}$ такво да је $A_iA_{i+3}<3\,A_{i+1}A_{i+2}$, при чему је $A_{n+1}\equiv A_1,\ A_{n+2}\equiv A_2,\ A_{n+3}\equiv A_3$.

4. Једнакостраничан троугао је разбијен на коначно много четвороуглова. Доказати да међу тјеменима тих четвороуглова обавезно постоје три колинеарне тачке.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. (a) Одредити најмањи број a и највећи број b тако да за сваки природан број n важи

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+a}}<\frac{2n}{2n+1}<\sqrt{\frac{2n}{2n+b}}\,.$$

(b) Доказати да је

$$\frac{7}{41}<\frac{50}{51}\cdot\frac{52}{53}\cdot\frac{54}{55}\cdot\dots\cdot\frac{1680}{1681}<\frac{5}{29}\,.$$

2. Одредити највећи троцифрен прост број p за који једначина

$$(1+x^2+xy)^2+y^2=p$$

има бар једно цјелобројно рјешење.

3. Нека кружница уписана у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама K, L, M и нека је P тачка на тој кружници таква да је MP њен пречник. Доказати да је $\angle APB=90^\circ$ ако и само ако је $AB=3\,CK$.

4. Мање од $\dfrac{n}{m}$ тјемена датог правилног $n-$угла обојено је црвеном бојом, док су остала тјемена плава. Нека је M произвољан $m-$угао чија су тјемена нека од тјемена датог $n-$угла. Доказати да постоји $m-$угао чија су сва тјемена плава и који је подударан са M.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да је
$$\frac{\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ}{\sin(13^\circ + 43^\circ + 73^\circ)} = \frac{1}{4}\,.$$

2. У равни је дат троугао са цјелобројним координатама тјемена. Које од сљедећих тачака у том троуглу

(a) тежиште;

(b) ортоцентар;

(c) центар описане кружнице;

(d) центар уписане кружнице,

обавезно морају имати рационалне координате?

3. Вишњичица и Трешњичица играју сљедећу игру. На почетку Вишњичица разбија дати једнакостранични троугао на коначно много четвороуглова. Затим, Трешњичица и Вишњичица наизмјенично боје тјемена четвороуглова једном од четири боје, при чему први потез има Трешњичица. Игра је завршена када су обојена сва тјемена. Побједник је Вишњичица ако постоји четвороугао чија су сва тјемена обојена различитим бојама. Иначе, побједник је Трешњичица. Која од играчица има побједничку стратегију?

4. Доказати да не постоје природни бројеви x и y такви да су $x^2 + y^2$ и $x^2 + 4y^2$ потпуни квадрати.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако су производи косинуса наспрамних углова четвороугла једнаки, доказати да је тај четвороугао трапез.

2. Колико се највише бројева може изабрати из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ тако да не постоје два међу њима, чији збир је дјељив њиховом разликом?

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако је $a^2+b^2=c^2$, тада је

   $$\frac{a^2+(c-b)^2}{b^2+(c-a)^2}=\frac{c^2-b^2+(c-b)^2}{c^2-a^2+(c-a)^2}=\frac{(c-b)(c-b+c+b)}{(c-a)(c-a+c+a)}=\frac{c-b}{c-a}.$$

   Обрнуто не важи. Један контрапримјер је $a=b=1$, $c=2$.

2. Разликујемо два случаја.

   1° Ни p ни q није дјељиво са 3. Ако је пар остатака које p и q дају при дијељењу са 3 једнак $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ или $(2,2)$, онда је $pq+p+q$, $pq+p-q$, $pq-p+q$ или $pq-p-q$ дјељиво са 3, редом. Како су посљедња четири броја проста, то је један од њих једнак 3. Из $pq\geq 2q$ слиједи $pq+p-q\geq p+q>3$, те једино $pq-p-q$ може бити једнако 3, што значи да је $(p-1)(q-1)=4$, те је $p=2$, $q=5$ или $p=5, q=2$, јер смо претпоставили да ни p ни q нису дјељиви са 3.

   2° Један од бројева p и q је дјељив са 3. Можемо претпоставити да је $q=3$. Сада имамо да су бројеви $2p-3$, $2p+3$, $4p-3$, $4p+3$ прости. Посматрајмо остатак који p даје при дијељењу са 5. Ако је он једнак $1,2,3$ или 4, онда је $2p+3$, $4p-3$, $4p+3$ или $2p-3$ дјељиво са 5, тј. једнако 5. То нам даје да је $p=1$, $p=2$, $p=\frac{1}{2}$, $p=4$. Непосредном провјером добијамо да $p=2$ није рјешење. Остала је још могућност да је $p=5$, која нам даје још једно рјешење.

   Дакле, тражени парови су $(2,5)$, $(5,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$.

3. Нека је $A_iA_{i+1}=a_i$, $A_{i-i}A_{i+2}=d_i$. Претпоставимо супротно, да је $d_i\geq 3a_i$, за свако $i=\overline{1,n}$. Слиједи да је $d_1+d_2+\ldots+d_n\geq 3(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. С друге стране, сабирањем неједнакости $a_1+a_2+a_3>d_2$, $a_3+a_3+a_4>d_3,\ldots,a_{n-1}+a_n+a_1>d_n$, $a_n+a_1+a_2>d_1$ добијамо да је $3(a_1+a_2+\ldots+a_n)>d_1+d_2+\ldots+d_n$, што нам даје контрадикцију.

4. Претпоставимо супротно, тј. да не постоје три колинеарне тачке. Тада је свака унутрашња дуж (дуж чији бар један крај није на контури троугла) страница за тачно 2 четвороугла, док је свака од страница једнакостраничног троугла страница за тачно један четвороугао. Ако је k број унутрашњих дужи и n број четвороуглова, добијамо да је $2k+3=4n$, што нам даје контрадикцију.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Лијева неједнакост се након квадрирања, множења са $(2n+a)(2n+1)^2$ и сређивања своди на њој еквивалентну неједнакост
$$4(a-1)n^2+2n+1 \geq 0,$$
па је $a=1$ најмањи такав a. Аналогно је десна неједнакост еквивалентна са $2(b-2)n<1$, па је $b=2$ највећи такав број.

   Множењем неједнакости
$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} < \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad n=25,26,\dots,840$$
добијамо (б).

2. Користимо идентитет
$$(x^2+1)(s^2+1)=(s-x)^2+(sx+1)^2.$$
Узимајући $s=x+y$ добијамо да је
$$(x^2+1)((x+y)^2+1)=p,$$
те мора бити $x=0$ или $x+y=0$. Одавде слиједи да је p облика n^2+1.

   За $n=30$ и $n=28$ број n^2+1 није прост, па је $p=677$ тражени прост број.

3. Користићемо стандардне ознаке за елементе троугла. Услов $\angle APB=90^\circ$ је еквивалентан са сличношћу троуглова APM и PBM, што је даље еквивалентно са
$$\frac{AM}{MP}=\frac{MP}{BM}\,,$$
односно са
$$\frac{s-a}{2r}=\frac{2r}{s-b}\,.$$
Како је
$$r=\frac{P}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,,$$
посљедња једнакост је еквивалентна са
$$4(s-c)=s\,.$$
С друге стране, једнакост $AB=3CK$, односно $c=3(s-c)$, очигледно је еквивалентна такође са $4(s-c)=s$.

4. Претпоставимо супротно, тј. да сваки m-угао подударан са M има бар једно црвено тјеме. Посматрајмо многоуглове $M_1, M_2, \ldots, M_n$, при чему се M_k добија ротацијом многоугла M за угао $\frac{2k\pi}{n}$ за $k = 1, \ldots, n$. По претпоставци сваки од тих многоуглова има бар једно црвено тјеме. Такође, свако црвено тјеме је тјеме за тачно m од многоуглова $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (једанпут прво тјеме, једанпут друго, ..., једнанпут m-то). За сваки многоугао M_k (за $k = 1, \ldots, n$) изаберимо по једно његово црвено тјеме A_k. У низу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ свака црвена тачка се појављује највише m пута. Како црвених тачака има мање од n/m, то је контрадикција.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Дата једнакост је еквивалентна са сљедећим.

$$
\begin{aligned}
4\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ &= \sin 129^\circ, \\
2\cos 13^\circ(\sin(43^\circ + 73^\circ) - \sin(73^\circ - 43^\circ)) &= \sin 51^\circ, \\
2\cos 13^\circ \sin 116^\circ - \cos 13^\circ &= \cos 39^\circ, \\
\sin 129^\circ + \sin 103^\circ &= \cos 39^\circ + \cos 13^\circ.
\end{aligned}
$$

Посљедња једнакост очигледно важи.

2. Нека су $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ три неколинеарне цјелобројне тачке. Тада су координате тежишта троугла ABC

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \in \mathbb{Q}\,,\; y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \in \mathbb{Q}\,.$$

Коефицијент правца праве BC је

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B},$$

те је једначина висине из тјемена A

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}.$$

Према томе, координате ортоцентра представљају рјешење система једначина

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}, \quad \frac{y - y_B}{x - x_B} = -\frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}.$$

Тако је

$$x_H = \frac{d_{AB}d_{BC}d_{CA} - x_A x_B d_{AB} - x_B x_C d_{BC} - x_C x_A d_{CA}}{x_A d_{BC} + x_B d_{CA} + x_C d_{AB}},$$

гдје је $d_{ij} = y_i - y_j$. Аналогно се добија и y_H. Очигледно су x_H и y_H рационални бројеви.

Познато је да су O, T, H колинеарне тачке и да је

$$\frac{TH}{OT} = 2,$$

те како T и H имају рационалне коорднинате, лако се добија да и O има рационалне координате.

Конкретно,

$$x_O = \frac{x_A^2 d_{BC} + x_B^2 d_{CA} + x_C^2 d_{AB} - d_{AB}d_{BC}d_{CA}}{2(x_A d_{BC} + x_B d_{CA} + x_C d_{AB})},$$

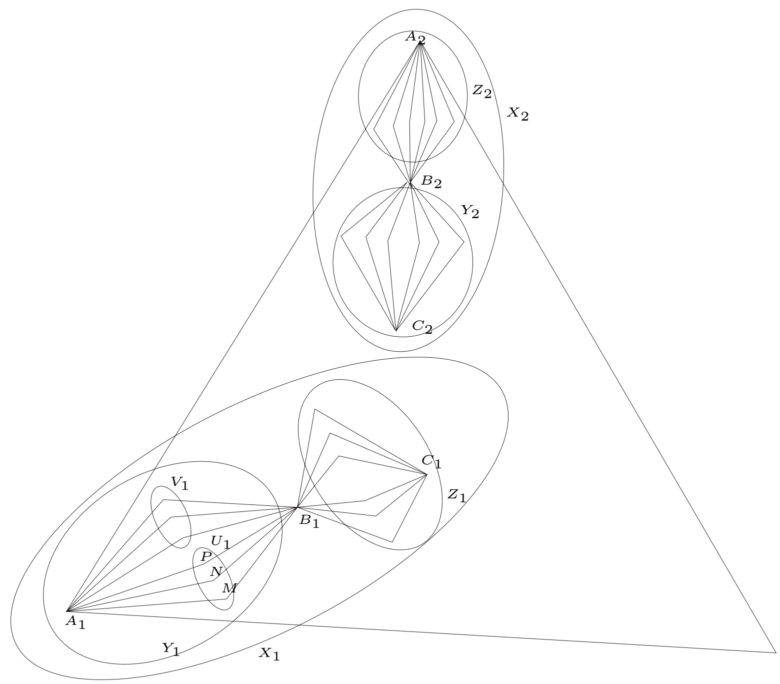
а сличан је и израз за y_O.

Центар уписане кружнице не мора имати рационалне координате. Примјер је троугао са тјеменима $A(1,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,1)$, јер је његов центар уписане кружнице $I(0, \sqrt{2}-1)$.

3. Вишњичица (Ви) има побједничку стратегију. Нека она разбије троугао на четвороуглове као на слици (из практичних разлога, на слици није приказано читаво разбијање, али јасно је да се започето разбијање може наставити: остатак троугла је неконвексан многоугао, па се он може разбити на троуглове, а сваки троугао се једноставно разбија нпр. на три четвороугла) . Послије првог потеза Трешњичице (Тр) бар један од скупова X_1 и X_2 остаје нетакнут (у смислу да ниједно тјеме из тог скупа није обојено) . Не умањујући општост, нека је то скуп X_1. Тада Ви у свом првом потезу боји тачку B_1 бојом 1. Послије другог потеза Тр бар један од скупова Y_1, Z_1 остаје нетакнут, нпр. скуп Y_1. Сада Ви у другом потезу боји тачку A_1 бојом 2. Послије трећег потеза Тр бар један од скупова U_1, V_1 је остао нетакнут, нпр. U_1 . У свом трећем потезу Ви боји тачку N бојом 3. Већ у сљедећем потезу Ви постиже да бар један четвороугао буде онакав какав жели, тако што обоји бојом 4 ону од тачака M или P која претходно није обојена.

4. Претпоставимо да постоје такви бројеви x и y. Одаберимо пар (x, y) код кога је $x + y$ минимално. Лако се види да су тада x и y узајамно прости и да је x непаран. На основу познатог тврђења добијамо да постоје природни бројеви m, n, p, q такви да је $(m, n) = 1$, $(p, q) = 1$ и

$$x = m^2 - n^2 = p^2 - q^2\,,$$



$$y = 2mn = pq\,.$$

Тачно један од бројева p и q је паран. Ми ћемо размотрити случај $p = 2p_1$, док се случај $q = 2q_1$ ради на исти начин. Сад имамо да је

$$mn = p_1 q$$

и на основу теореме о четири броја закључујемо да постоје природни бројеви u, v, α, β такви да је $m = u\alpha$, $n = v\beta$, $p = v\alpha$, $q = u\beta$, при чему су u и v узајамно прости, као и α и β. Тада је

$$u^2\alpha^2 - v^2\beta^2 = 4v^2\alpha^2 - u^2\beta^2\,,$$

односно

$$u^2(\alpha^2 + \beta^2) = v^2(\beta^2 + 4\alpha^2)\,.$$

Није тешко примијетити да је $(\alpha^2 + \beta^2, \beta^2 + 4\alpha^2) = 1$, па добијамо да је

$$\alpha^2 + \beta^2 = v^2\,,$$

$$\beta^2 + 4\alpha^2 = u^2\,,$$

па пар (α, β) такође задовољава жељени услов. Како је при том

$$\alpha + \beta < 2uv\alpha\beta = y < x + y\,,$$

имамо контрадикцију.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дати услов у четвороуглу $ABCD$ еквивалентан је сљедећим једнакостима:

$$\begin{aligned}
\cos A \cos C &= \cos B \cos D\,,\\
\cos A \cos C &= \cos B \cos(A+B+C)\,,\\
\cos(A+C)+\cos(A-C) &= \cos(A+2B+C)+\cos(A+C)\,,\\
\cos(A-C)-\cos(A+2B+C) &= 0\,,\\
\sin(B+C)\sin(A+B) &= 0\,,
\end{aligned}$$

   одакле слиједи да је $A+B=180^\circ$ или $B+C=180^\circ$, тј. $ABCD$ је трапез.

2. Ако за природне бројеве m, n, $m>n$ важи $m-n \mid m+n$, онда за неко $k \in \mathbb{N}$ вриједи

$$\frac{m+n}{m-n}=k, \quad \text{тј.} \quad \frac{m}{n}=\frac{k+1}{k-1}.$$

   Ово значи да разлика било која два изабрана броја мора бити барем 3.

   Ако су изабрани бројеви $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, онда је

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 4,\ x_3 \geq 7, \ldots, x_{334} \geq 1000.$$

   Према томе, не може се изабрати више од 334 броја. Може тачно толико, на примјер: $1, 4, 7, \ldots, 1000$, јер је разлика било која два од ових бројева дјељива са 3, а збир није.

3. Види 3. зад. за Трећи разред.

4. Види 4. зад. за Трећи разред.

17. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Пале, 27.03.2010.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Израчунати
$$||\dots|||2010-1|-2|-3|-\cdots-99|-100|.$$

2. Троугаони бројеви су бројеви облика $\dfrac{k(k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Доказати да су за свако $n \in \mathbb{N}$ сљедећа тврђења еквивалентна

(i) n се може написати у облику збира два троугаона броја,

(ii) $4n+1$ се може написати у облику збира два квадрата.

3. У троуглу ABC у коме је $\angle BAC = 120^\circ$ симетрале углова у тјеменима A, B, C сијеку странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Доказати да је $\angle EDF = 90^\circ$.

4. Одредити све природне бројеве n, $n \geq 2$, за које се бројеви $1, 2, \dots, 2n$ могу уписати у таблицу $2 \times n$ тако да збирови по врстама и колонама задовољавају једнакости $v_1 = v_2$ и $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Да ли постоје различити природни бројеви m и n такви да је

(a) $m^3 - 201m = n^3 - 201n$,

(b) $m^3 - 2010m = n^3 - 2010n$?

2. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c који испуњавају услов $a+b+c=1$ важи неједнакост
$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq 2.$$

3. Одредити колико има оштроуглих троуглова са тјеменима у тјеменима задатог правилног $(2n+1)-$угла.

4. Из тачке M ван кружнице k конструисане су тангенте на ту кружницу, које је додирују у тачкама A и B. Нека је N тачка кружнице k таква да је $AM \parallel BN$. Нека је C друга пресјечна тачка праве MN са кружницом k. Доказати да је $CN = 2\,BC$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити једначину
$$\cos 2x = \frac{1}{2} + \cos x - \sqrt{3}\sin x.$$

2. Нека тангенте из тачке M додирују кружницу у тачкама A и B и нека је BC пречник те кружнице. Нека је D подножје висине из A на BC. Доказати да права MC полови дуж AD.

3. Доказати да сваки природан број има садржалац у чијем се декадном запису појављује свих десет цифара.

4. Претпоставимо да природан број n има сљедећу особину:
Бројеви $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ *се могу поредати у низ тако да се за свако* $k = 1, 2, \ldots, n$ *између два појављивања броја* k *налази тачно* k *чланова низа.*
Доказати да је $n^2 + n$ дјељиво са 4.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нака су a, b дати позитивни бројеви. Ријешити у скупу реалних бројева једначину
$$\sqrt{a(b+x)} - \sqrt{b(a-x)} = x\sqrt{2}.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Одредити најмањи природан број k за који се број 1996^{1996} може представити у облику суме k потпуних петих степена $a_1^5 + a_2^5 + \ldots a_k^5$, гдје су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ природни бројеви.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

18. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 2.04.2011.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Постоје ли природни бројеви m и n такви да је

$$m^2 + mn + n^2 + m + n = 2011?$$

2. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом BC, при чему је $BC < AC$, и његова описана кружница k_1. Кружница k_2 изнутра додирује кружницу k_1 у тачки R те дира краке AC и AB у тачкама P и Q. Доказати да је средиште M дужи PQ уједно и центар уписане кружнице троугла ABC.

3. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати неједнакост

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}\,.$$

4. На кружници се налази n плавих и n црвених тачака које дијеле ту кружницу на $2n$ подударних лукова. Свака црвена тачка је средиште неког лука кружнице са плавим крајевима. Доказати да је и свака плава тачка средиште неког лука кружнице са црвеним крајевима.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дата су кружница k са пречником AB и произвољна тачка M на тој кружници. Нека је MH нормала на пречник AB и нека су C и D пресјечне тачке кружнице k са кружницом k_1 чији је центар у тачки M и полупречником MH. Доказати да права CD полови дуж MH.

2. (*a*) Ако је $x + y = z$ доказати идентитет

$$x\sqrt{y^2 - yz + z^2} + y\sqrt{z^2 - zx + x^2} = z\sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

(*b*) Доказати да за позитивне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$x\sqrt{y^2 - yz + z^2} + y\sqrt{z^2 - zx + x^2} \geq z\sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

3. Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}_0$ број 2011^{2^n} може представити у облику збира квадрата три природна броја.

4. Да ли је могуће са тринаест правих, од којих ниједна не пролази кроз центар неког поља, издијелити шаховску таблу на дијелове тако да сваки такав дио садржи центар највише једног поља?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако у троуглу ABC важи

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \sqrt{3},$$

доказати да је један од углова тог троугла једнак 60°.

2. Ивице OA, OB, OC тетраедра $OABC$ образују правоугли триедар. Нека су P_1, P_2, P_3, P редом површине троуглова OAB, OAC, OBC, ABC и h висина тетраедра из тјемена O на страну ABC. Доказати да је

а) $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P^2$,

б) $h^2 \le \frac{2P}{3\sqrt{3}}$.

3. Доказати да једначина $x^2 - 7xy + y^2 + 11 = 0$ има бесконачно много цјелобројних рјешења.

4. Скуп природних бројева је подијељен на два скупа A и B. Доказати да постоје природни бројеви x и y већи од 2011 такви да x, y и xy леже у једном од тих скупова.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Написани су бројеви $2, 3, \ldots, 2011$ и сви могући њихови производи по два броја, по три броја, итд. све до производа свих 2010 бројева. Доказати да је збир реципрочних вриједности свих написаних бројева једнак 1005.

2. Дат је троугао ABC у коме је $\angle ACB = 60^\circ$ и D, E тачке у којима уписана кружница додирује странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$\frac{ab}{c} \le 2\,DE \le c.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

19. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 28.04.2012.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да за реалне бројеве x и y важи неједнакост

$$(x^2+y^2)^5 \geq (2xy)^5 + (x^5-y^5)^2.$$

2. За које природне бројеве n се разломак $\dfrac{n^3-2n^2+3n+1}{5n+2}$ може скратити?

3. У троуглу ABC су конструисане симетрале AD и BE углова $\angle BAC$ и $\angle ABC$. Ако је DE симетрала угла $\angle ADC$, наћи угао $\angle BAC$.

4. Дати су различити позитивни реални бројеви x_1, x_2, x_3,..., x_{2012}. Доказати да међу њима постоје два, x_i и x_j, тако да вриједи

$$0 < \frac{x_j - x_i}{(1+x_j)(1+x_i)} < \frac{1}{2011}.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дата је колекција тегова са сљедећим својствима:

1° Постоји бар пет тегова међусобно различитих маса,

2° За било која два тега постоје друга два тега са истим збиром маса.

Који најмањи број тегова може бити у тој колекцији?

2. Ријешити једначину $p^3+q^3-r^3=36r^2$ у простим бројевима p, q, r.

3. Дат је $\triangle ABC$ тако да је $\angle BAC = 120°$. Нека симетрала угла $\angle BAC$ сијече страницу BC у тачки D. Доказати да важи

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

4. Нека реални бројеви a, b и c задовољавају сљедеће услове

$$a+2b+3c=1, \quad a \geq -\frac{1}{5},\ b \geq -\frac{1}{2},\ c \geq -1.$$

Одредити највећу вриједност израза $\sqrt{5a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{3c+3}$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Дата је једначина $p^3 + q^3 - r^3 = 49(p + q - r)$.

а) Доказати да она има бесконачно много рјешења у простим бројевима p, q, r.

б) Одредити све тројке (p, q, r) међусобно различитих простих бројева који задовољавају дату једначину.

2. Доказати да за реалне бројеве x, y и природан број n важи неједнакост

$$(x^2 + y^2)^n \geq (2xy)^n + (x^n - y^n)^2.$$

3. Тјемена правилног десетоугла су спојена затвореном изломљеном линијом која има 10 дужи. Доказати да су међу тим дужима бар двије паралелне.

4. У конвексном четвероуглу $ABCD$ је

$$\angle ABD = 12^\circ,\ \angle ACD = 24^\circ,\ \angle DBC = 36^\circ,\ \angle BCA = 48^\circ.$$

Одредити $\angle ADC$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Одредити све природне бројеве n за које је $8^n - 3^{n+2} + 25$ потпун куб.

2. Низ (x_n) је дефинисан са

$$x_0 = \frac{15}{4}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + x_n + 1\right),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказати да је он неограничен.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

20. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 06.04.2013.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Конструисати троугао ако је задато тјеме C, центар описане кружнице O и центар уписане кружнице S.

2. На табли су написана три позитивна броја x, y и 1. Дозвољено је дописивати на таблу збир или разлику нека два већ написана броја, или написати број који је реципрочан неком већ написаном броју. Да ли је увијек могуће добити на табли број

a) x^2,

b) xy.

3. Одредити све просте бројеве p за које важи $43 \mid 7^p - 6^p - 1$.

4. Одредити највећи природан број n за који постоје различити реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такви да је

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \cdots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицама $AB = 5, CD = 4$ и крацима $BC = AD = 4$. На краћем луку $\overset{\frown}{CD}$ описане кружнице задата је тачка M. Показати да вриједност $\dfrac{MC + MD}{MA + MB}$ не зависи од положаја тачке M те одредити ту вриједност.

2. Нека су a, b, c цијели бројеви, различити од нуле, за које важи $a + b + c = 0$. Доказати да $a^4 + b^4 + c^4 \mid a^7 + b^7 + c^7$.

3. На кружници су распоређени црвени и плави бројеви. Сваки црвени број је једнак збиру својих сусједа, а сваки плави број је једнак полузбиру сусједа. Доказати да је збир свих црвених бројева једнак нули.

4. Доказати да се број 15^5 не може представити у облику збира четвртих степена петнаест различитих природних бројева.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је у троуглу ABC: $\sphericalangle A = 120^\circ$, O центар описане кружнице и H ортоцентар. Доказати да је $OH = AB + AC$.

2. Дати су позитивни реални бројеви a, b, c за које важи $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Доказати да је

$$\frac{1}{2a+bc} + \frac{1}{2b+ca} + \frac{1}{2c+ab} \geq 1.$$

3. Нека је n природан број већи од 1. Доказати да се број 9^n може представити у облику збира квадрата три различита природна броја.

4. У таблицу 10×10 записани су бројеви 1 до 100; у првој врсти од 1 до 10 слијева надесно, у другој врсти од 11 до 20 слијева надесно итд. Андреј разрезује таблицу на правоугаонике 1×2, затим налази производ бројева у сваком правоугаонику и сабира тих 50 производа. Како треба да разреже квадрат да би добијени збир био најмањи?

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a, b, c реални бројеви већи од $\sqrt{2} - 1$ за које важи $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доказати да је

$$\frac{a}{b^2+2c-1} + \frac{b}{c^2+2a-1} + \frac{c}{a^2+2b-1} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине 1 чије се дијагонале сијеку у тачки M под углом α. Нека су O_1, O_2, O_3, O_4 редом центри описаних кружница троуглова ABM, BCM, CDM, DAM. Одредити површину четвороугла $O_1O_2O_3O_4$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

21. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Источно Сарајево, 29. март 2014.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Бројеви $1, 2, 3, \ldots, 10$ су разбијени на двије групе тако да је производ бројева у првој групи дјељив са производом бројева у другој групи. Коју најмању вриједност може имати количник дијељења првог производа са другим?

2. Нека су D и E тачке на страници троугла ABC такве да је $AB = AD$ и $BE = EC$ (E је између A и C). Нека је F средиште лука BC кружнице описане око троугла ABC. Доказати да тачке B, E, D, F припадају истој кружници.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab + bc + ca = a + b + c$. Доказати да је $a + b + c \geq 3$.

4. Из таблице димензије 2014×2014 изрезана су четири угаона поља. Да ли се преостали дио таблице може покрити правоугаоницима 3×1?

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све цијеле бројеве a за које једначина $x^2 - ax + 5a = 0$ има бар једно цјелобројно рјешење.

2. У паралелограму $ABCD$ тачка M је средиште странице BC, а N произвољна тачка странице AD. Нека је P пресјечна тачка дужи MN и AC, а Q пресјечна тачка дужи AM и BN. Доказати да троуглови BDQ и DMP имају једнаке површине.

3. Дато је 11 различитих природних бројева таквих да је збир било којих 7 бројева већи од збира преостала 4 броја. Колики је најмањи могући збир тих 11 бројева?

4. Наћи све просте бројеве p такве да број $p^2 + 23$ има тачно 10 природних дјелилаца.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Одредити цјелобројна рјашења система једначина

$$x^2 + yz = 120, \quad y^2 + xz = 121.$$

2. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle BAC = 40^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Нека су D и E редом тачке на страницама AC и AB такве да је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCE = 30^\circ$ и нека је F пресјечна тачка правих CB и DE. Доказати да је $AB = BF$.

3. Нека је

$$S_{2n} = 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \cdots + (1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2).$$

Доказати да је S_{2n} потпун квадрат ако и само ако су $\dfrac{n}{3}$ и $n+1$ потпуни квадрати.

4. У некој групи од 20 људи сваки од њих познаје бар 10 преосталих. Доказати да између њих можемо изабрати двије тројке такве да било који члан једне тројке познаје сва три члана друге тројке.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c, d важи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

2. Нека је дат оштроугли троугао ABC са најмањом страницом AB и центром I уписане кружнице. Нека кружница са центром I и полупречником IC сијече страницу AB у тачкама P и Q, гдје је тачка P ближа тачки B него тачки A. Нека приписана кружница наспрам тјемена A додирује страницу BC у тачки E и нека је тачка F симетрична тачки C у односу на тачку E. Доказати да је $FP \perp CQ$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

22. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 4. април 2015.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Да ли се бројеви $1, 2, 3, \ldots, 10$ могу распоредити у неком редослиједу у низ тако да се сваки од њих, почев од другог, разликује од претходног броја за цио број процената претходног броја?

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x^2+y^2+z^2=3$. Доказати да важи

$$x^4+y^4+z^4+2x+2y+2z \geq 9.$$

3. Дат је скуп $S=\{1,2,3,\ldots,3n\}$, $n \in \mathbb{N}$ и било који његов подскуп T који има бар $n+1$ елемената. Доказати да постоје елементи a, $b \in T$ такви да је бар један од бројева $ab+1$ или $4ab+1$ потпун квадрат.

4. Нека је O центар кружнице описане око оштроуглог троугла ABC и нека је AH ($H \in BC$) висина тог троугла. Нека су M, N, P и Q редом средишта дужи AB, AC, BH и CH и нека су k_1 и k_2 кружнице описане око троуглова AMN и POQ редом. Доказати да једна од пресјечних тачака кружница k_1 и k_2 припада висини AH.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. На шаховском првенству учествује $4n$ шахиста и сваки од њих одигра са сваким од преосталих $4n-1$ играча двије партије, једну са бијелим и једну са црним фигурама. Доказати да на крају турнира збир освојених поена било којих n учесника не може бити већи од збира поена преосталих $3n$ учесника.

(У шаховској партији играч за побједу добија 1 поен, за реми 1/2 поена и за пораз 0 поена.)

2. Нека је K пресјечна тачка дијагонала AC и BD тетивног четвороугла $ABCD$. Ако је $AK=BC$ и $\angle CAB = \angle CAD$, доказати да тачка K дијели дуж AC по златном пресјеку.

3. Наћи све парове (p,q) простих бројева за које важи $5p+q=(p-q)^3$.

4. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$xy(x^2+y^2)=(x+2)(y+2)(x+y-2).$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У правоуглом троуглу ABC центар S уписане кружнице дијели симетралу CE правог угла у односу $CS : SE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Одредити оштре углове тог троугла.

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x^2+y^2+z^2=3$. Доказати да важи

$$x^4+y^4+z^4+x+y+z \geq 6.$$

3. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$ab^2-a^2-ab-b^2+2a-2b=0.$$

4. У правилном $25-$углу конструисане су све дијагонале. Доказати да не постоји 9 дијагонала које пролазе кроз исту унутрашњу тачку тог $25-$угла.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је K пресјечна тачка дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$. Ако је $AK = BC$, $AC : AK = AK : KC$ и $\angle CAB = \angle CAD$, доказати да је четвороугао $ABCD$ тетивни.

2. Низ (x_n) је дефинисан са $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Доказати да за $n \geq 2$ важи

$$n+\frac{1}{4} \leq x_n^2 \leq n+\frac{1}{4}+\frac{\ln(n-1)}{4}\,.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

23. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Бања Лука, 9. април 2016.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. Студент је за 5 година студија положио 31 испит, при чему је сваке године (почев од друге) положио више испита него претходне године. У петој години он је положио три пута више испита него у првој години. Колико је испита он положио у четвртој години студија?

2. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab+bc+ca=1$. Доказати да је

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

3. Нека је ABC оштроугли троугао ($AC<BC$) са полупречником описане кружнице R. Нека је D подножне висине из тачке A на BC. Означимо са T тачку на правој AD, такву да је $AT=2R$, при чему је тачка D између тачака A и T, а са S средиште лука BC кружнице описане око троугла ABC, који не садржи тачку A. Доказати да је $\angle AST=90°$.

4. Да ли постоји пермутација $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ бројева $1,2,3,\ldots,n$ тако да за свако $k=2,3,\ldots,n$ важи $k\mid a_{k-1}+a_k$, ако је

(a) $n=10$,

(b) $n=11$?

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом у тјемену C. Нека је BK симетрала унутрашњег угла у тјемену B ($K\in AC$). Круг описан око троугла AKB сијече страницу BC у тачки L. Доказати да је $CB+CL=AB$.

2. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x+y+z=1$. Доказати да важи неједнакост

$$x^3+y^3+z^3+2(xy+yz+zx)\geq\frac{3}{4}\,.$$

Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

3. У таблицу димензија 7×7 уписани су реални бројеви, тако да је производ бројева у било ком квадрату димензија 3×3, једнак производу бројева у било ком квадрату 4×4. Да ли је могуће да производ свих бројева у таблици буде једнак 2016?

4. Ако су m и n природни бројеви за које важи

$$7m^2 + 7m + 2 = n^2,$$

доказати да је број $n+1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x + y)).$$

2. За округлим столом сједи 2016 људи, од којих је сваки или *истинољубив*, ако увијек говори истину, или *лажов*, ако увијек лаже. Сваком од њих је дата по једна картица на којој је написан један природан број. Бројеви написани на картицама су различити. Након што су погледали своје бројеве и бројеве својих сусједа (по једног са лијеве и десне стране), сваки од ових људи је рекао: „Мој број је већи од оба броја мојих сусједа”. Послије тога k људи је рекло: „Мој број је мањи од оба броја мојих сусједа”. Наћи највећу могућу вриједност броја k.

3. Ако су m и n природни бројеви за које важи

$$7m^2 + 7m + 8 = n^2,$$

доказати да је број $\dfrac{n}{5} + 1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

4. Нека је H ортоцентар оштоуглог троугла ABC. Права која садржи тачку A и нормална је на AC и права која садржи тачку B и нормална је на BC, сијеку се у тачки D. Круг са центром у тачки C, који садржи тачку H, сијече круг описан око троугла ABC у тачкама E и F. Доказати да је $DE = DF = AB$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x + y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је ABC оштроугли троугао, AD симетрала угла $\angle BAC$ ($D \in BC$), и E и F ортогоналне пројекције тачке D на AB и AC, редом. Нека је $CE \cap BF = \{K\}$ и нека BF сијече круг описан око троугла AEK у тачки L ($L \neq K$). Доказати да је $BF \perp DL$.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. *Одговор:* 8. Нека је прве године студент положио x испита. Тада је у другој години положио бар $x+1$ испит, у трећој бар $x+2$ испита и у четвртој години бар $x+3$ испита. У петој години он је положио $3x$ испита, тако да је у четвртој положио највише $3x-1$, у трећој највише $3x-2$ и у другој години највише $3x-3$ испита. Тада је по услову задатка

$$x+x+1+x+2+x+3+3x \leq 31 \leq x+3x-3+3x-2+3x-1+3x,$$

$$7x+6 \leq 31 \leq 13x-6.$$

Како је x цио број из неједнакости $7x+6 \leq 31$ добијамо да је $x \leq 3$, а из неједнакости $31 \leq 13x-6$ да је $x \geq 3$. Дакле, $x=3$ па је студент у четвртој години могао да положи од $x+3=6$ до $3x-1=8$ испита.

Ако је у четвртој години положио 6 или 7 испита, онда је укупан број положених испита највише $9+7+6+5+3=30$, што је мање од 31. Дакле, студент је у четвртој години положио 8 испита, при чему је по годинама студија полагао редом 3, 4, 6, 8, 9 испита.

2. Примијетимо да је

$$a+\frac{1}{a}=a+\frac{ab+bc+ca}{a}=a+b+c+\frac{bc}{a}.$$

Одавде је, на основу неједнакости измађу аритметичке и геометријске средине

$$a+\frac{1}{a} \geq b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

па је $\sqrt{a+\frac{1}{a}} \geq \sqrt{b}+\sqrt{c}$. Аналогно је $\sqrt{b+\frac{1}{b}} \geq \sqrt{c}+\sqrt{a}$ и $\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо да је

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

3. Нека је $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Означимо са O центар круга описаног око троугла ABC. Пошто је $AC < AB$, то је $\beta < \gamma$. Нека је E тачка која је дијаметрално супротна тачки A. Јасно је да је $\angle AOB = 2\gamma$ и

$$\angle EAS = \angle BAS - \angle BAO = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ.$$

Такође је

$$\angle SAT = \angle SAC - \angle DAC = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \angle ACD) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ,$$

па је $\angle EAS = \angle SAT$. Како је $AE = AT = 2R$ слиједи да је $\triangle AST \cong \triangle ASE$, па је $\angle ASE = \angle AST$. Пошто је $\angle ASE = 90^\circ$ слиједи да је $\angle AST = 90^\circ$.

4. (a) *Одговор: Не постоји.* Претпоставимо супротно. Тада

$$2 \mid a_1 + a_2, \quad 4 \mid a_3 + a_4, \quad 6 \mid a_5 + a_6, \quad 8 \mid a_7 + a_8, \quad 10 \mid a_9 + a_{10},$$

па су бројеви $a_1 + a_2$ $a_3 + a_4$, $a_5 + a_6$, $a_7 + a_8$ и $a_9 + a_{10}$ парни. Због тога је паран и њихов збир

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55.$$

Контрадикција.

(b) *Одговор: Постоји.* Исписујемо такав низ a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{11}$, редом од посљедњег члана a_{11} до првог члана a_1. Распоредимо наизмјенично бројеве $4, 3, 2, 1$ и $7, 6, 5$ здесна налијево: $1, 5, 2, 6, 3, 7, 4$ тако да они представљају посљедњих 7 чланова низа. Тада ће важити

$$a_{k-1} + a_{k-2} = k, \quad k = 6, 7, \ldots, 11.$$

Даље овом низу дописујемо слијева преостала четири члана $8, 9, 10, 11$, сљедећим реослиједом $9, 11, 10, 8$. Добијамо тражени низ

$$8, 10, 11, 9, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је N тачка на полуправој BC, таква да је $CN = CL$, при чему се тачка C налази између тачака N и L. Тада је $CB + CL = NB$ па је потребно доказати да је $AB = NB$. Како је

$$\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle ALB = \angle ALC$$

и $\triangle ACL \cong \triangle ACN$, слиједи да је

$$\angle ANC = \angle ALC = \angle CKB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B\,.$$

Из троугла ABN је

$$\angle BAN = 180^\circ - \angle B - \angle ANB = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle B) =$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = \angle ANB.$$

Одавде добијамо да је $AB = NB$.

2. Како је

$$2(xy+yz+zx) = x(y+z)+y(z+x)+z(x+y) = x(1-x)+y(1-y)+z(1-z) =$$

$$= x+y+z-x^2-y^2-z^2 = 1-x^2-y^2-z^2,$$

треба доказати да је

$$x^3+y^3+z^3+1-x^2-y^2-z^2 \geq \frac{3}{4}\,,$$

$$x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2+\frac{1}{4} \geq 0,$$

$$x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2+\frac{1}{4}(x+y+z) \geq 0.$$

Посљедња неједнакост важи јер је еквивалентна редом са

$$x^3-x^2+\frac{1}{4}x+y^3-y^2+\frac{1}{4}y+z^3-z^2+\frac{1}{4}z \geq 0,$$

$$x(x-\frac{1}{2})^2+y(y-\frac{1}{2})^2+z(z-\frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Једнакост важи ако су сви сабирци на лијевој страни посљедње неједнакости једнаки нули, тј. уз услов $x+y+z=1$, ако је

$$(x,y,z) \in \{(1/2,1/2,0),(1/2,0,1/2),(0,1/2,1/2)\}.$$

3. *Одговор: Могуће је.* Нека су a и b реални бројеви за које важи $ab = 1$. Посматрајмо сљедећу таблицу

a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a

Очигледно је да је производ бројева у сваком квадрату димениција 3×3 и 4×4 једнак 1. Како је производ свих бројева у таблици једнак a, могуће је да производ бројева у таблици буде било који реалан број, различит од нуле, па и 2016.

4. Претпоставимо да за природне бројеве m и n важи $7m^2 + 7m + 2 = n^2$. Множењем ове једнакости са 4 добијамо редом

$$7(4m^2+4m+1)+1 = 4n^2, \quad 7(2m+1)^2 = 4n^2-1, \quad 7(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1).$$

Како су бројеви $2n-1$ и $2n+1$ узајамно прости, одавде слиједи да имамо сљедећа два случаја.

1° $2n-1 = a^2$, $2n+1 = 7b^2$, за неке цијеле (непарне) бројеве a и b. Одузимањем ове двије једнакости добијамо да је $7b^2 - a^2 = 2$, одакле слиједи да је $a^2 \equiv 5 \pmod 7$. Контрадикција.

2° $2n+1 = a^2$, $2n-1 = 7b^2$, за неке непарне бројеве a и b. Из $2n+1 = (2k+1)^2$ слиједи да је $n = 2k^2 + 2k$, па је $n+1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$, што је и требало доказати.

Примједба. Најмањи парови (m,n) природних бројева за које важи $7m^2 + 7m + 2 = n^2$ су $(m_1, n_1) = (1,4)$ и $(m_2, n_2) = (382, 1012)$. При томе је

$$n_1 + 1 = 5 = 1^2 + 2^2 \text{ и } n_2 + 1 = 1013 = 22^2 + 23^2.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако уврстимо $x = 0$ и $y = a$ добијамо да је $2f(0) = f(f(a))$ за све $a \in \mathbb{R}$, па је

$$2f(0) = f(f(x+y)) = f(x^2) + f(xy).$$

Уврштавајући овдје $x = 1$ добијамо да је

$$2f(0) = f(1) + f(y), \quad \text{тј.} \quad f(y) = 2f(0) - f(1)$$

па је f константна функција, тј. $f(x) = C$. Даље, уврштавањем у полазну једначину добијамо да је $C = 0$, тј. $f(x) \equiv 0$ је једино рјешење.

2. Уочимо човјека који је добио картицу са највећим бројем и човјека који је добио картицу са најмањим бројем. Након прве изјаве уочавамо да је први истинољубив, а други лажов, па они не могу бити међу ових k људи (јер је немогуће да је друга изјава истинољубивог тачна, а лажова нетачна). Дакле, $k \leq 2014$. Вриједност $k = 2014$ се може постићи, на примјер у случају када су људима подијељене картице са бројевима $1, 2, 3, \ldots, 2016$ у смјеру кретања казаљке на сату, при чему је картица са бројем 2016 дата истинољубивом, а остале лажовима.

3. Претпоставимо да за природне бројеве m и n важи $7m^2 + 7m + 8 = n^2$. Множењем ове једнакости са 4 добијамо редом

$$7(4m^2+4m+1)+25 = 4n^2, \quad 7(2m+1)^2 = 4n^2-25, \quad 7(2m+1)^2 = (2n-5)(2n+5).$$

Нека је $(2n-5, 2n+5) = d$. Имамо сљедећа два случаја.

1° $d = 1$. Имамо двије могућности:

1) $2n - 5 = 7a^2$, $2n + 5 = b^2$, за неке цијеле (непарне) бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $b^2 - 7a^2 = 10$, одакле слиједи да је $b^2 \equiv 3 \pmod 7$. Контрадикција.

2) $2n - 5 = a^2$, $2n + 5 = 7b^2$, за неке непарне бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $7b^2 - a^2 = 10$. Како је $a^2 \equiv 1 \pmod 8$ и $b^2 \equiv 1 \pmod 8$, слиједи да је $7b^2 - a^2 \equiv 6 \pmod 8$, па не може бити $7b^2 - a^2 = 10$. Контрадикција.

2° $d = 5$. Опет имамо двије могућности:

1) $2n - 5 = 5a^2$, $2n + 5 = 5 \cdot 7b^2$, за неке цијеле (непарне, узајамно просте) бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $5(7b^2 - a^2) = 10$, тј. $7b^2 - a^2 = 2$, одакле слиједи да је $a^2 \equiv 5 \pmod 7$. Контрадикција.

2) $2n - 5 = 5 \cdot 7a^2$, $2n + 5 = 5b^2$, за неке непарне природне бројеве a и b. Из $2n + 5 = 5(2k + 1)^2$ слиједи да је $n = 10k^2 + 10k$, па је

$$\frac{n}{5} + 1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k + 1)^2,$$

што је и требало доказати.

Примједба 1. Најмањи парови (m, n) природних бројева за које важи $7m^2 + 7m + 8 = n^2$ су $(m_1, n_1) = (7, 20)$ и $(m_2, n_2) = (1912, 5060)$. При томе је

$$\frac{n_1}{5} + 1 = 5 = 1^2 + 2^2 \quad \text{и} \quad \frac{n_2}{5} + 1 = 1013 = 22^2 + 23^2.$$

Примједба 2. Овај задатак се може свести на задатак 4 за други разред на сљедећи начин. Гледајући остатке при дијељењу са 5 добијамо да $7m^2 + 7m + 8 \equiv 0 \pmod 5$ ако је $m \equiv 2 \pmod 5$, а у свим осталим случајевима је $7m^2 + 7m + 8 \equiv 2 \pmod 5$ или $7m^2 + 7m + 8 \equiv 3 \pmod 5$. Дакле, из $7m^2 + 7m + 8 = n^2$ слиједи да је $m = 5a + 2$, $a \in \mathbb{N}$. Замјеном $m = 5a + 2$ у ову једначину добијамо да је $7(5a + 2)^2 + 7(5a + 2) + 8 = n^2$, одакле је након сређивања $25(7a^2 + 7a + 2) = n^2$. Слиједи да је $n = 5b$, $b \in \mathbb{N}$, тј. $7a^2 + 7a + 8 = b^2$.

4. Како је троугао ABC оштроугли, тачка H се налази у унутрашњости овог троугла. То значи да се тачке E и F налазе на краћим луковима AC и BC, редом. Нека је H' осносиметрична тачка тачки H у односу на праву AC.

Познато је да H' припада кружници описаној око троугла ABC. Како је $CH = CH'$, слиједи да се тачка H' налази на кружници са центром у тачки C полупречника CH, па је $H' = E$. Како је $EH \perp AC$ и $BH \perp AC$, слиједи да су тачке B, H и E колинеарне. Како је $AD \perp AC$, слиједи да је $BE \parallel AD$.

Такође, како је $\angle CAD + \angle CBD = 90° + 90° = 180°$, слиједи да се тачка D налази на кружници описаној око троугла ABC. Сада имамо да је четвороугао $EADB$ тетиван. Како је $BE \parallel AD$ слиједи да је $\angle BEA + \angle EAD = 180°$. Из тетивности четвороугла $EADB$ слиједи да је $\angle EBD + \angle EAD = 180°$, па је $\angle BEA = \angle EBD = 180°$, тј. $BA = ED$. Аналогно се показује да је $BA = DF$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Стављајући $x = y = 0$ добијамо да је $f(0)^2 = f(0)$ па је $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Стављајући $x = 0$ добијамо да је $f(y)^2 = f(0)$.

Ако је $f(0) = 0$, слиједи да је $f(y) = 0$ за све $y \in \mathbb{R}$.

Ако је $f(0) = 1$, слиједи да је $f(y) = 1$ или $f(y) = -1$. Ако би било $f(y) = -1$, стављајући $x = -a$, $y = a$ добијамо да је $f(0) \cdot f(a) = f(0)$, што је немогуће.

Дакле, једина рјешења су $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 1$, што се лако провјерава.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је $\{H\} = AK \cap BC$. По Чевиној теореми је $\dfrac{AE}{BE} \cdot \dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CF}{AF} = 1$. Али, како је AD симетрала угла α, имамо $AE = AF$ па је $\dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CF}{BE} = 1$. Даље је, $CF = \dfrac{DF}{\operatorname{tg}\gamma}$ и $BE = \dfrac{DE}{\operatorname{tg}\beta}$, па како је $DF = DE$ имамо да је $\dfrac{CF}{BE} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$. Због тога је и $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$ па је H подножје висине из тјемена A на страницу BC.

Сада је $\angle EAK = 90° - \beta$, одакле је $\angle ELB = 90° - \beta$, па како је и $\angle EDB = 90° - \beta$ слиједи да је четвороугао $BELD$ тативан, одакле је $\angle DLB = \angle DEB = 90°$, па је $BF \perp DL$.

24. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Бања Лука, 22. април 2017.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дат је разломак $\dfrac{2a27}{7b22}$, гдје су a и b цифре за које је $b - a = 2$. Ако се његовом бројиоцу дода природан број n, а од имениоца се одузме исти тај број n, добијени разломак ће бити једнак $\dfrac{4}{5}$. Наћи n.

2. Дат је троугао ABC и тачке K и N на страницама AB и AC, редом, такве да је $KB = KN$. Нека је R средиште лука AB који не садржи тачку C. Права која садржи тачку R и нормална је на AB сијече дуж BN у тачки D. Доказати да тачке A, K, D, N припадају једној кружници.

3. Дата је табла $m \times n$ и три боје. Желимо да обојимо сваку дуж добијене мреже са једном од те три боје тако да сваки јединични квадрат има двије странице обојене једном бојом и двије странице обојене неком другом бојом. Колико има таквих бојења?

4. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $abc \leq 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1 + \frac{6}{a+b+c}\,.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да за произвољне реалне параметре a, b и c различите од нуле бар једна од једначина

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0 \;\text{ и }\; cx^2 + 2ax + b = 0$$

има реалне коријене.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D подножје висине из тјемена C на страницу AB. Претпоставимо да је $AD = 3\,BD$. Нека су M и N редом средишта страница AB и AC. Нека је P тачка таква да је $NP = NC$ и $CP = CB$, при чему B и P леже са различитих страна праве AC. Доказати да је $\angle APM = \angle PBA$.

3. Наћи све парове природних бројева (x, y), $x > y$, за које важи $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = 2017$.

4. Сегмент S дужине 50 је покривен са неколико сегмената дужине 1, од којих је сваки садржан у S. Ако било који од тих јединичних сегмената уклонимо онда S више неће бити потпуно покривен. Наћи максималан број јединичних сегмената који задовољавају ове услове.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У једнакокраки трапез $ABCD$ уписана је кружница са центром O која додирује кракове BC и AD трапеза редом у тачкама M и N.

(a) Доказати да је $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD} = \dfrac{2}{MN}$;

(b) Ако су тачке A, O, M колинеарне, одредити углове тог трапеза.

2. Јединични квадрати табле $n \times n$, $n \geq 2$, обојени су црном или бијелом бојом тако да сваки црни квадрат има бар три бијела сусједа (сусјед је јединични квадрат са заједничком страницом). Колики је највећи број црних јединичних квадрата?

3. Дато је 2000 тегова са масама од $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 2000^3$ грама. Доказати да се они могу разбити у двије групе са подједнаким масама и са подједнаким бројем тегова (по 1000).

4. Одредити највећу константу C тако да неједнакост

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2))$$

важи за све реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_6$.

За добијено C одредити све $x_1, x_2, \ldots, x_6$ за које се достиже једнакост.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. На дужима HB и HC изабране су редом тачке K и L тако да је $\angle AKC = 90^\circ = \angle ALB$. Доказати да је $AK = AL$.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Доказати неједнакости

$$\frac{13}{72}-\frac{1}{2(n+1)^2}\leq\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{24}-\frac{1}{2(n+1)^2}\,.$$

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. *Одговор:* $n=2017$. Дати услов је еививалентан редом са сљедећим једначинама

$$\frac{2a27+n}{7b22-n}=\frac{4}{5}\,,\quad 5(2a27+n)=4(7b22-n),$$
$$5n+4n=4\cdot(7072+100b)-5\cdot(2027+100a).$$

Замјењујући у посљедњој једнакости $b=a+2$ слиједи да је

$$9n=18753-100a. \tag{1}$$

Одавде добијамо да $9\mid 18753-100a$, а како је

$$18753-100a=18756-99a-(a+3)$$

и како су бројеви 18756 и $99a$ дјељиви са 9, слиједи да је број $a+3$ дјељив са 9. Како је a цифра, ово важи само за $a=6$. Даље, за $a=6$ се (1) своди на $9n=18153$, одакле добијамо да је $n=2017$.

2. Очигледно је права RD симетрала странице AB. Одавде закључујемо да важи $AD=BD$, тј. $\angle ABD=\angle BAD$. Такође, из услова $KB=KN$ имамо да је $\angle KBN=\angle KNB$. Сада је $\angle KAD=\angle BAD=\angle ABD=\angle KBN=\angle KNB=\angle KND$, па како се тачке A и B налазе у истој полуравни у односу на праву KD, тачке A, K, D, N припадају једној кружици.

3. Горња страница јединичног квадрата у горњем лијевом углу може се обојити на 3 начина. Затим, имамо 3 начина за избор друге странице истог тог квадрата која има исту боју као већ обојена страница. Преостале двије странице овог квадрата морају бити обојене истом бојом, а за ову боју имамо двије могућности. Закључујемо да јединични квадрат у горњем лијевом углу може бити обојен на $3\cdot3\cdot2=18$ начина. Даље, бојимо јединичне квадрате у првом реду слијева надесно. При томе је сваки пут лијева страница квадрата већ обојена. Имамо 3 начина да одаберемо страницу јединичног квадрата која ће бити обојена истом бојом као и његова лијева страница. За бојење преостале двије странице имамо двије могућности (боје). Према томе, имамо 6 начина за бојење сваког од ових квадрата. Настављамо слично са бојењем прве колоне. Бојимо јединичне квадрате одозго надоле и за сваки од њих имамо 6 начина бојења.

Сада бојимо квадрате у редовима $2, 3, \ldots, m$ и у колонама $2, 3, \ldots, n$. Бојимо их слијева надесно и одозго надоле. Код бојења сваког новог квадрата он већ има обојене двије странице: горњу и лијеву. Ако су ове странице различитих боја, онда су и боје преостале двије странице већ одређене, и постоје 2 начина за њихово бојење. А ако двије странице које су већ обојене имају исту боју, онда и остале двије странице имају исту боју. Та боја се може изабрати на два начина. Према томе, за сваки од ових квадрата постоје два могућа начина бојења.

Дакле, има $18 \cdot 6^{m-1} \cdot 6^{n-1} \cdot 2^{(m-1)(n-1)} = 2^{mn} \cdot 3^{m+n}$ таквих бојења.

4. Запишимо дату неједнакост у облику

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq a+b+c+6.$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 \quad \text{и} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Због тога је

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq a+b+c$$

и

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\sqrt[3]{abc} = 6.$$

Сабирањем посљедње двије неједнакости добијамо дату неједнакост.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Претпоставимо да ниједна од три дате једначине нема реалне коријене. Тада је $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$, одакле сабирањем добијамо да је

$$a^2+b^2+c^2 < ab+ac+bc.$$

Како је ова неједнакост еквивалентна са $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 < 0$, добили смо контрадикцију.

2. Како је N средиште странице AC то је $NC = NA$. По претпоставци је $NP = NC$, што значи да је $\angle APC$ периферијски угао над пречником AC, па је $\angle APC = 90^\circ$. Пошто је $AD = 3\,BD$ и M средиште дужи AB то је $MD = BD$. Осим тога је $\angle CDB = 90^\circ = \angle CDM$, па су троуглови CDB и CDM подударни, одакле слиједи да је $CB = CM$.

По претпоставци је $CP = CB$, па је C центар кружнице која пролази кроз тачке P, M и B. Како је $\angle APC = 90^\circ$ то је AP тангента ове кружнице. Због тога је $\angle APM = \angle PBM = \angle PBA$.

3. Једначина $x^2 + y^2 = 2017(x + y)$ је еквивалентна са једначинама

$$x^2 + y^2 - 2017(x + y) = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot 2017(x + y) = 0,$$

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 - 2 \cdot 2017(x + y) = 0,$$
$$(x - y)^2 + (x + y - 2017)^2 = 2017^2.$$

Ако је $x + y \leq 2017$ онда је $2017(x + y) \geq (x + y)^2 > x^2 + y^2$ па дата једначина нема рјешења. Дакле, $x + y > 2017$ па користећи формулу за Питагорине тројке добијамо да постоје природни бројеви m и n, $m > n$, такви да је

$$x - y = 2mn, \quad x + y - 2017 = m^2 - n^2, \quad 2017 = m^2 + n^2,$$

или

$$x - y = m^2 - n^2, \quad x + y - 2017 = 2mn, \quad 2017 = m^2 + n^2.$$

Како је 2017 прост број облика $4k + 1$ једначина $m^2 + y^2 = 2017$ има јединствено рјешење. То је пар $(m, n) = (44, 9)$. Даље добијамо системе линеарних једначина

$$x - y = 792, \quad x + y - 2017 = 1855,$$
$$x - y = 1855, \quad x + y - 2017 = 792,$$

чија су рјешења $(x, y) = (2332, 1540)$ и $(x, y) = (2332, 477)$. То су уједно и једина рјешења дате једначине.

4. Нека су S_1, $S_2, \ldots$ сегменти дужине 1 који покривају сегмент S гледано слијева надесно. Доказаћемо најприје да су било која два сегмента S_k и S_{k+2} дисјунктна. Ако би нека два сегмента S_k и S_{k+2} имала заједничку тачку онда би њихова унија био сегмент који садржи сегмент S_{k+1}. Тада бисмо сегмент S_{k+1} могли избацити а сегмент S би био покривен осталим сегментима, што је контрадикција са условом задатка. Пошто је дужина сегмента S једнака 50, то значи да сегмената S_i, како са непарним тако и са парним индексима понаособ, може бити највише 49, тј. можемо имати највише 98 сегмената дужине 1 који покривају S.

На примјеру ћемо показати да се тај максималан број може и постићи. Посматрајмо сегмент $I = [0, 50]$ на бројевној правој. Уочимо на овом сегменту тачке M_i које имају бројевне вриједности $\dfrac{1}{2}+(i-1)\cdot\dfrac{49}{97}$, $i=1,2,\ldots,98$. Нека су S_i сегменти дужине 1 чија су средишта тачке M_i, $i=1,2,\ldots,98$. Како је $M_iM_{i+2}=98/97$, $(1\le i\le 96)$, сегменти S_i и S_{i+2} су раздвојени дужином $1/97$, коју покрива само сегмент S_{i+1}, што значи да не можемо уклонити ниједан од сегмената S_i, $i=1,2,\ldots,98$, јер би S истао непокривен.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је r полупречник кружнице уписане у дати трапез и нека су K и L редом средишта његових основица AB и CD. Нека је $P=KL\cap MN$ и $\angle BAO=\varphi$, тј. $\angle BAD=2\varphi$. Посматрајмо четвороугао $OLDN$. Он има праве углове у тјеменима L и N, а како је $\angle NDL=\angle ADC=180^\circ-\varphi$, слиједи да је $\angle NOL=2\varphi$. Правоугли троуглови OLD и OND су подударни, па је $\angle DOL=\varphi$.

(a) Сада из правоуглих троуглова AKO, OLD и OPN добијамо

$$AK=r\operatorname{ctg}\varphi,\quad DL=r\operatorname{tg}\varphi,\quad NP=r\sin 2\varphi,$$

па је

$$AB=2r\operatorname{ctg}\varphi,\quad C=2r\operatorname{tg}\varphi,\quad MN=2r\sin 2\varphi.$$

Одавде слиједи да је

$$\frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=\frac{2r\sin 2\varphi}{2r\operatorname{ctg}\varphi}+\frac{2r\sin 2\varphi}{2r\operatorname{tg}\varphi}=2\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi=2,$$

што је и требало доказати.

(b) Ако су тачке A, O, M колинеарне, онда су углови $\angle AOK$ и $\angle MOL$ унакрсни, па је $\angle AOK$ и $\angle MOL$. Како је $\angle AOK=90^\circ-2\varphi=\angle MOL=2\varphi$, слиједи да је $90^\circ-2\varphi=2\varphi$, тј. $\varphi=30^\circ$. Дакле, оштри угао тог једнакокраког трапеза је 60°, а тупи угао је 120°.

2. Уочимо најприје да су јединични квадрати у угловима табле обојени бијелом бојом (јер имају само два сусједа). Такође, у врстама (колонама) које се налазе уз ивице табле, не могу бити два сусједна јединична квадрата обојена црном бојом, јер не би могли имати три сусједна бијела јединична квадрата. Примијетимо да из истог разлога у сваком квадрату 2×2 можемо имати највише два црна јединична квадрата.

Ако је n непаран број, подијелимо таблу у 4 дијела: квадрат $(n-1)\times(n-1)$ који садржи све јединичне квадрате у првих $n-1$ врста и $n-1$ колона (гледан од дна ка врху), правоугаоник $(n-1)\times 1$ уз десну ивицу табле, правоугаоник $1\times(n-1)$ уз горњу ивицу табле и јединични квадрат у горњем десном углу табле. Ако квадрат $(n-1)\times(n-1)$ издијелимо на квадрате 2×2 (којих има $(n-1)^2/4)$, јасно је да ћемо у њему имати највише $(n-1)^2/2$ црних квадрата. Такође, у правоугаоницима $1\times(n-1)$ и $(n-1)\times 1$ можемо имати највише $(n-1)/2$ црних квадрата, а пошто је горњи десни квадрат бијеле боје, максималан број црних квадрата је

$$\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{2}\,.$$

Овај максимум се може достићи ако таблу обојимо ,,шаховски" црно-бијело, са бијелим јединичним квадратима у угловима.

Ако је n паран број, подијелимо таблу у 9 дијелова: квадрат $(n-2)\times(n-2)$ у средини табле, 4 правоугаоника $(n-2)\times 1$ или $1\times(n-2)$ уз ивице табле и 4 јединична квадрата у угловима табле. Ако квадрат $(n-2)\times(n-2)$ издијелимо на квадрате 2×2, а правоугаонике на мање правоугаонике 1×2 или 2×1, можемо имати максимално

$$\frac{(n-2)^2}{2}+4\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{n^2-4}{2}$$

црних квадрата.

Овај максимум се може достићи ако таблу $n\times n$ обојимо на шаховски начин, а онда два црна квадрата која се налазе у угловима табле пребојимо у бијело, те имамо таблу која задовољава услове задатка и која има $\dfrac{n^2}{2}-2=\dfrac{n^2-4}{2}$ црних поља.

3. Како је $2000=16\cdot 125$ довољно је доказати да за сваких 16 узастопних природних бројева постоји такво разбијање. Имамо да је

$(k+1)^3+(k+4)^3-(k+2)^3-(k+3)^3=(k+4)^3-(k+3)^3-((k+2)^3-(k+1)^3)=$

$=(k+4)^2+(k+4)(k+3)+(k+3)^2-(k+2)^2-(k+2)(k+1)-(k+1)^2=12k+30,$

(1) $$(k+1)^3+(k+4)^3=(k+2)^3+(k+3)^3+12k+30.$$

Ако у (1) умјесто k ставимо $k+4$ добијамо да је

(2) $$(k+6)^3+(k+7)^3+12(k+4)+30=(k+5)^3+(k+8)^3.$$

Сабирањем (1) и (2) добијамо

(3) $(k+1)^3+(k+4)^3+(k+6)^3+(k+7)^3+48=(k+2)^3+(k+3)^3+(k+5)^3+(k+8)^3.$

Ако у (3) умјесто k ставимо $k+8$ добијамо да је
(4)
$(k+10)^3+(k+11)^3+(k+13)^3+(k+16)^3=(k+9)^3+(k+12)^3+(k+14)^3+(k+15)^3+48.$

Сабирањем (3) и (4) добијамо да је

$$(k+1)^3+(k+4)^3+(k+6)^3+(k+7)^3+(k+10)^3+(k+11)^3+(k+13)^3+(k+16)^3 =$$

$$= (k+2)^3+(k+3)^3+(k+5)^3+(k+8)^3+(k+9)^3+(k+12)^3+(k+14)^3+(k+15)^3,$$

што је и требало доказати.

4. Примијетимо да се израз на десној страни дате неједнакости

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6+x_1x_5+x_1x_6+x_2x_6$$

може записати у облику

$$(x_1+x_4)(x_2+x_5)+(x_2+x_5)(x_3+x_6)+(x_3+x_6)(x_1+x_4).$$

Користећи смјену $X = x_1 + x_4$, $Y = x_2 + x_5$ и $Z = x_3 + x_6$, дата неједнакост постаје

$$(X+Y+Z)^2 \geq C \cdot (XY+YZ+ZX),$$

гдје су X, Y и Z произвољни реални бројеви.

За $X = Y = Z = 1$ имамо да је $9 \geq 3C$, тј. $C \leq 3$.

Докажимо сада да неједнакост

$$(X+Y+Z)^2 \geq 3(XY+YZ+ZX),$$

важи за произвољне реалне бројеве X, Y и Z. Како је ова неједнакост еквивалентна са $(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2 \geq 0$, она очито важи. При томе, једнакост важи само ако је $X = Y = Z$, тј. $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Означимо са P и Q подножја висина спуштених из тјемена C редом на странице AC и AB. Тада имамо сљедеће парове сличних троуглова

$$\triangle AKC \sim \triangle APK, \quad \triangle ABP \sim \triangle ACQ, \quad \triangle ALB \sim \triangle AQL,$$

јер су сви ови троуглови правоугли и троуглови у истом пару имају заједнички оштри угао. Слиједи да је

$$AK^2 = AP \cdot AC = AQ \cdot AB = AL^2, \text{ тј. } AK = AL$$

.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Лијеву неједнакост доказујемо математичком индукцијом. За $n = 2$ важи једнакост $\frac{13}{72} - \frac{1}{18} = \frac{1}{8}$. Нека је $n > 2$. Претпоставимо да неједнакост важи за $n-1$, тј. да је

$$\frac{13}{72} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3}. \tag{1}$$

Довољно је још доказати да за сваки природан број n важи

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^3}, \tag{2}$$

јер сабирањем (1) и (2) добијамо да лијева неједнакост важи за n.

А неједнакост (2) важи пошто је еквивалентна са $n(n+1)^2 - n^3 \leq 2(n+1)^2$, тј. $0 \leq 3n+2$.

За доказ десне неједнакости процијенимо општи члан $\frac{1}{k^3}$. Имамо за $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right),$$

тј.

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

На основу овога је за $n > 2$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2^3} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{5}{24} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{24} - \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Примједба. Ми смо у ствари доказали јачу неједнакост

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{24} - \frac{1}{2n(n+1)},$$

која се такође лако доказује математичком индукцијом.

25. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Источно Сарајево, 14. април 2018.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. На шаховском турниру одиграно је укупно 100 партија. Два играча су напустила турнир. Сваки од њих је до напуштања турнира одиграо по 5 партија. Да ли су они играли међусобно прије напуштања турнира?

2. У троугао ABC са правим углом у тјемену C уписана је кружница која додирује његове странице AB, BC, CA редом у тачкама M, N, L. Нека је K тачка дужи BN таква да је $BK = CL$. Доказати да је $KL \perp MN$.

3. Нека за реалне бројеве a и b важи $|3a - 2b| \leq 1$ и $|2a - 3b| \leq 1$. Доказати да је $|a| \leq 1$ и $|b| \leq 1$.

4. Дато је n декадних цифара различитих од нуле, од којих неке могу бити једнаке. Од тих n цифара су формирани сви могући $n-$цифрени бројеви. Доказати да међу њима може бити највише један степен двојке.

(На примјер, међу 30 шестоцифрених бројева $224588, 224858, \ldots, 885422$ који се записују помоћу цифара 2, 2, 4, 5, 8, 8 само је број $524288 = 2^{19}$ степен двојке.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. За природан број n означимо са $d(n)$ највећи заједнички дјелилац природних бројева $n^2 + 1$ и $(n-1)^3 + 2$. Наћи све вриједности $d(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2. Нека су p и q њихове заједничке спољашње тангенте и нека је P додирна тачка тангенте p са кружницом k_1, а Q додирна тачка тангенте q са кружницом k_2. Доказати да дате кружнице одсијецају на правој PQ подударне тетиве.

3. Одредити све парове (p, q) реалних бројева тако да квадратни триноми $x^2 + px + q$ и $px^2 + qx + 1$ имају један заједнички реални коријен и да збир остала два њихова коријена буде $1/2$.

4. Јединична поља квадратне табле $n \times n$ се боје бијелом и црном бојом. Колико има различитих бојења те табле код којих се у сваком квадрату 2×2 унутар табле налази подједнак број бијелих и црних поља?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC и D, E, F редом подножја висина из његових тјемена A, B, C. Нека је P пресјечна тачка дужи DF и BE. Права која садржи тачку P и нормална је на BC сијече страницу AB у тачки Q. Нека је N пресјечна тачка дужи AD и EQ. Доказати да је тачка N средиште дужи AH.

2. Одредити све парове (p, q) простих бројева за које важи $p \mid 12q - 1$ и $q \mid 12p + 1$.

3. За које n се све странице и дијагонале датог правилног $n-$угла могу обојити са n боја (свака дуж једном бојом) тако да за било које три различите боје постоји троугао, са тјеменима у тјеменима датог $n-$угла, чије су странице обојене тим бојама?

4. Низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ реалних бројева задовољава услове

$$a_0 = 0, \quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Доказати да важи

а) $\left| \dfrac{a_{k+1}}{k+1} - \dfrac{a_k}{k} \right| \leq \dfrac{1}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}$;

б) Ако је $a_n = 0$ за неки природан број n, онда је $|a_k| \leq \dfrac{k(n-k)}{2}$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дат је једнакокраки трапез са основицама AB и CD. Кружница k која садржи тачке D и C, други пут сијече страницу AD у тачки X, а дијагоналу BD у тачки Y. Тангента на кружницу k у тачки C сијече праву AB у тачки Z. Доказати да су тачке X, Y, Z колинеарне.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ реалних бројева задовољава услове

$$a_0 = 0, \quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \le \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Доказати да важи

а) $\left|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}\right| \le \frac{1}{k+1}$ за свако $k \in \mathbb{N}$;

б) Ако је $a_n = 0$ за неки природан број n, онда је $|a_k| < k \ln\frac{n}{k}$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је n број учесника турнира. $n-2$ играча који су завршили турнир одиграли су међусобно $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија. Два играча који су напустили турнир одиграли су заједно 9 или 10 партија, у зависности од тога да ли су играли међусобно или нису. Дакле, добијамо двије једначине

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 9 = 100, \quad \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 10 = 100,$$

које су еквивалентне редом са $(n-2)(n-3) = 182$ и $(n-2)(n-3) = 180$, при чему нас интересују само њихова природна рјешења. Такво рјешење, $n = 16$, има само прва једначина, одакле слиједи да су играчи који су напустили турнир играли међусобно.

2. Нека је I центар уписане кружнице троугла ABC. Права IB је симетрала угла у тјемену B, а како је $BM = BN$, слиједи да је $IB \perp MN$.

Четвороугао $CLIN$ је квадрат (са страницом једнаком полупречнику уписане кружнице троугла ABC), па из услова $BK = CL$ слиједи да је $BK = IL$. Како су, осим тога, праве BK и IL паралелне (јер су обје нормалне на AC), то је $BKLI$ паралелограм. Одавде слиједи да је $KL \parallel IB$, тј. $KL \perp MN$.

3. Из датих услова добијамо редом да је

$$-1 \le 3a - 2b \le 1 \ \text{ и } \ -1 \le 2a - 3b \le 1,$$

$$\frac{3a-1}{2} \le b \le \frac{3a+1}{2} \ \text{ и } \ \frac{2a-1}{3} \le b \le \frac{2a+1}{3}, \tag{1}$$

одакле слиједи да је

$$\frac{3a-1}{2} \le \frac{2a+1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2a-1}{3} \le \frac{3a+1}{2}\,.$$

Посљедње двије неједнакости су еквивалентне редом са неједнакостима $a \le 1$ и $-1 \le a$, па је $-1 \le a \le 1$, тј. $|a| \le 1$.

Аналогно се доказује да је $-1 \le b \le 1$ (што такође слиједи и из друге неједнакости у (1), пошто је $-1 \le a \le 1$).

4. Претпоставимо супротно, да међу тим бројевима постоје два степена двојке 2^k и 2^l, $k > l$. Тада је број $2^k - 2^l = 2^l(2^{k-l} - 1)$, као разлика два броја записаних истим цифрама, дјељив са 9 (слиједи из чињенице да $9 \mid 10^i - 1$, за свако $i \in \mathbb{N}$). Дакле,

$$9 \mid 2^{k-l} - 1. \tag{1}$$

Са друге стране, како су оба броја 2^k и 2^l већи од 10^{n-1} и мањи од 10^n, то је $2^{k-l} = 2^k/2^l < 10$. Одавде добијамо да је $k - l \le 3$, тј. $1 \le k - l \le 3$, што је у супротности са (1).

ДРУГИ РАЗРЕД

1. За дати природан број n писаћемо краће d умјесто $d(n)$. Из услова $d \mid n^2+1$ и $d \mid (n-1)^3 + 2$ добијамо редом

$$d \mid n(n^2+1) - ((n-1)^3 + 2) = 3n^2 - 2n - 1,$$

$$d \mid 3(n^2+1) - (3n^2 - 2n - 1) = 2n + 4,$$
$$d \mid (2n+4)^2 - 4(n^2+1) = 16n + 12,$$
$$d \mid 8(2n+4) - (16n+12) = 20.$$

Број $n^2 + 1$ не може бити дјељив са 4, па одавде добијамо $d \mid 10$, тј. $d \in \{1, 2, 5, 10\}$. Све ове вриједности $d = 1,\ 2,\ 5,\ 10$ се достижу, на примјер, редом за $n = 2,\ 1,\ 8,\ 3$.

2. Нека је M додирна тачка тангенте p са кружницом k_2, N додирна тачка тангенте q са кружницом k_1, и L, K пресјечне тачке праве PQ са кружницама k_1 и k_2, редом. Користећи теорему о потенцији тачке у односу на кружницу добијамо да је

$$PK \cdot PQ = PM^2, \quad QL \cdot QP = QN^2.$$

Како је $PM = QN$, одавде слиједи да је $PK \cdot PQ = QL \cdot QP$, тј. $PK = QL$. Имамо сљедећа два случаја.

Ако тачка K лежи на дужи PL, тада тачка L лежи на дужи QK, па је

$$PL = PK + KL = QL + KL = QK.$$

Ако тачка L лежи на дужи PK, тада тачка K лежи на дужи QL, па је

$$PL = PK - KL = QL - KL = QK.$$

Дакле, у оба случаја је $PL = QK$, што је и требало доказати.

3. *Одговор:* $(p, q) = (-2, 1)$ и $(p, q) = (1/2, -3/2)$.

Прво рјешење. Нека је x_0 заједнички коријен датих тринома. Тада је x_0 коријен и полинома

$$x(x^2 + px + q) - (px^2 + qx + 1) = x^3 - 1,$$

па како је x_0 реалан број, то је $x_0 = 1$. Даље, из било којег од датих тринома добијамо да је $1 + p + q = 0$, тј. $q = -p - 1$.

Нека су x_1 и x_2 преостали коријени првог и другог тринома, редом. Тада је

$$x^2 + px + q = (x - 1)(x - x_1), \quad px^2 + qx + 1 = p(x - 1)(x - x_2),$$

одакле изједначавањем слободних чланова добијамо да је $x_1 = q = -p - 1$ и $x_2 = 1/p$. Сада из датог услова $x_1 + x_2 = 1/2$ добијамо једначину

$$-p - 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2},$$

која је еквивалентна са квадратном једначином $2p^2 + 3p - 2 = 0$. Рјешења ове једначине су $p_1 = -2$ и $p_2 = 1/2$, па су тражени парови $(p, q) = (-2, 1)$ и $(p, q) = (1/2, -3/2)$.

Оба ова пара задовољавају услове задатка, јер је

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1), \quad -2x^2 + x + 1 = -2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right), \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2).$$

Друго рјешење. Нека је x_0 заједнички коријен, а x_1 и x_2 преостали коријени првог и другог тринома, редом. Из датих услова добијамо да је

$$x^2 + px + q = (x - x_0)(x - x_1), \quad px^2 + qx + 1 = p(x - x_0)(x - x_2),$$

одакле на основу Вијетових формула добијамо

$$x_0 + x_1 = -p, \tag{1}$$

$$x_0x_1 = q, \tag{2}$$

$$x_0 + x_2 = -\frac{q}{p}, \tag{3}$$

$$x_0x_2 = -\frac{1}{p}\,. \tag{4}$$

Множењем једнакости (1) и (4) добијамо

$$(x_0 + x_1)x_0x_2 = -1, \tag{5}$$

а из једнакости (1), (2) и (3) је

$$(x_0 + x_1)(x_0 + x_2) = x_0x_1. \tag{6}$$

Из (5) добијамо да је

$$(x_0 + x_1)x_2 = -\frac{1}{x_0}\,, \tag{7}$$

а из (6) слиједи да је $(x_0 + x_1) + x_2 = x_0x_1 - (x_0 + x_1)x_0$, тј.

$$(x_0 + x_1)x_2 = -x_0^2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) добијамо једначину $-\dfrac{1}{x_0} = -x_0^2$, тј. $x_0^3 = 1$. Како је $x_0 \in \mathbb{R}$, слиједи да је $x_0 = 1$.

Замјеном $x_0 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{2} - x_1$ у (7) добијамо квадратну једначину

$$(1 + x_1)\left(\frac{1}{2} - x_1\right) = -1, \quad \text{тј.} \quad 2x_1^2 + x_1 - 3 = 0.$$

Рјешења ове једначине су $x_1 = 1$ и $x_1 = -3/2$, па како је $x_2 = \dfrac{1}{2} - x_1$ добијамо сљедеће двије тројке (x_0, x_1, x_2) коријена датих тринома:

$$(x_0, x_1, x_2) = \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad (x_0, x_1, x_2) = \left(1, -\frac{3}{2}, 2\right).$$

Даље, из (1) и (2) слиједи да је $(p, q) = (-2, 1)$ или $(p, q) = (1/2, -3/2)$. Оба ова пара задовољавају услове задатка, што се провјерава као у првом рјешењу.

4. Претпоставимо да су поља прве врсте дате табле обојена наизмјенично бијелом и црном бојом (двије могућности). Тада су и поља друге врсте обојена наизмјенично бијелом и црном бојом, при чему опет постоје двије могућности (прво поље у врсти може бити бијело или црно). То важи и за сваку сљедећу врсту, па у овом случају имамо 2^n различитих бојења.

Претпоставимо сада да су нека два сусједна поља у првој врсти обојена истом бојом. По услову задатка, тада је бојење поља у другој врсти једнозначно одређено, и из истих разлога у свакој сљедећој. Прва врста се може обојити на $2^n - 2$ начина тако да бар два сусједна поља буду обојена истом бојом.

Дакле, број тражених бојења је $2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Како је $\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$ то је четвороугао $AFHE$ тетиван. Даље, због $DA \parallel PQ$ закључујемо да је $\angle FQP = \angle FAH = \angle FEH = \angle FEP$, одакле слиједи да је и четвороугао $QFPE$ тетиван. Како је $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$ то је четвороугао $AFDC$ тетиван па је $\angle QFP = \angle AFD = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - \gamma$, одакле слиједи да је $\angle QEP = \gamma$. Одавде закључујемо да је $\angle EAN = 90^\circ - \gamma = \angle AEP = \angle QEP = \angle AEN$, па је троугао ANE једнакокрак. Одавде слиједи да је N центар описаног круга правоуглог троугла AHE, па је $NA = NH$.

2. *Одговор:* $(p, q) = (7, 17)$ и $(p, q) = (131, 11)$.

Прво рјешење. Нека за просте бројеве p и q важи $p \mid 12q - 1$ и $q \mid 12p + 1$. Тада је $p \neq q$ и $p \mid 12p - 12q + 1$ и $q \mid 12p - 12q + 1$, одакле слиједи $pq \mid 12p - 12q + 1$, па постоји цио број n тако да важи

$$12p - 12q + 1 = npq. \tag{1}$$

Из ове једнакости слиједи да је сваки од бројева n, p, q узајамно прост са 12. Због тога је $p \geq 5$ и $q \geq 5$. Имамо сљедећа два случаја.

1° $p > q$. Из (1) слиједи да је n природан број који је узајамно прост са 12. Покажимо да је $n = 1$. У супротном је $n \geq 5$ па је

$$npq - 12p + 12q \geq 5pq - 12p + 12q > 4p(q - 3) + 12q > 1,$$

што је у контрадикцији са (1). Дакле, $n = 1$ па добијамо редом

$$pq - 12p + 12q = 1,$$

$$p(q - 12) + 12(q - 12) = -143,$$

$$(q - 12)(p + 12) = -11 \cdot 13,$$

$$(p+12)(12-q) = 11 \cdot 13.$$

Како је $p+12 \geq 17$, одавде слиједи да је $p+12 = 143$ и $12-q = 1$, тј. $(p,q) = (131, 11)$.

2° $p < q$. Из (1) слиједи да је n негативан цио број. Нека је $m = -n$. Тада је m природан број који је узајамно прост са 12 за који важи $mpq + 12p - 12q = -1$. Покажимо да је $m = 1$. У супротном је $m \geq 5$ па је

$$mpq + 12p - 12q \geq 5pq - 12q + 12p > 4q(p-3) + 12p > -1.$$

Контрадикција. Дакле, $m = 1$ па добијамо редом

$$pq + 12p - 12q = -1,$$

$$p(q+12) - 12(q+12) = -145,$$

$$(p-12)(q+12) = -5 \cdot 29,$$

$$(12-p)(q+12) = 5 \cdot 29.$$

Како је $0 < 12 - p < 12$ имамо два случаја

$$12 - p = 1,\ q + 12 = 145 \quad \text{или} \quad 12 - p = 5,\ q + 12 = 29.$$

У првом случају је $q = 133$, што није прост број $(133 = 7 \cdot 19)$, а у другом случају добијамо још једно рјешење $(p,q) = (7, 17)$.

Друго рјешење. Нека за просте бројеве p и q важи $p \mid 12q-1$ и $q \mid 12p+1$. Тада је $p \neq q$ и постоје природни бројеви x и y тако да важи $12q - 1 = px$ и $12p + 1 = qy$. Из ове двије једнакости слиједи да је сваки од бројева x, y узајамно прост са 12. Опет имамо сљедећа два случаја.

1° $p > q$. Тада је $px = 12q - 1 < 12q < 12p$. Дакле $px < 12p$, па је $x < 12$. Како је x узајамно прост са 12, слиједи да је $x \in \{1, 5, 7, 11\}$, па имамо сљедећа четири случаја.

1) $x = 1$. Тада је $p = 12q - 1$ па је

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)+1}{q} = 144 - \frac{11}{q}.$$

Како је y цио број и q прост број, одавде слиједи да је $q = 11$ и $p = 131$. Дакле, пар простих бројева $(p,q) = (131, 11)$ је једно рјешење.

2) $x = 5$. Тада је $p = (12q-1)/5$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/5+1}{q} = \frac{144q-7}{5q} = 29 - \frac{q+7}{5q}.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < q + 7 < 5q$, па у овом случају немамо рјешења.

3) $x = 7$. Тада је $p = (12q - 1)/7$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/7+1}{q} = \frac{144q-5}{7q} = 20 + \frac{4q-5}{7q}\,.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < 4q - 5 < 7q$, па у овом случају немамо рјешења.

4) $x = 11$. Тада је $p = (12q - 1)/11$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/11+1}{q} = \frac{144q-1}{11q} = 13 - \frac{q-1}{11q}\,.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < q - 1 < 11q$, па ни у овом случају немамо рјешења.

2° $p < q$. Тада је $qy = 12p + 1 < 12q$. Дакле $qy < 12q$, па је $y < 12$. Како је y узајамно прост са 12, слиједи да је $y \in \{1, 5, 7, 11\}$, па имамо сљедећа четири случаја.

1) $y = 1$. Тада је $q = 12p + 1$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)-1}{p} = \frac{144p+11}{p} = 144 + \frac{11}{p}\,.$$

Како је x цио број и p прост број, одавде слиједи да је $p = 11$ и $q = 133$. Како је $133 = 7 \cdot 19$ сложен број, у овом случају немамо рјешења.

2) $y = 5$. Тада је $q = (12p + 1)/5$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/5-1}{p} = \frac{144p+7}{5p} = 29 - \frac{p-7}{5p}\,.$$

Како је $|p - 7| < 5p$ ово је цио број само за $p = 7$. Даље из $q = (12p + 1)/5$ добијамо да је $q = 17$. Дакле, пар $(p, q) = (7, 17)$ је једно рјешење.

3) $y = 7$. Тада је $q = (12p + 1)/7$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/7-1}{p} = \frac{144p+5}{7p} = 20 + \frac{4p+5}{7p}\,.$$

Како је $0 < 4p + 5 < 7p$, у овом случају немамо рјешење.

4) $y = 11$. Тада је $q = (12p + 1)/11$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/11-1}{p} = \frac{144p+1}{11p} = 13 + \frac{p+1}{11p}\,.$$

Како је $0 < p + 1 < 11p$, ни у овом случају немамо рјешење.

3. *Одговор:* Ако је n непаран, $n \geq 3$.

Нека је $n = 2k$ паран број, $k \geq 2$. Претпоставимо да такво бојење постоји. Посматрајмо дужи неке фиксиране боје, на примјер, црвене. Укупан број троуглова чија је једна страница црвена није мањи од броја парова преосталих $2k-1$ боја, којих има $\binom{2k-1}{2} = (2k-1)(k-1)$. Пошто је свака црвена дуж страница $2k-2$ троуглова, одавде слиједи да црвених дужи има бар k. Исто важи и за дужи било које друге боје, па укупан број дужи није мањи од $2k \cdot k = 2k^2$. Међутим, број свих страница и дијагонала $2k-$угла је $\binom{2k}{2} = k(2k-1) < 2k^2$. Контрадикција.

Нека је $n = 2k+1$ непаран број. Обојимо странице правилног $2k+1-$угла редом са тих $2k+1$ боја (сваком бојом по једну страницу). Како је свака дијагонала тог $2k+1-$угла паралелна тачно са једном његовом страницом, обојимо сваку његову дијагоналу управо оном бојом којом је обојена њој паралелна страница. Покажимо да ово бојење задовољава задате услове. Укупан број троуглова са тјеменима у тјеменима тог $2k+1-$угла је $\binom{2k+1}{3}$, а исто толико има и избора три различите боје из скупа од $2k+1$ боја. Претпоставимо супротно, да постоје неке три (различите) боје за које не постоји троугао чије су странице обојене тим бојама. На основу претходног, тада би морао постојати неки троугао чије су бар двије странице обојене истом бојом. Али, како су сваке двије странице које су обојене истом бојом међусобно паралелне, ово је немогуће.

4. Прво рјешење (*сабирањем одговарајућих неједнакости*).

а) Множењем неједнакости

$$-1 \leq a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \leq 1$$

са i, и сабирајући добијене неједнакости за $i = 1, 2, \ldots, k$ добијамо редом

$$-\sum_{i=1}^{k} i \leq \sum_{i=1}^{k} i(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{k} i\,,$$

$$-\frac{k(k+1)}{2} \leq \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)a_i - 2\sum_{i=1}^{k} ia_i + \sum_{i=2}^{k+1}(i-1)a_i \leq \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$-\frac{k(k+1)}{2} \leq a_0 + 2a_1 - 2a_1 - 2ka_k + (k-1)a_k + ka_{k+1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{k-1}(i+1-2i+i-1)a_i \leq \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$(1)\qquad -\frac{k(k+1)}{2} \le ka_{k+1} - (k+1)a_k + \le \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

одакле дијељењем са $k(k+1)$ добијамо да важи

$$\left|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}\right| \le \frac{1}{2}\,.$$

б) Нека су k и n природни бројеви, $k < n$. Сабирањем $n-k$ неједнакости

$$-\frac{1}{2} \le \frac{a_{i+1}}{i+1} - \frac{a_i}{i} \le \frac{1}{2}\,, \quad i = k,\, k+1,\, \ldots,\, n-1,$$

добијамо да је

$$-\frac{n-k}{2} \le \frac{a_n}{n} - \frac{a_k}{k} \le \frac{n-k}{2}\,.$$

Ако је $a_n = 0$, одавде слиједи да је

$$-\frac{n-k}{2} \le -\frac{a_k}{k} \le \frac{n-k}{2}\,, \quad \text{тј.} \quad -\frac{k(n-k)}{2} \le a_k \le \frac{k(n-k)}{2}\,,$$

што је и требало доказати.

Друго рјешење (*математичком индукцијом*).

а) Докажимо математичком индукцијом еквивалентну неједнакост

$$(2)\qquad -\frac{k+1}{2} \le a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \le \frac{k+1}{2} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

За $k = 1$ ова неједнакост важи јер је еквивалентна са $-1 \le -2a_1 + a_2 \le 1$. Претпоставимо да она важи за $k-1$ $(k \ge 2)$, тј. да је

$$-\frac{k}{2} \le a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1} \le \frac{k}{2}\,.$$

Пошто је $-1 \le a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \le 1$, слиједи да је

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \ge 2a_k - a_{k-1} - 1 - \frac{k+1}{k}a_k = \frac{k-1}{k}a_k - a_{k-1} - 1 =$$
$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1}\right) - 1 \ge \frac{k-1}{k}\cdot\left(-\frac{k}{2}\right) - 1 = -\frac{k+1}{2}\,;$$

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \le 2a_k - a_{k-1} + 1 - \frac{k+1}{k}a_k = \frac{k-1}{k}a_k - a_{k-1} + 1 =$$
$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1}\right) + 1 \le \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k}{2} + 1 = \frac{k+1}{2}\,.$$

Дакле

$$-\frac{k+1}{2} \le a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \le \frac{k+1}{2}\,,$$

тј. важи неједнакост (2).

б) На основу неједнакости (2) је

$$ka_{k+1} - \frac{k(k+1)}{2} \le (k+1)a_k \le ka_{k+1} + \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{2} \le a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{2}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Нека је $a_n = 0$. Из (3) за $k = n-1$ добијамо да је

$$\text{(4)} \qquad -\frac{n-1}{2} \le a_{n-1} \le \frac{n-1}{2}\,.$$

Неједнакост

$$\text{(5)} \qquad -\frac{k(n-k)}{2} \le a_k \le \frac{k(n-k)}{2}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots n-1,$$

доказујемо математичком индукцијом по $k = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1$. Из (4) слиједи да ово тврђење важи за $k = n-1$. Претпоставимо да оно важи за $k+1$ $(k+1 \le n-1)$, тј. да је

$$-\frac{(k+1)(n-k-1)}{2} \le a_{k+1} \le \frac{(k+1)(n-k-1)}{2}\,.$$

Тада на основу (3) добијамо да је

$$a_k \ge \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{2} \ge -\frac{k}{k+1} \cdot \frac{(k+1)(n-k-1)}{2} - \frac{k}{2} = -\frac{k(n-k)}{2}\,,$$

$$a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{2} \le \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(k+1)(n-k-1)}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k(n-k)}{2}\,,$$

чиме је неједнакост (5) доказана.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. На основу једнакости угла између тангенте и тетиве и периферијског угла над истим луком имамо да је $\angle ABD = \angle YDC = \angle YCZ$. Како је $\angle YCZ + \angle YBZ = 180°$, слиједи да је четвороугао $CYBZ$ тетиван. Даље је $\angle CYZ = \angle CBZ = \angle XDC = 180° - \angle CYX$, одакле слиједи да је четвороугао $XBCY$ уписан у кружницу k, па је $\angle CYZ + \angle CYX = 180°$, што значи да су тачке X, Y, Z колинеарне.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Прво рјешење (*сабирањем одговарајућих неједнакости*).

а) Множењем неједнакости

$$-\frac{1}{i} \le a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \le \frac{1}{i}$$

са i, и сабирајући добијене неједнакости за $i = 1, 2, \ldots, k$ добијамо редом

$$-k \le \sum_{i=1}^{k} i(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \le k,$$

$$-k \le \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)a_i - 2\sum_{i=1}^{k} ia_i + \sum_{i=2}^{k+1}(i-1)a_i \le k,$$

$$-k \le a_0 + 2a_1 - 2a_1 - 2ka_k + (k-1)a_k + ka_{k+1} +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k-1}(i+1-2i+i-1)a_i \le k,$$

$$(1) \qquad -k \le ka_{k+1} - (k+1)a_k + \le k,$$

одакле дијељењем са $k(k+1)$ добијамо да важи

$$\left|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}\right| \le \frac{1}{k+1}\,.$$

б) Нека су k и n природни бројеви, $k < n$. Сабирањем $n-k$ неједнакости

$$-\frac{1}{i+1} \le \frac{a_{i+1}}{i+1} - \frac{a_i}{i} \le \frac{1}{i+1}\,, \quad i = k,\, k+1,\, \ldots,\, n-1,$$

добијамо да је

$$-\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \le \frac{a_n}{n} - \frac{a_k}{k} \le \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Ако је $a_n = 0$, одавде слиједи да је

$$|a_k| \le k\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

па је довољно још доказати да произвољне природне бројеве k и n, $k < n$, важи

$$(2) \qquad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{k}\,.$$

На основу познате неједнакости

$$\frac{1}{i+1} < \ln(i+1) - \ln i \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

добијамо да је

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} < (\ln(k+1) - \ln k) + (\ln(k+2) - \ln(k+1)) +$$

$$+ \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) = \ln n - \ln k = \ln \frac{n}{k},$$

тј. важи (2).

Примједба. Неједнакост (3) слиједи, на примјер, из чињенице да је низ (x_i) са општим чланом $x_i = \left(\frac{i+1}{i}\right)^{i+1}$ опадајући и да конвергира ка e. Наиме, одавде слиједи да је $e < x_i$, одакле логаритмовањем добијамо да важи (3).

Друго рјешење (*математичком индукцијом*).

а) Докажимо математичком индукцијом еквивалентну неједнакост

$$-1 \le a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \le 1 \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

За $k = 1$ ова неједнакост важи јер је еквивалентна са $-1 \le -2a_1 + a_2 \le 1$. Претпоставимо да она важи за неко $k-1$ $(k \ge 2)$, тј. да је

$$-1 \le a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1} \le 1.$$

Пошто је $-\frac{1}{k} \le a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \le \frac{1}{k}$, слиједи да је

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \ge 2a_k - a_{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{k+1}{k} a_k = \frac{k-1}{k} a_k - a_{k-1} - \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1}\right) - \frac{1}{k} \ge \frac{k-1}{k} \cdot (-1) - \frac{1}{k} = -1;$$

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \le 2a_k - a_{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{k+1}{k} a_k = \frac{k-1}{k} a_k - a_{k-1} + \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1}\right) + \frac{1}{k} \le \frac{k-1}{k} \cdot 1 + \frac{1}{k} = 1,$$

чиме је неједнакост (4) доказана.

б) На основу неједнакости (1) је

$$ka_{k+1} - k \le (k+1)a_k \le ka_{k+1} + k,$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{k+1} \le a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{k+1}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Нека је $a_n = 0$. Из (4) за $k = n-1$ добијамо да је

$$\text{(6)} \qquad -\frac{n-1}{n} \le a_{n-1} \le \frac{n-1}{n}\,.$$

Неједнакост

$$\text{(7)} \qquad -k\ln\frac{n}{k} < a_k < k\ln\frac{n}{k}\,, \quad k = 1,\, 2, \ldots, n-1,$$

доказујемо математичком индукцијом по $k = n-1$, $n-2$, …, 1. Из (6) слиједи да ово тврђење важи за $k = n-1$, пошто је

$$|a_{n-1}| \le \frac{n-1}{n} < (n-1)\ln\frac{n}{n-1}.$$

Претпоставимо да оно важи за $k+1$ $(k+1 \le n-1)$, тј. да је

$$-(k+1)\ln\frac{n}{k+1} < a_{k+1} < (k+1)\ln\frac{n}{k+1}\,.$$

Тада на основу (5) добијамо да је

$$a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{k+1} \le \frac{k}{k+1}\cdot(k+1)\ln\frac{n}{k+1} + \frac{k}{k+1} =$$

$$= k\left(\ln\frac{n}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) < k\,\ln\frac{n}{k}\,;$$

$$a_k \ge \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{k+1} \ge -\frac{k}{k+1}\cdot(k+1)\ln\frac{n}{k+1} - \frac{k}{k+1} =$$

$$= -k\left(\ln\frac{n}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) > -k\,\ln\frac{n}{k}\,,$$

чиме је неједнакост (7) доказана.

(Овдје смо два пута примијенили неједнакост $\ln\dfrac{n}{k+1} + \dfrac{1}{k+1} < \ln\dfrac{n}{k}$, која је еквивалентна са $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k$, и важи на основу неједнакости (3).)

26. републичко такмичење из математике ученика средњих школа Републике Српске
Бања Лука 23.03.2019. године

1. Разред

<u>Задаци и рјешења:</u>

1 Ако су a, b, c дужине страница произвољног троугла и ако ***је*** $a + b + c = 1$**,** тада важи $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$**.** Доказати.

Рјешење:
По Хероновом обрасцу за израчунавање површине троугла имамо да је

$$P = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)}$$ односно $16P^2 = 4(ab+bc+ac) - 8abc - 1$.

Из $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ имамо да је
$4(ab+bc+ac) = 2 - 2(a^2+b^2+c^2)$.

Замјеном у формули за површину добијамо $16P^2 = 1 - 2(a^2+b^2+c^2) - 8abc > 0$ одакле слиједи да је $a^2+b^2+c^2+4abc < \frac{1}{2}$**.**

2 Нека су x, y и z реални бројеви, такви да је $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и $xy + yz + zx = 4$.
Израчунати вриједност израза $|x| + |y| + |z|$.

Рјешење:
Из једнакости $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 8+2\cdot 4 = 16$, налазимо да је $|x+y+z| = 4$.

Докажимо да су бројеви x, y и z истог знака, одакле ће слиједити да је $|x| + |y| + |z| = 4$.

Како је $0 = 8-2\cdot 4 = x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx) = (x+y-z)^2-4xy$, то је $xy \geq 0$.
Аналогно претходном добија се и $yz \geq 0$ и $zx \geq 0$.

Из чињеница да је $xy \geq 0$, $yz \geq 0$ и $zx \geq 0$ закључујемо да су бројеви x, y и z истог знака (нулу можемо сматрати бројем са произвољним знаком), па је
$|x| + |y| + |z| = 4$.

3 Нека су x и y цијели бројеви, такви да 90 дијели $x^2 + xy + y^2$.
Доказати да онда 900 дијели xy.

Рјешење:

Докажимо да су бројеви x и y дјељиви са 30, одакле ће слиједити тражено тврђење. Како $9 \mid (x^2 + xy + y^2) = (x - y)^2 + 3xy$ имамо $9 \mid (x - y)^2$, односно $3 \mid (x - y)$. Зато $3 \mid xy$, те како и $3 \mid (x - y)$, добијамо да $3 \mid x$ и $3 \mid y$.

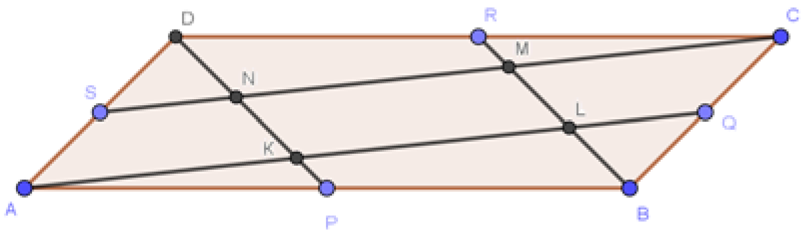
Пошто $10 \mid (x^2 + xy + y^2)$, а $(x^2 + xy + y^2) \mid (x^3 - y^3)$, то $10 \mid (x^3 - y^3)$, па се бројеви x^3 и y^3 завршавају истом цифром, што је могуће само ако се и бројеви x и y завршавају истом цифром (ово такмичари требају провјерити!).

Користећи ове чињенице, из дјељивости броја $x^2 + xy + y^2$ са 10 закључујемо и да је број $3x^2$ дјељив са 10, одакле је и број x дјељив са 10, а онда је, аналогно претходном, и y дјељив са 10.

Коначно, закључујемо да су бројеви x и y дјељиви са 30, што значи да је број xy дјељив са 900.

4 У паралелограму $ABCD$ тачке P, Q, R, S су средишта страница AB, BC, CD, DA. Праве AQ, BR, CS, DP сијеку се и образују четвороугао. Доказати да је овај четвороугао паралелограм и наћи његову површину знајући да је површина паралелограма $ABCD$ једнака a^2.

Рјешење:



Пошто је $AS = CQ$ и $AS \parallel CQ$ то је четвороугао $AQCS$ паралелограм. То такође следи и из подударности троуглова ABQ и CDS. Одатле следи и да је $AQ \parallel SC$. На исти начин се доказује да је и четвороугао $DPBR$ паралелограм, тј. да је $PD \parallel BR$. Према томе, пошто је $AQ \parallel SC$ и $PD \parallel BR$, четвороугао $KLMN$ је паралелограм.

Пошто је PK средња линија троугла ABL (јер је $AP = PB$ и $PK \parallel BL$), а LQ средња линија троугла BCM (јер је $BQ = QC$ и $LQ \parallel CM$), то је $AK = KL$ и $LQ = \frac{1}{2}CM$.Из истог разлога је и $CM = MN$.

Даље је: $AK = KL = MN = CM = 2\ LQ$, па је $AQ = AK + KL + LQ = KL + KL + \frac{1}{2}KL = \frac{5}{2}KL$, одакле је $KL = \frac{2}{5}AQ$. Пошто паралелограми $AQCS$ и $KLMN$ имају једнаке висине, имаћемо да је:

$P_{KLMN} = \frac{2}{5}P_{AQCS}$, а будући да је $P_{AQCS} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$, имаћемо коначно

$P_{KLMN} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{5}a^2$.

2. *Разред*

Задаци и рјешења:

1 а) Доказати да за све позитивне реалне бројеве a и b за које је $a^2 > b$ важи:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

б) Да ли је вриједност израза $\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$ рационалан или ирационалан број?

Рјешење:

а) Како су обе стране позитивне, довољно је провјерити једнакост након квадрирања. Након квадрирања лијева страна постаје $a \pm \sqrt{b}$, а десна страна

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} =$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{4}} = a \pm \sqrt{a^2-\left(a^2-b\right)} = a \pm \sqrt{b}.$$

б) Користећи резултат под а) имамо:

$$\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{5+\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} =$$

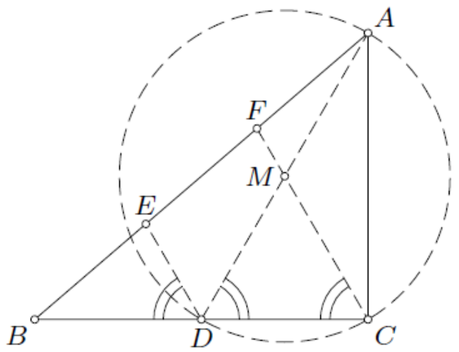
$$= \frac{5+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{12-2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8-6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{3}-12+9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.$$

Дакле тражени број је рационалан.

2 У троуглу ABC, тачка D је средина странице BC, а тачка E на страници AB таква да је $AE = 2EB$. Ако је $\angle ADC = \angle BDE$, наћи угао $\angle ACB$.

Рјешење:
Нека је F средиште дужи AE. Тада је $BE = EF = FA$. Како је и $BD = DC$, праве ED и FC су паралелне, па по Талесовој теореми CF полови AD.
Означимо са M средиште AD. Из услова задатка је $\angle BCF = \angle BDE = \angle ADC$, па добијамо да је троугао MCD једнакокрак, тј. $MC = MD = MA$.
Дакле, C је на полукругу над пречником AD, тј. $\angle ACB = \angle ACD = 90°$.



3 Одредити све природне бројеве n такве да је број $2^n + n^2$ дјељив са 7.

Рјешење:
Остаци при дијељењу са 7 бројева 2^n су 1, 2 или 4.
Остаци при дијељењу са 7 бројева n^2 су 0, 1, 2 или 4.
Дакле, број $2^n + n^2$ не може бити дјељив са 7.

4 Наћи троцифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрени број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.

Рјешење:
Из услова задатка је: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1 = 3 \cdot (2 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$.
Како се број $3c$ завршава јединицом, то је $c = 7$.
Даље је, $1000a + 100b + 71 = 6000 + 300a + (3b + 2) \cdot 10 + 1$. Како је b цифра $(0 \leq b \leq 9)$, биће $2 \leq 3b + 2 \leq 29$. Број $3b + 2$ се завршава цифром 7, па је $3b + 2 \in \{7, 17, 27\}$. Могуће је само $b = 5$.
Сада је $1000a + 571 = 6000 + (3a + 1) \cdot 100 + 71$. Како је и a цифра, биће $1 \leq 3a + 1 \leq 28$ и $3a + 1$ се завршава цифром 5, те је $3a + 1 = 25$, тј. $a = 8$.
Тражени број је 857.

3. Разред

<u>Задаци и рјешења:</u>

1. Колико има уређених парова природних бројева (x, y) за које важи

$$20x = y(x - 15y)$$

Рјешење:

Задана једначина гласи $15y^2 - xy + 20x = 0$. Дискриминанта $D = x^2 - 4 \cdot 15 \cdot 20x$ те квадратне једначине по непознатој y мора бити квадрат целог броја. Зато постоји ненегативни цео број m такав да је $x^2 - 1200x = m^2$. Допуном израза $x^2 - 1200x$ до потпуног квадрата добијамо

$(x - 600)^2 = m^2 + 360000$, а растављањем на чиниоце имамо

$(x - 600 - m)(x - 600 + m) = 360000$

Одавде је $x - 600 - m = c_1$, $x - 600 + m = c_2$, при чему за целе бројеве c_1, c_2 важи

$c_1 c_2 = 360000$

Сабирањем добијамо да је $2x - 1200 = c_1 + c_2$ одакле закључујемо да бројеви c_1 и c_2 морају бити оба парна јер им је збир и производ паран број.

При томе, користећи однос аритметичке и геометријске средине, закључујемо да бројеви c_1 и c_2 не могу бити негативни, јер је $2x = 1200 + c_1 + c_2 =$

$2\sqrt{c_1 c_2} + c_1 + c_2 \leq (-c_1) + (-c_2) + c_1 + c_2 = 0$, што је немогуће за природни број x.

Како је m^2 дискриминанта једначине $15y^2 - xy + 20x = 0$ можемо писати

$$y_1 = \frac{x - m}{30}, y_2 = \frac{x + m}{30}.$$

Дакле, ако постоји решење (x, y), онда 30 дели барем један од бројева $x - m$ и $x + m$.

Будући да је $x - 600 - m = c_1$ и $x - 600 + m = c_2$ закључујемо да 30 дели барем један од бројева c_1 и c_2.

Како тражимо само парове (x, y), довољно је пребројати колико има позитивних делиоца c_1 броја 360000 дељивих са 30 таквих да је $c_2 = \dfrac{360000}{c_1}$ паран број.

Сваки такав c_1 можемо записати у облику $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ при чему је $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{1, 2\}$ и $c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Дакле, таквих бројева има $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$.

2. Нека су a, b, c странице произвољног троугла и α, β углови наспрам страница a и b. Доказати да важи: $a \cos\alpha + b \cos\beta \leq c$. Кад важи једнакост?

Рјешење:

Из синусне теореме је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, па је дата неједнакост еквивалентна са $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta \leq \sin\gamma$, тј. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq 2\sin\gamma$.

Међутим, како је $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 2\sin(\pi - \gamma)\cos(\alpha - \beta) =$
$= 2\sin\gamma\cos(\alpha - \beta)$.

На крају је: $2\sin\gamma\cos(\alpha - \beta) \leq 2\sin\gamma$ тј. важи неједнакост $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq 2\sin\gamma$, а то онда значи да важи полазна неједнакост $a \cos\alpha + b \cos\beta \leq c$.

Једнакост важи када је $cos(\alpha-\beta)=1$, односно када је $\alpha=\beta$.

3. Доказати да за нуле x_1 и x_2 тринома $x^2+px-\frac{1}{2p^2}$, $p\in R\wedge p\neq 0$ важи неједнакост $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

Рјешење:

На основу Вијетових формула имамо да је $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=-\frac{1}{2p^2}$.

Даље , послије низа трансформација, имамо:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2\left[2(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]=p^4+2+\frac{1}{2p^4}.$$

Искористимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине за бројеве p^4 и $\frac{1}{2p^4}$ добијемо да је $p^4+\frac{1}{2p^4}\geq 2\sqrt{p^4\cdot\frac{1}{2p^4}}=\sqrt{2}$.

Коначно имамо да је $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

4 На страници BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC, сијече дуж AD у тачки K. Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D.

Рјешење:

Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC=b$, $AB=c$, $BD=u$, $DC=v$ и $AD=d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписне у троуглове ABD и ACD.

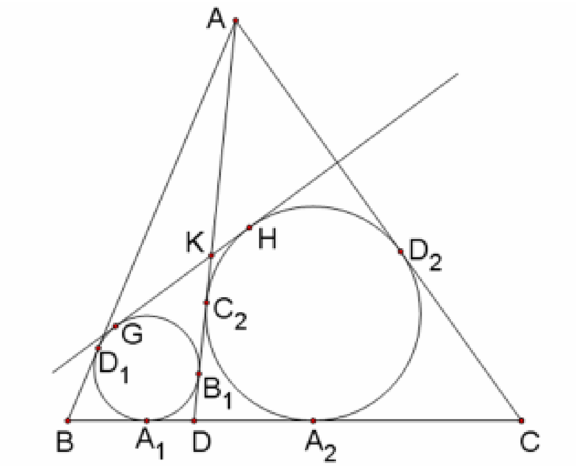
Тада је $2AK=(AB_1-GK)+(AC_2-HK)=AB_1+AC_2-GH=AD_1+AD_2-A_1A_2=$
$=AD_1+AD_2-DA_1-DA_2$.

Међутим, $AD_1=\frac{c+d-u}{2}$, $AD_2=\frac{b+d-v}{2}$, $DA_1=\frac{d+u-c}{2}$, $DA_2=\frac{d+v-b}{2}$.

Замјеном добијамо

$$2AK=\frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2}=b+c-u-v=AC+AB-BC,$$

односно $AK=\frac{AB+AC-BC}{2}$, што зависи само од дужина страница троугла ABC.


A
K
H
D2
C2
G
D1
B1
B
A1
D
A2
C

4. ***Разред***

<u>Задаци и рјешења:</u>

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=1$. Доказати:

$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\leq\sqrt{2-\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

Рјешење:

Квадрирањем обе стране неједнакости имамо да је лијева страна, означимо је са L, једнака

$$L=2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}+a^2+b^2+c^2$$

, а десна страна неједнакости, означимо је са D, једнака је: $D=2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Треба доказати да је $L\leq D$ тј. да је

$$2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\leq$$
$$\leq 2-2(a^2+b^2+c^2)$$

Квадрирањем једнакости $a+b+c=1$ добијамо $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=1$ одакле је $2(ab+ac+bc)=1-\left(a^2+b^2+c^2\right)$ и замјеном на десној страни имамо:

$$2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\leq 4(ab+bc+ca)$$

. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине имамо да је

$2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}\leq ab(2b+2c+2)$, $2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}\leq bc(2c+2a+2)$ и

$2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\leq ca(2a+2b+2)$. Замјеном лијева страна неједнакости постаје

$$L=2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\leq$$
$$\leq 2(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc)+2(ab+bc+ca)=2(a+b+c+1)(ab+bc+ca)=$$
$$=4(ab+bc+ca)=D.$$

2. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима степена n чије су све нуле реалне и веће од 1. Доказати да $P(x)$ има нулу која није мања од $1+n\cdot\left|\dfrac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

Рјешење:

Нека су $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ нуле посматраног полинома и нека важи, без умањења општости, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$. Треба доказати $x_n \geq 1 + n \cdot \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|$. Полином можемо написати у облику

$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$. Сада имамо

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{c(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+c(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+\cdots+c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)} =$$

$$= \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Уврштавајући $x = 1$ добијамо:

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \cdots + \frac{1}{1-x_n} = -\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \frac{1}{x_3-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} \right).$$

Пошто су све нуле реалне и веће од 1, сви сабирци у загради су позитивни, па имамо

$$\left| \frac{P'(1)}{P(1)} \right| = \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \frac{1}{x_3-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} \geq \frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{x_n-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1} = \frac{n}{x_n-1}.$$

Одавде даље имамо $\frac{x_n-1}{n} \geq \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|$, одакле је $x_n \geq 1 + n \cdot \left| \frac{P(1)}{P'(1)} \right|$.

3. Нека су *a, b, c* странице произвољног троугла и α, β углови наспрам страница *a* и *b*. Доказати да важи: $a \cos \alpha + b \cos \beta \leq c$. Кад важи једнакост?

Рјешење:

Из синусне теореме је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, па је дата неједнакост еквивалентна са $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta \leq \sin\gamma$, тј. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq 2\sin\gamma$.

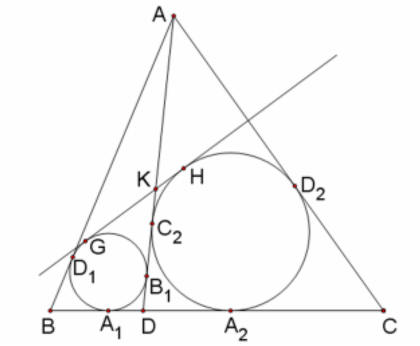
Међутим, како је $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) =$
$= 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)$.

На крају је: $2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) \leq 2\sin\gamma$ тј. важи неједнакост $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq 2\sin\gamma$, а то онда значи да важи полазна неједнакост $a\cos\alpha + b\cos\beta \leq c$.

Једнакост важи када је $\cos(\alpha-\beta) = 1$, односно када је $\alpha = \beta$.

4. На страници *BC* троугла *ABC* уочимо тачку *D* и уочимо уписане кругове у троуглове *ABD* и *ACD*. Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве *BC*, сијече дуж *AD* у тачки *K*. Доказати да дужина дужи *AK* не зависи од положаја тачке *D*.

Рјешење:



Означимо са A_1, B_1, D_1 тачке у којима уписани круг у троугао ABD додирује странице BD, AD, AB; и означимо са A_2, C_2, D_2 тачке у којима уписани круг у троугао ACD додирује странице CD, AD, AC. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Нека су G и H тачке у којима заједничка спољашња тангента различита од BC додирује кругове уписне у троуглове ABD и ACD.

Тада је $2AK = (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK) = AB_1 + AC_2 - GH = AD_1 + AD_2 - A_1A_2 =$
$= AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2$.

Међутим, $AD_1 = \frac{c+d-u}{2}$, $AD_2 = \frac{b+d-v}{2}$, $DA_1 = \frac{d+u-c}{2}$, $DA_2 = \frac{d+v-b}{2}$.

Замјеном добијамо

$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v = AC + AB - BC$, односно

$AK = \frac{AB + AC - BC}{2}$, што зависи само од дужина страница троугла ABC.

Рјешења задатака са бодовањем

Први разред

1. Два путника крећу се из мјеста А и В један другоме у сусрет. Сваки од њих када стигне у оно друго мјесто, враћа се назад у почетно мјесто. Први пут су се путници срели на 8 km од мјеста А, а други пут, када се враћају назад, на 6 km од мјеста В. Одреди удаљеност мјеста А и В.

   Рјешење:
   Нека је x удаљеност мјеста А и В. Нека су v_1 односно v_2 брзине путника који креће из А односно из В. Нека је t_1 вријеме протекло до првог сусрета. Тада вриједи

   $$v_1 \cdot t_1 = 8, v_2 \cdot t_1 = x - 8 \qquad t_1 = \frac{8}{v_1}, t_1 = \frac{x-8}{v_2} \qquad \frac{8}{v_1} = \frac{x-8}{v_2} \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{x-8}{8}.$$

   Нека је t_2 вријеме протекло до другог сусрета. Тада вриједи

   $$v_1 \cdot t_2 = x - 2, v_2 \cdot t_2 = x + 2 \qquad t_2 = \frac{x-2}{v_1}, t_2 = \frac{x+2}{v_2} \qquad \frac{x-2}{v_1} = \frac{x+2}{v_2} \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{x+2}{x-2}.$$

   На основу горњих једначина слиједи

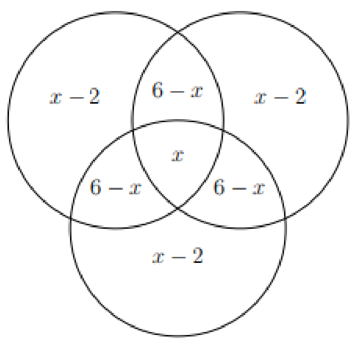
   $$\frac{x-8}{8} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$x^2 - 8x - 2x + 16 = 8x + 16$$
$$x^2 - 18x = 0$$
$$x(x-18) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 18$$

Прво рјешење је немогуће па је удаљеност између мјеста A и B 18 km.

2. Сваки од тројице пријатеља пописао је својих десет омиљених рачунарских игара. На сва три пописа заједно нашло се 15 различитих игара. Упоређујући своје пописе уочили су да свака двојица имају по 6 истих игара на попису. Колико се игара налази на сва три пописа?

Рјешење:
Означимо са x број игара које се налазе на сва три пописа. Тада за сваку двојицу пријатеља вриједи да је број игара које се налазе на њихова два пописа, али не и на попису преосталог пријатеља, једнак $6 - x$.
Будући да свако на попису има по 10 игара, број игара које има на свом попису и не налазе се на другим пописима је једнак: $10 - x - (6 - x) - (6 - x) = x - 2$.
Расподјелу броја игара можемо приказати дијаграмом на сљедећи начин:



Будући да се на сва три пописа нашло укупно 15 различитих игара, са слике видимо да вриједи $x + 3 \cdot (6 - x) + 3 \cdot (x - 2) = 15$.
Из претходне једначине слиједи да је $x = 3$, односно на сва три пописа су три игре.

3. Колико има четвороцифрених бројева дјељивих са 3 чији декадни запис не садржи цифре 2, 4, 6 и 9?

Рјешење:
На располагању имамо шест цифара: 0, 1, 3, 5, 7 и 8. Прву цифру можемо изабрати на 5 начина (било коју цифру осим нуле).

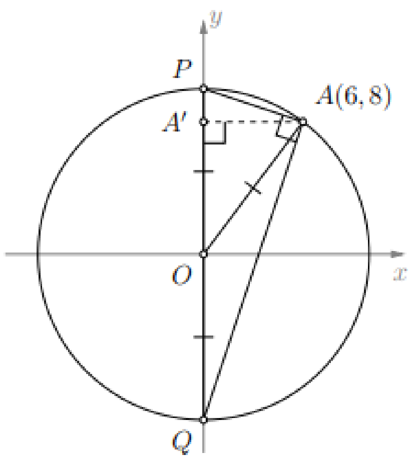
Другу и трећу цифру можемо изабрати на по 6 начина.

Нека те прве три изабране цифре чине троцифрени број n. Задњу цифру y за тражени четвороцифрени број $10n + y$ можемо увијек изабрати на тачно два начина. Наиме, како од шест цифара које имамо на располагању двије дају остатак 0, двије остатак 1 и двије остатак 2 при дијељењу са 3, тачно два међу бројевима $10n + 0$, $10n + 1$, $10n + 3$, $10n + 5$, $10n + 7$, $10n + 8$ су дјељива са 3, независно од броја n.

Зато је укупан број таквих бројева једнак $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$.

4. У координатном систему у равни дате су двије праве које се сијеку под правим углом у тачки $A(6, 8)$. Пресјечне тачке P и Q тих правих са осом y су симетричне у односу на координатни почетак. Одреди површину троугла APQ.

Рјешење:



Тачке P и Q налазе се на оси y и симетричне су у односу на тачку О, из чега закључујемо да су им удаљености од тачке О једнаке, односно да је О средина дужине PQ. Троугао PAQ је правоугли троугао са хипотенузом PQ јер је $\angle PAQ = 90°$.

Како у сваком правоуглом троуглу вриједи да је средина хипотенузе уједно и центар описане кружнице, закључујемо

$|AO| = |PO| = |QO|$.

Из правоуглог троугла OAA' израчунамо $|AO| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Зато је $|PQ| = |PO| + |OQ| = 2|AO| = 20$.

Дужина висине на хипотенузу једнака је x-координати тачке A.

Слиједи да је површина троугла APQ једнака $P_{\Delta APQ} = 20 \cdot 3 = 60$.

Други разред

1. Дата је жица дужине 10 m коју треба пресјећи на два дијела, те од једног дијела направити квадрат, а од другог једнакостранични троугао. На ком мјесту треба пресјећи жицу да би укупна површина квадрата и једнакостраничног троугла била што мања?

   Рјешење:
   Означимо са x мјесто гдје треба пресјећи жицу, односно нека је x обим квадрата, а $10 - x$ обим троугла. Тада је површина квадрата $\left(\frac{x}{4}\right)^2$, док је површина једнакостраничног троугла $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10-x}{3}\right)^2$.

   Укупна површина ликова је $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10-x}{3}\right)^2 = \frac{1}{144}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 80x\sqrt{3} + 400\sqrt{3}\right]$.

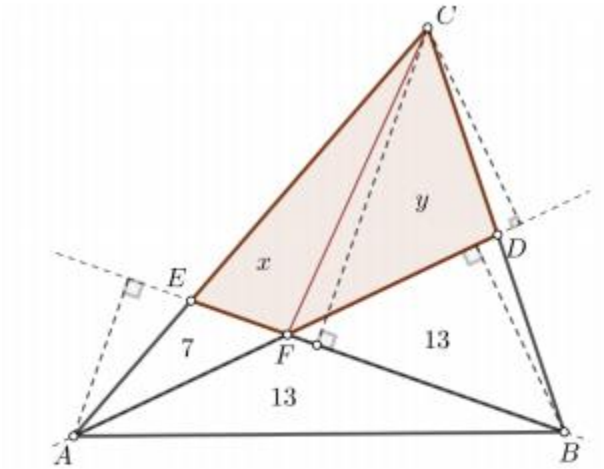
   Добили смо квадратну функцију облика $y = ax^2 + bx + c$. Како је коефицијент $a = 9+4\sqrt{3}$ позитиван, израз достиже најмању вриједност у тјемену квадратне функције. Његову вриједност налазимо по формули $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

   Стога је $x_0 = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{\left(9+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)} = \frac{40\left(3\sqrt{3}-4\right)}{11}$.

   Жицу треба пресјећи на удаљености $x_0 = \frac{40\left(3\sqrt{3}-4\right)}{11}$ од њеног краја.

2. У троуглу ABC тачка D налази се на страници BC, а тачка E на страници AC. Дужи BE и AD сијеку се у тачки F, а дуж BF дијели површину троугла ABD на два једнака дијела. Ако је површина троугла AFE једнака 7, а површина троугла AFB једнака 13, израчунати површине троуглова CEF и CFD.

   Рјешење:



Нека је x површина троугла CEF, а y површина троугла CFD. Троуглови AFB и FBD имају заједничку висину из тјемена B, а будући да имају исте површине имају и исте дужине основица на коју је спуштена та висина. Дакле, вриједи $|AF| = |FD|$.

То значи да троуглови AFC и FDC имају исте основице на које је спуштена заједничка висина из тјемена C, па имају исте површине, односно: $y = x + 7$.

Уочимо да троуглови AFE и ABF имају заједничку висину из тјемена A, што значи да је однос њихових површина једнак односу дужина основица EF и FB тј. $|EF| : |FB| = 7 : 13$.

С друге стране, троуглови EFC и FBC имају заједничку висину из тјемена С на те исте основице па је однос њихових површина једнак односу дужина тих основица. То значи да вриједи: $x : (y + 13) = 7 : 13$.

Замјеном $y = x + 7$ у горњу пропорцију имамо да је $x : (x + 20) = 7 : 13$, одакле добијамо $13x = 7x + 140 \Rightarrow 6x = 140$, те су површине $x = \frac{70}{3}$ и $y = \frac{91}{3}$.

3. Ученици неке школе учествовали су на стонотениском турниру. Правилима је предвиђено да свака два такмичара одиграју тачно једну партију. Током турнира ученици A, B и C су одустали од даљег такмичења. Ученик A је одустао након што је одиграо двије партије, B након три, а C након пет одиграних партија. Остали су такмичари одиграли турнир до краја. Ако је на турниру одиграно 197 партија, колико је ученика судјеловало на турниру?

Рјешење:

Нека је на турниру учествовало n ученика. Након што су током такмичења три ученика одустала, сваки је од $n - 3$ ученика до краја турнира одиграо тачно једну партију са сваким од преосталих. Дакле, међу $n - 3$ ученика одиграно је $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ партија.

Том броју треба додати број партија (p) у којима су учествовали ученици A, B и C, прије него су одустали. Тих партија је могло бити највише $2 + 3 + 5 = 10$ и то уколико A, B и C нису играли међусобно.

Будући да су међусобно могли одиграти максимално 3 партије, број p може бити 10, 9, 8 или 7, па вриједи $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + p = 197$, $p \in \{10, 9, 8, 7\}$.

Ако је $p = 10$, из $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 10 = 197$ добијамо једначину $(n-3)(n-4) = 374$ која нема рјешења у скупу природних бројева јер се број $374 = 2 \cdot 11 \cdot 17$ не може написати као производ два узастопна природна броја.

Ако је $p = 9$, из $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 9 = 197$ добијамо једначину $(n-3)(n-4) = 376$ која нема рјешења у скупу природних бројева јер се број $376 = 23 \cdot 47$ не може написати као производ два узастопна природна броја.

Ако је $p = 8$, из $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 8 = 197$ добијамо једначину $(n-3)(n-4) = 378$ која такође нема рјешења у скупу природних бројева јер се број $378 = 2 \cdot 3\ 3 \cdot 7$ не може написати као производ два узастопна природна броја.

Ако је $p = 7$, из $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 7 = 197$ добијамо једначину $(n-3)(n-4) = 380$. Како је $380 = 19 \cdot 20$, закључујемо да је $n - 4 = 19$, тј. $n = 23$. Дакле, на такмичењу је учествовало 23 ученика.

4. Природан број n има укупно 6 дјелиоца од којих су тачно два прости бројеви. Одредите број n ако је збир свих његових дјелиоца једнак 248.

Рјешење:

Ако је број n облика $n = p \cdot q$ при чему су p и q прости бројеви, тада број n има тачно 4 дјелиоца. То су бројеви $1, p, q, pq$.

Број n је облика $p^2 \cdot q$ а дјелиоци су му $1, p, p^2, q, pq, p^2q$.

Како је збир свих дјелиоца броја n једнак 248, вриједи $1 + p + p^2 + q + pq + p\ 2\ q = 248$.

Слиједи $(1 + p + p^2) + q(1 + p + p^2) = 248$ тј. $(1 + p + p^2)(q + 1) = 248$

Даље је $(1 + p + p^2)(q + 1) = 2^3 \cdot 31$

Како је број $1 + p + p^2 = 1 + p(p + 1)$ непаран број, мора бити $1 + p + p^2 = 31$ па је $q + 1 = 8$.

Дакле $q = 7$, а из $p^2 + p + 1 = 31$ добијамо $p = 5$ (негативно рјешење $p = -6$ одбацујемо).

Дакле, $n = 5^2 \cdot 7 = 175$.

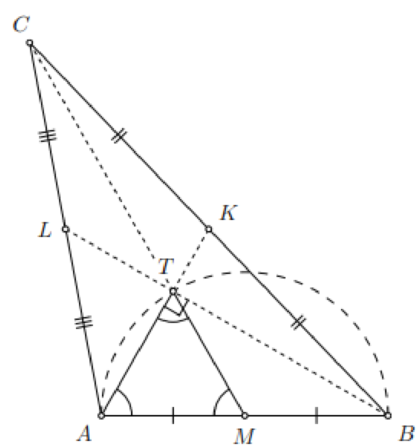
Трећи разред

1. Колико има четвороцифрених бројева дјељивих са 7 чији декадни запис не садржи цифре 1, 2 и 7?

   Рјешење:
   На располагању имамо седам цифара: 0, 3, 4, 5, 6, 8 и 9. Прву цифру можемо изабрати на 6 начина (било коју цифру осим нуле).
   Другу и трећу цифру можемо изабрати на по 7 начина.
   Нека те прве три одабране цифре чине троцифрни број n. Задњу цифру y за тражени четвороцифрени број $10n + y$ можемо увијек изабрати на тачно један начин. Наиме, како свих седам цифара које имамо на располагању дају различите остатке при дијељењу са 7, тачно један од бројева $10n + 0$, $10n + 3$, $10n + 4$, $10n + 5$, $10n + 6$, $10n + 8$, $10n + 9$ је дјељив са 7, независно од броја n.
   Зато је укупан број таквих бројева једнак $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 = 294$.

2. Тачка M је средина странице AB, а T тежиште троугла ABC. Ако је AMT једнакостраничан троугао странице дужине 1, одреди дужине страница троугла ABC.

   Рјешење:



Будући да је $|MB| = |MA| = 1$, вриједи $|AB| = 2$.
Надаље, како је $|AM| = |TM| = |BM|$, слиједи да је M центар кружнице описане троуглу ABT, па је према Талесовој теореми $\measuredangle ATB = 90°$. На основу Питагорине теореме слиједи $|BT| = \sqrt{3}$.

Нека су K и L редом средине страница BC и CA. Будући да тежиште дијели тежишну дуж у односу 2 : 1, слиједи $|TL| = \frac{1}{2}|BT| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $|TK| = \frac{1}{2}|AT| = \frac{1}{2}$.

Сада из правоуглих троуглова BTK и ATL добијамо да је $|BK| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ и $|AL| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ одакле слиједи $|BC| = 2|BK| = \sqrt{13}$ и $|AC| = 2|AL| = \sqrt{7}$.

3. Одреди све парове (a, b) природних бројева за које вриједи $a^b - b^a + 2^a = 17a^4 - 2b^2 + 52$.

Рјешење:
Посматрајући парност израза у једначини, слиједи да је b обавезно паран број.

Претпоставимо прво да је a паран број.
Посматрајмо једначину по дјељивости са 8. Десна страна даје остатак 4 при дијељењу са 8. С друге стране, када би оба броја a и b била већа или једнака од 4, тада би лијева страна била дјељива са 8, чиме добијамо контрадикцију. Дакле, вриједи $a \leq 3$ или $b \leq 3$.
Будући да су a и b парни, треба провјерити случајеве $a = 2$ и $b = 2$.
1) Ако је $a = 2$, једначину сводимо на: $2^b - b^2 + 4 = 17 \cdot 16 - 2b^2 + 52$, тј. $2^b + b^2 = 320$.
За $b = 8$ добијамо једнакост и једно рјешење $(a, b) = (2, 8)$.
Лијева страна једначине расте како и b расте, па за све b различите од 8 једнакост не вриједи те немамо више рјешења.
2) Ако је $b = 2$, једначину сводимо на: $a^2 - 2^a + 2^a = 17a^4 - 2 \cdot 4 + 52$, тј. $17a^4 - a^2 + 44 = 0$.
Како за све природне бројеве a вриједи $a^4 > a^2$, лијева страна једначине је очито строго већа од нуле, па ова једначина нема природних рјешења.

Претпоставимо сада да је a непаран број.
Поново гледамо једначину по дјељивости са 8. Како квадрат непарног броја даје остатак 1 при дијељењу са 8, десна страна даје остатак 5. С друге стране, када би a био већи или једнак од 3, тада би из истог разлога лијева страна дала остатак 1 при дијељењу са 8, чиме опет добијамо контрадикцију. Дакле, вриједи $a \leq 2$.
Будући да је a непаран, једина могућност је $a = 1$. Једначину тада сводимо на:
$1 - b + 2 = 17 - 2b^2 + 52$, $2b^2 - b - 66 = 0$, $(2b + 11)(b - 6) = 0$, што нам даје рјешење $(a, b) = (1, 6)$.
Коначно, сви тражени парови (a, b) су $(1, 6)$ и $(2, 8)$.

4. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c = 1$. Доказати да је

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leq \frac{3}{2}$$

Решење: Користећи услов задатка $a + b + c = 1$ уочимо сљедеће једнакости

$$ab + c = ab + 1 - a - b = (a - 1)(b - 1) = (1 - a)(1 - b) = (b + c)(a + c)$$

$$bc + a = bc + 1 - b - c = (b - 1)(c - 1) = (1 - b)(1 - c) = (a + c)(a + b)$$

$$ac + b = ac + 1 - a - c = (a - 1)(c - 1) = (1 - a)(1 - c) = (b + c)(a + b)$$

Из ових једнакости слиједи:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+c)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}$$

Сада, користећи А-Г неједнакост, имамо:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$
$$\sqrt{\frac{bc}{(a+c)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{a+b}\right)$$
$$\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\right)$$

Сабирајући све три неједнакости добићемо:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}=$$
$$=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+c)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)=\frac{3}{2}$$

Четврти разред

1. Гумена лопта бачена је са висине од 200 метара. Сваки пут након што се одбије од површине, лопта достигне 80% претходне висине. Колико износи укупан пут који лопта пређе док се не заустави?

   Рјешење:
   Лопта најприје пређе 200 метара падајући, а потом за свако одбијање пређе једнак пут према горе и назад према доле. С обзиром на то да је:

$$\begin{aligned} d &= 200 + 2\cdot 200\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot 200\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots \\ &= 200 + 2\cdot 200\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}+\cdots\right) \\ &= 200 + 2\cdot 200\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}-1\right) \\ &= 200 + 2\cdot 200\cdot 4 = 1800, \end{aligned}$$

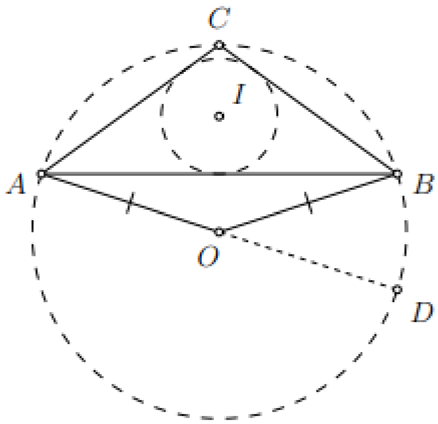
   закључујемо да лопта пређе укупну удаљеност од 1800 метара.

   Напомена: Ако ученик у рјешењу заборави помножити било који фактор са 2 (него рјешава задатак као да лопта путује само у једном смјеру), рјешење треба бодовати са 15 бодова.

2. Центар I уписане кружнице и центар O описане кружнице троугла ABC су осносиметричне тачке у односу на праву AB. Тачка D је друга пресјечна тачка праве AO и описане кружнице троугла ABC. Докажи да вриједи $|CA|\cdot|CD| = |AB|\cdot|AO|$.

   Рјешење

   Нека су α, β и γ редом мјере углова тог троугла у тјеменима A, B и C и нека је R дужина полупречника описане кружнице тог троугла. Како је O центар описане кружнице, вриједи $|AO| = |BO|$. Закључујемо да је троугао ABO једнакокрак, односно $\measuredangle OBA = \measuredangle OAB$. Како су O и I осносиметричне тачке, значи и да је
   $\frac{\alpha}{2} = \measuredangle IAB = \measuredangle OAB = \measuredangle OAB = \measuredangle IAB = \frac{\beta}{2}$, дакле вриједи $\alpha = \beta$ и $\gamma = 180° - 2\alpha$.



Из троугла AIB добијамо $\sphericalangle AIB = 180° - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 180° - \alpha$. Како је $\sphericalangle ADB = 180° - \gamma$, а из односа периферијског и централног угла слиједи $\sphericalangle AOB = 2(180° - \gamma)$.

Будући да је $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB$, имамо $180° - \alpha = 2 \cdot (180° - (180° - 2\alpha)) \Rightarrow \alpha = 36° = \beta, \gamma = 108°$.

Примјењујући синусну теорему на троугао CDA двапут, те троугао ABC (троуглови са заједничком описаном кружницом полупречника R), добијамо

$$|CD| = 2R\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin 54°\ ,\ \ |CA| = 2R\sin\beta = 2R\sin 36°\ ,\ \ |AB| = 2R\sin\gamma = 2R\sin 108°.$$

Будући да је $|AO| = R$, добијамо $|CA| \cdot |CD| = 4R^2\sin 54° \sin 36° = 4R^2 \sin 54° \sin(90° - 54°) = 4R^2 \sin 54° \cos 54° = 2R^2 \sin 108° = |AB| \cdot |AO|$.

3. У затвору има 29 затвореника, заведених под редним бројевима од 1 до 29. Свака два затвореника са збиром редних бројева 30 су у сукобу, док су остали парови у добрим односима. На колико начина се може изабрати затворска фудбалска екипа од 11 затвореника међу којима никоја два нису у сукобу?

Рјешење:
Из сваког од парова $\{1, 29\}, \{2, 28\}, \ldots, \{14, 16\}$ може се одабрати највише по један играч. **(2 бода)** Како једино затвореник под бројем 15 није у сукобу са неким другим затвореником екипу можемо саставити са затвореником број 15 или без њега.

1) Ако је затвореник број 15 у екипи, треба изабрати још 10 играча. Од 14 парова можемо одабрати 10 парова на $\binom{14}{10}$ начина, а 10 играча из сваког од њих на 2^{10} начина. То је укупно $2^{10} \cdot \binom{14}{10}$ начина.

2) Ако затвореник 15 није у екипи, треба одабрати 11 од 14 парова и из сваког пара по једног играча, а то се може учинити на $2^{11}\binom{14}{11}$ начина.

Укупно има $2^{10}\binom{14}{10} + 2^{11}\binom{14}{11} = 1\,770\,496$ начина.

4. Нека су *a, b, c* позитивни реални бројеви такви да је $a \cdot b \cdot c = 1$. Доказати да је

$$\frac{a+b+c+3}{4} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Решење: Како су *a, b, c* позитивни реални бројеви и $a \cdot b \cdot c = 1$, то ће бити и $\sqrt{abc} = 1$

Користећи ову чињеницу имамо да је

$$\frac{a+b+c+3}{4} = \frac{a+b+c+3}{4\sqrt{abc}} = \frac{a+1}{4\sqrt{abc}} + \frac{b+1}{4\sqrt{abc}} + \frac{c+1}{4\sqrt{abc}}$$

Разлажући именилац добијене једнакости на погодан начин и користећи А-Г неједнакост, добићемо:

$$\frac{a+1}{2\sqrt{abc}+2\sqrt{acb}} + \frac{b+1}{2\sqrt{bca}+2\sqrt{abc}} + \frac{c+1}{2\sqrt{acb}+2\sqrt{bca}} \geq$$

$$\geq \frac{a+1}{ab+c+ac+b} + \frac{b+1}{bc+a+ab+c} + \frac{c+1}{ac+b+bc+a} =$$

$$= \frac{a+1}{(a+1)(b+c)} + \frac{b+1}{(b+1)(a+c)} + \frac{c+1}{(c+1)(a+b)} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Рјешења задатака са бодовањем

Први разред

1. Одредити све парове природних бројева x и y за које важи $xy + x + y = 2022$.

   Рјешење:
   $xy + x + y + 1 = 2023$
   $(x + 1)(y + 1) = 1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17$

   Имамо сљедеће случајеве:

   $x + 1 = 1$, $y + 1 = 2023$; $x = 0$, $y = 2022$ ово није рјешење јер нула није природан број.

   $x + 1 = 7$, $y + 1 = 289$; $x = 6$, $y = 288$

   $x + 1 = 17$, $y + 1 = 119$; $x = 16$, $y = 118$

   $x + 1 = 119$, $y + 1 = 17$; $x = 118$, $y = 16$

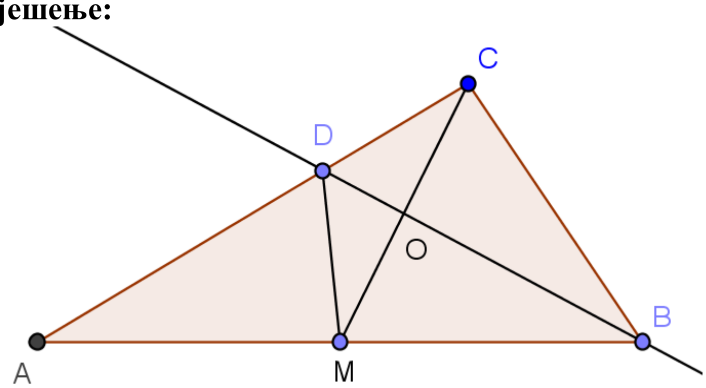
   $x + 1 = 289$, $y + 1 = 7$; $x = 288$, $y = 6$

   $x + 1 = 2023$, $y + 1 = 1$; $x = 2022$, $y = 0$ ово није рјешење јер нула није природан број.

   Рјешења су уређени парови (6, 288); (16, 118); (288, 6) и (118, 16).

2. Дат је Δ ABC код кога је унутрашњи угао код тјемена B два пута већи од унутрашњег угла код тјемена A. Ако тежишна дуж из тјемена C сијече симетралу унутрашњег угла код тјемена B под правим углом и ако је BC = 3, одредити полупречнике описане и уписане кружнице Δ ABC.

Рјешење:



Нека је тачка M средина AB и тачка D пресјек симетрале унутрашњег угла код B са страницом AC, тада је CM тежишна дуж из тјемена C, а BD симерална дуж угла код тјемена B. Означимо пресјек дужи CM и BD са O. Како је CM нормално на BD и $\sphericalangle$ MBO = $\sphericalangle$ CBO слиједи да је $\Delta MBO \cong \Delta CBO$ (на основу става УСУ) па је MB = BC.

Како је $\sphericalangle$ DAM = $\sphericalangle$ ABD то је AD = BD па је DM висина једнакокраког ΔABD , те на основу тога имамо да је $\sphericalangle$ DMB =90°.

На основу свега овога имамо да је $\Delta DMB \cong \Delta DBC$ (на основу става СУС), а то значи да је $\sphericalangle$ BCD = 90°, па је ΔABC правоугли са правим углом код тјемена C. На основу услова задатка да је угао код B два пута већи од угла код A добијамо да су углови ΔABC једнаки 30°, 60° и 90°.

Како је ΔABC правоугли са угловима 30°, 60° и 90° он је половина једнакостраничног троугла па су странице AB = 6 и AC = $3\cdot\sqrt{3}$. Како је AB хипотенуза, а центар описане кружнице је средина хипотенузе то је полупречник описане кружнице једнак 3 тј. R = 3.

Даље је обим ΔABC $O_{\Delta ABC} = 6+3+3\cdot\sqrt{3} = 9+3\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$, а површина је

$$P = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Како је $2\cdot P = O\cdot r$, гдје је r полупречник уписане кружнице, имамо да је

$$r = \frac{2\cdot P}{O} = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{3\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$, а након рационалисања $$r = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

-

3. Одредити све троцифрене природне бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара.

Рјешење:
Нека су тражени бројеви $\overline{xyz}$, x ≠ 0, тада важи: 100x + 10y +z = 15(x + y + z), односно 85x = 5y + 14z.
Како су бројеви 85x и 5y дјељиви са 5 то и 14z мора бити дјељив са 5, односно z мора бити дјељив са 5.
Како је број z цифра то имамо 2 случаја или је z = 0 или је z = 5.

Ако је z = 0, онда је 85x = 5y , односно y = 17x, а ова једначина нема рјешења јер су x и y цифре и x ≠ 0.
Ако је z = 5 онда је 85x = 5y + 14 · 5, односно 17x = y + 14. Рјешење ове једначине је x =1 и y = 3, а то значи да је једини тражени број 135.

4. Тенисер је до почетка турнеје на шљаци имао 50% побједа. Након првог одиграног турнира на шљаци на којем је имао три побједе и један пораз, проценат побједа му је био већи од 52%. Након другог одиграног турнира на шљаци на којем је имао четири побједе и један пораз, проценат побједа му је био мањи од 56%. Колико је мечева тенисер одиграо до турнеје на шљаци ако знамо да је до краја сезоне одиграо двоструко више мечева него прије турнеје на шљаци и да је на крају сезоне побиједио у 60% мечева?

Рјешење:
Са $2n$ означимо број мечева, које је тенисер одиграо прије турнеје на шљаци. Број побједа је једнак n јер вриједи $n : 2n = 0.5$. Након првог турнира, 3 побједе у 4 одиграна меча, вриједи $(n + 3) : (2n + 4) > 0{,}52$; $25n + 75 > 26n + 52$; $n < 23$. Значи да је $n \leq 22$.
Након другог турнира, 4 побједе у 5 одиграних мечева, вриједи $(n + 7) : (2n + 9) < 0{,}56$
$25n + 175 < 28n + 126$; $n > 49 : 3$. Дакле, вриједи $n \geq 17$.
Слиједи да је $n \in \{17, 18, 19, 20, 21, 22\}$.
На крају сезоне вриједи $(n + x) : 4n = 0{,}6$; $2{,}4n = n + x$; $1{,}4n = x$. Будући да је x природан број, n мора бити једнако 20, односно тенисер је одиграо 40 мечева до турнеје на шљаци, а до краја сезоне 80 мечева.

Други разред

1. Нека су a, b, c, d различити реални бројеви такви да је

   $(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$

   Докажи да је $a + b + c + d = 0.$

   Рјешење:

   Кренимо од једнакости $(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c).$

   Тада је

   $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - (a + b) = c^3 + c^2b + cb^2 + b^3 - (c + b)$

   $(a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)b + (a - c)b^2 - (a - c) = 0$

   $(a - c)(a^2 + ac + c^2 + ab + bc + b^2 - 1) = 0$

   Како су a и c различити реални бројеви, то је $a - c \neq 0,$ па ће важити

   $a^2 + ac + c^2 + ab + bc + b^2 - 1 = 0,$ тј.

   $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 1$

   Аналогно, из једнакости $(b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d)$

   добићемо да је $d^2 + b^2 + c^2 + db + bc + cd = 1$

   Одузимајући ове двије једнакости добићемо

   $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) - (d^2 + b^2 + c^2 + db + bc + cd) = 0$

   $(a^2 - d^2) + (a - d)b + (a - d)c = 0$

   $(a - d)(a + d + b + c) = 0$

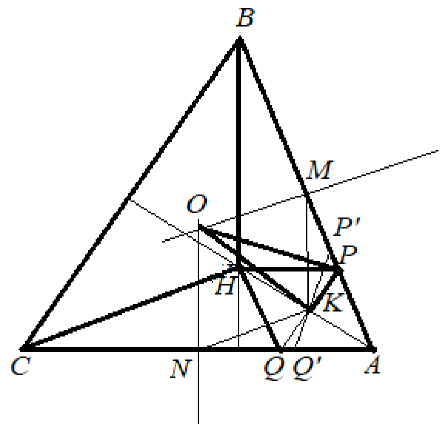
   Како су a и d различити реални бројеви, то је $a - d \neq 0,$ из чега слиједи да је

   $a + b + c + d = 0.$

2. На страницама AB и AC оштроуглог троугла ABC, са ортоцентром H и центром описане кружнице O, одабране су редом тачке P и Q такве да је четвороугао APHQ паралелограм.

   Доказати да важи $\dfrac{PB \cdot PQ}{QA \cdot QO} = 2.$

   Рјешење:



Докажимо прво да је OP = OQ. Нека права која садржи средиште K дужи AH и нормална је на OK сијече странице AB и AC редом у тачкама P' и Q'. Означимо са M и N редом средине страница AB и AC. Због $\sphericalangle OMP' = \sphericalangle OKP' = 90°$, $\sphericalangle ONQ' = \sphericalangle OKQ' = 90°$ четвороуглови OMP'K и ONQ'K су тетивни.

Како су дужи MK и NK средње линије у троугловима ABH и ACH, важи MK|| BH, NK|| CH, тј. MK ⊥ AC и NK ⊥ AB. Одатле је $\sphericalangle OP'K = \sphericalangle OMK$ (периферијски над истом тетивом), а $\sphericalangle OMK = \sphericalangle BAC$ (углови са нормалним крацима) тј. $\sphericalangle OP'K = \sphericalangle BAC$. Слично је и $\sphericalangle OQ'K = \sphericalangle ONK$ (периферијски над истом тетивом), а $\sphericalangle ONK = \sphericalangle BAC$ (углови са нормалним крацима) тј. $\sphericalangle OQ'K = \sphericalangle BAC$.

Према томе троугао OP'Q' је једнакокраки и K је средиште дужи P'Q', па је AP'HQ' паралелограм јер му се дијагонале полове, одакле је $P \equiv P'$, $Q \equiv Q'$, а одатле слиједи да је троугао OPQ једнакокраки тј. OP = OQ.

Примијетимо, даље да су правоугли троуглови BPH, CQH и OPK слични, одакле је

$$\frac{BH}{OK} = \frac{PH}{PK} = \frac{BP}{OP}, \qquad \frac{CH}{OK} = \frac{QH}{PK} = \frac{CQ}{OP}.$$

Користећи ове односе и једнакости $PK = QK = \frac{PQ}{2}$, $AP = QH$, $AQ = PH$, $PO = QO$

добијамо да важи $\dfrac{PB \cdot PQ}{QA \cdot QO} = \dfrac{PB \cdot PQ}{PH \cdot PO} = \dfrac{PB \cdot PQ}{\frac{PB \cdot PK}{PO} \cdot PO} = \dfrac{PQ}{PK} = \dfrac{PQ}{\frac{PQ}{2}} = 2.$

3. Три домаћице су на пијаци добиле 9 затворених боца с млијеком, и у њима је, редом: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 децилитара млијека. На колико начина оне могу подијелити ове боце између себе (без отварања боца), а да при томе свака добије исти број боца и исту количину млијека?

Рјешење:

У посматраних 9 боца укупно има 126 децилитара млијека, па слиједи да свака домаћица треба да добије по 3 боце са укупно 42 децилитра млијека. Посматрајмо домаћицу која је

добила боцу са 26 децилитара млијека. У преостале двије боце она има укупно још 16 децилитара, што је могуће само на сљедећа два начина: 2 + 14 или 5 + 11.
Претпоставимо да важи први случај. Тада она домаћица која је добила боцу са 23 децилитра у преосталим двјема боцама има укупно 19 децилитара млијека, што је (од неподијељених боца) могуће добити само као 8 + 11; тада трећој домаћици остају боце са 5, 17 и 20 децилитара млијека.
Дакле, у овом случају, у зависности од тога која је „прва“, која „друга“, а која „трећа“ домаћица, имамо 6 начина подјеле (колико има и пермутација ове три домаћице).
Слично, уколико претпоставимо да је прва домаћица добила боце са 5, 11 и 26 децилитара млијека, тада видимо да она која је добила боцу са 23 децилитра мора добити још боце са 2 и 17 децилитара, а трећој онда остају боце са 8, 14 и 20 децилитара млијека.
Дакле, и овдје имамо 6 начина подјеле (опет у зависности од пермутације домаћица). Према томе, укупно постоји 12 начина да подијеле боце у складу с условима задатка.

4. Нађи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи $p^2 - qr = 2500$.

Рјешење:
Очигледно, $p > 3$ (јер би у супротном лијева страна била мања од десне), па како је p прост број, слиједи $p \equiv \pm 1$ (мод 3), а одатле имамо $p^2 \equiv 1$ (мод 3).
Тако имамо и $2500 \equiv 1$ (мод 3), те уколико постаљену једначину трансформишемо у облик $p^2 - 2500 = qr$, лијева стране је дјељива са 3, па то мора бити и десна.
Како су q и r прости бројеви, један од њих мора бити 3. Претпоставимо, без умањења општости, да је то q. Примијетимо $2500 = 50^2$, па се лијева страна може факторисати као разлика квадрата, послије чега преостаје $(p - 50)(p + 50) = qr = 3r$.
Како је p прост број, имамо само сљедеће двије могућности.
1) $p - 50 = 3$, $p + 50 = r$ одакле слиједи $p = 53$ и $r = 103$, што јесу прости бројеви па имамо једно рјешење.
2) $p - 50 = 1$, $p + 50 = 3r$ одакле слиједи $p = 51$, што није прост број, те овдје немамо рјешења.

Узимајући у обзир и то да q и r могу замијенити улоге, постоје укупно двије тројке које задовољавају услове задатка: $(p, q, r) \in \{(53, 3, 103), (53, 103, 3)\}$.

Трећи разред

1. Доказати да је цифра стотина броја $2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023}$ парна.

Рјешење:
Запишимо дати број у облику

$2^{2021}(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{10} \cdot 2^{11} \cdot 2^{2000} = 7 \cdot 2^{10} \cdot 2^{11} \cdot (2^{20})^{100}$.

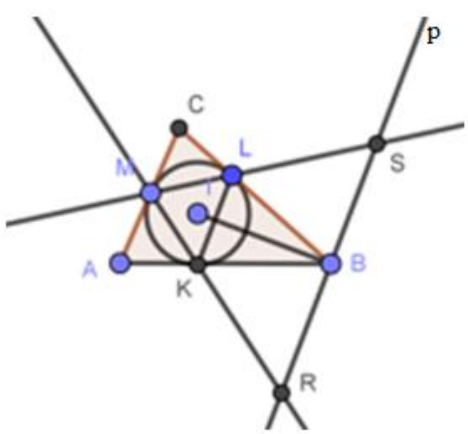
Пошто је $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$ и $2^{20} = (2^{10})^2$ то се двоцифрени завршетак броја 2^{20} поклапа са двоцифреним завршетком броја 24^2, па је двоцифрни завршетак броја 2^{20} једнак 76.

Двоцифрени завршетак броја 76^2 је такође 76, па је двоцифрени завршетак датог броја једнак двоцифреном завршетку производа $7 \cdot 48 \cdot 24 \cdot 76$, а то је 64.
Пошто је број $2^{2021}+ 2^{2022} + 2^{2023}$ дјељив са 8, а двоцифрени завршетак му је 64, то цифра стотина мора бити парна.

2. Дат је троугао *ABC*. Нека је центар уписаног круга тачка *I* и нека уписани круг додирује странице троугла *BC, AC, AB* у тачкама *L, M, K* редом. Нека је *p* права која садржи тачку *B* и паралелна је дужи *KL*. Пресјек правих *ML* и *p* је тачка *S*, а пресјек правих *MK* и *p* је *R*. Доказати неједнакост

$$tg(< RIS) \geq \frac{\sin\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$$

Рјешење:



Из услова задатка добијамо да је $\sphericalangle IBR = \sphericalangle IBS = 90°$ јер је права *RS* симетрала спољашњег угла код тјемена *B* у ΔABC ($BI \perp KL,\ KL \| RS$). Нека је *r* полупречник уписане кружнице. Тангенс $\sphericalangle RIS$ израчунаћемо као тангенс збира $\sphericalangle BIS$ + $\sphericalangle BIR$. Примјеном синусне теореме на ΔBLS добијамо

$\dfrac{BS}{\sin(90^\circ - \frac{\gamma}{2})} = \dfrac{BL}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}$, а из ΔBIL је $BL = r \cdot ctg\dfrac{\beta}{2}$, па добијамо да је

$$BS = r \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Посматрајући правоугли троугао ΔBIS закључујемо да је

$$tg(\sphericalangle BIS) = \frac{BS}{BI} = \frac{r \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Аналогно добијамо симетричан израз за $tg(\sphericalangle BIR) = \dfrac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.

Коначно, применом формуле за тангенс збира углова добијамо

$$tg(\sphericalangle RIS) = tg(\sphericalangle BIS + \sphericalangle BIR) = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} .$$

Сада, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$ слиједи

$$tg(\sphericalangle RIS) \geq \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin^3\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}} .$$

3. Два играча наизмјенично уписују један од бројева 474, 524, 574, 624, 674, 724, 774, 824 или 874 у неко слободно поље таблице 3 × 3, при чему сваки број може бити искоришћен само једном. Притом први играч у првом потезу не смије уписати број у централно поље. Игра се завршава када један од играча добије збир 2022 у било којој врсти, колони или дијагонали чија су сва три поља попуњена, и тада тај играч побјеђује. Уколико се цијела таблица попуни а нико не оствари тај збир, побједник је други играч. Који играч има побједничку стратегију? Образложи одговор.

Рјешење:

Побјеђује први играч.

За наведене бројеве важи да је $674 = 2022 : 3$, а остали се могу добити тако што ако је x неки од дозвољених бројева са списка, тада је и број $y = 2 \cdot 674 - x$ са списка дозвољених бројева тј. $x + y = 2 \cdot 674$ гдје је један мањи од 674, а други већи од 674.

Први играч треба у првом потезу да упише број 674 у једно угаоно поље. Други играч тада мора да упише свој број, рецимо x, у неко од поља b или c (види слику).

674		
		b
	c	

Уколико то не учини, тада би његов број био у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 674, па би први играч у сљедећем потезу могао комплетирати збир 2022 уписивањем броја $2 \cdot 674 - x$ на треће поље.

Први играч потом треба да на незаузето од поља b или c упише број $2 \cdot 674 - x$.

Послије овог потеза, гдје год да други играч упише свој наредни број, рецимо y, он ће бити у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 674, па ће први играч уписивањем броја $2 \cdot 674 - y$ на треће поље моћи да комплетира збир 2022 и побиједи.

4. Дата су произвољна 2022 природна броја од којих ниједан није дјељив са 2022. Докажите да постоји неколико бројева чији је збир дјељив са 2022.

Рјешење:

Нека су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}$ произвољни природни бројеви од којих ниједан није дјељив са 2022.

Посматрајмо сљедеће збирове:

$$a_1$$
$$a_1 + a_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$$

Ако међу овим збировима постоји број дјељив са 2022 доказ је готов.

Ако ни један од датих збирова није дјељив са 2022 онда при дијељењу са 2022 дају један од остатака: 1, 2, 3,..., 2021.

Како има 2022 збира, а остатака је 2021, према Дирихлеовом принципу слиједи да бар два збира дају исти остатак при дијељењу са 2022, односно $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = 2022m + r$ и $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l = 2022n + r$.

За $k < l$ вриједи: $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l = 2022(n - m)$ па је збир $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ дјељив са 2022 што је и требало доказати.

Републичко СШ - 2022.

Четврти разред

1. Нека су a, b, c, d позитивни реални бројеви. Доказати да је немогуће да важе све три неједнакости: $a + b < c + d$, $(a + b)(c + d) < ab + cd$, $(a + b)cd < (c + d)ab$.

Рјешење:

Множећи прву и другу неједнакост добијамо

$(a + b)^2 (c + d) < (c + d)(ab + cd)$ тј. $(a + b)^2 < ab + cd$, јер је $c + d > 0$.

Аналогно, множећи другу и трећу неједнакост добијамо

$(a + b)^2 (c + d) cd < (ab + cd) (c + d)ab$ тј. $(a + b)^2 cd < (ab + cd) ab$, ($c + d > 0$).

Како је $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$ слиједи $(a + b)^2 \geq 4ab$.

Из неједнакости $(a + b)^2 < ab + cd$ и $(a + b)^2 cd < (ab + cd) ab$ следи да је

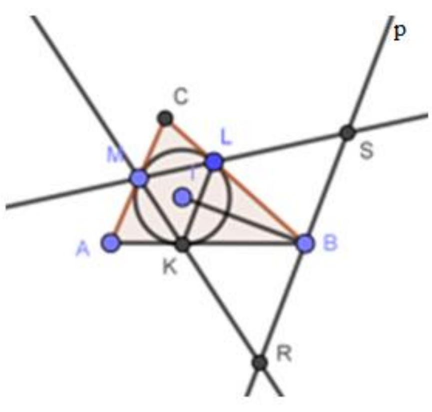
$4ab < ab + cd$ и $4abcd < (ab + cd)ab$

Из прве неједнакости добијамо $cd > 3ab$, а из друге неједнакости $ab > 3cd$ што је немогуће јер би онда важило $\frac{1}{3}ab > cd > 3ab$ тј. $\frac{1}{3}ab > cd > 3ab$.

2. Дат је троугао ABC. Нека је центар уписаног круга тачка I и нека уписани круг додирује странице троугла BC, AC, AB у тачкама L, M, K редом. Нека је p права која садржи тачку B и паралелна је дужи KL. Пресјек правих ML и p је тачка S, а пресјек правих MK и p је R. Доказати неједнакост

$$tg(\sphericalangle RIS) \geq \frac{\sin\beta}{\sin^3 \frac{\beta}{2}}$$

Рјешење:



Из услова задатка добијамо да је $\sphericalangle IBR = \sphericalangle IBS = 90°$ јер је права RS симетрала спољашњег угла код тјемена B у ΔABC ($BI \perp KL,\ KL \| RS$). Нека је r полупречник уписане кружнице. Тангенс $\sphericalangle RIS$ израчунаћемо као тангенс збира $\sphericalangle BIS + \sphericalangle BIR$. Примјеном синусне теореме на ΔBLS добијамо

$\dfrac{BS}{\sin(90° - \frac{\gamma}{2})} = \dfrac{BL}{\sin(90° - \frac{\alpha}{2})}$, а из ΔBIL је $BL = r \cdot ctg\dfrac{\beta}{2}$, па добијамо да је

$$BS = r \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Посматрајући правоугли троугао ΔBIS закључујемо да је

$$tg(\sphericalangle BIS) = \frac{BS}{BI} = \frac{r \cdot ctg\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Аналогно добијамо симетричан израз за $tg(\sphericalangle BIR) = \dfrac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.

Коначно, применом формуле за тангенс збира углова добијамо

$$tg(\sphericalangle RIS) = tg(\sphericalangle BIS + \sphericalangle BIR) = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} .$$

Сада, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $\cos^2\frac{\gamma}{2}$ слиједи

$$tg(\sphericalangle RIS) \geq \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin^3\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}} .$$

3. Два лопова су украли сандук у ком су били златни ланчићи, наруквице и прстенови. Започели су расправу о томе како ће међусобно подијелити ланчиће, наруквице и прстенове и закључили су да ће на расправу потрошити укупно 5865 минута ако о свакој могућој расподјели расправљају по 5 минута. Одредите колико је у сандуку било ланчића, колико

наруквица и колико прстенова ако се зна да је највише било прстенова, а најмање наруквица. Сви су ланчићи међусобно једнаки, а исто вриједи за наруквице и прстенове.

Рјешење:

Очито је укупан број могућих расподјела блага једнак 5865 : 5 = 1173.

Означимо с l број златних ланчића, с n број златних наруквица и с p број златних прстенова. Ако први лопов добија x ланчића, y наруквица и z прстена, тада је добитак другог гусара једнозначно одређен, тј. он добија $l - x$ ланчића, $n - y$ наруквица и $p - z$ прстенова.

Како је $x \in \{0, 1, 2, . . . , l\}$, $y \in \{0, 1, 2, . . . , n\}$, z $\in \{0, 1, 2, . . . , p\}$, закључујемо да је број могућих расподјела блага једнак $(l + 1)(n + 1)(p + 1)$.

Дакле, добијамо једначину $(l + 1)(n + 1)(p + 1) = 1173$. Раставимо ли број 1173 на факторе добијамо $(l + 1)(n + 1)(p + 1) = 3 \cdot 17 \cdot 23$.

Због услова да је у сандуку било највише златних прстенова, а најмање златних наруквица закључујемо да је $p = 22$, $n = 2$, $l = 16$, а то занчи да је у сандуку било 16 златних ланчића, двије наруквице и 22 прстена.

4. Квадратна таблица $n\times n$ попуњена је природним бројевима од 1 до n^2 , при чему су у првом реду (врсти) записани по реду бројеви од 1 до n, у другом реду од n + 1 до 2 n, у трећем од 2 n + 1 до 3n, итд. Из ове се таблице изреже квадрат $m \times m$ (m < n). Докажите да је двоструки збир бројева који су у том изрезаном квадрату дјељив са m^2 .

Рјешење:

Таблица изгледа овако

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\
n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \dots & 2n \\
2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & 2n+4 & \dots & 3n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & (n-1)n+4 & \dots & (n-1)n+n
\end{array}$$

Изрежимо квадрат $m \times m$

$$\begin{array}{cccccc}
x & x+1 & x+2 & x+3 & \dots & x+m-1 \\
n+x & n+x+1 & n+x+2 & n+x+3 & \dots & n+x+m-1 \\
2n+x & 2n+x+1 & 2n+x+2 & 2n+x+3 & \dots & 2n+x+m-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(m-1)n+x & (m-1)n+x+1 & (m-1)n+x+2 & (m-1)n+x+3 & \dots & (m-1)n+x+m-1
\end{array}$$

Израчунајмо збир бројева који се налазе у сваком реду (врсти) у таблици $m \times m$.

Збир у првом реду (врсти) је: $S_1 = mx + \frac{m(m-1)}{2}$

Збир у другом реду (врсти) је: $S_2 = mx + mn + \frac{m(m-1)}{2}$

Збир у трећем реду (врсти) је: $S_2 = mx + 2mn + \frac{m(m-1)}{2}$

.

.

.

Збир у *m* реду (врсти) је: $S_m = mx + m(m-1) + \frac{m(m-1)}{2}$

Тада је:

$$2(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_m) = 2m^2x + n(m-1)m^2 + m^2(m-1) =$$
$$m^2(2x + mn - n + m - 1) = m^2(2x + (m-1)(n+1)).$$

Израз у загради је природан број па је тврђење доказано.