Алија Муминагиќ
Данска

ПРОБЛЕМОТ НА ДИДОНА

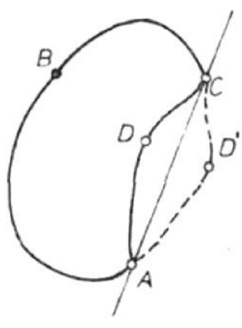
Во енциклопедиите може да се најде следнава информација: Дидона или Елиса, е ќерка на Мут кралот на Тир и сестра на Пигмалион. Нејзиниот маж Сихеј гбил убиен од Пигмалион, по што, според легендата, Дидона побегнала и ја основала Картагена.

Но, каква врска има основањето на Картагена со математиката? Според легендата, Дидона која повеќе не можела да го трпи самоволието на својот брат Пигмалион, зела големо богатство и побегнала на брегот на Сверна Африка. Таму се договорила со кралот Јарбас од него да купи толку земја колку што може да опфати со кожата на еден бик. Тоа не е многу, помислил кралот Јарбас. Но, еве што направила Дидона. Кожата на бикот ја исекла на сосема тенки ленти, потоа ги поврзала краевите на лентите и успеала да ја опфати земјата на која е изградена Картагена.

Во овој сјајно замислен план Дидона се соочила со еден таканаречен изопетриски проблем, кој се решава со помош на вишата математика. Тоа е следниов проблем: Дадена е една крива, во случајот на Дидона дел од морскиот брег, а се бара како може да се повлече некоја друга крива, чија должина е дадена, така што плоштината на површината меѓу оваа и дадената крива биде најголема можна? Ова е интересен проблем, но општото решение на овој проблем е многу сложено, па затоа во нашите разгледувања ќе се задржиме само на еден негов специјален случај, кога во прашање е само една крива. Во случајов формулацијата на проблемот е:

Меѓу сите затворени криви во рамнината, кои имаат еднаков даден периметар, определи ја кривата која ограничува површина со најголема плоштина.

1. Прво ќе докажеме дека бараната крива мора да е конвексна (испакната).



Нека претпоставиме дека кривата во еден свој дел е конкавна,т.е. вдлабната (цртеж десно). Тогаш постојат две точки A и C, такви што деловите на кривата ADC и ABC се наоѓаат на иста страна на правата определена со точките A и C. Сега да го конструираме лакот $AD'C$, кој е симетричен на лакот ADC во однос на правата AC. Тогаш лаците

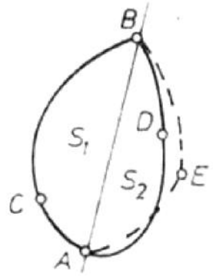
ADC и $AD'C$ имаат иста должина, па кривите $ABCDA$ и $ABCD'A$ имаат иста должина, но очигледно дека кривата $ABCD'A$, која е секаде конвексна, зафаќа површина со поголема плоштина од кривата $ABCDA$. Според тоа, за секоја крива која во некои свои делови е конкавна може да се најде крива која има иста должина (периметар) како и дадената, но зафаќа површина со поголема плоштина, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека бараната крива е конвексна.

2. Сега ќе воведеме еден помошен поим:

Отсечката која поврзува две точки на дадена крива со која нејзиниот периметар е поделен на два еднакви дела се нарекува дијаметар на таа крива.

Ќе го докажеме следново тврдење:

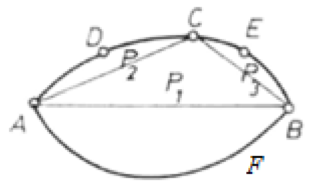
Секој дијаметар ја дели површината ограничена со конвексната крива на два дела со еднакви плоштини ако површината ограничена со таа крива има максимална плоштина, т.е. нејзината плоштина не е помала од плоштината на било која површина ограничена со крива со ист периметар (должина).



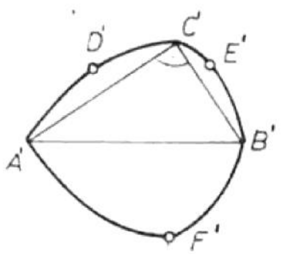
Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека дијаметарот AB (цртеж десно) ја дели површината ограничена со кривата $ADBCA$ на два дела S_1 и S_2, при услов $L_{ACB} = L_{ADB}$. Нека $S_1 > S_2$. Конструираме лак AEB симетричан на лакот ACB во однос на дијаметарот AB. Од $L_{ACB} = L_{AEB}$ и $S_1 > S_2$ следува дека лакот AEB ограничува над дијаметарот AB површина со поголема плоштина од лакот ADB, па затоа кривата $ACBEA$ ограничува пршина со поголема плоштина од кривата $ACBDA$. Тоа значи дека плоштината на фигурата $ACBDA$ не е максимална, со што доказот е завршен.

3. Сега ќе го докажеме следново својство на кривата која ограничува површина со максимална плоштина:

Отсечките кои ја поврзуваат било која точка на оваа крива со краевите на било кој нејзин дијаметар AB формираат прав агол.



Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека за некоја точка C и некој дијаметар AB на таа крива аголот во точката C не е прав (цртеж десно). Плоштината на површината ограничена со лакот $ADCEB$ и дијаметарот AB да ја означиме со S, а плоштините на другите површини како што е прикажано на горниот цртеж. Тогаш $S = P_1 + P_2 + P_3$.



Сега триаголнилкот ABC, кој не е правоаголен да го замениме со еден правоаголен триаголник $A'B'C'$ кој има катети $A'C'$ и $B'C'$, еднакви на страните AC и BC на триаголникот ABC, и на нив да ги ставиме фигурите $ADCA$ (чија плоштина е означена со P_2) и $BECB$ (чија плоштина е означена со P_3) и да конструираме лак $A'F'B'$ симетричан на лакот $A'C'B'$ во однос на дијаметарот $A'B'$ (цртеж лево). Така добивме крива со иста должина како и почетната крива, на површината ограничена со неа има плоштина:

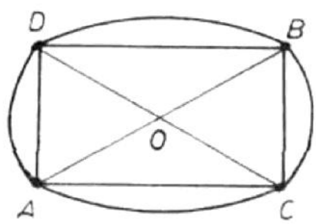
$$2S_1 = 2(P_x + P_2 + P_3) > 2(P_1 + P_2 + P_3) = 2S,$$

бидејќи плоштината P_x на правоаголниот триаголник чии две катети се еднакви на две страни на друг триаголник е поголема од неговата плоштина P_1. Според тоа, кривата $A'C'B'F'A'$ ограничува површина со поголема плоштина од кривата $ACBFA$.

Од претходните рагледувања следува дека: *максимална плоштина може да ограничува само онаа крива кај која секој тетивен агол конструиран над произволен дијаметар е прав агол.*

4. На крајот ќе докажеме уште едно својство на кривите кои имаат дадена должина и кои ограничуваат површина со максимална плоштина.

Кај кривите кои ограничуваат површина со максимална плоштина сите дијаметри се еднакви меѓу себе и заемно се половат.



Навистина, нека AB и CD се два произволни дијаметри на дадената крива (цртеж десно). Тогаш

$$\measuredangle ADB = \measuredangle DBC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAD = 90^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $ABCD$ е правоаголник. Тоа значи дека дијагоналите AB и CD се еднакви меѓу себе и се половат. Сега точноста на тврдењето следува произволноста на дијаметрите AB и CD.

Како што знаеме, сите наведени својства ги има кружницата и тоа е единствената рамнинска крива која ги има овие својства. Значи:

Меѓу сите затворени рамнински криви кои имаат еднаков периметар површина со наголема плоштина ограничува кружницата.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист