др Павле Младеновић (Београд)

МАЛИ УВОД У КОМБИНАТОРИКУ

Читаоци МЛ већ су се сретали са задацима одређивања броја елемената коначних скупова. Такве задатке зовемо комбинаторним задацима. Наведимо неколико примера.

Пример 1. Коцка за игру чије су стране нумерисане бројевима 1,2,3,4,5,6 баца се 2 пута. Као резултат овог експеримента записује се низ од две регистроване цифре. Колико има различитих резултата?

Резултат експеримента је низ c_1c_2, где $c_1,c_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Сваки такав низ зове се 2-*варијација* елемената 1,2,3,4,5,6. Лако је записати све могуће резултате:

$$11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,$$
$$31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45,\ 46,$$
$$51,\ 52,\ 53,\ 54,\ 55,\ 56,\ 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66.$$

Њихов број једнак је $36=6^2$.

Пример 2. Коцка из примера 1 баца се 3 пута. Колико има различитих резултата овог експеримента?

У овом случају резултат је низ $c_1c_2c_3$, где су c_1, c_2 и c_3 редом бројеви добијени у првом, другом и трећем бацању коцке. Тај низ се зове 3-*варијација* елемената 1,2,3,4,5,6. Број таквих 3-варијација код којих је c_3 фиксиран број једнак је 36 (види пример 1). Пошто c_3 може бити сваки од бројева 1,2,3,4,5,6, то је број 3-варијација од 6 елемената једнак $36 \cdot 6=216=6^3$.

Пример 3. Претпоставимо да 6 кошаркашких екипа учествује на турниру. На колико начина на крају турнира могу бити подељене златна, сребрна и бронзана медаља?

Нумеришимо екипе бројевима 1,2,3,4,5,6. Прво, друго и треће место на турниру (и одговарајуће медаље) могу заузети редом екипе a, b и c, где је

$$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a, \quad a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\}. \qquad (1)$$

Сваки низ abc за који важи (1) зове се 3-*варијација без йонављања* елемената 1,2,3,4,5,6. Екипу a можемо изабрати на 6 начина, екипу b на 5 начина и екипу c на 4 начина. Зато је број 3-варијација без понављања елемената 1,2,3,4,5,6 једнак $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Пример 4. На колико начина можемо поређати у низ елементе скупа: а) $A_2 = \{1,2\}$, б) $A_3 = \{1,2,3\}$, в) $A_4 = \{1,2,3,4\}$, г) $A_5 = \{1,2,3,4,5\}$?

а) Елементе 1 и 2 можемо поређати у низ на 2 начина: 12 и 21.

б) Елементе 1,2 и 3 можемо поређати у низ на следећих $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

в) Елементе 1,2,3,4 можемо поређати у низ на следећих $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

г) Ако ређамо у низ елементе 1,2,3,4,5, онда на првом месту може бити сваки од тих елемената. Број низова код којих на првом месту стоји фиксирани елемент једнак је 24. Зато је број свих ређања у низ елемената 1,2,3,4,5 једнак $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Напоменимо да се свако уређење у низ елемената коначног скупа зове *пермутација* тог скупа. Према томе број пермутација петочланог скупа једнак је производу првих 5 природних бројева. Тај се број означава са $5!$ (чита се: 5 факторијел). Слична ознака се уводи за остале природне бројеве: $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ итд. По договору је $0! = 1$.

Пример 5. На колико начина се од 6 ученика може формирати: а) двочлана екипа; б) трочлана екипа?

а) Означимо ученике бројевима 1,2,3,4,5,6. Двочлану екипу можемо изабрати на један од следећих 15 начина:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

б) Сваки трочлани подскуп $\{a,b,c\}$ скупа $s = \{1,2,3,4,5,6\}$ зове се 3-*комбинација* елемената 1,2,3,4,5,6. (слични називи користе се и за друге подскупове коначних скупова). У примеру 3. одредили смо број 3-варијација без понављања елемената скупа s. Која је разлика између 3-варијације без понављања и 3-комбинације елемената скупа s? Код 3-варијације без понављања битан је редослед елемената, а код 3-комбинације (подскупа) није битан редослед елемената. Приметимо да комбинацији $\{a,b,c\}$ „природно одговарају“ следеће варијације:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Зато је број 3-комбинација елемената скупа s 6 пута мањи од броја 3-варијација без понављања елемената истог скупа. Користећи пример 3. добијамо да је број избора 3 од 6 ученика (број 3-комбинација елемената скупа s) једнак

$$\frac{120}{6}=20=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{6\,!}{3\,!(6-3)\,!}\,.$$

Број $\frac{6\,!}{3\,!3\,!}$ означава се са $\binom{6}{3}$ и чита се „шест над три“. Слично су, например, $\binom{5}{0}$ и $\binom{7}{3}$ ознаке за бројеве $\frac{5\,!}{0\,!5\,!}$ и $\frac{7\,!}{3\,!4\,!}$ редом.

Пример 6. Запишимо бројеве $\binom{n}{k}$ за $0\leqslant k\leqslant n$ и $n\leqslant 7$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	$\boxed{5}$	$\boxed{10}$	10	5	1		
6	1	6	$\boxed{15}$	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Број $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k\,!\,(n-k)\,!}$ представља број избора k од n елемената. (Број $\binom{n}{k}$ се чита „ен над ка“.) (Проверите да је таблица добро попуњена). Наведена таблица бројева зове се Паскалов троугао. У свакој врсти Паскаловог троугла први и последњи број једнаки су 1. Сваки од осталих бројева једнак је збиру бројева који се у наведеној таблици налазе тачно изнад и изнад--лѐво. На пример, $15=5+10$. Проверите то својство и за остале бројеве.

Задаци

1. У соби се налазе 4 сијалице. Свака од њих се укључује посебним прекидачем. На колико начина соба може бити осветљена?
2. Колико има троцифрених бројева у чијем запису се појављују 3 међусобно различите цифре?
3. На колико начина се могу поређати у низ цифре $0,1,2,\ldots,9$, тако да на првих 5 места стоје непарне цифре?
4. На колико начина се од 7 врста разгледница могу купити 4 различите разгледнице?
5. Дато је 7 врста разгледница. Треба купити не више од 4 разгледнице, тако да купљене разгледнице буду међусобно различите. На колико начина се то може урадити?
6. Израчунајте збир бројева у свакој врсти Паскаловог троугла из примера 6. Шта сте приметили?
7. Покажите да је:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Запишите у развијеном облику израз $(a+b)^5$. Какав закључак можете извести?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија