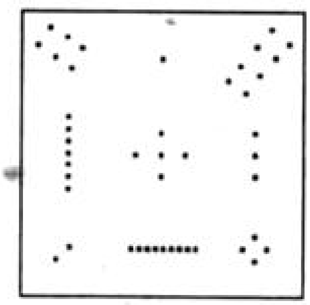
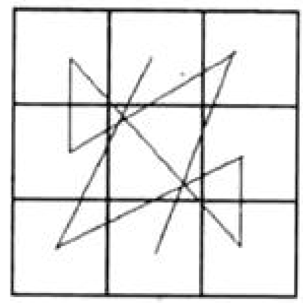
Борисав Симић (Велики Поповић)

ЛАТИНСКИ КВАДРАТИ

Квадрати издељени на $n \times n$ једнаких квадратића (поља), који су распоређени у n хоризонтала и n вертикала, појавили су се још пре нове ере. У поља тих квадрата уписују се бројеви тако да је збир свих оних који су у истој хоризонтали, истој вертикали и у свакој од две дијагонале, једнак истом броју. Таквим квадратима, од самог настанка, из сујеверја, приписивана су магична својства, па су по томе и названи магичним квадратима. На слици 1 је најстарији познати магичан квадрат, из кинеске „Књиге о пермутацијама", а на слици 2, која асоцира на лептир машну, види се којим се редом уписују бројеви у поља квадрата реда 3, тј. у магичан квадрат са 9 поља.



Сл. 1



Сл. 2

У наше време на магичне квадрате указује се углавном као на математичке занимљивости. Међутим, исто тако, као на математичке занимљивости, указује се и на тзв. **латинске квадрате**. И то су квадрати који су издељени на $n \times n$ поља, али у којима су n различитих знакова, при чему је сваки од њих у свакој хоризонтали и у свакој вертикали. Назив су добили по томе што је славни Ојлер, који је проучавајући такве квадрате, у њихова поља уписивао латинска слова.

Приступи попуњавању латинских квадрата бројни су и разноврсни, а овде указујемо на следећа два.

1. Нека је p прост број и $n = p - 1$. Осим тога, нека су хоризонтале квадрата, рачунајући одоздо на горе, и вертикале, рачунајући слева на десно, означене бројевима од 1 до n. Квадрат са $n \times n$ поља може се попунити тако што се у свако поље датог квадрата упише остатак који се добија дељењем производа $v \cdot h$ бројем n, где су v и h редни бројеви вертикале и хоризонтале којима припада то поље. Будући да су бројеви вертикала и хоризонтала позитивни цели бројеви, који нису дељиви са p, то ће у сваком пољу квадрата бити један од бројева $1, 2, 3, \ldots, n$.

Може се доказати да су у свакој хоризонтали сви бројеви различити. Заиста, ако би у некој хоризонтали, рецимо у h, била два једнака броја, на пример, у вертикалама v и s, онда би то значило да производи $v \cdot h$ и $s \cdot h$ при дељењу са p имају једнаке остатке, тј. да је разлика

$$h \cdot v - h \cdot s = h(v - s)$$

дељива са p. Међутим, оба чиниоца (h и $v - s$) су различити од нуле и по апсолутним вредностима су мањи од p, па о дељивости не може бити ни говора. Отуда је јасно да производи $h \cdot v$ и $h \cdot s$ имају различите остатке при дељењу са p. Исто тако се доказује да су и у свакој вертикали сви бројеви различити.

Како вертикале и хоризонтале имају по n поља и како је при дељењу бројем p укупан број могућих остатака различитих од нуле такође n, то ће свака вертикала и свака хоризонтала садржати само неки размештај свих бројева $1, 2, 3, \ldots, n$.

4	4	3	2	1
3	3	1	4	2
2	2	4	1	3
1	1	2	3	4
	1	2	3	4

Сл. 3

6	5	4	3	2	1
5	3	1	6	4	2
4	1	5	2	6	3
3	6	2	5	1	4
2	4	6	1	3	5
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

Сл. 4

Узимањем да је $p = 5$, може се на описани начин добити латински квадрат са 4×4 поља—слика 3, а за $p = 7$ добија се да је $n = 6$ и слика 4.

2. Нека су n и k цели позитивни бројеви који немају заједничких делилаца већих од јединице. Квадрат са $n \times n$ поља може се попунити тако што се за свако поље одређује одговарајући број. То је остатак који се добија при дељењу броја $h \cdot k + v$ бројем n, где су h и v редни бројеви хоризонтале и вертикале којима припада то поље. Ако је остатак једнак нули, онда се у одговарајуће поље уписује број n. Може се доказати да се на тај начин добија латински квадрат.

Када би у заједничким пољима хоризонтале h и вертикала v и s били једнаки бројеви онда би разлика

$$h \cdot k + v - (h \cdot k + s) = v - s$$

морала бити дељива са n, али то није могуће зато што су v и s различити цели бројеви од којих ниједан није мањи од 1 ни већи од n.

Исто тако, када би у заједничким пољима вертикале v и хоризонтала h и r постојала два једнака броја, онда би разлика

$$h \cdot k + v - (r \cdot k + v) = k(h - r)$$

била дељива бројем n. Међутим, пошто k и n немају заједничких делилаца, то би са n требало да буде дељив број $h - r$, а то није могуће, јер су h и r различити цели бројеви који нису мањи од 1 ни већи од броја n.

Према томе, у свакој хоризонтали и у свакој вертикали су различити бројеви. То значи да свака хоризонтала и свака вертикала квадрата садржи неки размештај свих бројева од 1 до n, укључујући и њих.

Узимањем да је $k = 1$, добија се латински квадрат чија се свака нижа хоризонтала добија из претходне више хоризонтале померањем свих цифара удесно за једно поље и премештањем последње цифре на прво место у хоризонтали – слика 6.

На слици 5 и слици 6 су латински квадрати са 5×5 поља и 8×8 поља.

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Сл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Сл. 6

Размотримо сада и три задатка о латинским квадратима.

Задатак 1: *У квадрат са* 4×4 *поља уписати* 16 *слова (четири слова* A*, четири* B*, четири* C *и четири* D*) тако да се у свакој хоризонтали и у свакој вертикали свако од та четири слова јави само једанпут. Колико има таквих размештаја?*

A	B	C	D
B			
C			
D			

Сл. 7

Решење: Претпоставимо да су слова A, B, C и D већ уписана у поља квадрата у складу са условима задатка тако што су цифре $1, 2, 3$ и 4 у квадрату са слике 3 замењене редом словима A, B, C и D. Мењањем места било које две хоризонтале, или било које две вертикале, добија се нови размештај слова који такође испуњава услове задатка. Отуда се вертикале и хоризонтале могу распоредити тако да су слова A, B, C и D у четвртој хоризонтали и првој вертикали у поретку као на слици 7.

Размештаје у којима су дата слова у четвртој хоризонтали и првој вертикали у поретку као на слици 7 називаћемо основним размештајима.

Нађимо све основне размештаје слова A, B, C и D у квадрат са 4×4 поља. Лако се може увидети да се у празна поља треће хоризонтале квадрата са слике 7 слова A, C и D могу разместити само на три начина, и то: (C,D,A), (D,A,C) и (A,D,C). Првом и другом начину одговарају јединствени размештаји слова у другој и првој хоризонтали, а трећем–два размештаја. Дакле, постоје свега четири основна размештања. Сва четири основна размештаја слова A, B, C и D дата су на слици 8.

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

Сл. 8

Четири вертикале могу се распоредити на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начина. Фиксирањем положаја вертикала трећа, друга и прва хоризонтала могу се распоредити на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. То значи да се из сваког основног размештаја слова, датих на слици 8, премештањем вертикала и хоризонтала могу добити по $24 \cdot 6 = 144$ размештаја. Према томе, укупан број размештаја по четири слова A, B, C и D у квадрат са 16 поља износи $4 \cdot 144 = 576$.

Задатак 2: *У свакој од четири војне формације изабрана су по четири официра различитих чинова (пуковник, мајор, капетан и водник). Разместите тих 16 официра у 16 фотеља од којих је сложен квадрат са 4 хоризонтале и 4 вертикале тако да у свакој хоризонтали и у свакој вертикали буде по један пуковник, по један мајор, по један капетан и по један водник и да у свакој од њих буде по један представник сваке од четири војне формације.*

Решење: Означимо звања официра њиховим почетним словима П, М, К и В, а бројеве војних формација цифрама 1, 2, 3, и 4. Очигледно, сваки официр је одређен паром (слово, цифра). Тако, рецимо (М,4) значи мајор из четврте формације. Тиме се задатак своди на то да се у 16 поља квадрата разместе по четири слова П, М, К и В и по четири цифре 1, 2, 3, и 4, тако да ни у једној хоризонтали и ни у једној вертикали нема ни истих слова ни једнаких цифара. Осим тога, сви парови (слово, цифра) морају бити различити.

У првој етапи задатака слова се распоређују, на пример, као што је то учињено на слици 9.

П	М	К	В
В	К	М	П
М	П	В	К
К	В	П	М

Сл. 9

П,1	М,2	К,3	В,4
В,4	К,3	М,2	П,1
М,2	П,1	В,4	К,3
К,3	В,4	П,1	М,2

Сл. 10

П,1	М,4	К,2	В,3
В,2	К,3	М,1	П,4
М,3	П,2	В,4	К,1
К,4	В,1	П,3	М,2

Сл. 11

У другој етапи, пак, цифре се могу распоредити тако што се уз свако слово П упише цифра 1, уз свако М–цифра 2, уз свако К–цифра 3 и уз свако В–цифра 4, тј. онако како је то учињено на слици 10. Померањем сваке цифре у поље које је симетрично у односу на дијагоналу (П,К,В,М) добија се тражени распоред–слика 11.

Задатак 3: *У шаховском мечу састају се две екипе са по четири играча. Сваки играч треба да игра по једну партију са сваким од играча друге екипе.*

Саставите распоред играња партија у мечу тако да:

1) сваки шахиста одигра две партије белим и две партије црним фигурама,

2) у сваком колу обе екипе играју по две партије белим и по две партије црним фигурама.

Решење: Ако хоризонталама квадрата датог на слици 11 придружимо играче прве екипе (нека су то, на пример, играчи A, B, C и D), а вертикалама–играче друге екипе (нека су то E, F, G и H), онда се тражени распоред играња партија може добити заменом слова одговарајућим цифрама (П са 1, М са 2, К са 3 и В са 4)–слика 12. Прва цифра у сваком пољу тако попуњеног квадрата показује редни број кола у коме играју један са другим играчи одговарајуће хоризонтале и вертикале (хоризонтале и вертикале којима припада то поље). Друга цифра, пак, показује којим ће фигурама играти сваки од двојице противника. Ако је она непарна, онда играч прве екипе игра белим фигурама, а у супротном–црним фигурама.

	E	F	G	H
A	1,1	2,4	3,2	4,3
B	4,2	3,3	2,1	1,4
C	2,3	1,2	4,4	3,1
D	3,4	4,1	1,3	2,2

Сл. 12

	E	F	G	H
A	1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4
B	$\boxed{4}$	3	2	$\boxed{1}$
C	2	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	3
D	$\boxed{3}$	4	1	$\boxed{2}$

Сл. 13

Узорак играња партија између две четворочлане екипе дат је на слици 13. Уписани бројеви представљају редне бројеве кола у којима се састају наведени противници. При томе уоквирени бројеви означавају да у тој партији играч прве екипе (A, B, C или D) игра црним фигурама.

То значи да ће се састати у:

I колу $A-E$, $F-C$, $D-G$, $H-B$,

II колу $C-E$, $F-A$, $B-G$, $H-D$,

III колу $E-D$, $B-F$, $G-A$, $C-H$,

IV колу $E-B$, $D-F$, $G-C$, $A-H$,

при чему ће прво наведени у сусретима имати беле фигуре. Сада је очигледно да су испуњена оба постављена услова у задатку.

ЗАДАЦИ:

1. У квадрат са 3×3 поља упишите три јединице, три двојке и три тројке тако да се у свакој хоризонтали и у свакој вертикали свака од цифара 1, 2 и 3 појави само једанпут. Колико је укупно таквих размештаја?

2. Може ли се квадрат са 4×4 поља попунити са четири слова К, четири Р, четири У и четири Г, да се слова урамe са четири типа рамова (квадрат, ромб, троугао и круг) и да се обоје помоћу четири боје тако да буду испуњени следећи услови:

   1) да у свакој хоризонтали и у свакој вертикали буде свако од слова К, Р, У и Г, све боје и сви типови рамова,

   2) да свако слово буде обојено по једанпут сваком бојом,

   3) да рам сваког типа садржи свако слово и сваку боју?

3. У шаховском мечу састају се две екипе са по шест играча. Сваки играч треба да игра по једну партију са сваким од играча друге екипе. Напишите распоред играња партија у мечу тако да:
   1) сваки играч игра једнак број партија белим и црним фигурама,
   2) у сваком колу обе екипе играју једнак број партија белим и црним фигурама.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист XXX 5 на ДМ на Србија