Ристо Малчески, Скопје
Здравко Цветковски, Скопје

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле (Pigeonhole principle) е едно од наупотребуваните и најполезни тврдења во комбинаториката. Истиот е познат во три вида и тоа: елементарен, обопштен и геометрски принцип на Дирихле. Во нашите разгледувања истиот нема да го докажуваме, току само ќе разгледаме определен број примери кои се решаваат со ова моќно математичко оружје. Притоа нема посебно да го објаснуваме геометрискиот пирнцип на Дирихле, бидејќи за истиот веќе има доволно објаснувања нво статиите кои веќе се наоѓаат на сајтот Математички талент.

Принцип на Дирихле. Нека се дадени $n+1$ топче кои се распоредени во n кутии. Тогаш постои барем една кутија која содржи барем 2 топчиња.

Обопштен принцип на Дирихле. Нека се дадени $kn+r$, $0<r<n$ топчиња кои се распоредени во n кутии. Тогаш постои барем една кутија која содржи барем $k+1$ топче.

Задача 1. Дадени се 8 природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат два броја чија разлика е делива со 7.

Решение. Можни остатоци при делење со 7 се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, вкупно на број 7. Бидејќи имаме 8 броеви а 7 различни класи на остатоци од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја кои имаат ист остаток при делење со 7. Јасно, нивната разлика е делива со 7.

Задача 2. Во секоја клетка од 3×3 квадрат е запишан еден од броевите -1 , 0 или 1. Докажи дека меѓу збировите на броевите на секој ред, секоја колона и на двете дијагонали постојат барем два еднакви.

Решение. Можни вредности на овие збирови се $-3,-2,-2,0,1,2,3$. Имаме 8 збирови а 7 можни вредности, од принципот на Дирихле следува дека барем два се еднакви. ■

Задача 3. Во таблица 10×10 запишани се природни броеви т.ш разликата на било кои два броја запишани во две соседни клетки не е поголема од 5, (две клетки се соседни ако имаат заедничка страна). Да се докаже дека меѓу дадените броеви постојат два еднакви броја.

Решение. Нека a е најмалиот од броевите запишани на таблата.

Тогаш најголениот од нив е $a+19\cdot 5=a+95$ (зошто?).

Па според тоа на таблата се запишани не повеќе од 96 различни броеви, од каде следува решението на задачата. ■

Задача 4. Дали постои природен број кој е делив со 2009 и чиј декаден запис се состои само од нули и единици.

Решение. Да ги разгледаме броевите $1,\ 11,\ 111,\ \dots,\underbrace{11\dots1}_{2010}$. Можни остатоци при делење со 2009 се $0,1,2,\dots,2008$ и нив ги има 2009. Бидејќи имаме 2010 броеви од Принципот на Дирихле следува дека постојат два од броја кои даваат исти остатоци при делење со 2009. Јасно, нивната разлика е делива со 2009 и има декаден запис од облик $1111\dots00$. ■

Задача 5. Докажи дека од произволно избрани 7 природни броеви, секогаш постојат два броја такви што или нивниот збир или нивната разлика има цифра на единици нула.

Решение. Да ги разделиме броевите во шест групи: A_0 - броеви кои завршуваат на 0, A_1 - броеви кои завршуваат на 1 или 9, A_2 - броеви кои завршуваат на 2 или 8, A_3 - броеви кои завршуваат на 3 или 7, A_4 - броеви кои завршуваат на 4 или 6, A_5 - броеви кои завршуваат на 5. Од принципот на Дирихле следува дека постои група која содржи барем два од дадените броја, па јасно или нивната разлика или нивниот збир ќе има цифра на единици нула. ■

Задача 6. Нека a, b, c и d се произволни цели броеви. Докажи дека производот

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

е делив со 12.

Решение. Според принципот на Дирихле барем два броја од a,b,c и d се со иста парност. Во најлош случај имаме два парни и два непарни броја. Тогаш нивните соодветни разлики се деливи со 2, т.е. бараниот производ е делив со 4. Ако имаме три парни и еден непарен број, или еден парен и три непарни разликите на парните, т.е. непарните броеви се деливи најмалку со 8 па се деливи и со 4. Според тоа, дадениот производ за било кои броеви a, b, c и d е делив со 4.

Понатаму повторно од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два од броевите a, b, c и d кои при делење со 3 даваат еднаков остаток. Тогаш нивната разлика е делива со 3.

Конечно, дадениот производ е делив со 3 и со 4, па затоа е делив со 12. ■

Задача 7. Дадени се n природни броеви. Докажи дека може да се изберат неколку броеви од нив така што нивниот збир е делив со n.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се дадените броеви. Да ги разгледаме броевите

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, ...,\ s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n .$$

Тогаш ако некој од овие броеви е делив со n, задачата е решена. Во спротивно имаме n броеви, а $n-1$ можни остатоци $\{1,2,3,...,n-1\}$, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два од нив што при делење со n даваат еднаков остаток. Нека се тоа броевите

$$s_p = a_1 + a_2 + ... + a_p \text{ и } s_q = a_1 + a_2 + ... + a_q .$$

Јасно, разликата $s_p - s_q$ е делива со n, што и требаше да се докаже. ■

Задача 8. Да се докаже дека меѓу било кои $n+1$ природни броеви не поголеми од $2n$, постојат два броја такви што едниот број е делител на другиот.

Решение. Нека избраните броеви се $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$. Да ги запишеме во облик $a_i = 2^{k_i} b_i$, каде b_i е непарен број. Тогаш имаме $n+1$ непарни броеви $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$ од интервалот $[1, 2n-1]$. Но во овој интервал има точно n непарни броеви, па од принципот на Дирихле следува дека меѓу броевите $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$ постојат барем два еднакви, т.е. постојат k, p $\in \{1,2,...,n+1\}$ такви што $b_k = b_p$. Сега е јасно еден од броевите a_k, a_p е делител на другиот, што и требаше да се докаже. ■

Задача 9. Дали е можно во квадратна таблица 2009×2009, да се разместат броевите 1, 2 и 3 така што сумите на броевите во секоја колона, секоја редица и на двете дијагонали бидат меѓусебно различни?

Решение. Ќе докажеме дека при било кое разместување на броевите постојат две еднакви суми.

Имаме онолку суми колку што има колони, редици и дијагонали заедно т.е. имаме вкупно $2009+2009+2=4020$ суми. Меѓутоа ниту една сума S не може да биде помала од 2009 (кога сите броеви би биле 1) и јасно не може да биде поголема од $3\cdot 2009$ (сите броеви се 3). Значи

$$2009\leq S\leq 3\cdot 2009,$$

па можеме да имаме најмногу $2\cdot 2009+1=4019$ различни суми. Бидејќи имаме 4020 суми кои можат да примат една од 4019 вредности, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку две еднакви суми. ■

Задача 10. Дадени се 51 различни двоцифрени броеви (едноцифрените броеви ги сметаме за двоцифрени со прва цифра 0). Докажи дека меѓу тие броеви постојат 6 броја такви што секои два од нив имаат различни цифри на соодветни места, т.е. нивните цифри на единиците и нивните цифри на десетките се различни.

Решение. Да ги подредиме дадените броеви по големина и да ги разделиме во групи по нивните цифри на десетките. Бидејжи имаме 51 различни двоцифрени броеви за бројот k на вакви групи, важи $6\leq k\leq 10$. Меѓу овие групи, според принципот на Дирихле постои група A_6 која содржи најмалку 6 од дадените броеви. Аналогно меѓу преостанатите групи постои група A_5 која содржи најмалку 5 од дадените броеви итн. постојат групи A_4, A_3, A_2, A_1 кои содржат барем по 4, 3, 2 и еден број, соодветно. Сега првиот број го бираме од A_1, вториот од A_2 така што цифрата на единици на бројот од A_2 е различна од цифрата на единици на бројот од A_1 (таков број постои) итн. последниот број го бираме од A_6, така што неговата цифра на единици е различна од цифрите на единици на секој од претходно избраните броеви. Со ова задачата е решена. ■

Задача 11. Докажи дека меѓу било кои 7 реални броеви $a_1, a_2, ..., a_7$ постојат два броја a_i и a_j такви што $0\leq \frac{a_i-a_j}{1+a_ia_j}\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. За секој a_i, $i=1,2,...,7$ постои x_i, така што $a_i=\operatorname{tg} x_i$, $i=1,2,...,7$ каде $x_i\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Да го разделиме интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ со должина π на 6 интервали со должина $\frac{\pi}{6}$. Бидејќи имаме седум броеви, а шест интервали од принципот на Дирихле следува дека постојат барем два броја x_i и x_j кои се наоѓаат во еден ист интервал. Тогаш важи

$$0 \leq x_i - x_j \leq \tfrac{\pi}{6}$$

односно

$$\operatorname{tg} 0^\circ \leq \operatorname{tg}(x_i - x_j) \leq \operatorname{tg}\tfrac{\pi}{6},$$

па имаме

$$0 \leq \tfrac{\operatorname{tg} x_i - \operatorname{tg} x_j}{1 + \operatorname{tg} x_i \operatorname{tg} x_j} \leq \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ т.е. } 0 \leq \tfrac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} \leq \tfrac{1}{\sqrt{3}},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 12. Да се докаже дека меѓу било кои 13 реални броеви, постојат два броја a и b за кои важи $|a-b| \leq (2-\sqrt{3})|1+ab|$.

Решение. Аналогно како претходната задача, при што да забележиме дека $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$. ■

Задача 13. Докажи дека меѓу произволно избрани $n+1$ природни броеви секогаш постојат два броја чија разлика е делива со n.

Решение. Да ги разгледаме остатоците на овие броеви при делење со n. Имаме вкупно $n+1$ остаток, додека можни остатоци при делење со n се $0,1,2,...,n-1$ т.е. n на број. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два од дадените броеви кои при делење со n даваат исти остатоци, и тогаш јасно нивната разлика е делива со n. ■

Задача 14. Докажи дека меѓу броевите од облик

$$2008,\ 20082008,\ \ldots,\ 2008...2008$$

постои број кој е делив со 2009.

Решение. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја од облик $2008...2008$ кои даваат ист остаток при делење со 2009. Според тоа, нивната разлика е делива со 2009 и е од облик

$$20082008...0000 = 2008...2008 \cdot 10^k = A \cdot 10^k.$$

Бидејќи $NZD(10^k, 2009) = 1$ следува $2009 \mid A$ каде A е од облик 2008...2008, што и требаше да се докаже. ■

Задача 15. Од броевите 1, 2, ...,100 се избрани 51 број. Докажи дека еден од избраните броеви е делител на друг од од избраните броеви.

Решение. Да ги разгледаме множествата

$$A_1=\{1,2,4,8,...,64\},\ A_2=\{3,6,12,24,48,96\},$$
$$A_3=\{5,10,20,40,80\},...,A_{49}=\{97\},\ A_{50}=\{99\}$$

(добиени со последователни удвојувања на првиот елемент). Имаме 51 број, а 50 множества па од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја кои се во исто множество и јасно едниот број е делител на другиот. ■

Задача 16. Дадени се 34 произволно избрани природни броеви, кои не се поголеми од 50. Докажи дека секогаш може да се изберат два од нив така што едниот број е двапати поголем од другиот број.

Решение. Да ги разгледаме групите броеви:

$\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{5,10\}$,..., $\{25,50\}$

$\{4,8\}$, $\{12,24\}$, $\{20,40\}$

$\{16,32\}$

$\{27\}$, $\{28\}$, $\{29\}$, $\{31\}$, $\{33\}$, $\{35\}$, $\{36\}$, $\{37\}$, $\{39\}$, $\{41\}$, $\{43\}$, $\{44\}$,

$\{45\}$, $\{47\}$, $\{48\}$, $\{49\}$.

Имаме вкупно $13+3+1+16=33$ групи, и бидејќи имаме 34 броеви од Принципот на Дирихле следува дека барем два броја мора да се наоѓаат во иста група, и тоа се бараните броеви. ■

Задача 17. Дадена е аритметичката прогресија $1,4,7,...,100$. Докажи дека од произволно избрани 20 броеви секогаш постојат два од нив чиј збир е 104.

Решение. Да ги разгледаме множествата

$$\{1\},\ \{4,100\},\ \{7,97\},....,\{49,55\},\ \{52\}.$$

Овие множества се 19 на број, а бидејќи имаме 20 броеви од принципот на Дирихле следува дека мора да постојат барем два броја од исто множество. Со ова задачата е решена. ■

Задача 18. Докажи дека меѓу било кои 52 природни броја, постојат два броја такви што разликата на нивните квадрати е делива со 100.

Решение. Бидејќи a^2 и $(100-a)^2$ имаат исти остатоци при делење со 100, можеме да ги разгледаме паровите броеви $(a,100-a)$. Тогаш од принципот на Дирихле следува дека мора да постојат два броја кои се наоѓаат во иста група, Јасно, разликата на нивните квадрати е делива со 100. ■

Задача 19. Еден шахист се подготвувал 77 дена за турнир во шах. Тој играл најмалку по една партија на ден, и вкупно одиграл не повеќе од 132 партии. Докажи дека постојат неколку последователни денови во кои тој одиграл точно 21 партија.

Решение. Нека a_i е бројот на партии кои ги одиграл шахистот заклучно со i-тиот ден. Тогаш $1 \le a_1 < ... < a_{77} \le 132$ па следува

$$22 \le a_1 + 21 < ... < a_{77} + 21 \le 153.$$

Значи броевите $a_1, ..., a_{77}, a_1 + 21, ..., a_{77} + 21$ (вкупно 154 на број) не се помали од 22 и не поголеми од 153. Од принципот на Дирихле следува дека меѓу нив постојат два еднакви броја, т.е. постојат индекси i и j така што $a_i = a_j + 21$. Значи во деновите $j+1, j+2, ..., i$ шахистот одиграл точно 21 партија. ■

Задача 20. Нека a е природен број кој е заемно прост со 2 и со 5. Докажи дека постои степен на бројот a кој завршува на $\underbrace{00...01}_{2008}$.

Решение. Да забележиме дека $\text{NZD}(a,10) = 1$. Понатаму да ги разгледаме броевите $a, a^2, ..., a^{10^{2008}}$, кои ги има вкупно 10^{2008}. Остатоци при делење со 10^{2008} се $0, 1, ..., 10^{2008} - 1$, вкупно 10^{2008}. Од $\text{NZD}(a,10) = 1$ следува дека броевите $a, a^2, ..., a^{10^{2008}}$ можат да дадат некој од следниве остатоци $1, 2, ..., 10^{2008} - 1$. Сега, од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја a^i и a^j кои имаат ист остаток при делење со 10^{2008}. Можеме да земеме $i > j$, тогаш $10^{2008} \mid a^i - a^j = a^j(a^{i-j} - 1)$. Но од $\text{NZD}(a,10) = 1$ следува $10^{2008} \mid a^{i-j} - 1$, т.е. a^{i-j} завршува на $\underbrace{00...01}_{2008}$. ■

Задача 21. Докажи дека од кои било 10 двоцифрени броеви секогаш може да избереме две дисјунктни подмножества броеви чии суми на елементи се еднакви.

Решение. Од 10-елементно множество можеме да формираме $2^{10} - 1 = 1023$ подмножества. Збирот на броевите во било кое подмножество не е поголем од $10 \cdot 99 = 990$. Според принципот на Дирихле следува дека постојат две подмножества S_1 и S_2 чии суми на елементи се еднакви. Ако

$S_1 \cap S_2 = \varnothing$, задачата е решена. Ако пак $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, тогаш ги отстрануваме нивните заеднички елементи и пак добиваме две дисјунктни подмножества чии суми на елементи се еднакви. ■

Задача 22. Да се докаже дека помеѓу било кои 70 природни броеви не поголеми од 200, постојат два броја чија разлика е или 4 или 5 или 9.

Решение. Нека броевите се $a_1 > a_2 > ... > a_{70}$. Да ги разгледаме броевите

$$a_1, a_2, ..., a_{70},\ a_1+4, a_2+4, ..., a_{70}+4,\ a_1+9, a_2+9, ..., a_{70}+9.$$

Вкупно имаме 210 броеви кои се помали или еднакви на 209, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два еднакви броја. Јасно тие припаѓаат во две разлини множества: $\{a_1, a_2, ..., a_{70}\}$; $\{a_1+4, a_2+4, ..., a_{70}+4\}$ и $\{a_1+9, a_2+9, ..., a_{70}+9\}$.

Ако $a_i = a_j + 4$ тогаш $a_i - a_j = 4$.

Ако $a_i = a_j + 9$ тогаш $a_i - a_j = 9$.

Ако $a_i + 4 = a_j + 9$ тогаш $a_i - a_j = 5$. Што и требаше да се докаже. ■

Задача 23. 51 ученик решавале тест со 10 задачи. Филип имал најмногу точно решени задачи, и само тој точно решил 7 задачи. Докажи дека постојат 8 ученици кои решиле еднаков број задачи.

Решение. Ќе ги разделиме учениците во групи и тоа: во првата оние кои немале решено ниту една задача, во втората оние кои имаат решено точно една задача итн. во седмата група оние ученици кои решиле шест задачи. Бидејќи $50 = 7 \cdot 7 + 1$ од принципот на Дирихле следува дека постои група во која има најмалку 8 ученици. ■

Задача 24. Множеството броеви $\{1, 2, ..., 20\}$ е поделено на четири групи. Докажи дека постои група чиј збир на броеви не е помал од 53.

Решение: Збирот на броевите во сите четири групи е:

$$1 + 2 + ... + 20 = \tfrac{20 \cdot 21}{2} = 210.$$

Бидејќи $210 = 52 \cdot 4 + 2$ до принципот на Дирихле следува дека барем во една група збирот на броевите е најмалку 53. ■

Задача 25. Да се докаже дека од 65 произволно избрани цели броеви, секогаш може да се изберат 9 броеви чиј збир е делив со 9.

Решение. Можни остатоци при делење со 9 се $0,1,2,...,8$.

Ако постојат броеви кои сите имаат различни остатоци при делење со 9, тогаш нивниот збир е делив со 9.

Ако пак не постои број од некоја класа остатоци, тогаш дадените 65 броеви ќе даваат некој од останатите 8 остатоци. Бидејќи $65=8\cdot 8+1$, од Принципот на Дирихле следува дека постојат 9 броеви кои имаат ист остаток при делење со 9, Јасно, нивниот збир е делив со 9. ■

Задача 26. Група од 7 луѓе имаат вкупно 332 години. Докажи дека постојат тројца од нив така што збирот на нивните години не е помал од 143.

Решение. Да ги разгледаме сите тројки на луѓе од овие 7 луѓе. Нивниот број е 35 (зошто?). Секој човек се јавува во точно 15 од овие тројки, па збирот на годините на луѓето во сите тројки е $15\cdot 332=4980$. Бидејќи $4980=35\cdot 142+10$ од принципот на Дирихле следува дека постои тројка луѓе чиј збир на години е најмалку 143. ■

Задача 27. Дадени се $n+1$ точки во рамнината. Докажи дека при било кое нивно поврзување со отсечки, секогаш постојат две точки од кои излегуваат еднаков број на отсечки.

Решение. Бројот на отсечки кои излегуваат од една точка може да биде $0,1,...,n-1$ или n. Меѓутоа, не постојат две точки такви што од едната не излегува ниту една отсечка, а од другата да излегуваат n отсечки. Според тоа, од дадените точки можат да излегуваат $0,1,...,n-1$, или пак $1,...,n-1,n$ отсечки. Значи имаме $n+1$ точки а n можности па од принципот на Дирихле следува дека постојат две точки од кои излегуваат еднаков број на отсечки. ■

Задача 28. Докажи дека во било кој конвексен $2n$-аголник, постои дијагонала која не е паралелна со ниту една од страните на $2n$-аголникот.

Решение. Конвексен $2n$-аголник има $\frac{2n(2n-3)}{2}=n(2n-3)$ дијагонали.

Бројот на дијагонали кои се паралелни со дадена страна е најмногу $n-2$. Значи вкупниот број на дијагонали паралелни со некоја од страните е најмногу $2n(n-2)$.

Бидејќи $2n(n-2)<n(2n-3)$ добиваме дека постои дијагонала која не е паралелна со ниедна од страните на $2n$-аголникот. ■

Задача 29. Во рамнина се дадени 30 точки такви што меѓу било кои три постојат две кои се на растојание не поголемо од 1. Да се докаже дека постојат најмалку 15 точки кои можат да се покријат со круг со радиус 1.

Решение. Меѓу дадените 30 точки постојат две, кои се на најголемо растојание. Околу нив да опишеме кружници со радиус 1. Тогаш, јасно било која од останатите точки мора да се најде во некоја од кружниците (заради условот). Но, имаме 28 точки, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку 14 од овие точки се наоѓаат во некоја од кружниците, од што следува тврдењето на задачата. ■

Задача 30. Секоја точка од Декартов координатен систем со целобројни координати е обоена во една од три бои. Докажи дека постои правоаголник со страни паралелни со координатните оски , чии темиња се обоени во иста боја.

Решение. Да ги разгледаме оние точки од рамнината кои се добиваат со пресек на четири паралелни вертикални прави со останатите хоризонтални прави. Од принципот на Дирихле следува дека во секој ред постојат две исто обоени точки. Различни можности за боење на еден ред има 3^4, и бидејќи бројот на хоризонтални линии е бесконечен следува дека постојат два исто обоени реда. Двете исто обоени точки во овие два исто обоени реда формираат правоаголни чии темиња се обоени во иста боја. ■

Задача 31. Во просторот се дадени 9 точки со целобројни координати.

Дакажи дека постои отсечка со краеви во некои две од дадените точки таква што нејзината средна точка исто така има целобројни координати.

Решение. Најпрво да забележиме дека: Координатите на средишната точка на отсечката X_1X_2 со крајни точки $X_1(x_1,y_1,z_1)$ и $X_2(x_2,y_2,z_2)$ се дадени со $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$. Да разгледаме парност односно непарност, на координатите на дадените точки. Ги имаме следниве можности: (п,п,п), (п,п,н), (п,н,п), (н,п,п), (п,н,н), (н,п,н), (н,н,п), (н,н,н), т.е. имаме 8 можности. Бидејќи имаме 9 точки, а 8 можности од принципот на Дирихле следува дека постојат две точки $A(a_1,b_1,c_1)$ и $B(a_2,b_2,c_2)$, чии координати имаат иста парност. Тогаш $\frac{a_1+a_2}{2},\frac{b_1+b_2}{2},\frac{c_1+c_2}{2}$ се цели броеви и јасно средната точка на отсечката AB определна со овие точки е со целобројни координати. ■

Задача 32. Во квадрат со должина на страна 1 на произволен начин сместени се 15 точки. Докажи дека во внатрешноста на квадратот може да се смести круг со радиус $\frac{1}{8}$ кој не содржи ниту една од дадените 15 точки.

Решение. Дадениот квадрат го делиме на 16 квадрати секој со должина на страна $\frac{1}{4}$. Бидејќи имаме 15 точки, следува дека постои квадрат кој не содржи ниту една од дадените 15 точки. Тогаш впишаниот круг во тој квадрат има радиус $\frac{1}{8}$ и е бараниот квадрат.■

Задача 33. Во квадрат со страна 2, на случаен начин распоредени се 49 точки. Докаже дека постојат 13 од дадените точки кои можат да се покријат со круг со радиус $\frac{3}{4}$.

Решение. Го делиме квадратот на четири складни квадрати со страна 1. Бидејќи $49 = 4 \cdot 12 + 1$ од принципот на Дирихле следува дека постои квадрат кој содржи најмалку 13 од дадените точки. За радиусот на кружницата опишана околу тој квадрат имаме $(2r)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, т.е. $2r = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ од каде следува $r < \frac{3}{4}$. Според тоа, кругот со центар во центарот на посочениот квадрат и радиус $\frac{3}{4}$ е бараниот круг. ■

Задача 34. Во внатрешноста на коцка со раб 21 произволно се избрани 342 точки. Да се докаже дека во внатрешноста на дадената коцка може да се смести топка со волумен 42 која во својата внатрешност не содржи ниту една од дадените точки.

Решение. Да ја разделиме коцката на $7^3 = 343$ коцки, секоја со должина на страна 3. Бидејќи имаме 343 коцки, а 342 точки следува дека постои коцка со страна 3 која не содржи ниту една од дадените точка.

Тогаш топката впишана во оваа коцка има радиус $r = \frac{3}{2}$ т.е. нејзиниот волумен е $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}(\frac{3}{2})^3 \pi = \frac{27\pi}{2} > 42$.

Значи во оваа коцка со раб 3 можеме да сметиме топка со волумен 42, и која јасно не содржи ниту една од дадените точки. ■

Задача 35. Во коцка со должина на раб 7 произволно се сместени 344 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се на растојание не поголемо од $\sqrt{3}$.

Решение. Дадената коцка ја делиме на $7\cdot 7\cdot 7=343$ еднакви коцки со раб 1. Тогаш од принципот на Дирихле следува дека постои коцка со раб 1 во која се наоѓаат најмалку две од дадените точки. Најголемото растојание меѓу нив може да биде $\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$. ■

Задача 36. Во рамнината со правоаголен координатен систем се дадени 5 точки со целобројни координати. Докажи дека постои отсечка со краеви меѓу дадените точки така што и нејзината средина е со целобројни координати.

Решение. Нека точките се (x_i, y_i), $i=1,2,...,5$.

Средината на секоја отсечка со краеви $(a,b),(c,d)$ има координати $(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2})$. Затоа доволно е да најдеме два пара $(x_i, y_i),(x_j, y_j)$ такви што $\frac{x_i+x_j}{2}$ и $\frac{y_i+y_j}{2}$ се цели броеви.

Ќе докажеме дека постојат парови (x_i, y_i) и (x_j, y_j) такви што x_i и x_j се со иста парност и y_i и y_j се со иста парност, од каде што ќе следува решението на задачата. Бидејќи постојат 4 различни начини на формирање парови во однос на парноста, а имаме 5 точки, од принципот на Дирихле следува дека постојат две со иста парност на своите координати. ■

Задача 37. Да се докаже дека во круг со радиус $9cm$ не можат да се распоредат 400 точки така што растојанието меѓу било кои две точки да биде не помало од $1cm$.

Решение. Да го претпоставиме спротивното. Околу секоја точка да опишеме круг со радиус $\frac{1}{2}$. Тогаш сите кругови не се сечат, и јасно збирот на плоштините на овие круговите не е поголема од плоштината на кругот со радиус $9+\frac{1}{2}$. Но $400\cdot\frac{1}{2^2}\pi=100\pi>9{,}5^2\pi$, што е контрадикција. ■

Задача 38. Во квадрат со должина на страна 8 произволно се распоредени 70 точки така што никои три не лежат на иста права. Докажи дека постојат 3 точки кои формираат триаголник чија плоштина не е поголема од 1.

Решение. Да ја разделиме таблата на 32 правоаголници со должини на страни 1 и 2. Од принципот на Дирихле следува дека постои правоаголник во кој се наоѓаат барем три точки. Триаголникот со темиња во три од овие точки има плоштина која не е поголема од 1 (зошто?). ■

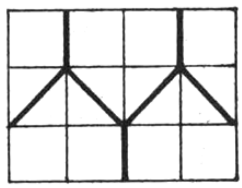
Задача 39. Во сфера со радиус 1 летаат 9 муви. Да се докаже дека постојат две муви кои се наоѓаат на растојание не поголемо од $\sqrt{3}$.

Решение. Околу сферата да опишеме коцка. Коцката ја делиме на 8 помали еднакви коцки. Јасно рабовите на малите коцки се еднакви на 1. Од принципот на Дирихле следува дека постојат две муви кои се наоѓаат во некоја од помалите коцки и нивното растојание не е поголемо од должината на дијагоналата на коцката, т.е. од $\sqrt{3}$. ■

Задача 40. Шест точки произволно се разместени во правоаголник со димензии 3×4. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се наоѓаат на растојание не поголемо од $\sqrt{5}$.

Решение. Да го разделиме правоаголникот како на цртежот десно. Најголемо растојание меѓу две точки во дадените фигури е

$$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$$



Понатаму од принципот на Дирихле следува дека постојат барем две точки кои се наоѓаат во некоја од фигурите. Со ова задачата е решена. ■

Задача 41. Да се докаже дека во произволен конвексен четириаголник со плоштина P и периметар L може да се смести круг со радиус $\frac{P}{L}$.

Решение. Над секоја страна на четириаголникот кон неговата внатрешност да впишеме правоаголник со висина $\frac{P}{L}$.

Вкупната плоштина што ја зафаќаат овие правоаголници е P, но некои од нив се препокриваат или излегуваат надвор од четириаголникот, па затоа останува непокриен дел од четириаголникот. Било која точка од овој непокриен дел може да биде центар на бараниот круг. ♦

Коментар. Задачите кои се презентирани во оваа статија се дел од задачите од необјавената книга Комбинаторика од истите автори, па затоа некои од нив може да се најдат во статиите кои се пишувани од првиот автор и се наоѓаат на сајтот *Математички талент*.