УНИВЕРЗИТЕТ „КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ — СКОПЈЕ

YU-ISBN-86-7027-007-2

Наум ЦЕЛАКОСКИ

ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ ПО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Кн. II

(за математика III)

II издание

Скопје, 1988

Одобрено со решение на ректорот
бр. 11-438/5 од 29. II 1988 година,
како учебно помагало.

Рецензенти:
Проф. д-р Илија Шапкарев
Проф. д-р Никола Речкоски

Лектура
Оливера Павловска

CIP-Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека „Климент Охридски", Скопје

517.9 (076.38)

ЦЕЛАКОСКИ, Наум
Примери и задачи по диференцијални равенки, кн II (за математика III) : [учебно помаголо] / Наум Целакоски . — 2. изд. — Скопје : Универзитет „Кирил и Методиј", 198 — . — 2 св. : илустр. ; 24 см
Кн. 2. — 1988. — 289 стр.
1. изд. 1983. — Библиографија: стр. 289.

Умножено на офсет во Универзитетската печатница „Кирил и Методиј" — Скопје, во март 1988 год.
Тираж: 1000 примероци

П Р Е Д Г О В О Р

Збиркава содржи решени примери и задачи за вежбање по обични и парцијални диференцијални равенки, а и елементи од операционото сметање (лапласова и фурјеова трансформација) што се предвидени со наставната програма по предметот математика III на Машинскиот факултет. Овие содржини се изучуваат и на Електротехничкиот факултет во соодветните предмети по математика.

Во збиркава се вклучени 1100 (нумерирани) задачи, од кои околу 250 се решени во подробности.

Задачите се распоредени по глави, чии наслови се идентични со насловите на главите во учебникот "Диференцијални равенки со примери и задачи",кн. I, од Н. Целакоски. Тие го илустрираат и го дополнуваат тој материјал, па во таа смисла, двете книги претставуваат целина. Повикувањата во задачите на соодветни формули или резултати се однесуваат на тој учебник.

Некои задачи во збиркава се однесуваат на материјал што не е предвиден со наставната програма. Таков е случајот со Гл. 6, со поголемиот дел од задачите во Гл. 4 и извесен број задачи во Гл. 5. Покрај тоа, на крајот од секоја глава се наведуваат задачи што се вонекоја смисла потешки од другите (тие се издвоени со знакот ***). Сите тие се ставени за дополнување и проширување.

Задачите за вежбање се снабдени со одговори, а некои од нив и со упатства.

Краток список на користените збирки или учебници е наведен на крајот од збиркава.

Забелешките и сугестиите за подобрување на квалитетот на збиркава ги прифаќам со благодарност.

Скопје, март 1983
март 1988

А в т о р о т

С О Д Р Ж И Н А

Глава 1

ПОЧЕТНИ ПОИМИ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 1

1.1. Да се покаже дека функцијата $y = y(x)$, определена со врската $\ln y = Ce^x + 2e^{-x}$, (C = конст.) е интеграл на ДР $yy'' - y'^2 - y^2\ln y = 0$.

Дали тој е општ интеграл?

Решение. Имаме: $y'/y = Ce^x - 2e^{-x}$, т.е. $y' = y(Ce^x-2e^{-x})$ и $y'' = y'(Ce^x-2e^{-x}) + y(Ce^x+2e^{-x}) = y(Ce^x-2e^{-x})^2 + y(Ce^x+2e^{-x})$,
па заменувајќи во левата страна од дадената ДР, добиваме

$$y^2(Ce^x-2e^{-x})^2 + y^2(Ce^x+2e^{-x}) - y^2(Ce^x-2e^{-x})^2 - y^2\ln y = y^2(Ce^x+2e^{-x}-\ln y) =$$

$$= \left[\text{поради } Ce^x+2e^{-x} = \ln y\right] \equiv 0.$$

Значи, дадената функција (идентички) ја задоволува дадената ДР, т.е. е нејзин интеграл.

Овој интеграл не е општ, зашто содржи само една произволна константа. Имено, дадената ДР е од втор ред, па нејзиниот општ интеграл треба да содржи две произволни константи (в. §1.2.).

1.2. Произволните константи $C_1,\dots,C_n$ во една врска $\phi(x,y,C_1,\dots,C_n) = 0$ се викаат суштински (или независни) ако не е можно тие да се заменат со помал број константи.

Да се покаже дека во секоја од следниве релации само една од произволните константи A,B е суштинска

а) $y = \cos x + A + B$; б) $y = A\sqrt{Bx}$ $(B>0, x>0)$;

в) $y^2 + Ae^{x+B} = x$; г) $y = A + \ln Bx$ $(B>0, x>0)$.

Решение. а) Бидејќи $A+B$ може да се замени само со една произволна константа, на пример $C = A+B$, следува дека во дадената релација е вклучена само една суштинска произволна константа.

б) $y = A\sqrt{Bx} = A\sqrt{B}\sqrt{x} = C\sqrt{x}$, каде што $C = A\sqrt{B}$.

в) Бидејќи $Ae^{x+B} = Ae^Be^x$, имаме само една суштинска произволна константа $C = Ae^B$.

г) $y = A + \ln Bx = A + \ln B + \ln x = C + \ln x$, каде што $C = A + \ln B$.

1.3. Дадена е ДР $y'' - 3y' + 2y = 0$. Да се провери која од следниве функции е нејзино решение:

а) $y = e^{-x}$; б) $y = Ae^{x+B}$; в) $y = Ae^{x} + Be^{2x}$,

каде што A и B се произволни константи.

Дали некое од нив е општо решение на дадената ДР?

Решение. За секоја од тие функции ги наоѓаме y', y'' и, заедно со неа, ги заменуваме во дадената ДР. Имаме:

$$а)\ y = e^{-x},\quad y' = -e^{-x},\quad y'' = e^{-x};$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} - 3(-e^{-x}) + 2e^{-x} = 6e^{-x} \neq 0;$$

$$б)\ y = Ae^{x+B} = y' = y'';$$

$$y'' - 3y' + 2y = Ae^{x+B} - 3Ae^{x+B} + 2Ae^{x+B} = 0;$$

$$в)\ y = Ae^{x} + Be^{2x},\quad y' = Aex + 2Be^{2x},\quad y'' = Ae^{x} + 4Be^{2x};$$

$$y'' - 3y' + 2y = Ae^{x} + 4Be^{2x} - 3Ae^{x} - 6Be^{2x} + 2Ae^{x} + 2Be^{2x} \equiv 0;$$

значи, функцијата $y = e^{-x}$ не е решение, а $y = Ae^{x+B}$ и $y = Ae^{x} + Be^{2x}$ се решенија на дадената ДР.

Една функција $y = \phi(x)$ е општо решение на дадена ДР од n-ти ред ако $\phi(x)$ е решение на таа ДР и ако содржи n суштински (т.е. независни) произволни константи.

Во конкретниот случај, функцијата $y = Ae^{x} + Be^{2x}$ е општо решение на дадената ДР, зашто е нејзино решение и содржи две независни произволни константи. И функцијата $y = Ae^{x+B}$ содржи две произволни константи A и B, но само една е суштинска, т.е. тие се зависни: $y = Ae^{x+B} = Ce^{x}$, каде што $C = Ae^{B}$ (в. 1.2), па решението $y = Ae^{x+B}$ не е општо.

1.4. Да се провери дали функцијата а) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; б) $y = A\cos(x+B)$ е(општо) решение на ДР $y'' + y = 0$.

Решение. Имаме:

$$а)\ y'' + y = (-C_1\cos x - C_2\sin x) + (C_1\cos x + C_2\sin x) \equiv 0,$$

$$б)\ y'' + y = \left[-A\cos(x+B) + A\cos(x+B)\right] \equiv 0,$$

што значи дека наведените функции се решенија на дадената ДР. Секоја од нив содржи по две меѓусебно независни произволни константи, па секоја од нив е општо решение на дадената ДР.

Дали тоа значи дека ДР $y'' + y = 0$ има две општи решенија?! Не, зашто функцијата под б) е само друга форма на функцијата под а): $A\cos(x+B) = A[\cos x \cos B - \sin x \sin B] = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, каде што $C_1 = A\cos B$, $C_2 = -A\sin B$.

1.5. Да се најде ДР на фамилијата криви $x^2+y^2 = Cx$ (кружници што имаат центар на апсцисната оска и минуваат низ координатниот почеток).

Решение. Ќе ја елиминираме произволната константа C од дадената равенка и од нејзината "изводна" равенка, т.е. од системот

$$x^2+y^2 = Cx, \qquad 2x+2yy' = C.$$

Заменувајќи го C од втората во првата равенка, добиваме

$$x^2+y^2 = (2x+2yy')x, \text{ т.е. } 2xyy' = y^2-x^2.$$

Значи, на дадена еднопараметарска фамилија криви ѝ одговара ДР од прв ред (и обратно: на дадена ДР од прв ред и соодветствува еднопараметарска фамилија криви, чија равенка го претставува општиот интеграл на дадената ДР).

1.6. Да се покаже дека фамилијата

$$y = C_1x^2 + C_2(x-1) \tag{1}$$

е решение на ДР

$$(x^2-2x)y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0. \tag{2}$$

Притоа да се најде онаа интегрална крива на (2) што минува низ точката (1,1) и наклонот (т.е. коефициентот на правецот) на тангентата во таа точка е 2.

Решение. Заменувајќи ги во (2) функцијата (1) и нејзините изводи $y' = 2C_1x + C_2$, $y'' = 2C_1$, добиваме

$$(x^2-2x)\cdot 2C_1-(2x-2)(2C_1x+C_2) + 2(C_1x^2 + C_2x - C_2) = 2C_1x^2 - 4C_1x - -(4C_1x^2+2C_2x-4C_1x-2C_2) + (2C_1x^2+2C_2x-2C_2) \equiv 0,$$

што значи дека (1) е решение на (2). Бидејќи содржи две суштински произволни константи, тоа е општо решение на (1).

Заменувајќи ги почетните услови $y = 1$ и $y' = 2$ при $x = 1$ во (1) и во нејзината изводна равенка $y' = 2C_1x + C_2$, го добиваме системот

$$1 = C_1, \qquad 2 = 2C_1 + C_2,$$

од каде што имаме $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Според тоа, соодветното партикуларно решение е $y = x^2$, т.е. бараната интегрална крива е параболата $y = x^2$.

1.7. Да се најде општ интеграл на равенката

$$e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1-e^x) \sec^2 y\,dy = 0.$$

Решение. Делејќи ја со $(1-e^x)\mathrm{tg}y$ (в. §1.3), добиваме

$$\frac{e^x}{1-e^x}dx + \frac{1}{\mathrm{tg}y}\sec^2 y dy = 0,$$

т.е.

$$\frac{d(\mathrm{tg}y)}{\mathrm{tg}y} = \frac{d(1-e^x)}{1-e^x}.$$

По интегрирањето добиваме

$$\ln|\mathrm{tg}y| = \ln|1-e^x| + \ln C,$$

т.е.

$$\mathrm{tg}y = C(1-e^x),$$

што претставува општ интеграл на дадената равенка.

При делењето со $(1-e^x)\mathrm{tg}y$ би можело да се изгуби некое решение: $1-e^x = 0$ и $\mathrm{tg}y = 0$, т.е. $x = 0$ и $y = k\pi$, к-цел број. Очигледно, $x = 0$ и $y = k\pi$ се решенија на дадената диференцијална равенка; $y = k\pi$ е опфатено во општиот интеграл (при $C = 0$), додека $x = 0$ - не е, па $x = 0$ е сингуларно решение.

1.8. Една крива, чија равенка е $y=f(x)$, минува низ точката (0,1) и ја задоволува ДР

$$(1+x^2)y' = x(1+y). \tag{1}$$

Да се најде вредноста на $f(x)$ за $x=\sqrt{3}$.

Решение. Ги раздвојуваме променливите во (1):

$$\frac{dy}{1+y} = \frac{x}{1+x^2}dx$$

и добиваме $\ln(1+y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C$, т.е.

$$y = C\sqrt{1+x^2} - 1. \tag{2}$$

Ставајќи $x=0$, $y=1$ добиваме $C=2$, па $f(x) = 2\sqrt{1+x^2}-1$; значи, $f(\sqrt{3})=2\sqrt{1+3}-1 = 3$.

1.9. Да се најде општиот интеграл на ДР $y' = (4x+y-1)^2$. Потоа да се најде равенката на онаа интегрална крива што минува низ точката (0,1).

Решение. Дадената ДР е од типот (4) во §1.3. Ставајќи $u = 4x+y-1$, добиваме $du = 4dx+dy$, т.е. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 4$, па заменувајќи во дадената ДР, имаме

$$\frac{du}{dx} - 4 = u^2, \text{ т.е. } \frac{du}{u^2+4} = dx;$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{u}{2} = x + \frac{C}{2}, \text{ т.е. } u = 2\mathrm{tg}(2x+C),$$

па $4x+y-1 = 2\mathrm{tg}(2x+C)$. Значи, општиот интеграл е $y = 1-4x+2\mathrm{tg}(2x+C)$.

За $x = 0$, $y = 1$ добиваме $0 = 2\mathrm{tg}C$, па $C = k\pi$, k-цел број. Бидејќи

$tg(2x+k\pi) = tg2x$, бараната интегрална крива е определена со равенката $y = 1 - 4x + 2tg2x$.

1.10. Да се најде општиот интеграл на ДР

$$2xydx + (y^2-x^2)dy = 0. \qquad (1)$$

Решение. Дадената ДР може да се напише во формата

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \quad \text{т.е.} \quad y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2} \qquad (2)$$

($x^2 \neq y^2$), што значи дека таа е хомогена (§1.4). Ставајќи $y = ux$, $y' = u'x + u$ во (2), добиваме

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1-u^2}{u^3+u}\,du = \frac{dx}{x} \qquad (3)$$

($x \neq 0$), а таа е ДР со раздвоени променливи. Бидејќи

$$\frac{1-u^2}{u^3+u} = \frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1},$$

интегралот на (3) ќе биде

$$\ln|u| - \ln(u^2+1) = \ln|Cx|, \quad \text{т.е.} \quad u^2+1 = \frac{u}{Cx}.$$

Поради смената $u=y/x$, добиваме $y^2/x^2 + 1 = y/Cx^2$, т.е. $x^2 + y^2 = y/C$. Значи, бараниот општ интеграл е $x^2+y^2 = yC_1$ $(C_1 = 1/C)$.

1.11. Да се интегрира равенката

$$(2x-y+1)dx + (x-2y-1)dy = 0.$$

Решение. Оваа равенка можеме да ја напишеме во обликот (3) од §1.4:

$$y' = \frac{-2x+y-1}{x-2y-1}.$$

Решението на системот

$$-2\alpha + \beta - 1 = 0, \quad \alpha - 2\beta - 1 = 0$$

е парот $\alpha = -1$, $\beta = -1$, па ставајќи

$$x = \xi - 1, \quad y = \eta - 1, \text{ (значи и } dx = d\xi,\ dy = d\eta),$$

дадената равенка добива облик

$$(2\xi - \eta)d\xi + (\xi - 2\eta)d\eta = 0,$$

т.е. станува хомогена. Ставајќи $\eta = \xi u$, $d\eta = ud\xi + \xi du$, добиваме

$$(2\xi - \xi u)d\xi + (\xi - 2\xi u)(ud\xi + \xi du) = 0,$$

а по средувањето

$$\frac{2u-1}{u^2-1}du = -2\,\frac{d\xi}{\xi};$$

по интегрирањето добиваме

$$\ln(u^2-1) - \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} = -2\ln\xi + \frac{1}{2}\ln C,$$

т.е. $(u^2-1)^2\cdot\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = \frac{C}{\xi^4}$, а ставајќи $u = \eta/\xi$, $\xi = x+1$, $\eta = y+1$, добиваме

$$(y-x)(x+y+2)^3 = C.$$

1.12. Да се најде диференцијалната равенка чиј општ интеграл е функцијата

$$y = \frac{1}{12}(C_1+x)^4 + C_2x + C_3$$

(C_1, C_2, C_3 - произволни константи).

Решение. Дадената функција ја диференцираме три пати, а потоа ги исклучуваме параметрите C_1, C_2, C_3;

$$y' = \frac{1}{3}(C_1+x)^3 + C_2,\ y'' = (C_1+x)^2,\ y''' = 2(C_1+x);$$

од последнава имаме $C_1 = \frac{1}{2}y''' - x$, па заменувајќи го C_1 во претпоследното равенство, добиваме $y'''^2 = 4y''$, што претставува бараната диференцијална равенка.

1.13. Да се најде ДР од втор ред чие решение е функцијата

$$y = \ln(\sin x).$$

Решение. Имаме: $y' = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg}x$, $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{ctg}^2x)$, од каде што веднаш добиваме $y'' = -(1+y'^2)$, т.е. $y'' + y'^2 + 1 = 0$.

1.14. Една крива L е дефинирана со условот: наклонот на тангентата во произволна точка $M(x,y)$ од L е еднаков на збирот од координатите во M. Да се изрази тој услов во вид на диференцијална равенка.

Решение. Бидејќи наклонот на тангентата на L во $M(x,y)$ е $y' = y'(x)$, од една страна и $x+y$, според условот на задачата, добиваме дека ДР што го претставува тој услов е $y' = x+y$.

1.15. Да се состави ДР на фамилијата кружници чиј центар лежи на апсцисната оска.

Решение. Равенката на кружницата со радиус r и центар во точката (p,q) е

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Бидејќи центарот на кружницата лежи на оската $0x$, следува дека $q = 0$, па равенката на фамилијата такви кружници е

$$(x-p)^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

каде што p и r се менуваат во $\mathbb{R}$.

За да ја најдеме ДР на таа фамилија, ќе ги елиминираме произволните константи p и r од (1) и нејзините две (први) изводни равенки:

$$x-p + yy' = 0, \qquad 1 + y'^2 + yy'' = 0. \tag{2}$$

Последната од равенките (2) не содржи произволни константи, па со неа е извршена нивната елиминација. Следствено, ДР на фамилијата кружници со центар на апсцисната оска е $yy'' + y'^2 + 1 = 0$.

1.16. Честица со маса m се движи по права линија (x-оската) под дејство на: 1) сила, пропорционална со нејзиниот отклон x од една фиксна точка O, насочена кон O и 2) сила на отпор, пропорционална со брзината на честицата. Да се изрази вкупната сила со помош на диференцијална равенка.

Решение. Првата сила може да се претстави со $-k_1x$, а втората со $-k_2\cdot\frac{dx}{dt}$, каде што k_1 и k_2 се коефициенти на пропорционалноста. Вкупната сила (маса по забрзување) ќе биде дадена со:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2\frac{dx}{dt}.$$

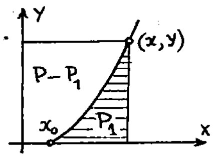
1.17. Сто грама шеќерна трска во вода се претвораат во декстроза со брзина што е пропорционална на непретвореното количество. Да се најде ДР што ја изразува брзината на претвореното по t минути.

Решение. Да го означиме со q бројот на грамовите претворени по t минути. Тогаш $(100-q)$ е бројот на грамовите непретворена материја, па брзината на претворањето е дадена со $\frac{dq}{dt} = k(100-q)$, каде што k е константа на пропоеционалноста.

1.18. Да се најде равенката на фамилијата криви коишто го имаат следново својство: ако низ произволна точка од некоја крива се повлечат прави, паралелни со координатните оски, до пресекот со тие оски, се добива правоаголник, поделен со кривата на два дела, чии плоштини се во однос 1:2.

Решение. Плоштината на правоаголникот да ја означиме со P, а на помалиот од деловите - со P_1 (црт. 1). Тогаш

$$\frac{P_1}{P-P_1} = \frac{1}{2}, \qquad 2P_1 = P-P_1, \quad \text{т.е.} \quad P = 3P_1.$$



Бидејќи $P = xy$, а $P_1 = \int_{x_0}^{x} y dx$, $(y = y(x))$, имаме

$$xy = 3\int_{x_0}^{x} y dx,$$

Црт. 1

од каде што, диференцирајќи по x, добиваме $y + xy' = 3y$; оваа ДР се сведува на ДР со раздвоени променливи:

$$\frac{dy}{y} = 2\,\frac{dx}{x},$$

чиешто општо решение е $y = Cx^2$.

Но, можевме да земеме делот P_1 да биде "одозгора" (црт. 1); во тој случај $P_1 = \int_{y_0}^{y} x dy$ $(x = x(y))$, па

$$xy = 3\int_{y_0}^{y} x dy, \text{ т.е. } x + yx' = 3x, \text{ т.е. } \frac{dx}{x} = 2\,\frac{dy}{y},$$

чијшто општ интеграл е $y^2 = Cx$.

Значи, особината од условот на задачата ја имаат двете фамилии криви: $y = Cx^2$ и $y^2 = Cx$.

1.19. Во еден сад има 150 л раствор, во кој се содржат 12 кг чиста сол. Растворот се разблажува со рамномерно сипење чиста вода во садот со брзина 4 л/мин. и истовремено со рамномерно одливање на ратворот со брзина 2 л/мин. Колку чиста сол ќе остане во растворот по 25 мин од почнувањето на процесот?

Решение. Да го разгледаме процесот во некој момент t(мин) и нека во тој момент останале x кг сол. Количеството раствор во моментот t ќе биде $(150+2t)$л (бидејќи се сипени $4t$, а се одлиени $2t$ л). Сметајќи дека во секој момент растворот се одржува хомоген, концентрацијата на солта ќе биде $\frac{x}{150+2t}$. Ако на t му додадеме нараснување Δt, тогаш x ќе добие нараснување Δx, кое го изразува количеството на сол што истекла од садот за времето од t до $t+\Delta t$. Претпоставуваме дека процесот тече рамномерно во бесконечно малиот интервал $[t,t+\Delta t]$, $(\Delta t\to 0)$ и го земаме главниот дел dx од нараснувањето Δx. Бидејќи во 1 л раствор има $\frac{x}{150+2t}$ кг сол, а во минута истекуваат 2л раствор, тогаш би истекле $\frac{2x}{150+2t}$кг сол во единица време (1 мин). Но, претпоставката за рамномерност се прави во однос на времето од dt минути, па според тоа

$$\frac{2x}{150+2t}\,dt = -dx, \tag{*}$$

(знакот минус се зема затоа што $dx < 0$). Од (*) имаме:

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{dt}{2(75+t)}.$$

$$\ln|x| = -\ln|75+t| + \ln C$$

$$x = \frac{C}{75+t}.$$

Од почетниот услов $x=12$ кг при $t = 0$ имаме $C = 900$, па $x = \frac{900}{75+t}$.

Според тоа, по 25 мин од почнувањето на процесот ќе остане

$$x = \frac{900}{100} = 9 \text{ кг сол.}$$

1.20. (Њутнов закон на ладење) Едно тело е загреано до температура T_o, а се наоѓа во средина којашто има постојана температура T_c $(T_c < T_o)$. Да се најде законот според кој се менува температурата T на телото и времето t на оладувањето.

Решение. Температурата на телото, во моментот t, нека е T. Според Њутновиот закон за ладење, брзината на промената на температурата, т.е. $\frac{dT}{dt}$, е пропорционална со разликата $T - T_c$, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c), \tag{1}$$

каде што k е коефициентот на пропорционалноста, којшто зависи од физичките својства и од геометриската форма на телото, а знакот минус се зема бидејќи со растење на t, температурата T се намалува. Имаме:

$$\frac{dT}{T-T_c} = -kdt; \quad \ln(T-T_c) = -kt + \ln C; \tag{2}$$

$$T = T_c + Ce^{-kt}. \tag{3}$$

Од $T = T_o$ при $t = 0$, добиваме $C = T_o-T_c$, па законот на ладење на телото ќе биде

$$T = T_c + (T_o-T_c)e^{-kt}. \tag{4}$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 1

1.21. Да се провери дали дадената функција $y = y(x)$ е интеграл на назначената ДР:

а) $y = 2/x + C$, $\quad xy'' + 2y' = 0$;

б) $y^2 = 2x$, $\quad xy'^2 - 1 = 0$;

в) $C(y+C)^2 = x^3$, $\quad 8xy'^3 - 12yy'^2 - 27x = 0$;

г) $y^2 - x^2 - Cy = 0$, $\quad y'(x^2+y^2) = 2xy$;

д) $y = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + Ce^x$, $\quad y''' - y = \sin x$;

ѓ) $y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$, $\quad xy'' + 2y' + xy = 0$.

1.22. Да се покаже дека наведените интеграли на ДР од задачата 1.21 се општи интеграли само во в), г) и ѓ).

1.23. Да се најде ДР од прв ред, таква што дадената функција да е нејзино решение (во д) и ѓ) се смета $y=y(x)$, определена имплицитно):

а) $y = e^{-x}$; б) $y = \ln x$; в) $y = \cos x$;

г) $y = \operatorname{tg} x$; д) $x^2+y^2 = 1$; ѓ) $2xe^y + x^2-y^2 = 5$.

1.24. Да се најде ДР од втор ред што е задоволена од функцијата:

а) $y = 3x$; б) $y = e^x$; в) $y = \sin x$.

1.25. Знаејќи го општиот интеграл на приложената ДР, да се најде партикуларниот интеграл што одговара на зададените почетни услови.

а) $y = xy' + x^2$, $y = Cx - x^2$, $y(1) = -1$;

б) $x^2y''+ xy' = y$, $y = C_1x + C_2/x$, $y(2) = -1$, $y'(2) = -3/2$;

в) $y(\ln y-1)y'' = (\ln y+1)y'^2$, $\ln y = 1-1/(C_1x+C_2)$,
$y = y' = 1$ при $x = 1$;

г) $2y'y''' = y''^2 + 1$, $12(C_1y-x) = C_1^2(x+C_2)^3 + C_3$,
$y = 0$, $y' = y'' = 1$ при $x = 0$.

1.26. Функцијата $y = C_1 + C_2/x$ е општо решение на ДР $xy'' + 2y' = 0$ (спореди со а) од 1.21). Да се најде онаа интегрална крива што минува низ точката $(1,2)$, а наклонот на тангентата во таа точка е -2.

1.27. Честица со маса m се движи по права (оската Ox), под дејство на сила F што зависи од времето t, како што е назначено, со дадените почетни услови. Да се најде положбата $x_1 = x(t_1)$ во времето t_1.
(Величините k,ω,b подолу се позитивни константи, а $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.)

а) $F = kt^3$, $x = x_o$, $v = v_o$ за $t = 0$;

б) $F = k\sin\omega t$, $x = v = 0$ за $t = 0$;

в) $F = ke^{-bt}$, $x = v = 0$ за $t = 0$.

1.28. Да се состави диференцијалната равенка на дадената фамилија криви (C, C_1, C_2, C_3 се произволни константи):

а) $y = \ln(C+e^x)$; б) $2y = Cx^2 + 1/C$;

в) $(y-C)^2 = 4Cx$; г) $y = C_1x + C_2e^{-2x}$;

д) $y = \frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x)$; ѓ) $y = C_1 + C_2\ln x + C_3x^3$.

1.29. Да се најде ДР на двопараметарската фамилија криви $ax^2 + by^2 = 1$.

1.30. Да се најде ДР на фамилијата хиперболи $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$.

1.31. Да се „елиминираат" знаците cos и ln од равенката $y = \cos(\ln x)$. (в. 1.13.)

1.32. Да се состави ДР на фамилијата кружници што

а) ги допираат двете координатни оски;

б) ја допираат апсцисната оска.

1.33. Да се состави ДР на фамилијата параболи, чија оска е

а) паралелна со оската Ox, а темето им е во точката $(1,2)$;

б) паралелна со оската Oy и оската минува низ $(1,0)$.

1.34. Да се состави ДР на фамилијата елипси чиј центар е во координатниот почеток (сп. 1.29).

1.35. Да се изрази во форма на ДР следниов закон:

а) населението P од еден град се зголемува со брзина што е пропорционална со населението и со разликата меѓу 100.000 и населението.

б) за некоја материја, брзината на промената на притисокот p во зависност од температурата е пропорционална на притисокот и обратно пропорционална на квадратот од температурата.

в) силата F е еднаква со производот од масата m и забрзувањето.

1.36. Да се најде општ интеграл на ДР (при која променливите се раздвојуваат) и по неговото добивање, да се изврши проверка.

а) $(x+x^2y)dx + (y+xy^2)dy = 0$; б) $y' = e^{x+y}$;

в) $2x\sec y dx - dy = 0$; г) $(2xy-x)y' + 2y = 0$;

д) $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$; ѓ) $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$;

е) $2yy'\sin y = \cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}$; ж) $y = \ln(1+y')$;

з) $d\rho - \rho d\phi = 0$; ѕ) $\sin\phi d\rho + \rho\cos\phi d\phi = 0$.

1.37. Да се најде партикуларниот интеграл на дадената ДР при назначените почетни услови и да се изврши проверка на добиениот резултат.

а) $x(1+2y)dx + (1+x^2)dy = 0$, $y = 3$ за $x = 2$;

б) $xdy - y\ln y dx = 0$; $y(1) = e$;

в) $xy' - y = y^2$, $y(-1) = 1$;

г) $(1+x^2)dy = \sqrt{1-y^2}dx$, $y(1) = \sqrt{2}/2$;

д) $d\rho - \rho\, tg\phi d\phi = 0$, $\rho = 1$ за $\phi = 0$.

1.38. Една крива, чијашто равенка е $y = f(x)$, минува низ точките $(1,1)$ и $(2,16)$ и ја задоволува ДР $y' - ky = ky\ln x$. Да се најде ординатата кога $x = 3$.

1.39. Избирајќи погодна смена, дадената ДР да се сведе на ДР со раздвоени променливи, а потоа да се најде нејзиниот општ интеграл:

а) $(x+y)^2y' = 9$; б) $y' = (x+y+1)^2$;
в) $(x+y)^2y' = 2(x+y+1)$; г) $(x-y)y' = 1-3x+3y$.

1.40. Користејќи ја дадената смена, да се реши ДР:

а) $x^2(1-xy)dy = (1+xy)dx, \quad xy = u, \quad u = u(x)$;
б) $x(x^2y^2-xy-2)y' + (x^2y^2-1)y = 0, \quad xy = u$;
в) $(x^2+x)dy = (x^2+2xy+y)dx, \quad y = ux$;
г) $xy' - 2y = x^2, \quad yu = x^2$;
д) $\frac{x}{y}(dx+dy) + (x+y)(ydx-xdy) = 0, \quad v = x + y, \quad w = \frac{x}{y}$;
ѓ) $y(1+xy)dx + x(1-xy)dy = 0, \quad v = xy, \quad w = \frac{x}{y}$.

1.41. Да се покаже дека ДР

$$[(x^2+y^2-b)y + ax]dx - [(x^2+y^2-b)x - ay]dy = 0,$$

каде што a и b се параметри, со смената $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ се претвора во ДР при која променливите се раздвојуваат. Да се најде општиот интеграл за $a = 2$, $b = 0$.

1.42. Да се најде равенката на таква крива, којашто минува низ точката (0,1), а наклонот на тангентата во која било нејзина точка е еднаков со ординатата на таа точка, зголемена за две единици.

1.43. а) Да се најде равенката на таква крива, сите нормали на која минуваат низ дадена точка (a,b).

б) Нормалата во произволна точка M на една крива ја сече оската OX во точката A, и OY - во B, при што M ја дели отсечката AB во даден однос k. Покажи дека кривата припаѓа на една фамилија коаксијални елипси и хиперболи.

1.44. Да се покаже дека дадената ДР е хомогена; потоа да се најде нејзиниот општ интеграл и да се изврши проверка на добиениот резултат.

а) $x^2y' = x^2+y^2+xy$; б) $xy^2dy = (y^3-x^3)dx$;
в) $xy' = y(1+\ln y-\ln x)$; г) $y = xy' + x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$;
д) $(y^4-2x^3y)dx + (x^4-2xy^3)dy = 0$;
ѓ) $xdy-ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$;
е) $(ay-bx)y' = ax-by$ (a,b се фиксирани константи).

1.45. Да се интегрираат ДР

а) $(3x+3y-2)dx + (2x+2y+1)dy = 0$;
б) $(4x+3y+2)dx + (5x+4y+1)dy = 0$;

в) $y' = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$; г) $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$;

д) $(y'+1)\ln \dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3}$.

1.46. Да се најде партикуларниот интеграл на дадената ДР при назначените почетни услови.

а) $(y^2-3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y = 1$ за $x = 0$;

б) $y' = \dfrac{x - y + 2}{x - y - 3}$; $y(0) = -3$; $y' = \dfrac{2(x-2y-5)}{y-5x + 7}$, $y(1) = -1$.

1.47. Да се докаже дека интегралните криви на ДР

$$(ax+by+p)dx + (ay-bx+q)dy = 0$$

се логаритамски спирали, $\rho = Ce^{b\phi/a}$.

1.48. Да се најде равенката на кривата што минува низ координатниот почеток и наклонот на тангентата во произволна точка (x,y) ѝ е $-y/(x+y)$.

1.49. Да се најде равенката на фамилијата криви за кои субнормалата во произволна точка (x,y) е аритметичка средина од апсцисата и ординатата.

1.50. Да се најде равенката на кривата што минува низ точката $(1,1)$ и го има својството: тангентата во произволна точка (x,y) зафаќа со оската $0x$ двојно поголем агол од аголот α што го зафаќа радиус-векторот на (x,y) со $0x$.

1.51. Да се најде равенката на фамилијата криви за кои аголот α, образуван од тангентата и радиус-векторот на допирната точка (x,y), е константен ($tg\alpha=a$).

* * *

1.52. Едно бротче го забава своето движење под дејство на отпорот на водата, којшто е пропорционален со брзината v на бротчето. Почетната брзина на бротчето е 5м/сек, а неговата брзина по 40 сек е 2м/сек. По колку време брзината ќе се намали на 0,32м/сек?

1.53. (Вертикален истрел). Едно тело е фрлено вертикално нагоре од земјата со почетна брзина 5880 см/сек. Занемарувајќи го отпорот на воздухот, да се најде: а) максималната височина што ќе ја достигне, б) вкупното време што е потребно за да се врати на почетната точка.

1.54. (Паѓање на тело). Едно тело, од мирување, паѓа вертикално при што отпорот на воздухот е пропорционален со брзината v. Да се најде: а) брзината и изминатиот пат s за време $t > 0$, б) најголемата брзина.

1.55. (Брзина на "бегство од земјата"). Равенката на движењето на тело што се издига вертикално, земајќи го предвид гравитационото привлекување, е

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gR^2}{z^2} \tag{1}$$

(Њутнов закон за гравитација) каде што z е неговото растојание од Земјиниот центар во моментот t, а R е Земјиниот радиус. Покажи дека еден прв интеграл на (1) е

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = V^2 - 2gR + 2gR^2/z \tag{2}$$

каде што V е брзината со која телото е лансирано од Земјината површина, а $v = dz/dt$ во моментот t.

Од (2) изведи заклучок дека: ако $V \geq \sqrt{2gR}$, тогаш $v > 0$, т.е. телото никогаш нема да се врати на Земјата; земајќи $g = 9{,}80$ м/сек^2 и $R = 6.400$ км, покажи дека критичната брзина V (брзината на бегство) е околу 11,2 км/сек.

1.56. Еден брод со маса m се движи со брзина V. Во моментот $t = 0$ ги исклучуваат машините. Земајќи дека отпорот на водата е пропорционален со v^n, каде што n е константа и v е брзината, да се најде v како функција од изминатиот пат x во моментот $t > 0$.

1.57. Еден предмет е поставен во $x = a$ $(a>0)$ при $t = 0$. Тој се движи кон $x = 0$ така што неговата брзина е пропорционална на x^n, каде што n е константа. Покажи дека предметот ќе стигне во $x = 0$ ако и само ако $n < 1$.

1.58. (Раствори). Во еден сад има 400 л раствор, во кој има 20 кг од некоја сол. Растворот се разблажува со влевање чиста вода во садот со брзина од 6 л/мин, а исто така со рамномерно одлевање на растворот со брзина 4 л/мин. Колку сол ќе остане во садот по 3 часа и 20 минути?

1.59. Еден сад содржи 500 л чиста вода. Раствор што содржи 0,3 кг сол на литар се влева со брзина од 10 литри во минута и (добро измешаниот раствор) истечува од садот со иста брзина.

а) Колку сол во садот ќе има во моментот t?

б) Кога садот ќе содржи 50 кг сол?

1.60. Во задачата 1.59, колку сол има во садот (којшто е доволно голем) во моментот t, ако растворот истечува со брзина а) 5 л/мин, б) 25 л/мин? Кога садот ќе содржи 50 кг во едниот, а кога во другиот случај?

1.61. (Истечување). Цилиндричен сад, чие дно има плоштина B, е исполнет со вода до висина H, а на дното има отвор со плоштина a. За кое време (T) целото количество вода ќе истече низ отворот? Притоа, да се земе дека брзината на истечувањето е $v = k\sqrt{2gx}$, каде што x е висината на водата во садот во моментот t, g е Земјиното забрзување, а k е коефициент на истечувањето.

1.62. (Њутнов закон за ладење). Едно тело се оладило за време t_1 од T_o на T_1 целзиусови степени во средина (вода што тече, воздух што струи и сл.), чија температура се одржува да биде константна, T_c степени целзиусови. Да се најде времето t за кое телото ќе се олади од T_1 до T_2 целзиусови степени, ако:

	t_1 (мин.)	T_o	T_1	T_c	T_2
а)	5	80^o	70^o	15^o	60^o
б)	30	125^o	75^o	25^o	50^o
в)	15	100^o	70^o	30^o	40^o

1.63. Нека прирастот на населението е пропорционален со бројот на жителите.

а) Да се најде зависноста на населението P и времето t, ако се знае дека во некој момент, земен за почетен, бројот на жителите бил P_o, а за една година се зголемил за $a\%$.

б) Врз таа основа, да се пресмета бројот P_1 на жителите на Југославија на 1.1 2000 година, ако се знае дека на 1.1 1975 година имало 20 милиони жители, а годишниот прираст бил 2%.

в) При условите од б), во која година ќе се удвои бројот на жителите?

1.64. Во некоја култура од бактерии прирастот е пропорционален со бројот на бактериите.

а) Ако се знае дека почетниот број бактерии x_o се удвоил за 4 часови, колку може да се очекуваат на крајот од 12-от час?

б) Ако имало 10^4 на крајот од 3-от час и $4 \cdot 10^4$ на крајот од 5-от час, колку ги имало во почетокот?

1.65. Еден падобранец паѓа со брзина 56 м/сек кога се отвора неговиот падобран. Да се најде неговата брзина v како функција од времето t по отворањето на падобранот, ако отпорот на воздухот бил $Tv^2/196$ кг, каде што T е тежината на падобранецот и падобранот заедно.

Глава 2

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД И ЛИНЕАРНИ ДР ОД ВТОР РЕД СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 2

2.1. Да се реши линеарната ДР од прв ред

$$y' + 3x^2y = 3x^2. \tag{1}$$

Решение. Прв начин. Според формулата (3) од §2.1, имаме

$$y = e^{-\int 3x^2dx}\left[C + \int 3x^2e^{\int 3x^2dx}dx\right] = e^{-x^3}\left[C + \int 3x^2e^{x^3}dx\right] =$$

$$= e^{-x^3}\left[C + e^{x^3}\right] = Ce^{-x^3} + 1.$$

Значи, општото решение е $y = Ce^{-x^3} + 1$.

Втор начин. Општото решение ќе го бараме во облик на производ од две функции (в. и зад. 2.6):

$$y = u(x).v(x), \tag{2}$$

каде што едната функција може да се избере произволно (в. забелешка 1 од §2.1). Диференцирајќи го $y = u.v$ по x: $y' = u'v + uv'$ и заменувајќи во (1), добиваме

$$u'v + uv' + 3x^2uv = 3x^2,$$

$$u'v + u(v' + 3x^2v) = 3x^2. \tag{3}$$

Ќе ја избереме функцијата $v = v(x)$ така што да биде

$$v' + 3x^2v = 0. \tag{4}$$

Раздвојувајќи ги променливите во ДР (4), добиваме

$$\frac{dv}{v} = -3x^2dx, \text{ т.е. } \ln v = -x^3 + C_1.$$

Бидејќи е доволно какво било ненулто решение на (4), можеме да земеме $C_1 = 0$, па за бараната функција v имаме

$$\ln v = -x^3, \text{ т.е. } v = e^{-x^3}.$$

Бидејќи $v = e^{-x^3}$ ја задоволува (4), ДР (3) станува

$$u'v = 3x^2, \text{ т.е. } u'e^{-x^3} = 3x^2, \text{ т.е. } u' = 3x^2e^{x^3},$$

па $u = \int e^{x^3} d(x^3) = e^{x^3} + C$. Заменувајќи ги $u = e^{x^3} + C$ и $v = e^{-x^3}$ во (2), добиваме дека општото решение на (1) е $y = e^{x^3} + C e^{-x^3}$, т.е. $y = 1 + Ce^{-x^3}$.

2.2. Да се интегрира ДР

$$y'\cos x - y\sin x = 2x. \tag{1}$$

Решение. Откако ќе се подели со $\cos x$, ДР (1) го добива видот

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{2x}{\cos x}.$$

Според (3) од §2.1 имаме

$$y = \exp\{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx\} \left[C + \int \frac{2x}{\cos x} \exp\{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx\} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left[C + \int 2x dx\right] = \frac{C+x^2}{\cos x}.$$

(При делењето на (1) со $\cos x$, не се губат решенија.)

2.3. Да се интегрира ДР

$$p(x)y' = p'(x)y - y^2,$$

каде што $p = p(x)$ е дадена функција од x.

Решение. Дадената ДР ќе ја напишеме во формата

$$y' - \frac{p'}{p} y = -\frac{y^2}{p}. \tag{1}$$

ДР (1) е бернулиева, па можеме да ја сведеме на линеарна (в. забелешка 3 од §2.1). Имено, со смената

$$z = y^{-1}, \qquad z' = -y^{-2}y', \tag{2}$$

откако (1) ќе ја помножиме со y^{-2} $(y \neq 0)$, добиваме

$$z' + \frac{p'}{p} z = \frac{1}{p}, \tag{3}$$

којашто е линеарна по z, z', па

$$z = \exp\{-\int \frac{p'}{p} dx\}\left[C + \int \frac{1}{p} \exp\{\int \frac{p'}{p} dx\} dx\right] =$$

$$= e^{-\ln p}\left[C + \int \frac{e^{\ln p}}{p} dx\right] = \frac{1}{p} C + x .$$

Враќајќи се на смената (2), имаме $y = 1/z = p/(C+x)$, т.е. општото решение на (1) е

$$y = \frac{p(x)}{C+x}.$$

а тоа е општото решение и на дадената ДР. Дадената ДР за решение ја има и функцијата $y = 0$ (сингуларно решение).

2.4. Да се најде равенката на онаа интегрална крива на ДР

$$(x+x^2y^2)\ y' + y = 0$$

што минува низ точката (1, -1).

Решение. Дадената ДР може да се напише во обликот

$$ydx + (x+x^2y^2)\ dy = 0,\ \text{т.е.}\ \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}\ x = -yx^2, \qquad (1)$$

а последнава е бернулиева ДР по x, $x' = dx/dy$. Ставајќи

$$x = u(y)v(y),\quad \frac{dx}{dy} = u\,\frac{dv}{dy} + v\,\frac{du}{dy}$$

во (1), добиваме

$$v(\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}\ u) + u\,\frac{dv}{dy} = -y(uv)^2; \qquad (2)$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}\ u = 0 \Longrightarrow \frac{du}{u} = -\ \frac{dy}{y} \Longrightarrow u = \frac{1}{y},$$

па од (2) имаме:

$$\frac{1}{y}\,\frac{dv}{dy} = -y\,\frac{1}{y^2}\,v^2 \Longrightarrow \frac{dv}{v^2} = -dy,$$

што значи дека $\frac{1}{v} = y + C$, т.е. $v = \frac{1}{y+C}$. Според тоа:

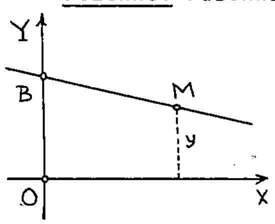
$$x = uv = \frac{1}{y(y+C)},\ \text{т.е.}\ x(y^2 + Cy) = 1$$

е општ интеграл на (1). Од почетните услови: $x = 1$, $y = -1$ добиваме $C = 0$, па равенката на бараната интегрална крива е $x = 1/y^2$.

2.5. Да се најде равенката на фамилијата криви, којашто го има својството: отсечката на оската OY што ја прави тангентата во произволна точка M од кривата е еднаква со квадратот на ординатата. Кои од тие криви минуваат низ (0,0)?

Решение. Равенката на тангентата во точката M е

$$Y - y = y'\ (X - x). \qquad (1)$$



Црт. 1

Ординатата на пресечната точка B на тангентата и оската OY (цртеж. 1) се добива од (1) за $X = 0$, т.е. $Y = y - xy'$. Бидејќи, по услов, имаме $\overline{OB} = y^2$, добиваме $y - xy' = y^2$, т.е. диференцијалната равенка

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2. \tag{2}$$

Добиената ДР е бернулиева. Забележувајќи дека таа е точн ДР (1) од задачата 2.3 при $p(x) = x$, веднаш го пишуваме општото решение на (2):

$$y = \frac{x}{C + x}. \tag{3}$$

Значи, бараната равенка е (3); таа претставува фамилија хиперболи. Бидејќи во (3), при $x = 0$ и за секој $C \neq 0$ се добива $y = 0$, следува дека секоја крива од фамилијата (3), освен $y = 1$ (за $C = 0$), минува низ точката (0,0).

2.6. Да се најде општото решение на ДР

$$y' + ay = f(x) \tag{1}$$

($a = a(x)$) со помош на методот на варијација на произволната константа.

Решение. Лесно се добива дека функцијата

$$v(x) = e^{-\int a dx}$$

е решение на соодветната хомогена ДР

$$y' + ay = 0. \tag{2}$$

Ќе се обидеме да определиме функција $u = u(x)$, таква што

$$y = uv \tag{3}$$

да е општото решение на (1). Овој обид е сугериран од општиот интеграл $Cv(x)$ на хомогената ДР (2), а се состои во заменување на произволната константа C со некоја функција $u(x)$.

Заменувајќи ја (3) во (1), добиваме

$$u'v + u\,(v'+av) = f(x).$$

Бидејќи $v = v(x)$ е решение на (2), ќе имаме $v' + av = 0$, па

$$u'v = f(x), \text{ т.е. } u' = \frac{f(x)}{v(x)},$$

па $u = \int \frac{f}{v}\,dx + C$. Следствено

$$y = uv = v\left(\int \frac{f}{v}\,dx + C\right) = e^{-\int a dx}\left(C + \int f e^{\int a dx} dx\right)$$

е решение на (1), а бидејќи содржи една произволна константа, тоа е општо решение на (1).

2.7. Едно тело со маса m паѓа од состојба на мирување под дејство на гравитацијата во средина со отпор mkv (каде што v е брзината, а k е константа). Да се најде врската меѓу:

а) брзината v и времето t,

б) патот x и времето,

в) патот и брзината.

Решение. Според Вториот Њутнов закон имаме:

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - mkv, \tag{1}$$

при што позитивната насока на движењето е надолу.

а) Равенката (1), која е линеарна по v, dv/dt, ја пишуваме во обликот

$$\frac{dv}{dt} = g - kv; \tag{1'}$$

кога $g - kv = 0$, ќе имаме $dv/dt = 0$, што значи дека брзината станува константна. Таа константна брзина V, наречена крајна брзина, е дадена со формулата $V = g/k$ (од $g - kv = 0$). Од (1'):

$$t = \int \frac{dt}{g-kv} = -\frac{1}{k}\ln(g-kv) + \ln A.$$

Константата A ја определуваме од почетните услови $v = 0$ кога $t = 0$: $0 = \ln A = (1/k)\ln g$, т.е. $\ln A = (1/k)\ln g$, па

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{g-kv}{g}; \quad e^{-kt} = \frac{g-kv}{g}; \quad v = \frac{g}{k}(1-e^{-kt});$$

следствено:

$$v = V(1 - e^{-kt}). \tag{2}$$

б) Бидејќи $v = \frac{dx}{dt}$, од (2) добиваме

$$dx = V(1 - e^{-kt})dt,$$

а по интегрирањето

$$x = V(t + \frac{1}{k}e^{-kt} + B).$$

Константата B ја определуваме од почетните услови $x = 0$ кога $t = 0$: $B = -\frac{1}{k}$ па

$$x = \frac{V}{k}(kt + e^{-kt} - 1). \tag{3}$$

в) За да ја најдеме врската меѓу x и v, можеме да го елиминираме t од (2) и (3), а може и поинаку: забрзувањето dv/dt во (1') можеме да го изразиме вака:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right)\frac{dv}{dt} = v\,\frac{dv}{dx},$$

па (1´) станува

$$v\,\frac{dv}{dx} = g - kv;$$

по интегрирањето: $x = \int vdv/(g-kv) = -v/k - (g/k^2)\ln(g-kv) + C$; бидејќи $v = 0$ кога $x = 0$, добиваме $C = (g/k^2)\ln g$. Според тоа конечно добиваме

$$x = \frac{g}{k^2}\ln\frac{g}{g-kv} - \frac{v}{k}.$$

2.8. Во едно електрично коло се одржува напон $E = 300$ волти, активната отпорност е $R = 150$ оми, а коефициентот на самоиндукцијата е $L = 30$ хенрии. По кое време од моментот на затворањето на колото струјата i ќе достигне 99% од својата гранична вредност?

Решение. Како и во примерот 1 а) од §2.2, ја добиваме линеарната ДР од прв ред

$$L\,\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

чие решение е $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-tR/L})$. Од тоа добиваме $E - Ri = Ee^{-tR/L}$, т.е.

$$t = \frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-Ri}.$$

Бидејќи граничната вредност на i (при $t \to \infty$) е $i = \frac{E}{R}$, од условот на задачата следува дека $i = 0{,}99\,\frac{E}{R}$, па бараното време е

$$t = \frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-0{,}99E} = \frac{30}{150}\ln\frac{300}{300(1-0{,}99)} = \frac{1}{5}\ln 100,$$

т.е. $t \approx 0{,}92$ сек.

2.9. Еден кондензатор со капацитивност C фаради, наполнет до напон u_o, се празни низ отпорник со R оми. Да се најде напонот u во моментот t.

Решение. Според Омовиот закон имаме $u = Ri$, каде што струјата $i = i(t)$ ја наоѓаме како решение на диференцијалната равенка

$$R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = 0,$$

т.е. $i = Ae^{-t/RC}$ (в. пр. 2 од §2.2, при $de/dt = 0$), каде што A е произволна константа. Така, $u = RAe^{-t/RC}$ и, бидејќи $u = u_o$ при $t = 0$, добиваме $u_o = RA$, т.е. $A = \frac{1}{R}u_o$. Значи, $u = u_o e^{-t/RC}$.

2.10. Ако A и B се константи, тогаш

а) $A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}.\cos(x-\delta)$, $tg\delta = \frac{B}{A}$;

б) $A\sin x \pm B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}.\sin(x\pm\delta)$, $tg\delta = \frac{B}{A}$;

в) $A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}.\sin(x\pm\delta)$, $tg\phi = \pm\frac{A}{B}$.

Докажи!

Решение. Нека $C = \sqrt{A^2+B^2}$. Според адиционите теореми, добиваме:

а) $C\cos(x-\delta) = C\cos\delta\cos x + C\sin\delta\sin x = A\cos x + B\sin x$,

б) $C\sin(x\pm\delta) = C\cos\delta\sin x \pm C\sin\delta\cos x = A\sin x \pm B\cos x$,

каде што: $A = C\cos\delta$, $B = C\sin\delta$, така што $A^2 + B^2 = C^2$, $tg\delta = \frac{B}{A}$.

в) Ако во б) ставиме $B = C\cos\delta$, $A = C\sin\delta$, добиваме

$$C\sin(x\pm\delta) = A\cos x + B\sin x, \quad tg\delta = \pm\frac{A}{B}.$$

2.11. Да се најде партикуларното решение на ДР

$$2y'' - y' - y = 0, \tag{1}$$

што ги задоволува условите $y = -3$, $y' = 0$ за $x = 0$. Дали тоа решение има максимум?

Решение. Корените на карактеристичната равенка $2r^2 - r - 1 = 0$ се $r_1 = 1$, $r_2 = -1/2$, па општото решение е

$$y = Ae^x + Be^{-x/2}.$$

Од тоа и од $y' = Ae^x - \frac{B}{2}e^{-x/2}$, ставајќи $x = 0$, $y = -3$ и $y' = 0$ добиваме

$$A + B = -3, \quad A - \frac{B}{2} = 0,$$

од каде што $A = -1$, $B = -2$. Значи, бараното партикуларно решение е

$$y = -e^x - 2e^{-x/2}. \tag{2}$$

Од $y' = -e^x + e^{-x/2} = 0$ добиваме $e^{3x/2} = 1$, т.е. $x = 0$ е стационарна точка. Бидејќи $y'' = -e^x - \frac{1}{2}e^{-x/2}$ и $y''(0) < 0$, следува дека (2), за $x = 0$, има максимум; $y_{max} = -3$.

2.12. Ако $y'' + 2y' + 2y = 0$ и $y = 0$, $y' = 1$ кога $x = 0$, да се најдат екстремните вредности на $y = y(x)$.

Решение. Корените на карактеристичната равенка $r^2 + 2r + 2 = 0$

се $r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$, па според (6) од §2.3, општото решение е

$$y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x). \tag{1}$$

Потоа, $y' = e^{-x}(-A + B)\cos x + (-A - B)\sin x$, па заменувајќи ги тука и во (1) почетните услови, добиваме

$$0 = 1.(A.1 + B.0), \quad 1 = 1\cdot[(-A+B).1+(-A-B).0],$$

од каде што $A = 0$, $B = 1$. Значи, бараното партикуларно решение е

$$y = e^{-x}\sin x. \tag{2}$$

Од равенката $y' = e^{-x}[\cos x - \sin x] = 0$, добиваме $\cos x - \sin x = 0$, т.е. $\mathrm{tg}x = 1$, па стационарните точки на (2) се

$$x = \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Со помош на вториот извод на (2), $y'' = -2e^{-x}\cos x$, ќе заклучиме за карактерот на стационарните точки (3). Бидејќи $e^{-x} > 0$ за секој x, а $\cos(\pi/4 + m\pi)$ е $\sqrt{2}/2$ за $m = 2k$ и $-\sqrt{2}/2$ за $m = 2k + 1$ (за кој било цел број k), добиваме дека

$$y''(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) < 0, \qquad y''(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi) > 0, \text{ т.е.}$$

а) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$: $y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-(8k+1)\pi/4}$,

б) $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$: $y_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-(8k+5)\pi/4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2.13. Да се најде она решение на ДР

$$3y'' - 7y' + 2y = 0 \tag{1}$$

кое има максимум $y=5$ за $x=0$.

Решение. Карактеристичната равенка е

$$3r^2-7r+2 = 0, \text{ т.е. } (3r-1)(r-2) = 0,$$

па $r_1 = \frac{1}{3}$ и $r_2=2$. Значи, општото решение на (1) е

$$y' = Ae^{x/3} + Be^{2x}. \tag{2}$$

Диференцирајќи ја (2), добиваме

$$y' = \frac{1}{3} Ae^{x/3} + 2Be^{2x}. \tag{3}$$

Бидејќи бараното решение има максимум за $x=0$, следува дека $y'(0)=0$, па ставајќи $x=0$ во (2) и (3), добиваме

$$5 = A + B, \quad 0 = \frac{1}{3} A + 2B,$$

од каде што $A=6$, $B=-1$. Значи, функцијата

$$y = 6e^{x/3} - e^{2x} \tag{4}$$

може да е бараното решение. Бидејќи
$$y'' = \frac{6}{9} e^{x/3} - 4e^{2x}, \quad y''(0) = \frac{6}{9} - 4 < 0,$$
следува дека функцијата (4) има максимум во точката $x=0$, па тоа е бараното решение.

Забелешка. ДР (1) би можеле да ја решиме и поинаку. Имено, ако неа ја напишеме во обликот
$$3 \frac{d}{dx} (y'-2y) - (y'-2y) = 0$$
и ако ставиме $y'-2y=z$, тогаш равенката станува
$$3 \frac{dz}{dx} - z = 0$$
- линеарна ДР од прв ред, чие решение е $z=Ce^{x/3}$. Значи, $y'-2y=Ce^{x/3}$, па
$$y = e^{2x}(D+C\int e^{-2x}\cdot e^{x/3}dx), \text{ т.е.}$$
$$y = -\frac{3}{5} Ce^{x/3} + De^{2x}. \qquad (5)$$
Заменувајќи ги условите кога $x=0$, го добиваме (4).

2.14. Да се реши ДР
$$y'' + 4y = 4x^3 - 2x + 12.$$

Решение. При ознаките од §2.4, имаме $\alpha = \beta = 0$, $m = 3$. Корените на карактеристичната равенка $r^2 + 4 = 0$ се $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$, па $\alpha + i\beta = 0$ не е нејзин корен. Следствено, го имаме случајот 1° од Т.2 во §2.4, па партикуларниот интеграл (п.и.) ќе има форма
$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$
каде што A, B, C, D се неопределени константи. Заменуваме Y, Y', Y'' во дадената равенка и добиваме
$$4Ax^3 + 4Bx^2 + (6A + 4C)\,x + 2B + 4D \equiv 4x^3 - 2x + 12,$$
од каде што: $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, $D = 3$, па
$$Y = x^3 - 2x + 3.$$
Бидејќи комплементарната функција е $\overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, општото решение е
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x^3 - 2x + 3.$$

2.15. Да се реши ДР
$$y'' - 2y' = 8x - 6.$$

Решение. Имаме: $r^2 - 2r = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, па комплементарната функција е $C_1 + C_2e^{2x}$. Бидејќи $\alpha + i\beta = 0 + i0 = 0 = r_1$ е корен на карактеристичната равенка, за п.и., според (6) од §2.4, имаме

$$Y = x(Ax + B).$$

Заменувајќи $Y' = 2Ax + B$ и $Y'' = 2A$ во дадената ДР, добиваме $2A - 4Ax - 2B = 8x - 6$, од каде што $A = -2$, $B = 1$. Значи, $Y = -2x^2 + x$, па општото решение е

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - 2x^2 + x.$$

2.16. Да се реши ДР

$$y'' - 4y' + 4y = 24xe^{2x}.$$

Решение. Имаме: $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r_1 = r_2 = 2$, па комплементарната функција е $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Бројот $\alpha + i\beta = 2 + i.0 = 2$ е двократен корен на карактеристичната равенка, па ја применуваме (6) од §2.4 за п.и.:

$$Y = x^2(Ax + B)\, e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)\, e^{2x};$$

Заменувајќи ги Y, Y' и Y'' во дадената равенка, добиваме

$$(6Ax + 2B)\, e^{2x} = 24xe^{2x},$$

од каде што $A = 3$, $B = 0$, па

$$Y = 4x^3e^{2x}.$$

Значи, општото решение е

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 4x^3e^{2x}.$$

2.17. Да се реши ДР

$$y'' - 2y' + 5y = 12e^x\cos 2x.$$

Решение. Имаме: $r^2 - 2r + 5 = 0$, $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$, па комплементарната функција е $\overline{y} = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x$.

Бидејќи $\alpha + \beta i = 1 + 2i = r_1$ е еднократен (комплексен) корен на карактеристичната равенка, п.и. го бараме во обликот (6) од §2.4:

$$Y = xe^x[A\cos 2x + B\sin 2x].$$

Заменувајќи го во дадената равенка Y и

$$Y' = e^x\left[(Ax + 2Bx + A)\cos 2x + (-2Ax + Bx + B)\sin 2x\right],$$

$$Y'' = e^x\left[(-3Ax + 4Bx + 2A + 4B)\cos 2x + \right.$$
$$\left. + (-4Ax - 3Bx - 4A + 2B)\sin 2x\right],$$

добиваме

$$4Be^x\cos 2x - 4Ae^x\sin 2x \equiv 12e^x\cos 2x,$$

од каде што $4B = 12$, $-4A = 0$, т.е. $B = 3$, $A = 0$, па $Y = xe^x\left[0.\cos 2x + 3\sin 2x\right]$.

Според тоа, општото решение е

$$y = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x + 3xe^x\sin 2x.$$

2.18. Дадена е нехомогената ДР од втор ред

$$ay'' + by' + cy = pe^{qx} \tag{1}$$

$(y = y(x))$, каде што a, b, c, p, q се дадени броеви. Да се покаже дека: ако

$$M = aq^2 + bq + c \neq 0 \tag{2}$$

тогаш

$$Y = \frac{p}{aq^2 + bq + c}.e^{qx} \tag{3}$$

е партикуларен интеграл (п.и.) на (1).

Користејќи го тоа, да се најде п.и. на ДР $y'' + 2y' + y = 8e^{-3x}$.

Решение. Заменувајќи ги во левата страна на (1)

$$Y = \frac{1}{M}pe^{qx}, \quad Y' = \frac{1}{M}qpe^{qx}, \quad Y'' = \frac{1}{M}q^2pe^{qx},$$

добиваме $\left(\frac{aq^2}{M} + \frac{bq}{M} + \frac{c}{M}\right)pe^{qx} \equiv pe^{qx}$, т.е. (3) е решение на (1).

Во конкретниот случај условот (2) е задоволен: $1.(-3)^2 + 2.(-3) + 1 = 4 \neq 0$, па

$$Y = \frac{8}{4}e^{-3x} = 2e^{-3x}$$

е п.и. на дадената ДР. (Да забележиме дека овој метод не може да се примени ако не важи (2)).

2.19. Да се најде општото решение на ДР

$$y'' + 6y' + 9y = 12e^{-x} + 5e^{-2x}.$$

Решение. Комплементарната функција е $(Ax + B)\ e^{-3x}$.

Според забелешката од крајот на §2.4, п.и. на дадената ДР ќе го бараме во обликот $Y = Y_1 + Y_2$, каде што Y_1 е п.и. што одговара на $12e^{-x}$, а Y_2 - на e^{-2x}. Бидејќи $1.q^2 + 6.q + 9 \neq 0$ за $q = -1; -2$, т.е. условот (2) од 2.18 е исполнет, ќе имаме

$$Y_1 = \frac{12}{4}\ e^{-x} = 3e^{-x}, \quad Y_2 = \frac{5}{1}\ e^{-2x} = 5e^{-2x},$$

па $Y = 3e^{-x} + 5e^{-2x}$. Значи, општото решение е

$$y = (Ax + B)\ e^{-3x} + 3e^{-x} + 5e^{-2x}.$$

2.20. Да се најде п.и. за ДР

$$y'' + 4y = \sin 3x.$$

Решение. Ќе ја искористиме Ојлеровата формула

$$\sin 3x = \frac{1}{2i}\ (e^{3ix} - e^{-3ix}),$$

ќе го најдеме п.и. за секој од двата собирока и ќе ги собереме (како во зад. 2.19). Имаме:

а) п.и. за e^{3ix}е: $\dfrac{1}{(3i)^2+4}\ e^{3ix} = -\dfrac{1}{5}\ e^{3ix}$,

б) п.и. за e^{-3ix}е: $\dfrac{1}{(-3i)^2+4}\ e^{-3ix} = -\dfrac{1}{5}\ e^{-3ix}$;

п.и. за $\sin 3x$ е:

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2i}\ (e^{3ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{5}\ \sin 3x.$$

2.21. Да се реши равенката

$$y'' + y' - 2y = e^{x}\cos 2x.$$

Решение. Комплементарната функција е $Ae^{x} + Be^{-2x}$.

За наоѓање п.и. ќе ја искористиме Ојлеровата формула за $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1}{2}\ (e^{ix} + e^{-ix}).$$

Според тоа,

$$e^{x}\cos 2x = \frac{e^{x}}{2}\ (e^{2ix} + e^{-2ix}) = \frac{1}{2}\ e^{(1+2i)x} + \frac{1}{2}\ e^{(1-2i)x}.$$

Бидејќи $(1+2i)^2 + (1+2i) - 2 = -4 + 6i$, $(1-2i)^2 + (1-2i) - 2 = -4 - 6i$, п.и. Y_1 и Y_2 за $\frac{1}{2}\ e^{(1+2i)x}$ и $\frac{1}{2}\ e^{(1-2i)x}$ соодветно, се:

$$Y_1 = \frac{1}{2(-4+6i)}\ e^{(1+2i)x}, \quad Y_2 = \frac{1}{2(-4-6i)}\ e^{(1-2i)x},$$

па

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{e^x}{2}\left[\frac{e^{2ix}}{-4+6i} + \frac{e^{-2ix}}{-4-6i}\right] = \frac{e^x}{52}\cdot\frac{1}{2}\left[-4\ (e^{2ix} + e^{-2ix}) -\right.$$

$$\left. - 6i(e^{2ix} - e^{-2ix})\right] = \frac{e^x}{52}\ (6\sin 2x - 4\cos 2x).$$

Така, општиот интеграл е

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{e^x}{52}\ (6\sin 2x - 4\cos 2x).$$

2.22. Да се најде хармониската осцилација ако почетната положба е 1 и почетната брзина е 1. Да се претстават осцилациите во обликот $y=A\sin(\omega t+\phi_0)$. Да се нацрта графикот на кривата за $\omega = 1$.

Решение. Имаме:

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t; \quad \dot{y} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t;$$

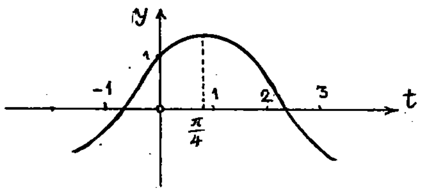
од $y = 1$, $\dot{y} = 1$ кога $t = 0$: $1 = C_1$ и $1 = C_2\omega$, па

$$y = \cos\omega t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t = \sqrt{1+1/\omega^2}\ \sin(\omega t + \mathrm{arctg}\,\omega).$$

Графикот на оваа функција при $\omega = 1$,

$$y = \sqrt{2}\ \sin(t + \pi/4),$$

е претставен на црт. 2.



Црт. 2.

2.23. Да се определат константите A и B, така што придушената осцилација

$$y = e^{-t}\ (A\cos t + B\sin t) \qquad (1)$$

да почне од почетната положба 1 и со почетна брзина а) -1, б) 1. Добиените функции да се претстават во обликот $y = Ce^{-t}\cos(t-\delta)$. Да се најдат вредностите на t за кои функцијата од а) има екстремуми.

Решение. Од (1) добиваме

$$\dot{y} = e^{-t}\left[(B-A)\ \cos t - (A+B)\ \sin t\right]. \qquad (2)$$

а) Заменувајќи $t = 0$, $y = 1$ во (1) добиваме $A = 1$, а $t = 0$, $\dot{y} = -1$ и $A = 1$ во (2) дава $-1 = B - 1$, т.е. $B = 0$. Значи

$$y = e^{-t}\cos t. \tag{3}$$

($C = 1$, $\delta = 0$).

б) За $t = 0$, $y = 1$, $\dot{y} = 1$ од (1) и (2) добиваме $A = 1$, $B = 2$, па

$$y = e^{-t}(\cos t + 2\sin t) = \sqrt{5}e^{-t}\cos(t-\delta),$$

каде што $\delta = \operatorname{arctg}2 \approx 1,1$ (в. и зад. 2.10).

Да ги најдеме вредностите на t за кои (3) има екстремуми. Од (3) или од (2) добиваме $\dot{y} = (-\cos t - \sin t)e^{-t}$, па од $\dot{y} = 0$ ја добиваме равенката $\sin t = -\cos t$, т.е. $\operatorname{tg}t = -1$, чии решенија се

$$t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Во нашиот случај ги земаме само позитивните решенија ($t > 0$). Знакот на вториот извод $\ddot{y} = 2e^{-t}\sin t$ зависи само од $\sin t$ и $\sin(k\pi-\pi/4) > 0$ за $k = 1, 3, 5,\dots$, а $\sin(k\pi-\pi/4) < 0$ за $k = 2, 4, 6,\dots$ Значи, за $t = 3\pi/4, 11\pi/4,\dots$ имаме минимуми, а за $t = 7\pi/4, 15\pi/4,\dots$ имаме максимуми. (В. и зад. 2.12).

2.24. Електричен воз се движи хоризонтално со брзина од 90 км/час. Машиновозачот ја вклучува сопирачката и отпорот на триењето, по почетокот на сопирањето, е 0,2 од тежината на возот.

Да се најде времето од моментот на вклучувањето на сопирачката до застанувањето на возот и растојанието, поминато за тоа време.

Решение. Според II Њутнов закон,

$$m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -0,2\ mg$$

каде што m е масата на возот, g е Земјиното забрзување ($g \approx 9,81$ m/sek^2), s е патот и t е времето. Значи

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0,2\ g, \tag{1}$$

па $\frac{ds}{dt} = -0,2gt + C_1$. При $t = 0$ имаме $\frac{ds}{dt} = v_o = 90$ км/час $=$ 25 м/сек, па $C_1 = 25$. Значи

$$\frac{ds}{dt} = -0,2gt + 25. \tag{2}$$

Кога возот ќе застане, $ds/dt = v = 0$, па од (2): $0 = -0,2gt + 25$, т.е.

$$EIy = \frac{w}{24}(\ell-x)^4 + \frac{1}{6}w\ell^3x + C_2.$$

Во O: $x = 0 = y$, па $C_2 = -\frac{1}{24}w\ell^4$. Значи, бараната равенка е

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 4\ell x^3 + 6\ell^2x^2).$$

Максималното извивање што се врши на слободниот крај при $L(x=\ell)$ е

$$y_{max} = w\ell^4/8EI.$$

2.27. Еден федер, со модулус $k = 32$ кг/м, виси во вертикална положба, прицврстен на горниот крај. Товар со тежина $P = 19{,}600$ кг е обесен на долниот крај. По доаѓањето во рамнотежна положба, товарот е а) поместен надолу $y_o = 5$ см и оставен; б) поместен надолу $y_o = 12{,}5$ см и дадена му е почетна брзина $v_o = 25$ см/сек.

Да се дискутира движењето на товарот, не земајќи го предвид отпорот на воздухот или други надворешни сили.

Решение. Координатниот почеток ќе го земеме во центарот на гравитацијата на товарот, откако е доведен во рамнотежна положба. Нека y е промената на положбата на товарот (позитивна, кога се мери надолу) за време t. Кога товарот мирува, силата на федерот е еднаква со гравитационата сила (но со спротивен знак). Кога товарот е поместен, силата што се стреми да го врати во рамнотежна положба (силата на федерот) е $-ky$. Според тоа, земајќи $g \approx 9{,}8$ м/сек^2, имаме

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \text{ т.е. } \frac{19{,}6}{9{,}8}\frac{d^2y}{dt^2} = -32y,$$

или, по средувањето,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0.$$

Интегрирајќи добиваме

$$y = C_1\cos4t + C_2\sin4t.$$

а) Бидејќи $y = 5cm = \frac{1}{20}$ m и $\dot{y} = 0$ кога $t = 0$, добиваме $C_1 = \frac{1}{20}$, $C_2 = 0$, т.е. $y = \frac{1}{20}\cos4t$. Ова претставува просто хармониско движење, со амплитуда $\frac{1}{20}$ м, со период $2\pi/4 = \pi/2$ сек, а фреквенцијата му е $\frac{4}{2\pi} \approx 0{,}63$ цикл/сек.

б) Бидејќи $y = 12{,}5$ sm $= \frac{1}{8}$ m и $\dot{y} = 25$ sm/sek $= \frac{1}{4}$ m/sek кога $t = 0$, добиваме $C_1 = \frac{1}{8}$, $C_2 = 1/16$, т.е.

$$y = \frac{1}{8}\cos4t + \frac{1}{16}\sin4t = \sqrt{(\tfrac{1}{8})^2 + (\tfrac{1}{16})^2}\sin(4t+\delta) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{16}\sin(4t+\delta), \qquad \delta = \operatorname{arctg}\frac{16}{8} \approx 1{,}1.$$

Амплитудата е $\sqrt{5}/16$ м, а периодот е $\pi/2$ сек.

2.28. Да се реши задачата 2.27 при условите од а) земајќи предвид една надворешна придушна сила дадена во кг со βv, каде што v е моментната брзина во м/сек и а) $\beta = 8$, б) $\beta = 16$, в) $\beta = 20$.

Решение. Равенката на движење со придушна сила $\beta v = \beta dy/dt$ е

$$\frac{19{,}6}{9{,}8}\frac{d^2y}{dt^2} = -32y - \beta\frac{dy}{dt}, \text{ т.е. } \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\beta\frac{dy}{dt} + 16y = 0.$$

а) Ако $\beta = 8$: $\ddot{y} + 4\dot{y} + 16y = 0$, $r_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}\cdot i$;

$$y = e^{-2t}(A\cos 2\sqrt{3}\,t + B\sin 2\sqrt{3}\,t).$$

За $t = 0: y = \frac{1}{20}$, $\dot{y} = 0$, наоѓаме $A = \frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{20\sqrt{3}}$ па

$$y = \frac{1}{20}e^{-2t}(\cos 2\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\sqrt{3}\,t) = \frac{e^{-2t}}{10\sqrt{3}}\sin(2\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}).$$

Значи, движењето е придушено осцилаторно, со период $2\pi/2\sqrt{3} \approx 1{,}8$ сек.

б) Ако $\beta = 16$: $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 0$; при дадените почетни услови како во а), $y = \frac{1}{5}e^{-4t}(1 + \frac{1}{4}t)$. Движењето се вика критички придушено, зашто секоја вредност на $\beta < 16$ произведува осцилаторно движење (в. 2°, II, §2.5).

в) Ако $\beta = 20$: $\ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 0$ и наоѓаме $y = \frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{1}{60}e^{-8t}$. Движењето е премногу придушено (практично, нема осцилирање).

2.29. Да се реши задачата 2.27 при почетните услови од а), ако дејствува надворешна сила дадена со $F(t) = 32\cos 4t$ при $t > 0$.

Да се даде физичко толкување на тоа што се случува кога t расте.

Решение. Диференцијалната равенка на движењето во овој случај ќе биде

$$\frac{19{,}6}{9{,}8}\ddot{y} = -32y + 32\cos 4t, \text{ т.е. } \ddot{y} + 16y = 16\cos 4t.$$

Решението, при почетните услови $y = \frac{1}{20}$, $\dot{y} = 0$ при $t = 0$, е

$$y = \frac{1}{20}\cos 4t + 2t\sin 4t.$$

Кога t расте, членот $2t\sin 4t$ нумерички расте неограничено и, физички, федерот безусловно ќе се скине. Ова го илустрира феноменот резонанс и покажува што ќе се случи кога фреквенцијата на силата што дејствува однадвор е еднаква со природната фреквенција на системот.

2.30. Да се најде електричниот полнеж q и струјата i во RLC-коло, ако L = 0,05 хенрии, R = 20 ома, C = 100 микрофаради и ЕМС E = 100 волти, при почетните услови q = 0, i = 0 кога t = 0.

Решение. Според II Киркофов закон имаме

$$u_L + u_R + u_C = e(t), \text{ т.е. } L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = e(t),$$

а бидејќи (в. §2.2) $i = dq/dt$, $di/dt = d^2q/dt^2$ добиваме

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t).$$

При дадените вредности за L, R, C и E имаме

$$0{,}05\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + \frac{q}{100.10^{-6}} = 100$$

т.е.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\frac{dq}{dt} + 200\ 000\ q = 2000$$

По интегрирањето:

$$q = e^{-200t}(A\cos400t + B\sin400t) + 0{,}01.$$

Диференцирајќи еднаш по t, добиваме

$$i = \frac{dq}{dt} = 200\ e^{-200t}\ (-A+2B)\cos400t + (-B-2A)\sin400t$$

Користејќи ги почетните услови, добиваме A = -0,01, B = -0,005, па

$$q = e^{-200t}(-0{,}01\cos400t - 0{,}005\sin400t) + 0{,}01$$

$$i = 5\ e^{-200t}\sin400t.$$

Бидејќи e^{-200t} брзо станува многу мало, следува дека i станува занемарливо мала, а q = 0,01.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 2

Да се интегрираат следните ДР (таму каде што се наведени почетни услови, да се најде соодветниот партикуларен интеграл), 2.31 - 2.40.

2.31. $y' - 2xy = 4x$. 2.32. $xy' - y = -x^3 e^{-x^2/2}$.

2.33. $y' - \frac{y}{2x} = \frac{x+1}{x}$, $y(1) = 0$.

2.34. $xy' - ky = e^x x^{k+1}$. 2.35. $y' + ky/x = a/x^k$.

2.36. $y' + p'y = pp'$, $p = p(x)$ е дадена функција, $p' = \frac{dp}{dx}$.

2.37. $y' - y\text{ctg}x = 2x\sin x$; $y(\pi/2) = \pi^2/4$.

2.38. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; $y(\pi) = -1$.

2.39. $y' + y\sin x = 2xe^{\cos x}$. 2.40. $y' + y\text{tg}x = 1/\cos x$.

2.41. Да се покаже дека, ако $y_1(x)$ е некое партикуларно решение на ДР

$$y' + ay = f(x), \tag{1}$$

тогаш

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int a dx} \tag{2}$$

е општиот интеграл на (1).

2.42. Ако $y = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ се две линеарно независни решенија (т.е. $y_1/y_2 \neq$ конст.) на ДР $y' + ay = f(x)$, тогаш $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ е нејзиниот општ интеграл.

Да се илустрира тоа на ДР $y' + y\text{tg}x = 1/\cos x$ (од зад. 2.40), знаејќи две нејзини партикуларни решенија $y_1(x) = \sin x + \cos x$, $y_2(x) = \sin x - 2\cos x$.

Да се интегрираат ДР 2.43 - 2.46.

2.43. $(x+x^2)y' - (1+2x)y = 1 + 2x$.

2.44. $y = xy' + y'\ln y$; $y = 1$ за $x = -1$.

2.45. $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$.

2.46. $dx - xdy = \ln y dy$. 2.47. $(x-2xy-y^2)y' = -y^2$.

Да се интегрираат следниве (бернулиеви) ДР, 2.48 - 2.54.

2.48. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} y^3$. 2.49. $xy' + y = y^2 \ln x$.

2.50. $y' + xy = x^3 y^3$, $y = 1$ за $x = 0$.

2.51. $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y = 2$ за $x = 0$.

2.52. $r\sin\theta - \frac{dr}{d\theta}\cos\theta = r^2$. 2.53. $y'\cos^2 x - y = y^2 \operatorname{tg} x$.

2.54. $(x^2 \ln y - x)y' = y$; $y = 1$ за $x = 1$.

2.55. Да се најде равенката на онаа крива која минува низ координатниот почеток, а коефициентот на правецот во секоја нејзина точка е еднаков со збирот од ординатата и удвоената апсциса на таа точка.

2.56. Да се најде таква крива, чија суптангента во произволна точка се однесува кон нејзината ордината исто како една константна отсечка со должина а кон разликата меѓу апсцисата и ординатата на таа точка. Да се најде интегралната крива што минува низ точката (a,o).

2.57. Да се најде крива, чија тангента, повлечена во произволна нејзина точка M(x,y), на ординатната оска отсечува отсечка, обратно пропорционална со: а) апсцисата б) ординатата на допирната точка.

2.58. Да се најде онаа крива што минува низ точката T(1,1) и чија тангента во произволна точка M(x,y) на апсцисната оска отсечува отсечка, обратно пропорционална со: а) ординатата, б) квадратот на апсцисата допирната точка M.

2.59. Една честица со единична маса се движи под дејство на гравитацијата во средина чиј отпор е пропорционален со брзината v. Ако честицата се исфрли вертикално нагоре со почетна брзина v_o, да се најде времето за достигнување на највисоката точка.

2.60. Една бомба е пуштена од авион што се движи хоризонтално со брзина U м/сек на висина од H м. Отпорот на воздухот по единица маса за бомбата е пропорционален со нејзината брзина, при што коефициентот на пропорционалноста е к. Да се покаже дека:

а) патот на бомбата, t сек по пуштањето, ќе биде отклонет од хоризонталата под агол ϕ, за кој $\operatorname{tg}\phi = g(e^{kt}-1)/kU$ (g е Земјиното забрзување);

б) ако висината H е голема, аголот меѓу хоризонталата и целта на бомбата, при моментот на пуштањето е $\alpha = \mathrm{arctg}(kH/U)$.

2.61. Ако едно тело бавно се потопува во вода, тогаш неговата брзина v и забрзувањето a се сврзани со равенката $a = -g-kv$, каде што g и k се константи. Да се изрази растојанието s, поминато од телото, како функција од времето t, ако во моментот $t = 0$ телото мирувало.

2.62. Една сферна дождовна капка, во почетокот со радиус a, паѓа слободно од состојба на мирување. Додека паѓа, нејзиниот волумен се зголемува непрекинато, преку кондензација, со брзина еднаква на k пати нејзината плоштина во секој момент. Да се покаже дека нејзината брзина v во моментот t ја задоволува ДР

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3kv}{r},$$

каде што $r = a + kt$. Реши ја оваа равенка и покажи дека, во моментот $t = a/k$, $v = 15ag/32k$.

2.63. Едно тело со маса m се движи вертикално низ средина во која отпорот се менува пропорционално со квадратот од брзината, при што крајната брзина (в. зад. 2.7) е V. Ако телото се лансира вертикално нагоре со почетна брзина $V\mathrm{tg}\alpha$, тогаш тоа ќе се врати во точката на лансирањето на Земјата со брзина $V\sin\alpha$. Докажи!

2.64. Еден кондензатор со капацитивност C се празни низ отпорник со резистанса R. Да се најде електричното оптоварување q на позитивната плоча и напонот u во моментот t, ако q_o и u_o се нивните почетни вредности.

2.65. Покажи дека електричниот товар q на кондензаторот во RC-коло со константна електромоторна сила е $q = EC(1-e^{-t/RC})$.

2.66. Покажи дека електричниот товар q на кондензаторот, во моментот t, во RC-коло со електромоторна сила $E\sin\omega t$, ја задоволува ДР

$$CR\,\frac{dq}{dt} + q = CE\,\sin\omega t.$$

Ако $q = 0$ кога $t = 0$, покажи дека

$$q = CE\cdot\sin\alpha\left[\cos(\omega t-\alpha) - e^{-t/CR}\cos\alpha\right].$$

2.67. Едно електрично коло содржи отпорник со $R = 20$ ома, сериски сврзан со кондензатор со $C = 0{,}05$ фаради и батерија од E волти.

При $t = 0$, кондензаторот нема електричен товар. Да се најде $q = q(t)$ и $i = i(t)$, ако а) $E = 60$; б) $E = 100t\,e^{-2t}$; в) $E = 100\cos 2t$.

2.68. Едно електрично коло содржи отпорник со $R = 8$ ома, сериски сврзан со индуктивен елемент со $L = 0{,}5$ хенрии и батерија од E волти. При $t = 0$, струјата $i = 0$. Да се најде зависноста на струјата i од времето t и максимумот на струјата ако: а) $E = 64$; б) $E = 8t\,e^{-16t}$; в) $E = 32\,e^{-8t}$; г) $E = 64\sin 8t$.

2.69. Во формулата (7) од §2.2,

$$i = \frac{E}{R}\,(1-e^{-tR/L}), \tag{7}$$

струјата се стреми кон E/R. Брзината на тоа приближување зависи од R/L чија реципрочна вредност $\tau = L/R$ се вика временска константа на колото.

а) Да се нацрта графикот на (7) за $E/R = 1$ и τ еднаков со: 1) 0,1; 2) 1; 3) 10.

б) Да се изрази наклонот на тангентите на кривите од (7) во зависност од τ при $t = 0$.

2.70. Да се покаже дека струјата i во (7) од 2.69 постигнува околу:

а) 63% од својата крајна вредност кога $t = \tau = L/R$;

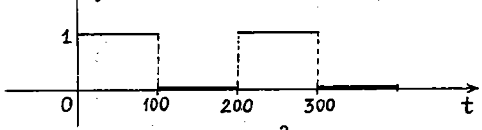
б) 50% од крајната вредност кога $t = \tau\ln 2 \approx 0{,}7$.

2.71. Земајќи $L = 10$ хенрии, најди ги и R така што (7) од 2.69 да достигне 99% од својата крајна вредност при $t = 1$ сек.

2.72. Да се најде струјата во RL-коло, ако:

а) $R = 10$ ома, $L = 100$ хенрии, $E = 40$ волти при $0 \le t \le 100$, $E = 0$ кога $t > 100$, $i(0) = 4$.

б) $R = 1$ ом, $L = 100$ хенрии, $e(t)$ е периодична како на црт. 5, $i(0) = 0$. Да се скицира.



Црт. 5

в) Да се покаже дека $i(0) = (e-1)/(e^2-1)$ е единствената почетна вредност за која $i(t)$ во задачата б) е периодична, т.е. $i(t+200) = i(t)$ за секој $t \ge 0$.

2.73. Да се најде струјата i во RC-колото, со R = 10 ома, C = 0,1 фарад, $e(t) = 110 \sin 314t$ волти и $i(0) = 0$.

2.74. Еден кондензатор (C = 0,01 фарад) во серија со отпорник (R = 20 ома) е полнет од батерија (E = 10 волти). Да се најде товарот $q(t)$ и напонот $u(t)$ на кондензаторот сметајќи дека тој, при $t = 0$, бил празен. Да се најде и струјата $i(t)$ во колото.

2.75. Да се најде $i(t)$ во RL-коло ако:

а) R = 5 ома, L = 10-t хенрии кога $0 \le t \le 10$ сек, L = 0 кога $t > 10$ сек, $i(0) = 0$ и E=10 волти.

б) L = 1 хенрии, R = 1/(1-t) ома кога $0 \le t < 1$ сек, E = 1 волт, $i(0) = 0$; $i(t) = ?$ кога $0 \le t < 1$.

Да се интегрираат следниве ДР (2.76 - 2.81).

2.76. $y'' - y' - 2y = 0$. 2.77. $2y'' + 7y' - 4y = 0$.

2.78. $y'' + 6y' + 9y = 0$. 2.79. $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

2.80. $4y'' - 8y' + 5y = 0$, $y(0) = 2 = y'(0)$.

2.81. $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

2.82. Да се најде интегралната крива на ДР $y'' - y = 0$ која во точката (0,0) ја допира правата $y = x$.

2.83. Да се најде минимумот на интегралната крива на ДР $y'' + 5y' + 6y = 0$ којашто во точката (0,1) ја допира правата $6x + y = 1$. Дали таа крива има нули?

2.84. Покажи дека а) $y = \operatorname{ch}2x$; б) $y = \operatorname{sh}2x$ е решение на ДР $y'' - 4y = 0$. Како се добива тоа од општото решение?

2.85. Најди ДР со форма $y'' + ay' + by = 0$ (a,b се конст.), за која следниве функции се решенија:

а) e^{3x}, e^{4x}; б) e^{x}, xe^{x}; в) $1, e^{3x}$; г) e^{2ix}, e^{-2ix}; д) e^{x}.

2.86. Провери дали следниве функции се решенија на соодветните ДР и претстави ги во формата $y = e^{px}[A \cos qx + B \sin qx]$.

а) $y = c_1 e^{i\pi x} + c_2 e^{-i\pi x}$, $y'' + \pi^2 y = 0$;

б) $y = c_1 e^{(\alpha+ib)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$, $y'' - 2y' + (\alpha^2+\beta^2)y = 0$.

2.87. Претпоставувајќи дека $y = e^{px}[A\cos qx + B\sin qx]$ е решение на ДР $y'' + ay' + by = 0$, да се изразат a и b преку p и q.

Користејќи го тоа, најди равенки од обликот $y'' + ay' + by = 0$, знаејќи го нивното општо решение:

а) $y = A\cos 3x + B\sin 3x$; б) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

2.88. Покажи дека општото решение на ДР

а) $y'' - k^2y = 0$ може да се претстави во обликот $y = A\,\mathrm{sh}kx + B\,\mathrm{ch}kx$;

б) $y'' - 2py' + (p^2-q^2)y = 0$ - во обликот $y = e^{px}(A\,\mathrm{ch}qx + B\,\mathrm{sh}qx)$.

2.89. Покажи дека функцијата $y = xe^{rx}$ е решение на ДР $y'' + ay' + by = 0$ ако и само ако r е двоен корен на равенката $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

2.90. Ако некоја комплексна функција од реален аргумент, $y = u(x) + iv(x)$, ја задоволува ДР $y'' + ay' + by = 0$, тогаш таа ДР ја задоволува и секоја од функциите $u(x)$, $v(x)$. Докажи!

Да се интегрираат следниве нехомогени линеарни ДР со константни коефициенти (2.91 - 2.97).

2.91. $y'' - 2y' - 3y = 4$. 2.92. $7y'' - y' = 14x$.

2.93. $y'' + 5y' + 6y = (10-10x)e^{-2x}$. 2.94. $y'' + y' = 4x^2e^x$.

2.95. $y'' - y' = \mathrm{ch}2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.96. $y'' - y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.97. $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin x$.

* * *

2.98. Дадени се ДР

а) $y'' + 4y = \sin 2x$; б) $y'' + y = 4x\cos x$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 65\sin 3x$; г) $y'' - y = e^x\cos x$.

За секоја од нив да се најде партикуларно решение нá два начина:

1°. според методот на избор (Т.2 од §2.4),

2°. решавајќи ја, на пример, ДР $z'' + z = e^{2ix}$, уочувајќи дека $\sin 2x = \mathrm{Im}\, e^{2ix}$ (Im значи: имагинарен дел).

2.99. Ако Y_1 и Y_2 се партикуларни решенија на равенките $y'' + ay' + by = f_1(x)$ и $y'' + ay' + by = f_2(x)$ соодветно, тогаш $Y_1 + Y_2$ е партикуларно решение на ДР $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$. Докажи!

2.100. Да се најде партикуларен интеграл на ДР

а) $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$;

б) $y'' + 4y = 2\cos x \cos 3x$;

в) $y'' - y = \sin^2 x$.

2.101. Да се најде општото решение на ДР

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos^2 x.$$

Да се најде оној п.и. за кој $y = 0$ и $y' = 1$ кога $x = 0$.

2.102. Челична греда, прицврстена на едниот крај, со должина $\ell = 6$ м, е оптоварена со товар $P = 2$ тони на слободниот крај. Да се најде равенката на еластичната линија и да се определи извивањето на гредата на слободниот крај (модулот на еластичноста е $E = 21.10^5$ kg/cm^2 $I = 30\ 000$ cm^4).

2.103. Греда со должина ℓ, хоризонтално поставена, потпрена е на краевите и носи концентриран товар P на својата средна точка. Покажи дека извивањето на гредата во средината изнесува $P\ell^3/48EI$.

2.104. Хомогена греда со должина 3ℓ слободно е прикрепена на нејзините краеви и носи товари P на растојание ℓ од секој крај. Да се најде извивањето на гредата во точките каде што се поставени товарите, а исто така во средината на гредата.

2.105. При хармониската осцилација $y = C_1\cos t + C_2\sin t$, да се определат C_1 и C_2 така што почетната положба да биде 1 см, а почетната брзина да е а) -1 см/сек, б) 0, в) 1 см/сек. Да се претстават тие три функции во обликот $y = C\cos(t+\delta)$ и да се нацртаат нивните графици. Да се најдат положбите и брзините кога $t = \pi$ и $t = 2\pi$.

2.106. Докажи дека:

а) екстремумите на една придушена осцилација $y = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ (в. 4°,II, §2.5) се наоѓаат на еквидистантни вредности за t, при што "растојанието" меѓу два последователни максимума е $2\pi/\omega$;

б) количникот на две последователни максимални амплитуди е константен и природниот логаритам од тој количник е $\Delta = 2\pi\alpha/\omega$ (Δ се вика логаритамски декремент на осцилацијата).

2.107. Да се најде движењето $y = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t}$ (в. 2°, II, §2.5) што почнува од y_o, со почетна брзина v_o.

2.108. При какви почетни услови функцијата $y = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t}$ има максимум или минимум во некој момент $t > 0$? Да се изрази максималната односно минималната амплитуда со помош на почетните услови y_o и v_o.

2.109. Равенката на движењето на една честица е $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$, $x = x(t)$. Кога $t = 0$, растојанието x е 1, а брзината при оддалечување од почетокот е 2 единици. Докажи дека честицата ќе биде најдалеку од почетокот по време $t = \frac{1}{3}\ln 2$ и да се најде најголемото растојание.

2.110. Тело што се движи против отпор, пропорционален со брзината, прави комплетна осцилација секои 2 сек. Телото почнува од мирување на 3 м од центарот O на осцилацијата и по 10 осцилации амплитудата е смалена на 1 м. Да се најде положбата на телото од O по t сек.

2.111. Кондензатор со $C = 0{,}2$ микрофаради е наполнет до потенцијална разлика од 200 волти и се празни низ жица чија отпорност може да се занемари и индуктивност 0,05 хенрии. Да се најде потенцијалната разлика u_c во зависност од времето и фреквенцијата на осцилациите.

2.112. Во RLC-коло е дадено: $L = 1$ хенри, $C = 10^{-4}$ фаради, $R = 200$ оми, константна електромоторна сила. Да се најде струјата $i(t)$ при почетните услови $i = 0$, $di/dt = -100$ кога $t = 0$.

2.113. Еден индуктор со индуктивност L, сериски е сврзан со кондензатор од капацитивност C, при што отпорноста е занемарлива, а дејствува ЕМС од $E_o\cdot\cos\omega t$, каде што $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Да се најде израз за напонот V во моментот t, ако $V = 0$, $dV/dt = 0$ кога $t = 0$.

2.114. Да се реши ДР на RLC-коло,

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L}\cdot\frac{dE}{dt}$$

(в. (5) од §2.5) кога а) E = конст; б) $E = E_o \sin\omega t$, при претпоставката $R^2 < 4L/C$.

2.115. Во ДР од зад. 2.114, L, R, C, E_o и ω се константи. Докажи дека, ако $R > 0$, тогаш експоненцијалните членови во решението се стремат кон нула кога $t \to \infty$ и најди го решението кога тие членови не се земат предвид.

При овие претпоставки, покажи дека, за дадени вредности на E_o, ω, R, најголемата вредност на i се добива кога $\sqrt{CL} = 1/\omega$.

2.116. Индуктивен елемент со $L = 2$ хенрија, отпорник со $R = 16$ ома и кондензатор со $C = 0{,}2$ фарада се врзани сериски со батерија, чија ЕМС е $E = 100 \cdot \sin 3t$. При $t = 0$ кондензаторот е празен и струјата е нула. Да се најде а) оптоварувањето q, б) струјата i при $t > 0$.

Глава 3

ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ОПШТ ВИД

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 3

3.1. Даден е диференцијалниот оператор од трет ред

$$L(y) = xy''' + (1+x^2)y'' - xy' + y.$$

Да се пресмета а) $L(x^2)$; б) $L(x\ln x)$.

Решение. а) $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'' = 2$, $y''' = 0$, па

$L(x^2) = x.0 + (1+x^2).2 - x.2x + x^2 = x^2 + 2.$

б) $y = x\ln x$, $y' = \ln x + 1$, $y'' = 1/x$, $y''' = -1/x^2$;

$L(x\ln x) = -x/x^2 + (1+x^2)/x - x(\ln x+1) + x\ln x \equiv 0.$

3.2. Даден е диференцијалниот оператор

$$L(y) = xy'' - (x+2)y' + 2y. \tag{1}$$

Да се најде полином $p(x)$ од втор степен, таков што $L(p(x)) \equiv 0$.

Решение. Нека $p(x) = ax^2 + bx + c$, каде што коефициентите a, b, c треба да се определат. Бидејќи $p'(x) = 2ax + b$, $p''(x) = 2a$, добиваме

$$L(p(x)) = xp''(x) - (x+2)p'(x) + 2p(x) = (-2a+b)x - 2b + 2c.$$

Од условот $L(p(x)) \equiv 0$ го добиваме системот равенки

$$-2a + b = 0, \quad -2b + 2c = 0,$$

па $c = b = 2a$. Значи, $p(x) = a(x^2+2x+2)$, каде што a е произволен реален број, различен од 0.

3.4. Да се покаже дека системот функции $1 + x$, $1 + 2x$, $1 + x^2$, е линеарно независен во интервалот $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Идентитетот

$$a_1(1+x) + a_2(1+2x) + a_3(1+x^2) \equiv 0, \tag{1}$$

каде што a_1, a_2, a_3 се константи, да го напишеме по степените на x:

$$(a_1+a_2+a_3) + (a_1+2a_2)x + a_3x^2 \equiv 0.$$

Од тоа го добиваме системот равенки

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_3 = 0;$$

тој има единствено решение $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Значи, идентитетот (1) е исполнет само при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, што значи дека дадениот систем функции е линеарно независен.

3.5. Да се покаже дека системот функции $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$, каде што $b \neq 0$, е линеарно независен во $(-\infty, +\infty)$.

Решение. I. Да видиме за кои вредности на a_1, a_2 ќе биде

$$a_1 \cdot e^{ax}\cos bx + a_2 \cdot e^{ax}\sin bx \equiv 0. \qquad (1)$$

Делејќи со e^{ax} $(\neq 0)$, добиваме

$$a_1 \cdot \cos bx + a_2 \cdot \sin bx \equiv 0. \qquad (2)$$

Ставајќи во (2) $x = 0$, добиваме $a_1 = 0$, па, значи, $a_2 \cdot \sin bx \equiv 0$. Бидејќи функцијата $\sin bx$ не е идентички еднаква со нула, следува дека $a_2 = 0$. Значи, идентитетот (2), односно (1), важи само при $a_1 = a_2 = 0$, т.е. функциите y_1, y_2 се линеарно независни во интервалот $(-\infty, +\infty)$.

Патем, од (2), докажана е линеарната независност и на функциите $\cos bx$, $\sin bx$.

II. Задачата можеме да ја решиме (побрзо) со користење на 4^o од §3.3 (т.е. зад. 3.26). Имено:

$$y_2/y_1 = e^{ax}\sin bx/e^{ax}\cos bx = \operatorname{tg} bx \neq \text{конст},$$

што значи дека y_1 и y_2 се линеарно независни.

3.5. Да се испита дали функциите 1, $\cos 2x$, $\cos^2 x$ се линеарно зависни во интервалот $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Нека $a_1 \cdot 1 + a_2\cos 2x + a_3\cos^2 x \equiv 0$.

Бидејќи $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, добиваме

$$(a_1+a_3/2) + (a_2+a_3/2) \cdot \cos 2x \equiv 0.$$

Еден тригонометриски полином е нула, ако му се нули неговите коефициенти, па

$$a_1 + a_3/2 = 0, \quad a_2 + a_3/2 = 0,$$

од каде што $2a_1 = -a_3 = 2a_2$. Ставајќи, на пример, $a_3 = -1$ ($\neq 0$), добиваме

$$2 + 2\cdot\cos 2x - \cos^2 x \equiv 0,$$

што значи дека дадените функции се линеарно зависни.

3.6. Да се најде вронскиевата детерминанта за функциите $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \cos^2 x$.

Решение. Имаме:

$$W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \cos^2 x \\ 0 & -2\sin 2x & -\sin 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Овој резултат го илустрира обопштението на теоремата 1 од §3.3. Имено, функциите y_1, y_2, y_3 се линеарно зависни (в. зад. 3.5), па нивниот вронскијан е идентично еднаков со нула.

3.7. Да се покаже дека обратниот исказ на Т.1 од §3.3 не е точен т.е. вронскијанот на две функции може идентички да биде нула и во случај кога дадените функции формираат линеарно независен систем на некој интервал. За таа цел да се разгледаат функциите:

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{за} \quad x > 0; \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} x & \text{за} \quad x \le 0, \\ 0 & \text{за} \quad x > 0. \end{cases}$$

Решение. Системот функции y_1, y_2 е линеарно независен во $(-\infty,+\infty)$ зашто идентитетот $a_1y_1 + a_2y_2 \equiv 0$ е исполнет само за $a_1 = a_2 = 0$. Навистина, разгледувајќи го на интервалот $(-\infty, 0]$, добиваме $a_1.0 + a_2x \equiv 0$, т.е. $a_2x \equiv 0$, па $a_2 = 0$, зашто $y_2 = x \not\equiv 0$; на интервалот, пак, $(0, +\infty)$ имаме $a_1x^2 + a_2.0 \equiv 0$, т.е. $a_1x^2 \equiv 0$, па $a_1 = 0$ зашто $y_1 = x^2 \not\equiv 0$ на тој интервал.

Да го најдеме вронскијанот $W = W(y_1,y_2)$. Имаме:

$$\text{на } (-\infty, 0]: W = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{на } (0, +\infty): W = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Значи, $W(y_1, y_2) \equiv 0$ на интервалот $(-\infty, +\infty)$.

3.8. Еден систем функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$, дефинирани на сегментот $[a,b]$ е линеарно зависен ако и само ако детерминантата

$$\Gamma(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \ldots & (y_1,y_n) \\ (y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \ldots & (y_2,y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \ldots & (y_n,y_n) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

(наречена грамова детерминанта) е еднаква со нула; притоа

$$(y_i,y_j) = \int_a^b y_i(x)y_j(x)dx, \quad (i,j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

претпоставувајќи дека интегралите во (2) постојат. (За $n = 2$, в.3.32.)

Користејќи го тоа, да се покаже дека функциите x, $3x$ се линеарно зависни на сегментот $[0,1]$.

Решение. Имаме:

$$(y_1,y_1) = \int_0^1 x^2dx = 1/3; \qquad (y_1,y_2) = (y_2,y_1) = \int_0^1 3x^2dx = 1;$$

$$(y_2,y_2) = \int_0^1 9x^2dx = 3; \qquad \Gamma(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Според цитираната теорема, y_1, y_2 се линеарно зависни.

3.9. Да се докаже дека $y = c_1x^2 + c_2x^3$ е општ интеграл на ДР $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Решение. Со директно заменување во дадената ДР се покажува дека $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^3$ се нејзини решенија. Бидејќи $a_1x^2 + a_2x^3 \equiv 0$ само во случајот $a_1 = a_2 = 0$, тие решенија се линеарно независни, па формираат фундаментален систем решенија за дадената ДР; следствено, $y = c_1x^2 + c_2x^3$ е нејзиното општо решение.

3.10. Да се состави хомогена линеарна ДР, знаејќи дека функциите $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^3$ образуваат нејзин фундаментален систем.

Решение. Дадениот систем функции е линеарно независен во интервалот $(-\infty, +\infty)$, зашто $a_1.1 + a_2x + a_3x^3 \equiv 0$ само за $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Според тоа, тој може да претставува фундаментален систем решенија на некоја хомогена ЛДР од трет ред, така што

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^3 \qquad (1)$$

е нејзино општо решение. Бараната ДР можеме да ја најдеме на два начина

I начин: со елиминација на произволните константи од (1). Имаме:

$$y' = C_2 + C_3x^2, \quad y'' = 6C_3x, \quad y''' = 6C_3.$$

Заменувајќи $6C_3$ од последното во претпоследното равенство, добиваме $y'' = xy'''$, т.е. $xy''' - y'' = 0$.

II начин: со помош на следниов резултат: Ако $y_1, y_2, \dots, y_n$ е линеарно независен систем функции на сегментот $[a,b]$, коишто се n-пати диференцијабилни на $[a,b]$, а $y = y(x)$ е непозната функција, тогаш равенката

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

е линеарна ДР, за која функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ сочинуваат фундаментален систем решенија. (На пример, за $y = y_1$, првата и последната колона во (2) се еднакви, па y_1 е решение на ЛДР (2).)

Според тоа, бараната ДР е:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 & y \\ 0 & 1 & 3x^2 & y' \\ 0 & 0 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} 6x & y'' \\ 6 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

од каде што ја добиваме ДР $xy''' - y'' = 0$.

(Да забележиме дека друга ЛДР со тој фундаментален систем решенија нема, зашто равенката е еднозначно определена од својот фундаментален систем; в. ја забелешката од крајот на §3.4.)

3.11. Да се изврши смената $x = \cos t$ во ДР

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0, \tag{1}$$

а потоа да се интегрира.

Решение. Имаме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt} \quad (t = \arccos x, \quad -1 \le x \le 1),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

па заменувајќи во (1), по средувањето, добиваме

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0 \tag{2}$$

-хомогена линеарна ДР со константни коефициенти. Општото решение на (2) е

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt,$$

а враќајќи се на променливата x, го добиваме општото решение на (1):

$$y = C_1 \cdot \cos n \arccos x + C_2 \cdot \sin n \arccos x.$$

3.12. Да се интегрира линеарната ДР

$$x(1-x^2)y'' + 2y' + 2xy = 0, \qquad (1)$$

знаејќи дека таа има партикуларен интеграл од обликот $y_1 = x^k$, каде што k е константа што треба да се определи.

Решение. Имаме: $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$, па заменувајќи во (1) добиваме

$$(k^2-k)(x-x^3)x^{k-2} + 2kx^{k-1} + 2x^{k+1} = 0,$$

$$(-k^2+k+2)x^{k+1} + (k^2+k)x^{k-1} = 0;$$

значи, $y = x^k$ ќе биде решение на (1) ако (истовремено)

$$-k^2 + k + 2 = 0 \quad и \quad k^2 + k = 0.$$

Заедничко решение на овие две равенки е $k = -1$, па бараниот п.и. е $y = x^{-1} = 1/x$.

I. Ставајќи $y = y_1 z = z/x$ (смената (2) од §3.5), $y' = z'/x - z/x^2$, $y'' = 2z/x^3 - 2z'/x^2 + z''/x$ во (1), по средувањето добиваме

$$(1-x^2)z'' + 2xz' = 0; \qquad \frac{z''}{z'} = \frac{2x}{x^2-1};$$

$$z' = x^2 - 1 \quad (земаме\ C = 0); \quad z = x^3/3 - x,$$

па $y_2 = y_1 z = x^2/3 - 1$. Значи, општиот интеграл на (1) е

$$y = C_1/x + C_2(x^2/3 - 1).$$

II. Друг партикуларен интеграл y_2 можеме да најдеме и поинаку - користејќи ја формулата (6) од §3.5. Имено, од (1) имаме

$$a_1 = \frac{2}{x(1-x^2)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}, \qquad \int a_1 dx = \ln \frac{x^2}{1-x^2},$$

$$\exp(-\int a_1 dx) = e^{-\ln[x^2/(1-x^2)]} = \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 1,$$

па применувајќи ја формулата (6) од §3.5, добиваме

$$y_2 = \frac{1}{x}\int x^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = 1 - \frac{x^2}{3}$$

(интеграционата константа ја земаме 0), па општиот интеграл е $y = A/x + B(1-x^2/3)$.

3.13. Да се најде општо решение на ДР

$$y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$$

Решение. Карактеристичната равенка е

$$r^4 + 4r^3 + 7r^2 + 6r + 2 = 0;$$

со проба добиваме дека $r_1 = -1$ е еден нејзин корен. Делејќи ја левата страна на карактеристичната равенка со $r + 1$, се добива количникот

$$r^3 + 3r^2 + 4r + 2$$

-полином по r од трет степен. Пак со проба добиваме дека еден негов корен е -1, па делејќи го со $r + 1$, за количник добиваме $r^2 + 2r + 2$, чии корени се $-1 + i$ и $-1 - i$. Значи, корените на карактеристичната равенка се

$$r_{1,2} = -1, \quad r_3 = -1 + i, \quad r_4 = -1 - i.$$

Според тоа, општото решение на дадената ДР е

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x).$$

3.14. Да се реши ојлеровата ДР

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0. \qquad (1)$$

Решение. I начин. Ставајќи $x = e^t$ или $t = \ln x$, од каде што $dx = e^t dt$, т.е. $dt/dx = e^{-t}$, добиваме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left[\dot{y}e^{-t}\right]\frac{dt}{dx} = (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}) \cdot e^{-t} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Заменувајќи во (1), добиваме

$$e^{2t}e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - 4e^{-t}e^{-t}\dot{y} + 6y = 0,$$

т.е.

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0 \qquad (2)$$

- хомогена линеарна ДР со константни коефициенти по $y = y(t)$. Корените на карактеристичната равенка

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad (3)$$

се $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, па општото решение на (2) е $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

Враќајќи се на првобитната променлива x преку $t = \ln x$, го добиваме општото решение на (1),

$$y = C_1x^2 + C_2x^3. \qquad (4)$$

II начин. Решение на (1) бараме во облик $y = x^k$, каде што k е константа што треба да се определи. Заменувајќи во (1) $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$, добиваме

$$k(k-1)x^k - 4kx^k - 6x^k = 0,$$

т.е. $$k(k-1) - 4k + 6 = 0, \quad k^2 - 5k + 6 = 0. \qquad (5)$$

значи, ако k е решение на (5), тогаш $y = x^k$ е решение на (1). Решенија на равенката (5) се $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, па $y_1 = x^2$, $y^2 = x^3$ се решенија на (1). Бидејќи x^2 и x^3 се линеарно независни, општиот интеграл на (1) е (4).

(Да забележиме дека равенката (5), наречена помошна равенка на (1), се совпаѓа со карактеристичната равенка (3) на соодветната ЛДР (2) со константни коефициенти).

3.15. Да се реши ојлеровата ДР

$$(3x-1)^2y'' - 3(3x-1)y' + 9y = 0. \qquad (1)$$

Решение. Со смената $3x - 1 = e^t$ добиваме $3dx = e^t dt$, $dt/dx = 3e^{-t}$, па

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 3e^{-t}\dot{y},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left[3e^{-t}\dot{y}\right]\frac{dt}{dx} = 9e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}),$$

заменети во (1) даваат

$$\ddot{y} - 2y + y = 0. \qquad (2)$$

Општото решение на (2) е $y = e^t(C_1+C_2t)$; заменувајќи $t = \ln(3x-1)$ $(x>1/3)$, го добиваме општото решение на (1),

$$y = C_1(3x-1) + C_2(3x-1)\ln(3x-1), \quad x > 1/3.$$

3.16. Да се реши нехомогената ЛДР

$$y''' - 4y'' + 4y' = 16\cdot\sin^2x + 8\cdot\sin x\cos x. \qquad (1)$$

Решение. Поради $2\sin^2x = 1 - \cos 2x$ и $2\sin x\cos x = \sin 2x$, (1) станува

$$y''' - 4y'' + 4y' = 8-8\cdot\cos 2x + 4\cdot\sin 2x \qquad (1')$$

Општото решение на соодветната хомогена ДР е

$$y_o = C_1 + (C_2+C_3x)e^{2x}. \tag{2}$$

За да најдеме п.и. Y на (1′), ќе најдеме п.и. на секоја од ДР (принцип на суперпозиција; Т.3 од §3.7):

$$y''' - 4y'' + 4y' = 8; \qquad Y_1 = Ax; \tag{3}$$

$$y''' - 4y'' + 4y' = -8\cdot\cos 2x + 4\cdot\sin 2x; \qquad Y_2 = B\cos 2x + C\sin 2x.$$

Заменувајќи $Y_1 = Ax$, $Y_1' = A$, $Y_1'' = Y''' = 0$ во (3), добиваме $4A = 8$, т.е. $A = 2$, па $Y_1 = 2x$. Слично добиваме

$$16B\cos 2x + 16C\sin 2x = -8\cos 2x + 4\sin 2x$$

т.е. $B = -1/2$, $C = 1/4$, па $Y_2 = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$. Следствено,

$$Y = Y_1 + Y_2 = 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

па општото решение на (1) е

$$y = y_o + Y = C_1 + (C_2+C_3x)e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

3.17. Да се најде она партикуларно решение y_o на ДР

$$y'' - 5y' + 6y = 12e^{-x} + 18, \tag{1}$$

кое е ограничено кога $x \to +\infty$.

Решение. Општото решение на соодветната хомогена ДР е $y_o = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Партикуларно решение на (1) ќе бараме во обликот $Y = Ae^{-x} + B$; $Y' = -Ae^{-x}$, $Y'' = Ae^{-x}$;

$$(A+5A+6A)e^{x} + 6B \equiv 12e^{-x} + 18,$$

па $A = 1$, $B = 3$, т.е. $Y = e^{-x} + 3$. Значи,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^{-x} + 3$$

е општото решение на (1). При $x \to +\infty$, имаме $e^{2x} \to +\infty$, $e^{3x} \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$, па за да добиеме решение што е ограничена функција, треба $C_1 = C_2 = 0$. Така, бараното решение е

$$\overline{y} = e^{-x} + 3.$$

3.18: Да се докаже дека ДР

(а) $(1-x)y'' + xy' - y = 0$

(б) $x(x-2)y'' + (2-x^2)y' + 2(x-1)y = 0$

имаат едно исто партикуларно решение; да се најде тоа решение и, потоа, да се најде општ интеграл на секоја од дадените ДР.

Решение. Со исклучување на y" од (а) и (б) ќе добиеме ДР од прв ред. Имено, од (а): $y''=(y-xy')/(1-x)$ го заменуваме во (б) и, по средувањето, ја добиваме ДР

$$y' - y = 0, \tag{1}$$

чие општо решение е $y=Ce^x$. Секое решение на (1) е решение и на ДР (а) и (б); да го земеме, на пример, $y_1=e^x$.

Знаејќи едно партикуларно решение, можеме да го снижеме редот на дадената ДР со смената $y=y_1z=e^xz$ (како во зад. 3.12) или со смената

$$y = y_1 \int u\,dx = e^x \int u\,dx, \tag{2}$$

каде што $u=u(x)$ е нова непозната функција и

$$y' = e^x(u+\int u\,dx), \quad y'' = e^x(u'+2u+\int u\,dx). \tag{3}$$

а) Заменувајќи ги (2) и (3) во (а),

$$(1-x)e^x(u'+2u+\int u\,dx) + xe^x(u+\int u\,dx) - e^x \int u\,dx = 0,$$

по средувањето, ќе добиеме:

$$(1-x)u'+(2-x)u=0; \quad \frac{du}{u} = -\frac{x-2}{x-1}\,dx; \quad \frac{du}{u} = (\frac{1}{x-1} - 1)dx,$$

чие општо решение е

$$u = C_2e^{-x}(1-x). \tag{4}$$

Од (2) имаме $ye^{-x}=\int u\,dx$, т.е. $(ye^{-x})'=u$, а со (4):

$$(ye^{-x})' = C_2e^{-x}(1-x); \quad y' - y = C_2(1-x).$$

Општо решение на последната ДР (којашто е линеарна, од прв ред) е:

$$y = e^x(C_1+C_2 \int e^{-x}(1-x)dx) = C_1e^x + C_2x, \tag{5}$$

а тоа е општо решение на ДР (а).

б) Заменувајќи ги (2) и (3) во (б), ќе добиеме

$$(x^2-2x)u' + (x^2-4x+2)u=0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{du}{u} = (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - 1)dx;$$

општо решение на последната ДР е

$$u = D_2(2x-x^2)e^{-x}. \tag{6}$$

Од (2) и (6), како во а), добиваме:

$$(ye^{-x})' = D_2e^{-x}(2x-x^2), \quad \text{т. е.} \quad y' - y = D_2(2x-x^2);$$

$$y = e^x(D_1+D_2 \int e^{-x}(2x-x^2)dx) = D_1e^x + D_2x^2. \tag{7}$$

Значи, општ интеграл на (а) односно (б) е:

$$y = C_1e^x + C_2x \text{ односно } y = D_1e^x + D_2x^2.$$

3.19. Да се реши, со помош на Лагранжовиот метод на варијација на произволните константи, следнава ДР

$$y'' + y' = e^{-2x}\sin e^{-x}. \tag{1}$$

Решение. Комплементарната функција на (1) е $y_0 = C_1 + C_2e^{-x}$. Ставаме $y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$ и, според Лагранжовиот метод, го добиваме системот равенки

$$\begin{aligned} C_1'.1 + C_2'.e^{-x} &= 0,\\ -C_2'\cdot e^{-x} &= e^{-2x}\sin e^{-x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Од втората равенка на (2) имаме

$$C_2' = -e^{-x}\sin e^{-x}, \quad C_2 = \int \sin e^{-x}d(e^{-x}) = -\cos e^{-x}+B. \tag{3}$$

Од првата равенка на (2), $C_1' = -C_2'e^{-x}$, добиваме

$$C_1 = \int e^{-2x}\sin e^{-x}dx = e^{-x}\cos e^{-x} - \int \cos e^{-x}d(e^{-x}) = e^{-x}\cos e^{-x}-\sin e^{-x}+A. \tag{4}$$

Следствено, општиот интеграл на (1) е

$$y = \left[e^{-x}\cos e^{-x} - \sin e^{-x} + A\right]\cdot 1 + \left[-\cos e^{-x} + B\right]\cdot e^{-x},$$

т.е. $$y = A + Be^{-x} - \sin e^{-x}.$$

3.20. Да се реши (со Лагранжовиот метод) ДР

$$x^2y'' - 6y = x^2\ln x. \tag{1}$$

Решение. Равенката (1) е ојлеровска, нехомогена. Како во зад. 3.14. ја наоѓаме комплементарната функција на (1):

$$y_0 = C_1x^3 + C_2x^{-2}.$$

Според Лагранжовиот метод, го добиваме системот

$$\begin{aligned} C_1'\cdot x^3 + C_2'\cdot x^{-2} &= 0,\\ 3C_1'\cdot x^2 - 2C_2'\, x^{-3} &= \ln x \end{aligned} \tag{2}$$

(да забележиме дека, овде, $f(x)$ е $\ln x$, а не $x^2\ln x$; зошто?). Од првата равенка, $C_2' = -x^5C_1'$ го заменуваме во втората и добиваме $C_1' = \frac{1}{5}x^{-2}\ln x$, па

$$C_1 = -\frac{1}{5}\int \ln x\, d(x^{-1}) = -\frac{1}{5x}(1+\ln x) + A;$$

$$C_2' = -x^5C_1' = -\frac{1}{5}x^3\ell nx, \text{ па}$$
$$C_2 = \frac{1}{80}x^4(1-4\cdot\ell nx) + B.$$

Според тоа, општото решение на (1) ќе биде

$$y = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^{-2} = Ax^3 + Bx^{-2} - \frac{x^2}{16}(3+4\cdot\ell nx).$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 3.

3.21. Да се докаже дека: ако функциите $a_1 = a_1(x),\dots,a_n = a_n(x)$, $f(x)$ се непрекинати во некој интервал I, тогаш секое решение $\Phi(x)$ на ЛДР

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x) \qquad (1)$$

има непрекинат n-ти извод во I.

3.22. Даден е линеарниот оператор

$$L(y) = xy'' - (x+k)y' + ky, \quad k\in\mathbb{N}^0.$$

Да се пресмета: а) $L(3x)$; б) $L(e^x)$; в) $L(\ln x)$; г) $L(p(x))$, $p(x) = 1 + x/1! + \dots + x^k/k!$

3.23. Даден е линеарниот оператор

а) $L(y) = xy'' - (x+2)y' + 2y$;

б) $L(y) = xy'' - (x+3)y' + 3y$.

Да се најде полином $p(x)$ со степен не поголем од 3, таков што $L(p)=0$.

3.24. Да се спроведат деталите на доказот дека операторот L е линеарен (1° и 2° од §3.2), т.е.

$$L(cy) = cL(y), \quad L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Потоа да се покаже дека, за кој било $k\in\mathbb{N}$,

$$L(c_1y_1+\dots+c_ky_k) = c_1L(y_1)+\dots+c_kL(y_k).$$

3.25. Даден е систем функции $y_1,\dots,y_k$, дефинирани на некој интервал I. Да се докаже дека:

а) Ако некоја функција од системот е 0, тогаш системот е линеарно зависен (2^o од §3.3).

б) Системот е линеарно зависен ако и само ако некоја функција од системот може да се претстави како линеарна комбинација од другите функции на системот (3^o од §3.3).

3.26. Да се докаже дека: ако $y_1/y_2 \neq$ конст. на некој подинтервал од $[a,b]$, тогаш функциите y_1, y_2 се линеарно независни на целиот сегмент $[a,b]$.

3.27. Да се утврди дали се линеарно независни следниве системи функции (во интервал што е во пресекот на нивните дефинициони области).

а) $0, x, e^x$; б) $x+1, x+2, x+3$; в) e^x, xe^x;

г) $e^x, e^x\int_0^x e^{-t}dt$; д) $x, x\int_0^1 e^t dt$; ѓ) $\sin x, \sin x\cos x$;

е) $\sin 2x, \sin x\cos x$; ж) $\cos 2x, \sin x, \cos x$; з) $\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x$; ѕ) $\ln(2x), \ln(3x), \ln(4x)$; и) $\mathrm{ch}^2 x, \mathrm{sh}^2 x, 4$;

ј) $1, \arcsin x, \arccos x$; к) e^x, xe^x, x^2e^x; л) e^x, xe^x, xe^{x+2}.

3.28. Докажи дека, ако вронскијанот $W(x)$ на системот функции $y_1,\dots,y_k$ нема нули во интервалот I, тогаш тој систем е линеарно независен во I. Покажи дека обратно не важи (т.е. $W(x)$ може да има нули во I и кога функциите се линеарно независни).

3.29. Да се покаже дека

$$W(e^{kx}, e^{px}, e^{sx}) = (p-k)(s-k)(s-p)\, e^{(k+p+s)k},$$

k, p, s се дадени броеви. Потоа, да се докаже дека e^{kx}, e^{px}, e^{sx} се линеарно независни ако (и само ако) $k \neq p \neq s \neq k$.

3.30. Да се најде вронскијанот W на дадените функции; потоа да се направи заклучок за нивната линеарна независност во назначениот интервал I.

а) $1+x, 2+2x, [0,3]$; б) $1, \sin x, \cos x, [0,\pi]$;

в) $e^{-2x}, e^{-2x}\int_0^x e^{2t}dt, (-\infty, +\infty)$; г) $\ln x, \ln x^2, [1, +\infty)$;

д) $f_1(x) = \begin{cases} x^3, & x\geq 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ $[-2,2]$;

ѓ) $x, x^2, [-1, 1]$; е) x, x^2 $[1, 3]$.

3.31. Да се пресмета грамовата детерминанта Г(в.зад. 3.8) за дадените функции, на назначениот интервал I и да се направи заклучок за нивната линеарна независност.

а) x, x^2, $[-2, 1]$; б) x, x^2, $[1, 2]$; в) f_1, f_2, $[-1, 1]$, од зад. 3.30. д); г) $1 + x$, $2 + 2x$, $[0, 3]$;

д) 1, $\sin x$, $\cos x$, $[0,\pi]$; ѓ) $\cos kx$, $\cos px$, $[0,\pi]$, к, р се дадени броеви (в.зад. 3.30 ѓ), е), д), а), б)).

3.32. Во врска со грамовата детерминанта (зад. 3.8), за даден систем функции $y_1,\dots,y_n$ на $[a,b]$ да се докаже дека:

а) $(y_i, y_j) = (y_j, y_i)$; б) $(cy_i, y_j) = (y_i, cy_j) = c(y_i, y_j)$;

в) Системот од две функции y_1, y_2 е линеарно зависен на $[a,b]$ ако и само ако $\Gamma(y_1, y_2) = 0$.

3.33. За секоја од следните ДР да се покаже дека дадените функции се нејзини решенија. Потоа, да се провери дали се линеарно независни и дали формираат фундаментален систем решенија.

а) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$; e^x, e^{-2x}, e^{3x} во $(-\infty,+\infty)$;

б) $xy''' - y'' = 0$; 1, x, x^3 во $(0,+\infty)$;

в) $y''' + y' = 0$; $\cos x$, $\sin x$ во $(-\infty,+\infty)$;

г) $y'' - y = 0$; e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ во $(-\infty,+\infty)$;

д) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $2x^2 - x$, $x^2 + 2x$, x^2 во $(0,+\infty)$.

3.34. Да се покаже дека функциите x и x^2 не можат да бидат решенија на ДР $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ во $(-\infty,+\infty)$ кога $a(x)$ и $b(x)$ се непрекинати функции во тој интервал.

3.35. Да се најде линеарната ДР ако е зададен еден нејзин фундаментален систем решенија.

а) e^x, e^{3x}; б) e^{-x}, xe^{-x}; в) e^x, x^2e^x; г) $e^x\cos 2x$, $e^x\sin 2x$;

д) x, e^x, e^{-x}; ѓ) $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$; е) 1, x^3, $\ln x$.

3.36. Да се докажат следниве својства на нехомогената ЛДР

$$L(y) \equiv y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{1}$$

($f(x) \not\equiv 0$) и соодветната хомогена, $L(y) = 0$. Ако y_1 и y_2 се решенија на (1), тогаш:

а) $y = y_1 + y_2$ не е решение на (1), а ја задоволува $L(y) = 2f$;

б) $y = y_1 - y_2$ не е решение на (1), а ја задоволува $L(y) = 0$;

в) $y = cy_1$ ($c \neq 1$) не е решение на (1), а е на $L(y) = cf$;

г) $y = y_o + y_1$, каде што y_o е решение на $L(y) = 0$, е решение на (1)

3.37. Со назначената смена на аргументот x да се трансформира дадената ЛДР (во ЛДР со константни коефициенти) и потоа да се најде нејзиниот општ интеграл.

а) $(1+x^2)y'' + xy' + y = 0, \quad x = \operatorname{sh} t$;

б) $x^4y'' + 2x^3y' + k^2y = 0, \quad t = -\frac{1}{x}$;

в) $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = 0, \quad x = e^t + 2$.

3.38. Докажано е (Н.П.Еругин и Т.Пејовиќ) дека: ако ДР

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \tag{1}$$

може да се сведе на ЛДР со константни коефициенти при смена на аргументот, тогаш тоа може да се направи по формула од видот

$$t = c\int\sqrt[n]{a_n(x)}\,dx \qquad (c=\text{конст.}). \tag{2}$$

(Смената (2), и кога не доведува до ЛДР со константни коефициенти, може да се покаже корисна во смисла на упростување на дадена ДР.)

Користејќи ја формулата (2), да се најде соодветна смена и да се интегрира дадената ДР.

а) $y'' - y' + e^{2x}y = 0$; б) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

в) $(\cos x)y'' + (\sin x)y' + (4\cdot\cos^3 x)y = 0$;

г) $4xy'' + (2-\sqrt{x})y' - 6y = 0$.

д) $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$.

3.39. Да се докаже дека една хомогена ЛДР $L(y) = 0$ (да се земе, специјално, од втор ред) останува хомогена и линеарна при смената на аргументот x со $x = \phi(t)$, каде што $\phi(t)$ е произволна n-пати диференцијабилна функција и $\phi'(t) \neq 0$ во интервалот во кој се менува t.

3.40. Со смената $y = zx^{-1/2}$, каде што z е нова функција, да се трансформира ДР $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2-1)y = 0$ и да се најде решението што ги задоволува условите $y(\pi/2) = 0$, $y(\pi) = 1$.

3.41. Да се покаже дека константата k може да се избере така што, со смената $y = x^kz$, ДР

а) $x^2y'' + 4x(x+1)y' + (8x+2)y = 0$,

б) $x^2y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2y = 0$,

в) $x^2y'' + (3x^2+4x)y' + (2x^2+6x+2)y = 0$

се сведува на ЛДР со константни коефициенти и потоа да се реши; за б) да се најде и решението што ги задоволува условите $y(\pi/2) = 0$, $y(\pi) = -1$, а за в) - условите $y(1) = e^{-2}$, $y(-1) = e^2$.

3.42. Да се докаже дека линеарноста и хомогеноста на ЛДР $L(y)=0$ (да се земе, специјално, од втор ред) се запазува при линеарна хомогена трансформација на непознатата функција, $y(x) = \alpha(x)\cdot z(x)$, каде што z е нова непозната функција, а $\alpha(x)$ е дадена функција.

Во задачите 3.43 - 3.52, знаејќи едно партикуларно решение y_1 (или некој негов одреден облик), да се реши дадената хомогена ЛДР.

3.43. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$.

3.44. $y'' + y'\operatorname{tg}x + y\cos^2x = 0$, $y_1 = \cos(\sin x)$.

3.45. $y'' + \frac{x}{1-x}y' + \frac{y}{x-1} = 0$, $y_1 = e^x$.

3.46. $x^2(\ln x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

3.47. $(x-2x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, во $(0, 1/2)$; y_1 е полином од прв степен.

3.48. $(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$, y_1 е полином од прв степен.

3.49. $(x^2-2x-1)y'' - (x^2-3)y' + (2x-2)y = 0$, $y_1 = e^x$.

3.50. а) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, $y_1 = e^{ax}$,

б) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{ax}$,

каде што a е константа што треба да се определи.

3.51. $x^2(2x-1)y''' + x(4x-3)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$

3.52. Да се покаже дека ДР

$$xy'' - (x+k)y' + ky = 0$$

има п.и. y_1 што не зависи од параметарот k ($k \in \mathbb{N}^0$). Потоа да се најде нејзиното општо решение; специјално, да се земе $k = 3$.

3.53. Да се решат следниве хомогени линеарни ДР со константни коефициенти:

а) $y''' + y'' - 12y' = 0$; б) $y^{IV} + y'' = 0$;

в) $y^{IV} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$; г) $y^{V} - y' = 0$;

д) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$; ѓ) $y^{V} - 4y^{IV} + 6y''' - 4y'' + y' = 0$.

3.54. Да се докаже дека функцијата $y = x^k$ (k е константа) е решение на ојлеровата ДР од втор ред, $x^2y'' + axy' + by = 0$, ако и само ако k е корен на помошната равенка

$$k(k-1) + ak + b = 0.$$

3.55. Користејќи ја зад. 3.54 (или со смената $x = e^t$) да се решат следниве ојлерови ДР:

а) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$; б) $4x^2y'' + xy' - y = 0$;

в) $x^2y'' + xy' - 3y = 0$; г) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

3.56. Да се докаже дека $y = x^k$ е решение на ојлеровата ДР од трет ред, $x^3y''' + a\cdot x^2y'' + bxy' + cy = 0$ ако и само ако константата k е решение на помошната равенка $k(k-1)(k-2) + ak(k-1) + kb + c = 0$.

Користејќи го тоа, да се реши ДР

а) $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$;

б) $6x^3y''' - x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$.

3.57. Да се решат следниве ојлерови ДР

а) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$; б) $x^2y''\ \ 7xy' + 20y = 0$;

в) $(3x+2)^2y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 0$;

г) $(2x+1)^2y'' - (4x+2)y' + 4y = 0$;

д) $x^4y^{IV} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$.

3.58. Да се покаже дека ДР

а) $(y-xy')^2 + x^2yy'' = 0$; б) $(xy'+y)^2 + xy(xy''+2y') = 0$, со смената $y^2 = z$, се трансформира во ојлерова. Потоа, да се најде нејзиниот општ интеграл.

3.59. Со помош на т.н. метод на избор (в. 3.17 и Т.4 од §3.7), да се решат следниве нехомогени ЛДР со константни коефициенти.

а) $y'' + y' - 2y = \operatorname{ch}x$; б) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$;

в) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$; г) $y^{IV} + 4y'' = 45\sin 3x$;

д) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 48\,xe^x$.

3.60. Користејќи го принципот на суперпозиција (Т.3 од §3.7), да се решат следниве нехомогени ЛДР со константни коефициенти.

а) $y'' + 4y' + 3y = 2x + 1 + \cos x + \sin x$;

б) $y''' + 4y'' + 4y' = 8 + 4\cdot\sin x\cos x$;

в) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 4x + 5e^{2x} + 20\cdot\cos x$.

3.61. Да се најде партикуларен интеграл на ДР

$$y'' + 2ky' + (k^2+n^2)y = e^{-kx}\sin px,$$

а) кога $p = n$; б) кога $p \neq n$.

Со помош на Лагранжовиот метод (Т.2 од §3.7) да се решат следниве нехомогени ЛДР (3.62 - 3.69).

3.62. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$. 3.63. $y'' + y = (\cos 2x)^{-3/2}$.

3.64. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$. 3.65. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3.66. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}/x^2$. 3.67. $y''' + y' = \sec x$.

3.68. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$. 3.69. $xy'' - y' = x^2$.

Со помош на Лагранжовиот метод (или поинаку) да се решат следниве нехомогени ојлеровски ДР (3.70 - 3.74).

3.70. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$. 3.71. $x^2y'' - 2y = \ln x$.

3.72. $(2x-3)^2y'' + (2x-3)y' + y = \sec[\ln(2x-3)]$.

3.73. $x^2y'' - xy' + y = x^2 + \ln x$.

3.74. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln x$.

* * *

3.92. Да се докаже дека ЛДР

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad (1)$$

со соодветен избор на u во смената $y = uv$, се трансформира во ЛДР

$$v'' + p(x)v = q(x) \qquad (2)$$

(без членот со првиот извод), каде што

$$p(x) = b - a^2/4 - a'/2, \qquad q(x) = f(x)e^{\int (a/2)dx}$$

(ДР (2) се вика канонична форма на (1), а $p(x)$ - инваријанта на (1)).

3.93. Ослободувајќи се од членот со прв извод при згодна смена (т.е. сведувајќи ја на канонична форма), да се реши ДР:

а) $y'' + 2xy' + x^2y = 0$; б) $4x^2y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$;

в) $x^2y'' + xy' + (x^2-1/4)y = 0$ (беселова ДР);

г) $xy'' + 2y' - xy = e^x$.

3.94. ДР $L(y) \equiv y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ со смената $y = uv$ може да се сведе на канонична форма $v'' + p(x)v = 0$ (в. 3.92). Да се покаже дека:

а) нулите на функциите y и v се совпаѓаат;

б) две линеарно независни решенија y_1, y_2 на $L(y) = 0$ не може да имаат заедничка нула.

3.95. Ако $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се решенија на ДР $p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$, тогаш изразот $K = p(u'v-uv')$ е константа. Докажи!

3.96. Нека y_1, y_2 е фундаментален систем решенија на ДР $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Да се изразат коефициентите $a_j = a_j(x)$ со помош на y_1 и y_2.

3.97. Да се докаже дека, ако y_1, y_2 се линеарно независни решенија на ДР $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ па интервалот $I = I_{нк}$, тогаш нивниот вронскијан $W(x) = y_1y_2' - y_2y_1'$ ја задоволува равенката $W' + a_1W=0$, така што

$$W = C\cdot\exp(-\int a_1dx), \quad \text{т.е.} \quad W(x) = W(x_0)\exp(-\int_{x_0}^{x} a_1dx) \qquad (1)$$

за $x_o \in I$. Докажи! Од тоа да се изведе заклучок дека, ако $W(x)$ има нула во I, тогаш $W(x) \equiv 0$.

(Формулите (1) важат и за фундаментален систем решенија $y_1,\dots,y_n$ на хомогена ЛДР од n-ти ред; тие се викаат формули на Остроградски-Лиувил).

3.98. Нека $a_1 = a_1(x),\dots,a_n = a_n(x)$ се непрекинати функции во интервалот I. Тогаш множеството $\mathcal{S}$ од сите решенија на ДР

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$$

на I, претставува векторски простор (во однос на обичните операции собирање на функции и множење на функција со скалар). Натаму, ако $p = p(x)$ е во $\mathcal{S}$, и p ги задоволува почетните услови

$$p(x_o) = 0, \quad p'(x_o) = 0, \quad \dots, \quad p^{(n-1)}(x_o) = 0,$$

во некоја точка x_o од I, тогаш p е нултата функција на I.

3.99. Да се докаже дека максималниот број линеарно независни решенија на хомогена ЛДР е еднаков со редот на таа ДР.

Глава 4

РЕШАВАЊЕ ДР СО СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ФУНКЦИИ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 4

4.1. Дадена е ДР

$$y' = y - x. \tag{1}$$

Да се најде, во облик на степенски ред, она решение што го задоволува условот $y = y_o$ кога $x = 0$. Да се најде радиусот на конвергенцијата на добиениот ред. Равенката (1) да се интегрира како линеарна ДР од прв ред (§2.1).

Решение. Нека бараното решение е редот

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{2}$$

Тогаш $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$, па

$$y' - y + x = (a_1-a_o) + (2a_2-a_1+1)x + (3a_3-a_2)x^2 + \dots + (na_n-a_{n-1})x^{n-1} + \dots = 0.$$

Изедначувајќи ги со нула коефициентите на степените од x, добиваме

$$a_1 - a_o = 0, \text{ т.е. } a_1 = a_o; \quad 2a_2 - a_1 + 1 = 0, \text{ т.е. } a_2 = \frac{1}{2}(a_o-1);$$

$$3a_3 - a_2 = 0, \text{ т.е. } a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}(a_o-1); \dots;$$

$$na_n - a_{n-1} = 0, \text{ т.е. } a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} \quad (n \ge 3) \tag{3}$$

Наредните коефициенти a_4, a_5, ... можеме да ги пресметаме со помош на рекурентната формула (3):

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{24}(a_o-1); \quad a_5 = \frac{1}{5}a_4 = \frac{1}{120}(a_o-1); \dots$$

Но, во овој случај, кој било коефициент a_n $(n \ge 3)$ од (2) може да се изрази од (3) и на следниов начин:

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}a_{n-2} = \dots = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{3}a_2,$$

т.е.

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)\dots3\cdot2}(a_o-1) = \frac{1}{n!}(a_o-1). \tag{4}$$

Бидејќи $y = y_o$ за $x = 0$, од (2) добиваме $a_o = y_o$, па $a_n = \frac{1}{n!}(y_o-1)$. Според тоа, бараното решение (2) ќе биде:

$$y = y_o + y_o x + \frac{1}{2}(y_o-1)x^2 + \frac{1}{3!}(y_o-1)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}(y_o-1)x^n + \dots$$
$$= (y_o-1)(1+x+\frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots) + 1 + x.$$

Според Даламберовиот критериум и (3) имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0,$$

што значи дека добиениот ред е конвергентен за секој $x \in (-\infty,+\infty)$. Всушност, тој ја претставува функцијата e^x, па бараното решение може да се напише во обликот

$$y = (y_o-1)e^x + 1 + x.$$

ДР (1) можеме да ја решиме по формулата (3) од §2.1.

$$y = e^x[C - \int e^{-x}x\,dx] = Ce^x + x + 1;$$

поради $y = y_o$ кога $x = 0$, добиваме $C = y_o - 1$, па $y = (y_o-1)e^x + 1 + x$, како погоре.

4.2. Да се најде решение на ДР

$$(x-1)y' - y - x + 3 = 0 \tag{1}$$

во облик на степенски ред, по степените на $x-2$ (т.е. со центар $x_o=2$).

Решение. Кога се бара решение во степенски ред по степените на $x - x_o$, погодно е да се трансформира дадената ДР со смената $t=x-x_o$ и да се бара решение на добиената ДР по степените на t; на крајот треба само да се вратиме на првобитниот аргумент x.

Ставајќи $t = x - 2$, т.е. $x = t + 2$, ДР (1) станува

$$(t+1)\dot{y} - y - t + 1 = 0 \qquad (y = dy/dt). \tag{2}$$

Нека бараното решение е редот

$$y = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots \tag{3}$$

Тогаш $\dot{y} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + na_n t^{n-1} + \dots$, па

$$(t+1)\dot{y} - y - t + 1 = (a_1-a_o+1) + (2a_2+a_1-a_1-1)t + (3a_3+2a_2-a_2)t^2 +$$
$$+ \dots + [(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n]t^n + \dots = 0$$

Ги изедначуваме со нула коефициентите пред степените на t:

$$\begin{array}{l|l}
t^0 & a_1 - a_0 + 1 = 0, \quad a_1 = a_0 - 1; \\
t^1 & 2a_2 - 1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}; \\
t^2 & 3a_3 + a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{6}; \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
t^n & (n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1}\cdot a_n, \quad n\geq 2. \quad (4)
\end{array}$$

Значи,

$$a_n = -\frac{n-2}{n}a_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a_{n-2} = -\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}a_{n-3} =$$
$$= \dots = (-1)^n\frac{(n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1}{n(n-1)\dots 4\cdot 3}a_2 = (-1)^n\frac{1}{n(n-1)}, \quad n\geq 2.$$

Според тоа, редот (3) ќе биде

$$y = a_0 + (a_0-1)t + \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots + (-1)^n\frac{t^n}{n(n-1)} + \dots$$

Имајќи го предвид (4), добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}t^{n+1}}{a_n t^n} = |t|\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = |t| ,$$

па редот конвергира за $|t| < 1$. Заменувајќи го t со $x - 2$, го добиваме редот - решение на (1):

$$y = a_0(x-1) - (x-2) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n(n-1)};$$

тој ред конвергира за $|x - 2| < 1$.

4.3. Да се најдат првите четири членови (до членот со x^4) од разложувањето во степенски ред на решението на ДР

$$(1+y)y' - xy = 2(1+x), \quad y(0) = 1. \tag{1}$$

Решение. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots ,$ (2)

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots ;$$

од $y = 1$ за $x = 0$ добиваме $a_0 = 1$. Ги заменуваме во (1):

$$(2+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 + \dots)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^4 + \dots) - x(1+a_1x+$$
$$+ a_2x^2 + \dots) - 2 - 2x = 0$$

Изедначувајќи ги со нула коефициентите пред степените на x, добиваме

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2a_1 - 2 = 0, \quad a_1 = 1; \\
x^1 & 4a_2 + a_1^2 - 1 - 2 = 0; \quad a_2 = 1/2; \\
x^2 & 6a_3 + 2a_1a_2 + a_1a_2 - a_1 = 0, \quad a_3 = -1/12; \\
x^3 & 8a_4 + 3a_1a_3 + 2a_2^2 + a_1a_3 - a_2 = 0, \quad a_4 = 1/24,
\end{array}$$

па бараниот ред е

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \qquad (3)$$

(Овде не се обидуваме да најдеме рекурентна формула за n-тиот член и нема да ја проверуваме конвергенцијата на редот (3).)

4.4. Да се најде оптшото решение на ДР

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad (1)$$

во облик на степенски ред, по степените на x.

Решение. Во (1) ги заменуваме

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots , \qquad (2)$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-2} + \dots ,$$

$$y'' = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \dots + (n-1)na_nx^{n-1} + \dots ; \; y'' - 4y' + 4y =$$

$$= (2a_2-4a_1+3a_o) + (6a_3-8a_2+3a_1)x + (12a_4-12a_3+3a_2)x^2 + \dots +$$

$$+ [(n+1)(n+2)a_{n+2} - 4(n+1)a_{n+1} + 3a_n]x^n + \dots = 0.$$

Ги означуваме со нула коефициентите на x-овите:

$$\begin{array}{c|l}
x^o & 2a_2 - 4a_1 + 3a_o = 0, \quad a_2 = 2a_1 - \frac{3}{2}a_o; \\
x^1 & 6a_3 - 8a_2 + 3a_1 = 0, \quad a_3 = \frac{13}{6}a_1 - 2a_o; \\
x^2 & 12a_4 - 12a_3 + 3a_2 = 0, \quad a_4 = \frac{5}{3}a_1 - \frac{13}{8}a_o; \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x^n & \qquad a_{n+2} = \dfrac{4(n+1)a_{n+1} - 3a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \geq 0.
\end{array}$$

Значи, бараниот ред (2) ќе биде

$$y = a_o + a_1x + (2a_1 - \tfrac{3}{2}a_o)x^2 + (\tfrac{13}{6}a_1 - 2a_o)x^3 + \dots \qquad (3)$$

каде што константите a_o и a_1 се произволни.

Забелешка. Дадената ДР можеме (многу едноставно) да ја решиме како во §2.3; општото решение е $y = Ae^x + Be^{3x}$. Дали решението - редот (3) е еквивалентно со ова решение?

Ако ставиме $a_o = A + B$, $a_1 = A + 3B$, од редот (3) добиваме

$$y = A + B + (A+3B)x + (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{9}{2}B)x^2 + (\tfrac{1}{6}A + \tfrac{27}{6}B)x^3 + \dots =$$

$$= A(1+x+\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) + B(1+3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots) =$$

$$= Ae^x + Be^{3x}.$$

Од овој пример заклучуваме дека, иако решението на една ДР е позната (елементарна) функција, методот на степенски редови не мора да води непосредно до вообичаената форма на таа функција.

<u>4.5.</u> Да се најде општото решение на ДР

$$y'' + (x+2)y' + y = 0 \tag{1}$$

во степенски ред, по степените на $x + 1$.

<u>Решение.</u> Ставаме $t = x + 1$ во (1) и бараме решение во ред по степените на t на ДР

$$\ddot{y} + (t+1)\dot{y} + y = 0 \quad (\dot{y} = dy/dt); \tag{1'}$$

$$y = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n + \dots , \tag{2}$$

$$\dot{y} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + na_n t^{n-1} + \dots ,$$

$$\ddot{y} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3 t + \dots + (n-1)n\cdot a_n t^{n-2} + \dots ;$$

$$\ddot{y} + (t+1)\dot{y} + y = (2a_2 + a_1 + a_o) + (6a_3 + 2a_2 + 2a_1)t + \dots +$$
$$+ \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n\right]t^n + \dots = 0$$

Изедначувајќи ги коефициентите со нула, добиваме

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_o + a_1), \quad a_3 = -\frac{1}{3}(a_1 + a_2) = \frac{1}{6}(a_o - a_1), \dots ,$$
$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n = 0,$$
$$a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}(a_n + a_{n+1}), \quad n \geq 0. \tag{3}$$

Имајќи предвид дека $t = x + 1$, бараното решение е

$$y = a_o\left[1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3 + \frac{1}{12}(x+1)^4 - \frac{1}{20}(x+1)^5 + \dots\right] +$$
$$+ a_1\left[(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{6}(x+1)^3 + \frac{1}{6}(x+1)^4 - \frac{1}{36}(x+1)^6 + \dots\right].$$

<u>4.6.</u> Да се покаже дека ДР

$$x^2 y' + (x-1)y = -1 \tag{1}$$

нема решение во вид на степенски ред со центар $x_o = 0$.

<u>Решение.</u> Ги заменуваме во (1)

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{2}$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots ;$$

$$x^2 y' + (x-1)y + 1 = 1 - a_o + (a_o - a_1)x + (a_1 + a_1 - a_2)x^2 +$$
$$+ (2a_2 + a_2 - a_3)x^3 + \dots + [na_{n-1} - a_n x^n + \dots] = 0, \text{ па}$$

$1 - a_0 = 0,\ a_0 = 1;\ a_0 - a_1 = 0,\ a_1 = 1;\ 2a_1 - a_2 = 0,\ a_2 = 2;$ $3a_2 - a_3 = 0,\ a_3 = 3a_2 = 3\cdot 2 = 3!;\ \ldots,\ na_{n-1} - a_n = 0,\ a_n = na_{n-1} = n!$ Значи:

$$y = 1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} |(n+1)!x^{n+1}/n!x^n| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, следува дека добиениот ред е дивергентен за секој $x \neq 0$. Следствено, дадената равенка нема решение во обликот (2) (иако има решение - општото решение е $y = \frac{C}{x} e^{-1/x}$).

4.7. Да се докаже дека ермитовите полиноми ја задоволуваат врската (6) од §4.3 :

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H'_n(x). \tag{1}$$

Решение. Диференцирајќи го равенството (5) од §4.3, добиваме

$$H'_n(x) = (-1)^n x\, e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n} + (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^{n+1} e^{-x^2/2}}{dx^n},$$

т.е. пак според (5):

$$H'_n(x) = xH_n(x) - H_{n+1},$$

од каде што се добива (1).

4.8* Да се докаже дека за ермитовите полиноми важи

$$H'_n(x) = nH_{n-1}(x). \tag{1}$$

Решение. Диференцирајќи го по x: $e^{tx-t^2/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$, добиваме

$$te^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!}, \text{ т.е. } \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Ги изедначуваме коефициентите на t^n од двете страни:

$$H_{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!} = H'_n\cdot\frac{1}{n!}, \quad \text{па} \quad H'_n(x) = nH_{n-1}(x).$$

4.9. Да се докаже дека ермитовиот полином H_n ја задоволува ермитовата ДР $y'' - xy' + ny = 0$.

Решение. Го диференцираме по x равенството $H_{n+1} = xH_n - H'_n$ (в. 4.7):

$$H'_{n+1} = H_n + xH'_n - H''_n.$$

Користејќи го равенството $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ (в. 4.8), добиваме

$$(n+1)H_n = H_n + xH'_n - H''_n, \quad \text{т.е.} \quad H''_n - xH'_n + nH_n = 0,$$

што значи дека $y = H_n$ е решение на ДР $y'' - xy' + ny = 0$.

4.10. Полиномот $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x$ да се претстави како линеарна комбинација на ермитски полиноми.

Решение. Бидејќи $H_3(x) = x^3 - 3x$ (в.(5) од §4.3), добиваме $x^3 = H_3(x) + 3x$, па

$$p(x) = 2(H_3(x)+3x) - 5x^2 - 4x = 2H_3(x) - 5x^2 + 2x;$$

потоа, од $H_2(x) = x^2 - 1$ добиваме $x^2 = H_2(x) + 1$, па

$$p(x) = 2H_3(x) - 5(H_2(x)+1) + 2x = 2H_3(x) - 5H_2(x) + 2x - 5;$$

на крајот, бидејќи $H_1(x) = x$ и $H_o(x) = 1$, добиваме

$$p(x) = 2H_3(x) - 5H_2(x) + 2H_1(x) - 5H_o(x).$$

4.11. Да се докаже дека

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ n!\sqrt{2\pi}, & m = n, \end{cases} \tag{1}$$

т.е. дека ермитовите полиноми се ортогонални на x-оската $(-\infty<x<+\infty)$ во однос на тежинската функција $p(x) = e^{-x^2/2}$.

Решение. Да ставиме $n > m$ и да ја примениме формулата (5) од §4.3; добиваме

$$I = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n} dx.$$

Применуваме делумна интеграција и добиваме

$$I = (-1)^n \left[H_m(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2/2}}{dx^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2/2}}{dx^{n-1}} dx.$$

Членот што не е под знак на интеграл е производ на полином и $e^{-x^2/2}$. Затоа тој е 0 кога $x\to\pm\infty$. Делумната интеграција, повторена m пати, ќе го даде изразот

$$I = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2/2}}{dx^{n-m}} dx. \tag{2}$$

Бидејќи $H_m^{(m)}(x) = m!$, добиваме

$$I = (-1)^{n+m} m! \left[\frac{d^{n-m-1} e^{-x^2/2}}{dx^{n-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Ако $n = m$, формулата (2) дава

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}(x)e^{-x^2/2}dx = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = n!\sqrt{2\pi},$$

при што е користен резултатот $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (в. [ЧУ], кн. III, стр. 242).

Забелешка. Од овој резултат следува дека, ако една функција е еднозначна, конечна и непрекината по делови на сегментот $[a, a+2\pi]$, а има конечен број максимуми и минимуми на тој сегмент (т.е. $f(x)$ ги задоволува условите на Дирихле), тогаш таа може да се развие во ред по ермитовите полиноми, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(x),$$

каде што

$$c_k = \frac{1}{k!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2/2}H_k(x)dx.$$

4.12. Да се најде општото решение на ДР $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ во облик

$$y = a_1 x + a_0\left[1 - \frac{1\cdot 2}{2!}x^2 - \frac{1\cdot 2\cdot 4}{4!}x^4 - \frac{(1\cdot 3)(2\cdot 4\cdot 6)}{6!}x^6 - \ldots\right]$$

и да се покаже дека редот може да се изрази во форма $1 - \frac{x}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Општото решение на една лежандрова ДР е $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$, каде што y_1 и y_2 се определени со (4') и (4'') од §4.4. Во дадената лежандрова ДР е $n = 1$, па заменувајќи $n = 1$ во (4') и (4'') од §4.4, добиваме $y_2 = x$ и

$$y_1 = 1 - \frac{1\cdot 2}{2!}x^2 - \frac{1\cdot 2\cdot 4}{4!}x^4 - \frac{(1\cdot 3)(2\cdot 4\cdot 6)}{6!}x^6 - \ldots,$$

$$= 1 - x\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\right].$$

Од друга страна, бидејќи

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots + (-1)^{k-1}x^k/k + \ldots,$$

$$\ln(1-x) = -(x+x^2/2+x^3/3+\ldots+x^k/k+\ldots),$$

добиваме

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\right].$$

Според тоа, $y_1 = 1 - \frac{x}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$.

4.13. Користејќи ја формулата: $P_n(x) = \sum_{n=0}^{t} \frac{(-1)^m(2n-2m)!x^{n-2m}}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}$ (t е $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$), да се најде $P_n(x)$, за $n=0,1,2,3,4$.

Решение. Споменатата формула ќе ја напишеме во обликот

$$P_n(x) = \frac{(2n)!x^n}{2^n(n!)^2} - \frac{(2n-2)!x^{n-2}}{2^n\cdot 1!(n-1)!(n-2)!} + \frac{(2n-4)!x^{n-4}}{2^n\cdot 2!(n-2)!(n-4)!} - \dots \quad (1)$$

За $n = 0, 1, 2, 3, 4$, по ред, од формулата (1) имаме

$$P_0(x) = \frac{0!x^0}{2^0(0!)^2} = 1; \qquad P_1(x) = \frac{(2\cdot 1)!x^1}{2^1\cdot(1!)^2} - 0 = x;$$

$$P_2(x) = \frac{4!x^2}{2^2(2!)^2} - \frac{2!x^0}{2^2\cdot 1!0!} = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(3x^2-1);$$

$$P_3(x) = \frac{6!x^3}{2^3(3!)^2} - \frac{4!x^1}{2^3\cdot 2!1!} = \frac{1}{2}\cdot(5x^3-3x);$$

$$P_4(x) = \frac{8!x^4}{2^4(4!)^2} - \frac{6!x^2}{2^4\cdot 3!2!} + \frac{4!x^0}{2^4\cdot 2!2!0!} = \frac{1}{8}\cdot(35x^4-30x^2+3).$$

4.14. Да се покаже дека $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ (в. (8) од §4.4) ја задоволува ДР

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (1)$$

Решение. Лежандровиот полиноми $P_n(x)$ се разликува само за константен множител од функцијата $y = R_n^{(n)}(x)$, каде што $R_n = (x^2-1)^n$, па бидејќи ДР (1) е хомогена, доволно е да се покаже дека таа функција е нејзино решение.

Да го најдеме изводот на $R_n = (x^2-1)^n$:

$$R'_n = 2nx(x^2-1)^{n-1} = \frac{2nx}{x^2-1}(x^2-1)^n = \frac{2nx}{x^2-1}R_n;$$

значи:

$$(x^2-1)R'_n = 2nxR_n.$$

Ова равенство ќе го диференцираме $(n+1)$ пат, при што ќе ја искористиме Лајбницовата формула

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (n+1)u^{(n)}v' + \dots + uv^{(n+1)};$$

имаме

$$(x^2-1)R_n^{(n+2)} + (n+1)2xR^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}2R_n^{(n)} =$$

$$= 2nxR_n^{(n+1)} + 2n(n+1)R_n^{(n)},$$

т.е.

$$(1-x^2)R_n^{(n+2)} - 2nxR_n^{(n+1)} + n(n+1)R_n^{(n)} = 0.$$

Тоа значи дека $y = R_n^{(n)}(x)$, а со неа и $P_n(x)$, е решение на ДР (1).

4.15. Да се покаже дека за лежандровите полиноми важи следнава рекурентна врска

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\ldots \quad (1)$$

Решение. Генератрисата на лежандровите полиноми ќе ја означиме со

$$G(t,x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}.$$

Бидејќи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2}\cdot(1-2xt+t^2)^{-3/2}(2t-2x) = \frac{x-t}{1-2xt+t^2}G(t,x),$$

добиваме

$$(1+t^2 - 2xt)\frac{\partial G}{\partial t} - (x-t)G = 0. \quad (2)$$

Во оваа равенка ќе го замениме редот (9) од §4.4, т.е.

$$G = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = P_o(x) + tP_1(x) + \ldots + t^nP_n(x)+\ldots \quad (3)$$

и ќе добиеме

$$(1+t^2-2xt)\left[P_1(x) + 2tP_2(x) + 3t^2P_3(x) +\ldots+ nt^{n-1}P_n(x) +\ldots\right] -$$
$$- (x-t)\left[P_o(x) + tP_1(x) + t^2P_2(x) +\ldots+ t^nP_n(x) +\ldots\right] = 0.$$

Ќе ги собереме коефициентите при еднаквите степени на t:

$$\left[P_1 - xP_o\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}\ t^n\right] = 0.$$

Бидејќи збирот на редот по t е идентички еднаков со нула, следува дека се нули коефициентите при сите степени на t:

$$P_1 - xP_o = 0,$$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

Од тоа следува релацијата (1).

4.16. Да се покаже дека лежандровиот полином $P_n(x)$ е ортогонален на сегментот $[-1,1]$ со кој било полином $Q_m(x)$ којшто има помал степен од него $(m < n)$, т.е.

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)Q_m(x)dx = 0 \qquad (m < n). \quad (1)$$

Специјално, $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad (m \neq n).$ (2)

Решение. Имајќи предвид дека $P_n(x)$ се разликува од $R_n^{(n)}(x)$, $R_n = (x^2-1)^n$, само за константен множител, доволно е да докажеме дека

$$I = \int_{-1}^{1}R_n^{(n)}(x)\,Q_m(x)dx = 0. \quad (3)$$

Уочувајќи дека $R_n(\pm 1) = 0$, $R'_n(\pm 1) = 0$, ..., $R_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$ и $Q_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$, со делумна интеграција ќе ја установиме точноста на (3). Имено, ставајќи $u = Q_m(x)$, $dv = R_n^{(n)}(x)dx$, добиваме:

$$I = Q_m(x)\, R_n^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'_m(x)\cdot R_n^{(n-1)}(x)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} Q'_m(x)\cdot R_n^{(n-1)}(x)dx = -Q'_m(x)\cdot R_n^{(n-2)}(x)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} Q''_m \cdot R_n^{(n-2)}(x)dx = \int_{-1}^{1} Q''_m(x)\cdot R_n^{(n-2)}(x)dx =$$

$$= \dots = \pm \int_{-1}^{1} Q_m^{(m+1)}(x)\cdot R_n^{(n-(m+1))}(x)dx = 0.$$

Со тоа е докажано равенството (1).

Бидејќи $m \neq n$, едниот е помал од другиот, па применувајќи ја (1), ја добиваме точноста и на (2).

<u>4.17.</u> Да се докаже дека секој полином $Q_n(x)$ од n-ти степен може да се изрази со помош на лежандровите полиноми во обликот

$$Q_n(x) = c_o P_o(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_n P_n(x). \qquad (1)$$

<u>Решение.</u> Бидејќи $P_o(x) = 1$ и $P_1(x) = x$, за кои било полиноми $Q_o(x) = a_o$ и $Q_1(x) = a_o + a_1 x$ имаме

$$Q_o(x) = a_o P_o(x), \qquad Q_1(x) = a_o P_o(x) + a_1 P_1(x),$$

т.е. формулата (1) важи за $n = 0$ и $n = 1$.

Да претпоставиме дека (1) е точна сè до некој природен број n и да го разгледаме полиномот

$$Q_{n+1}(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} \qquad (2)$$

Од формулата (1) во зад. 4.13 имаме

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+2)!\,x^{n+1}}{2^{n+1}[(n+1)!]^2} - \frac{(2n)!\,x^{n-1}}{2^{n+1} n!\,(n-1)!} + \dots,$$

па

$$x^{n+1} = \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} P_{n+1}(x) + \frac{(2n)!\,[(n+1)!]^2}{n!\,(n-1)!\,(2n+2)!} x^{n-1} - \dots$$

Заменувајќи го ова во (2), полиномот $Q_{n+1}(x)$ го добива обликот

$$Q_{n+1}(x) = (b_o + b_1 x + \dots + b_n x^n) + c_{n+1} P_{n+1}(x),$$

каде што $c_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} a_{n+1}$, а $b_o, b_1, \dots, b_n$ се коефициенти, добиени со собирање по извршеното заменување. Бидејќи полиномот $b_o + b_1x + \dots + b_nx^n$ (кај $Q_{n+1}(x)$, во заградите) може да се напише во обликот (1), добиваме дека

$$Q_{n+1}(x) = c_oP_o(x) + c_1P_1(x) + \dots + c_nP_n(x) + c_{n+1}P_{n+1}(x),$$

т.е. (1) важи и за $n + 1$. Следствено, формулата (1) важи за секој природен број n.

4.18. Да се провери дали во точката $x = 0$ се исполнети условите на Т.1 (на Фукс) од §4.5 за дадената ДР да има решение во форма на обопштен степенски ред:

а) $(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$; б) $2x^3y'' + x^2y + y = 0$;

в) $y'' + \frac{1}{x}y' + e^{1/x}y = 0$.

Решение. За една функција $f(x)$ велиме дека е аналитична во точката $x = a$, ако $f(x)$ може да се развие во тејлоров ред, по степените на $x-a$ (со позитивен радиус на конвергенција); во тој случај $x=a$ ја викаме обична или регуларна точка за $f(x)$. Ако $f(x)$ е аналитична во некоја ε-околина на точката $x = c$, но не е аналитична во c, тогаш c се вика изолирана сингуларна точка. Една изолирана сингуларна точка c на $f(x)$, во чија близина $f(x)$ останува еднозначна, а за $\frac{1}{f(x)}$ таа е обична точка, се вика пол на $f(x)$ (в. и [ЧУ], кн. III, стр. 355). На пример, $f(x) = 1/(1-x^2)$ е аналитична во точката $x = 0$, зашто $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots$, а не е аналитична во $x = 1$; точката $x = 1$ е пол за $f(x)$.

Пишувајќи ја дадената ДР во обликот

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

имаме:

а) $f_1(x) = -3/(x-x^2)$ и $f_2(x) = 2/(x-x^2)$; $x = 0$ е пол за секоја од тие функции, зашто таа е обична точка за $1/f_1(x) = -(x-x^2)/3$ и за $1/f_2(x) = (x-x^2)/2$. Бидејќи $xf_1(x) \to -3$ и $x^2f_2(x) \to 0$ кога $x \to 0$, следува дека дадената ДР има решение во облик на обопштен степенски ред.

б) $f_1(x) = 1/x$ и $f_2(x) = 1/x^3$; $x = 0$ е пол за двете функции, но вториот услов од Т.1 не е исполнет за $f_2(x)$; имено, $x^2f_2(x) = 1/x$ е неограничена кога $x \to 0$.

в) Точката $x = 0$ за $f_1(x) = \frac{1}{x}$ е пол, а за $f_2(x) = e^{1/x}$ не е пол; имено, за $1/f_2(x) = e^{-1/x}$ точката $x = 0$ не е обична ($e^{-1/x} = 1 - 1/x + 1/x^2 - \dots$; во овој случај, $x = 0$ се вика сушт<u>инска</u> сингуларна точка).

4.19. Со помош на обопштени степенски редови, да се реши ДР

$$2(x^2+x^3)y'' - (x-3x^2)y' + y = 0. \tag{1}$$

Решение. Бараме решение во облик на редот (2) од §4.5, па

$$y = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \dots + a_nx^{r+n} + \dots ,$$

$$y' = ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + \dots + (r+n)a_nx^{r+n-1} + \dots ,$$

$$y'' = (r-1)ra_0x^{r-2} + r(r+1)a_1x^{r-1} + \dots + (r+n-1)(r+n)a_nx^{r+n-2} + \dots$$

Заменувајќи во (1), добиваме

$$2(r-1)ra_0x^r + 2r(r+1)a_1x^{r+1} + \dots + 2(r+n-1)(r+n)a_nx^{r+n} + \dots$$
$$+ 2(r-1)ra_0x^{r+1} + 2r(r+1)a_1x^{r+2} + \dots + 2(r+n-1)(r+n)a_nx^{r+n+1} + \dots$$
$$- ra_0x^r - (r+1)a_1x^{r+1} - \dots - (r+n)a_nx^{r+n} - \dots + 3ra_0x^{r+1} +$$
$$+ 3(r+1)a_1x^{r+2} + \dots + 3(r+n)a_nx^{r+n+1} + \dots + a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} +$$
$$+ \dots + a_nx^{r+n} + \dots = 0.$$

Ги изедначуваме со 0 коефициентите на x^r, x^{r+1}, ...

$$x^r : 2(r-1)ra_0 - ra_0 + a_0 = (2r^2-3r+1)a_0 = 0, \tag{2}$$

$$x^{r+1} : 2r(r+1)a_1 + 2(r-1)ra_0 - (r+1)a_1 + 3ra_0 + a_1 =$$

$$\dots\dots\dots = (2r^2+r)a_1 + (2r^2+2)a_0 = 0,$$

$$x^{r+n}: 2(r+n-1)(r+n)a_n + 2(r+n-2)(r+n-1)a_{n-1} - (r+n)a_n +$$
$$+ 3(r+n-1)a_{n-1} + a_n = (r+n-1)(2r+2n-1)(a_n+a_{n-1}) = 0 \tag{3}$$

Земајќи $a_0 \neq 0$ во (2), ја добиваме индексната равенка на (1)

$$2r^2 - 3r + 1 = 0, \tag{2'}$$

чии корени се $r_1 = 1$ и $r_2 = 1/2$ (значи, го имаме случајот 1° од Т.2 во §4.5), па од (3) ја добиваме рекурентната врска за коефициентите на бараниот ред.

$$a_n = -a_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Значи, $a_1 = -a_0$, $a_2 = -a_1 = a_0$, $a_3 = -a_0, \dots$, па

$$\overline{y} = a_o x^r (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots). \qquad (5)$$

Од тоа добиваме

1) за $r = 1$ и $a_o = 1$: $y_1 = x(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) = x/(1+x)$,

2) за $r = 1/2$ и $a_o = 1$: $y_2 = \sqrt{x}\,(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) = \sqrt{x}/(1+x)$,

па општото решение на (1), според Т.2, 1°, од §4.5, е

$$y = Ay_1 + By_2 = (Ax + B\sqrt{x})(1-x+x^2-x^3+\ldots) = \frac{Ax + B\sqrt{x}}{1 + x},$$

при што редот во заградите (при y_1 и y_2) е конвергентен за $|x| < 1$. (Да забележиме дека $x = 0$ и $x = 1$ се сингуларни точки - полови на коефициентите на ДР (1).)

4.20. Со помош на обопштени степенски редови, да се реши

$$xy'' + y' - xy = 0. \qquad (1)$$

Решение. Заменувајќи за y, y' и y'' како во зад. 4.19, добиваме

$$r^2a_ox^{r-1} + (r+1)^2a_1x^r + \left[(r+2)^2a_2 - a_o\right]x^{r+1} + \ldots + \left[(r+n)^2a_n - a_{n-2}\right]x^{r+n-1} + \ldots = 0.$$

Сите членови, освен првиот и вториот, се анулираат ако $a_2, a_3, \ldots$ ја задоволуваат рекурентната врска (р.в.)

$$(r+n)^2a_n - a_{n-2} = 0, \text{ т.е. } a_n = \frac{1}{(r+n)^2}\,a_{n-2}, \quad n \geq 2. \qquad (2)$$

Двата корена на индексната равенка $r^2 = 0$ се еднакви, $r_1 = r_2 = 0$. (Значи, го имаме случајот 2° од Т.2 во §4.5). За да биде нула и вториот член $(r+1)^2a_1$, ќе земеме $a_1 = 0$ (зашто $r + 1 = 0 + 1 \neq 0$), па од (2) добиваме $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$ и $a_2 = a_o/(r+2)^2$, $a_4 = a_2/(r+4)^2 = a_o/(r+2)^2(r+4)^2$, ... Значи,

$$\overline{y} = a_ox^r\left(1 + \frac{1}{(r+2)^2}\,x^2 + \frac{1}{(r+2)^2(r+4)^2}\,x^4 + \ldots\right) \qquad (3)$$

ја задоволува равенката

$$x\overline{y}'' + \overline{y}' - x\overline{y} = r^2a_ox^{r-1}. \qquad (4)$$

Бидејќи индексната равенка има два еднакви корени, со (3) е определено само едно решение на (1), при $r = 0$. За да добиеме и друго решение на (1), $\overline{y}$ ќе ја разгледуваме како функција од два аргумента x и r; притоа имаме

$$\frac{\partial \overline{y}'}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial r}\right)',$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\right)''.$$

Диференцирајќи ја (4) парцијално по r, добиваме

$$x\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\right)'' + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\right)' - x\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\right) = 2ra_o x^{r-1} + r^2 a_o x^{r-1}\ln x. \qquad (5)$$

Од (4) и (5) следува дека $y_1 = \bar{y}|_{r=0}$ и $y_2 = \frac{\partial y}{\partial r}|_{r=0}$ се решенија на (1). Земајќи $a_o = 1$, од (3) добиваме:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = x^r \ln x\left[1 + x^2/(r+2)^2 + x^4/(r+2)^2(r+4)^2 + \ldots\right] +$$
$$+ x^4\left(-2x^2/(r+2)^3 - [2/(r+2)^3(r+4)^2 + 2/(r+2)^2(r+4)^3]x^4 - \ldots\right) =$$
$$= \bar{y}\ln x - 2x^r\left[\frac{1}{(r+2)^3}x^2 + \left(\frac{1}{(r+2)^3(r+4)^2} + \frac{1}{(r+2)^2(r+4)^3}\right)x^4 + \ldots\right].$$

Според тоа,

$$y_1 = \bar{y}|_{r=0} = 1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4 + \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}x^6 + \ldots$$
$$y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\Big|_{r=0} = \bar{y}\ln x - 2\left[\frac{1}{2^3}x^2 + \frac{1}{2^4\cdot 4^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

Така, општото решение на (1) е

$$y = A\bar{y}|_{r=r_1} + B\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = Ay_1 + By_2,$$

при што редовите во y_1 и y_2 конвергираат за секоја конечна вредност на $x \neq 0$.

4.21. Со помош на обопштени степенски редови да се реши ДР

$$xy'' + 2y' - y = 0. \qquad (1)$$

Решение. Заменувајќи ги во (1) y, y' и y'' како во зад. 4.19, добиваме

$$r(r+1)a_o x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(r+n)(r+n+1)a_n - a_{n-1}\right]x^{r+n-1} = 0.$$

Според тоа, индексната равенка е $r(r+1) = 0$, чии корени се $r_1 = -1$ и $r_2 = 0$ (значи, го имаме случајот 3^o од Т.2 во §4.5), а коефициентите a_n, $n \geq 1$, ја задоволуваат рекурентната формула

$$a_n = \frac{1}{(r+n)(r+n+1)}a_{n-1}. \qquad (2)$$

Јасно е дека (2) доведува до конечни вредности кога $r = 0$ (поголемиот од двата корена на индексната равенка), но кога $r = -1$, имаме $a_1, a_2, \ldots \to \infty$. За да ја избегнеме "незгодата" ($a_1, a_2 \ldots \to \infty$) што ја предизвикува помалиот корен $r_1 = -1$, ќе го замениме a_o со $b_o(r+1)$ и ќе забележиме дека редот

$$\overline{y} = a_o x^r \left[1 + \frac{x}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)^2(r+3)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)^2(r+3)^2(r+4)} + \dots\right]$$

$$= b_o x^r \left[(r+1) + \frac{x}{r+2} + \frac{x^2}{(r+2)^2(r+3)} + \frac{x^3}{(r+2)^2(r+3)^2(r+4)} + \dots\right] \qquad (3)$$

ја задоволува равенката

$$x\overline{y}'' + 2\overline{y}' - \overline{y} = r(r+1)a_o x^{r-1} = r(r+1)^2 b_o x^{r-1}.$$

Бидејќи членот на десната страна го содржи множителот $(r+1)^2$, од дискусијата направена во задачата 4.20 (случајот 2^o, кога индексната равенка има двоен корен), следува дека $\overline{y}$ и $\frac{\partial \overline{y}}{\partial r}$, кога $r = -1$, се решенија на (1). Од (3) наоѓаме

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial r} = \overline{y}\ln x + b_o x^r \Big[1 - \frac{x}{(r+2)^2} - \Big(\frac{2}{(r+2)^3(r+3)} + \frac{1}{(r+2)^2(r+3)^2}\Big)x^2 -$$

$$- \Big(\frac{2}{(r+2)^3(r+3)^2(r+4)} + \frac{2}{(r+2)^2(r+3)^3(r+4)} + \frac{1}{(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2}\Big)x^3 - \dots\Big]$$

Земајќи го коренот $r = -1$, при $b_o = 1$, од (3) добиваме

$$y_1 = \overline{y}\big|_{r=-1} = \frac{1}{x}\Big[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!1!} + \frac{x^3}{3!2!} + \frac{x^4}{4!3!} + \dots\Big],$$

$$y_2 = \frac{\partial \overline{y}}{\partial r}\Big|_{r=-1} = y_1 \ln x + \frac{1}{x}\Big[1 - \frac{x}{1^2} - \Big(\frac{2}{2} + \frac{1}{2^2}\Big)x^2 -$$

$$- \Big(\frac{2}{2^2\cdot 3} + \frac{2}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2}\Big)x^3 - \dots\Big].$$

Општото решение на (1) е $y = Ay_1 + By_2$, при што редовите во y_1 и y_2 се конвергентни за секој $x \neq 0$.

Забелешка. Во општ случај, кога двата корена $r_1 < r_2$ на индексната равенка се разликуваат за цел број, поголемиот корен r_2 секогаш дава решение, додека помалиот корен r_1 во некои случаи дава решение, а во некои - не дава. Кога r_1 дава решение, тогаш општото решение на ДР се формира како во случајот $r_1 - r_2 \neq$ цел број (1^o од Т.2 во §4.5, в. и 4.19). Кога r_1 не дава решение, тогаш ставаме $a_o = b_o(r-r_1)$ и општото решение го добиваме во обликот

$$y = A\,\overline{y}\big|_{r=r_1} + B\,\frac{\partial \overline{y}}{\partial r}\Big|_{r=r_1}.$$

4.22. Да се покаже дека за хипергеометриската функција $F(a, b, c; x)$ важи

а) $F(a, b, c; x) = F(b, a, c; x)$;

б) $F(a, 1, a; x) = \frac{1}{1 - x}$.

Решение. Според формулата 7° од §4.8, имаме $J_o'(x) = - J_1(x)$. Од ова равенство, по диференцирањето, добиваме

$$J_o''(x) = - J_1'(x). \tag{2}$$

Од формулата 5°, §4.7, за $n = 1$ имаме

$$J_1'(x) = \frac{1}{2}\left[J_o(x) - J_2(x)\right],$$

па заменувајќи во (2), го добиваме равенството $J_o''(x) = - \frac{1}{2}\left[J_o(x) - J_2(x)\right]$, т.е. (1).

4.29. Да се покаже, со директна замена, дека функцијата $y = J_o(e^x)$ е решение на ДР $y'' + e^{2x}y = 0$. Потоа да се воведе смената $z = e^x$ и да се најде општото решение на дадената ДР.

Решение. Ќе пишуваме J_o, J_o' ,... наместо $J_o(x)$, $J_o'(x)$, ...
Имаме:

$$y = J_o, \quad y' = e^xJ_o', \quad y'' = e^xJ_o' + e^{2x}J_o'',$$

па користејќи ја задач. 4.28, а потоа формулите 7° и 6° од §4.8, добиваме

$$\begin{aligned} y'' + e^{2x}y &= e^{2x}J_o'' + e^xJ_o' + e^{2x}J_o = e^{2x}(J_o'' + e^{-x}J_o' + J_o) = \\ &= e^{2x}\left[\frac{1}{2}\cdot(J_2-J_o) - e^{-x}J_1 + J_o\right] = \frac{1}{2}\,e^{2x}\Big[(J_2+J_o) - \\ &\qquad - \frac{2\cdot 1}{e^x}\,J_o\Big] = \frac{1}{2}\,e^{2x}\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ставајќи $z = e^x$, имаме

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot e^x = \frac{dy}{dz}\cdot z,$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot z\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\cdot z\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dz^2}\cdot z^2 + \frac{dy}{dz}\cdot z.$$

Заменувајќи во дадената ДР, добиваме

$$z^2\,\frac{d^2y}{dz^2} + z\,\frac{dy}{dz} + z^2y = 0,$$

а тоа е беселова ДР (со $p = 0$). Бидејќи $p = 0$, нејзиното општо решение (в. (7) од §4.7) е $y = C_1J_o(z) + C_2Y_o(z)$. Враќајќи се на првобитниот аргумент x со $z = e^x$, добиваме дека $y = C_1J_o(e^x) + C_2Y_o(e^x)$ е општото решение на дадената ДР.

4.30. Да се трансформира ДР

$$xy'' + \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{4}\,y = 0. \tag{1}$$

со смените

$$y = t^{1/2}u, \qquad x = t^2, \tag{2}$$

каде што $u = u(t)$, и да се најде општото решение на (1).

Решение. Имаме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(1/2)t^{-1/2}u\,dt + t^{1/2}du}{2t\,dt} = \frac{1}{4}\,t^{-3/2}u + \frac{1}{2}\,t^{-1/2}\cdot\frac{dy}{dt};$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{3}{16}\,t^{-7/2}u + \frac{1}{4}\,t^{-3/2}\,\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Заменувајќи ги x, y, y′, y′′ во (1) со нивните изрази преку t и u, добиваме

$$t^2\,\frac{d^2u}{dt^2} + t\,\frac{du}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\cdot u = 0, \tag{3}$$

којашто е беселова ДР, со $p = 1/2$. Нејзиното општо решение е

$$u = C_1J_{1/2}(t) + C_2J_{-1/2}(t).$$

Враќајќи се на променливите x,y преку (2), добиваме

$$y = x^{1/4}\left[C_1J_{1/2}(\sqrt{x}) + C_2J_{-1/2}(\sqrt{x})\right]$$

-општото решение на (1).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 4

4.31. Со последователно диференцирање, да се решат следниве ДР од прв ред, при дадените почетни услови, земајќи неколку членови до (x^5):

а) $y' = y + y^2 - e^{2x}$, $y(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y\cos x$, $y(0) = 0$;

в) $y' = x + y + y^2$, $y(1) = 0$;

г) $y' = y + e^{-y} - \ln x$, $y(1) = 0$.

4.32. Дали може да се најде со методот на последователно диференцирање она решение на ДР $y' = y^2 + 2\sqrt{x}$ што го задоволува условот $y = 1$ при $x = 0$?

4.33. Со помош на методот на диференцирање, да се решат следниве ДР од втор ред, земајќи неколку членови:

а) $y'' = e^{-x}yy'$, $y = y' = 1$ за $x = 0$ (до x^5);

б) $y'' = xy$; $y = 1$, $y' = 2$ за $x = 3$ (до x^5);

в) $y'' - \sin(xy') = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (до x^5);

г) $xy'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ (до x^5);

д) $xy'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4.34. Да се најде кривината во назначената точка на решението на дадената ДР, кое минува низ таа точка.

а) $y' = x^2 + 2y^3$ во $(1,2)$;

б) $y' = x^3 + y^3 - e^{xy}$ во $(1,0)$.

4.35. Да се развие во степенски ред со центар $x = 0$ следнава функција, користејќи ја назначената ДР.

а) $y = \operatorname{tg}x$, со ДР $y' = 1 + y^2$ (до x^5);

б) $y = \sec x$, со ДР $y' = y^2\sin x$ (до x^4);

в) $y = \sec x$, со ДР $y'' = 2y^3 - y$ (до x^6).

Со помош на методот на неопределени коефициенти да се најде решението на дадената ДР што ги задоволува назначените почетни услови, во облик на степенски ред со центар $x = 0$, земајќи неколку членови (4.36 - 4.41).

<u>4.36.</u> $(x+1)y' = y + x + 2$, $y(0) = 2$ (до x^4).

<u>4.37.</u> $(x+y)y' = y - x$, $y(0) = 1$ (до x^2).

<u>4.38.</u> $y = y' - xyy'$, $y(0) = 1$ (до x^4).

<u>4.39.</u> $y' - x^2 - e^y = 0$, $y(0) = 0$ (до x^4).

<u>4.40.</u> $y' = y + xe^y$, $y(0) = 0$ (до x^4).

<u>4.41.</u> $y'' = y^{-2} + xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$ (до x^4).

Да се најде (општото) решение на дадената ДР во облик на степенски ред со центар x_o (т.е. по степените на $x - x_o$), да се одреди радиусот R на конвергенцијата на тој ред и да се интегрира дадената ДР директно, како во §2.1 (4.42 - 4.45).

<u>4.42.</u> $xy' - (x+2)y = -2x(1+x)$, $x_o = 0$.

<u>4.43.</u> $(x-1)y' - y + x = 0$, $x_o = 0$.

<u>4.44.</u> $xy' = y + x + 1$, $x_o = 1$.

<u>4.45.</u> $y' - y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0$ при $x = 1$.

<u>4.46.</u> Да се покаже дека ДР $y' = 1 + y/x$ не може да се реши по y како степенски ред по степените на x. Да се реши таа ДР со степенски ред по степените на $x - 1$. Да се интегрира и директно.

Во задачите 4.47 - 4.54 да се најдат по две линеарно независни решенија на секоја од дадените ДР во облик на степенски ред (со центар $x_o = 0$). Да се провери конвергенцијата на добиените редови и, во случаите каде што е лесно тоа да се направи, да се изразат со елементарни функции.

<u>4.47.</u> $y'' + y = 0$.

<u>4.48.</u> $y'' - y' - 2y = 0$.

<u>4.49.</u> $y'' + xy' - y = 0$.

<u>4.50.</u> $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$.

<u>4.51.</u> $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

<u>4.52.</u> $y'' + xy' - (2x^2+1)y = 0$.

<u>4.53.</u> $y'' - xy' - y = 0$.

<u>4.54.</u> $xy'' + 2y' + xy = 0$.

4.55. Да се покаже дека општото решение на ДР $xy'' - (x+3)y' + 2y = 0$ е

$$y = A(6+4x+x^2) + B(1+2x/5 + 3x^2/5\cdot 6 + 4x^3/5\cdot 6\cdot 7 + \dots).$$

4.56. Да се реши со помош на редови ДР

$$x^2(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

и да се покаже дека, по сумирањето,

$$y = A\, x^2/(1+x^2) + B\cdot x^3/(1+x^2).$$

Во 4.57 - 4.60 да се најде партикуларното решение што одговара на зададените почетни услови, во вид на степенски ред.

4.57. $y'' + xy = 0, \quad y = 1, \quad y' = 0$ при $x = 0$.

4.58. $xy'' = (2+x)y, \quad y = 0, \quad y' = 1$ при $x = 0$.

4.59. $(x-1)y''' + y'' + (x-1)y' + y = 0, \; y = y'' = 0, \quad y' = 1$ при $x = 0$.

4.60. $(x^2-2x+2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y = y' = y'' = 1$ при $x = 0$.

4.61. Да се реши по степените на $t = x - 1$ ДР $y'' - y = 0$.

4.62. Да се покаже дека $y = A/x^2$ е едно решение на ДР

$$x(1+x)y'' + 3(1+2x)y' + 6y = 0.$$

Да се најде друго решение во облик на степенски ред $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$, изразувајќи ги a_n со a_0, и да се покаже дека добиениот ред има збир $a_0/(1+x)^2$ за $|x| < 1$.

4.63. Да се покаже дека ДР

$$xy'' + y' + xy = 0$$

не ги задоволува условите на Т.1 од §4.2, а сепак има решение во облик на степенски ред. Дали тоа противречи на споменатата теорема?

4.64. Користејќи ја дефиницијата на ермитовите полиноми, дадени со (5) од §4.3, да се најдат $H_n(x)$ за $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

4.65. Да се најдат ермитовите полиноми H_5, H_6 и H_7 користејќи ја рекурентната врска $H_{n+1} = xH_n - H_n'$ и знаејќи дека $H_4 = x^4 - 6x^2 + 3$.

4.66. Да се докаже дека коефициентот пред x^n во ермитовиот полином H_n е 1, за секој $n = 0, 1, 2, \dots$.

4.67. а) Да се изврши проверка на формулата $H_n' = nH_{n-1}$ за $n = 1, 2, 3, 4$ (без да се користи зад. 4.8).

б) Да се изведе формулата $H_n' = nH_{n-1}$ користејќи ја дефиницијата (5) и формулата (6) од §4.3.

4.68. Да се докаже дека за ермитските полиноми важи

$$H_n = x^n - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}x^{n-4} + \dots$$
$$\dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{2\cdot 4\dots 2k}x^{n-2k} + \dots$$

Користејќи го тоа, да се најдат полиномите H_8 и H_9.

4.69. Да се најде ермитовиот полином H_{10} користејќи ја формулата а) од 4.68, б) од 4.7 (да се земе H_9 од 4.68).

4.70. Да се најдат $H_n(x)$ за $n = 0, 1, 2, 3$ користејќи ја генератрисата на ермитските полиноми, (7) од §4.3.

4.71. Да се покаже дека со формулите (5) и (7) од §4.3 е определен еден ист полином $H_n(x)$.

4.72. Да се докаже директно (без 4.11)

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_2(x) H_3(x)\,dx = 0.$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\left[H_2(x)\right]^2 dx = 2\sqrt{2\pi}.$

4.73. Да се пресмета $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{x^2/2} H_n(x)\,dx$.

4.74. Да се докаже дека функцијата $w = e^{-x^2/4}H_n(x)$ е решение на веберовата ДР $w'' + (n+1/2-x^2/4)w = 0$.

4.75. Да се најде општото решение на ермитската ДР, $y'' - xy' + py = 0$, за а) $p = 0$, б) $p = 1$, в) $p = 2$.

4.76. Да се изрази општото решение на ермитската ДР за а) $p = 0$, б) $p = 1$ со помош на степенски редови.

4.77. Користејќи ја формулата (8) од §4.4 (формула на Родригез), да се најдат лежандровите полиноми $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ и $P_4(x)$.

4.78. Да се нацртаат графиците на лежандровите полиноми $P_n(x)$ за $n = 0, 1, 2, 3, 4$ во сегментот $[0,1]$ (на ист цртеж). Да се уочи бројот на нулите на секој од нив во сегментот $[-1,1]$.

4.79. Да се провери дека лежандровите полиноми $P_n(x)$, $n = 1,2,3,4$ се решенија на лежандровата ДР за $n = 1, 2, 3, 4$ соодветно, со директно заменување.

4.80. Да се реши ДР а) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, б) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$.

4.81. За кои почетни услови лежандровиот полином $P_2(x)$ е решение на ДР $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$?

4.82. Да се најдат лежандровите полиноми P_1, P_2, P_3 и P_4 директно од лежандровата ДР.

Уп. Да се стави $P_1 = ax + b$, $P_2 = ax^2 + bx + c$, итн. и да се најдат коефициентите a, b, c итн. заменувајќи во равенката при зададен n.

4.83* Да се докаже дека $P_n(1) = 1$.

4.84* Да се докаже дека $P_{2k}(x)$ е парна функција, т.е. содржи само парни степени од x, а $P_{2k+1}(x)$ е непарна, т.е. содржи само непарни степени од x; накратко:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{1}$$

Од тоа да се изведе заклучок дека

а) $P_n(-1) = (-1)^n$; б) $P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x)$.

4.85. Да се докаже формулата на Родригез (2° во §4.4).

Уп. Да се примени биномната формула на функцијата $p(x) = (x^2-1)^n$, да се диференцира резултатот n пати член по член и добиеното да се спореди со (7) од §4.4.

4.86* Да се најдат $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ од формулата (9) во §4.4:

$$G(t,x) \equiv (1-2xt+t^2)^{-1/2} = P_0(x) + tP_1(x) + \ldots + t^n P_n(x) + \ldots \tag{1}$$

4.87* Користејќи ја формулата (1) од зад. 4.86. (т.е. (9) од §4.4), да се докаже дека за секој $n = 0, 1, 2, \dots$ важи:

а) $P_n(1) = 1$ (ставајќи $x = 1$); в. и 4.83.,

б) $P_n(-1) = (-1)^n$ (ставајќи $x = -1$); в. и 4.84.,

в) $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = \dfrac{(-1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (ставајќи $x = 0$)

4.88. Користејќи ја рекурентната врска од зад. 4.15, да се најдат $P_5(x)$ и $P_6(x)$ (користејќи ги резултатите и од 4.12).

4.89. Да се покаже дека функцијата $G(t,x)$ од зад. 4.86 ја задоволува равенката $tG_t' - (x-t)G_x' = 0$.

4.90. Да се докажат следниве рекурентни формули:

1°. $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$;

2°. $(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$, $n = 1, 2, \dots$

3°. $P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x)$;

4°. $(x^2-1)P_n'(x) = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$;

5°. $(x^2-1)P_n'(x) = (n+1)[P_{n+1}(x) - xP_n(x)]$;

6°. $(2n+1)P_n(x) = \frac{1}{x}[(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)]$.

4.91* Ако $P_6(2) = a$ и $P_7(2) = c$, да се покаже дека:

а) $P_6'(2) = \frac{7}{3}(c-2a)$; б) $P_7'(2) = \frac{7}{3}(2c-a)$;

в) $P_8(2) = \frac{1}{8}(30c-7a)$; г) $P_8'(2) = \frac{1}{3}(52c-14a)$.

4.92* Нека A_n е коефициентот пред x^n во полиномот $P_n(x)$. Да се покаже дека

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} A_n.$$

Знаејќи дека $A_o = 1$, да се добие израз за A_n.

4.93. Да се провери формулата 3° од §4.4:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2/(2n+1), & m = n \end{cases}$$

$m, n \in \{0, 1, 2\}$ со директно пресметување (в. и 4.16).

4.94. Користејќи ја формулата на Родригез и интегрирајќи n пати со делумна интеграција, да се докаже дека

$$\int_{-1}^{1}\left[P_n(x)\right]^2dx = \frac{2}{2n+1}.$$

4.95. Да се покаже дека $I = \int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$

4.96. Да се покаже дека за коефициентите c_k во задачата 4.17 важи формулата

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(x)P_k(x)dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

4.97. Да се покаже дека, ако полиномот $Q_n(x)$ е парен, тогаш $c_1, c_3, c_5, \ldots$ во претставувањето (1) од зад. 4.17 се нули.

4.98. Следниве полиноми да се претстават со помош на лежандровите полиноми (во смисла на зад. 4.17):

а) $2 + x$; б) $x^2 - 2x + 3$; в) $x - 5x^3$;

г) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$.

4.99. Да се определат вредностите на r така што обопштениот степенски ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ да биде решение на ДР

$$2x^2(1-x)y'' - x(3x+1)y' + (1+x)y = 0.$$

Да се докаже дека, за тие вредности на r, важи

$$a_n(r+n-1)(2r+2n-1) = a_{n-1}(r+n)(2r+2n-3).$$

Користејќи го тоа, да се најде оптшото решение на дадената ДР и да се укаже областа на конвергенцијата на добиениот ред.

Со помош на обопштени степенски редови, да се решат ДР во задачите 4.100-4.102 (в. 1^o, 2^o и 3^o од Т.2 во §4.5):

4.100. а) $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$;

б) $4xy'' + 6y' + y = 0$;

в) $x^2(1+x)y'' + x(1+x)y' - y = 0$;

г) $4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$.

4.101. а) $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$;

б) $(x^2-2)y'' + (4x-1)y' + 2y = 0$.

Добиените редови да се сумираат.

4.102. а) $(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0;$

б) $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0;$

в) $xy'' + (1+x)y' + 2y = 0.$

4.103. Да се покаже дека лежандровата ДР, со смената $x^2 = t$, се сведува на гаусова ДР со $a + b + 1 = 1/2$, $ab = -n(n+1)/4$, $c = 1/2$.

4.104. Да се решат следниве гаусови ДР, употребувајќи хипергеометриски функции за нивните решенија:

а) $x(x-1)y'' + (2x-3/2)y' + y/4 = 0;$

б) $x(x-1)y'' + 4(x-1)y' + 2y = 0.$

4.105. Да се спроведат деталите од доказите на: 3°, 5°, 8° во §4.6.

4.106. Да се пресмета: а) $\Gamma(\frac{7}{2})$; б) $\Gamma(\frac{2k+1}{2})$, $k \in \mathbb{N}$; в) $\Gamma(\frac{8}{3})$.

4.107. Да се пресмета:

а) $B(8,5)$; б) $I = \int_0^1 t^5(1-t)^6 dt;$

в) $B(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$; г) $I = \int_0^1 t^{5/2}\sqrt{(1-t)^3}dt.$

4.108. Да се покаже дека:

а) $\int_0^\infty e^{-x^3}dx = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$; б) $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx = [\Gamma(1/4)]^2/6\sqrt{2\pi}.$

4.109. Користејќи ја смената $t = \sin^2\theta$, докажи дека

$$I_{p,q} = \int_0^{\pi/2}\sin^p\theta\cdot\cos^q\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}).$$

4.110. Користејќи ја зад. 4.109 и 8° од §4.6, да се пресмета

а) $\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\cos^6\theta d\theta$; б) $\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^7\theta d\theta$;

в) $\int_0^{\pi/2}\cos^8\theta d\theta$; б) $\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^{4/3}\theta d\theta$..

4.111. Користејќи ја формулата 2° од §4.6, т.е.

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

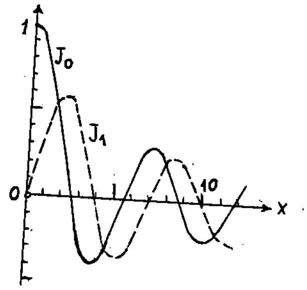
за $x < 0$ и $x \neq -1, -2, \ldots$, да се пресмета а) $\Gamma(-\frac{1}{2})$; б) $\Gamma(-\frac{5}{2})$; в) $\int_0^{\pi/2}\sin^{-6}\theta\cos^3\theta d\theta$.

4.112. Да се покаже дека:

а) $J_o(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4 - \frac{1}{(3!)^2}(\frac{x}{2})^6 + \ldots$

б) $J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!}(\frac{x}{2})^3 + \frac{1}{2!3!}(\frac{x}{2})^5 - \frac{1}{3!4!}(\frac{x}{2})^7 + \ldots$

(в. црт. 2).



Црт. 2

4.113. Да се изведе $J_{-1}(x)$ од (6) во §4.7 и да се спореди со $J_1(x)$.

4.114. Да се спроведат деталите од доказот на: 2°, 4°, 6° и 9° во §4.7.

4.115. Користејќи ги 6° и 9° од §4.7, да се претстави, со помош на синуси и косинуси:

а) $J_{3/2}(x)$; б) $J_{-3/2}(x)$; в) $J_{5/2}(x)$; г) $J_{-5/2}(x)$.

4.116. Да се изразат со помош на $J_o(x)$ и $J_1(x)$:

а) $J_2(x)$; б) $J_3(x)$; в) $J_4(x)$.

4.117. Да се докаже дека:

а) $J_1'(x) = J_o(x) - \frac{1}{x}J_1(x)$;

б) $J_2(x) = J_o''(x) - \frac{1}{x}J_o'(x)$;

в) $J_3(x) + 3J_o'(x) + 4J_o'''(x) = 0$;

г) $4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}$;

д) $2^3J_n''' = J_{n-3} - 3J_{n-1} + 3J_{n+1} - J_{n+3}$;

ѓ) $2^4J_n^{(4)} = J_{n-4} - 4J_{n-2} + 6J_n - 4J_{n+2} + J_{n+4}$.

4.118. Да се пресметаат интегралите

а) $\int x^n J_{n-1}(x)dx$;   б) $\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx$.

4.119. Да се пресмета

а) $\int x^3 J_2(x)$;   б) $\int_0^1 x^3 J_o(x)dx$;

в) $\int x^2 J_o(x)$;   г) $\int J_o(x)\sin x dx$.

4.120. Да се покаже дека ДР

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2-p^2)y(x) = 0, \tag{1}$$

каде што a е константа и $a \neq 0$, со смената $z = x$ се сведува на беселовата ДР

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2-p^2)y(z) = 0,$$

па општиот интеграл на (1) е

$$y = AJ_p(ax) + BJ_{-p}(ax) \quad \text{или} \quad y = AJ_p(ax) + BY_p(ax),$$

во зависност од тоа дали $p \neq$ цел број или $p =$ цел број.

4.121. Користејќи ги наведените смени, да се изразат со беселови функции решенијата на следниве ДР:

а) $x^2y'' + xy' + \frac{1}{4}(x^2-1)y = 0$, $x = 2z$;

б) $x^2y'' + xy' + 4(x^4-\frac{1}{4})y = 0$, $x^2 = z$;

в) $xy'' + y' + xy = 0$;

г) $4xy'' + 4y' + y = 0$, $\sqrt{x} = z$;

д) $y'' + y = 0$, $y = x^{1/2}u$, $u = u(x)$.

ѓ) $y'' + xy = 0$, прво $y = x^{1/2}u$, а потоа $x = (3t/2)^{2/3}$;

е) $xy'' + 5y' + xy = 0$, $y = u/x^2$.

4.122. Да се покаже, со директна замена, дека дадената функција е решение на назначената ДР:

а) $y = J_o(\sqrt{x})$, $4xy'' + 4y' + y = 0$;

б) $y = J_{1/4}(x^2/2)$, $y'' + x^2y = 0$;

в) $y = \sqrt{x}\, J_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})$, $y'' + xy = 0$.

* * *

* * *

4.123. Полиномите $L_n(x)$, дефинирани со:

$$L_o(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

(формула на Родригез), се викаат лагерови полиноми. Да се покаже дека: $L_1(x) = 1-x$, $L_2(x) = 1-2x+x^2/2$, $L_3(x) = 1-3x+3x^2/2 - x^3/6$.

4.124. Да се докаже дека

$$\frac{1}{1-t}e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

4.125. Да се докаже дека за лагеровите полиноми важи:

а) $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$;

б) $nL_{n-1}(x) = nL'_{n-1}(x) - L'_n(x)$.

4.126. Да се провери за $m,n = 0, 1, 2, 3$ дека

$$\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ за } m \neq n, \\ (n!)^2, \quad m = n. \end{cases}$$

Да се докаже дека тоа важи за произволни m и n.

4.127. Да се провери дека лагеровите полиноми $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ ја задоволуваат лагеровата ДР

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{1}$$

за $n = 1, 2, 3$ соодветно. Да се докаже општо, дека $L_n(x)$ е решение на (1).

4.128. Да се покаже дека сите корени на лежандровите полиноми $P_n(x)$ се еднократни.

4.129. Да се докаже дека $P_n(x)$ има n реални нули и сите тие се во $[-1,1]$ (види и 4.78).

4.130. Нека функцијата

$$G(t,x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \tag{1}$$

е разложена во степенски ред по t,

$$G(t,x) = y_o(x) + ty_1(x) + \ldots + t^n y_n(x) + \ldots \tag{2}$$

а) Ставајќи $x = 1$ во (1) и (2), да се покаже дека $y_1(1)=1$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$

б) Да се покаже дека

$$t^2G_{tt}'' + (1-x^2)G_{xx}'' + 2tG_t' - 2_xG_x' = 0. \qquad (3)$$

в) Во (3), наместо G, да се замени редот (2) и да се покаже дека за $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$(1-x^2)y_n''(x) - 2xy_n' + n(n+1)y_n = 0. \qquad (4)$$

г) Од (2), (4) и а) да се заклучи дека

$$G(t,x) = P_o(x) + tP_1(x) + \ldots + t^nP_n(x) + \ldots ,$$

т.е. $G(t,x)$ е генератриса на лежандровите полиноми (6^o од §4.4).

4.131. Нека функцијата $f(x)$ е претставена како збир од рамномерно конвергентен ред на сегментот $[-1,1]$,

$$f(x) = c_oP_o(x) + c_1P_1(x) + \ldots + c_nP_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Да се покаже дека за $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx. \qquad (2)$$

4.132. Да се покаже дека ДР

$$x(1-x)y'' + 4y' + 2y = 0$$

има решение што е полином од втор степен и дека општото решение може да се изрази во форма

$$y = A(10-5x+x^2) + Bx^{-3}(1-x)^5.$$

4.133. Да се покаже дека ДР

$$xy'' + (1-x)y' + 2y = 0.$$

има едно решение што е квадратен полином $P(x)$ (в. и 4.127). Да се најде и друго, линеарно независно решение од обликот y $P(x)\ln x + v(x)$, каде што $v(x)$ е ред, земајќи ги само членовите до x^3.

4.134. Да се покаже дека:

а) $y'' + y/x^3 = 0$ има решение во облик на (обопштен) степенски ред по x;

б) добиениот обопштен степенски ред по x за ДР $y'' + y/x^2 = 0$ е дивергентен.

4.135. Дадена е ДР $x^2y'' + x^3y' - 6y = 0$ и редот $u(x) = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots + a_kx^{2k} + \dots$

Да се најде решение од обликот а) $x^3u(x)$; б) $x^{-2}u(x)$ и да се покаже дека редот конвергира за секој x.

Да се покаже дека, во општ случај, решение од обликот $x^r(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)$ може да се најде само за $r = -1$ и $r = 3$.

4.136. Една ДР $p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0$, каде што $p_i = p_i(x)$ се дадени полиноми од x, може да се реши за големи вредности на x, т.е. "околу бесконечната точка" ако се трансформира со смената $x = \frac{1}{z}$ и добиената ДР се реши со помош на (обопштени) степенски редови околу точката $z = 0$.

Да се решат со помош на обопштени степенски редови што се конвергентни околу $x = \infty$ (користејќи ја смената $x = 1/z$) следниве ДР:

а) $2x^3y'' + x^2y' + y = 0$;

б) $2x^2(x-1)y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0$;

в) $x^3y'' + (x^2+x)y' - y = 0$.

4.137. Да се изрази со помош на гама-функции

$$I_{p,q,r} = \int_0^1 x^p(1-x^q)^r dx.$$

Потоа, да се пресмета:

а) $\int_0^1 x^3(1-x^4)^7dx$; б) $\int_0^1 x^{1/2}(1-x^{1/3})^{5/2}dx$.

4.138. Да се пресмета $I = \iint_D x^{p-1}y^{q-1}dxdy$, ако D е областа:

а) $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le 1$;

б) $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le a$;

в) $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x/a + y/b \le 1$;

г) $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$.

4.139. Користејќи го резултатот $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ (a е конст. $0 < a < 1$), да се покаже дека

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

4.140. Да се покаже дека ДР

$$x^2y'' + xy' + (b+cx^k)y = 0,$$

каде што a, b, c, k се константи ($c > 0$, $k \neq 0$), со помош на смените

$$y = (\frac{t}{\gamma})^{-\alpha/\beta} u, \quad x = (\frac{t}{\gamma})^{1/\beta},$$

$u = u(t)$, се сведува на беселова ДР

$$t^2u'' + tu' + (t^2-p^2)u = 0,$$

каде што $\alpha = (a-1)/2$, $\beta = k/2$, $\gamma = 2\sqrt{c}/k$, $p^2 = [(a-1)^2 - 4b]/k^2$.

4.141. Користејќи ја претходната задача, да се трансформираат во беселови и да се решат следниве ДР

а) $x^2y'' - 3y' + (x^4-12)y = 0$; б) $y'' - \frac{3}{x}y' + 4y = 0$.

4.142. При стабилноста на една конусоидна потпора, поместувањето y ја задоволува ДР

$$y'' + (k^2/2x)y = 0, \tag{1}$$

каде што треба да се определи соодветна вредност за k.

Да се покаже дека (1) може да се сведе на

$$z^2u'' + zu' + (z^2-1)u = 0 \tag{2}$$

каде што $y = x^{1/2}u$, $z = kx^{1/2}$, $u = u(z)$.

Ако $dy/dx=0$ за $x=a$ и $x=c$, да се покаже дека равенката за k е

$$J_o(k\sqrt{a})\cdot Y_o(k\sqrt{c}) = J_o(k\sqrt{c})\cdot Y_o(k\sqrt{a}).$$

4.143. Да се провери за $p = 1/2$ формулата

$$J_p'(x)\cdot J_{-p}(x) - J_{-p}'(x)\cdot J_p(x) = \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$$

4.144. Користејќи ги редовите за $J_p(x)$, $J_p'(x)$, $Y_p(x)$, $Y_p'(x)$, да се докаже дека:

а) $J_p'(x)\cdot J_{-p}(x) - J_{-p}'(x)J_p(x) = \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$;

б) $J_p(x)\cdot J_{-p+1}(x) + J_{-p}(x)\cdot J_{p-1}(x) = \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$;

в) $J_p(x)\cdot Y_p'(x) - J_p'(x)\cdot Y_p(x) = \frac{2}{\pi x}$.

4.145. Да се докаже дека:

а) $Y_o'(x) = -Y_1(x)$; б) $Y_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x)$;

в) $Y_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x$.

Глава 5

НЕЛИНЕАРНИ ДР ОД ПРВ РЕД

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 5

5.1. Да се покаже дека следнава ДР е егзактна:

$$(2e^{2x}y-3x^2)dx + e^{2x}dy = 0 \qquad (a)$$

Потоа да се најде нејзиниот општ интеграл.

Решение. Имаме: $P = 2e^{2x}y-3x^2$, $Q = e^{2x}$, па $\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Значи, (а) е егзактна.

Општиот интеграл на (а) ќе го најдеме откако левата страна на (а) ќе ја претставиме како тотален диференцијал од некоја функција $u = u(x,y)$, на еден од следниве три начини: 1° со групирање на членовите (со проба), 2° со "неопределен интеграл" и 3° со формулата (7) од §5.1.

1°. Со соодветно групирање на членовите, добиваме $(2e^{2x}y-3x^2)dx + e^{2x}dy = d(e^{2x}y) - d(x^3) = d(e^{2x}y-x^3) = 0$ па општиот интеграл е $e^{2x}y-x^3 = C$.

2°. Бидејќи $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, од $\frac{\partial u}{\partial x} = P = 2e^{2x}y-3x^2$ добиваме

$$u = \int(2e^{2x}y-3x^2)dx = ye^{2x}-x^3+\phi(y), \qquad (б)$$

каде што $\phi(y)$ е неопределена "константа" (по x); како функција од y, ќе сметаме дека $\phi(y)$ е диференцијабилна (во некој интервал). Поради

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = e^{2x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{2x}+\phi'(y),$$

добиваме дека $\phi'(y) = 0$, па $\phi(y) = C_1 =$ конст. Заменувајќи го ова во (б), добиваме $u = ye^{2x}-x^3+C_1$, па $ye^{2x}-x^3=C$ е општиот интеграл на (а).

3°. Со помош на формулата (7) од §5.1 добиваме

$$u = \int_0^x(2e^{2x}.0-3x^2)dx + \int_0^x e^{2x}dy = -x^3+e^{2x}y,$$

па општиот интеграл на (а) е $e^{2x}y-x^3=C$.

5.2. Да се покаже дека ДР

$$(x^4\ln x-2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0 \qquad (a)$$

има интегрален множител $\lambda = \lambda(x)$, а потоа да се реши.

Решение. Треба да провериме дали десната страна на (4) од §5.2 е функција само од x. За ДР (а) имаме:

$$-\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = -\frac{1}{3x^2y^2}(6xy^2+6xy^2) = -\frac{4}{x}.$$

Значи, ДР (а) има интегрален множител од обликот $\lambda = \lambda(x)$. Според (5) од §5.2 имаме

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{4}{x}, \qquad \ln\lambda = -4\ln x, \qquad \lambda = 1/x^4.$$

Множејќи ја (а) со $1/x^4$, добиваме

$$(\ln x-2y^3/x^3)dx + (3y^2/x^2)dy = 0 \tag{б}$$

којашто е точна. Со помош на (7) од §5.1, за (б) добиваме

$$u = \int_1^x(\ln x-2.0/x^3)dx + \int_0^y(3y^2/x^2)dx =$$
$$= [x\ln x-x]_1^x + y^3/x^2 = x\ln x-x + 1 + y^3/x^2,$$

па општиот интеграл на (б), т.е. на (а) е

$$x(\ln x-1) + y^3/x^2 = C.$$

5.3. Да се најде условот при кој ДР $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител $\lambda = \lambda(x^2-y^2)$. Користејќи го тоа, да се реши ДР

$$(2xy+x)dx - (x^2+y^2+y)dy = 0. \tag{а}$$

Решение. Ќе ставиме $t = x^2-y^2$; имаме

$$\lambda = \lambda(t), \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 2x\frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = -2y\frac{d\lambda}{dt},$$

па формулата (3) од §5.1 го добива обликот

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2yP+2xQ}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]. \tag{б}$$

Левата страна на (б) е функција само од $t = x^2-y^2$, па мора и десната страна да е функција само од $t = x^2-y^2$, што претставува бараниот услов.

За ДР (а), десната страна на (б) изнесува $-2/(x^2-y^2)$, па (а) има интегрален множител од обликот $\lambda = \lambda(x^2-y^2)$. Од

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2}{t},$$

добиваме $\lambda = (x^2-y^2)^{-2}$. Множејќи ја (а) со $(x^2-y^2)^{-2}$, ја добиваме точната ДР

$$(x^2-y^2)^{-2}(2xy+x)dx - (x^2-y^2)^{-2}(x^2+y^2+y)dy = 0;$$

$$u(x,y) = \int_0^x \frac{2xy+x}{(x^2-y^2)^2}\,dx - \int_1^y \frac{0+y^2+y}{(0-y^2)^2}\,dy = -\frac{2y+1}{2(x^2-y^2)}.$$

Значи, општиот интеграл на (а) е $2y+1 = 2C(x^2-y^2)$.

5.4. Една функција $H = H(x,y)$ се вика хомогена со степен на хомогеност k, ако $H(tx,ty) = t^k H(x,y)$. Ако H е хомогена, тогаш

$$x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y} = k.H(x,y) \tag{1}$$

(Ојлерова теорема за хомогени функции).

Да се докаже дека, ако равенката $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ е хомогена (т.е. P и Q се хомогени функции со ист степен на хомогеност), тогаш функцијата $M(x,y) = \frac{1}{xP+yQ}$, кога $xP + yQ \not\equiv 0$, е нејзин интегрален множител. Да се испита и случајот кога $xP + yQ \equiv 0$.

Решение. Треба да докажеме дека е точна ДР

$$\frac{P}{M}\,dx + \frac{Q}{M}\,dy = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{M}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{M}\right). \tag{2}$$

Откако ќе ги пресметаме двете страни на второто равенство во (2), ќе добиеме

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{M}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{M}\right) = \frac{1}{(xP+yQ)^2}\left[Q\cdot\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - P\cdot\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right].$$

Според (1), изразот во средните загради станува

$$Q(kP) - P(kQ) = 0,$$

што значи дека важи (2).

Ако $xP + yQ = 0$ (идентички), тогаш $\frac{P}{Q} = -\frac{y}{x}$, па диференцијалната равенка $Pdx + Qdy = 0$ се сведува на $ydx - xdy = 0$, за која $1/xy$ е интегрален множител.

5.5. Користејќи ја 5.4, да се реши

$$(x^3+y^3)\,dx - xy^2 dy = 0. \tag{a}$$

Решение. Со директна проверка се увидува дека ДР (а) е хомогена (со степен на хомогеност 3). Според зад. 5.4,

$$\frac{1}{xP+yQ} = \frac{1}{x^4-xy^3-xy^3} = \frac{1}{x^4}$$

е интегрален множител на (а), па

$$(1/x+y^3/x^4)\,dx - (y^2/x^3)\,dy = 0$$

е точна. Како во зад. 5.1, лесно се добива дека

$$\ln x - y^3/3x^3 = C$$

е општ интеграл на (а).

5.6. Равенката $(2y+3x^4y^2)dx + (6x-2x^5y)dy = 0$ има интегрален множител λ од облик $x^r y^s$. Да се определат константите r и s, а потоа да се реши равенката.

Решение. Множејќи ја дадената равенка со $x^r y^s$, ја добиваме равенката
$$(2x^r y^{s+1}+3x^{r+4}y^{s+2})dx + (6x^{r+1}y^s-2x^{r+5}y^{s+1})dy = 0,$$
која треба да биде точна, т.е. треба да го задоволува условот $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$; значи
$$2(s+1)x^r y^s + 3(s+2)x^{r+4}y^{s+1} \equiv 6(r+1)x^r y^s - 2(r+5)x^{r+4}y^{s+1},$$
од каде што добиваме: $2(s+1) = 6(r+1)$ и $3(s+2) = -2(r+5)$, т.е.
$$6r - 2s = -4, \qquad 2r + 3s = -16,$$
па $r = -2$, $s = -4$. Според тоа, $\lambda = x^{-2}y^{-4}$. Така ја добиваме точната диференцијална равенка
$$(2x^{-2}y^{-3}+3x^2y^{-2})dx + (6x^{-1}y^{-4}-2x^3y^{-3})dy = 0;$$
$$u(x,y) = \int_1^x P(x,1)dx + \int_1^y Q(x,y)dy = x^3y^{-2} - 2x^{-1}y^{-3}.$$
Значи, општиот интеграл на дадената равенка е
$$x^3y^{-2} - 2x^{-1}y^{-3} = C, \text{ т.е. } x^4y = 2 + Cxy^3.$$
(Да забележиме дека $x=0$ и $y=0$ се сингуларни интеграли).

5.7. Во некои случаи, интегрален множител на дадена ДР може да се најде со "пребарување", откако ќе се прегрупираат членовите на равенката, препознавајќи групи од членови како делови на тотален диференцијал. На пример:

Група членови	Интегрален множител	Тотален диференцијал
1°. $xdy-ydx$	$1/x^2$	$(xdy-ydx)/x^2=d(y/x)$
2°. $xdy-ydx$	$1/y^2$	$-(xdy-ydx)/y^2=d(-x/y)$
3°. $xdy-ydx$	$1/xy$	$dy/y-dx/x=d(\ln\frac{y}{x})$
4°. $xdy-ydx$	$1/(x^2-y^2)$	$(xdy-ydx)/(x^2-y^2)=\frac{1}{2}d(\ln\frac{x+y}{x-y})$
5°. $xdy-ydx$	$1/(x^2+y^2)$	$(xdy-ydx)/(x^2+y^2)=d(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})$
6°. $xdy+ydx$	$1/xy$	$(xdy+ydx)/xy=d[\ln(xy)]$
7°. $xdy+ydx$	$1/(xy)^k$	$d[-1/(k-1)(xy)^{k-1}]$ за $k\neq 1$,

и др.

Да се реши ДР

$$(x^2+y^2)(xdy+ydx) = xy(xdy-ydx).$$

Решение. Ако равенката ја поделиме со $xy(x^2+y^2)$ и ги имаме предвид 6^o и 5^o, тогаш таа добива вид

$$d\{\ln(xy)\} = d(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}).$$

Интегрирајќи непосредно, добиваме

$$\ln(xy) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + C,$$

што претставува општ интеграл на дадената ДР.

5.8. Со пребарување, да се најде интегрален множител на ДР

$$(x^2y^3+2y)dx + (2x-2x^3y^2)dy = 0.$$

Решение. Равенката можеме да ја преуредиме вака:

$$2(ydx+xdy) + x^2y^3dx - 2x^3y^2dy = 0.$$

Членот $ydx+xdy$ ја сугерира функцијата $1/(xy)^k$ како можен интегрален множител (в. 7^o од зад. 5.7). Испитувајќи ги преостанатите два члена,

$$\{x^2y^3/(xy)^k\}dx = x^{2-k}y^{3-k}dx, \quad -2x^{3-k}y^{2-k}dy,$$

добиваме дека секој од нив ќе биде тотален диференцијал ако $k=3$ (имено, за $k=3$, првиот е $xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$, а вториот $-2y^{-1}dy=-2d(\ln y)$). Следствено, интегрален множител е $1/(xy)^3$.

5.9. Да се најде општ интеграл на ДР

$$(x^2+x)y' + y^2 - (1-2x)y - 2x = 0$$

знаејќи дека таа има партикуларен интеграл од облик $y_1=k$ каде што k е константа што треба да се определи. Потоа да се покаже дека интегралните криви минуваат низ две фиксни точки.

Решение. За да биде $y_1=k$ решение на дадената равенка, треба да е

$$k^2-(1-2x)k - 2x = 0, \quad \text{т.е.} \quad (2k-2)x + k^2-k = 0,$$

од каде што следува $k=1$. Значи, $y_1=1$ е партикуларен интеграл на дадената равенка, којашто е рикатиева. Ставајќи во неа

$$y = z + y_1, \text{ т.е } y = z+1 \text{ и } y' = z',$$

добиваме

$$(x^2+x)z' + (2x+1)z = -z^2$$

којашто е бернулиева. Ставајќи $z=u.v$, $z'=u'v+uv'$, имаме

$$(x^2+x)u'v + (x^2+x)uv' + (2x+1)uv = -u^2v^2,$$

па избирајќи ја $u=u(x)$, така што да биде

$$(x^2+x)u' + (2x+1)u = 0, \text{ т.е. } \frac{du}{u} = \frac{2x+1}{x^2+1}dx,$$

што значи $u=x^2+x$, ќе добиеме

$$(x^2+x)uv' = -u^2v^2, \text{ т.е. } \frac{dv}{v^2} = -dx,$$

па според тоа $$v = \frac{1}{x+C}.$$

Значи, $z=uv=\frac{x^2+x}{x+C}$, $y=1+z=1+\frac{x^2+x}{x+C}$, па $y=\frac{x^2+2x+C}{x+C}$, т.е $(x+C)y=x^2+2x+C$ е бараниот општ интеграл. Нека

$$(x+C_1)y = x^2+2x+C_1, \qquad (x+C_2)y = x^2+2x+C_2$$

се две произволни различни (т.е. $C_1 \neq C_2$) интегрални криви. Одземајќи ја втората од првата, добиваме $(C_1-C_2)y = C_1-C_2$, т.е. $y=1$, па заменувајќи го $y=1$ во првата равенка, добиваме

$$x + C_1 = x^2+2x+C_1$$

од каде што $x^2+x=0$, па $x_1=0$, $x_2=-1$. Значи, пресечни точки на кривите се $A(0,1)$ и $B(-1,1)$. Бидејќи координатите на овие точки не зависат од C_1 и C_2, заклучуваме дека сите интегрални криви минуваат низ A и B.

5.10. Една крива го има следново својство: тангентата во произволна нејзина точка $M(x,y)$ ја сече ординатната оска во точка B, чија ордината е еднаква со разликата од квадратите на апсцисата и ординатата на M. Да се најде равенката на аа крива.

Решение. Точката B е пресек на правите $X=0$ и $Y-y=y'(X-x)$, па $B(0,y-xy')$. Според даденото својство имаме $y-xy'=x^2-y^2$, т.е.

$$xy' = y^2 + y - x^2 \tag{1}$$

-рикатиева ДР. Во општ случај, една рикатиева ДР не може да се реши "во квадратури". Меѓутоа, со проба, овде можеме да најдеме дека $y_1=x$ е (партикуларно) решение на (1). Ставајќи во (1):

$$y = \frac{1}{z} + y_1 = \frac{1}{z} + x, \qquad y' = -\frac{z'}{z^2} + 1, \tag{2}$$

по средувањето, добиваме

$$z' + (2+\frac{1}{x})z = -\frac{1}{x} \qquad (3)$$

-линеарна ДР; нејзиниот општ интеграл е $z=(2C-e^{2x})/2xe^{2x}$. Враќајќи се на смената (2), добиваме $y=2xe^{2x}/(2C-e^{2x})+x$, т.е.

$$(x+y)e^{2x} + 2C(x-y) = 0. \qquad (4)$$

Значи, постојат безброј многу криви со даденото својство; тие се определени со равенката (4).

5.11. Барајќи ја интегралната крива на ДР $(x-1)dy-ydx=0$ што минува низ точката (1,0), добиваме "чуден" резултат. Што е причината за тоа?

Решение. Поради $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$, добиваме дека $y=C(x-1)$ е општиот интеграл на дадената ДР. Ставајќи $x=0$ и $y=0$, добиваме $0=C\cdot 0$, па C не е определена. Значи, низ точката (1,0) минуваат безброј интегрални криви. Причината за тоа се нарушените услови за единственост во теоремата од §5.4. Имено, ако дадената ДР ја напишеме во формата $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}$, ќе добиеме дека $f(x,y)=\frac{y}{x-1}$, па $f_y'(x,y)=\frac{1}{x-1}$ е прекината во точката (1,0) и неограничена во околина на таа точка .

5.12. Дадена е ДР $y'=2x+y$ и почетниот услов $y(0)=1$. Да се најде приближна вредност на $y(0,5)$ со помош на:

а) Ојлеровиот метод при $h=0,1$;

б) точното решение;

в) тајлоров ред (т.е. методот на последователно диференцирање, §4.1).

Решение. а) Ја користиме формулата (3') од §5.5:

$$y_{k+1}=y_k+hy_k' = y_k+hf(x_k,y_k), \quad k=0,1,\dots,n.$$

За дадениот случај имаме:

$x_0=0$, $y_0=1$, $h=0,1$; $x_1=0,1$; $x_2=0,2;\dots;x_5=0,5$;

$y_{k+1}=y_k+0,1y_k'$, $y_k'=2x_k+y_k$;

$k=0$: $y_1=y_0 + 0,1\cdot y_0' = 1+0,1\cdot 1 = 1,1$;

$y_1'=2x_1+y_1=2\cdot 0,1+1,1=1,3$;

$k=1: y_2=y_1+0,1\cdot y_1'=1,1+0,1\cdot 1,3=1,23;$

$y_2'=2x_2+y_2=2\cdot 0,2+1,23=1,63;$

$k=2: y_3=y_2+0,1\cdot y_2'=1,23+0,1\cdot 1,63=1,393;$

на сличен начин: $y_4=1,5923$; $y_5=1,8315$. Значи, $y(0,5)\approx 1,8315$.

Често пати е згодно резултатите да се пишуваат во таблица; за дадениот случај би ја добиле таблицата:

x_k	y_k	$y_k'=2x_k+y_k$
0,0	1,0000	1,0000
0,1	1,1000	1,3000
0,2	1,2300	1,6300
0,3	1,3930	1,9930
0,4	1,5923	2,3923
0,5	1,8315	

б) Дадената ДР е линеарна, па

$$y = e^x[C + \int 2xe^{-x}dx] = Ce^x-2(x+1);$$

од $y(0)=1$ добиваме $C=3$, т.е. $y=3e^x-2x-2$. Според тоа: $y(0,5) = 3\cdot e^{0,5}-2\cdot 0,5-2\doteq 1,9461$.

в) Со последователно диференцирање, добиваме:

$$y'=2x+y,\quad y''=2+y',\quad y'''=y'',\quad y^{IV}=y''',\ y^{V}=y^{IV},\ldots$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=3=y'''(0)=y^{IV}(0)=y^{V}(0),\ldots,$$

па Тајлоровиот ред на бараната функција $y(x)$ (в. (3) од §4.1) е

$$y(x)=1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots;$$

$$y(0,5)=1+0,5+\frac{3\cdot 0,5^2}{2}+\frac{3\cdot 0,5^3}{3!}+\frac{3\cdot 0,5^4}{4!}+\frac{3\cdot 0,5^5}{5!}+\ldots$$

$$= 1+0,5+0,375+0,0625+0,0078+0,0008+\ldots=1,9461.$$

5.13. Со помош на Пикаровиот метод да се најде приближна вредност на решението $y(x)$ кога $x=0,3$ за ДР $y'=3x+2y$ при почетниот услов $y(0)=1$, земајќи три последователни приближувања. Да се спореди со точното решение.

Решение. Ќе ја примениме формулата (6) од §5.5, којашто, во дадениов случај е

$$y_k(x) = y_0 + \int_0^x (3t+2y_{k-1})dt. \qquad (*)$$

Бидејќи $y_0=y(0)=1$, од (*) добиваме:

$$y_1(x)=1+\int_0^x (3x+2)dx = 1+2x+\frac{3}{2}x^2;$$
$$y_2(x)=1+\int_0^x (3x+2+4x+3x^2)dx = 1+2x+\frac{7}{2}x^2+x^3;$$
$$y_3(x)=1+\int_0^x (3x+2+4x+7x^2+2x^3)dx =$$
$$= 1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4.$$
$$y_3(0,3)=1+2.0,3+\frac{7}{2}.0,3^2+\frac{7}{3}.0,3^3+\frac{1}{2}.0,3^4 =$$
$$= 1+0,6+0,315+0,063+0,00405 = 1,9820.$$

Дадената ДР, $y'-2y=3x$, е линеарна. Нејзиното општо решение е $y=Ce^{2x}-3x/2-3/4$, а за $y(0)=1$ се добива $C=7/4$, т.е. $y=(7e^{2x}-6x-3)/4$. Ставајќи $x=0,3$, добиваме $y(0,3)\doteq1,9887$.

5.14. Да се реши ДР

$$y = (x-1)y' + 2y'^2. \qquad (1)$$

Решение. Ако дадената ДР ја напишеме во видот $y=xy'+2y'^2-y'$, ќе видиме дека таа е клероова ДР, па ставајќи $y'=p$ добиваме

$$y = xp + 2p^2 - p. \qquad (2)$$

Равенката ќе ја решиме со т.н. метод на диференцирање. Диференцирајќи ја (2) по x, добиваме

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + 4p\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx},$$

т.е. имајќи предвид дека $p=dy/dx$:

$$\frac{dp}{dx}(x+4p-1) = 0. \qquad (3)$$

1) Од $dp/dx=0$ добиваме $p=C$, па општото решение на (1) е $y = Cx + 2C^2 - C$.

2) Од $x+4p-1=0$ добиваме $x=1-4p$ и заменуваме во (2): $y = (1-4p)p + 2p^2 - p = -2p^2$. Од

$$4p=1-x \quad и \quad y = -2p^2$$

го елиминираме p и добиваме $8y + (1-x)^2 = 0$. Јасно е дека $8y+(x-1)^2=0$ е интеграл на (1) што не се добива од општото решение, т.е. тој е сингуларен интеграл на (1).

5.15. Да се реши лагранжовата диференцијална равенка

$$y = x + y'^3 - \frac{3}{2}y'^2. \qquad (1)$$

Решение. Ставајќи $y'=p$, добиваме

$$y = x + p^3 - \frac{3}{2}p^2, \qquad (2)$$

а откако диференцираме по x:

$$p = 1 + (3p^2-3p)p' \qquad (p'=dp/dx)$$

т.е. $(3pp'-1)(p-1) = 0$. Значи

$$3pp' - 1 = 0 \quad \text{или} \quad p - 1 = 0.$$

1) Од $3pp'-1=0$, т.е. $3pdp=dx$, добиваме

$$\frac{3p^2}{2} = x - C, \text{ т.е. } x = \frac{3p^2}{2} + C,$$

а по заменувањето на x во (1) ќе добиеме дека општиот интеграл на дадената равенка во параметарска форма е

$$x = \frac{3p^2}{2} + C, \; y = p^3 + C,$$

т.е. по елиминацијата на параметарот p:

$$8(x-C)^3 = 27(y-C)^2. \qquad (3)$$

2) Од $p-1=0$ имаме $p=1$, па заменувајќи го тоа во (2), добиваме дека $y=x-1/2$ е решение на (1) што не се добива од (3), т.е. тоа е сингуларно решение на (1).

5.16. Да се најде општиот интеграл на ДР

$$y'^2 - 2y' + y/x = 0. \qquad (1)$$

Решение. Решавајќи ја (1) како квадратна равенка по y', ги добиваме следниве две (хомогени) ДР

$$y' = 1 + \sqrt{1-y/x}, \quad y' = 1 - \sqrt{1-y/x}, \qquad (2)$$

определени во областа $x(x-y) > 0$.

Со смената $y=xu$, $u=u(x)$, од првата ДР во (2) добиваме

$$u + xu' = 1 + \sqrt{1-u}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{du}{1-u+\sqrt{1-u}} = \frac{dx}{x} \qquad (2')$$

(при $1-u+\sqrt{1-u}\neq 0$). Ставајќи $\sqrt{1-u}=v$, т.е. $1-u=v^2$, $v=v(x)$, добиваме

$$\frac{2dv}{v+1} = -\frac{dx}{x}; \quad (v+1)^2 = \frac{c}{x}; \quad x(1+\sqrt{1-y/x})^2 = C,$$

т.е.

$$2x - y - C + 2\sqrt{x^2 - xy} = 0. \tag{3}$$

Слично, за втората ДР од (2), имаме

$$2x - y - C - 2\sqrt{x^2 - xy} = 0. \tag{4}$$

Функцијата $y=y(x)$, определена со производот на (3) и (4): $(2x-y-C)^2 - 4(x^2-xy) = 0$, т.е.

$$(y+C)^2 = 4Cx, \tag{5}$$

ја задоволува ДР (1). Бидејќи содржи една произволна константа, следува дека (5) претставува општ интеграл на (1).

Забелешка. Во (2´) претпоставивме дека $1-u+\sqrt{1-u}\neq 0$. Ако, пак, $1-u+\sqrt{1-u}=0$, тогаш $1-y/x = -\sqrt{1-y/x}$, т.е. $(x-y)^2 = x^2-xy$, па $y(y-x)=0$; $y=0$ е решение на (1) кое се добива од (5) за $C=0$, а $y-x=0$, т.е. $y=x$, е решение на (1) што не се добива од (5), т.е. е сингуларно решение.

5.17. Да се реши ДР (од зад. 5.16)

$$xy'^2 - 2xy' + y = 0 \tag{1}$$

со методот на диференцирање.

Решение. Равенката може да се реши експлицитно по y:

$$y = 2xp - xp^2. \tag{2}$$

каде што $p=y'$. Диференцирањето по x дава

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - p^2 - 2xp\frac{dp}{dx},$$

т.е.

$$p(1-p) + 2x(1-p)\frac{dp}{dx} = 0. \tag{3}$$

1) Ако $1-p\neq 0$, тогаш по делењето со $1-p$, од (3) добиваме $p+2x(dp/dx) = 0$, чие решение е $xp^2 = C$. Тогаш

$$x = \frac{C}{p^2}, \quad y = \frac{2C}{p} - C \tag{4}$$

се параметарски равенки на општиот интеграл на (1). Со елиминација на p од (4) добиваме

$$(y+C)^2 = 4Cx. \tag{5}$$

2) Ако $1-p=0$, тогаш заменувајќи го $p=1$ во (2) добиваме $y=x$; очигледно, $y=x$ е решение на (1) и не се добива од (5), т.е. $y=x$ е сингуларно решение на (1).

5.18. Да се најде општиот интеграл на ДР

$$\frac{x}{y'} - \operatorname{arctg} y' + y' = 0. \tag{1}$$

Решение. Во (1) го нема y и таа може да се реши по x:

$$x = y'\operatorname{arctg} y' - y'^2;$$

значи, таа е од типот II (§5.7). Ставајќи $y'=p$, т.е. $dy=pdx$, добиваме $x=p\operatorname{arctg}p-p^2$, $dy=p[\operatorname{arctg}p+\frac{p}{1+p^2}-2p]$, па

$$y = \int(p\operatorname{arctg}p + \frac{p^2}{1+p^2} - 2p^2)\,dp =$$

$$= \frac{1}{2}(p^2-1)\operatorname{arctg}p + \frac{p}{2} - \frac{2p^3}{3} + C;$$

значи општиот интеграл во параметарски облик е

$$x = p\operatorname{arctg}p - p^2, \quad y = \frac{1}{2}(p^2-1)\operatorname{arctg}p + \frac{p}{2} - \frac{2p^3}{3} + C.$$

5.19. Да се најде општиот интеграл на ДР

$$y'^2 - 2y'^{-2}y - y'^{-6} = 0. \tag{1}$$

Решение. Равенката може да се реши по y, а не го содржи x (тип III од §5.7):

$$y = y'^{-2} \pm \sqrt{y'^{-4}+y'^{-6}} = y'^{-2} \pm y'^{-2}\sqrt{1+y'^{-2}}.$$

Ставајќи $y'=p$, добиваме

$$y = p^2 \pm p^2\sqrt{1+p^2}; \tag{2}$$

од $dy = pdx$ имаме

$$dx = \frac{1}{p}dy = (2 \pm 2\sqrt{1+p^2} \pm \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}})\,dp,$$

а од тоа добиваме

$$x = 2p \pm \frac{3p}{2}\sqrt{1+p^2} \pm \frac{1}{2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}) + C. \tag{3}$$

Според тоа, општиот интеграл на (1) ќе биде даден во параметарски облик со равенките (2) и (3).

5.20. Да се најде општиот интеграл на равенката

$$y'^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}.$$

Решение. Овде е можно, равенката да се реши по y или по y', но позгодно е да се изразат y и y' со помош на еден параметар t. Ставајќи $y'=p$, а потоа

$$p = a\cos^5 t, \qquad y = a\sin^5 t,$$

добиваме

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{5a\sin^4 t\cos t}{a\cos^5 t}dt = 5\ \mathrm{tg}^4 t\ dt,$$

т.е. $x = 5\int \mathrm{tg}^4 t\ dt = [\mathrm{tg}t=z] = 5\int \frac{z^4}{z^2+1}\,dz = 5(\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 t-\mathrm{tg}t+t) + C.$

Значи, општиот интеграл е

$$x = 5(\tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 t - \mathrm{tg}t + t) + C, \quad y = a\sin^5 t.$$

5.21. Да се реши равенката

$$y = 2xy' - y'^2 - \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

Решение. Таа е од видот IV, §5.7. Ставајќи $y'=p$, имаме

$$y = 2xp - p^2 - \frac{x^2}{2}. \tag{2}$$

Тоталниот диференцијал на $y=y(x,p)$ е

$$dy = (2p-x)\,dx + (2x-2p)\,dp,$$

а од тоа, поради $dy=pdx$, добиваме

$$(p-x)\,dx - 2(p-x)\,dp = 0. \tag{3}$$

1) Ако $p-x\neq 0$, од (3) добиваме $dp=dx/2$, па $p=x/2+C$. Заменувајќи го тоа во (2), по средувањето, добиваме

$$y = \frac{x^2}{4} + Cx - C^2 \tag{4}$$

-општото решение на (1).

2) Ако $p-x=0$, тогаш $p=x$, па од (2):

$$y = 2x^2 - x^2 - x^2/2 = x^2/2.$$

Со проверка утврдуваме дека $y=x^2/2$ е решение на (1) и не се добива од (4), т.е. тоа е сингуларно решение на (1).

5.22. Дадена е ДР

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \qquad (y'=p). \tag{1}$$

Да се најде: а) p-дискриминантата, б) C-дискриминантата (на општиот интеграл на (1)), в) сингуларниот интеграл и обвивната линија на (1) (ако постојат).

Решение. а) Како во примерот 1 од §5.8 ја диференцираме (1) по p:

$$3p^2 - 4xy = 0 \tag{2}$$

и го елиминираме p од (2) и (1); заменувајќи го $p=\pm\sqrt{4xy/3}$ во (1), добиваме

$$27y = 4x^3 \tag{3}$$

-бараната p-дискриминанта. Со директна проверка, лесно се покажува дека $y=4x^3/27$ е решение на (1).

б) За да ја најдеме бараната C-дискриминанта, треба да го најдеме општиот интеграл на (1). Бидејќи (1) може да се реши по x, таа е од типот IV во §5.7. Имаме:

$$x = \frac{2y}{p} + \frac{p^2}{4y}, \tag{4}$$

$$dx = \left(\frac{2}{p} - \frac{p^2}{4y^2}\right)dy + \left(\frac{2p}{4y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp,$$

а поради, $dy = pdx$, т.е. $dx=dy/p$, по средувањето, добиваме

$$p(4y^2-p^3)dy = 2y(4y^2-p^3)dp,$$

т.е. $\frac{dy}{y} = 2\,\frac{dp}{p}$ (при што $py(4y^2-p^3) \neq 0$);

општиот интеграл на оваа ДР е $y=Ap^2$. Од тоа и од (4) добиваме дека

$$y = Ap^2, \quad x = 2Ap + \frac{1}{4A}$$

е општиот интеграл на (1) во параметарска форма; елиминирајќи го p, го добиваме општиот интеграл во експлицитна форма:

$$y = C(x-C)^2, \quad C = \frac{1}{4A}. \tag{5}$$

Го диференцираме (5) по C:

$$0 = (x-C)^2 - 2C(x-C) \tag{6}$$

и го елиминираме C од (5) и (6); при $C\neq x$, од (6) имаме $C=x/3$, па заменувајќи во (5) ја добиваме C-дискриминантата на (5),

$$27y = 4x^3. \tag{7}$$

(Ако $C=x$, тогаш се добива $y=0$ - партикуларно решение на (1).)

в) Во а) констатиравме дека p-дискриминантата (3) е интеграл на (1); очигледно, тој не може да се добие од (5) како партикуларен интеграл, па следствено тој е сингуларен интеграл.

г) C-дискриминантната крива е составена само од една "гранка" - кубната парабола $27y-4x^3=0$. За да покажеме дека тоа е обвивна линија на (5), доволно е да се исполнети условите 1° и 2° од §5.8. Имено, претпоставувајќи дека решението $y=4x^3/27$ се разгледува на секој сегмент $[a,b]$, имаме дека парцијалните изводи

$$\Phi'_x \equiv -C(x-C), \quad \Phi'_y \equiv 1$$

(добиени од (5): $\Phi(x,y,C) \equiv y-C(x-C)^2$) се ограничени на $[a,b]$ и $\Phi_y = 1 \neq 0$.

Следствено, $y=4x^3/27$ е обвивка на (5).

5.23. Да се реши ДР

$$2xyp - (x^2-4)p^2 + x^2 = 0 \quad (p=y'). \tag{1}$$

Решение. ДР (1) може да се реши по y:

$$2y = xp - \frac{4}{x}p - \frac{x}{p}.$$

Диференцирајќи по x, по средувањето, добиваме

$$(p^2x^2-4p^2+x^2)(p-x\frac{dp}{dx}) = 0.$$

Од $p - x\frac{dp}{dx} = 0$: $p = Cx$, па општиот интеграл на (1) е

$$C^2(x^2-4) - 2Cy - 1 = 0. \tag{2}$$

Работејќи како во зад. 5.22, ја добиваме p-дискриминантата $x^2(x^2+y^2-4) = 0$ и C-дискриминантата $x^2+y^2-4 = 0$.

Со директна проверка се покажува дека $x^2+y^2 = 4$ е сингуларен интеграл на (1). Условите 1° и 2° од §5.8 се исполнети, па $x^2+y^2 = 4$ е обвивна линија на (2).

Забелешка. Во p-дискриминантата, $x=0$ се јавува двапати, не се јавува во C-дискриминантата и не е решение на (1); таа е геометриско место на допири.

Општиот интеграл (2) е фамилија параболи, $y=Cx^2/2-2C+1/2C$, а кружницата $x^2+y^2 = 4$ е нивна обвивна линија. (Скицирај и согледај дека кружницата ја допираат само параболите за кои $C^2 \geq 1/4$.)

5.24. Да се најде таква крива, за која отсечката што ја прави на оската OY нејзината тангента (повлечена во произволна точка M) е еднаква со реципрочната вредност на отсечката што ја прави истата тангента на оската OX.

Решение. Равенката на тангентата на кривата во произволна точка $M(x,y)$ е

$$Y - y = y'(X-x);$$

нејзините пресечни точки со оските 0X и 0Y се: $A(x-y/y', 0)$ и $B(0, y-xy')$ соодветно. Според условот на задачата имаме $0B = 1/0A$, од каде што ја добиваме диференцијалната равенка

$$y - xy' = \frac{y'}{xy'-y}, \quad \text{т.е.} \quad (y-xy')^2 = -y'$$

(значи, мора да биде $y' < 0$). Оттука:

$$y = xy' \pm \sqrt{-y'},$$

а тоа е клероова ДР; нејзиниот општ интеграл е $y=Cx\pm\sqrt{-C}$. Која било права од оваа фамилија (како тангент сама на себе), го задоволува условот $0B = 1/0A$. Но,

$$0 = x \pm \frac{1}{2\sqrt{-C}} \qquad \sqrt{-C} = \pm\frac{1}{2x} \qquad C = -\frac{1}{4x^2},$$

па заменувајќи го ова во општиот интеграл, го добиваме сингуларниот интеграл

$$y = \frac{1}{4x}$$

-тоа е равенката на бараната крива.

5.25. Да се најде равенката на изогоналните траектории кои ја сечат под агол $\alpha \neq 90^\circ$ фамилијата криви

$$y = \frac{a}{x} \qquad \text{(a е параметар).}$$

Решение. Од равенките $y=a/x$ и $y'=-a/x^2$, со елиминација на параметарот а, се добива диференцијалната равенка на дадената фамилија

$$xy' + y = 0.$$

Заменувајќи го овде y' со $\frac{y'-k}{1+ky'}$ $(k=\mathrm{tg}\alpha)$, добиваме

$$x\cdot\frac{y'-k}{1+ky'} + y = 0, \quad \text{т.е.} \quad y' = \frac{k-y/x}{1+ky/x},$$

што претставува диференцијалната равенка на изогоналните траектории. Со смената $y=xu$, каде што u е нова функција од x, ја добиваме равенката

$$u + xu' = \frac{k-u}{1+ku}, \quad \text{т.е.} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{k-2u-ku^2}{ku+1}.$$

Последнава е ДР при која променливите се раздвојуваат:

$$\frac{(ku+1)du}{ku^2+2u-k} = -\frac{dx}{x};$$

нејзиниот општ интеграл е $\frac{1}{2}\ln(ku^2+2u-k) = \ln\frac{C}{x}$, т.е.

$$ku^2 + 2u - k = C^2/x^2.$$

Враќајќи се на смената $u = \frac{y}{x}$, добиваме

$$ky^2 + 2xy - kx^2 = C^2,$$

а оваа е равенката на изогоналните траектории

5.26. Да се најдат изогоналните траектории што ги сечат под агол $\alpha = 135^o$ линиите од фамилијата

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Решение. Диференцијалната равенка на дадената фамилија е $x+yy'=0$, па диференцијалната равенка на изогоналните траектории ќе биде

$$x + y\,\frac{y'-k}{1+ky'} = 0,$$

каде што $k=-1=tg135^o$. Ставајќи $k=-1$, ја добиваме хомогената диференцијална равенка

$$y' = \frac{1+y/x}{1-y/x},$$

која, со смената $y=xu$, преминува во

$$\frac{(u-1)du}{u^2+1} = -\frac{dx}{x};$$

нејзиното решение е равенката на бараните траектории Имаме:

$$\frac{1}{2}\ln\,(u^2+1) - \operatorname{arctg}u = -\ln x + \ln C,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}y/x}, \qquad \rho = Ce^{\phi}.$$

каде што ρ и ϕ се поларни координати.

5.27. Да се најдат ортогоналните траектории на фамилијата параболи

$$y^2 = a^2 - 2ax. \tag{1}$$

Решение. Од $2yy'=-2a$ имаме $a=-yy'$, па заменувајќи во (1), ја добиваме ДР на таа фамилија,

$$y^2 = y^2y'^2 + 2xyy', \text{ т.е. } y = 2xy' + yy'^2 \quad (y \neq 0).$$

Диференцијалната равенка на ортогоналните траектории ќе биде

$$y = -\frac{2x}{y'} + \frac{y}{y'^2}, \text{ т.е. } 2x = y\left(\frac{1}{y'} - y'\right).$$

Ставајќи во неа $y'=p$, ја добиваме равенката

$$2x = y\left(\frac{1}{p} - p\right) \tag{2}$$

-решена по x. Диференцираме по y и имаме предвид дека $x=x(y)$ и $dx/dy=1/p$:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p} - p + y\left(-\frac{1}{p^2} - 1\right)\cdot\frac{dp}{dy};$$

по средувањето добиваме

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}, \quad \text{т.е.} \quad p = \frac{C}{y}. \tag{3}$$

Според тоа, (2) и (3) се параметарски равенки на ортогоналните траектории. Исклучувајќи го p од (2) и (3), добиваме

$$y^2 = 2Cx + C^2 \tag{4}$$

т.е. ортогоналните траектории на (1) е фамилијата параболи (4) (скицирај!).

5.28. Да се најдат ортогоналните траектории на фамилијата линии (во поларни координати)

$$\rho^2\cdot\cos 2\phi = a^2. \tag{1}$$

Решение. Диференцираме по ϕ:

$$2\rho\rho'\cos 2\phi - 2\rho^2\sin 2\phi = 0 \implies \rho'\cos 2\phi = \rho\sin 2\phi.$$

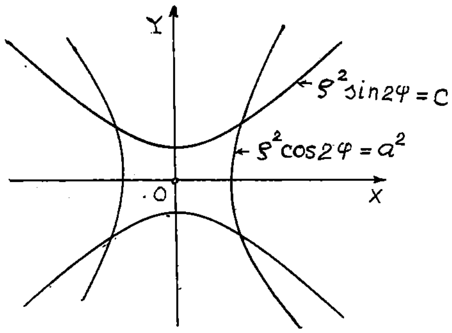
Го заменуваме ρ' со $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ и ја добиваме диференцијалната равенка на ортогоналните траектории:

$$-\frac{\rho^2}{\rho'}\cos 2\phi = \rho\sin 2\phi, \quad \text{т.е.} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\mathrm{ctg}\, 2\phi\, d\phi.$$

Општиот интеграл на оваа диференцијална равенка

$$\rho^2\sin 2\phi = C \tag{2}$$

е равенка на бараните траектории (црт. 13)



Црт. 13

5.29. Во клероовата ДР

$$y = xp + \phi(p) \tag{1}$$

да се определи $\phi(p)$ така што $x^2+4y = 0$ да биде нејзин сингуларен интеграл.

Решение. Диференцирајќи ја $x^2 + 4y = 0$ по x, добиваме:

$$2x + 4y' = 0; \quad x = -2y'; \quad x = -2p. \tag{2}$$

Потоа:

$$(-2p)^2 + 4y = 0; \quad y = -p^2. \tag{3}$$

Заменувајќи ги x и y од (2) и (3) во (1), добиваме

$$-p^2 = -2p\cdot p + \phi(p), \text{ т.е. } \phi(p) = p^2.$$

5.30. Да се најдат еволвентите на параболата

$$4y^3 = 27x^2. \tag{1}$$

Решение. Во клероовата равенка $y=xp+\phi(p)$ ќе ја определиме $\phi(p)$ така што (1) да биде сингуларен интеграл. За таа цел, (1) ќе ја диференцираме по x и добиваме

$$2y^2y' = 9x, \quad \text{т.е.} \quad x = \frac{2}{9}y^2p \quad (p=y').$$

Потоа:

$$4y^3 = 27(\frac{2}{9}y^2p)^2; \quad y = \frac{3}{p^2}, \text{ па и } x = \frac{2}{p^3}.$$

Овие ги заменуваме во равенката $y=xp+\phi(p)$:

$$\frac{3}{p^2} = \frac{2}{p^3}p + \phi(p), \text{ т.е. } \phi(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Значи, (1) е сингуларен интеграл на ДР

$$y = xp + \frac{1}{p^2}. \tag{2}$$

Сметајќи го p за параметар, со (2) е определена фамилијата прави, коишто се тангенти на кривата (1), па за да ги најдеме еволвентите на таа крива, треба да ги најдеме ортогоналните проектории на фамилијата прави (1). Затоа, во (2), $p=y'$ го заменуваме со $-1/p$, па $y=-\frac{x}{p}+p^2$. (2′)
Диференцирајќи по x, добиваме

$$p = -\frac{1}{p} + (\frac{x}{p^2} + 2p)\frac{dp}{dx},$$

а по средувањето

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(p^2+1)} = \frac{2p^2}{p^2+1} \text{ - линеарна;} \tag{3}$$

општото решение е:

$$x = \frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}} + 2p.$$

Го заменуваме x во (2′):

$$x = \frac{pC}{\sqrt{p^2+1}} + 2p, \quad y = p^2 - 2 - \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}. \qquad (4)$$

Ставајќи p=tgt во (4), добиваме

$$x = C\sin t + 2\mathrm{tg}t, \quad y = \mathrm{tg}^2 t - C\cos t - 2 \qquad (4')$$

-други параметарски равенки на бараните еволвенти.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 5

5.31. Меѓу дадените, избери ги оние ДР што се егзактни и реши ги:

а) $(3x^2-ye^x)dx + (2y-e^x)dy = 0$;

б) $(y/x+y^3)dx + (\ln x+3xy^2)dy = 0$;

в) $(x^2y-3)dx + x^2(x-2y)dy = 0$;

г) $(\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2+y^2})dx + (\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x})dy = 0$;

д) $(x^2y+x)dy - ydx = 0$;

ѓ) $4x^3ydx + (y^4-x^4+1)dy = 0$;

е) $(x+y\cos x)dx + \sin x dy = 0$;

ж) $\cos x dx + (y+\sin x+\sin y)dy = 0$.

5.32. Да се интегрира $ydx + xdy = 0$ $(x > 0, y > 0)$ како егзактна, а потоа како ДР при која променливите се раздвојуваат. Да се најде зависноста меѓу добиените општи интеграли $u = C$ и $u_1 = C_1$, т.е. меѓу интегралите u и u_1.

5.33. ДР $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$ е егзактна хомогена (в. зад. 5.4). Да се покаже дека нејзиниот општ интеграл е: $x\cdot(x^2+y^2) + y\cdot 2xy = C$.

5.34* Да се докаже дека: ако диференцијалната равенка $Pdx + Qdy = 0$, $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$, е егзактна хомогена, тогаш $x\cdot P + y\cdot Q = C$ е нејзин општ интеграл (само ако $x\cdot P + y\cdot Q \not\equiv 0$).

5.35. Извор на светлина е поставен во точката 0 (координатен почеток). Каква треба да биде формата на огледалото, така што одбиените зраци да бидат паралелни со оската OX?

5.36. Да се најде условот при кој равенката $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител од облик $\lambda = \lambda(y)$ и потоа да се реши ДР $(y^3+y)dx + (xy^2+x+3)dy = 0$.

5.37. Да се решат ДР од 5.31 што не се егзактни в), д), ѓ) и ж), откако претходно ќе се провери дали имаат интегрален множител од обликот $\lambda(x)$ или $\lambda(y)$.

5.38. Да се провери дали дадената ДР има интегрален множител од обликот $\lambda(x)$, $\lambda(y)$ или $\lambda(x^2-y^2)$ (в. (4) од §5.2; зад. 5.36 и 5.3). Потоа да се најде општиот интеграл и онаа интегрална крива што минува низ дадената точка M.

а) $(x^2+y^2+x)dx - (2xy+y)dy = 0$, $M(0,-1)$;

б) $4x^3y^2dx + (y^4-x^4y+5)dy = 0$, $M(0,1)$;

в) $(xy^2-x^3-y)dx + xdy = 0$, $M(2,1)$;

г) $(x^2y^2+y^2+1)dx - (2x^3y+2xy)dy = 0$, $M(1,0)$.

5.39. Да се најде условот при кој диференцијалната равенка $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител од обликот:

а) $\lambda(x+y)$; б) $\lambda(x^2+y^2)$; в) $\lambda(xy)$; г) $\lambda(\frac{y}{x})$.

5.40. Да се покаже дека дадената ДР има интегрален множител од наведениот облик и, користејќи ја 5.39, да се реши.

а) $(2xy-y^2-y)dx + (2xy-x^2-x)dy = 0$, $\lambda(x+y)$;

б) $(5x^2+2xy+3y^3)dx + 3(3x^2+xy^2+2y^3)dy = 0$; $\lambda(x+y)$;

в) $2x^3dx + (x^2y-y^3)dy = 0$, $\lambda(x^2+y^2)$;

г) $(x^2+y^2+x)dy - ydx = 0$; $\lambda(x^2+y^2)$;

д) $(xy^2-3y)dx + (x^2y-x)dy = 0$, $\lambda(xy)$;

ѓ) $(2x^3y^2-y)dx + (2x^2y^3-x)dy = 0$; $\lambda(xy)$;

е) $(2x^2-\frac{y}{x}+x)dx + (\frac{x^3}{y}+2+\frac{x^2}{y})dy = 0$, $\lambda(y/x)$.

5.41. Да се покаже дека константата k може да се определи така што наведената функција да биде интегрален множител на дадената ДР и, потоа, да се реши.

а) x^k; $(y^2-x)dx - 2xydy = 0$;

б) $(xy)^k$; $(y-xy^2\ln x)dx + xdy = 0$;

в) $(x+y)^k$; $(4x^2+2xy+6y)dx + (2x^2+9y+3x)dy = 0$;

г) $(x^2+y^2)^k$; $(x-xy)dx + (y+x^2)dy = 0$.

Да се најде условот при кој диференцијалната равенка $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител од укажаниот облик и потоа да се интегрира дадената ДР (5.42-5.44).

5.42. $(y^2-x+2)dx + (y^2-4y-x)dy = 0$, $\lambda(y^2-x)$.

5.43. $(6xy-2x^3)dx + (y-3x^2)dy = 0$, $\lambda(x^2+y)$.

5.44. $(2x^3+3x^2y^3-y)dx + (x-3x^3y^2-2y^3)dy = 0$, $\lambda(x+y^3)$.

5.45. Да се покаже дека: ако $Q'_x - P'_y = -\frac{k}{x}\cdot Q$ (односно $Q'_x-P'_y=\frac{k}{y}P$), k=конст., тогаш x^k (односно y^k) е интегрален множител на $Pdx+Qdy = 0$. Користејќи го тоа да се реши ДР

$$(6xy^2-y^3+\frac{2y}{x})dx + (3x^2y-xy^2+1)dy = 0.$$

5.46. Да се најде условот при кој $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител од обликот x^ry^s и потоа да се реши дадената ДР (види и 5.6):

а) $(3y+4xy^2)dx + (2x+3x^2y)dy = 0$;

б) $(2y+3x^2y^3)dx + (3x+5x^3y^2)dy = 0$.

5.47. Да се покаже дека постои интегрален множител од обликот x^uy^v (u,v - конст.) за ДР

$$(ay+bx^my^n)dx + (px+qx^{m+1}y^{n-1})dy = 0 \qquad (1)$$

(a,b,p,q,m,n се константи), ако $aq - bp \neq 0$, $p \neq a$ и $q(m+1) \neq bn$ истовремено.

Со пребарување, т.е. користејќи некоја од формулите за тотален диференцијал, споменати во зад. 5.7 (или некои други), дадената ДР да се претвори во точна, а потоа да се интегрира - да се најде општ интеграл или интегралната крива што минува низ дадената точка M (5.48-5.55).

5.48. $x^2ydy - xy^2dx - 2x^3y^2dx = 0$.

5.49. $xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0$.

5.50. $ydx + x(y-3x^2y^2)dy = 0$.

5.51. $xdy - ydx = 3x^3\sqrt{x^2-y^2}dx$.

5.52. $y^2dy + ydx - xdy = 0$, $M(-1,1)$.

5.53. $xdy - ydx = (x-y)^2ydy$.

5.54. $(x^2+y^2)dx + x(xdy-ydx) = 0$, $M(1,0)$.

5.55. $x^2y' - xy = x^2-y^2$, $M(1,-1)$.

5.56. Да се најде интегрален множител на линеарната ДР од прв ред: $y' + a(x)y = f(x)$.

5.57. Да се најде интегрален множител на ДР $P(x-y)dx+Q(x-y)dy = 0$.

5.58. Да се покаже дека, ако ДР $y' = f(x,y)$ има интегрален множител $\lambda = \lambda(x)$, тогаш таа ДР е линеарна, т.е. од облик $y'=a(x)y+b(x)$.

5.59. Да се најде равенката на таква крива, чија тангента во произволна точка $M(x,y)$ ја сече апсцисната оска во точка P, чие растојание до M е еднакво со растојанието до фиксираната точка $A(0,a)$, a=конст. што не е нула.

Да се интегрираат следниве рикатиеви ДР наоѓајќи прво еден партикуларен интеграл y_1 од назначениот облик; притоа, k,a и b се константи што треба да се определат (5.60-5.66).

5.60. $y' = -\frac{1}{x}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^3}$, $M(1,-1)$; $y_1 = x^k$.

5.61. $y' = y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$; $y_1 = \frac{a}{x}$.

5.62. $y' = -y^2\sin x + 2\sin x/\cos^2x$; $y_1 = \frac{1}{\cos x}$.

5.63. $x^2y' + x^2y^2 + xy = 1$; $y_1 = ax^k$.

5.64. $xy' = xy^2 + y - x^3$, $M(1,2)$; $y_1 = ax + b$.

5.65. $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$; $y_1 = ax + b$.

5.66. Да се покаже дека ДР $y' = y^2 - 2/x^2$: а) се сведува на хомогена со смената $y = 1/z$; б) има партикуларен интеграл $y_1 = x^k$. Потоа да се реши.

5.67. Да се реши рикатиевата ДР

$$y' = \frac{a}{x}y^2 + \frac{1}{2x}y + c \qquad (a,c\neq 0, \text{ конст.})$$

со помош на смената $y = u\sqrt{x}$, $u = u(x)$.

5.68. Да се покаже дека ДР

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2},$$

каде што a,b,c се константи со својството $(b+1)^2 \geq 4ac$, има партикуларно решение $y_1 = k/x$ (k е константа што треба да се определи).

5.69. Да се издвои областа во која дадената ДР има единствено решение (користејќи ја теоремата од §5.4):

а) $y' = y^2 + xy - x^3$; б) $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$;

в) $y' = 2xy - \sqrt[3]{5x-y}$.

5.70. Нека функциите $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ во рикатиевата ДР $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ се непрекинати во интервалот (a,b). Дали таа ДР има сингуларни интеграли во (a,b)? Зошто?

5.71. Со помош на Ојлеровиот метод да се најдат четири вредности на функцијата $y(x)$, определена со ДР $y' = x^2 + y^3$, при почетните услови $y(0) = 0$, со чекор $h = 0,1$.

5.72. Со помош на Ојлеровиот метод да се најде приближна вредност на решението $y(x)$ на ДР $y' = x + y^2$ при почетниот услов $y(0) = 1$ во точката $x = 0,2$, земајќи во (3') од §5.5 за а) $k = 4$, б) $k = 3$.

5.73. Со Пикаровиот метод да се најде приближно решение на ДР $y' = x + y^2$ што го задоволува почетниот услов $y(0) = 1$ (две приближувања).

5.74. Со помош на Пикаровиот метод, да се најде приближна вредност на $y(x)$ во точката $x = x_0$ за дадената ДР при наведениот почетен услов:

а) $y' = x - y$, $y(0) = 1$, $x_0 = 0{,}2$;

б) $y' = 3x + y^2$, $y(0) = 1$, $x_0 = 0{,}1$,

земајќи во а) четири, во б) три последователни приближувања.

5.75. Да се решат следниве клероови ДР:

а) $y'^2 + 2xy' - 2y = 0$; б) $xy'^2 - yy' - y'^3 = 0$;

в) $y = xy' \pm \sqrt{1+y'^2}$; г) $y^2 - 2xyy' + x^2y'^2 = y'$.

5.76. Да се најде равенката на кривата, чија суптангента во произволна точка $M(x,y)$ е еднаква со збирот од апсцисата на M и наклонот на тангентата во M.

5.77. Да се најде равенката на кривата при која квадратот на отсечката што тангентата во произволна точка ја отсечува на апсцисната оска е еднаков со наклонот на таа тангента.

5.78. Да се реши ДР

а) $x = y/y' - 1/y'^3$, сметајќи ја x за функција од y, а $y'=1/x'$;

б) $(\cos^2 y)y'^2 + (\sin x\cos x\cos y)y' - \sin y\cos^2 x = 0$, користејќи ја смената $u = \sin x$, $w = \sin y$.

5.79. Да се најде равенката на кривата, која го има следново својство: тангентата во произволна точка $M(x,y)$ на кривата, со координатните оски образува триаголник со (постојана) плоштина a^2.

5.80. Да се најде равенката на кривата, која го има својството: отсечката на тангентата (во произволна точка од кривата), зафатена меѓу координатните оски, има константна должина a.

5.81. Да се најде равенката на кривата чии тангенти отсечуваат на координатните оски отсечки со постојан збир $2a$.

5.82. Да се решат следниве ДР:

а) $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'}$; б) $y = x(2y' + 4y'^2)$;

в) $y = x(1+y') + y'^2$; г) $y = xy'^2 + \ln y'$;

д) $y = 2xy' + \operatorname{arctg} y'$; ѓ) $2xy' = y(1-y'^2)$.

(Да се најдат и сингуларните интеграли, ако ги има.)

5.83. Да се најде интегралната крива на ДР

$$xy'^3 - yy' - 1 = 0$$

што минува низ точката $M(0,1)$. Да се покаже дека дадената ДР има сингуларна интегрална крива и дека таа не минува низ M.

5.84. Да се најде интегрална крива на ДР

$$2yy' + 4y = xy'^2$$

што минува низ точката $M(1,-4)$. Дали низ M минува единствена интегрална крива? Да се скицира фамилијата интегрални криви.

5.85. Да се најде равенката на фамилијата криви што го имаат следново својство: нормалното растојание од координатниот почеток до која било тангента е еднакво со должината на делот од соодветната нормала меѓу допирната точка и оската OX.

5.86. Да се решат следниве ДР (в. (2) од §5.7):

а) $yy'^2 + 2xy' - y = 0$; б) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$;

в) $xy'^2 + yy' - y^4 = 0$; г) $y'^3 + 2yy'^2 - x^2y' - 2x^2y = C$;

д) $xy'^3 + (x-2x^2-y)y'^2 - (2x^2+y-2xy)y' + 2xy = 0$.

5.87. Да се решат следниве ДР (во кои експлицитно не се содржи y):

а) $x = 2y' + \ln y'$; б) $y'^2 + 2y' + x = 0$;

в) $x = y'^2 + \cos y'$; г) $x^{2/3} + (y')^{2/3} = a^{2/3}$.

5.88. Да се решат следниве ДР (во кои експлицитно не се содржи x):

а) $y = 2y'^3 + y'^2$; б) $y = \ln(1+y'^2) + \operatorname{arctg} y'$;

в) $y = y' + y'^2e^{y'}$; г) $(2+y')^2 - y^2(1+y') = 0$

д) $y^3(1+y') = (3+y')^3$; ѓ) $(y')^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

5.89. Да се решат следниве ДР (во кои y може да се изрази како функција од x и $y' = p$):

а) $y'^2 - 2y' + 4x - 4y = 0$; б) $2y'^3 + 3y'^2 = x + y$;

в) $2x + 4yy'^3 + 6yy' = 0$; г) $3y'^3 + 8x^3y - 4x^4y' = 0$.

5.90. Да се најдат p-дискриминантата (ПДК), C-дискриминантата (СДК) и сингуларните интеграли (с.и.) на ДР:

а) $y'^3 + y'x - y = 0$; б) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

5.91. За испитување сингуларни интеграли, може корисно да послужат следниве шеми (в. (3) и (6) во §5.8):

$$\text{ПДК} \equiv A \cdot \Pi \cdot Д^2 = 0 \quad (1); \quad \text{СДК} \equiv A \cdot J^2 \cdot \Pi^3 = 0 \quad (2).$$

Шемата (1) означува дека равенката на ПДК се распаѓа на три равенки: A=0 - равенка на обвивната линија (анвелопа), П=0 - равенка на г.м. од повратни точки (шилци) и Д=0 - равенка на г.м. на допири, при што Д влегува во ПДК со квадрат; слично за шемата (2), со тоа што J=0 е равенка на г.м. на јазли.

Од сите г.м. во (1) и (2), само A=0 е сингуларен интеграл, а за другите г.м. е неопходно дополнително испитување во секој конкретен случај.

Да се реши дадената ДР и да се испита дали има сингуларен интеграли и други г.м. (притоа $p=y'$):

а) $x^3p^2 + x^2yp + 1 = 0$; б) $(3y-1)^2p^2 = 4y$;

в) $3xy = 2x^2p - 2p^2$; г) $2y = p^2 + 4xp$.

5.92. Да се најде сингуларниот интеграл на ДР:

а) $x(y'^2+4) = 2yy'$; б) $y'^2 = yy' - e^x$;

в) $2xyy' - x^2y'^2 - 4y' - y^2 = 0$.

5.93. Да се најде сингуларниот интеграл на ДР чиј општ интеграл е

а) $y = (x-C)^3 + C^3$; б) $(y-Cx)^3 = 8(1-C^3)$.

5.94. Да се најде обвивната линија (ако постои) на фамилијата криви:

а) $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$; б) $y = ax + \frac{1}{a}$;

в) $y(a-x) = a^2$; г) $y = ae^x$,

при што a е параметар. Да се скицира!

5.95. Да се најде обвивната линија на фамилијата криви:

а) $y = 2Cx - C^2 + 1$; б) $(x-C)^2 + y^2 = 1$

в) $(x-C)^2 + (y-C)^2 = C^2$; г) $y(y-3)^2 = (x-C)^2$.

5.96. Краевите на една отсечка, со дадена должина a, се лизгаат по координатните оски. Да се најде обвивната линија на семожните положби на отсечката.

5.97. Да се најдат ортогоналните траектории на следнава еднопараметарска фамилија криви (a е параметар):

а) $x^2 - y^2 = a^2$; б) $y^2 = 4(x-a)$;

в) $y^3 = ax^2$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$;

д) $y = (x+a)^2$; ѓ) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

е) $x^k + y^k = a^k$ (k е даден број; $a > 0$); специјално: $k=2$.

5.98. Да се најдат ортогоналните траектории на фамилијата линии (a е параметар), дадена во поларни координати:

а) $\rho^2 = a\sin 2\phi$; б) $\rho = a(1+\cos 2\phi)$;

в) $\rho = a\sin 2\phi$; г) $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\phi}$

д) $\rho\cos\phi = a\sin^2\phi$; ѓ) $\rho^2 = a^2\cos 2\phi$.

5.99. Да се покаже дека фамилијата криви $x^2/a + y^2/(a-k) = 1$ (конфокални коники), каде што a е параметар, а k е даден број, е автоортогонална.

5.100. Да се најдат изогоналните траектории што ги сечат под агол α линиите од следнава фамилија (a е параметар):

а) $x^2 + y^2 = 2ax$, $\alpha = 45^\circ$; б) $y = ax$, α произволен;

в) $y^2 = 2x + a$, $\alpha = 45^\circ$; г) $y^2 = 2x + a$, $\alpha = 30^\circ$;

д) $y = x^2 - x\sqrt{3} + a$, $\alpha = 60^\circ$; ѓ) $x^2 = 2a(y-x\sqrt{3})$, $\alpha = 60^\circ$.

5.101. Во клероовата ДР $y = xp + \phi(p)$, $p = p'$, да се определи функцијата $\phi(p)$ така што нејзин сингуларен интеграл да биде:

а) $4y = x^2 + 1$; б) $xe^{y+1} + 1 = 0$; в) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

5.102. Да се најде фамилијата еволвенти на кривата:

а) $x^2 + y^2 = a^2$ (a=конст.); б) $y^2 = 2x$;

в) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ (a=конст.); г) $x = 2t^3 - 1$, $y = -3t^2 + 2$.

5.103. Да се најде ДР на фамилијата линии што ги сече под агол од 45° тангентите на кривата:

а) $4y = x^2$; б) $x^2 + y^2 = a^2$; в) $4x^3 + 27y^2 = 0$.

* * *

5.104. Да се докаже: Ако е однапред познато дека ДР (1) од §5.2: $Pdx + Qdy = 0$ има интегрален множител од обликот $\lambda = \lambda(t)$, тогаш равенката (3) од §5.2 (со парцијални изводи) се сведува на (обична) линеарна ДР, $\frac{d\lambda}{dt} = \psi(t)\lambda$, т.е. $\lambda = \exp\{\int\psi(t)dt\}$.

5.105. Дадена е ДР

$$(x^2-2xy-1)dx + (1+x^2)dy = 0. \tag{1}$$

Да се покаже дека таа има интегрален множител од обликот а) $\lambda=\lambda(x)$; б) $\mu=\mu(x-y)$ и тој да се најде. Потоа (1) да се реши како линеарна и да се покаже дека $\lambda/\mu=C$ е општ интеграл на (1).

5.106. Да се докаже дека, ако λ и μ се два интегрални множитела на $Pdx + Qdy = 0$, такви што $\lambda/\mu\neq$конст., тогаш $\lambda/\mu=C$ е општ интеграл на таа ДР.

Да се илустрира со конкретниот пример: $xdy - ydx = 0$, $\lambda=1/x^2$, $\mu=y/x^3$. (Види и 5.105.)

5.107. Користејќи ја претходната задача, да се интегрира ДР $(x^2+y^2+1)dx - 2xydy = 0$, знаејќи дека таа има интегрални множители $\lambda = \lambda(x)$ и $\mu = \mu(x^2-y^2)$.

5.108. Дадена е фамилијата линии

$$y = \frac{Cf + g}{Cf_1 + g_1}, \tag{1}$$

каде што C е параметар, а f,g,f_1,g_1 се диференцијабилни функции од x. Да се докаже дека ДР на таа фамилија е рикатиева (и таа да се најде).

5.109. Да се докаже дека општиот интеграл на рикатиева ДР е дробнолинеарна функција од произволната константа C. (В. и 5.108.)

5.110. Да се покаже дека, ако y_1, y_2, y_3 се три линеарно независни партикуларни решенија на рикатиевата ДР, тогаш нејзиниот општ интеграл може да се претстави во обликот $\frac{y-y_2}{y-y_1} : \frac{y_3-y_1}{y_3-y_1} = C$.

5.111. Да се испита дали ДР

а) $y' + y^2 = 2/x^2$; б) $x^2(y'+y^2) = xy - 1$;

в) $x^2(2y'+y^2) + 1 = 0$

има партикуларен интеграл од обликот $y_1 = a/x$, каде што a е константа што треба да се определи, а потоа да се реши. Да се провери дали дадената ДР може да се реши со смената $xy = u$, $u = u(x)$.

5.112. Да се покаже дека интегралните криви на ДР $(1-x^2)y' + xy = 3x$ се елипси и хиперболи со центри во точката (0,3) и оски, паралелни со OX и OY, при што секоја крива има една постојана оска.

5.113. Да се најдат оние интегрални линии на ДР

а) $xy'^2 + y' - y = 0$; б) $y = x(1+y') + y'^2$

коишто се прави.

5.114. Во дадената ДР да се изврши укажаната смена и потоа да се реши:

а) $y'^3 - y^4(y+xy') = 0$, $y = \frac{1}{z}$;

б) $x^3y'^2 + x^2yy' + 1 = 0$, $x = \frac{1}{t}$;

в) $(1-y')^2 - e^{-2y} = y'^2e^{-2x}$, $e^x = u$, $e^y = v$.

5.115. Да се најде крива со следново својство: растојанието на точката S(1,1) до произволна тангента на таа крива е $d = 1$.

5.116. Да се најде фамилијата криви што го имаат својството: геометриското место на средините S на отсечките на тангентите, зафатени меѓу координатните оски, е правата $y = ax + b/2$ (a и b се дадени броеви).

5.117. Да се најде фамилијата криви што го имаат својството: триаголникот, зафатен меѓу оската OY, тангентата и радиус-векторот на допирната точка M (т.е. $\overline{OM}$) е рамнокрак.

5.118. Да се најде равенката на таква крива што минува низ точката (0,1) и го има својството: тангентата во произволна точка $M(x,y)$ ја сече апсцисната оска во точка A, еднакво оддалечена од координатниот почеток и од M.

5.119. Да се најде крива, таква што нормалното растојание од координатниот почеток до секоја нејзина тангента е еднакво со апсцисата на допирната точка.

5.120. Да се најде таква крива што минува низ точката $T(\sqrt{2},\sqrt{2})$, а тангентата во произволна точка $M(x,y)$ отсечува на апсцисната оска отсечка, еднаква со кубот на апсцисата на M.

5.121. Да се определи функцијата $f(x)$, знаејќи дека е таа диференцијабилна и

$$\int_0^1 f(xy)dy = kf(x)$$

(k е даден број).

5.122. Да се најде $f(x)$ ако

$$\int_0^1 f(xy)dy = \frac{f(x)}{kx}(1-e^{-kx})$$

при што $f(x)$ е диференцијабилна и k е даден број.

Глава 6

НЕЛИНЕАРНИ ДР ОД ПОВИСОК РЕД

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 6

6.1. Да се најде општиот интеграл на ДР

$$xy'' - \ln x = 0.$$

Решение. Равенката е од обликот $F(x,y'') = 0$, при што y'' може експлицитно да се изрази како функција од x:

$$y'' = \frac{\ln x}{x}.$$

Со последователно интегрирање (двапати):

$$y' = \int \ln x d(\ln x) = \ln^2 x + C_1;$$

$$y = \int (\ln^2 x + C_1)dx,$$

го добиваме општиот интеграл

$$y = x(\ln^2 x - 2\ln x + A) + B \quad (A = 2 + C_1).$$

6.2. $y' = xy'' - 2y'' + y''^2.$ (1)

Решение. Равенката е од обликот $F(x,y',y'') = 0$, т.е. не ја содржи јавно зависнопроменливата y. Ставајќи $y' = p$, $y'' = p'(=\frac{dp}{dx})$, добиваме

$$p = xp' - 2p' + p'^2, \tag{2}$$

т.е. клероова равенка, чиј општ интеграл е

$$p = Ax - 2A + A^2 \quad (=y'), \tag{3}$$

па

$$y = \frac{A}{2}x^2 + (A^2 - 2A)x + B$$

е општиот интеграл на (1).

Сингуларниот интеграл на (2) се добива по елиминацијата на параметарот A од системот равенки (в. зад. 5.22 или §5.6, §5.8):

$$p = xA - 2A + A^2, \quad 0 = x - 2 + 2A;$$

од втората, $A = 1-x/2$ го заменуваме во првата равенка, па

$$p = -(\frac{x}{2} - 1)^2, \text{ т.е. } y = -\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - 1)^3 + C.$$

6.3. $y''^3 + y''^2 - y' = 0$.

Решение. Равенката не ја содржи y, па со смената $y' = z$, $y'' = z'$ ја сведуваме на ДР од прв ред

$$z = z'^3 + z'^2,$$

која е решена по z. Затоа ставаме $z' = p$ (в.5.19), па $z = p^3 + p^2$ и, од $\frac{dz}{dx} = p$, $dx = \frac{1}{p}(3p^2 + 2p)dp$, добиваме:

$$x = \int(3p + 2)dp = 3p^2/2 + 2p + C_1.$$

Од $z = p^3 + p^2$ $(=y')$ имаме

$$dy = (p^3 + p^2)dx = (p^3 + p^2)(3p + 2)dp, \text{ т.е.}$$

$$dy = (3p^4 + 5p^3 + 2p^2)dp, \text{ па}$$

$$y = 3p^5/5 + 5p^4/4 + 2p^3/3 + C_2.$$

Според тоа, општиот интеграл е даден со параметарските равенки

$$x = 3p^2/2 + 2p + C_1, \quad y = 3p^5/5 + 5p^4/4 + 2p^3/3 + C_2.$$

6.4. Да се најде партикуларниот интеграл на ДР

$$y'' = \sqrt{1+y'^2} \tag{1}$$

што ги задоволува условите $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Равенката (1) е од обликот $F(y',y'') = 0$, т.е. не ги содржи јавно x и y. Ќе ја решиме на два начина.

а) Да ја претставиме (1) со параметарските равенки

$$y' = t, \quad y'' = \sqrt{1+t^2}. \tag{2}$$

Од $dy' = y''dx$ добиваме $dx = \frac{dy'}{y''} = dt/\sqrt{1+t^2}$, па

$$x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C_1. \tag{3}$$

Бидејќи $y'(0) = 0$, а $y' = t$, од (3) добиваме $C_1 = 0$, па $x = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

Од $dy = y'dx = tdt/\sqrt{1+t^2}$ добиваме

$$y = \frac{1}{2}\int(1+t^2)^{-1/2}d(1+t^2) = \sqrt{1+t^2} + C_2, \tag{4}$$

а поради $y(0) = 1$ и $t = y'(0) = 1$, од (4) добиваме $1 = 1 + C_2$, т.е. $C_2 = 0$.

Значи, бараниот интеграл е определен со параметарските равенки

$$x = \ln(t+\sqrt{1+t^2}), \qquad y = \sqrt{1+t^2}. \tag{5}$$

Параметарот t од (5) можеме да го елиминираме. Имено, од првото равенство на (5) добиваме

$$t + \sqrt{1+t^2} = e^x; \ \sqrt{1+t^2} = e^x - t; \ 1 + t^2 = e^{2x} - 2te^x + t^2;$$

$$t = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh}x.$$

Заменувајќи $t = \text{sh}x$ во второто равенство од (5), добиваме

$$y = \sqrt{1+\text{sh}^2x} = \text{ch}x.$$

б) Равенката (1), како ДР што не ја содржи y, можеме да ја сведеме на ДР од прв ред со смената $y' = z$, $y'' = dz/dx$. Имаме:

$$z' = \sqrt{1+z^2}; \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx; \quad \ln(z+\sqrt{1+z^2}) = x + C_1.$$

Како и во а), добиваме $C_1 = 0$, а потоа, на ист начин како погоре:

$$z = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh}x.$$

Од $y' = z$ добиваме $y' = \text{sh}x$, $y = \text{ch}x + C_2$, а од почетните услови $y(0) = 1$ и $\text{ch}0 = 1$ следува дека $C_2 = 0$. Значи, бараното партикуларно решение е $y = \text{ch}x$.

<u>6.5.</u> Да се најде интегрална крива на ДР

$$yy'y'' = y'^3 + y''^2 \tag{1}$$

која минува низ точката (0,2) и во таа точка ја допира правата $y = x + 2$.

<u>Решение.</u> Равенката (1) има облик $F(y,y',y'') = 0$, т.е. не ја содржи јавно x. Таа може да се сведе на ДР од прв ред со смената

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}: \ yp^2\frac{dp}{dy} = p^3 + p^2\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2;$$

$$y\frac{dp}{dy} = p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2;$$

т.е.

$$p = yp' - p'^2 \tag{2}$$

$p' = \frac{dp}{dy}$. Равенката (2) е клероова, па нејзиното општо решение е

$$p = Ay - A^2 \quad \left(=y'=\frac{dy}{dx}\right). \tag{3}$$

Од (3) добиваме

$$\frac{dy}{y-A} = Adx; \ \ln|y-A| = Ax + \overline{B}; \ y-A = Be^{Ax}; \ y = A+Be^{Ax}, \qquad (4)$$

$(B=e^{\overline{B}})$; функцијата (4) е општо решение на (1).

Од условите на задачата имаме

$$x = 0, \quad y = 2, \quad y' = 1.$$

Заменувајќи во (4) и во $y' = ABe^{Ax}$, го добиваме системот

$$A + B = 2, \qquad AB = 1,$$

чие решение е $A = B = 1$. Значи, бараната интегрална крива е $y = 1+e^x$.

Да забележиме дека сингуларно решение на (1) е фамилијата $y = \frac{4}{C-x}$, која се добива со елиминација на A од системот равенки $\{p = Ay - A^2, \ 0 = y - 2A\}$, како и во зад. 6.2. За $C = 2$, ја добиваме хиперболата $y = \frac{4}{2-x}$, која минува низ $(0,2)$ и ја допира правата $y = x + 2$ во таа точка, т.е. таа е друга интегрална крива што ги задоволува дадените почетни услови.

6.6. Да се интегрира равенката $y'' = 3y^2 + y$.

Решение. Равенката има облик $y'' = f(y)$, т.е. y'' е функција само од y. Ваквите равенки се решаваат така што се помножуваат со равенката $2y'dx = 2dy$. Така, добиваме

$$2y'y''dx = 2(3y^2+y)dy;$$

$$d(y'^2) = (6y^2+2y)dy;$$

$$y'^2 = 2y^3 + y^2 + A;$$

$$y' = \pm\sqrt{2y^3+y^2+A}.$$

Натаму, поради $dx = \frac{dy}{y'}$, добиваме

$$x = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2y^3+y^2+A}} + B$$

-општиот интеграл на дадената равенка.

6.7. Да се интегрира равенката

$$x^2yy'' + 2xyy' = x^2y'^2 + y^2. \qquad (1)$$

Решение. Дадената равенка е хомогена по y, y', y''. Поради тоа, таа може да се сведе на ДР од прв ред со смената

$$y = e^{\int zdx} \tag{2}$$

(или со $y' = yz$), каде што $z = z(x)$ е нова непозната функција. Од (2):

$$y' = ze^{\int zdx}, \qquad y'' = (z'+z^2)e^{\int zdx},$$

па заменувајќи во (1), по средувањето, добиваме

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

-линеарна ДР од прв ред. Како во зад. 2.1, добиваме

$$z = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x},$$

па бидејќи $\int zdx = -C/x + \ln|x| + \ln B$, според (2), општиот интеграл на (1) е

$$y = e^{-C/x + \ln|x| + \ln B} = Bxe^{A/x},$$

каде што $A = -C$ и B се произволни константи.

6.8. Да се интегрира ДР $y''^2 - y'y''' = (\frac{y'}{x})^2$.

Решение. Во равенката не се јавува y, па нејзиниот ред може да се сниже со смената $y' = p$ $(p = p(x))$; заменувајќи во неа и $y'' = p'$, $y''' = p''$, добиваме:

$$p'^2 - pp'' = (\frac{p}{x})^2.$$

Добиената равенка е хомогена по p, p', p'', па како во претходната задача, со смената $p = e^{\int zdx}$, ја сведуваме на ДР од прв ред

$$z^2 - (z'+z^2) = 1/x^2, \text{ т.е. } z' = -1/x^2,$$

чиј општ интеграл е $z = \frac{1}{x} + A$. Од ова и од $p' = zp$ добиваме

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{x} + A; \quad \ln p = \ln x + Ax + \ln B; \quad p = Bxe^{Ax}; \text{ од}$$

$y' = p = Bxe^{Ax}$, добиваме $y = \int Bxe^{Ax}dx = \frac{B}{A}(x-\frac{1}{A})e^{xA} + C$

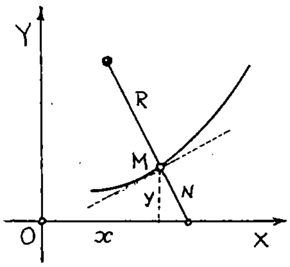
$(A,B,C$ - произволни константи).

6.9. Да се најде фамилијата криви при кои радиусот на кривината во произволна точка $M(x,y)$ е двапати поголем од отсечката на нормалата во таа точка. Да се издвои онаа крива, која во точката $x = 2$ има минимум $y = 1/4$.

Решение. Радиусот R на кривината односно должината N на отсечката на нормалата на една крива $y = y(x)$ во дадена точка $M(x,y)$ се пресметува по формулата

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}; \qquad N = |y|\sqrt{1+y'^2}. \tag{1}$$

Од условот на задачата имаме $R = 2N$, т.е.



Црт. 1

$$\frac{1}{y''}(1+y'^2)^{3/2} = 2y\sqrt{1+y'^2};$$

$$2yy'' = 1 + y'^2. \tag{2}$$

Оваа ДР можеме да ја напишеме во обликот

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2} = \frac{y'}{y}, \text{ т.е. } \frac{d(1+y'^2)}{1+y'^2} = \frac{dy}{y}, \text{ па}$$

$$\ln(1+y'^2) = \ln|y| + \ln C; \quad 1+y'^2 = Cy;$$

$$y' = \pm\sqrt{Cy-1}; \quad \frac{dy}{\pm\sqrt{Cy-1}} = dx; \quad \pm\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1} = x + B;$$

$$4A(y-A) = (x+B)^2, \tag{3}$$

каде што $A = 1/C$. Значи, бараната фамилија криви е фамилијата параболи чии оски се паралелни со оската Oy.

Заменувајќи ги почетните услови $x = 2$, $y = 1/4$, $y' = 0$ во (3) и во $4Ay' = 2(x+B)$, го добиваме системот равенки

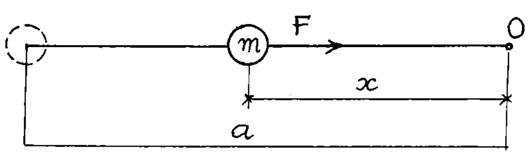
$$4A(\tfrac{1}{4} - A) = (2-B)^2, \quad 0 = 2(2+B),$$

од каде што $B = -2$, $A = 1/4$. Според тоа, бараната крива е параболата

$$y = (x-2)^2 + \frac{1}{4}.$$

Забелешка. Равенката (2) не го содржи аргументот x, па како во зад. 6.5, со смената $y' = p$, $y'' = pdp/dy$; таа се сведува на бернулиева ДР $2ypdp/dy = 1 + p^2$; итн. чиј општ интеграл е (3).

6.10. Материјална точка со маса m се движи по права линија кон центарот O (црт. 2) што ја привлекува со сила km/x^3, каде што x е растојанието на точката од O. Движењето почнува од мирување, при $x = a$. Да се најде времето по кое точката ќе стигне до центарот.



Црт. 2

Решение. Од условот на задачата, во кој било момент t, на точката дејствува сила $F = -km/x^3$, каде што k е коефициент на пропорционалноста. Бидејќи $F = m\ddot{x}$, ја добиваме ДР

$$m\ddot{x} = -\frac{km}{x^3}, \quad \text{т.е.} \quad \ddot{x} = -\frac{k}{x^3}, \tag{1}$$

$x = x(t)$; таа има облик $y'' = f(y)$, па работејќи како во зад. 6.6, т.е. множејќи ја со $2\dot{x}dt = 2dx$, добиваме:

$$2\dot{x}\ddot{x}dt = -\frac{2k}{x^3}dx; \qquad d(\dot{x}^2) = -2kx^{-3}dx;$$

$$\dot{x}^2 = k/x^2 + A; \quad \dot{x} = \pm\frac{1}{x}\sqrt{Ax^2+k}; \tag{2}$$

$$\frac{xdx}{\pm\sqrt{Ax^2+k}} = dt; \qquad \pm\frac{1}{A}\sqrt{Ax^2+k} = t + B \tag{3}$$

-тоа е општиот интеграл на (1). Од почетните услови: $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$, според (2) и (3), имаме:

$$\pm\frac{1}{A}\sqrt{Aa^2+k} = 0 + B, \qquad 0 = \pm\frac{1}{a}\sqrt{Aa^2+k}$$

т.е.

$$AB = \pm\sqrt{Aa^2+k}, \qquad Aa^2 + k = 0,$$

од каде што $A = -k/a^2$, $B = 0$. Заменувајќи во (3), добиваме

$$t = \frac{a}{\sqrt{k}}\sqrt{a^2-x^2},$$

(при што, јасно, го зедовме само позитивниот знак). Кога точката ќе стигне до 0, тогаш $x = 0$, па $t = a^2/\sqrt{k}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 6

Да се интегрираат следниве диференцијални равенки.

6.11. $y'' = 6x - \sin x$. 6.12. $y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$. 6.13. $xy'' - 3y' = 0$.

6.14. $x = 1 + 20(y'')^3$. 6.15. $y'' + \ln y'' = x$. 6.16. $y''^2 - 6y'' + 8 = 0$.

6.17. $y' = xy'' + 2xy'^{-2}$. 6.18. $xy''' - y'' = 2$.

6.19. $xy''' + y'' = 12x - 2$; $y = 0$, $y' = 2$, $y'' = 4$ за $x = 1$.

6.20. Да се најде минимумот на она партикуларно решение на ДР

$$xy'' - y' = x^2e^x$$

што ги задоволува почетните услови $y = 0$, $y' = e$ за $x = 1$.

6.21. Да се најде она партикуларно решение на ДР

$$x^3y'' + x^2y' = 1$$

кое во точката $x = 1$ има минимум, еднаков со 1.

6.22. Да се најде интегрална крива на равенката

$$y' = xy'' + y''^2$$

што минува низ точката $(1,0)$ и во таа точка ја допира правата $x + 4y = 1$. Како ја објаснуваш појавата на две такви решенија?

6.23. Равенката $y'' = y$ да се реши прво а) како равенка од обликот $y'' = f(y)$ со методот од зад. 6.6, а потоа б) како линеарна ДР со константни коефициенти.

Да се интегрираат равенките:

6.24. $y''y^3 = 1$. 6.25. $2y'' = 3y^2$.

6.26. $y'' = 1 + y'^{-2}$; $y = y' = 0$ за $x = 0$. 6.27. $y'' = y^{-3} + y'$.

6.28. Да се најде крива што во точката $(1,\sqrt{2})$ ја допира правата $2y = \sqrt{2}(x+1)$ а радиусот на кривината во произволна точка е еднаков со третиот степен од должината на нормалата.

6.29. Да се најдат кривите при кои радиусот на кривината е пропорционален со кубот од должината на нормалата (коефициент на пропорционалноста: k).

6.30. Да се најде равенката на фамилијата криви при кои радиусот на кривината е пропорционален со должината на нормалата. Означувајќи го со k коефициентот на пропорционалноста, да се разгледаат специјалните случаи: а) $k = -1$, б) $k = 1$, в) $k = 2$.

6.31. Да се најдат кривите при кои проекцијата на радиусот на кривината врз оската OY е константа, a.

6.32. Да се најде законот на движењето на материјална точка M со маса m што се движи по правата OA под дејство на одбивна сила, обратно пропорционална со кубот на растојанието $x = \overline{OM}$ на точката M од неподвижниот центар O.

Следниве ДР да се интегрираат како равенки при кои: а) отсуствува аргументот x; б) левата страна може да се направи точен извод (како во зад. 6.9).

6.33. $yy'' + y'^2 = 0$. 6.34. $yy'' - y'^2 = 0$.

6.35. $2y'^2 = yy'' - y''$, $y = 2$, $y' = 0$ за $x = 1$.

Да се интегрираат следниве ДР:

6.36. $yy'' - y'^2 = 2y'$. 6.37. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$.

6.38. $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$; $y = y' = 1$ за $x = 0$.

6.39. $yy'' = y'^2(1 + \ln y)$; да се интегрира: а) како ДР во која отсуствува x; б) со смената $y = e^z$, $z = z(x)$.

6.40. $yy'' = y'^2 + y^2 \ln y$.

6.41. $yy'' = 2y'^2 + y^2$; $y = 1$, $y' = 0$ за $x = 0$.

6.42. Да се интегрира равенката

$$xyy'' + xy'^2 = yy'.$$

Потоа да се најде интегралната крива што минува низ точката $(1,2)$, а нејзината тангента во таа точка е правата $x - 2y + 3 = 0$.

Да се интегрираат следниве ДР од трет ред:

6.43. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$. 6.44. $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$.

6.45. $y''' = 3yy'$; $y = y' = 0$, $y'' = 3/2$ за $x = 0$.

* * *

6.46. На сегментот $[0,1]$ да се определи крива, којашто ја допира оската OX во координатниот почеток, ако нејзината кривина е $K = x$, т.е. рамномерно нараснува по оската OX; да се земе приближно дека $1 + y'^2 \approx 1$.

6.47. Проекцијата на радиусот R на кривината на една крива врз апсцисната оска е константа, $a = 1$. Да се најде равенката на кривата, ако таа минува низ координатниот почеток и во таа точка е нормална на апсцисната оска (т.е. $y' \to \infty$ кога $x \to 0$).

6.48. Во точката $(1,-2)$ кривата е паралелна со апсцисната оска (т.е. $y' = 0$). Радиусот R на кривината, во која било точка, еднаков е со квадратот од апсцисата на таа точка. Да се најде равенката на кривата.

6.49. Да се најде она партикуларно решение $y = y_0(x)$ на ДР

$$2yy'' = 3y'^2 + 4y^2$$

што ги задоволува условите $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Потоа, да се испита за кои вредности на реалниот параметар a, равенката $y_0(x) = a$ има решение; да се реши таа равенка за а) $a = 1$ и б) $a = 4$.

6.50. Да се докаже дека, општо, за која било точка од кривата $y = y(x)$ во (x,y) - рамнината важи:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 + \frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

Да се трансформира ДР

$$y'' + 3y'^2 = (2x-y)y'^3$$

така што y да биде независнопроменлива, а x непозната функција од y; потоа, да се најде општиот интеграл на дадената ДР.

Г л а в а 7

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 7

7.1. Да се сведе на нормален систем следниов систем ДР

$$\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + 4y = 0, \quad t\frac{dy}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 5t^2. \tag{1}$$

Решение. Еден систем ДР од прв ред од обликот

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t,x_1,\dots,x_n), \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{2}$$

каде што t е независнопроменлива, а $x_1,\dots,x_n$ се непознати функции од t, се вика нормален систем. Секој каноничен систем (т.е. систем во кој секоја равенка „може да се реши" по највисокиот извод во неа) може да се сведе на еквивалентен нормален систем, наречен и негова нормална форма.

За да го сведеме (1) на нормален систем, ќе ставиме:

$$x = x_1, \qquad dx_1/dt = x_2, \qquad y = x_3,$$

па $dx/dt = x_2$, $d^2x/dt^2 = dx_2/dt$, $dy/dt = dx_3/dt$.

Заменуваме во (1):

$$dx_2/dt - t\cdot dx_3/dt + 4x_3 = 0, \quad t\cdot dx_3/dt - x_2^3 = 5t^2. \tag{3}$$

Од втората равенка на (3) имаме (при $t \neq 0$)

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{t}\cdot x_2^{\,3} + 5t,$$

па заменувајќи во првата од (3), добиваме

$$\frac{dx_2}{dt} = t\left(\frac{1}{t}\cdot x_2^3 + 5t\right) - 4x_3.$$

Следствено, нормалната форма на (1) е

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2^3 + 5t^2 - 4x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{t}x_2^3 + 5t.$$

7.2. Со методот на исклучување (т.е. со сведување на една ДР од повисок ред) да се најде она решение на системот

$$y' = -z, \qquad z' = \frac{z^2}{y} \tag{1}$$

($y = y(x)$, $z = z(x)$) што ги задоволува условите $y = 1$, $z = -1/2$ за $x = 1$.

Решение. Ја диференцираме првата равенка по x: $y'' = -z'$; тука го заменуваме z' со изразот z^2/y (од втората равенка): $y'' = -z^2/y$; сега, од првата равенка на (1), го заменуваме z со $-y'$, т.е. $z = -y'$ и добиваме

$$y'' = -\frac{y'^2}{y}, \quad \text{т.е.} \quad yy'' + (y')^2 = 0 \tag{2}$$

-диференцијална равенка од втор ред. Множејќи ја (2) со $1/yy'$, добиваме

$$\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} = 0,$$

па $\ln y' + \ln y = C$, $yy' = A$ $(A=e^C)$; $2yy' = 2A$, $d(y^2) = d(2Ax+D)$, т.е.

$$y^2 = 2Ax + D. \tag{3}$$

Бидејќи $z = -y'$, а $y' = A/y$, добиваме

$$z = -\frac{A}{y}. \tag{4}$$

Заменувајќи ги почетните услови $y = 1$, $z = -1/2$ за $x = 1$ во (3) и (4), добиваме

$$1 = 2A + D, \qquad -\frac{1}{2} = -\frac{A}{1}$$

од каде што $A = 1/2$, $D = 0$. Значи, бараното решение е: $y^2 = x$, $z = -1/2y$, т.е.

$$y = \pm\sqrt{x}, \qquad z = \frac{1}{\pm 2\sqrt{x}}.$$

7.3. Со методот на исклучување да се реши следниов систем ДР (од трет ред):

$$x' = 2x + y - 2z - t + 2, \; y' = 1 - x, \; z' = x + y - z - t + 1 \tag{1}$$

(x, y, z се непознати функции од t).

Решение. Ја диференцираме првата равенка од (1):

$$x'' = 2x' + y' - 2z' - 1,$$

а потоа ги заменуваме од (1) x', y', z':

$$x'' = x - 2z + 2. \qquad (2)$$

Диференцирајќи ја (2), $x''' = x' - 2z'$ и заменувајќи ги x' и z' од (1), добиваме

$$x''' = -y + t. \qquad (3)$$

Од (2) и од првата равенка на (1) ги изразуваме z и y:

$$z = \frac{1}{2}(x - x'') + 1, \quad y = -x'' + x' - x + t. \qquad (4)$$

Заменувајќи го y од (4) во (3), добиваме

$$x''' - x'' + x' - x = 0 \qquad (5)$$

-линеарна ДР од трет ред со константни коефициенти. Корените на карактеристичната равенка $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$ се $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, па општото решение на (5) е

$$x = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t. \qquad (6)$$

Од (6) и од (4) добиваме

$$y = -C_1e^t - C_2\sin t + C_3\cos^t + t, \qquad (7)$$

$$z = C_2\cos t + C_3\sin t + 1. \qquad (8)$$

Општото решение на (1) е определено со (6), (7) и (8).

7.4. Да се реши системот

$$tx' = 2x - t, \quad t^3y' = -x + t^2y + t, \quad t^4z' = -x - t^2y + t^3z + t.$$

Решение. Во некои случаи, равенките во системот се (повеќе или помалку) "независни" една од друга, па системот може, понекогаш, да се реши и "побрзо".

Првата од равенките е линеарна по x, x':

$$x' - \frac{2}{t}x = -1; \qquad x = C_1t^2 + t;$$

за втората, имаме:

$$t^3y' = -C_1t^2 - t + t^2y + t; \quad y' - \frac{1}{t}y = -C_1/t$$

-линеарна по y, y', чие решение е $y = C_2t + C_1$.

Во третата од равенките на системот ги заменуваме добиените вредности за x и y:

$$t^4z' = -C_1t^2 - t - C_2t^3 - C_1t^2 + t^3z + t;$$
$$z' - \frac{1}{t}z = -2C_1/t^2 - C_2/t;$$

нејзино решение е $z = C_3t + C_2 + C_1/t$.

Значи, општо решение на дадениот систем е

$$x = C_1t^2 + t, \quad y = C_2t + C_1, \quad z = C_3t + C_2 + C_1/t.$$

7.5. Да се напише во симетрична форма, а потоа, со наоѓање интеграбилни комбинации, да се реши системот

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy+3x^2z}{y^2-z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3x^2y+xz}{y^2-z^2}. \tag{1}$$

Решение. Секој нормален систем $\{y' = f,\ z' = g\}$, каде што f и g се дадени функции од x, y, z, може да се напише во обликот $dy = fdx$, $dz = gdx$, т.е.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f} = \frac{dz}{g},$$

наречен симетрична форма на тој систем.

Симетричната форма на системот (1) е

$$\frac{dx}{y^2-z^2} = \frac{dy}{-xy-3x^2z} = \frac{dz}{3x^2y+xz}. \tag{2}$$

Од (2) следува дека

$$\begin{aligned} dx &= k(y^2-z^2), \\ dy &= k(-xy-3x^2z), \\ dz &= k(3x^2y+xz). \end{aligned} \tag{3}$$

Множејќи ги равенствата (3) со x, y, z соодветно и собирајќи ги, добиваме

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

од каде што добиваме еден прв интеграл на (2):

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1.$$

Потоа, множејќи ги равенствата (3): првото со $-3x^2$, второто со z, а третото со y, и собирајќи ги, добиваме

$$-3x^2dx + zdy + ydz = 0; \quad d(yz) = d(x^3);$$

$yz = x^3 + C_2$ - уште еден прв (независен од претходниот) интеграл на (2). Значи, општиот интеграл на (1) е

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \quad yz = x^3 + C_2.$$

7.6. Со помош на Ојлеровиот метод да се реши системот хомогени линеарни ДР

$$x' = 3x - y, \qquad y' = -2x + 2y \tag{1}$$

$(x=x(t),\ y = y(t))$. Да се најде решенито што го задоволува условот $x = 1$, $y = -1$ за $t = 0$.

Решение. Решението на (1) го бараме во обликот

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad \alpha,\beta,r \text{ - конст.} \tag{2}$$

Заменувајќи ги (2) во (1) и скратувајќи со e^{rt}, го добиваме системот равенки за определување на α и β:

$$(3-r)\alpha - \beta = 0, \quad -2\alpha + (2-r)\beta = 0. \tag{3}$$

Системот (3) има нетривијално решение кога неговата детерминанта е нула,

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 \\ -2 & 2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \quad r^2 - 5r + 4 = 0 \tag{4}$$

(4) се вика карактеристична равенка на (1); нејзините корени се $r_1 = 1$, $r_2 = 4$.

Ставајќи $r = r_1 = 1$ во (3), добиваме $2\alpha - \beta = 0$ и $-2\alpha + \beta = 0$, т.е. $\beta = 2\alpha$; земајќи $\alpha_1 = 1$, имаме $\beta_1 = 2$. Аналогно за $r = r_2 = 4$, од (3) добиваме $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -1$. Така, според (2), соодветните партикуларни решенија се

$$x_1 = \alpha_1 e^{r_1 t} = e^t, \quad y_1 = \beta_1 e^{r_1 t} = 2e^t,$$
$$x_2 = \alpha_2 e^{r_2 t} = e^{4t}, \quad y_2 = \beta_2 e^{r_2 t} = -e^{4t},$$

па општото решение е

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^t + C_2e^{4t}, \quad y = C_1y_1 + C_2y_2 = 2C_1e^t - C_2e^{4t}.$$

Од почетните услови имаме

$$1 = C_1 + C_2, \qquad -1 = 2C_1 - C_2,$$

од каде што $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, па бараното партикуларно решение е $x = e^{4t}$, $y = -4e^t$.

7.7. Со Ојлеровиот метод да се реши системот

$$x' = 2x - 4y, \quad y' = 5x - 2y. \tag{1}$$

Решение. Карактеристичната равенка на (1) е

$$\begin{vmatrix} 2-r & -4 \\ 5 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } r^2 + 16 = 0,$$

чии корени се $r_1 = 4i$, $r_2 = -4i$. Од системот

$$(2-r)\alpha - 4\beta = 0, \quad 5\alpha - (2+r)\beta = 0, \tag{2}$$

ставајќи $r = r_1 = 4i$, добиваме

$$(2-4i)\alpha_1 - 4\beta_1 = 0, \quad 5\alpha_1 - (2+4i)\beta_1 = 0$$

-две равенки за определување на α_1 и β_1; едната од тие равенки е последица од другата, па имаме безброј многу решенија за α_1, β_1. Да земеме $\alpha_1 = 2$; тогаш $\beta_1 = 1-2i$, па првото партикуларно решение е:

$$x_1 = \alpha_1 e^{r_1 t} = 2e^{4it}, \quad y_1 = \beta_1 e^{r_1 t} = (1-2i)e^{4it}. \tag{3}$$

Аналогно, ставајќи во (2) $r = r_2 = -4i$, го добиваме второто партикуларно решение:

$$x_2 = \alpha_2 e^{r_2 t} = 2e^{-4it}, \quad y_2 = \beta_2 e^{r_2 t} = (1+2i)e^{-4it}. \tag{4}$$

Наместо (3) и (4), ќе земеме нов фундаментален систем решенија.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2i}(x_1-x_2), \\ \tilde{y}_1 &= \frac{1}{2}(y_1+y_2), \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1-y_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Користејќи ја Ојлеровата формула $e^{\pm ait} = \cos at \pm i\sin at$, од (3), (4) и (5) добиваме

$$\tilde{x}_1 = 2\cos 4t, \quad \tilde{x}_2 = 2\sin 4t,$$

$$\tilde{y}_1 = \cos 4t + 2\sin 4t, \quad \tilde{y}_2 = \cos 4t - 2\sin 4t.$$

Општото решение на (1) ќе биде

$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 2C_1\cos 4t + 2C_2\sin 4t,$$

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos 4t+2\sin 4t) + C_2(\cos 4t-2\sin 4t).$$

Забелешка. Откако го најдеме првото партикуларно решение (3), можно е директно да се напише општото решение на (1) со помош на формулите

$$x = C_1\mathrm{Re}x_1 + C_2\mathrm{Im}x_2, \quad y = C_1\mathrm{Re}y_1 + C_2\mathrm{Im}y_2, \tag{6}$$

каде што со $\mathrm{Re}z$ и $\mathrm{Im}z$ е означен реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број z соодветно (т.е. ако $z = a+ib$, тогаш $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$).

7.8. Со Ојлеровиот метод да се реши системот

$$x' = 2x + y + z, \quad y' = x + z, \quad z' = -x + 2y + z. \tag{1}$$

Решение. Како и во зад. 7.6, ја наоѓаме карактеристичната равенка на (1)

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ -1 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } r^3 - 3r^2 + 4 = 0,$$

чии корени се: $r_1 = -1$, $r_2 = r_3 = 2$. Значи, $r = 2$ е двократен корен. Да го најдеме, прво, партикуларното решение што одговара на $r_1 = -1$:

$$x_1 = \alpha_1 e^{-t}, \quad y_1 = \beta_1 e^{-t}, \quad z_1 = \gamma_1 e^{-t}.$$

Броевите α_1, β_1, γ_1 можеме да ги најдеме од системот

$$(2-r)\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \ \alpha_1 - r\beta_1 + \gamma_1 = 0, \ -\alpha_1+2\beta_1+(1-r)\gamma_1=0$$

при $r = r_1 = -1$; наједноставно е за нив да ги земеме "нивните" алгебарски комплементи во детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}: \ \alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \beta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \ \gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

или, скратени со 3: $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -1$, $\gamma_1 = 1$. Значи, бараното решение е

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -e^{-t}, \quad z_1 = e^{-t}. \tag{2}$$

Да најдеме, сега, уште две линеарно независни партикуларни решенија на (1), што одговараат на карактеристичниот број $r_2=r_3=2$. Нему му одговара решение од видот

$$x = (\alpha_2+\alpha_3 t)e^{2t}, \ y = (\beta_2+\beta_3 t)e^{2t}, \quad z = (\gamma_2+\gamma_3 t)e^{2t}. \tag{3}$$

Коефициентите α_2, $\alpha_3, \ldots, \gamma_3$ се определуваат со заменување на (3) во (1). По заменувањето и скратувањето со e^{2t}, добиваме:

$$\alpha_3 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 t = 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + (2\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)t,$$
$$\beta_3 + 2\beta_2 + 2\beta_3 t = \alpha_2 + \gamma_2 + (\alpha_3+\gamma_3)t,$$
$$\gamma_3 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 t = -\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 + (-\alpha_3+2\beta_3+\gamma_3)t.$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред t и слободните членови, го добиваме системот

$$2\alpha_3 = 2\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3, \quad \alpha_3 + 2\alpha_2 = 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2,$$
$$2\beta_3 = \alpha_3 + \gamma_3, \quad \beta_3 + 2\beta_2 = \alpha_2 + \gamma_2,$$
$$2\gamma_3 = -\alpha_3 + 2\beta_3 + \gamma_3, \quad \gamma_3 + 2\gamma_2 = -\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2,$$

од каде што:

$$\beta_3 = -\gamma_3; \quad \alpha_3 = -3\gamma_3; \quad \beta_2 = -3\gamma_3 - \gamma_2; \quad \alpha_2 = -7\gamma_3 - 3\gamma_2.$$

Земајќи ги $\gamma_2 = A$ и $\gamma_3 = B$ за произволни, решението (3) добива вид

$$x = -(3A+7B+3Bt)e^{2t}, \quad y = -(A\ 3B+Bt)e^{2t}, \quad z = (A+Bt)e^{2t}.$$

Оттука, ставајќи прво $A = -1$, $B = 0$, а потоа $A = 0$, $B = -1$, ги добиваме следниве две линеарно независни решенија

$$x_2 = 3e^{2t}, \quad y_2 = e^{2t}, \quad z_2 = -e^{2t},$$
$$x_3 = (7+3t)e^{2t}, \quad y_3 = (3+t)e^{2t}, \quad z_3 = -te^{2t}.$$

Така, општото решение на (1) ќе биде:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = (3C_2+7C_3)e^{2t} + 3C_3te^{2t},$$
$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = -C_1e^{-t} + (C_2+3C_3)e^{2t} + C_3te^{2t},$$
$$z = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 = C_1e^{-t} - C_2e^{2t} - C_3te^{2t}.$$

<u>7.9.</u> Со методот на Лагранж, т.е. со варијација на произволните константи, да се реши следниов нехомоген систем:

$$x' - y = tg^2t - 1, \quad y' + x = tgt. \tag{1}$$

<u>Решение.</u> Ќе го решиме, прво, соодветниот хомоген систем:

$$x' - y = 0, \quad y' + x = 0.$$

Ја диференцираме првата од овие равенки: $x'' - y' = 0$, а y' го заменуваме од втората, па ја добиваме равенката

$$x'' + x = 0,$$

чие општо решение е $x = C_1\cos t + C_2\sin t$.

Од $y' = -x$ добиваме $y = -C_1\sin t + C_2\cos t$.

Решението на нехомогениот систем (1) го бараме во обликот

$$x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \quad y = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t. \qquad (2)$$

За таа цел, ги заменуваме (2) во (1) и добиваме

$$C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \mathrm{tg}^2 t - 1,$$
$$-C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \mathrm{tg}\, t,$$

од каде што

$$C_1'(t) = -\cos t, \quad C_2'(t) = \sin t\cdot \mathrm{tg}^2 t.$$

Интегрирајќи, наоѓаме

$$C_1(t) = -\sin t + C_1, \qquad C_2(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t + C_2, \qquad (3)$$

каде што C_1 и C_2 се произволни константи. Заменувајќи ги (3) во (2), го добиваме општото решение на (1):

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\, t,$$
$$y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2.$$

7.10. Со помош на методот на избор (т.е. со методот на неопределени коефициенти) да се интегрира системот

$$x' = 2x - y + e^{2t}, \quad y' = 3x - 2y + e^t. \qquad (1)$$

Решение. Методот на неопределени коефициенти се применува за решавање нехомогени линеарни системи кога функциите $f_k(t)$ ("слободните членови" во равенките) имаат специјален вид: полиноми $P_k(t)$, експоненцијални функции e^{at}, синуси и косинуси ($\sin bt$ и $\cos bt$) и производи од нив. Тргнувајќи од видот на функциите $f_k(t)$, аналогно како кај линеарните ДР (в. зад. 2.14-2.17), наоѓаме партикуларно решение на нехомогениот систем; општото решение на нехомогениот систем е збир на едно негово партикуларно решение и општото решение на соодветниот хомоген систем.

Да го решиме, прво, соодветниот хомоген систем

$$x' = 2x - y, \quad y' = 3x - 2y. \qquad (2)$$

Карактеристичната равенка е

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } r^2 - 1 = 0;$$

нејзините корени се $r_1 = 1$ и $r_2 = -1$. На коренот $r_1 = 1$ му одговара партикуларното решение

$$x_1 = \alpha_1 e^t, \qquad y_1 = \beta_1 e^t.$$

Заменувајќи ги x_1 и y_1 во (2), го добиваме системот

$$\alpha_1 = 2\alpha_1 - \beta_1, \qquad \beta_1 = 3\alpha_1 - 2\beta_1,$$

од каде што $\alpha_1 = \beta_1$; ставајќи, на пример, $\alpha_1 = 1$, добиваме

$$x_1 = e^t, \qquad y_1 = e^t. \tag{3}$$

На коренот $r_2 = -1$ му одговара решението

$$x_2 = \alpha_2 e^{-t}, \qquad y_2 = \beta_2 e^{-t}.$$

Работејќи како погоре, добиваме $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, па

$$x_2 = e^{-t}, \qquad y_2 = 3e^{-t}. \tag{4}$$

Од (3) и (4) го формираме општото решение на (2):

$$x_o = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \qquad y_o = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}. \tag{5}$$

Партикуларно решение x_p, y_p на нехомогениот систем (1) бараме во согласност со слободните членови $f_1(t) = e^{2t}$ и $f_2(t) = e^t$, како кај линеарните ДР (во Гл. 2):

$$x_p = A_1 e^{2t} + (A_2 t + A_3)e^t, \quad y_p = B_1 e^{2t} + (B_2 t + B_3)e^t, \tag{6}$$

каде што A_k, B_k ($k=1,2,3$) се неопределени коефициенти. (Уочи дека пред e^{at} земаме константен полином односно полином од прв степен, во зависност од тоа дали a не е или е еднократен корен на карактеристичната равенка.) Заменувајќи ги (6) во (1), добиваме

$$2A_1 e^{2t} + (A_2 + A_3 + A_2 t)e^t = (2A_1 - B_1 + 1)e^{2t} + (2A_3 - B_3 + 2A_2 t - B_2 t)e^t,$$

$$2B_1 e^{2t} + (B_2 + B_3 + B_2 t)e^t = (3A_1 - 2B_1)e^{2t} + (3A_3 - B_3 + 1 + 3A_2 t - B_2 t)e^t.$$

Изедначувајќи ги коефициентите при e^{2t}, e^t и te^t во тие идентитети, добиваме од првиот:

$$2A_1 = 2A_1 - B_1 + 1; \quad A_2 + A_3 = 2A_3 - B_3; \quad A_2 = 2A_2 - B_2,$$

а од вториот

$$2B_1 = 3A_1 - 2B_1; \quad B_2 + B_3 = 3A_3 - B_3 + 1; \quad B_2 = 3A_2 - B_2.$$

Решавајќи го овој систем од шест равенки со шест непознати, добиваме:

$$B_1 = 1; \quad B_2 = A_2 = -1/2; \quad A_1 = 4/3; \quad B_3 = A_3 + 1/2;$$

можеме да земеме $A_3 = 0$, па $B_3 = 1/2$.

Значи, бараното решение (6) го има обликот

$$x_p = \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}te^t, \qquad y_p = e^{2t} + \frac{1}{2}(1-t)e^t.$$

Така, општото решение на системот (1) е

$$x = x_o + x_p = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}te^t,$$
$$y = y_o + y_p = C_1e^t + 3C_2e^{-t} + e^{2t} + \frac{1}{2}(1-t)e^t.$$

7.11. Со методот на Даламбер да се реши системот

$$x' = 3x + y - e^t, \quad y' = x + 3y + e^t. \tag{1}$$

Решение. Методот на Даламбер се состои во формирање интеграбилни комбинации при решавањето системи линеарни ДР со константни коефициенти. Да ја илустрираме примената на овој метод на систем од две равенки:

$$x' = ax + by + f(t), \quad y' = cx + py + g(t). \tag{2}$$

Втората равенка ќе ја помножиме со еден број λ (засега неопределен) и ќе ја додадеме на првата, па имаме

$$\frac{d}{dt}(x+\lambda y) = (a+\lambda c)x + (b+\lambda p)y + f(t) + \lambda g(t),$$

т.е.

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a+\lambda c)(x + \frac{b+\lambda p}{a+\lambda c}y) + f(t) + \lambda g(t) \tag{3}$$

при што претпоставуваме дека $a + \lambda c \neq 0$. Ќе го избереме бројот λ така што

$$\frac{b+\lambda p}{a+\lambda c} = \lambda, \text{ т.е. } c\lambda^2 + (a-p)\lambda - b = 0. \tag{4}$$

Во тој случај (3) се сведува на равенка, линеарна по $x + \lambda y$,

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} - (a-\lambda c)\cdot(x+\lambda y) = f(t) + \lambda g(t);$$

интегрирајќи ја последнава, добиваме

$$x + \lambda y = e^{(a+\lambda c)t}\{C + \int e^{-(a+\lambda c)t}[f(t) + \lambda g(t)]dt\}. \tag{5}$$

Ако равенката (4) има два различни реални корени λ_1 и λ_2, тогаш од (5) се добиваат два први интеграли на системот (2), со што неговото интегрирање завршува.

Конкретно, за системот (1), во кој $a = 3$, $b = 1 = c$, $p = 3$, ќе го избереме бројот λ по формулата (4):

$$\frac{1+3\lambda}{3+\lambda} = \lambda, \quad \text{т.е.} \quad \lambda^2 = 1,$$

од каде што $\lambda = \pm 1$. Тогаш според (5), за $\lambda_1 = 1$, добиваме

$$x + y = e^{4t}\{C_1 + \int e^{-4t}(-e^t+e^t)dt\} = C_1e^{4t},$$

и, аналогно за $\lambda_2 = -1$:

$$x - y = e^{2t}\{C_2 + \int e^{-2t}(-e^t-e^t)dt\} = C_2e^{2t} + 2e^t.$$

Значи:

$$x + y = C_1e^{4t}, \qquad x - y = C_2e^{2t} + 2e^t. \tag{6}$$

Така, добиваме два први интеграли на (1):

$$(x+y)e^{-4t} = C_1, \qquad (x-y-2e^t)e^{-2t} = C_2,$$

па интегрирањето на (1) е завршено.

Забелешка. Решението на системот (1) може да се напише и експлицитно, ако равенствата (6) прво ги собереме, а потоа ги одземеме:

$$x = Ae^{4t} + Be^{2t} + e^t, \; y = Ae^{4t} - Be^{2t} - e^t, \quad 2A = C_1, \; 2B = C_2.$$

7.12. Со методот на Даламбер да се интегрира системот

$$x'' + ax + by = 0, \quad y'' + cx + py = 0, \tag{1}$$

каде што a, b, c, p се дадени броеви (тоа е една форма на динамички равенки за осцилациите на систем со два степена на слобода; види го и примерот во §7.5).

Решение. Како во зад. 7.11, на првата равенка од (1) ѝ ја додаваме втората, помножена со λ, па

$$x'' + \lambda y'' + (a+\lambda c)x + (b+\lambda p)y = 0,$$

т.е.

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y) + (a+\lambda c)(x + \frac{b+\lambda p}{a+\lambda c}\, y) = 0. \tag{2}$$

Го избираме бројот λ така што

$$\frac{b+\lambda p}{a+\lambda c} = \lambda, \quad \text{т.е.} \quad c\lambda^2 + (a-p)\lambda - b = 0.$$

Со кој било од двата корена λ_1, λ_2 на оваа равенка, (2) е

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y) + (a+\lambda c)(x+\lambda y) = 0. \tag{3}$$

Земајќи ја $x + \lambda y$ како зависна променлива, оваа равенка се интегрира непосредно. Претпоставувајќи дека бројот $a + \lambda c$, како што се случува во практичните проблеми, е позитивен за секоја од вредностите $\lambda = \lambda_1$; λ_2, решението на (3) е

$$x + \lambda y = A\cos(t\sqrt{a+\lambda c} + \alpha), \tag{4}$$

каде што A и α се произволни константи (в. и §2.5).

Според тоа, ако $\lambda_1 \neq \lambda_2$, решението на (1) е

$$x + \lambda_1 y = A_1 \cos u_1, \quad x + \lambda_2 y = A_2 \cos u_2, \tag{4'}$$

каде што $u_1 = t\sqrt{a+\lambda_1 c} + \alpha_1$, $u_2 = t\sqrt{a+\lambda_2 c} + \alpha_2$.

Од равенките (4′) можеме да ги добиеме x и y засебно, во обликот

$$x = P_1 \cos u_1 + P_2 \cos u_2, \quad y = Q_1 \cos u_1 + Q_2 \cos u_2,$$

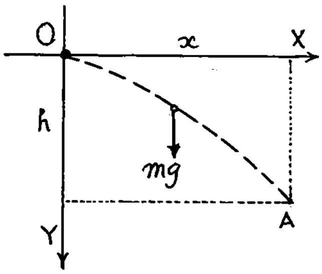
каде што константите P_1, P_2, Q_1, Q_2 ги вклучуваат само константите A_1 и A_2.

Забелешка. Формата на резултатите покажува дека движењето се состои од две хармониски осцилации со периоди $2\pi/\sqrt{a+c\lambda_1}$ и $2\pi/\sqrt{a+c\lambda_2}$.

7.13. Еден авион лета на висина h над земјата со брзина v km/час. На кое растојание x од дадена точка A (на земјата) треба да се фрли товар од авионот без почетна релативна брзина, а занемарувајќи го отпорот на воздухот, за товарот да падне во точката A?

Решение. Координатниот почеток ќе го ставиме во почетната положба на товарот (црт. 1). Диференцијалните равенки на движењето по координатните оски се

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg \tag{1}$$



Црт. 1

(m-масата, g-Земјиното забрзување). Интегрирајќи ги (1), добиваме

$$x = C_1 t + C_2, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \tag{2}$$

Според почетните услови, при $t = 0$: $x = 0$, $dx/dt = v$, $y = 0$, $dy/dt = 0$, од (2) добиваме

$$C_1 = v, \quad C_2 = C_3 = C_4 = 0.$$

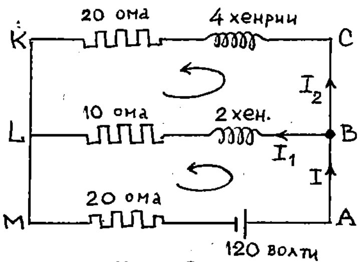
Така, го добиваме партикуларното решение

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{т.е. } y = \frac{gx^2}{2v^2}.$$

При $y = h$, добиваме $x = v\sqrt{2h/g}$ - растојанието од кое треба да се фрли товарот.

7.14. Дадено е електрично коло со елементи како на црт. 2. Да се најдат струите I, I_1, I_2 во гранките на колото ако почетните струи (т.е. при $t = 0$) се нули.

Решение. Според Вториот Киркофов закон, алгебарскиот збир на електромоторните сили (ЕМС) во секоја од двете лупи на колото е нула. Лупите ABLMA и BCKLB ќе ги "минуваме" во насоката што е означена на цртежот. Притоа, ЕМС ќе ги сметаме за позитивни доколку одиме спротивно на струјата.



Црт. 2

Нека I е струјата во LMABL. Во точката B, таа се разделува на два дела, I_1 и I_2, така што, според Првиот Киркофов закон, $I = I_1 + I_2$.

Применувајќи го Вториот Киркофов закон на лупите ABLMA и BCKLB соодветно, ќе имаме

$$\begin{aligned} &2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 + 20I - 120 = 0, \\ &4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 - 10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Системот ДР (1) лесно се сведува на нормална форма:

$$\frac{dI_1}{dt} = -15I_1 - 10I_2 + 60, \qquad \frac{dI_2}{dt} = -5I_1 - 10I_2 + 30. \tag{2}$$

Постапувајќи како во зад. 7.10, за нехомогениот систем (2) наоѓаме дека решение е

$$I_1 = 2C_1e^{-20t} - C_2e^{-5t} + 3, \quad I_2 = C_1e^{-20t} + C_2e^{-5t} + \frac{3}{2}.$$

Од почетните услови ($I_1 = I_2 = 0$ кога $t = 0$) добиваме $C_1 = -3/2$, $C_2 = 0$, така што бараните изрази за струите се:

$$I_1 = 3(1-e^{-20t}); \quad I_2 = \frac{3}{2}(1-e^{-20t}); \quad I = I_1 + I_2 = \frac{9}{2}(1-e^{-20t}).$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 7

Да се сведе на нормален систем следниов систем ДР односно следнава ДР:

7.15. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3x + y = 5t,$
$\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} - 2y = 0.$

7.16. $t\dfrac{dx}{dt} - y = 4t,$
$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3x + y = 0.$

7.17. $y'' - xy' + x^2y = 1.$

7.18. $y''' - 2y'' + xy'^2 = 3x.$

7.19. Да се претстави со една ДР од втор ред системот

$$x' = ax + by + f(t), \quad y' = cx + py + g(t),$$

каде што a, b, c, p се константи, $f(t)$ и $g(t)$ се дадени функции, а $x = x(t)$ и $y = y(t)$ се непознати функции.

Со методот на исклучување (т.е. со сведување на една ДР од повисок ред) да се реши системот (7.20-7.25):

7.20. $\{y' = 1/(z-x), \quad z' = 1-1/y\}$; $\quad y = z = 1$ за $x = 0$.

7.21. $\{y' = y + z, \quad x^2z' = (-x^2+2x-2)y + (2x-x^2)z\}$.

7.22. $\{xy' + z = 0, \quad xz' + y = 0\}$.

7.23. $\{x' + 2x + 4y = 1 + 4t, \quad y' + x - y = 3t^2/2\}$.

7.24. $\{x' + y' = t, \quad x'' - y = e^{-t}\}$; $\quad x = 3$, $x' = -2$, $y = 0$ за $t = 0$.

7.25. $\{x' = y + z, \quad y' = 3x + z, \quad z' = 3x + y\}$.

7.26. Да се реши системот

7.26. $\left\{\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x-1}\right\}$.

Дали овој систем може да се сведе на една ДР од втор ред?

Да се интегрираат следниве системи ДР (7.27-7.35):

7.27. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

7.28. $\frac{2dx}{y+z} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{xz}$.

7.29. $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{x^2}$.

7.30. $\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dz}{2yz}$.

7.31. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}$.

7.32. $\frac{dx}{ay-bz} = \frac{dy}{cz-ax} = \frac{bz}{bx-cy}$ (a,b,c - константи).

7.33. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3}{x^3+3xy^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{2y^2z}{x^3+3xy^2}$.

7.34. $\{z = y'(z-y)^2, \quad y = z'(z-y)^2\}$.

7.35. $\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$; $y = 1$, $z = -1$ за $x = 0$.

Со помош на Ојлеровиот метод да се реши системот (7.36-7.46):

7.36. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2y - 3x; \end{cases}$ $x=3$, $y=8$ за $t=0$.

7.37. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0; \end{cases}$ $x=3$, $y=15$ за $t=0$.

7.38. $\begin{cases} x' + 4x + y = 0, \\ y' + 4x + 4y = 0. \end{cases}$

7.39. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

7.40. $\begin{cases} 2x' - 6x + 3y = 0, \\ 3y' - 2x - 3y = 0; \end{cases}$ $x=9/2$, $y=2$ за $t=0$.

7.41. $\begin{cases} x' + y' = -x + y, \\ x' - y' = x + y. \end{cases}$

7.42. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ $x=2$, $y=1$ за $t=0$

7.43. $\begin{cases} x' = 5x + y - 4z, \\ y' = -12x - 4y + 12z, \\ z' = -x - y + 2z. \end{cases}$

7.44. $\begin{cases} x' = 9x + 3y - 8z, \\ y' = -6x - y + 6z, \\ z' = 5x + 2y - 4z. \end{cases}$

7.45. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x - z, \\ z' = x. \end{cases}$

7.46. $\begin{cases} x' = -9x - 3y + 10z, \\ y' = 12x + 5y - 12z, \\ z' = -4x - y + 5z; \end{cases}$ $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$ за $t = 0$.

Со помош на методот на варијација на произволните константи да се реши следниов нехомоген систем линеарни ДР (7.47-7.52):

7.47. $\begin{cases} x' + 2y = -\sin 2t, \\ y' - 2x = \cos 2t. \end{cases}$

7.48. $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' - x + y = e^t. \end{cases}$

7.49. $\begin{cases} x' = y + \dfrac{1}{\sin t}, \\ y' = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

7.50. $\begin{cases} x' + y = t^2 \ln t, \\ t^2 y' - 2x - 2ty = t. \end{cases}$

7.51. $\begin{cases} x' - 3x - 6y = -\dfrac{3}{e^t - 1}, \\ y' + 2x + 4y = \dfrac{2}{e^t - 1}. \end{cases}$

7.52. $\begin{cases} x' = 1 - \dfrac{2x}{t}, \\ y' = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}; \end{cases}$

$x=1/3=-y$ за $t=1$.

Со помош на методот на неопределени коефициенти да се реши нехомогениот систем (7.53-7.56):

7.53. $\begin{cases} x' = 2x + y - 4, \\ y' = x + 2y + 3t - 6. \end{cases}$

7.54. $\begin{cases} x' + y = \sin t, \\ y' + x = \cos t; \end{cases}$

$x=2$, $y=0$ за $t=0$.

7.55. $\begin{cases} x' + y' + 2x + y = e^{-3t}, \\ y' + 5x + 3y = 5e^{-2t}; \end{cases}$

$x=-1$, $y=4$ при $t=0$.

7.56. $\begin{cases} x' + x = 1, \\ y' + x + y = 1, \\ z' + 2y + z = 2e^{-t}; \end{cases}$

$x=y=z=1$ за $t=0$.

Со помош на методот на Даламбер, да се решат следниве системи:

7.57. $\begin{cases} x' = -3x + 4y + 9e^{2t}, \\ y' = -2x + 3y + 3e^{2t}; \end{cases}$

$x=2$, $y=0$ за $t=0$.

7.58. $\begin{cases} x' + 8x - 3y = 5e^{-t}, \\ 5x' - 2y' + 4x - y = e^{-t}. \end{cases}$

7.59. $\begin{cases} x'' + 5x + 8y = 0, \\ y'' + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

7.60. $\begin{cases} x'' + 3x - 3y = 0, \\ y'' - x + 5y = 0. \end{cases}$

7.61. Системите од зад. 7.47, 7.48, 7.53 и 7.57 да се решат со помош на методот на: а) варијација на произволните константи; б) неопределени коефициенти; в) Даламбер. Резултатите да се споредат.

7.62. Да се најде партикуларното решение на системот

$$\{x' + y' = -x + y + 3, \quad x' - y' = x + y - 3\}$$

што ги задоволува условите $x = 2$, $y = 0$ за $t = 0$.

Ако x,y се декартови координати во рамнината, тогаш точката (x,y), кога t се менува, опишува рамнинска крива. Да се најде равенката на таа крива (во имплицитен облик).

7.63. Истите барања од зад. 7.62 за системот

$$\{x'' + x = y', \quad 4x' + 2x = y' + 2y\}$$

при условите: $x = 0$, $y = 1$, $x' = 2$ за $t = 0$.

7.64. Авион лета на висина $h = 2000$ м над земјата со брзина $v = 360$ км/час. На кое растојание x од дадена точка A треба да се фрли товар од авионот, без почетна релативна брзина и занемарувајќи го отпорот на воздухот, за товарот да падне во точката A?

7.65. Компонентите на забрзувањето на честичка што се движи во рамнина се дадени со равенките

$$\ddot{x} = c\dot{y}, \qquad \ddot{y} = c(ac-\dot{x}),$$

каде што a,c се константи, а x и y се функции од t. Да се најде равенката на кривата што ја опишува честичката, ако $x = y = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ при $t = 0$.

7.66. Една материја A се распаѓа на два вида материи - компоненти X и Y со брзина на формирање на секоја од нив пропорционална со количеството нераспаднатата материја. Да се најде законот на промената на количествата x и y на компонентите X и Y во зависност од времето t ако при $t = 0$ било $x = y = 0$, а по еден час: $x = a/8$, каде што a е праобитното количество од дадената материја.

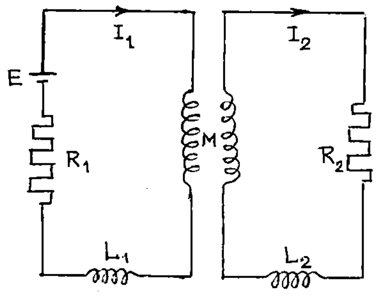
7.67. Во теоријата на електромагнетна индукција, пар електрични кола ги задоволуваат равенките

$$L_1 \frac{dx}{dt} + M \frac{dy}{dt} + R_1 x = E, \quad L_2 \frac{dy}{dt} + M \frac{dx}{dt} + R_2 y = 0,$$

$L_1 = L_2 = 0,1$ хенрии, $M = 0,05$ хенрии, $R_1 = R_2 = 3$ ома и $E = 6$ волти.

Да се најдат изразите за струите x,y во моментот t, ако $x = y = 0$ кога $t = 0$.

7.68. Две електрични кола, наречени примарно и секундарно коло, се сврзани индуктивно како на црт. 3. Ако M е заемната индуктивност, тогаш струите I_1 и I_2 се дадени со равенките



Примарно Секундарно

Црт. 3

$$L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}+R_1I_1=E,$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt}+M\frac{dI_1}{dt}+R_2I_2=0$$

(в. и зад. 7.67).

а) Да се претстави овој систем во нормална форма, сметајќи дека $L_1L_2-M^2>0$.

б) Ако струите I_1 и I_2 во колата се нули кога $t=0$, покажи дека при $t>0$ тие се дадени со

$$I_1=\frac{EL_2}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}+\frac{ER_2}{a-b}\cdot\left(\frac{e^{at}}{a}-\frac{e^{bt}}{b}\right)+\frac{E}{R_1},$$

$$L_2=\frac{EM}{L_1L_2-M^2}\cdot\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a},$$

каде што a и b се корените на равенката

$$(L_1L_2-M^2)x^2+(L_1R_2+L_2R_1)x+R_1R_2=0 \qquad (L_1L_2-M^2>0).$$

7.69. Равенките за струите x,y во две заемно индуктивни електрични кола се

$$7x'+4y'+50x=E, \qquad 2x'+5y'+20y=0,$$

каде што E = конст. Да се најдат изразите за x и y во зависност од t, ако $x=y=0$ кога $t=0$.

7.70. Струите x и y во еден пар електрични кола се зададени со равенките

$$L\frac{dx}{dt}+R(2x-y)=E, \qquad L\frac{dy}{dt}-R(x-2y)=0,$$

каде што L,R,E се константи. Да се изразат x и y како функции од t, ако $x=y=0$ кога $t=0$.

* * *

* * *

Да се решат следниве системи:

7.71. $x'' + 6x + 7y = 0,$
$y'' + 3x + 2y = 2t.$

7.72. $x'' + y' + x = e^t,$ $x = 1,\ y = 0,\ x' = 2,$
$y'' + x' = 1;$ $y' = -1$ кога $t = 0.$

7.73. Нека x, y, z се функции од t, такви што

$$x + y + z = t^2, \quad 2x' + z' = y - 3x, \quad 3y' + z' = x + y.$$

Да се покаже дека $x'' + 3x' - 4x = -6.$

Да се најдат x, y, z во зависност од t ако $x = 0$ и $y = 2$ при $t = 0.$

7.74. Да се покаже дека решението на системот

$$x' + ax + by = 0, \qquad y' + cx + py = 0$$

може да се изрази во обликот

$$x + \lambda_1 y = C_1 e^{-(a+\lambda_1 c)t}, \quad x + \lambda_2 y = C_2 e^{-(a+\lambda_2 c)t}$$

каде што λ_1 и λ_2 се корените на равенката $c\lambda^2 + (a-p)\lambda - b = 0$ (в.зад.7.11).

Да се илустрира за системот

$$x' + x + y = 0, \qquad y' + 2x - y = 0,$$

изразувајќи го резултатот во обликот

$$x = Pe^{t\sqrt{3}} + 2Qe^{-t\sqrt{3}}, \quad y = -Pe^{t\sqrt{3}} + Qe^{-t\sqrt{3}}.$$

7.75. Две заемно индуктивни електрични кола носат струи x и y, а во првото коло е сместена периодична ЕМС, $E\sin pt$. Земајќи дека x и y ги задоволуваат равенките

$$L\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} + Rx = E\sin pt, \tag{I}$$

$$M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + Sy = 0, \tag{II}$$

каде што L, M, N, R, S, E се дадени позитивни константи и $LN - M^2 > 0$, да се добие линеарна ДР по x.

Ако $(LN-M^2)p^2 = RS$, да се покаже дека решението, кога t неограничено расте, добива форма

$$x = E(Np\sin pt - S\cos pt)/p(NR+LS).$$

7.76. Струите x, y во примарниот и секундарниот навој на еден трансформатор се дадени со равенките (I) и (II) од зад. 7.74, со тоа што десната страна од (I) е Ee^{ipt} (наместо $E\sin pt$).

Ако, за доволно големи вредности на t, може да се земе $x = Ae^{ipt}$, $y = Be^{ipt}$, каде што A и B се комплексни константи, да се покаже дека

$$\left|\frac{B}{A}\right| = Mp/\sqrt{S^2+N^2p^2}.$$

Да се најдат A и B кога $R = 0$ и $2LN = M^2$.

Глава 8

ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 8

8.1. Дадена е парцијалната диференцијална равенка (ПДР)

$$p + 2q = 0 \qquad (p=z_x'=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=z_y'=\frac{\partial z}{\partial y}). \tag{1}$$

Да се покаже дека: а) $z = \sin(2x-y)$ е решение на (1); б) $z = f(2x-y)$, каде што f е произволна диференцијабилна функција, е општо решение на (1).

Потоа, в) да се најде партикуларното решение на (1) што го задоволува условот $z(0,y) = 3y^2$.

Решение. а) Решение на ПДР (1) е секоја функција $z = z(x,y)$ што има (непрекинати) парцијални изводи и идентично ја задоволува (1). За функцијата $z = \sin(2x-y)$ имаме:

$$z_x' = 2\cos(2x-y), \quad z_y' = -\cos(2x-y);$$

$$z_x' + 2z_y' = 2\cos(2x-y) + 2(-\cos(2x-y)) \equiv 0.$$

Значи, $z = \sin(2x-y)$ е решение на (1).

б) Да ставиме $u = 2x - y$. Тогаш, за $z = f(u)$ имаме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 2f'(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -f'(u);$$

$$z_x' + 2z_y' = 2f'(u) + 2[-f'(u)] \equiv 0.$$

Значи, $z = f(u) = f(2x-y)$ е решение на (1); бидејќи содржи (само) една произволна функција, таа претставува општо решение на (1).

в) Имаме: $z(x,y) = f(2x-y)$ и $z(0,y) = f(y) = 3y^2$. Од $f(y) = 3y^2$ следува дека $f(2x-y) = 3(2x-y)^2$, што значи дека бараното партикуларно решение е $z(x,y) = 3(2x-y)^2$.

8.2. Да се состави ПДР елиминирајќи ги константите a и b од функцијата

$$z = ax^2 + by + b^2.$$

Решение. Имаме: $p = z'_x = 2ax$, $q = z'_y = b$, т.е. $a = \frac{p}{2x}$, $b = q$, па

$$z = \frac{p}{2x}x^2 + qy + q^2, \text{ т.е. } z = \frac{x}{2}p + yq + q^2$$

е бараната ПДР.

8.3. Да се елиминираат произволните константи A,B од

$$z = A\sin x + B\sin y \tag{1}$$

Решение. $p = z'_x = A\cos x$, $q = z'_y = B\cos y$; $A = p/\cos x$, $B = q/\cos y$, па заменувајќи во (1),

$$z = \frac{p}{\cos x}.\sin x + \frac{q}{\cos y}.\sin y,$$

т.е.

$$z = p.\mathrm{tg}x + q.\mathrm{tg}y. \tag{2}$$

Да забележиме дека елиминацијата на A и B можеме да ја извршиме и по вторите парцијални изводи на (1):

$$z_{xx} = -A\sin x, \quad z_{yy} = -B\sin y; \quad A = -z_{xx}/\sin x, \quad B = -z_{yy}/\sin y$$

па заменувајќи во (1), добиваме

$$z_{xx} + z_{yy} + z = 0, \tag{3}$$

што значи дека со елиминација на A и B може да се добијат и повеќе различни ПДР.

8.4. Да се состави ПДР елиминирајќи ја произволната функција F од релацијата

а) $z = F(x^2+3y)$; б) $F(x-y-z,\ x^2-y^2+z^2) = 0$.

Решение. а) Да ставиме $u = x^2 + 3y$. Тогаш $z = F(u)$, па диференцирајќи по x и y, добиваме

$$p = z'_x = F'(u).u'_x = 2xF'(u), \quad q = z'_y = 3F'(u);$$

$$\frac{p}{2x} = \frac{q}{3}, \text{ па } 3p - 2xq = 0.$$

б) Ставајќи $u = x + y - z$, $v = x^2 - y^2 + z^2$, дадената релација станува $F(u,v) = 0$; ја диференцираме по x и y:

$$F'_x = F'_u.u'_x + F'_v.v'_x = F'_u.(1-p) + F'_v.(2x+2zp) = 0,$$

$$F'_y = F'_u.u'_y + F'_v.v'_y = F'_u.(-1-q) + F'_v(-2y+2zq) = 0,$$

а од овие две равенства ги елиминираме F'_u и F'_v:

$$\begin{vmatrix} 1-p & 2x+2zp \\ -1-q & -2y+2zq \end{vmatrix} = 2(y+z)p + 2(z+x)q + x - y = 0,$$

т.е. $(y+z)p + (z+x)q = y - x$ е бараната ПДР.

8.5. Да се реши ПДР $x\frac{\partial z}{\partial x} - x^2y - z = 0$.

Решение. Равенката содржи само еден од парцијалните изводи по z, па можеме променливата y да ја сметаме за параметар и таа равенка да ја разгледуваме како обична ДР по функцијата z и аргументот x. Дадената равенка можеме да ја напишеме во обликот

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x}z = xy;$$

таа е линеарна и нејзиниот општ интеграл е

$$z = e^{\ln x}(C + \int e^{-\ln x}xydx) = x(C+xy),$$

каде што $C = f(y)$ е произволна "константа" (по x). Значи, $z = xf(y) + x^2y$ е општ интеграл на дадената ПДР.

8.6. Да се најде ПДР на фамилијата површини, за кои отсечката на нормалата меѓу површината (од точката $M(x,y,z)$) и рамнината OXY е константа, $k = 3$.

Решение. Равенката на нормалата на бараната површина $z = z(x,y)$ во точката $M(x,y,z)$ е

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}, \tag{1}$$

каде што X,Y,Z се "тековни координати". Бидејќи равенката на рамнината OXY е $Z = 0$, нејзиниот пресек со нормалата ќе биде точката $N(X_0,Y_0,Z_0)$:

$$Z_0 = 0, \quad X_0 = x + pz, \quad Y_0 = y + qz.$$

Растојанието меѓу точките $M(x,y,z)$ и $N(x+pz, y+qz, 0)$, според условот на задачата, е $k = 3$, т.е. $\overline{MN} = 3$, па

$$\sqrt{(x+pz-x)^2 + (y+qz-y)^2 + z^2} = 3,$$

т.е.

$$z^2(p^2+q^2+1) = 9,$$

што претставува ПДР на површините со даденото својство.

8.7. Дадена е фамилијата површини

$$z = \Phi(x,y,a) \tag{1}$$

(a е параметар). Да се најде ПДР на нејзините изогонални траектории, т.е. површините

$$z = f(x,y) \tag{2}$$

(f е непозната функција) кои ги сечат сите површини од фамилијата (1) под даден агол α. Специјално, да се најде ПДР на ортогоналните траектории (т.е. $\alpha = \pi/2$).

Решение. Под агол меѓу две површини (во заедничка точка M) го подразбираме аголот меѓу нивните нормали (во M). Векторот $\vec{n}_o$ на нормалата на површината (1) и векторот $\vec{n}$ на нормалата на (2) во заедничката точка $M(x,y,z)$ е

$$\vec{n}_o = (A,B,-1), \qquad \vec{n} = (p,q,-1),$$

каде што се воведени ознаките

$$A = (\Phi'_x), \quad B = (\Phi'_y), \quad p = z'_x, \quad q = z'_y;$$

притоа, заградите означуваат дека е извршена елиминација на параметарот a со помош на равенката (1), а p и q се парцијалните изводи на бараната функција.

Според тоа, за аголот α меѓу $\vec{n}_o$ и $\vec{n}$ имаме:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_o\cdot\vec{n}}{|\vec{n}_o|\cdot|\vec{n}|} = \frac{Ap+Bq+1}{\sqrt{1+A^2+B^2}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

т.е.

$$Ap + Bq + 1 = \cos\alpha\cdot\sqrt{1+A^2+B^2}\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}, \tag{3}$$

што претставува ПДР на бараната фамилија изогонални траектории на (1).

За $\alpha = \pi/2$, од (3) добиваме

$$Ap + Bq + 1 = 0 \tag{4}$$

- ПДР на ортогоналните траектории на (1).

8.8. Да се најде ПДР на ортогоналните траектории (в. 8.7) на фамилијата конусни површини

$$x^2 + y^2 = a^2z^2 \quad (a \text{ - параметар}). \tag{1}$$

Решение. Векторот на нормалата на (1) во точката $M(x,y,z)$ е

$$(x/a^2z,\ y/a^2z,\ -1), \text{ т.е. } \vec{n}_o = (x,y,\ -a^2z),$$

а векторот на нормалата на бараната површина $z = f(x,y)$ во $M(x,y,z)$ е $\vec{n} = (p,q,-1)$. Поради ортогоналноста на $\vec{n}_o$ и $\vec{n}$, имаме

$$xp + yq + a^2z = 0. \tag{2}$$

Од (1): $a^2 = (x^2+y^2)/z^2$, па заменувајќи во (2) добиваме

$$xp + yq + \frac{x^2+y^2}{z} = 0 \tag{3}$$

– бараната ПДР.

8.9. Да се најде партикуларното решение на ПДР

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \tag{1}$$

што го задоволува условот $z(0,y) = y^2$ (т.е. интегралната површина на (1) што минува низ параболата $x = 0$, $z = y^2$).

Решение. Интегрирајќи ја (1) непосредно, добиваме

$$z = x^2 - xy + \phi(y), \tag{2}$$

каде што ϕ е произволна функција. Од (2), поради условот $x = 0$, $z = y^2$, добиваме

$$y^2 = 0 - 0 + \phi(y), \text{ т.е. } \phi(y) = y^2,$$

па бараното решение е $z = x^2 + y^2 - xy$.

8.10. Да се најде општиот интеграл на линеарната нехомогена ПДР

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x} - (z+x)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y. \tag{1}$$

Решение. Соодветниот симетричен систем е

$$\frac{dx}{z-y} = -\frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} \quad (=k). \tag{2}$$

Ако ги собереме

$$\begin{aligned} dx &= k(z-y),\\ dy &= k(-z-x),\\ dz &= k(x+y), \end{aligned} \tag{3}$$

добиваме $dx + dy + dz = 0$, па еден прв интеграл на (2) е

$$x + y + z = C_1 \tag{4}$$

Исто така, од (3) имаме

$$\frac{dx+dy}{-(x+y)} = k, \quad \frac{dx+dz}{x+z} = k, \text{ па}$$

$$\frac{d(x+y)}{x+y} + \frac{d(x+z)}{x+z} = 0,$$

од каде што добиваме уште еден прв интеграл на (2):

$$(x+y)\cdot(x+z) = C_2 \tag{5}$$

Според тоа,

$$F(x+y+z,(x+y)\cdot(x+z)) = 0$$

е општ интеграл на (1).

Забелешка. Интегралот (5) можевме да го добиеме и од $-\frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$, ставајќи $z + x = C_1 - y$, $x + y = C_1 - z$.

8.11. Да се најде: а) општ; б) комплетен интеграл на ПДР

$$p + 2q = 3. \qquad (1)$$

Решение. а) Соодветниот систем е $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{3}$. Од $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2}$ имаме $2x - y = C_1$, а од $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{3}$ имаме $3x - z = C_2$. Значи, општото решение на (1) е

$$F(2x-y,3x-z) = 0, \text{ т.е. } z=zx+f(2x-y).$$

б) Ако соодветниот систем $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ на линеарната ПДР

$$P\cdot p + Q\cdot q = R, \qquad (2)$$

(каде што P,Q,R се дадени функции од x,y и z) има два независни први интеграли

$$u = \psi_1(x,y,z), \quad v = \psi_2(x,y,z), \qquad (3)$$

тогаш

$$\psi_2 = a\psi_1 + b, \qquad (4)$$

каде што a и b се произволни константи, е комплетен интеграл на (2).

За дадената равенка (1), два први интеграла се $u = 2x - y$, $v = 3x - z$, па

$$3x - z = a\cdot(2x-y) + b \qquad (5)$$

е комплетен интеграл на (1).[Навистина, со елиминација на произволните константи a и b од(5) и од равенствата $3 - p = 2a$, $-q = -a$, добиваме $3 - p = 2q$, т.е. ПДР (1).]

8.12. Да се најде интегрален множител на (обичната) ДР

$$(y-x^2y^2)dx + xdy = 0. \qquad (1)$$

Решение. Левата страна на една ДР

$$Mdx + Ndy = 0, \qquad (2)$$

$M = M(x,y)$, $N = N(x,y)$, може да се направи тотален диференцијал од некоја функција $u = u(x,y)$ ако се помножи со некоја функција $\lambda = \lambda(x,y)$, која го задоволува условот

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}, \text{ т.е. } -N\frac{\partial\lambda}{\partial x} + M\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \partial(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}).$$

Соодветниот симетричен систем на оваа ПДР е

$$\frac{dx}{-N} = \frac{dy}{M} = \frac{d\lambda}{\lambda(N'_x - M'_y)}. \tag{3}$$

Интегрален множител на (2) ќе биде која било функција $\lambda(\lambda\neq 0)$ што е решение на (3).

За ДР (1): $M = y - x^2y^2$, $N = x$, $N'_x = 1$, $M'_y = 1 - 2x^2y$, па (3) е

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y-x^2y^2} = \frac{d\lambda}{2x^2y\lambda} \quad (=k).$$

За овој систем, од

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{d\lambda}{2\lambda} = 0,$$

добиваме еден прв интеграл: $2\ln x + 2\ln y + \ln\lambda = \ln C$ $(C=e)$, па $\lambda = x^{-2}y^{-2}$ е интегрален множител на (1).

8.13. Дадена е ПДР

$$xyp + (2x-z)q = yz. \tag{1}$$

Да се најде: а) општ интеграл; б) комплетен интеграл; в) интегралната површина што минува низ кривата (параболата)

$$x = 2, \quad z = y^2 - 1. \tag{2}$$

Решение. а) За соодветниот симетричен систем

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{2x-z} = \frac{dz}{yz} \quad (=k)$$

имаме веднаш еден прв интеграл: $\frac{z}{x} = C_1$, а потоа, од $-dx + ydy + dz = 0$, добиваме $z - x + y^2/2 = C_2$. Значи, општиот интеграл на (1) е

$$F(\frac{z}{x}, z - x + \frac{y^2}{2}) = 0.$$

б) Според зад. 8.11, $z - x + y^2/2 = a(z/x) + b$ е комплетен интеграл на (1).

в) Ги елиминираме x,y,z од равенките

$$x = 2, \quad z = y^2 - 1, \quad C_1 = \frac{z}{x}, \quad C_2 = z - x + \frac{y^2}{2}. \tag{3}$$

Заменувајќи ги x и z од првите две, прво во третата равенка, добиваме $2C_1 = y^2 - 1$, т.е. $y^2 = 2C_1 + 1$, а потоа во четвртата равенка на (3): $C_2 = (y^2-1) - 2 + \frac{y^2}{2}$. Поради $y^2 = 2C_1 + 1$, добиваме

$$2C_2 = 6C_1 - 3. \tag{4}$$

Сега, заменувајќи ги C_1 и C_2 од (3) во (4), добиваме

$$2(z - x + \frac{y^2}{2}) = 6\cdot\frac{z}{x} - 3,$$

т.е. $(2x-6)z = x(2x-3-y^2)$ - тоа е бараниот партикуларен интеграл (интегрална површина) што го задоволува условот (2).

8.14. За ПДР: $x^2p + y^2q = z^2$ да се најде интегралната површина што минува низ правата

а) $x = 2y, \quad x = 2z$; б) $x = t,\ y = \frac{t}{2},\ \ z = \frac{t}{3}$.

Решение. За соодветниот симетричен систем

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$$

веднаш добиваме два први интеграла:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C_1, \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = C_2 \tag{1}$$

а) Од (1) и од условот а) ги елиминираме x,y,z:

$$z = y = \frac{x}{2}; \quad C_1 = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \quad C_2 = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т.е. $C_1 = C_2$; заменувајќи ги во ова равенство C_1 и C_2 од (1), добиваме

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \quad \text{т.е. } z = y.$$

Значи, бараната интегрална површина е рамнината $z = y$.

б) Заменувајќи ги x,y,z од б) во (1), добиваме

$$C_1 = \frac{2}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}, \quad C_2 = \frac{3}{t} - \frac{1}{t} = \frac{2}{t}, \text{ па } C_2 = 2C_1.$$

Значи:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{2}{y} - \frac{2}{x}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{z} = \frac{2}{y} - \frac{1}{x}, \text{ па}$$

бараната интегрална површина е $z = \frac{xy}{2x-y}$.

8.15. Да се најде онаа интегрална површина на ПДР

$$(x^2+y^2)p + 2xy\cdot q = xz \tag{1}$$

што минува низ кружницата $\{x = r,\ y^2 + z^2 = r^2\}$.

Решение. Го составуваме системот

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}. \qquad (2)$$

Од вторите два израза на (2) добиваме еден прв интеграл на (1):

$$\frac{z^2}{y} = C_1, \qquad (3)$$

а од првите два:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2}$$

- хомогена ДР. Со смената $y = ux$, таа станува

$$u'x + u = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \frac{1+u^2}{u(1-u^2)}\,du = \frac{dx}{x};$$

$$\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)du = \int\frac{dx}{x}; \quad \frac{u}{1-u^2} = Cx;$$

по средувањето:

$$\frac{x^2-y^2}{y} = C_2 \qquad \left(C_2 = \frac{1}{C}\right). \qquad (4)$$

Дадената кружница ќе ја напишеме во параметарска форма:

$$x = r, \quad y = r\cos t, \quad z = r\sin t;$$

од тоа и од (3) и (4) имаме:

$$C_1 = \frac{z^2}{y} = \frac{r^2\sin^2 t}{r\cos t} = \frac{r^2(1-\cos^2 t)}{r\cos t} = \frac{x^2-y^2}{y} = C_2.$$

Значи, $C_1 = C_2$, па според (3) и (4):

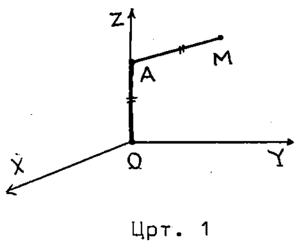
$$\frac{z^2}{y} = \frac{x^2-y^2}{y}, \quad \text{т.е.} \quad x^2 = y^2 + z^2.$$

Следствено, интегралната површина на (1) што минува низ кружницата $\{x = r,\ y^2 + z^2 = r^2\}$ е конусната површина $x^2 = y^2 + z^2$.

8.16. Да се најде равенката на површината при која тангентната рамнина во произволна точка $M(x,y,z)$ ја сече оската OZ во точка, еднакво оддалечена од M и од координатниот почеток O, а минува низ кружницата $x = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Тангентната рамнина на бараната површина $z = z(x,y)$ во произволна нејзина точка $M(x,y,z)$ има равенка

$$p(X-x) + q(Y-y) = Z - z \qquad (1)$$



Црт. 1

(X, Y, Z се "тековни координати", а $p = z'_x$, $q = z'_y$ во точката M). Пресечната точка A (Црт. 1) на оската OZ со тангентната рамнина (1) има координати:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = z - xp - yq.$$

Од условот на задачата имаме $\overline{OA} = \overline{AM}$, т.е. $\overline{OA}^2 = \overline{AM}^2$, па

$$(z-xp-yq)^2 = x^2 + y^2 + (z-z+xp+yq)^2,$$

од што, по средувањето, ја добиваме ПДР

$$2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2. \tag{2}$$

Соодветниот симетричен систем е

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2-x^2-y^2}. \tag{3}$$

Од првото равенство добиваме еден прв интеграл

$$\frac{y}{x} = C_1, \tag{4}$$

а од равенството меѓу првиот и третиот израз на (3), имајќи предвид дека $y = C_1x$, по решавањето на обичната хомогена ДР

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\cdot(z/x)}\cdot\{(z/x)^2 - (1+C_1^2)\},$$

добиваме уште еден прв интеграл

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = C_2. \tag{5}$$

Значи, равенката на фамилијата површини за кои е исполнет условот $\overline{OA} = \overline{AM}$ е

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2+y^2+z^2}{x}\right) = 0. \tag{6}$$

По заменувањето на $x = 1$ и $y^2 + z^2 = 4$ во (5), добиваме $C_2 = 5$, што значи дека сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5x$$

е онаа од површините (6) што минува низ кружницата $x = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.

8.17. Да се најде равенката на ортогоналните траектории (в. 8.7) за фамилијата површини

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 = a. \tag{1}$$

Потоа, од тие траектории да се издвои онаа што минува низ параболата $\{x = 1,\ y = 1 - z^2\}$.

Решение. Нормалниот вектор $\vec{n}_0$ на површината $z = \Phi(x,y,a) = \pm(a-2x^2-2y^2)^{1/2}$ во точката $M(x,y,z)$ е

$$\vec{n}_o = (A,B,-1), \quad A = (\Phi'_x) = -\frac{2x}{z}, \quad B = (\Phi'_y) = -\frac{2y}{z},$$

а нормалниот вектор на изогоналната траекторија $z = z(x,y)$ во истата точка M е

$$\vec{n} = (p,q,-1), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Од условот $\vec{n}_o$ и $\vec{n}$ да се нормални, добиваме

$$\vec{n}_o\vec{n} = 0; \; Ap + Bq + 1 = 0; \; -\frac{2x}{z}p - \frac{2y}{z}q + 1 = 0;$$

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = z \tag{2}$$

– ПДР на фамилијата ортогонални траектории на (1).

За соодветниот симетричен систем

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}$$

веднаш добиваме два независни први интеграли

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{\sqrt{x}} = C_2, \tag{3}$$

па општиот интеграл на (2), т.е. равенката на фамилијата ортогонални траектории има облик

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{\sqrt{x}}\right) = 0. \tag{4}$$

(Бидејќи функцијата z се јавува само во едниот од првите интеграли, (4) може да се напише во експлицитен облик

$$\frac{z}{\sqrt{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ т.е. } \quad z = \sqrt{x}\cdot f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4'}$$

каде што f е произволна диференцијабилна функција.)

Од (3) и од условот $x = 1$, $y = 1 - z^2$ добиваме

$$C_1 = 1 - C_2^2, \quad \frac{y}{x} = 1 - \frac{z^2}{x},$$

т.е. $z^2 = x - y$ е равенката на онаа од ортогоналните траектории што минува низ кривата $\{x = 1,\ y = 1 - z^2\}$.

8.18. Со помош на методот на раздвојување на променливите (т.е. методот на Фурје) да се најде решение $u = u(x,y)$ на ПДР

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)u. \tag{1}$$

Решение. Според овој метод, решение $u = u(x,y)$ на (1) се бара во облик на производ од две диференцијабилни функции, од кои едната зависи само од x, а другата само од y:

$$u = f(x)\cdot g(y); \tag{2}$$

дадената ПДР, по заменувањето на (2), се сведува на обична ДР или на систем обични ДР.

Од (2): $u'_x = f'(x)\cdot g(y)$, $u'_y = f(x)\cdot g'(y)$, па (1) станува

$$\frac{x}{2}\cdot f'g - yfg' = (x+y)fg,$$

а по делењето со fg и по средувањето:

$$x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f'}{f} - 1\right) = y\left(1 + \frac{g'}{g}\right). \tag{3}$$

Левата страна на (3) зависи само од x, а десната само од y, па (3) е можно само ако двете страни се еднакви на константа k:

$$x\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f}{f'} - 1\right) = k, \qquad y\left(\frac{g'}{g} + 1\right) = k, \text{ т.е.}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{2x}{x} + 2, \qquad \frac{g'}{g} = \frac{k}{y} - 1;$$

Решавајќи ги овие ДР по непознатите функции f и g соодветно, добиваме

$$f(x) = C_1x^{2k}e^{2x}, \qquad g(y) = C_2y^ke^{-y},$$

па бараното решение (2) е

$$u(x,y) = C(x^2y)^ke^{2k-y} \qquad (C=C_1C_2).$$

8.19. За ПДР $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ да се најдат решенијата од обликот $u = f(x)+g(y)$, каде што $f(x)$ и $g(y)$ се диференцијабилни функции.

Решение. Заменувајќи ги $u'_x = f'(x)$ и $u'_y = g'(y)$ во дадената ПДР, добиваме

$$f'(x) = 2x(g'(y))^2, \text{ т.е. } \frac{f'(x)}{2x} = (g'(y))^2,$$

а тоа е равенка со раздвоени променливи. Како во 8.18, левата и десната страна мора да се еднакви на константа, т.е.

$$\frac{f'}{2x} = k, \quad g'^2 = k \quad (k \geq 0);$$

решенија на овие равенки се, соодветно:

$$f(x) = kx^2 + C_1; \; g(y) = \pm\sqrt{k}y + C_2,$$

па бараното решение е $u = kx^2 \pm\sqrt{k}y + C \quad (C = C_1+C_2)$.

8.20. Да се реши системот ПДР

$$\text{а)}\ \frac{\partial z}{\partial x} = yz-z, \qquad \text{б)}\ \frac{\partial z}{\partial x} = x+yz,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xz; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xz-y.$$

Решение. За еден систем ПДР

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x,y,z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x,y,z), \tag{1}$$

каде што A и B се дадени функции, непрекинато диференцијабилни во некоја околина на дадена точка (x_o,y_o,z_o), велиме дека е решлив ако постои функција $z = z(x,y)$ која идентички ги задоволува двете равенки од (1) во некоја околина U_o на (x_o,y_o,z_o). Потребен и доволен услов за системот (1) да има фамилија решенија што зависи барем од една произволна константа е

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\cdot B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\cdot A, \tag{2}$$

за секоја точка (x,y,z) од U_o.

а) За дадениот систем имаме: $A = yz-z$, $B = xz$,

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\cdot B = z + xyz-xz = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\cdot A,$$

што значи дека тој е решлив.

Од втората равенка на системот имаме

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

од каде што, сметајќи ја x за константа, добиваме

$$\ln z = xy + \phi(x). \tag{3}$$

Овде $\phi(x)$ е произволна диференцијабилна функција, која ќе ја одредиме така што (3) да биде решение и на првата равенка од системот. Затоа, ја диференцираме (3) по x и добиваме

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = y + \phi'(x), \text{ па } \frac{1}{z}\cdot(zy-z) = y + \phi'(x),$$

од каде што: $\phi(x) = -1$, $\phi(x) = -x + c$. Значи,

$$\ln z = xy - x + c, \text{ т.е. } z = Ce^{xy-x} \quad (C=e^c)$$

е заедничко решение на двете равенки од системот, т.е. е решение на системот (1).

б) Имаме: $A = x + yz$, $\frac{\partial A}{\partial y} = z$, $\frac{\partial A}{\partial z} = y$; $B = xz - y$, $\frac{\partial B}{\partial x} = z$, $\frac{\partial B}{\partial z} = x$; левата страна на равенството (2) е $z - y^2 + xyz$, а десната е

$z + x^2 + xyz$, т.е. условот (2) не е исполнет. Следствено, дадениот систем нема решение.

8.21. Да се реши следнава равенка на Пфаф:

$$(2xy-3yz)dx + (x^2-3xz)dy - 3xydz = 0 \qquad (1)$$

Решение. ДР: $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, каде што P,Q,R се дадени функции од x,y,z, се вика равенка на Пфаф. Ако, на пример, $R \not\equiv 0$, таа добива облик $dz = (-P/R)dx + (-Q/R)dy$; значи, $z'_x = -P/R$, $z'_y = -Q/R$, па нејзиното решавање се сведува на решавање систем ПДР како во зад. 8.20.

Претставувајќи ја ДР (1) во обликот

$$dz = \frac{2xy-3yz}{3xy}\,dx + \frac{x^2-3xz}{3xy}\,dy \qquad (xy\neq 0)$$

доаѓаме до системот ПДР

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3} - \frac{z}{x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{3y} - \frac{z}{y}. \qquad (2)$$

Условот (2) од зад. 8.20, за овој систем е исполнет, па тој е решлив. Првата равенка од системот (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x}z = \frac{2}{3},$$

можеме да ја сметаме за линеарна обична ДР по z, z'_x, па

$$z = \frac{1}{x}\cdot\phi(y) + \frac{x}{3}; \qquad (3)$$

тука $\phi(y)$ е произволна диференцијабилна функција; неа ќе ја определиме така што функцијата $z(x,y)$, определена со (3), да биде решение и на втората равенка од (2). Ја диференцираме (3) по y и добиениот извод z'_y го изедначуваме со десната страна на втората равенка од (2):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\phi'(y);\quad \frac{1}{x}\phi'(y) = \frac{x}{3y} - \frac{z}{y}.$$

Поради $z = \frac{1}{x}\phi(y) + x/3$, добиваме

$$\frac{1}{x}\phi'(y) = \frac{x}{3y} - \frac{1}{xy}\phi(y) - \frac{x}{3y},\ \text{т.е.}\ \phi' = -\frac{1}{y}\phi,$$

од каде што $\phi'/\phi = -dy/y$, т.е. $\phi = C/y$. Заменуваме во (3) и добиваме

$$z = \frac{C}{xy} + \frac{x}{3},\ \text{т.е.}\ 3xyz - x^2y = C \qquad (4)$$

– бараното решение на (2), односно на (1).

8.22. Да се реши следнава равенка на Пфаф:

$$(y+z)dx + 2xzdy - xdz = 0. \qquad (1)$$

Решение. Поради $dz = \frac{y+z}{x}dx + 2zdy$, добиваме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y+z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2z. \tag{2}$$

Проверуваме дали е исполнет условот (2) од зад. 8.20:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\cdot B = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot 2z \neq 0 + 2\cdot\frac{y+z}{x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\cdot A.$$

Значи, системот (2) односно равенката (1) нема решение.

8.23. Да се најде комплетен интеграл на ПДР

$$p^2 + q^2 = 4, \text{ т.е. } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4. \tag{1}$$

Решение. Да се потсетиме дека комплетен (или полн) интеграл на една ПДР $F(x,y,z,p,q) = 0$ е интеграл $V(x,y,z,a,b) = 0$ на таа ПДР, којшто зависи од две суштински произволни константи a и b (в. и зад. 8.11).

Дадената ПДР (1) има облик $F(p,q) = 0$, т.е. во неа не се јавуваат експлицитно x,y и z. Комплетен интеграл на такви ПДР се наоѓа ставајќи $p = a$, каде што a е произволна константа, а потоа заменувајќи $p = a$ во (1). Имаме:

$$a^2 + q^2 = 4, \text{ па } q = \pm\sqrt{4-a^2};$$

$$dz = pdx + qdy = adx\pm\sqrt{4-a^2}dy,$$

од каде што добиваме $z = ax\pm\sqrt{4-a^2}y+b$ - комплетен интеграл на (1).

8.24. Да се најде комплетен интеграл на ПДР

$$q = p^2xy. \tag{1}$$

Решение. Дадената ПДР може да се претстави во обликот $f_1(x,p) = f_2(y,q)$, т.е. $xp^2 = q/y$.

Ставајќи $xp^2 = q/y = a$, каде што a е произволна константа, добиваме:

$$p = \pm\sqrt{a/x}, \quad q = ay, \quad dz = \pm\sqrt{a/x}\cdot dx + aydy,$$

па $z = \pm 2\sqrt{ax} + ay^2/2 + b$ е комплетен интеграл на (1).

8.25. Да се најде комплетен интеграл на ПДР

$$q - 3z^2p^2 = 0. \tag{1}$$

Решение. Равенката (1) има облик $F(z,p,q) = 0$, т.е. во неа не се јавуваат експлицитно x и y, па комплетен интеграл можеме да најдеме ставајќи $q = ap$ (или $p = aq$), каде што a е произволна константа.

Ставајќи $q = ap$ во (1), добиваме $ap - 3z^2p^2 = 0$, па $p = a/3z^2$, $q = a^2/3z^2$. Значи,

$$dz = \frac{a}{3z^2}dx + \frac{a^2}{3z^2}dy, \text{ т.е. } 3z^2dz = adx + a^2dy,$$

па $z^3 = ax + a^2y + b$ е комплетен интеграл на (1).

<u>8.26.</u> Да се најде комплетен интеграл на ПДР

$$xp + yq - pq = 0 \tag{1}$$

со методот на Лагранж-Шарпи.

<u>Решение:</u> Според овој метод, за ПДР $F(x,y,z,p,q) = 0$ го формираме симетричниот систем ДР

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p+qF_q} = -\frac{dp}{F_x+pF_z} = -\frac{dq}{F_y+qF_z}, \tag{2}$$

каде што F_p е парцијалниот извод на $F(x,y,z,p,q)$ по p, F_q - по q итн. Ако најдеме еден прв интеграл $U_1(x,y,z,p,q) = a$ на (2) и ако успееме од равенките $F(x,y,z,p,q) = 0$, $U_1(x,y,z,p,q) = a$ да ги изразиме p и q во видот

$$p = A(x,y,z,a), \; q = B(x,y,z,a), \tag{3}$$

тогаш наоѓањето на комплетен интеграл се сведува на решавање на системот (3). Ако, пак, најдеме два први интеграла $U_1 = a$, $U_2 = b$ на (2), тогаш комплетен интеграл на (1) ќе добиеме по елиминацијата на p и q од системот равенки $U_1 = a$, $U_2 = b$, $F = 0$. За (1) имаме $F = xp + yq - pq$, па системот (2) е

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{dz}{p(x-q)+q(y-p)} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q},$$

т.е., поради $xp + yq - pq = 0$:

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{dz}{-pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}. \tag{4}$$

Од (4): $dq/q = dp/p$, па $q = ap$ (a е произволна константа); $dz/pq = dp/p$, $dz/pap = dp/p$, т.е. $dz = apdp$, па $z = \frac{a}{2}p^2 + b$. Значи,

$$q = ap, \; z = \frac{a}{2}p^2 + b \tag{5}$$

се два први интеграли на (4). Ставајќи $q = ap$ во (1), добиваме $xp + ayp - ap^2 = 0$, па $p = (x+ay)/a$ го заменуваме во втората равенка од (5) и добиваме

$$z = \frac{1}{2a}(x+ay)^2 + b$$

- комплетен интеграл на (1).

8.27. Да се реши следниов Кошиев проблем: од комплетниот интеграл

$$z = \frac{1}{2a}(x+ay)^2 + b \tag{1}$$

на ПДР

$$xp + yq - pq = 0 \tag{2}$$

(зад. 8.26) да се издвои онаа интегрална површина што минува низ кривата

$$x = 0,\ y = t,\ z = t^2 + 3. \tag{3}$$

Решение. Значи, треба да ги определиме константите a и b во (1) така што добиената површина да минува низ кривата (3). За таа цел, ќе ги замениме (3) во (1) и добиеното равенство

$$t^2 + 3 = \frac{1}{2a}(0+at)^2 + b, \text{ т.е. } t^2 + 3 = \frac{a}{2}t^2 + b \tag{4}$$

ќе го диференцираме по t:

$$2t = at. \tag{5}$$

Равенствата (4) и (5), во точките од кривата (3) мора да бидат идентички задоволени, поради што, од (5), имаме $a = 2$, па од (4): $b = 3$. Значи, бараната интегрална површина е $z = \frac{1}{4}(x+2y)^2 + 3$.

8.28. Со помош на "раздвојување на променливите", да се најде комплетен интеграл на равенката

$$xz\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2. \tag{1}$$

Решение. ПДР (1) може да се напише во обликот

$$x\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} + y^2\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

а, потоа,

$$x\,\frac{\partial(\log z)}{\partial x} + y^2\left[\frac{\partial(\log z)}{\partial y}\right]^2 = 1. \tag{2}$$

Сметајќи ја logz за нова функција, означена со u, а $u'_x = p$, $u'_y = q$, од (2) имаме

$$y^2q^2 = 1 - xp;$$

ставајќи $1 - xp = a^2$, $y^2q^2 = a^2$ $(a \geq 0)$, добиваме

$$p = \frac{1-a}{x},\ q = \frac{a}{y}.$$

Ставајќи ги за p и q овие вредности во $du = p_1dx + q_1dy$, имаме

$$du = \frac{1-a^2}{x}\,dx + \frac{a}{y}\,dy,$$

од каде што $u = (1-a^2)\cdot\ln x + a\ln y + \ln b$; по $u = \log z$: $z = bx^{1-a^2}y^a$.

8.29. Да се провери дали дадената функција $z = z(x,y)$ е интеграл на дадената ПДР и дали е нејзин општ интеграл (притоа, f е произволна, "доволен број пати" диференцијабилна функција):

а) $z = \operatorname{arctg} xy$, $xp - yq = 0$ $\quad (p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y})$

б) $z = f(xy)$, $xp - yq = 0$

в) $f(x^2-y^2,\ z^2-y^2) = 0$, $yzp + xzq = xy$

г) $z = ax + y + f(y-ax)$, $z''_{xx} = a^2 z''_{yy}$ (a = конст.)

д) $z = x + yf(z)$, $\frac{\partial}{\partial y}\{z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\} = \frac{\partial}{\partial x}\{z^2 f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\}$.

8.30. Дали $z = f(x^2+y^2)$, каде што f е произволна диференцијабилна функција, е општо решение на ПДР $yp - xq = 0$? Да се најде партикуларното решение на оваа ПДР што го задоволува условот $z(x,0) = \ln(x^2+1)$.

8.31. Да се состави ПДР, елиминирајќи ги произволните константи a,b,c:

а) $z = ax + bxy$; б) $z = ax^2 + ay + b$;

в) $z = ax\sin y + by$; г) $z = ax^2 + by^2 + c$.

8.32. Да се елиминира константата a од функцијата $z = ax + y$.

8.33. Покажи дека елиминирањето на константите a,b од

а) $z = ax^3 + by^3$, б) $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$

доведува до (иста) ПДР: $xp + yq = 3z$.

Уочи дека секоја од тие функции е специјален случај од функцијата $z = x^3 f(y/x)$.

8.34. Да се состави ПДР елиминирајќи ги произволните функции f,g (коишто се "доволен број пати" диференцијабилни):

а) $z = f(x^2+y^2-2x)$; б) $f(z,x-yz) = 0$;

в) $x^2 - 2z = f(2x-y^2)$; г) $z = f(xy) + g(y/x)$;

д) $u(x,t) = \frac{1}{x}\cdot\{f(x-at) + \psi(x+at)\}$.

8.35. Да се најде ПДР на сите рамнини, коишто на оските OX и OY отсечуваат еднакви (ненулти) сегменти.

8.36. Да се најде ПДР на двопараметарската фамилија сфери $z^2 = 1 - (x-a)^2 - (y-b)^2$.

8.37. Да се најде ПДР на сферите коишто имаат радиус $R = 5$, а центрите им лежат: а) на оската OX; б) на рамнината $x = y$.

8.38. Да се најде ПДР на сите ротациони површини, чијашто оска на ротацијата е z-оската.

8.39. Да се најде најопштата равенка на конусните површини, ако се знае дека тие се дефинираат како геометриско место на права (генератриса), којашто минува низ една постојана точка (врв на конусот) $S(a,b,c)$ и сече дадена крива (директриса): $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$. Потоа, да се најде ПДР на тие површини.

8.40. Да се најде ПДР на површините при кои тангентната рамнина, во која било точка, се наоѓа на исто растојание d од координатниот почеток.

Во зад. 8-41-8.43 да се најде ПДР на ортогоналните траектории на дадената фамилија површини.

8.41. $z = a(x^2+y^2)$ - параболоиди.

8.42. $x^2 + 2y^2 + z^2 = a^2$ - сфери.

8.43. $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ - двокрилни хиперболоиди.

Во зад. 8.44-8.50 да се интегрира непосредно зададената ПДР (која содржи само еден од парцијалните изводи на z по x или y):

8.44. $p = 2xy + y^2$.

8.45. $q = x^2 + 2y$ при $z(x,x^2) = 1$.

8.46. $p = 2x + y$ при $z(1,y) = y$.

8.47. $(x^2+y^2)q = x^2+z^2$.

8.48. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+zy = xy\,\frac{\partial z}{\partial x}$.

Во зад. 8.49-8.51, а) да се трансформира дадената ПДР со назначената смена и, потоа, б) да се најде општ интеграл на таа ПДР.

8.49. $xp + yq - z = 0$; $u=x$, $v=y/x$.

8.50. $xp + yq = z + (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$;

$u=y/x$, $v=z+(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

8.51. $z(xp+yq) + x^2+y^2 = 0$;

$u=y/x$, $v=x^2+y^2$, $w=z^2$.

Да се најде општ интеграл на дадената хомогена линеарна ПДР (8.52-8.55).

8.52. $2y \frac{\partial z}{\partial x} - 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

8.53. $x \frac{\partial z}{\partial x} - (x+y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

8.54. $(z^2-y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

8.55. $x(y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + z(z-y) \frac{\partial u}{\partial y} + y(y-z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

8.56. Да се најде интегралната површина на ПДР: $xp-yq=0$ што минува низ точката $M(1,1,2)$ и го задоволува условот

$$p^2 + q^2 = (x^2+y^2)/(xy)^2 \text{ при што } xy > 0.$$

8.57. Од функциите што ја задоволуваат ПДР $xp+yq=0$ да се издвојат оние што ја задоволуваат и ПДР: $p^2+q^2 = 4/(x^2+y^2)$, $x>0$.

8.58. Да се најде интегралната површина на ПДР: $(x+y)p-yq = 0$ што минува низ точката $M(1,1,9)$ и го задоволува условот $yq-xp = 4y^2(2xy+y^2)$.

Во задачите 8.59-8.65 да се најде општ интеграл на дадената нехомогена линеарна ПДР.

8.59. $xyp - y^2q = x(1+x^2)$ $\quad (p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}).$

8.60. $(z-y)p - xq = 0$ (Зошто оваа ПДР е нехомогена?)

8.61. $x(x+p) + y(y+q) = z + 1.$

8.62. $xy(yp+xq) = z(x^2+y^2).$

8.63. $x(x^2+y^2)p + 2y^2(px+qy-z) = 0.$

8.64. $x(y^2-z^2)p + y(z^2-x^2)q = z(x^2-y^2).$

8.65. $x(y^2-z^2)p - (x^2+z^2)q = z(x^2+y^2).$

8.66. Да се најде равенката на фамилијата површини, чиишто тангентни рамнини минуваат низ точката: а) $(0,0,2)$, б) $(1,2,3)$.

Во задачите 8.67-8.69 да се најде интегрален множител на дадената обична ДР.

8.67. $(2xy^2-x^2y^3+y)dx + (2x^2y+x)dy = 0.$

8.68. $(2y+3x^4y^2)dx + (6x-2x^5y)dy = 0.$

8.69. $y' + p(x)y = q(x)y^k$ (бернулиева).

Да се најде интегрален множител и потоа да се реши дадената обична ДР (8.70-8.73).

8.70. $2xydx - (x^2+y^2+1)dy = 0$.

8.71. $(1-x^2y)dx + (x^2y-x^3)dy = 0$.

8.72. $y(xy-3)dx + x(xy-1)dy = 0$.

8.73. $(2x^3y-y^2)dx - (2x^4+xy)dy = 0$.

8.74. Да се најде најопштото решение на ПДР

а) $yzp + zxq = xy$; б) $(y-2z)p + (z-x)q = 2x - y$

што претставува површина од втор ред.

Во зад. 8.75-8.83 да се најде равенка на интегралната површина на дадената ПДР што минува низ дадената крива.

8.75. $4yzp + q + 2y = 0$, $\{x+z=2,\ y^2+z^2=1\}$.

8.76. $2yzp - xzq + xy = 0$, $\{x=2,\ y^2+z^2=4\}$.

8.77. $2xyp + 4y^2q = x^2y$, $\{y=2,\ z=x^2/2\}$.

8.78. $x^2p + y^2q + z^2 = 0$, $\{xy=x+y,\ z=1\}$.

8.79. $xy^3p + x^2z^2q = y^3z$, $\{x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\}$.

8.80. $(y-2z)p + (z-x)q = 2x - y$, $\{x=z,\ y=0\}$.

8.81. $x(x^2+3y^2)p + 2y^3q = 2y^3z$, $\{y-x=0,\ z=xy\}$.

8.82. $(x^2+y^2)p + 2xyq = xz$, $\{x=3,\ y=3\cdot\cos t,\ z=3\cdot\sin t\}$.

8.83. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u$, $\{x=2,\ u=(y+z)/2\}$.

8.84. Да се најде равенка на површината што минува низ параболата $y^2=4x$, $z=1$, а го има својството: која било нејзина тангентна рамнина ја сече оската OX во точка чија апсциса е двапати помала од апсцисата на допирната точка.

Во зад. 8.85-8.89 да се најде равенката на ортогоналните траектории на дадената фамилија површини (a е параметар).

8.85. $z = axy$. 8.86. $z = ax^2$. 8.87. $x^2+2y^2+2z^2 = a^2$.

8.88. $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$. 8.89. $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$. (в. 8.8).

8.90. Да се најде равенката на ортогоналните траектории на фамилијата параболоиди $z = a(x^2+y^2)$, а потоа да се издвои траекторијата што минува низ кружницата: а) $x^2+y^2 = 1,\ z = 2$; б) $x^2+z^2 = x,$ $y = 1$.

8.91. Од површините, ортогонални на фамилијата површини $z=axy$ (в. зад. 8.85) да се издвои онаа што минува низ кружницата $x^2 + y^2 = r^2,\ z = k$.

Со помош на методот на раздвојување на променливите (т.е. со методот на Фурје) да се решат ПДР (8.92-8.95).

8.92. $xp - yq = 0$. 8.93. $yp - xq = 2xyz$.

8.94. $ayp - bxq = 0$. 8.95. $xyp - x^2q = 2yz$.

8.96. Да се најдат решенијата од обликот $z = f(x) + g(y)$ на ПДР а) $p^2 + q^2 = 1$; б) $pq = 1$.

8.97. За ПДР $xp + yq = z$ да се најде:

а) (најопштото) решение во обликот $z = f(x)\cdot g(x)$,

б) комплетен интеграл (како во зад. 8.11).

Да се решат следните системи ПДР (8.98-8.102).

8.98. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yz^2. \end{cases}$ 8.99. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x^2z - y, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^2 - z^2. \end{cases}$

8.100. $\{\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y\}$.

? Одг.? 8.101. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{3y} - \dfrac{z}{y}. \end{cases}$ 8.102. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x - x^2 + \dfrac{2z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2. \end{cases}$

Да се решат равенките на Пфаф во зад. 8.103-8.106.

8.103. $yzdx + 2xzdy - xydz = 0$.

8.104. $(x+y)dx + ydy - zdz = 0$.

8.105. $(2yz+3x)dx + xzdy + xydz = 0$.

8.106. $(3z^2+y)dx + (x+y)dy + 6xzdz = 0$.

Да се најде комплетен интеграл на дадената ПДР (8.107-8.117).

8.107. $p^2 - q^2 = 1$. 8.108. $pq + p + q = 0$.

8.109. $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$. 8.110. $3p + q = 2y$.

8.111. $q = p^2x$. 8.112. $yp^2 - xq^2 = 0$.

8.113. $yp + xq = 3pq$. 8.114. $zp^2 = q$.

8.115. $zq(q+p) = p$. 8.116. $zp + q^2 = 0$.

8.117. $z = xp + yq + p^2 - pq$.

Да се најде комплетен интеграл на дадената ПДР (како во зад. 8.28).

8.118. $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = z^2(x+y)$.

8.119. $x(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + y(\frac{\partial z}{\partial y})^2 = z^2$.

Со помош на методот на Лагранж-Шарпи, да се најде комплетен интеграл на дадената ПДР (8.120-8.125).

8.120. $p = 2zq^2$. 8.121. $q = 3z^2p^2$ (в. 8.25).

8.122. $z - xp - yq - f(p,q) = 0$ (f_p', f_q' - постојат).

8.123. $xp + q = p^2$. 8.124. $yzp^2 - q = 0$.

8.125. $z(xp+yq-z) + 1 = 0$.

За дадената ПДР да се најде интегралната површина што минува низ назначената крива (8.126-8.129).

8.126. $z = pq$, $\{x = 1,\ z = y\}$.

8.127. $zp(p+q) = 2q$, $\{x = 0,\ x^2 = 9y\}$.

8.128. $p^2 - 2pq + 2q^2 = 4z$, $\{x = 0,\ z = y^2\}$.

8.129. $z^2(p^2+q^2+1) = 16$, $\{y = 0,\ \frac{x^2}{2} + z^2 = 16\}$.

8.130. Да се најде равенката на површината при која отсечката на нормалата, повлечена во произволна нејзина точка $M(x,y,z)$, од точката M до рамнината OXY е константа, еднаква на 2.

* * *

8.131. Да се најде најопштата (двапати диференцијабилна) функција од обликот $f(y/x)$ која ја задоволува ПДР $z_x \cdot z_{yy} - z_y \cdot z_{xx} = 0$.

8.132. а) Да се најде равенка на површината што минува низ кривата $z = 0$, $x^3 + y^3 + 3kxy = 0$ (k е константа) и ја задоволува ПДР: $z = px + qy + ky/x$.

б) Да се најде општиот облик на функцијата $f(x,y)$, за која со елиминација на произволните константи a и b од функцијата $z = ax + by + f(x,y)$ и нејзините изводни равенки, се добива ПДР: $z = px + qy + f(x,y)$.

8.133. Да се најде равенка на површините што го имаат својството: тангентната рамнина во произволна точка (x,y,z) отсечува на z-оската отсечка, која зависи само од y/x.

Да се состави ПДР од втор ред што е задоволена од равенката на тие површини.

8.134. Покажи дека: ако $\psi_1 = C_1$ и $\psi_2 = C_2$ $(\psi_i = \psi_i\ (x,y,z))$ се два независни први интеграли на системот

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{1}$$

и ако a и b се произволни константи, тогаш $\psi_1 = a\cdot\psi_2 + b$ е комплетен интеграл на ПДР

$$P\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q\,\frac{\partial z}{\partial y} = R, \tag{2}$$

каде што P,Q,R се дадени функции од x,y,z.

8.135. Да се најде а) општ, б) комплетен интеграл на ПДР

$$(x^2-y^2-z^2)p + 2xyq = 2xz.$$

8.136. Нека M е произволна точка на една површина, P е нејзината ортогонална проекција на рамнината OXY, N е прободот на рамнината OXY со нормалата на површината во точката M и O е координатниот почеток.

а) Да се најде равенка на површините што го исполнуваат условот $\sphericalangle NOP = 45^\circ$.

б) Да се најде равенка на онаа интегрална површина што минува низ x-оската.

Користејќи смени на променливите во задачите 8.137-8.140, да се најде комплетен интеграл на дадената ПДР, имајќи предвид дека појавувањето на комбинацијата px во ПДР ја сугерира смената $X = \ln x$ (зашто, во тој случај $px = \partial z/\partial X$) и, аналогно $Y = \ln y$ кога се јавува qx, $Z = \ln z$ кога се јавува p/z.

8.137. $x^2p^2 + y^2q^2 = z$. 8.138. $x^2p^2 = z^2 - yzq$.

8.139. $p^2 + q^2 = z^2(x+y)$ (в. 8.118). 8.140. $x^4p^2 - yzq = z^2$.

Да се најде интегрална површина на дадената ПДР што минува низ назначената крива (8.141-8.142).

8.141. $p^2 + q^2 = 2$, $\{x = 0,\ z = y\}$.

8.142. $z = px + qy + \frac{pq}{4}$, $\{y = 0,\ z = x^2\}$.

8.143. Дадена е ПДР

$$z = px + qy - (p^2+q^2). \tag{1}$$

Знаејќи дека нејзин комплетен интеграл е (в. 8.122)

$$z = ax + by - (a^2+b^2) \tag{2}$$

да се најде сингуларен интеграл (ако постои).

8.144. Да се докаже дека: ако $z = u(x,y;a,b)$ е решение на ПДР $F(x,y,z,z_x,z_y) = 0$, коешто зависи од два параметра a и b, тогаш обвивката на која било еднопараметарска фамилија решенија, издвоена од $z = u(x,y;a,b)$ е, исто така, решение на дадената ПДР.

Да се искористи тоа за наоѓање нови решенија на ПДР: $pq = 1$ (ставајќи $b = ka$ во нејзиното решение $z = ax + y/a + b$, k = конст.).

Глава 9

ЛИНЕАРНИ ПДР ОД ВТОР РЕД

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ.9

9.1. Да се најде општо решение на хомогената ПДР од втор ред (без слободен член):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 12 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Потоа, да се издвои она решение $z=z(x,y)$ што ги задоволува условите

$$z(x,y)\big|_{y=0} = 7x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{2}$$

Решение. Карактеристичната равенка на (1) е

$$m^2 - m + 12 = 0,$$

чии корени се $m_1=4$ и $m_2=-3$, па

$$z = f(y+4x) + g(y-3x), \tag{3}$$

каде што f и g се произволни (двапати диференцијабилни) функции е општото решение на (1).

За да го најдеме партикуларното решение што ги задоволува почетните услови (2), ќе ги определиме функциите f и g така што тие да ги задоволуваат равенствата:

$$\begin{cases} z(x,0) = f(0+4x) + g(0-3x) = 7x^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=0} = f'(4x) + g'(-3x) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Откако ќе ја диференцираме по x првата од овие равенки, системот (4) може да се запише вака:

$$\begin{cases} 4f'(4x) - 3g'(-3x) = 14\,x, \\ f'(4x) + g'(-3x) = 0. \end{cases}$$

Го решаваме овој систем и добиваме $f'(4x)=2x$. Ставајќи $t=4x$, т.е. $x=t/4$, ќе имаме $f'(t) = 2\cdot\frac{t}{4} = \frac{t}{2}$, па

$$f(t) = \frac{t^2}{4} + C. \tag{5}$$

Заменуваме во првата равенка од (4), па:

$$g(-3x) = 3x^2 - C, \text{ т.е. } g(u) = \frac{u^2}{3} - C \quad (u=-3x) \tag{6}$$

Имајќи ги предвид (3),(5) и (6), за бараното партикуларно решение наоѓаме

$$z(x,y) = \frac{1}{4}(y+4x)^2 + \frac{1}{3}(y-3x)^2.$$

9.2. Да се најде општо решение на ПДР

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 6\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 9\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Од решенијата $z=z(x,y)$ да се издвои тоа што ги задоволува условите

$$z(0,y) = y^2, \quad z(x,0) = xe^{3x}. \tag{2}$$

Решение. Корените на карактеристичната равенка $m^2-6m+9=0$ се $m_1=3=m_2$, па општо решение на (1) е

$$z = f(y+3x) + x\cdot g(y+3x). \tag{3}$$

Заменувајќи ги условите (2) во (3) добиваме:

$$y^2 = f(y), \quad xe^{3x} = f(3x) + xg(3x).$$

Значи, $f(t) = t^2$, $f(3x) = 9x^2$, па

$$xe^{3x} = 9x^2 + x\cdot g(3x),$$

од каде што $g(3x) = e^{3x}-9x$, $g(u) = e^u-3u$ $(u=3x)$. Според тоа,

$$f(y+3x) = (y+3x)^2, \quad g(y+3x) = e^{y+3x} - 3(y+3x),$$

па решението од (3) што ги задоволува условите (2) е

$$z = y^2 + 3xy + xe^{y+3x}.$$

9.3. Да се покаже дека еден партикуларен интеграл на ПДР

$$\frac{\partial z}{\partial x} - m\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y) \tag{1}$$

(каде што m е константа, а $h(x,y)$ е дадена функција) може да се најде со интегрирање на $dz=h(x,c-mx)dx$, испуштајќи ја интеграционата константа, а потоа заменувајќи ја c со $y+mx$.

Да се искористи оваа постапка за ПДР

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 4\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(5x+2y) \tag{2}$$

Решение. Помошниот симетричен систем на (1) е

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{h(x,y)}. \tag{3}$$

Од првите два односа во (3) добиваме $dy=-mdx$, т.е. $y+mx=c$. Користејќи го тоа, пак од (3), имаме:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{h(x,c-mx)}, \text{ па } z = \int h(x,c-mx)\,dx; \tag{4}$$

бидејќи тука не треба да е вклучена никаква произволна константа, во решението ја заменуваме с со $y+mx$.

Да забележиме дека со ознаките $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D' = \frac{\partial}{\partial y}$, ПДР (1) може да се запише во обликот

$$(D-mD')z = h(x,y); \tag{1*}$$

значи, едно нејзино партикуларно решение се добива од:

$$z = \int h(x,c-mx)\,dx, \tag{4*}$$

откако, по интегрирањето, константата с се замени со $y+mx$.

За дадената ПДР: $(D-4D')z = \sin(5x+2y)$ имаме $m=4$, $h(x,y) = \sin(5x+2y)$, па

$$\begin{aligned} z &= \int \sin(5x+2\cdot(c-4x))\,dx = \\ &= \int \sin(2c-3x)\,dx = \frac{1}{3}\cos(2c-3x); \end{aligned}$$

заменувајќи ја с со $y+4x$ го добиваме бараното партикуларно решение $z = \frac{1}{3}\cos(5x+2y)$.

9.4. Да се најде општо решение на хомогената ПДР од втор ред (со слободен член):

$$(D^2-DD'-12D'^2)z = 2y + e^{3x+y} \tag{1}$$

$(D = \frac{\partial}{\partial x}, D' = \frac{\partial}{\partial y})$.

Решение. Корените на карактеристичната равенка $m^2-m-12=0$ на соодветната ПДР без слободен член, $(D^2-DD'-12D'^2)z=0$, се $m_1=-3$, $m_2=4$, па комплементарната функција на (1) е $z_o = f(y-3x) + g(y+4x)$.

За да најдеме партикуларен интеграл, ПДР (1) ќе ја напишеме во обликот

$$(D+3D')(D-4D')z = 2y + e^{3x+y},$$

па нејзин партикуларен интеграл ќе биде

$$\frac{1}{(D+3D')(D-4D')}(2y+e^{3x+y});$$

од $(D-4D')u = 2y + e^{3x+y}$, според постапката од зад. 9.3, го добиваме решението

$$u = \int[2(c-4x) + e^{3x+(c-4x)}]dx = \int(2c-8x+e^{c-x})dx = 2cx - 4x^2 - e^{c-x},$$

$$u = 2(y+4x)x - 4x^2 - e^{y+4x-x} = 2xy + 4x^2 - e^{3x+y};$$

од $(D+3D')z = u = 2xy + 4x^2 - e^{3x+y}$ го добиваме решението

$$z = \int[2x(c+3x) + 4x^2 - e^{3x+c+3x}]dx = cx^2 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{6}e^{6x+c},$$

$$z_p = (y-3x)x^2 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{6}e^{6x+y-3x} = x^2y + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}e^{3x+y}.$$

Општото решение на (1) ќе биде $z = z_o + z_p$:

$$z = f(y-3x) + g(y+4x) + x^2y + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}e^{3x+y}.$$

9.5. Да се реши следнава нехомогена ПДР (без слободен член):

$$(a_1D+b_1D'+c_1)(a_2D+b_2D'+c_2)z = 0 \qquad (1)$$

каде што a_i, b_i, c_i се дадени броеви (барем еден од c_1, c_2 не е нула).

Решение. Една нехомогена линеарна ПДР со константни коефициенти се вика редуцибилна, ако нејзината лева страна може да се претстави како производ од множители, линеарни по D, D'. Дадената ПДР (1) е редуцибилна. Секое решение на ПДР

$$(a_iD + b_iD' + c_i)z = 0 \qquad (2)$$

е решение и на (1); решавањето на (1) се сведува на решавање на двете линеарни ПДР од прв ред, од обликот (2) $(i=1,2)$.

Помошниот симетричен систем на (2) е:

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} = \frac{dz}{-c_iz} \qquad (3)$$

Еден прв интеграл на (3) е $a_iy-b_ix=A$. Ако $a_i\neq 0$, тогаш од $dz/(-c_iz) = dx/a_i$ добиваме уште еден прв интеграл на (3): $z\cdot e^{c_ix/a_i}=B$. Според тоа,

$$z = e^{-c_ix/a_i}\cdot f(a_iy-b_ix) \qquad (4)$$

е општо решение на (2). Ако, пак, $b_i\neq 0$, од $dz/(-c_iz)=dy/b_i$ добиваме $ze^{c_iy/b_i}=C$, па општото решение на (2) може да се напише во обликот

$$z = e^{-c_iy/b_i}\cdot f_1(a_iy-b_ix). \qquad (4')$$

Така, ако двата множитела на (1) се линеарно независни (т.е. ако едниот не е содржател на другиот), општото решение на (1) се добива како збир на две произволни функции од обликот (4) или (4´), т.е. (на пример, при $a_1\neq 0$ и $b_2\neq 0$):

$$z = e^{-c_1x/a_1}f(a_1y-b_1x) + e^{-c_2y/b_2}g(a_2y-b_2x). \tag{5}$$

9.6. Да се најде општо решение на следнава нехомогена линеарна ПДР (со слободен член):

$$(D+2D')(D-3D'+2)z = ye^{-x} + 9xe^{y}. \tag{1}$$

Решение. Општото решение на (1) се добива како збир на комплементарната функција z_o на (1), т.е. општото решение на соодветната ПДР без слободен член

$$(D+2D')(D-3D'+2)z = 0 \tag{2}$$

и едно партикуларно решение z_p на (1), т.е. $z = z_o + z_p$.

Постапувајќи како во зад. 9.5 (или користејќи ја формулата (5) директно), ја добиваме комплементарната функција на (1):

$$z_o = f(y-2x) + e^{-2x}g(y+3x). \tag{3}$$

За да го пресметаме $\frac{1}{(D+2D')(D-3D'+2)}(ye^{-x})$, ќе ја решиме, прво, ПДР $(D-3D'+2)u = ye^{-x}$.

Помошниот симетричен систем за неа е

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-3} = \frac{du}{ye^{-x}-2u}.$$

Веднаш добиваме $y+3x=c$ и равенката

$$\frac{du}{ye^{-x}-2u} = \frac{dx}{1},\quad \text{т.е.}\quad \frac{du}{dx} + 2u =[ye^{-x} =](c-3x)e^{-x}$$

(која е линеарна); множејќи ја со e^{2x}, добиваме $(ue^{2x})' = (c-3x)e^{x}$, т.е. $ue^{2x}=\int(c-3x)e^{x}dx=(c-3x+3)e^{x}$, па $u=(c-3x+3)e^{-x}$; по $c=y+3x$ добиваме $u=(y+3)e^{-x}$.

Потоа ја решаваме ПДР: $(D+2D')z=u=(y+3)e^{-x}$, добивајќи партикуларен интеграл како во зад. 9.3 (ставајќи $y=c+2x$):

$$z = \int(c+2x+3)e^{-x}dx = -(c+2x+5)e^{-x},$$

$$z = -(y+5)e^{-x}. \tag{4}$$

За да го пресметаме изразот $\frac{1}{(D+2D')(D-3D'+2)}(9xe^{y})$, ќе постапиме како погоре.

Ја решаваме ПДР $(D-3D'+2)u=9xe^y$; од помошниот систем $dx/1= =dy/(-3)=du/(9xe^y-2u)$ добиваме $y+3x=c$ и (обичната) ДР

$$\frac{du}{dy} = \frac{2}{3}u - 3xe^y, \quad \text{т.е.} \quad \frac{du}{dy} - \frac{2}{3}u = (y-c)e^y,$$

чие решение е $u=(3y-3c-9)e^y$, т.е. $u=-9(x+1)e^y$.

Решавајќи ја, сега, ПДР: $(D+2D')z=u=-9(x+1)e^y$, го добиваме бараниот партикуларен интеграл:

$$z = -9\int (x+1)e^{c-3x}dx = (3x+4)e^{c-3x},$$

$$z = (3x+4)e^y. \tag{5}$$

Од (4) и (5) добиваме партикуларно решение на (1):

$$z_p = (3x+4)e^y - (y+5)e^{-x}, \tag{6}$$

па општото решение на (1) се добива како збир на (3) и (6):

$$z = z_o + z_p = f(y-2x) + e^{-2x}g(y+3x) + (3x+4)e^y - (y+5)e^{-x}.$$

9.7. Да се реши следнава (иредуцибилна) равенка:

$$(D^2+D')z = e^{3x+2y}. \tag{1}$$

Решение. Општото решение на (1) се добива како збир на комплементарната функција z_o и еден партикуларен интеграл z_p на (1).

Да ја најдеме комплементарната функција z_o, т.е. општото решение на соодветната ПДР без слободен член:

$$F(D,D')z \equiv (D^2+D')z = 0. \tag{2}$$

Оваа равенка е иредуцибилна (т.е. нејзината лева страна не може да се претстави како производ на два множитела, линеарни по D и D'). Решение на (2) бараме во обликот $z=ce^{ax+by}$, каде што a,b,c се константи. Заменувајќи во (2), добиваме $cF(a,b)e^{ax+by}=0$. Според тоа, $z=ce^{ax+by}$ е решение на (2) ако

$$F(a,b) = 0, \quad \text{т.е.} \quad a^2 + b = 0 \tag{3}$$

(при c произволно). Постојат безброј многу парови (a_i,b_i) што ја задоволуваат (3): $a=a_i$, $b_i=-a_i^2$; за општо решение на иредуцибилни равенки каква што е (2) се зема

$$z_o = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x+b_i y} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x-a_i^2 y}, \tag{4}$$

каде што a_i и c_i се произволни константи.

Партикуларен интеграл z_p на (1) бараме во обликот: $z_p=Me^{3x+2y}$, каде што M е константа што треба да се определи; имаме:

$$F(D,D')z_p = (D^2+D')(Me^{3x+2y}) = (3^2+2)Me^{3x+2y},$$

па изедначувајќи ја десната страна со e^{3x+2y}, добиваме $M = \frac{1}{11}$, т.е. $z_p = \frac{1}{11}\cdot e^{3x+2y}$. (Уочи дека $F(a,b) = F(3,2) = 3^2+2 = 11 \neq 0$.) Општото решение на (1) е:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x - a_i^2 y} + \frac{1}{11}\cdot e^{3x+2y}.$$

9.8. Да се реши следнава (иредуцибилна) равенка

$$F(D,D')z \equiv (D^2+D')z = 2e^{x-y}. \tag{1}$$

Решение. Комплементарната функција на (1) е најдена во зад. 9.7. Бараме партикуларен интеграл во обликот

$$z_p = (Mx+Ny)e^{x-y} \tag{2}$$

каде што M и N се константи што треба да се определат. (Тука, z_p не може да се бара во обликот $Me^{\alpha x+\beta y}$, зашто $F(\alpha,\beta)=F(1,-1)=1^2-1=0$). Имаме:

$$D'z_p = (N-Mx-Ny)e^{x-y},\quad D^2z_p = (2M+Mx+Ny)e^{x-y},$$
$$(D^2+D')z_p = (2M+N)e^{x-y}, \tag{3}$$

па изедначувајќи ја десната страна на (3) со $2e^{x-y}$, добиваме

$$2M + N = 2.$$

Ставајќи M=1, N=0, добиваме $z_p=xe^{x-y}$; ставајќи M=0, N=2 добиваме $z_p=2ye^{x-y}$; итн. Избирајќи го, на пример, прводобиениот партикуларен интеграл, за општото решение на (1) добиваме

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x - a_i^2 y} + xe^{x-y}.$$

9.9. Да се определат областите на хиперболичност, параболичност и елиптичност на ПДР

$$(y^2-1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (x^2-1)u_{yy} - y(u_x)^3 = 0, \tag{1}$$

каде што $u=u(x,y)$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ итн.

Решение. Една ПДР од втор ред, линеарна по вторите изводи,

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{2}$$

каде што F е дадена функција од наведените аргументи, а A,B,C се дадени функции од x и y, со непрекинати втори изводи во некоја област G (и барем една од нив не е нулта), се класифицира според дискриминантата B^2-AC, како равенка од:

-хиперболичен тип, ако $B^2-AC > 0$,

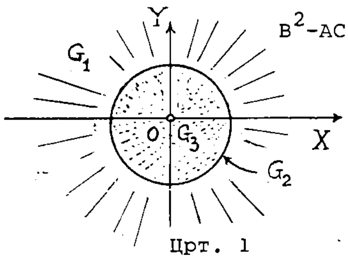
-параболичен тип, ако $B^2-AC = 0$,

-елиптичен тип, ако $B^2-AC < 0$.

Во случаите кога B^2-AC го менува знакот во областа G, за ПДР (2) велиме дека е од мешан тип.

За дадената ПДР (1) имаме:

$$B^2-AC = (xy)^2 - (y^2-1)(x^2-1) = x^2+y^2-1,$$



Црт. 1

па значи, таа е од:

-хиперболичен тип во G_1: $x^2+y^2-1 > 0$,

-параболичен тип на G_2: $x^2+y^2-1 = 0$,

-елиптичен тип во G_3: $x^2+y^2-1 < 0$

(црт. 1). Следствено, ПДР (1) во рамнината Oxy е од мешан тип.

9.10. Да се доведе во каноничен облик ПДР

$$u_{xx} - 2x\cdot u_{xy} + x^2\cdot u_{yy} - u_x - u_y = 0 \qquad (1)$$

($u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ итн.).

Решение. Бидејќи $B^2-AC=(-x)^2-1\cdot x^2=0$ (в.зад. 9.9), равенката (1) е од параболичен тип (во целата рамнина Oxy).

Равенката на карактеристиките, $Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$, за ПДР (1) е

$$dy^2 + 2xdxdy + x^2dx^2=0, \quad \text{т.е.} \quad (dy+xdx)^2 = 0;$$

решение на равенката $dy+xdx=0$ е

$$y + \frac{x^2}{2} = C_1.$$

Ќе извршиме смена на променливите:

$$\xi = \frac{x^2}{2} + y, \quad \eta = x \qquad (2)$$

(η ја избираме произволно, но така што јакобијанот $\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$ да не е нула):

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = x \cdot u_\xi + u_\eta;$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi;$$
$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot u_\xi + u_\eta) = u_\xi + x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi) + \frac{\partial}{\partial x}(u_\eta) =$$
$$= u_\xi + x \cdot (u_{\xi\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi\eta} \cdot \eta_x) + (u_{\eta\xi} \cdot \xi_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x) =$$
$$= u_\xi + x^2 u_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$
$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi) = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi\eta} \cdot \eta_x = xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta};$$
$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi) = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y = u_{\xi\xi}.$$

Добиените изрази за $u_\xi, u_{\xi\xi}, \ldots$ ги заменуваме во (1):

$$u_\xi + x^2 u_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2x \cdot (xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + x^2 u_{\xi\xi} + xu_\xi + u_\eta - u_\xi = 0;$$

по средувањето, имајќи предвид дека $x = \eta$, добиваме

$$u_{\eta\eta} = \eta u_\xi + u_\eta \tag{3}$$

- каноничен вид на (1).

9.11. Да се сведе на каноничен облик равенката:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{xx} - u_x + 2u_y = 0. \tag{1}$$

Решение. Дискриминантата на (1) е $B^2 - AC = (-2)^2 - 1 \cdot 5 = -1 < 0$, па (1) е од елиптичен тип. Равенката на карактеристиките е

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0, \text{ т.е. } \quad y'^2 + 4y' + 5 = 0,$$

од каде што $y' = -2 \pm i$, па добиваме две фамилии имагинарни карактеристики: $y + 2x - ix = C_1$, $y + 2x + ix = C_2$.

Воведуваме во (1) нови независнопроменливи:

$$\xi = y + 2x, \quad \eta = x: \tag{2}$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = 2u_\xi + u_\eta;$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi;$$
$$u_{xx} = 2 \cdot (u_{\xi\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi\eta} \cdot \eta_x) + (u_{\eta\xi} \cdot \xi_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x) =$$
$$= 4u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

работејќи како погоре, добиваме:

$$u_{xy} = 2 \cdot u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

Заменувајќи во (1), по средувањето, го добиваме каноничниот облик на (1):

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = u_{\eta}.$$

9.12. Со помош на методот на карактеристики, да се реши ПДР

$$4\cdot u_{xx} + 4\cos x\cdot u_{xy} - \sin^2 x\cdot u_{yy} - 2\sin x\cdot u_y = 0. \tag{1}$$

Решение. Решавањето на една ПДР по методот на карактеристики се состои во наоѓањето на карактеристиките и сведување на таа ПДР на канонничен облик; во некои случаи, каноничниот облик е доволно проста ПДР што може да се реши елементарно.

Равенката на карактеристиките на (1) е

$$4dy^2 - 4\cos x\cdot dxdy - \sin^2 x\cdot dx^2 = 0,$$

т.е. $(2dy+(1-\cos x)dx)\cdot(2dy-(1+\cos x)dx)=0$; таа се распаѓа на две обични ДР: $2dy+(1-\cos x)dx=0$ и $2dy-(1+\cos x)dx=0$, чии решенија се: $2y+x-\sin x=C_1$, $2y-x-\sin x=C_2$ - тоа се равенки на карактеристиките.

Ја воведуваме смената

$$\xi = 2y + x - \sin x,\ \eta = 2y - x - \sin x; \tag{2}$$

$$u_x = u_\xi\cdot\xi_x + u_\eta\cdot\eta_x = (1-\cos x)\cdot u_\xi - (1+\cos x)\cdot u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi\cdot\xi_y + u_\eta\cdot\eta_y = 2u_\xi + 2u_\eta;$$

работејќи како во зад. 9.10, наоѓаме:

$$u_{xx} + (u_\xi+u_\eta)\cdot\sin x + (1-\cos x)^2 u_{\xi\xi} + (2\cos^2 x-2)\cdot u_{\xi\eta} + + (1+\cos x)^2 u_{\eta\eta};$$

$$u_{xy} = (2-2\cos x)u_{\xi\xi} - 4\cos x\cdot u_{\xi\eta} + (-2-2\cos x)u_{\eta\eta};$$

$$u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}.$$

Добиените изрази за парцијалните изводи, по новите променливи, ги заменуваме во (1) и, по средувањето ќе ја добиеме ПДР

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

ПДР (3) може да се интегрира директно:

$$u_\xi = f_1(\xi), \quad u = \int f_1(\xi)d\xi + g(\eta),$$

каде што $f_1(\xi)$ и $g(\eta)$ се произволни (двапати диференцијабилни) функции. Ставајќи $f(\xi) = \int f_1(\xi)d\xi$, ќе имаме:

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

- општо решение на (3). Враќајќи се на смените (2), добиваме

$$u = f(2y+x-\sin x) + g(2y-x-\sin x)$$

- општо решение на (1).

9.13. Да се реши ПДР

$$x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

со методот на раздвојување на променливите.

Потоа, да се издвои она решение $u=u(x,y)$ што ги задоволува условите: (i) $u_x=-\cos 2y$ кога $x=a$ за сите y; (ii) $u \to 0$ кога $x \to \infty$.

Решение. Според методот на раздвојување на променливите (т.е. методот на Фурје) се бара решение на (1) во облик на производ од две функции, секоја од кои зависи само од една независнопроменлива. Значи, ставаме

$$u = F(x)\cdot G(x) = F\cdot G$$

и наоѓаме: $u_x=F'(x)\cdot G(y)=F'\cdot G$, $u_{xx}=F''G$, $u_y=F(x)\cdot G'(y)=F\cdot G'$, $u_{yy}=F\cdot G''$, а потоа заменуваме во (1):

$$x^2F''G + xF'G + FG'' = 0.$$

Делејќи ја оваа равенка со FG, по префрлањето на третиот собирок надесно, добиваме

$$x^2\cdot\frac{F''}{F} + x\cdot\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G}.$$

Левата страна е функција само од x, а десната - само од y. Бидејќи двете променливи се независни, следува дека секоја страна од последното равенство е еднаква на една иста константа; ќе земеме таа константа да е λ^2 (позитивна). На тој начин ги добиваме следниве две обични ДР:

$$x^2F'' + xF' - \lambda^2F = 0, \tag{2}$$

$$G'' + \lambda^2G = 0. \tag{3}$$

Равенката (2) е ојлеровска. Ставајќи во неа $F=x^r$ (r е константа што треба да се определи) и работејќи натаму како во зад. 3.14, добиваме општо решение на (2): $F=Ax^{\lambda}+Bx^{-\lambda}$. Општо решение на (3) е: $G=C\cos\lambda y+D\sin\lambda y$. Според тоа, бараното решение на (1) (најопшто од обликот $u=F\cdot G$) е

$$u = (Ax^{\lambda}+Bx^{-\lambda})(C\cos\lambda y+D\sin\lambda y) \qquad (4)$$

каде што A,B,C,D се произволни константи.

Да го најдеме решението што ги задоволува условите (i) и (ii). Од

$$u_x = (\lambda Ax^{\lambda-1}-\lambda Bx^{-\lambda-1})(C\cos\lambda y+D\sin\lambda y)$$

и условот (i) добиваме:

$$(\lambda Aa^{\lambda-1}-\lambda Ba^{-\lambda-1})(C\cos\lambda y+D\sin\lambda y) = -\cos 2y,$$

т.е. $(\lambda Aa^{\lambda-1}-\lambda Ba^{-\lambda-1})\cdot C\cos\lambda y = -\cos 2y$, $(\lambda Aa^{\lambda-1}-\lambda Ba^{-\lambda-1})D\sin\lambda y = 0$.

Од претпоследното равенство следува дека $\lambda=2$ и

$$(2Aa - 2Ba^{-3})C = 1, \qquad (5)$$

а од последното -

$$(2Aa - 2Ba^{-3})D = 0, \qquad (6)$$

кое е можно само ако $D=0$ (не е можно $2Aa-2Ba^{-3}=0$ поради (5)).

Од (4) и (ii) следува дека мора да е $A=0$, па од (5) добиваме $BC=a^3/2$. Така, добиваме:

$$\lambda = 2, \quad A = D = 0, \quad BC = a^3/2,$$

па од (4) го добиваме бараното партикуларно решение

$$u = \frac{1}{2}\, a^3x^{-2}\cos 2y.$$

<u>9.14</u>. Да се најде она решение на ПДР

$$x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

што ги задоволува следниве услови:

i) $u_x=-\cos 2y$ кога $x=a$ за секој y; ii) $u \to 0$ кога $x \to \infty$.

<u>Решение</u>. Задачава е решена во 9.13. Меѓутоа, обликот на бараното партикуларно решение е одреден од почетните услови честопати поедноставно отколку во општиот случај. Во дадениов случај, бараното решение мора, според i), да има облик

$$u = F(x)\cdot\cos 2y, \qquad (2)$$

каде што $F=F(x)$ е непозната функција; неа ќе ја определиме така што (2) да биде решение на (1) и да ги задоволува условите i) и ii). Од (2) наоѓаме: $u_{xx} = F''(x)\cdot\cos 2y$, $u_{yy} = -4F(x)\cdot\cos 2y$; заменуваме во (1) и добиваме

$$x^2F''\cos 2y + 2xF'\cos 2y - 4F\cdot\cos 2y = 0,$$

т.е.
$$x^2\cdot F'' + 2x\cdot F' - 4F = 0. \qquad (3)$$

Општо решение на (3) е $F(x)=Ax^2+Bx^{-2}$ (в. (2) во зад. 9.13), па во (2):

$$u = (Ax^2 + Bx^{-2})\cos 2y. \qquad (4)$$

Произволните константи A и B ќе ги определиме од условите i) и ii). Од ii) и (4) следува дека мора да е $A=0$, а од $u_x=(2Ax-2Bx^{-3})\cos 2y$ и i), т.е. од $(2Aa-2Ba^{-3})\cos 2y = -\cos 2y$ следува дека (при $A=0$): $2Ba^{-3}=1$, т.е. $B=a^3/2$. Заменувајќи ги $A=0$ и $B=a^3/2$ во (4), го добиваме бараното решение $u = \frac{1}{2}\, a^3x^{-2}\cos 2y$.

9.15. Да се најде решението на ПДР:

$$u_{tt} = 9u_{xx} \text{ ако } u=x^2 \text{ и } u_t=2 \text{ кога } t=0.$$

Решение. Парцијалната ДР

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a>0) \qquad (1)$$

(т.е. $u_{tt}=a^2u_{xx}$) се вика равенка на слободно треперење на жица (или бранова равенка). Работејќи како во зад. 9.1, лесно наоѓаме дека

$$u = f(x-at) + g(x+at) \qquad (2)$$

е општо решение на (1).

За потполно определување на движењето на жицата треба да се зададе обликот и брзината на жицата во почетокот, т.е. положбата на нејзините точки и нивната брзина како функции од апсцисите x на тие точки:

$$u = \phi(x), \quad u_t = \psi(x) \quad \text{за} \quad t = 0 \qquad (3)$$

(наречени почетни услови на задачата). Избирајќи ги функциите f и g во (2) така што $u=u(x,t)$ да ги задоволува (3), работејќи како во зад. 9.1, се добива партикуларното решение на (1) во обликот

$$u = \frac{1}{2}\Big[\phi(x+at) + \phi(x-at)\Big] + \frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (4)$$

Во конкретниот случај имаме:

$$a = 3, \quad \phi(x) = x^2, \quad \psi(x) = 2,$$

па според (4) имаме:

$$u = \frac{1}{2}\left[(x+3t)^2 + (x-3t)^2\right] + \frac{1}{6}\cdot\int_{x-3t}^{x+3t} 2dz,$$

а по средувањето: $u = x^2 + 9t^2 + 2t$.

9.16. Да се најде формата на жица што се определува со равенката $u_{tt}=a^2u_{xx}$ во моментот $t = \frac{\pi}{2a}$, ако $u=\cos x$, $u_t=x$ кога $t=0$.

Решение. Имаме:

$$u = \frac{1}{2}[\cos(x+at) + \cos(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} z dz;$$

по средувањето, ќе добиеме

$$u(x,t) = \cos x\cdot\cos at + xt.$$

Во моментот $t = \frac{\pi}{2a}$ ќе имаме

$$u(x, \frac{\pi}{2a}) = \frac{\pi}{2a}\cdot x,$$

т.е. жицата во тој момент има форма на права.

9.17. Нека функцијата $u=V\cos n\theta$, каде што $V=V(r)$ е функција само од r и n е даден позитивен цел број, ја задоволува дводимензионалната лапласова равенка во поларни координати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{1}$$

Да се најде ДР што ја задоволува V, да се реши таа равенка и потоа да се определи решението $u=u(r,\theta)$ на (1) што ги задоволува условите: i) $u(r,\theta)$ има конечна вредност кога $r=0$; ii) $u_\theta=-n$ кога $r=a$ и $\theta=\pi/2n$.

Решение. Заменувајќи ги во (1) парцијалните изводи на $u=V\cos n\theta$: $u_r=V'\cos n\theta$, $u_{rr}=V''\cos n\theta$, $u_{\theta\theta}=-n^2V\cos n\theta$, ја добиваме ДР

$$r^2V'' + rV' - n^2V = 0. \tag{2}$$

Равенката (2) е ојлеровска; општо решение на (2) е $u=Ar^n+Br^{-n}$, па најопшто решение на (1) од обликот $u=V\cos n\theta$ е

$$u = (Ar^n + Br^{-n})\cos n\theta. \tag{3}$$

Според условот i), во (3) мора да е $B=0$; од $u_\theta=-nAr^n\sin n\theta$ (земено е $B=0$) и условот ii) добиваме $-nAa^n\sin\frac{n\pi}{2n} = -n$, т.е. $A=a^{-n}$. Значи, бараното партикуларно решение на (1) е

$$u = a^{-n}r^n\cos n\theta.$$

<u>ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ.9</u>

<u>9.18</u>. Да се провери дали функцијата $u(r,\theta)=(Ar^n+B/r^n)\cos n\theta$, каде што A,B се произволни константи и n е цел број, е решение на ПДР

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

<u>9.19</u>. Да се покаже дека функцијата $u(r,t) = \frac{1}{r}\cdot f(ct+r)+g(ct-r)$, f и g - произволни, двапати диференцијабилни функции, ја задоволува равенката $u_{tt} = c^2(u_{rr}+2u_r/r)$.

<u>9.20</u>. Ако $u=G\cdot\sin x$ е решение на равенката $u_y=4u_{xx}$, каде што G е функција само од y, да се најде ДР за G и да се реши.

Парцијална ДР (по некоја функција $u=u(x,y)$), која содржи изводи само по една променлива може да се реши како обична ДР, сметајќи ја другата независнопроменлива како параметар. Да се реши ПДР (9.21-9.24):

<u>9.21</u>. $u_{xx} = 0$. <u>9.22</u>. $u_{xx} + 4u = 0$.

<u>9.23</u>. $u_{yy} - 5u_y = 0$. <u>9.24</u>. $u_{xx} - 3u_x + 2u = 0$.

<u>9.25</u>. а) $u_{xy} = 0$. б) $u_{xy} = 2$.

Ставајќи $u_x=p$ ($u_y=q$) да се решат ПДР 9.26-9.28.

<u>9.26</u>. $u_{xy} = u_x$. <u>9.27</u>. $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$.

<u>9.28</u>. $u_{xx} + \frac{1}{x}\cdot u_y - 3x + 2y = 0$.

<u>9.29</u>. Да се реши системот ПДР ($u=u(x,y)$):

а) $\{u_{xx}=0,\ u_{yy}=0\}$; б) $\{u_{xx} = 0,\ u_{xy}=0,\ u_{yy}=0\}$.

<u>9.30</u>. Докажи дека секоја ПДР

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0$$

(a,b,c - константи) со смената $z=ue^{\alpha x+\beta y}$, каде што α,β се константи (што треба да се изберат) и $u=u(x,y)$ е нова функција, може да се сведе на ПДР

$$u_{xx} + ku = 0 \qquad (k=\text{конст}).$$

Користејќи ги назначените смени, да се трансформираат дадените ПДР и потоа да се решат (9.31-9.34).

9.31. $u_{xy} - u_{yy} = 0$; $\xi=x$, $\eta=x+y$.

9.32. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{xx} = 0$; $\xi=x$, $\eta=x+y$.

9.33. $xu_{xx} - yu_{xy} - u_x = 0$; $\xi=xy$, $\eta=y$.

9.34. $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$; $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$, $w=w(u,v)$.

9.35. Нека $u=r^n\cdot V(\theta)$ е решение на ПДР

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Да се најде ДР за V и таа да се реши.

Да се решат хомогените линеарни ПДР од втор ред 9.36-9.39.

9.36. $(D+2D')(D-3D')z = 0$.

9.37. $(D^2-aDD'-6a^2D'^2)z = 0$.

9.38. $(D^2+6DD'+5D'^2)u = 0$.

9.39. $(D^2-2aDD'+a^2D'^2)u = 0$.

9.40. Да се најдат решенијата на ПДР $z_{tt}=a^2z_{xx}$ што ја задоволуваат и ПДР $(z_t)^2=a^2(z_x)^2$; $z=z(x,t)$.

Да се реши дадената ПДР и потоа да се издвои решението што ги задоволува наведените услови (9.41-9.46).

9.41. $(D^2-2DD'+D'^2)z = 0$; $z(0,y)=4y^2$, $z(x,0) = 3x^2$.

9.42. $(D^2+2DD'-3D'^2)z = 0$; $z = 3x^2$, $z_y = 0$ за $y = 0$.

9.43. $(D^2-4D'^2)z = 0$; $z = \sin x$, $z_y = \frac{3}{2}\cdot\cos x$ за $y=0$.

9.44. $(D^2-4D'^2)z = 0$; $z=z_x=\sin x$ кога $y=0$.

9.45. $u_{tt} = a^2u_{xx}$; $u = \phi(x)$, $u_t = \psi'(x)$ кога $t=0$, при што $\phi(x)$ и $\psi(x)$ се дадени функции од x.

9.46. $(D^2+D'^2-2DD')z = 0$; $bz = y^2$ за $x=0$ и $az=x^2$ за $y=0$.

Да се решат нехомогените ПДР 9.47-9.51.

9.47. $(D^2-DD'+D-D')z = 0.$

9.48. $(D^2+4DD'-5D'^2+D-D')z = 0$, т.е.
$(D-D')(D+5D'+1)z = 0.$

9.49. $(D^2-D'^2+3D-3D')z = 0.$

9.50. $(D^2-4DD'+3D'^2-4D+8D'+4)z = 0.$

9.51. $(2D^2-5DD'+3D'^2+2D'-8)z = 0$, т.е.
$(2D-3D'+4)\cdot(D-D'-2)z = 0.$

9.52. Да се најде решение на ПДР

$$u_{xx} - u_{tt} + 2au_x = 0,$$

каде што a е позитивна константа, од обликот $u=F(x)\cdot\sin at$, ако $u=0$ кога $x=0$ за сите вредности на t, а $u=1/ae$. Потоа да се најде екстремумот на добиеното решение во моментот $t = \pi/6a$.

9.53. Да се најде равенката на површината што ја задоволува ПДР $z_{xy}=1$ и чиј пресек со рамнината Oxy е хиперболата $xy=c^2$.

9.54. Користејќи ја постапката од зад. 9.3, да се најде партикуларен интеграл на ПДР:

а) $(D+3D')z = \cos(2x+y)$;

б) $(D-2D')z = (y+1)e^{3x}$.

Да се решат следните хомогени линеарни ПДР (со слободен член) 9.55-9.61.

9.55. $(D^2-2DD'-8D'^2)z = 2x + y.$

9.56. $(D^2-D'^2)z = x^2 - y^2.$

9.57. $(D^2-DD')z = \cos x\cdot\cos 2y.$

9.58. $(D^2+3DD'+2D'^2)z = x + y.$

9.59. $u_{tt} - a^2u_{xx} = E\sin px.$

9.60. $(D^2-3DD'+2D'^2)z = 2\cdot e^{3x+4y}.$

9.61. $(D^2+D'^2)u = xy.$

Да се решат нехомогените линеарни ПДР (со слободен член) 9.62-9.63.

9.62. $(D^2-DD'+D)z = x^2 + y^2$.

9.63. $(D^2-D'^2+3D+3D')z = e^{x+2y}$.

9.64. Да се определи областа на хиперболичност, параболичност, елиптичност на ПДР:

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x = 0$.

б) $x^2u_{xx} + 2xy + y^2u_{yy} = 0$.

в) $x^2u_{xx} - 2y\cdot u_{xy} + u_{yy} - u_y = 0$.

Да се сведат на канoничен облик ПДР 9.65-9.69.

9.65. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

9.66. $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$.

9.67. $u_{xx} + 2\cos x\cdot u_{xy} + (\cos^2 x-9)\cdot u_{yy} - \sin x\cdot u_y = 0$.

9.68. $u_{xx} - 2x\cdot u_{xy} + x^2\cdot u_{yy} - 2u_y = 0$.

9.69. $\sin^2 x\cdot u_{xx} - 2y\sin x\cdot u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

Со помош на методот на каракеристики, да се решат ПДР 9.70-9.75.

9.70. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

9.71. $x\cdot u_{xx} - y\cdot u_{xy} - u_x = 0 \quad (y > 0)$.

9.72. $x^2u_{xx} + 2xy\cdot u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

9.73. $u_{xx} + 2\cos x\cdot u_{xy} - (8+\sin^2 x)u_{yy} - \sin x\cdot u_y = 0$.

9.74. $x\cdot u_{xx} + y\cdot u_{yy} = 0$.

9.75 $x\cdot u_{xx} - y\cdot u_{yy} + \frac{1}{2}\cdot(u_x-u_y) = 0 \quad (x,y > 0)$.

Со методот на раздвојување на променливите (т.е. барајќи решение од обликот $u=F(x)\cdot G(y)$) да се решат ПДР 9.76-9.79.

9.76. $u_{xx} - u_{xy} = 0$. 9.77. $x^2u_{xy} + 3y^2u = 0$.

9.78. $u_{xx} + u_{yy} = 0$. 9.79. $u_{xx} + u_{yy} = au \quad (a > 0)$.

9.80. Да се најде решение од обликот $u=f(x)+g(y)$ на ПДР:

а) $u_{xx} - u_{xy} = 0$; б) $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Дадените ПДР да се решат со методот на раздвојување на променливите (т.е. да се најде решение од обликот $u=F(x)\cdot G(y)$) и да се издвојат решенијата што ги задоволуваат назначените услови (9.81-9.86).

9.81. $u_{xx} + yu_y + y^2u_{yy} = 0$; $u_y = -\cos x$ кога $y=2$ за сите x; $u \to 0$ кога $y \to \infty$.

9.82. $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u = \sin x$ кога $y=0$; $u=0$ кога $x=\pm\pi$; $u \to 0$ кога $y \to \infty$.

9.83. $u_{xy} - u = 0$; $u=1$, $u_y=3$ при $x=2$ и $y=0$.

9.84. $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $F(x)$ е тригонометриска функција; u е конечна кога $y\to\infty$; $u_x=0$ кога $x=0$ и кога $x=3$ за секој y; $u=2\cos(2\pi x/3)$ кога $y=0$ за секој x.

9.85. $u_{xx} + u_{yy} + 6u_y + 9u = 0$; u е периодична по x; $u=0$ кога $y=0$ за секој x; $u_{xy} = 6\cos 3x$ кога $y=0$ за секој y.

9.86. $u_{xx} = u_y + 2u$; $u=0$ и $u_x=1+e^{-3y}$ кога $x=0$ за која било вредност на y.

9.87. Во зад. 9,81, 9,82, 9.84 и 9.85 да се најде партикуларно решение во облик што е предодреден од зададените услови(како во зад. 9.14).

9.88. Струјата I во еден кабел ја задоволува ПДР

$$I_{xx} = \frac{2}{k}\cdot I_t + I.$$

Да се најде решението $I = I(x,t)$ што ги задоволува почетните услови: $I=0$ кога $x=\ell$, а $I_x = -ae^{-kt}$ кога $x=0$.

Решението да се бара во облик: а) $I = e^{-kt}F(x)$; б) $I = F(x)\cdot G(y)$.

9.89. Да се најде решението на дадената бранова равенка при назначените услови:

а) $u_{tt} = u_{xx}$; $u=x$, $u_t=2x$ за $t=0$.

б) $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u=0$, $u_t=\cos x$ за $t=0$.

9.90. Да се најде формата на жица што се определува со равенката $u_{tt} = 4u_{xx}$ во моментот $t = \pi/4$, ако $u = \sin x$ и $u_t = 1$ кога $t=0$.

9.91. Да се најде формата на жица што се определува со равенката $u_{tt} = u_{xx}$ во моментот $t = \pi$, ако $u = \sin x$ и $u_t = \cos x$ за $t=0$.

9.92. Да се покаже дека лапласијанот*)

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (=u_{xx}+u_{yy}) \tag{1}$$

во поларни координати ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$) има облик

а) $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, т.е.

б) $\nabla^2 u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

в) Да се трансформира а) во (1) ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$).

9.93. Да се покаже дека: ако u не зависи од θ, тогаш изразот а) во зад. 9.92 станува: $\nabla^2 u=u_{rr}+u_r/r$.

Овој резултат да се изведе и директно од лапласијанот во декартови координати, претпоставувајќи дека u не зависи од θ.

9.94. Ако x,y се декартови координати, покажи дека и

$$\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad \eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

(α - даден агол) се декартови координати. Покажи дека лапласијанот $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ се трансформира во $\nabla^2 u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

9.95. Да се изрази $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ со помош на координатите $\xi = ax+b$, $\eta = cy+d$, каде што x,y се декартови координати.

9.96. Да се покаже дека $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2)+b$ ја задоволува лапласовата равенка $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Да се определат константите a и b така што u(x,y) да ги задоволува граничните услови: u=0 на кружницата $x^2+y^2=1$ и u=3 на $x^2+y^2=4$.

9.97. Покажи дека единственото решение на лапласовата равенка $u_{xx} + u_{yy} = 0$ што зависи само од $r = \sqrt{x^2+y^2}$ е $u=a\ln r+b$ (a и b се константи).

9.98. Да се покаже дека лапласијанот

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{*}$$

се трансформира со цилиндричните координати r,θ,z ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $z=z$) во изразот

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}\cdot u_r + \frac{1}{r^2}\cdot u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

*) За лапласијанот се употребува и симболот Δ (наместо ∇^2).

9.99. Нека r,θ,ψ се сферни координати,

$$x = r\cos\theta.\sin\psi, \quad y = r\sin\theta\cdot\sin\psi, \quad z = r\cos\psi.$$

и нека $u=u(x,y,z)$ зависи само од $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Покажи дека лапласијанот (*), зад. 9.98, се трансформира во $\nabla^2 u = u_{rr} + 2\cdot u_r/r$.

9.100. Покажи дека лапласијанот (*), зад. 9.98, во сферни координати r,θ,ψ (в. 9.99; изрази ги преку x,y,z) се трансформира во:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}\cdot u_r + \frac{1}{r^2}\cdot u_{\psi\psi} + \frac{\mathrm{ctg}\psi}{r^2}\cdot u_\psi + \frac{1}{r^2\sin^2\psi}\cdot u_{\theta\theta},$$

т.е. $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\cdot\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}(\sin\psi\cdot\frac{\partial u}{\partial\psi}) + \frac{1}{\sin^2\psi}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$

9.101. а) Покажи дека $u=c/r$ (c=конст., $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) ја задоволува лапласовата равенка $\nabla^2 u = 0$ во поларни координати (в. 9.100).

б) Покажи дека единственото решение на ПДР: $\nabla^2 u = 0$ (во поларни координати) што зависи само од r е $u=c/r+k$ (c,k - константи).

9.102. Нека функцијата $u = f(r)\cdot\cos\psi$ ја задоволува ПДР

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{\partial}{\partial\psi}(\sin\psi\cdot\frac{\partial u}{\partial\psi}) = 0 \tag{1}$$

Да се најде ДР што ја задоволува $f(r)$ и таа да се реши. Да се најде решението $\underline{u}$ на (1) што ги задоволува условите: $u_r = \cos\psi$ кога $r=a$, $u_r = 0$ кога $r \to \infty$.

* * *

Да се најде општ интеграл на ПДР 9.103-9.107

9.103. $(D^3-D^2D'-4DD'^2+4D'^3)z = 0.$

9.104. $(D^3+8D^2D'+13DD'^2+6D'^3)z = 0.$

9.105. $(D^4-2D^2D'^2+D'^4)z = 0.$

9.106. $(D^3+D^2D'-DD'^2-D'^3)z = e^x\cos 2y.$

9.107. $(D^3+2D^2D'-DD'^2-2D'^3)z = (y+2)e^x.$

9.108. Нека функцијата u ја задоволува ПДР

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

каде што $\nabla^2 u$ е изразот во б), зад. 9.92 и k е константа. Покажи дека $u = r^{-1/2}f(r)\cos(\theta/2)$ е решение на (1) ако $f(r)$ задоволува некоја (обична) ДР.

Најди ја најопштата таква функција $f(r)$.

Најди го решението $u(x,\theta)$ од горниот облик што ги задоволува следниве два услова: $u=0$ кога $r=a$; $u=\cos(\theta/2)$ кога $r=b$ за која било вредност на θ.

9.109. Да се испитаат за сите вредности на константата a, реалните решенија на ПДР

$$u_{xx} = c^2 u_t \qquad (c > 0)$$

што имаат форма $u=e^{at}f(x)$. Ако $c \neq k\pi$ (k=цел број), покажи дека тогаш постои решение на равенката кое останува конечно кога $t \to \infty$, кое е 0 кога $x=0$ и кое ја добива вредноста e^{-t} кога $x=1$. Да се најде тоа решение.

Г л а в а 10

ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 10

10.1. Да се покаже дека е оригинал следнава функција:

$$f(t) = e^{2t}.$$

Решение. Една функција $f(t)$, од реалниот аргумент t, се вика оригинал, ако:

i) $f(t)$ е непрекината по делови во интервалот $0 \le t < +\infty$ (т.е. $f(t)$ е непрекината на тој интервал или на секој конечен подинтервал од $[0,+\infty)$ има конечен број прекини од прв вид) и

ii) $f(t)$ има ограничен раст (т.е. постои реален број s_o (наречен показател на растот на $f(t)$), таков што несвојствениот интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt \qquad (1)$$

е конвергентен за секој $s > s_o$, а дивергентен за секој $s < s_o$.

(Ако (1) конвергира за сите реални s, тогаш показателот на растот s_o се смета за еднаков со $-\infty$; ако, пак, (1) дивергира за секој реален број s, тогаш се става $s_o = +\infty$ и се вели дека $f(t)$ има неограничен раст.)

Оригиналот $f(t)$, определен во интервалот $0 \le t \le +\infty$, се продолжува за сите негативни t ставајќи

iii) $f(t) = 0$ за $-\infty < t < 0$.

Дадената функција $f(t) = e^{2t}$ е непрекината во интервалот $[0,+\infty)$, а за интегралот (1) имаме:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}|f(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{2t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t}dt.$$

Последниот интеграл е конвергентен за $s > 2$:

$$-\frac{1}{s-2}\cdot e^{-(s-2)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-2},$$

а е дивергентен за $s \le 2$. Значи, $f(t) = e^{2t}$ е оригинал со показател на растот $s_o = 2$.

10.2. Да се испита дали е оригинал функцијата

$$f(t) = e^{(3+2i)t}$$

и да се најде показателот на растот.

Решение. Една комплексна функција $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ од реалниот аргумент t е оригинал ако ги исполнува условите i) и ii) од зад. 10.1; притоа, условот i) треба да го исполнуваат и реалниот дел $f_1(t)$ и имагинарниот дел $f_2(t)$. Оригиналот $f(t)$ се дефинира за негативните t ставајќи: $f(t) = 0$ за $-\infty<t<0$.

За дадената функција имаме:

$$f(t) = e^{3t}\cdot e^{2it} = e^{3t}(\cos 2t+i\sin 2t);$$

јасно е дека $f_1(t)=e^{3t}\cos 2t$ и $f_2(t)=e^{3t}\sin 2t$ се непрекинати на интервалот $[0,+\infty)$, а за (1) од 10.1 имаме:

$$\int_0^\infty e^{-st}|e^{(3+2i)t}|dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{3t}|e^{2it}|dt = \int_0^\infty e^{-(s-3)t}dt.$$

Последниот интеграл е конвергентен за секој $s>3$, а е дивергентен за $s\le 3$. Значи, $f(t)=e^{(3+2i)t}$ е оригинал со показател на растот $s_o=3$.

10.3. Да се испита дали е оригинал

$$f(t) = e^{t^3}.$$

Решение. Имаме: $\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{t^3}dt$. Бидејќи

$$e^{t^3} > e^{st}, \quad \text{т.е.} \quad e^{-st}\cdot e^{t^3} > 1$$

за кој било фиксиран s, почнувајќи од доволно голем t, следува дека последниот интеграл дивергира за секој s. Според тоа, $f(t) = e^{t^3}$ не е оригинал ($s_o=+\infty$).

10.4. Да се покаже дека е оригинал функцијата

$$f(t) = t^n e^{at}, \tag{1}$$

каде што $n\in\mathbb{N}$ и $a\in\mathbb{R}$ се произволно дадени броеви и да се определи показателот на растот на функцијата

$$f(t) = t^2e^{4t}. \tag{2}$$

Решение. Од $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!$ заклучуваме дека $e^t > t^n/n!$, т.е. за секој $t>0$,

$$|t^n| < n!e^t \quad \text{и} \quad |t^ne^{at}| < n!e^t\cdot e^{at}, \tag{3}$$

па

$$\int_0^\infty e^{-st}|t^n e^{at}|dt \leq n! \int_0^\infty e^{-(s-a-1)t}dt.$$

Последниот интеграл е конвергентен за секој $s > a+1$, па таков е и првиот. Значи, функцијата (1) е оригинал.

За интегралот $\int_0^\infty e^{-st}|t^2 e^{4t}|dt$, применувајќи парцијална интеграција, при $s > 4$, ќе имаме:

$$\int_0^\infty t^2 e^{-(s-4)t}dt = -\frac{t^2}{s-4}\cdot e^{-(s-4)t}\Big|_0^\infty + \frac{2}{s-4}\int_0^\infty t\, e^{-(s-4)t}dt =$$

$$= -0+0 + \frac{2}{s-4}\cdot\left\{-\frac{t}{s-4}\cdot e^{-(s-4)t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s-4}\cdot\int_0^\infty e^{-(s-4)t}dt\right\} =$$

$$= -\frac{2}{(s-4)^3}\cdot e^{-(s-4)t}\Big|_0^\infty = \frac{2}{(s-4)^3}.$$

Последниот интеграл, за $s \leq 4$ е дивергентен. Значи, $s_o = 4$.

<u>10.5</u>. Да се најде сликата $F(p)$ на оригиналот

$$f(t) = t\cdot\eta(t-2),$$

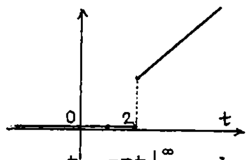
каде што $\eta(t)$ е единичната (или Хевисајдова) функција: $\eta(t)=1$ за $t > 0$, $\eta(t)=0$ за $t < 0$, со помош на дефиницијата на слика.

<u>Решение</u>. <u>Слика</u> на оригиналот $f(t)$ се вика аналитичката функција $F(p)$ од комплексната променлива $p=s+i\tau$, определена со равенството

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \quad \text{при} \quad \text{Re}p > s_o, \tag{1}$$

каде што s_o е показателот на растот на $f(t)$. Бидејќи

$$f(t) = t\cdot\eta(t-2) = \begin{cases} t & \text{за } t > 2 \\ 0 & \text{за } t < 2 \end{cases}$$



Црт. 1

(Црт. 1), имаме

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}t\cdot\eta(t-2)dt = \int_2^\infty t\cdot e^{-pt}dt = -\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_2^\infty + \frac{1}{p}\int_2^\infty e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{2}{p}\cdot e^{-2p} - \frac{1}{p^2}\cdot e^{-pt}\Big|_2^\infty = \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

Значи: $F(p) = e^{-2p}\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}\right)$.

<u>10.6</u>. Да се најде лапласовата трансформација на функцијата

$$f(t) = e^{(2-i)t}.$$

Решение. Лапласова трансформација е интегрална трансформација која на оригиналот $f(t)$ му ја придружува неговата слика $F(p)$ (зад. 10.1 и 10.5); симболички, тоа се запишува

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \text{ при } \operatorname{Re}p > s_o.$$

или

$$f(t) \doteqdot F(p).$$

За дадената функција имаме:

$$\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt}e^{(2-i)t}dt = \int_0^\infty e^{-(p-2+i)t}dt =$$

$$= -\frac{1}{p-2+i}e^{-(p-2+i)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-2+i} \text{ при } \operatorname{Re}p > 2.$$

Значи: $\mathscr{L}(e^{(2-i)t}) = \dfrac{1}{p-2+i}$.

10.7. Да се најде $\mathscr{L}(\sin^2 t)$, користејќи ја формулата за линеарност:

$$\mathscr{L}(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = c_1\mathscr{L}(f_1(t)) + c_2\mathscr{L}(f_2(t)),$$

како и формулата $\mathscr{L}(\cos at) = p/(p^2+a^2)$.

Решение. $\mathscr{L}(\sin^2 t) = \mathscr{L}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2t) = \mathscr{L}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\mathscr{L}(\cos 2t) =$

$$= \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p(p^2+4)}, \ \operatorname{Re}p > 0.$$

10.8. Да се најде $\mathscr{L}(2\operatorname{ch}5t\cdot\operatorname{ch}2t)$, користејќи ја теоремата за сличност:

$$\mathscr{L}(f(at)) = \frac{1}{a}\cdot F(\frac{p}{a}) \quad \text{при} \quad a > 0, \tag{1}$$

како и формулата $\operatorname{ch}t \doteqdot p/(p^2-1)$.

Решение. Бидејќи $\operatorname{ch}at\cdot\operatorname{ch}bt = \frac{1}{2}\cdot\{\operatorname{ch}(a+b)t+\operatorname{ch}(a-b)t\}$, имаме $2\cdot\operatorname{ch}5t\cdot\operatorname{ch}2t = \operatorname{ch}7t+\operatorname{ch}3t$, па според (1):

$$\mathscr{L}(\operatorname{ch}at) = \frac{1}{a}\cdot\frac{p/a}{(p/a)^2-1} = \frac{p}{p^2-a^2}.$$

Значи,

$$\mathscr{L}(2\cdot\operatorname{ch}5t\cdot\operatorname{ch}2t) = \mathscr{L}(\operatorname{ch}7t+\operatorname{ch}3t) =$$

$$= \mathscr{L}(\operatorname{ch}7t) + \mathscr{L}(\operatorname{ch}3t) = \frac{p}{p^2-49} + \frac{p}{p^2-9} = \frac{p(2p^2-58)}{(p^2-49)(p^2-9)}.$$

10.9. Да се најде $\mathcal{L}((t-5)^3)$, користејќи ја теоремата за задоцнување (реална транслација):

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-ap}\cdot\mathcal{L}(f(t)) \quad \text{при} \quad a>0, \qquad (1)$$

како и формулата $\mathcal{L}(t^n) = n!/p^{n+1}$ (n е природен број).

Решение. Имаме: $\mathcal{L}(t^3) = 3!/p^4$, па според (1):

$$\mathcal{L}((t-5)^3) = e^{-5p}.\frac{3!}{p^4} = \frac{6e^{-5p}}{p^4}.$$

10.10. Да се најде $\mathcal{L}(\sin(t+3))$, користејќи ја теоремата за престигнување:

$$\mathcal{L}(f(t+a)) = e^{ap}\cdot\{\mathcal{L}(f(t))-\int_0^a e^{-pt}f(t)dt\} \quad \text{за} \quad a>0. \qquad (1)$$

Решение. Имајќи ја предвид формулата

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}.e^{ax},$$

според (1), добиваме

$$\mathcal{L}(\sin(t+3)) = e^{3p}\{\mathcal{L}(\sin t)-\int_0^3 e^{-pt}\sin t dt\} =$$

$$= e^{3p}\{\frac{1}{p^2+1} + \frac{p\sin t+\cos t}{p^2+1}.e^{-pt}\Big|_0^3\} =$$

$$= e^{3p}.\{\frac{1}{p^2+1} + \frac{p\sin 3+\cos 3}{p^2+1}.e^{-3p} - \frac{1}{p^2+1}\} = \frac{p\sin 3+\cos 3}{p^2+1}.$$

10.11. Да се најде $\mathcal{L}(\mathrm{sh}3t.\cos 5t)$, користејќи ја теоремата за комплексна транслација: Ако $f(t) \doteqdot F(p)$ и $a\in\mathbb{C}$, тогаш

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a), \qquad \mathrm{Re}p > s_0 - \mathrm{Re}a.$$

Решение. Користејќи ја формулата $\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2}$ добиваме

$$\mathrm{sh}3t.\cos 5t = \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-3t})\cos 5t = \frac{1}{2}\cdot e^{3t}\cos 5t - \frac{1}{2}e^{-3t}\cos 5t =$$

$$\doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+5^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{(p+3)^2+5^2}.$$

10.12. Да се докаже дека

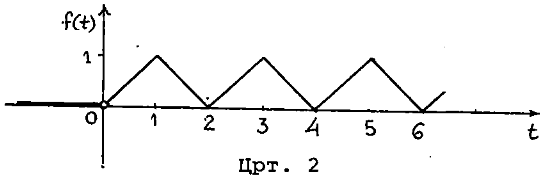
$$\mathcal{L}(\sin at.f(t)) = \frac{1}{2}\cdot\{F(p-ia) - F(p+ia)\},$$

каде што $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$.

Решение. $\sin at.f(t) = \frac{1}{2}(e^{iat}-e^{-iat})f(t) =$

$$= \frac{1}{2}.e^{iat}f(t) - \frac{1}{2}.e^{-iat}f(t) = \frac{1}{2}F(p-ia) - \frac{1}{2}F(p+ia).$$

10.13. Да се најде лапласовата трансформација на периодичната функција $f(t)$, определена со графикот на црт. 2.



Црт. 2

Решение. Оригиналот $f(t)$ можеме да го изразиме аналитички на интервалот $(0,2)$ вака:

$$f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t \le 1, \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \end{cases} \quad \text{со период } T=2.$$

Според теоремата за сликата $F(p)$ на периодичен оригинал имаме:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}} \cdot \left\{ \int_0^1 e^{-pt} t\,dt + \int_1^2 e^{-pt}(2-t)\,dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}} \cdot \left\{ -\frac{t}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt}dt + \frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_1^2 - \frac{1}{p} \int_1^2 e^{-pt}dt - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_1^2 \right\} = \frac{1}{1-e^{-2p}} \cdot \left\{ \frac{1}{p^2} \cdot (e^{-2p} - 2e^{-p} + 1) \right\} = \frac{(e^{-p}-1)^2}{p^2(1-e^{-2p})}.$$

10.14. Со помош на теоремата за диференцирање на оригиналот, да се најде сликата $F(p)$ на функцијата $f(t) = \sin^3 t$.

Решение. Теоремата за диференцирање на оригиналот гласи: Ако $f(t)$ е непрекинато диференцијабилна на $(0,+\infty)$ и $f'(t)$ е оригинал, тогаш и $f(t)$ е оригинал, постои $f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ и од $f(t) \risingdotseq F(p)$ следува

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0).$$

Во дадениот случај имаме $f(0) = 0$ и $f'(t) = 3\sin^2 t \cos t =$
$= \frac{3}{2} \cdot \sin t \cdot \sin 2t = \frac{3}{4} \cdot (\cos t - \cos 3t) \risingdotseq \frac{3}{4}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9}\right) = \frac{6p}{(p^2+1)(p^2+9)}.$

Следствено,

$$\frac{6p}{(p^2+1)(p^2+9)} = pF(p), \quad \text{па} \quad F(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

10.15. Да се најде сликата на диференцијалниот израз

$x''' + 5x'' - 2x + 3$, при $x(0)=4$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-6$,

сметајќи дека функцијата $x=x(t)$ ги задоволува условите од теоремата за n диференцирања.

Решение. Ќе ја користиме теоремата за n диференцирања на оригиналот, која гласи:

Ако $f(t)$ е n пати непрекинато диференцијабилна на $(0,+\infty)$ и $f^{(n)}(t)$ е оригинал, тогаш и $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ се оригинали, постојат $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$ и од $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ следува

$$(f^{(n)}) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Имајќи ја предвид оваа теорема (и теоремата за линеарност), а ставајќи $\mathcal{L}(x)=X$, за дадениот израз добиваме:

$$\mathcal{L}(x'''+5x''-2x+3) = \mathcal{L}(x''')+5\cdot\mathcal{L}(x'')-2\cdot\mathcal{L}(x)+3\cdot\mathcal{L}(1) =$$

$$= (p^3X-p^2\cdot 4-p\cdot 0+6)+5(p^2X-p\cdot 4-0)-2X+\frac{3}{p} = (p^3+5p^2-2)X-4(p^2+p)+6+\frac{3}{p}.$$

10.16. Со помош на диференцирање на сликата, да се најде $\mathcal{L}(t^2\sin 3t)$.

Решение. Диференцирањето на сликата $F(p)$ се сведува на множење на оригиналот $f(t)$ со $-t$:

$$\frac{d}{dp}F(p) = -\mathcal{L}(tf(t)) \qquad (1)$$

или, општо,

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p) = (-1)^n\mathcal{L}(t^n f(t)). \qquad (1')$$

Имаме: $\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}$. Според (1), $\left(\frac{3}{p^2+9}\right)' = -\sin 3t$, па

$$\frac{6p}{(p^2+9)^2} \risingdotseq \sin 3t.$$

Потоа:

$$-t(t\cdot\sin 3t) \risingdotseq \left\{\frac{6p}{(p^2+9)^2}\right\}' = \frac{6(p^2+9)-6p\cdot 4p}{(p^2+9)^3},$$

т.е.

$$t^2\sin t \risingdotseq \frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}.$$

10.17. Со помош на интегрирање на оригиналот, да се најде сликата на функцијата

$$g(t) = \int_0^t (u+\cos 2u)\,du.$$

Решение. Интегрирањето на оригиналот се сведува на делење на сликата со p, т.е. ако f(t) е оригинал, непрекинат на $(0,+\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогаш

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p}\cdot F(p). \qquad (1)$$

Бидејќи $f(t) = t + \cos 2t \risingdotseq \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+4}$, според (1) имаме:

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}\int_0^t (u+\cos 2u)du = \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{1}{p^3} + \frac{p}{p^2+4}.$$

10.18. Со помош на интегрирање на сликата, да се најде $\mathcal{L}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)$.

Решение. Ако $\frac{f(t)}{t}$ е оригинал (во тој случај и f(t) е оригинал) и $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогаш

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(z)dz, \text{ каде што } \int_p^\infty = \lim_{\mathrm{Re}P\to\infty}\int_p^P. \qquad (1)$$

Функцијата $\frac{e^t-1}{t}$ е оригинал $\left(\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t} = 0\right)$. Бидејќи $\mathcal{L}(e^t-1) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$, од (1) следува дека

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = \int_p^\infty \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = \ln\frac{z-1}{z}\Big|_p^\infty = \ln\frac{p}{p-1}.$$

10.19. Користејќи ја теоремата за интегрирање на сликата (зад. 10.17), да се пресмета несвојствениот интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin bt}{t}\,dt \qquad (a>0,\ b>0).$$

Решение. Ако $f(t) \risingdotseq F(p)$ и несвојствениот интеграл $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}$ конвергира, тогаш

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp, \qquad (1)$$

каде што интегралот од десната страна може да се пресметува по позитивната полуоска.

Бидејќи $\sin bt \risingdotseq \frac{b}{p^2+b^2}$ и $e^{-at}\sin bt \risingdotseq \frac{b}{(p+a)^2+b^2}$, според формулата (1), ќе имаме

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin bt}{t}dt = \int_0^\infty \frac{b\,dz}{(z+a)^2+b^2} = \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{z+a}{b}\right)}{\left(\frac{z+a}{b}\right)^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{z+a}{b}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

10.20. Да се најде конволуцијата на оригиналите

$$f(t) = \sin t, \; g(t) = t$$

и нејзината слика.

Решение. Според дефиницијата за конволуција на f и g, имаме

$$f*g = \int_0^t f(u)\cdot g(t-u)\,du = \int_0^t \sin u\cdot(t-u)\,du =$$
$$= t\int_0^t \sin u\,du - \int_0^t u\sin u\,du = t(-\cos u)\Big|_0^t + u\cdot\cos u\Big|_0^t - \sin u\Big|_0^t =$$
$$= t - \sin t;$$

$$\mathcal{L}(\sin t*t) = \mathcal{L}(t-\sin t) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

10.21. Применувајќи ја теоремата за множење на сликите

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\cdot \mathcal{L}(g), \tag{1}$$

да се најде оригиналот чија слика е

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Решение. Бидејќи $\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+1}) = \cos t$, $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+1}) = \sin t$, имаме:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{(p^2+1)^2} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right) = \cos t * \sin t =$$
$$= \int_0^t \cos u.\sin(t-u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t+\sin(t-2u)]\,du =$$
$$= \frac{1}{2}\left[u\cdot\sin t + \frac{1}{2}\cdot\cos(t-2u)\right]\Big|_0^t = \frac{1}{2}\cdot t\sin t.$$

Значи, бараниот оригинал е $\frac{t}{2}\cdot\sin t$.

10.22. Да се најде оригиналот f(t) чија слика е

$$F(p) = \frac{2p+1}{(p-2)(p^2+1)}. \tag{*}$$

Решение. Изразот за F(p) ќе го претставиме како збир од прости дропки:

$$\frac{2p+1}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Непознатите коефициенти A,B,C ќе ги определиме од идентитетот

$$2p+1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-2), \tag{1}$$

т.е.

$$2p+1 = (A+B)p^2 + (C-2B)p + (A-2C). \tag{2}$$

Ако во идентитетот (1) ставиме $p=2$, ќе добиеме

$$5 = A\cdot 5, \text{ т.е. } A = 1.$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред еднаквите степени на p во (2), добиваме

$$A+B = 0, \quad C-2B = 2, \quad A-2C = 1$$

Бидејќи $A = 1$, имаме: $B = -1$, $C = 0$, па

$$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Значи:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = e^{2t} - \cos t.$$

Забелешка. Изразот од десната страна на (*) можеме да го претставиме како збир од прости дропки и вака:

$$\frac{2p+1}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p-i} + \frac{C}{p+i}. \tag{3}$$

Непознатите коефициенти A,B,C ќе ги определиме од идентитетот

$$2p+1 = A(p^2+1) + B(p-2)(p+i) + C(p-2)(p-i).$$

Ставајќи последователно: $p=2$, $p=i$, $p=-i$, добиваме

$$5 = A\cdot 5, \quad 2i+1 = B(i-2).2i, \quad -2i+1 = C(i-2)(-2i),$$

од каде што $A=1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Значи,

$$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

па

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = e^{2t} - \frac{1}{2}\cdot e^{it} - \frac{1}{2}\cdot e^{-it} = e^{2t} - \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}) = e^{2t} - \cos t.$$

10.23. Да се најде $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3p^2-24}{(p+1)(p-2)^3}\right)$.

Решение. Имаме:

$$F(p) = \frac{-3p^2-24}{(p+1)(p-2)^3} = \frac{A}{p+1} + \frac{B_1}{(p-2)^3} + \frac{B_2}{(p-2)^2} + \frac{B_3}{p-2}. \tag{1}$$

Коефициентите A, B_1, B_2, B_3 може да се најдат како во зад. 10.22, но може и како остатоци на соодветната комплексна функција. Имено, ако $p=a$ е k-кратен пол на правилната дробно-рационална функција $F(p)$, т.е.

$$F(p) = \frac{U(p)}{V(p)} \tag{2}$$

каде што полиномот U(p) има помал степен од полиномот V(p) и $V(p) = (p-a)^{k}W(p)$ со $W(a) \neq 0$, тогаш коефициентите $C_1,\dots,C_k$ во разложувањето

$$F(p) = \frac{C_1}{(p-a)^k} + \frac{C_2}{(p-a)^{k-1}} + \dots + \frac{C_k}{p-a} + \dots$$

Може да се пресметаат со формулите

$$C_1 = \left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]_{p=a}, \quad C_2 = \frac{1}{1!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]'_{p=a}, \dots, \quad C_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]^{(k-1)}_{p=a}$$

Според тоа:

$$A = \left[\frac{-3p^2-24}{(p-2)^3}\right]_{p=-1} = \frac{-3\cdot(1)^2-24}{(-1-2)^3} = 1;$$

$$B_1 = \left[\frac{-3p^2-24}{p+1}\right]_{p=2} = \frac{-3\cdot 4-24}{3} = -6;$$

$$B_2 = \left[\frac{-3p^2-24}{p+1}\right]'_{p=2} = \left[\frac{-6p(p+1)+3p^2+24}{(p+1)^2}\right]_{p=2} = 0;$$

$$B_3 = \frac{1}{2!}\left[\frac{-3p^2-24}{p+1}\right]''_{p=2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{24-6p-3p^2}{(p+1)^2}\right]'_{p=2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(-6-6p)(p+1)-2(24-6p-3p^2)}{(p+1)^3}\right]_{p=2} = \frac{-54}{27} = -2.$$

Значи, од (1):

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{6}{(p-2)^3} - \frac{2}{p-2}\right) = e^{-t} - 6t^2e^{2t} - 2e^{2t}.$$

Забелешка. Ако сите корени на V(p) во (2) се: $a_1, a_2, \dots, a_n$ со кратности $k_1, k_2, \dots, k_n$, тогаш соодветниот оригинал f(t) може да се најде по формулата

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_m} \frac{U(p)}{V(p)}\cdot e^{pt} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(k_m-1)!} \lim_{p\to a_m}\left[(p-a_m)\cdot\frac{U(p)}{V(p)}\, e^{pt}\right]^{(k_m-1)}.$$

Ако сите корени се прости, т.е. $k_1=k_2=\dots=k_n=1$, тогаш

$$f(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{U(a_m)}{V'(a_m)}\, e^{a_m t}$$

(наречена Хевисајдова формула за разложување).

10.24. Во некои случаи, особено кога именителот на дадена рационална слика F(p) има комплексни корени, за наоѓање на оригиналот f(t) згодно е да се примени теоремата за комплексна транслација. Да се најде f(t) за

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+13}.$$

Решение. (Да забележиме дека именителот има комплексни корени). Имаме:

$$\frac{p}{p^2+4p+13} = \frac{p+2-2}{(p+2)^2+3^2} = \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2} =$$

$$= e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+3^2}\right) - \frac{2}{3}\cdot e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{p^2+9}\right) = e^{-2t}\cos 3t - \frac{2}{3}\cdot e^{-2t}\sin 3t.$$

10.25. Со помош на лапласова трансформација, да се реши следнава линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти:

$$x'' + 2x' + 5x = e^{-t}\sin t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Решение. Како во зад. 10.15, имаме:

$$\mathscr{L}(x'') + 2\mathscr{L}(x') + 5\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(e^{-t}\sin t),$$

$$(p^2X-px(0)-x(0)) + 2(pX-x(0)) + 5X = \frac{1}{(p+1)^2+1},$$

$$(p^2X-1) + 2pX + 5X = \frac{1}{p^2+2p+2},$$

$$(p^2+2p+5)X = \frac{1}{p^2+2p+2} + 1,$$

$$X = \frac{p^2+2p+3}{(p^2+2p+5)(p^2+2p+2)}. \tag{1}$$

Десната страна на (1) ќе ја претставиме како збир од прости дропки (како во зад. 10.22):

$$\frac{p^2+2p+3}{(p^2+2p+5)(p^2+2p+2)} = \frac{Ap+B}{p^2+2p+2} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5};$$

$$p^2+2p+3 = (Ap+B)(p^2+2p+2) + (Cp+D)(p^2+2p+5),$$

$$p^2+2p+3 = (A+C)p^2 + (2A+B+2C+D)p^2 + (5A+2B+2C+2D)p + 5B + 2D,$$

$$A+C = 0, \; 2A+B+2C+D = 1, \; 5A+2B+2C+2D = 2, \; 5B+2D = 3.$$

Решение на овој систем е: $A = 0 = C$, $B = \frac{1}{3}$, $D = \frac{2}{3}$.

Според тоа, инверзната лапласова трансформација на X (од (1) и (2)) ќе биде:

$$\mathcal{L}^{-1}(X) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/3}{p^2+2p+2} + \frac{2/3}{p^2+2p+5}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)+4}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}e^{-t}\sin t - \frac{1}{3}\cdot e^{-t}\sin 2t.$$

Значи, бараното решение на дадената ДР е

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t+\sin 2t).$$

10.26. Да се реши следнава линеарна ДР со променливи коефициенти:

$$tx'' + (1-2t)x' - 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Решение. Ќе ја искористиме формулата за диференцирање на сликата (зад. 10.16). Имаме:

$$\mathcal{L}(tx'') + \mathcal{L}(x') - 2\cdot\mathcal{L}(tx') - 2\cdot\mathcal{L}(x) = 0,$$
$$-\frac{d}{dp}\{p^2X-p-2\} + pX-1+2\cdot\frac{d}{dp}\{pX-1\} - 2X = 0,$$
$$-2pX-p^2\frac{dX}{dp} + 1 + pX - 1 + 2X + 2p\cdot\frac{dX}{dp} - 2X = 0,$$
$$-p^2\cdot\frac{dX}{dp} + 2p\frac{dX}{dp} - pX = 0, \quad (p-2)\frac{dX}{dp} = -X,$$
$$\frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p-2}. \tag{1}$$

Земајќи $p > 2$, решението на оваа ДР (по X, X') е

$$\ln X = -\ln(p-2) + \ln C, \quad \text{т.е.} \quad X = \frac{C}{p-2}. \tag{2}$$

Од (2), со инверзна лапласова трансформација, добиваме

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{p-2}\right) = Ce^{2t}. \tag{3}$$

Произволната константа C во (3) ја определуваме од почетниот услов $x(0) = 1$: $1 = x(0) = C\cdot e^0$, т.е. $C = 1$.

Значи, бараното решение е $x(t) = e^{2t}$.

10.27. Да се реши системот ДР

$$\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 2y - 4x = \cos t. \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0.$$

Решение. Со помош на лапласова трансформација, дадениот систем ДР го претворуваме во систем обични (алгебарски) равенки:

$$\begin{cases} pX + 2X + Y = \dfrac{1}{p^2+1}, \\ pY - 2Y - 4X = \dfrac{p}{p^2+1}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (p+2)X + Y = \dfrac{1}{p^2+1} \\ -4X + (p-2) = \dfrac{p}{p^2+1} \end{cases}$$

Бидејќи

$$D = \begin{vmatrix} p+2 & 1 \\ -4 & p-2 \end{vmatrix} = p^2$$

и

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p^2+1} & 1 \\ \dfrac{p}{p^2+1} & p-2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{p^2+1}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} p+2 & \dfrac{1}{p^2+1} \\ -4 & \dfrac{p}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{p^2+2p+4}{p^2+1},$$

со помош на Крамеровото правило добиваме

$$X = \frac{D_1}{D} = -\frac{2}{p^2(p^2+1)} = \frac{2}{p^2+1} - \frac{2}{p^2}, \tag{1}$$

$$Y = \frac{D_2}{D} = \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+1},$$

$$p^2+2p+4 = A(p^2+1) + Bp(p^2+1) + (Cp+D)p^2 =$$
$$= (B+C)p^3 + (A+D)p^2 + Bp + A,$$

од каде што: $A = 4$, $B = 2$, $C = -2$, $D = -3$, па

$$Y = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1} \tag{2}$$

Користејќи инверзна лапласова трансформација, од (1) и (2) го добиваме бараното решение на дадениот систем,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2}\right) = 2\sin t - 2t,$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t.$$

10.28. Да се реши интегралната равенка од конволуциски тип (по непознатата функција $x = x(t)$):

$$x(t) - t = \int_0^t (t-u)x(u)\,du. \tag{1}$$

Решение. Десната страна на равенката (1) е конволуција на функциите $x(t)$ и t (в. зад. 10.20), па (1) може да се напише во обликот

$$x(t) - t = t * x(t). \tag{2}$$

Применувајќи $\mathscr{L}$ на (2), добиваме (в. зад. 10.21):

$$X - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\cdot X,$$

а по средувањето:

$$X = \frac{1}{p^2-1}. \tag{3}$$

Од (3), со $\mathscr{L}^{-1}$, добиваме $x(t) = \operatorname{sh}t$.

10.29. Да се најде решение $u(x,t)$ на ПДР

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

што ги задоволува условите:

а) $u(x,0) = 3\sin 2\pi x$, б) $u(0,t) = 0$, в) $u(1,t) = 0$

каде што $0<x<1$, $t>0$.

Решение. Сметајќи дека бараното решение, при кој било фиксиран x $(0<x<1)$ е оригинал по t, $\mathscr{L}(u(x,t)) = U(x,p)$, според теоремата за диференцирање на оригиналот (зад. 10.14) и а), имаме

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = pU - u(x,0) = pU - 3\sin 2\pi x,$$

а според теоремата за диференцирање по параметар, сметајќи го x за параметар (а p за константа),

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx}, \quad \mathscr{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2U}{dx^2}.$$

Заменувајќи во (1) добиваме

$$pU - 3\sin 2\pi x = \frac{d^2U}{dx^2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{d^2U}{dx^2} - pU = 3\sin 2\pi x. \tag{2}$$

Општо решение на (обичната ДР) (2) е

$$U(x,p) = c_1 e^{x\sqrt{p}} + c_2 e^{-x\sqrt{p}} + \frac{3}{p+4\pi^2}\cdot \sin 2\pi x. \tag{3}$$

Земаме $\mathscr{L}$ за граничните услови б) и в) (т.е. тие што не го содржат t):

$$\mathscr{L}(u(0,t)) = U(0,p) = 0, \quad \mathscr{L}(u(1,t)) = U(1,p) = 0;$$

заменувајќи ги во (3), го добиваме системот

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 e^{\sqrt{p}} + c_2 e^{-\sqrt{p}} = 0,$$

од каде што имаме $c_1 = c_2 = 0$; значи,

$$U(x,p) = \frac{3}{p+4\pi^2}\cdot\sin 2\pi x,$$

па бараното решение е

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}(U(x,p)) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x.$$

<u>10.30</u>. Нека

$$\sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n F(n) \qquad (\varepsilon=+1 \text{ или } \varepsilon=-1) \tag{1}$$

е конвергентен броен ред. Докажи дека, ако $f(t)$ е оригинал на $F(p)$, тогаш збирот s на дадениот ред е определен со формулата ([Мартиненко, стр. 175]):

$$s = \varepsilon^m \int_0^{\infty} \frac{f(t)e^{-mt}}{1-\varepsilon e^{-t}}\,dt. \tag{2}$$

Користејќи го тоа, да се пресмета збирот на редот

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}. \tag{3}$$

<u>Решение</u>. Нека $F(p) = \mathscr{L}(f(t))$. Тогаш $F(n) = \int\limits_0^{\infty} e^{-nt}f(t)dt$, па за збирот на (1) имаме:

$$s = \sum_{n=m}^{\infty}\left[\varepsilon^n \int_0^{\infty} e^{-nt}f(t)dt\right] = \int_0^{\infty}\left[f(t)\sum_{n=m}^{\infty}\varepsilon^n e^{-nt}\right]dt. \tag{4}$$

Бидејќи редот во последниот интеграл е геометриски, со количник $\varepsilon\cdot e^{-t}$ ќе имаме

$$\sum_{n=m}^{\infty}\varepsilon^n e^{-nt} = \varepsilon^m \frac{e^{-mt}}{1-\varepsilon e^{-t}};$$

заменувајќи во (4), ја добиваме формулата (2).

За редот (3) имаме m=2 и

$$F(p) = \frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right);$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Заменувајќи во (2), добиваме:

$$s = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot e^{-2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{(1-e^{-2t})e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1+e^{-t})e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(e^{-t}+e^{-2t})dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 10

10.31. Да се испита кои од дадените функции се оригинали и да се најде нивниот показател на растот:

а) $f(t) = t^2$; б) $f(t) = e^{(-2+i)t}$; в) $f(t) = te^{5t}$;

г) $f(t) = e^{t^2-3t}$; д) $f(t) = \frac{1}{t}$; ѓ) $f(t) = \sin\frac{1}{t}$;

е) $f(t) = \mathrm{ch}3t$; ж) $f(t) = \mathrm{sh}(2-3i)t$.

10.32. Да се најде сликата на дадениот оригинал користејќи ја дефиницијата на слика:

а) $f(t) = 1 - \eta(t-3)$; б) $f(t) = t$;

в) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0\le t\le 2; \\ 1, & t>2 . \end{cases}$ г) $f(t) = a^t$.

10.33. Користејќи ја дефиницијата на лапласовата трансформација, да се покаже дека:

а) $e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}$ $(a\in\mathbb{R}$; $\mathrm{Re}p > a)$;

б) $e^{iat} \risingdotseq \frac{1}{p-ia}$ $(a\in\mathbb{R}$; $\mathrm{Re}p > 0)$;

в) $e^{2t-1} \risingdotseq \frac{1}{e(p-2)}$, $\mathrm{Re}p > 2$;

г) $e^{-3t+4} \risingdotseq \frac{e^4}{p+3}$, $\mathrm{Re}p > -3$.

10.34. Користејќи ја теоремата за линеарност и равенствата $\cos at = (e^{iat}+e^{-iat})/2$, $\sin at = (e^{iat}-e^{-iat})/2i$, како и дефинициите за хиперболичен синус и косинус, да се најде $\mathscr{L}(f(t))$, ако $f(t)$ е:

а) $\sin 2t$; б) $\mathrm{ch}3t$; в) $6\sin 2t - 5\cos 2t$;

г) $(\sin t-\cos t)^2$; д) $\frac{1}{2}(\mathrm{sh}at+\sin at)$; ѓ) $3\mathrm{ch}5t-4\mathrm{sh}5t$.

10.35. Да се најде $\mathscr{L}(f(t))$, каде што $f(t)$ е:

а) $2\sin 3t\cdot\cos 5t$; б) $\sin^4 t$; в) $\mathrm{sh}at.\cos bt$;

г) $3t^2 + e^{-2t}$; д) $(2e^{3t}-5)^2$; ѓ) $\mathrm{ch}^2 4t$.

10.36. Дадена е $\mathcal{L}(f(t) = \frac{p^2-p+1}{(2p+1)^2\cdot(p-1)}$. Да се најде $\mathcal{L}(f(2t))$.

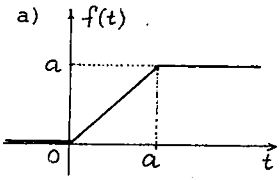
10.37. Користејќи: реална транслација, сличност или комплексна транслација, да се најдат сликите на следниве оригинали:

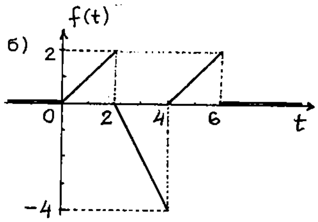
а) $\sin(t-2)$; б) $\cos(2t-6)$; в) $\mathrm{sh}(at+b)$;

г) $e^{-2t}t^3$; д) $e^{3t}\sin 2t$; ѓ) $e^{2t}\sin 3t\cdot\sin 4t$;

е) $f(t) = \begin{cases} \cos(t-2\pi/3), & t > 2\pi/3, \\ 0, & t < 2\pi/3. \end{cases}$

10.38. Да се најдат сликите на следните оригинали, зададени графички:

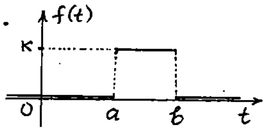
а) 

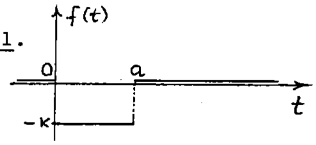
б) 

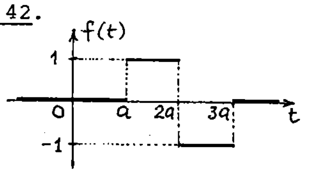
10.39. Со помош на теоремата за престигнување, да се најде $\mathcal{L}(f(t))$, ако f(t) е:

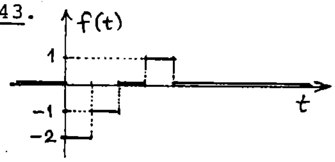
а) $\sin(t + \frac{\pi}{2})$. б) $\cos(t+2)$.

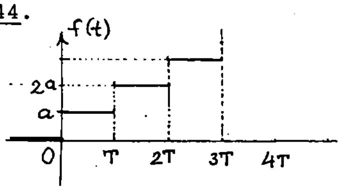
Во зад. 10.40-10.45 функцијата f(t) е зададена со нејзиниот график. Да се претстави f(t) со помош на хевисајдовата единична функција $\eta(t)$, а потоа да се најде $\mathcal{L}(f(t))$.

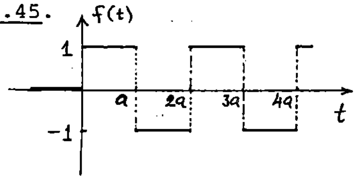
10.40. 

10.41. 

10.42. 

10.43. 

10.44. 

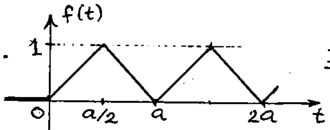
10.45. 

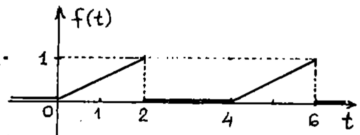
Да се најде сликата на следниов периодичен оригинал, 10.46–10.50.

10.46. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<a \\ 0, & a\le t<2a \end{cases}$ ("правоаголен импулс", со период 2a).

10.47. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0<t<\pi \\ 0, & \pi<t<2\pi \end{cases}$ (со период 2π).

10.48. $f(t) = |\cos nt|$, n даден природен број.

10.49. 

10.50. 

10.51. Да се најде $\mathcal{L}(f'(t))$ ако f(t) е:

а) $e^{-at}\sin t$; б) $e^{-at}\operatorname{ch} bt$.

10.52. Да се најде сликата на диференцијалниот израз:

а) $x'' + 5x' - 7x + 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

б) $x''' - 2x' + x + e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

10.53. Да се најде сликата на дадениот оригинал со помош на теоремата за диференцирање на оригиналот односно на сликата.

а) $\cos^2 t$; б) $(t^2-t+1)e^{3t}$; в) $t\operatorname{sh} at$;

г) $t(e^t+\operatorname{ch} t)$; д) $(t+1)\sin 2t$; ѓ) $t^3\cos t$.

Со помош на: а) диференцирање на сликата, б) диференцирање по параметар, в) комплексна транслација и г) по дефиниција (а користејќи ги Ојлеровите формули за sinat,...), во 10.54–10.56 да се најде лапласовата трансформација на дадената функција.

10.54. $t\sin at$. 10.55. $2t\operatorname{ch} at$. 10.56. $t^2\cos at$.

10.57. Со помош на теоремата за интегрирање на оригиналот односно за интегрирање на сликата, да се најде лапласовата трансформација на f(t):

а) $f(t) = \int_0^t \cos u\,du$; б) $f(t) = \int_0^t u\cdot\operatorname{sh} 3u\cdot du$;

в) $\int_0^t (u^2+\sin u)du$; г) $f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$;

д) $f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}$; ѓ) $f(t) = e^{-at}\,\frac{\sin t}{t}$.

10.58. Да се најде конволуцијата на зададените оригинали и сликата на конволуцијата.

а) $t * \cos t$; б) $e^{2t} * \sin t3t$; в) $t^2 * \operatorname{ch} t$;

г) $t^n * f(t)$; д) $\sin t * \cos t$; ѓ) $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{n}$.

10.59. Да се најде оригиналот на дадената слика со помош на теоремата за множење на сликите:

а) $\frac{1}{(p+3)(p-1)}$; б) $\frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}$; в) $\frac{p^2}{(p^2+4)^2}$.

10.60. Да се најде оригиналот на дадената слика $F(p)$, претставувајќи ја $F(p)$ како збир од прости дропки

а) $\frac{11p^2-2p+5}{(p-2)(2p-1)(p+1)}$; б) $\frac{p^3+16p-24}{p^4+20p^2+64}$;

в) $\frac{20p}{p^4+58p^2+441}$; г) $\frac{1}{(p+1)^2(p^2+1)}$;

д) $\frac{p^4+p^3+2p^2-p+1}{p(p^2-1)(p^2+1)}$; ѓ) $\frac{2p^2-6p+5}{p^3-6p^2+11p-6}$.

10.61. Од дадените слики да се најдат оригиналите и да се конструираат нивните графици:

а) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$ б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3}$.

10.62. Да се најде сликата на дадениот оригинал, користејќи ја теоремата за: 1) комплексна транслација, 2) множење на сликите, 3) претставување на $F(p)$ како збир од прости дропки:

а) $\frac{1}{p^3(p^2-1)}$; б) $\frac{p-4}{p^2-8p+7}$; в) $\frac{3p-24}{p^2+4p+40}$;

г) $\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}$; д) $\frac{2p+13}{p^3+4p^2+13p}$.

Со помош на лапласова трансформација да се решат следните линеарни ДР со константни коефициенти при дадените почетни услови (10.63-10.72).

10.63. $x' + 3x = te^{-2t}$, $x(0) = -1$.

10.64. $x'' - 5x' + 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

10.65. $x'' + 3x' + 2x = 4\eta(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$.

<u>10.66</u>. $x'' + 2x' + 2x = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3.$

<u>10.67</u>. $x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}, \quad x(0) = x'(0) = 1.$

<u>10.68</u>. $x'' + 2x' + 2x = 10\sin 2t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -3.$

<u>10.69</u>. $x'' + x' = 4\sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

<u>10.70</u>. $x''' - x' = 6 - 3t^2, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$

<u>10.71</u>. $x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t\cos 2t, \quad x(0)=1, \; x'(0) = \frac{3}{4}, \; x''(0)=\frac{1}{2}.$

<u>10.72</u>. $x^{iv} - x = 8e^t, \quad x(0)=0, \; x'(0)=2, \; x''(0)=4, \; x'''(0)=6.$

Да се најде општо решение на диференцијалната равенка во 10.73-10.75 (значи, почетните услови треба да се зададат во обликот $x(0)=c_1, \quad x'(0)=c_2$ итн.).

<u>10.73</u>. $x'' + 2x' + x = 0.$ <u>10.74</u>. $x'' - x = 2\sin t - 4\cos t.$

<u>10.75</u>. $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 3e^{-2x}.$

Да се решат линеарните ДР со променливи коефициенти (10.76-10.78).

<u>10.76</u>. $x'' + tx' - x = 0, \quad x(0)=0, \quad x'(0) = 1.$

<u>10.77</u>. $tx'' - 2x' = 0$ (општо решение).

<u>10.78</u>. $tx'' - (1-2t)x' + (t-1)x = 0$ (општо решение).

Со помош на лапласова трансформација да се решат следниве системи линеарни ДР (10.79-10.85).

<u>10.79</u>. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0)=1, \; y(0)=-1.$

<u>10.80</u>. $\begin{cases} x' + y' + x + y = 0, \\ x' - y' + y = t, \end{cases}$ $x(0)=0, \; y(0)=3.$

<u>10.81</u>. $\begin{cases} x' + y' + 3x = \cos t, \\ x' - x + y = \sin t, \end{cases}$ $x(0)=3, \; y(0)=2.$

<u>10.82</u>. $\begin{cases} x'' - x + y = e^t, \\ x' + x - y' - y = 3^{et}, \end{cases}$ $x(0)=5/2, \; y(0)=1, \; x'(0)=9/2.$

<u>10.83</u>. $\begin{cases} x'' + y' + x = e^t, \\ y'' + x' = 1, \end{cases}$ $x(0)=1, \; y(0)=0,$ $x'(0)=2, \; y'(0)=-1.$

<u>10.84</u>. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases}$ $x(0)=1, \; y(0)=2, \; z(0)=3.$

10.85. $\begin{cases} x' - 2x - y + 2z = 2 - t, \\ y' + x = 1, \\ z' - x - y + z = 1 - t, \end{cases}$
$x(0)=y(0)=z(0)=1.$

Следниве системи линеарни ДР да се решат со помош на: а) лапласова трансформација, в) Ојлеровиот метод (Гл. 7), в) методот на исклучување (т.е. сведување на една ДР), 10-86-10.89.

10.86. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x \end{cases}$
$x(0)=0,\ y(0)=1.$

10.87. $\begin{cases} x' - 4x + 5y = 4t - 1, \\ y' - x + 2y = t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 0.$

10.88. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$
$x(0)=y(0)=1,\ z(0)=0.$

10.89. $\begin{cases} x' - y + z = 0, \\ y' - x - y = t, \\ z' - x - z = t, \end{cases}$
$x(0)=2,\ y(0)=-2,\ z(0)=-3.$

Со помош на лапласова трансформација, да се најде решение на дадената парцијална ДР при дадените услови (10.90-10.93).

10.90. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 1,\quad u(0,t)=t,\ u(x,0)=x$ при $x > 0,\ t > 0.$

10.91. $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\,\frac{\partial u}{\partial t} = u,\quad u(x,0) = 6e^{-3x},\quad u(x,t)$ е ограничена (кога $x \to \infty$) при $x > 0,\ t > 0.$

10.92. $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=0,\ u(5,t)=0,\ u(x,0) = 10\ \sin 4\pi x.$

10.93. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,\ u(0,t)=\sin\kappa t,\quad u(x,0) = 0,$ $u_t'(x,0) = \kappa e^{-\kappa x},\quad u_x'(0,t) = -\kappa\sin\kappa t.$

10.94. Да се решат следниве интегрални равенки:

а) $x(t) = e^t + \int_0^t x(u)\cdot e^{t-u}du.$

б) $x(t) = t^3 + \int_0^t x(u)\sin(t-u)du.$

в) $\int_0^t x(u)\cdot\cos(t-u)du + \cos t - 1 = 0.$

г) $\sin^2 t = \int_0^t x(u)\cdot\sin(t-u)du.$

10.95. Да се реши системот од интегрални равенки:

а) $\begin{cases} x = 1 + \int_0^t y(u)du, \\ y = t + \int_0^t x(u)du. \end{cases}$

б) $x = \cos t - 1 + \int_0^t y(u)du,$
$y = \cos t + \int_0^t z(u)du,$
$z = 1 - \int_0^t x(u)du.$

10.96. Да се решат следниве диференцијално-интегрални равенки:

а) $x'(t) = \int_0^t x(u)\cdot\cos(t-u)du$ при $x(0) = 1$.

б) $x'(t) + 5\int_0^t \cos2(t-u)\cdot x(u)du = 10$, $x(0)=2$.

в) $x'' - 2x + 4\int_0^t x(t)dt = 4t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

10.97. Да се одреди временската промена на струјата $i(t)$ во RL-коло со електромоторна сила $e(t) = E$, ако при $t \le 0$ не тече струја во колото, а прекинувачот се затвора при $t=0$.

10.98. Кондензатор со капацитивност C е оптоварен така што потенцијалната разлика меѓу неговите електроди е U_o. Во моментот $t=0$, прекинувачот на RC-колото е затворен и кондензаторот почнува да се растоварува низ отпорникот со отпорност R. Да се најде товарот $q(t)$ на кондензаторот во моментот t.

10.99. Да се одреди временската промена на струјата во RLC-коло со електромоторна сила E, ако во моментот $t=0$ се затвори прекинувачот и, притоа, $i(0)=0$, $q(0)=0$.

10.100. Користејќи ја формулата во зад. 10.30, да се најде збирот на дадениот ред:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

* * *

10.101. Да се покаже дека: ако $f(t) \doteq F(p)$, тогаш $f(at-b) = \frac{1}{a}\cdot e^{-bp/a}F(\frac{p}{a})$. Потоа, да се најде $\mathscr{L}[sh(3t-5)]$.

10.102. Да се најде $\mathscr{L}(e^{-2t}f(3t))$ ако $\mathscr{L}(f(t)) = \frac{1}{p}\cdot e^{-1/p}$.

10.103. Докажи дека, ако $F(p) = \mathscr{L}(f(t))$, а r и a се дадени позитивни броеви, тогаш

$$\mathscr{L}\{r^t f(at)\} = \frac{1}{a}\cdot F(\frac{p-\ln r}{a}).$$

10.104. Да се покаже дека, ако $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогаш

1°. $\mathcal{L}[\text{sh}at \cdot f(t)] = \frac{1}{2}\cdot[F(p-a) - F(p+a)]$.

2°. $\mathcal{L}[\cos at \cdot f(t)] = \frac{1}{2}\cdot[F(p-ia) + F(p+ia)]$.

Потоа, да се најде: а) $\mathcal{L}[\text{sh}at\cdot t^2]$; б) $\mathcal{L}[\cos at\cdot \sin 2t]$.

10.105. Покажи дека, ако $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогаш

$$f(t)\cdot \eta(t-a) \risingdotseq F(p) - \int_0^a e^{-pt}f(t)dt.$$

10.106. Да се докаже теоремата за крајна вредност: ако $f'(t)$ е оригинал и постои $\lim_{t\to\infty} f(t)$, тогаш

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t) \quad [=f(\infty)].$$

10.107. Со помош на лапласова трансформација (в.10.106), да се најдат почетната и крајната вредност на функцијата:

а) $f(t) = 5e^{-2t} + 4e^{-3t}$; б) $f(t) = \cos^2 t$.

10.108. Да се најдат вредностите на функциите $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ при $t \to 0^+$, ако тие и $f'''(t)$ се оригинали, а $f(t) \risingdotseq (p+1)/p(p^2+p+1)$.

10.109. Да се пресметаат следниве интеграли:

а) $I = \int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$; б) $\int_0^\infty t^2e^{-2t}\sin t\,dt$;

в) $I = \int_0^\infty \frac{1}{t}(e^{-t}-e^{-3t})dt$; г) $\int_0^\infty \frac{1}{t}\cdot e^{-t}\sin^2 t\,dt$;

д) $\int_0^\infty \frac{1}{t}(\cos 6t-\cos 4t)dt$; ѓ) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.

10.110. Да се покаже дека:

а) $\frac{1}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$; б) $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)$;

в) $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}} + \frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)$.

10.111. Да се покаже дека $e^t\text{erf}\sqrt{t} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p}(p-1)}$ (со помош на теоремата за диференцирање на оригиналот).

10.112. Да се најде $\mathcal{L}(f(t))$, за $f(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$, со помош на:

а) резултатот $\mathcal{L}(\frac{\sin t}{t}) = \operatorname{arctg}\frac{1}{p}$,

б) равенството $tf'(t) = \sin t$,

в) развивање во степенски ред.

10.113. Да се покаже дека:

а) $\operatorname{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du \risingdotseq \frac{1}{2p}\cdot\ln(p^2+1)$,

б) $\operatorname{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \risingdotseq \frac{1}{p}\ln(p+1)$,

со помош на методот што се користи во 10.112 б).

10.114. Користејќи го методот на степенски редови, да се покаже дека:

а) $\mathcal{L}(\operatorname{erf}\sqrt{t}) = \frac{1}{p\sqrt{p^2+1}}$ (в. 10.111);

б) $\mathcal{L}(\sin\sqrt{t}) = \frac{1}{2p}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot e^{-1/4p}$; в) $\mathcal{L}(\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot e^{-1/4p}$.

(Упат. Да се искористи $\mathcal{L}(t^m) = \Gamma(m+1)/p^{m+1}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

10.115. Користејќи го фактот дека беселовата функција $J_o = J_o(t)$ ја задоволува беселовата ДР: $t^2y'' + ty' + (t^2-n^2)y = 0$ за $n=0$, т.е.

$$tJ_o'' + J_o' + tJ_o = 0, \qquad (1)$$

да се покаже дека $\mathcal{L}(J_o) = 1/\sqrt{p^2+1}$.

Упат. Да се земе лапласова трансформација на (1), да се примени теоремата за диференцирање на оригиналот, за диференцирање на сликата и фактот што $J_o(0)=1$, $J_o'(0)=0$.

10.116. Да се реши ДР

$$tx'' + x' + 4tx = 0, \quad x(0)=3, \ x'(0)=0.$$

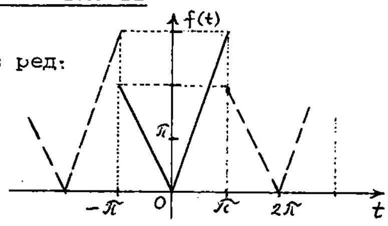
10.117. Да се покаже дека:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4p+20}}\right] = e^{2t}J_o(4t).$$

Г л а в а 11

ФУРЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ КОН ГЛ. 11



11.1. Да се разложи во фурјеов ред:

$$f(t) = \begin{cases} -2t, & -\pi \le t \le 0, \\ 3t, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

(со период 2π).

Решение. Фурјеовиот ред на функцијата $f(t)$ во сегментот $[-s,s]$ е

$$f(t) = \frac{a_o}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi t}{s} + b_n \sin\frac{n\pi t}{s}), \qquad (1)$$

каде што фурјеовите коефициенти a_n, b_n се определени со формулите:

$$a_o = \frac{1}{s}\cdot\int_{-s}^{s} f(t)dt,\quad a_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(t)\cos\frac{n\pi t}{s}dt, \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{s}\cdot\int_{-s}^{s} f(t)\sin\frac{n\pi t}{s}dt,\quad n=1,2,\dots$$

за дадената функција $f(t)$ имаме $s=\pi$ и:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -2tdt + \int_{0}^{\pi} 3tdt\right] = \frac{5\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -2t\cdot\cos ntdt + \int_{0}^{\pi} 3t\cdot\cos ntdt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2t}{n}\sin nt\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin ntdt + \frac{3t}{n}\cdot\sin nt\Big|_{0}^{\pi} - \frac{3}{n}\int_{0}^{\pi}\sin ntdt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n^2}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{3}{n^2}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right] + \frac{3}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right] =$$

$$= \frac{5}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right];\quad a_{2k}=0,\quad a_{2k-1} = -\frac{10}{\pi(2k-1)^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -2t\sin ntdt + \int_{0}^{\pi} 3t.\sin ntdt\right]$$

$$= [\text{со парцијално интегирање, како погоре}] = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Значи, фурјеовиот ред на $f(t)$ е:

$$f(t) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\dots\right) + \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2}+\dots\right)$$

11.2. а) Да се претстави со фурјеов ред во комплексна форма периодичната функција $f(t)$, со период 2π, определена на сегментот $[-\pi,\pi]$ со равенството $f(t) = \mathrm{ch}t$.

б) Користејќи го тоа, да се напише фурјеовиот ред на таа функција во реална форма.

Решение. а) Комплексната форма на фурјеовиот ред на дадена функција $f(t)$ на сегментот $[-s,s]$ (односно на $[-\pi,\pi]$) е

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{s}t} \left(= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}\right), \tag{1}$$

каде што

$$c_n = \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{t}t}dt \left(= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\right). \tag{2}$$

За $f(t) = \mathrm{ch}t$, според (2), имаме:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}t\cdot e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} + e^{-(1+in)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{1-in}\,e^{(1-in)t} - \frac{1}{1+in}\cdot e^{-(1+in)t}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{1+in}{1+n^2}(e^{\pi}\cdot e^{-int}-e^{-\pi}\cdot e^{int}) - \frac{1-in}{1+n^2}(e^{-\pi}\cdot e^{-int}-e^{\pi}\cdot e^{int})\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+n^2)}\cdot\left[(1+in)\cos n\pi\cdot 2\mathrm{sh}\pi + (1-in).\cos n\pi\cdot 2\mathrm{sh}\pi\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}\cos n\pi\cdot(1+in+1-in) = \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Значи, според (1),

$$f(t) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot e^{int}.$$

б) Од врските

$$c_0 = a_0,\ c_n = a_n - ib_n,\quad c_{-n} = a_n + ib_n, \tag{3}$$

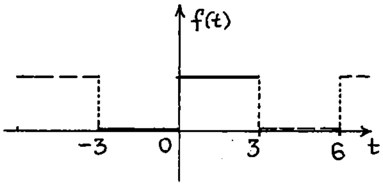
$(n=1,2,3,\dots)$ и фактот што $c_n = \overline{c}_{-n}$, добиваме

$$a_n = \frac{1}{2}(c_n + c_{-n}) = \mathrm{Re}\,c_n,\ b_n = \frac{i}{2}(c_n - c_{-n}) = -\mathrm{Im}\,c_n. \tag{4}$$

Бидејќи $c_n = \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2+1} = c_{-n}$, добиваме $a_n = c_n$, $b_n = 0$, па

$$f(t) = \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nt}{n^2+1}\right].$$

11.3. Да се најде: а) спектралната низа, б) амплитудниот спектар на периодичната функција $f(t)$, со период 6, определена на интервалот $(-3,3)$ со (црт. 1):



Црт. 1

$$f(t)=\begin{cases}0, & -3<t<0,\\ 2, & 0<t<3.\end{cases}$$

Решение. Спектрална низа на $f(t)$ е низата комплексни броеви c_n, определени со формулата (2) во зад. 11.2; реалната низа со општ член $|c_n|$ се вика амплитуден спектар, а низата (ψ_n), при што $\operatorname{tg}\psi_n = b_n/a_n$ (каде што a_n и b_n се обичните Фурјеови коефициенти) се вика фазов спектар.

За дадената функција, според (2) од зад. 11.2, имаме:

$$c_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)e^{-i\cdot\frac{n\pi}{3}t}dt = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(0)e^{-i\frac{n\pi}{3}t}dt + \frac{1}{3}\int_{0}^{3}2\cdot e^{-i\frac{n\pi}{3}t}dt =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left[-\frac{3}{in\pi}\cdot e^{-i\frac{n\pi}{3}t}\right]\Bigg|_0^3 = \frac{2i}{n\pi}\cdot(e^{-in\pi}-1) = \frac{2i}{n\pi}((-1)^n-1),$$

(за $n\neq 0$); за $n=0$: $c_o = a_o = \frac{1}{3}\cdot\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{1}{3}\cdot 2t\Big|_0^3 = 2$. Значи:

а) Спектралната низа (c_n) на $f(t)$ е определена со:

$$c_o = 2,\quad c_n = \frac{2i}{n\pi}((-1)^n-1),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Да забележиме дека, според (4) од зад. 11.2,

$$a_o = 2,\ a_n = 0,\quad b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

па и $b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi}$, $b_{2k} = 0$ $(k=1,2,\dots)$.

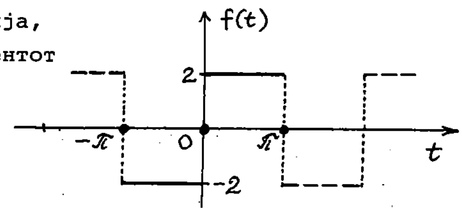
б) Бидејќи $|c_n| = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$ за $n\neq 0$ и $|c_o| = 2$, амплитудниот спектар на $f(t)$ е: $(|c_n|)$: $2, \frac{4}{\pi}, 0, \frac{4}{3\pi}, 0, \frac{4}{5\pi}, 0, \dots$

11.4. Дадена е диференцијалната равенка

$$x'' - x = f(t), \tag{1}$$

каде што $f(t)$ е периодична функција, со период 2π, определена на сегментот $[-\pi,\pi]$ со равенствата

$$f(t)=\begin{cases}-2, & -\pi<t<0,\\ 2, & 0<t<\pi,\\ 0, & t=0,-\pi,\pi.\end{cases}$$



Да се најде решение на (1)' во облик на фурјеов ред.

<u>Решение</u>. Ќе го најдеме фурјеовиот ред на f(t), а потоа ќе бараме решение x(t) на (1) во обликот

$$x(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt + B_n\sin nt), \tag{2}$$

каде што коефициентите A_n, B_n треба да се определат. За f(t) имаме:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{\pi}\left[-2\int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt + 2\int_{0}^{\pi} e^{-int}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{in}e^{-int}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{in}e^{-int}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= -\frac{4i}{\pi n}(1-(-1)^n) \quad \text{за} \quad n\neq 0; \quad c_0 = a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Значи: $a_n=0, b_n=-\mathrm{Im}\,c_n = \frac{4}{\pi n}(1-(-1)^n)$, $b_{2k}=0$, $b_{2k-1} = \frac{8}{(2k-1)\pi}$ (k=1,2,..), па

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \tag{3}$$

Го диференцираме редот (2) двапати:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-nA_n\sin nt + nB_n\cos nt), \quad x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2A_n\cos nt - n^2B_n\sin nt)$$

и заменуваме во (1), имајќи го предвид (3); добиваме:

$$-\frac{1}{2}A_0 - \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2+1)A_n\cos nt + (n^2+1)B_n\sin nt] = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

т.е. $\frac{1}{2}A_0 - (n^2+1)A_n\cos nt - (n^2+1)B_n\sin nt = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2k-1}\cdot\sin(2k-1)t.$

Споредувајќи, заклучуваме:

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0, \quad B_{2k} = 0, \quad -[(2k-1)^2+1]B_{2k-1} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2k-1},$$

$$B_{2k-1} = -\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)[(2k-1)^2+1]}.$$

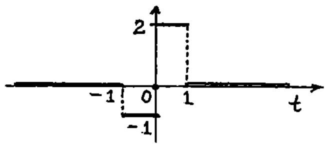
Значи, бараното решение на (1) е

$$x(t) = -\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)[(2n-1)^2+1]}.$$

Забелешка. На крајот треба да провериме дали добиениот ред е конвергентен (во некој интервал); во конкретниов случај, редот е конвергентен (провери!).

<u>11.5</u>. Да се претстави со фурјеов интеграл функцијата

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0<t<1, \\ -1, & -1<t<0, \\ 0, & t=0, |t|>1. \end{cases}$$



Решение. Ако функцијата $f(t)$ е апсолутно интеграбилна на целата оска Ot (т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$) и е глатка по делови (т.е. $f(t)$ и $f'(t)$ се непрекинати по делови) на секој сегмент, тогаш нејзиниот Фурјеов интеграл

$$\int_0^{\infty} \left[A(w)\cos wt + B(w)\sin wt\right]dw,$$

каде што

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt, \tag{1}$$

е еднаков со $f(t)$ во секоја точка на непрекинатост на $f(t)$, а е еднаков со $\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$ во секоја точка на прекин на $f(t)$. Поради тоа, ставаме

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left[A(w)\cos wt + B(w)\sin wt\right]dw. \tag{2}$$

Дадената функција $f(t)$ ги задоволува условите на наведената теорема.

Според (1), имаме:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-1}^{0} \cos wt\,dt + 2\int_0^1 \cos wt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{w}\sin wt\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{w}\sin wt\Big|_0^1\right] = \frac{\sin w}{\pi w};$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-1}^{0} \sin wt\,dt + 2\int_0^1 \sin wt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{w}\cos wt\Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{w}\cos wt\Big|_0^1\right] = \frac{1}{\pi w}\,(2-3\cos w).$$

Заменувајќи во (2), го добиваме бараното претставување на $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{w}\left[\sin w\cdot\cos wt + (2-3\cos w)\sin wt\right]dw.$$

11.6. Да се напише фурјеовиот интеграл во комплексна форма за функцијата

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (a > 0).$$

Решение. Функцијата $f(t)$ ги задоволува условите од интегралната теорема на Фурје. Комплексната форма на фурјеовиот интеграл на $f(t)$ е:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(w)e^{iwt}dw, \tag{1}$$

каде што

$$C(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt. \tag{2}$$

Имаме:

$$C(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-iwt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-iwt}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}dt =$$
$$= \frac{a}{\pi(a^2+w^2)}. \qquad (3)$$

Заменуваме во (1) и добиваме

$$f(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{a^2+w^2}\,dw. \qquad (4)$$

11.7. Да се напише фурјеовиот интеграл во реална форма за функцијата

$$f(t) = e^{-a|t|} \qquad (a>0),$$

(зад. 11.6) користејќи ја:

а) комплексната форма [(4) во зад. 11.6],

б) врските меѓу $C(w)$ и $A(w)$, $B(w)$,

в) согледувајќи дека $f(t)$ е парна.

Решение. а) Ги одвојуваме реалниот и имагинарниот дел во комплексната форма на фурјеовиот интеграл за $f(t)$ (в. зад. 11.6):

$$f(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{a^2+w^2}\,dw = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wt + i\sin wt}{a^2+w^2}\,dw =$$
$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos wt}{a^2+w^2}\,dw + \frac{ia}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin wt}{a^2+w^2}\,dw.$$

Подинтегралната функција во последниот интеграл е непарна, па тој е нула, а во претпоследниот е парна, па може да се земе двапати од 0 до $+\infty$; затоа:

$$f(t) = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos wt}{a^2+w^2}\,dw. \qquad (1)$$

б) Од формулите

$$C(w) = \tfrac{1}{2}[A(w)-iB(w)], \quad C(-w) = \tfrac{1}{2}[A(w)+iB(w)], \qquad (2)$$

имаме $C(-w) = \overline{C(w)}$ и

$$A(w) = C(w)+C(-w), \quad B(w) = i\,[C(w)-C(-w)]. \qquad (3)$$

Заменувајќи во (3) $C(w) = a/\pi(a^2+w^2)$ (в. (3) во зад. 11.6), добиваме

$$A(w) = \frac{a}{\pi(a^2+w^2)} + \frac{a}{\pi[a^2+(-w)^2]} = \frac{2a}{\pi(a^2+w^2)}, \quad B(w) = 0,$$

па според формулата (2) од зад. 11.5, ја добиваме (1) - реална форма на фурјеовиот интеграл за f(t).

в) Ако функцијата f(t) е парна, тогаш и f(t)·coswt е парна, а f(t)·sinwt е непарна, па (како погоре, во а)):

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\,dt = \frac{2a}{\pi(a^2+w^2)} \tag{4}$$
$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt = 0;$$

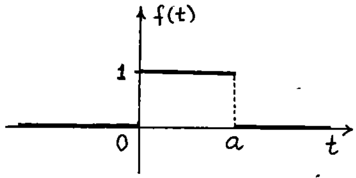
според формулата (2) од зад. 11.5, го добиваме претставувањето (а) за f(t).

(Аналогно, ако f(t) е непарна:

$$A(w) = 0, \quad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin wt\,dt.) \tag{5}$$

11.8. Дадена е функцијата

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t\le a, \\ 0, & t<0 \text{ и } t>a. \end{cases}$$



а) Да се најде спектралната функција C(w) и фурјеовиот интеграл во комплексна форма.

б) Користејќи ја комплексната, да се најде реалната форма на фурјеовиот интеграл за f(t).

Решение. а) Имаме (в. (2) во зад. 11.6):

$$C(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a} e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi wi}(1-e^{-iaw}).$$

Според (1) од 11.6:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w}(1-e^{-iaw})e^{iwt}dw. \tag{1}$$

б) Да ги одвоиме реалниот и имагинарниот дел на (1). Имаме:

$$\frac{1}{2\pi i}(1-e^{-iwa})e^{iwt} = \frac{1}{2\pi i}(e^{iwt}-e^{iw(t-a)}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}[\sin wt-\sin w(t-a)] + \frac{i}{2\pi w}[\cos w(t-a)-\cos wt].$$

Увидувајќи дека последниот собирок е непарна функција по w, заклучуваме дека нејзиниот интеграл од $-\infty$ до $+\infty$ е нула; бидејќи, пак, претпоследниот собирок е парна функција по w, нпр. g(w), ќе имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)dw = 2\int_{0}^{+\infty} g(w)dw.$$

Според тоа, бараната реална форма, добиена од (1), е:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{w}\left[\sin wt-\sin w(t-a)\right]dw.$$

11.9. Да се најде амплитудниот спектар на функцијата $f(t)$ од зад. 11.8.

Решение. Амплитудниот спектар на $f(t)$ е модулот на спектралната функција $C(w)$ за $f(t)$, т.е. $|C(w)|$. Во зад. 11.8 најдовме

$$C(w) = \frac{1}{2w\pi i}\,(e-e^{-iwa}),$$

па

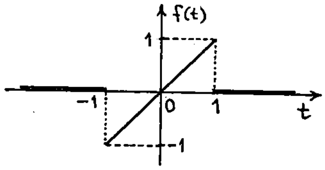
$$|C(w)| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{w}\,(1-e^{-iwa})\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{w}\cdot(1-\cos wa+i\sin wa)\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi|w|}\cdot\sqrt{(1-\cos wa)^2+(\sin wa)^2} = \frac{1}{2\pi|w|}\sqrt{4\sin^2(wa/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi|w|}\cdot\left|\sin\frac{wa}{2}\right|.$$

11.10. Да се најде Фурјеовата трансформација на функцијата

$$f(t) = \begin{cases} t, & |t|\le 1, \\ 0, & |t|>1. \end{cases}$$



Решение: Имаме:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}f(t)dt = \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} te^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[-\frac{t}{iw}\cdot e^{-iwt}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{iw}\cdot\int_{-1}^{1} e^{-iwt}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[-\frac{1}{wt}\,e^{-iw} - \frac{1}{iw}\,e^{iw} + \frac{1}{w^2}\,e^{-iwt}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[\frac{2i}{w}\cdot\cos w-2i\cdot\frac{1}{w^2}\,\sin w\right] =$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{w^2}(w\cos w-\sin w).$$

11.11. Да се најде Фурјеовата а) косинус-трансформација, б) синус-трансформација на функцијата $f(t)$ од зад. 11.10.

Решение. Ако една функција f(t) ги задоволува условите од интегралната теорема на Фурје во интервалот $(0,+\infty)$, тогаш постојат функциите

$$F_c(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)\cos wt\,dt \qquad (1)$$

$$F_s(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0 f(t)\sin wt\,dt \qquad (2)$$

наречени: фурјеова косинус-трансформација и фурјеова синус-трансформација на f(t), соодветно. Имаме:

а) $$F_c(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 t\cos wt.dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\left[\frac{t}{w} \sin wt\Big|_0^1 - \frac{1}{w}\int_0^1 \sin wt dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{w} \sin w + \frac{1}{w^2}\cdot \cos wt\Big|_0^1\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{\sin w}{w} + \frac{1-\cos w}{w^2}\right).$$

б) $$F_s(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 t\sin wt\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[- \frac{t}{w}\cdot\cos wt\Big|_0^1 + \frac{1}{w}\int_0^1 \cos wt dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[- \frac{1}{w} \cos w + \frac{1}{w^2} \sin wt\Big|_0^1\right] =$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\frac{w\cos w-\sin w}{w^2}.$$

11.12. Да се покаже дека, ако f(t) е непарна функција, тогаш

$$F(w) = \frac{1}{i} F_s(w), \quad \text{т.е.} \quad F_s(w) = iF(w). \qquad (*)$$

Да се провери (*) за функцијата f(t) од зад. 11.10.

Решение. Имајќи предвид дека $e^{-iwt}=\cos wt-i\sin wt$, добиваме:

$$F(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos wt dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin wt dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0 - \frac{i\cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin wt\cdot dt$$

(зашто f(t)coswt е непарна функција по t, а f(t)·sinwt е парна). Имајќи ја предвид (2) од зад. 11.11, добиваме:

$$F(w) = -i\cdot F_s(w), \quad \text{т.е. } (*).$$

Од резултатите на зад. 11.10 и 11.11 б) имаме:

$$F(w) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{w^2}(w\cos w - \sin w) = -i\cdot F_s(w) = \frac{1}{i}\cdot F_s(w).$$

11.13. Користејќи го методот на диференцирање (по параметар) под знакот на интегралот, да се најде синус-трансформацијата на функцијата

$$f(t) = e^{-t^2}.$$

Решение. По дефиниција (в.зад. 11.11)

$$F_s(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\sin wt\,dt.$$

Диференцирајќи по w под знакот на интегралот, добиваме

$$F_s'(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cdot t\cos wt dt.$$

Натаму, применуваме делумна интеграција, ставајќи

$$u = \cos wt,\ du = -w\sin wt dt; \quad dv = e^{-t^2}\cdot tdt, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-t^2},$$

$$F_s'(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\cos wt\Big|_0^\infty - \frac{w}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\sin wt\cdot dt = -\frac{w}{2}F_s(w).$$

Значи:

$$\frac{dF_s}{F_s} = -\frac{w}{2}dw; \quad \ln F_s = -\frac{w^2}{4} + \ln c; \quad F_s(w) = ce^{-w^2/4}.$$

Ставајќи w=0 и согледувајќи дека

$$F_s(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

добиваме

$$F_s(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}.$$

11.14. Со помош на остатоци, да се најде $F_c(w)$ за функцијата $f(t) = \frac{1}{t^2+9}$.

Решение. Функцијата $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ ги задоволува условите, наведени во учебникот "Диференцијални равенки", кн. I, §11.6 (стр. 195), па можеме да ја примениме формулата

$$F_c(w) = i\sqrt{2\pi}\cdot\sum\operatorname{Res} f(z)\cdot e^{iwz}, \tag{1}$$

каде што сумата на остатоците се зема по сите полови на f(z) што лежат во горната полурамнина.

Функцијата $f(z) = 1/(z^2+9)$ има два пола: $z_1=3i$, $z_2=-3i$, а само едниот се наоѓа во горната полурамнина. Значи:

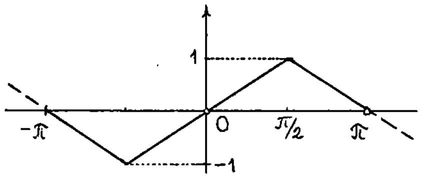
$$F_c(w) = i\sqrt{2\pi}\cdot\underset{3i}{\mathrm{Res}}\,\frac{e^{iwz}}{z^2+9} = i\sqrt{2\pi}\cdot\frac{e^{iwz}}{2z}\bigg|_{z=3i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}\,e^{-3w}.$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ КОН ГЛ. 11

11.15. Да се разложи во фурјеов ред следнава функција:

а) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0\le t<\pi \\ -2, & -\pi\le t<0 \end{cases}$ (период 2π)

б) f(t) е зададена со графикот (период 2π)



в) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0\le t<3 \\ 0, & -3\le t<0 \end{cases}$ (период 6)

г) $f(t) = A(1 - \frac{t}{L})$ во сегментот $[0,L]$.

Дадената функција f(t) да се разложи а) по синусите, б) по косинусите (11.16-11.17).

11.16. $f(t) = t$, $0<t<2$.

11.17. $f(t) = t^2$, $0<t<\pi$.

11.18. Да се најде збирот на редот:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

користејќи ги разложувањата од 11.17.

11.19. Тригонометриската форма на фурјевиот ред за f(t),

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \qquad (1)$$

да се претстави во фазно-агловна форма:

$$f(t) = \frac{1}{2} c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t+\psi_n) \tag{2}$$

(т.е. да се изразат c_o, c_n, ψ_n со помош на a_o, a_n, b_n); притоа $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

11.20. Да се претстави со фурјеов ред во комплексна форма периодичната функција f(t) (со период 2π), определена со равенството

а) $f(t) = e^t$ во $[0,2\pi)$; б) $f(t) = \cos \frac{t}{2}$ во $[-\pi,\pi]$.

Користејќи го тоа, да се запише во реална форма фурјеовиот ред на таа функција.

Во зад. 11.21-11.22 да се разложи во фурјеов ред функцијата f(t), користејќи ја комплексната форма.

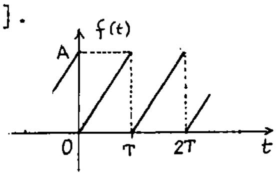
11.21. $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0<t<\pi \\ 0, & -\pi<t<0 \end{cases}$ (период 2π)

11.22. $f(t) = \text{sh}t$ во $(-\pi,\pi)$.

Во зад. 11.23-11.24, за дадената функција f(t) да се најде фурјеовиот ред во: а) тригонометриска форма (в. (1) во 11.19), б) екпоненцијална (т.е. комплексна) форма, в) фазно-агловна форма.

11.23. $f(t) = \pi + t$ во $[-\pi,\pi]$.

11.24. f(t) - со графикот:



Да се најде решение во облик на тригонометриски фурјеов ред на дадената линеарна ДР (11.25-11.31).

11.25. $x'' - x = f(t)$, а) $f(t) = \pi + t$ на $[-\pi,\pi]$;

б) $f(t) = \begin{cases} -\pi, & -\pi<t<0 \\ 0, & 0<t<\pi \end{cases}$ (f(t) - периодична).

11.26. $x'' - 2x = f(t)$, $f(t) = \frac{1}{2}(\pi-t)$ на $(0,2\pi)$, период 2π.

11.27. $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $f(t) = \frac{t^2}{4}$ во $(-\pi,\pi)$, период 2π,

$|\omega| \neq 0,1,2,\ldots$ (општо решение).

11.28. $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $f(t) = \frac{\pi}{4}|\sin t|$ во $(-\pi,\pi)$, период 2π, $|\omega| \neq 0,2,4,\ldots$

11.29. $x'' + x = f(t)$, $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ на $(0,2\pi)$, со период 2π.

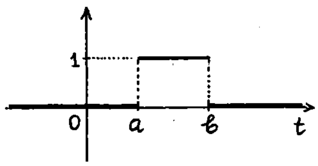
11.30. $x'' + cx' + x = f(t)$, c=константа > 0, $f(t) = K\sin t$.

11.31. $x'' + 0{,}02x' + 25y = f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} t+\pi/2, & -\pi<t<0, \\ -t+\pi/2, & 0<t<\pi, \end{cases} \qquad f(t+2\pi) = f(t).$$

Да се претстави со фурјеов интеграл функцијата (11.32-11.35).

11.32. $f(t) = \begin{cases} h, & |t|< a, \\ 0, & |t|> a. \end{cases}$



11.33. $f(t) = \operatorname{sgn}(t-a) - \operatorname{sgn}(t-b)$ $(b > a > 0)$.

11.34. $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau}, & |t| \le \tau \\ 0, & |t|>\tau \end{cases}$

11.35. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t|\le\pi \\ 0, & |t|>\pi. \end{cases}$

11.36. Функцијата $f(t) = e^{-t}$ $(0<t<+\infty)$ да се претстави со фурјеов интеграл, продолжувајќи ја а) парно, б) непарно.

11.37. Да се претстави со фурјеов интеграл функцијата

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} t, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$$

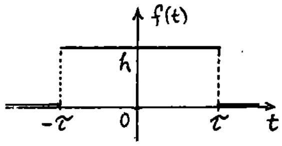
а) со формулата од зад. 11.5,

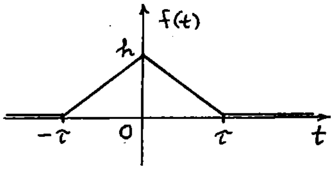
б) како непарна функција,

в) во комплексна форма.

11.38. Да се покаже дека спектралната функција на $f(t) = e^{-at}$ за $t > 0$ и $f(t) = 0$ за $t < 0$ (при $a > 0$) е $C(w) = \frac{1}{a+iw}$.

11.39. Да се најде амплитудниот спектар на: а) правоаголниот





иммпулс со висина h и траење (должина) 2τ; б) импулсот во форма на триголник со основа 2τ и висина h. Да се нацрта графикот на спектарот.

Да се најде фурјеовата трансформација на следниве функции (11.40-11.45).

11.40. $f(t)=\begin{cases} h, & |t|\le 1, \\ 0, & |t|>1. \end{cases}$ 11.41. $f(t)=e^{-|t|}$.

11.42. $f(t)=\begin{cases} \cos\frac{t}{2}, & |t|\le\pi, \\ 0, & |t|>\pi. \end{cases}$ 11.43. $f(t)=te^{-|t|}$.

11.44. $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & |t|<1, \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$. Пресметај: $I=\int_0^\infty \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\frac{x}{2}dx$

11.45. $f(t)=\begin{cases} t/2, & |t|\le 1, \\ 1/2, & 1<|t|\le 2, \\ 0, & |t|>2. \end{cases}$

Да се најде фурјеовата косинус-трансформација на следниве функции (11.46-11.47).

11.46. $f(t)=\begin{cases} 2t-3, & 0\le t\le\frac{3}{2}, \\ 0, & 3/2<t<+\infty. \end{cases}$

11.47. $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t\le\pi, \\ 0, & t>\pi. \end{cases}$

11.48. Да се најде фурјеовата косинус-трансформација на следнава функција:

$$f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<1 \\ 1/2, & t=1 \\ 0, & t>1 \end{cases}$$

Користејќи го методот на остатоци, да се најде $F_c(w)$ (одн. $F_s(w)$) на дадената функција (11.49-11.50).

11.49. $f(t) = \frac{1}{t^4+1}$, $F_c=?$ 11.50. $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$, $F_s=?$

* * *

11.51. Докажи дека, ако $f(t)$ е парна, тогаш $F(w) = F_c(w)$.

11.52. Докажи дека косинус-трансформацијата на функцијата $f(at)$, $a>0$ е $\frac{1}{a}\cdot F_c(\frac{w}{a})$, каде што $F_c(w)$ е косинус-трансформацијата на $f(t)$.

11.53. За една функција велиме дека е дуална на себе при дадена интегрална трансформација, ако по трансформацијата нејзиниот облик не се менува (се заменува само аргументот t со w).

Да се покаже дека:

а) $f(t) = e^{-t^2/2}$ е дуална на себе при фурјеовата синус-трансформација;

б) $f(t) = e^{-t^2/2}$ е дуална на себе при фурјеовата косинус-трансформација.

Упат. Како во зад. 11.13.

11.54. Да се провери точноста на равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw$$

(Парсевалово равенство) за функцијата

а) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t|<a, \\ 0, & |t|>a>0. \end{cases}$ б) $f(t) = e^{-a|t|}$ $(a>0)$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА (ГЛ. 1)

1.21. а), в) - ѓ) Да. б) Не. 1.23. а) $y' + y = 0$. б) $y' = e^{-y}$. в) $y' = -\sin x$. г) $y' = 1 + y^2$. д) $x + yy' = 0$. ѓ) $x(1+y')e^y + x - yy' = 0$. 1.24. а) $y'' = 0$. б) $y'' = y$. в) $y'' + y = 0$. 1.25. а) $y = -x^2$. б) $y = \frac{2}{x} - x$. в) $\ln y = 1 - 1/x$. г) $6y = (x+1)^3 + x - 1$. 1.26. $y = 2/x$. 1.27. а) $x_1 = (k/20\ m)t_1^5 + v_o t_1 + x_o$. Уп. Силата е еднаква на масата по забрзувањето, т.е. $F = m\ddot{x}$, па $m\ddot{x} = kt^3$; резултатот се добива со две последователни интегрирања. б) $x_1 = -(k/m\omega^2)\sin\omega t_1 + (k/m\omega)t_1$. в) $x_1 = (k/mb^2)\cdot(bt_1 + e^{-bt_1} - 1)$. 1.28. а) $y' = e^{x-y}$. б) $2yy' = xy'^2 + x$ $(x \neq 0)$. в) $y = 2xy' + xy'^2$. г) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$. д) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$. ѓ) $x^2y''' - 2y' = 0$. 1.29. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$. 1.30. $2y'y''' - 3y''^2 = 0$. Уп. Бидејќи $c \neq 0$, имаме $y = (Ax+B)/(x+D)$, $A = a/c$, $B = b/c$, $D = d/c$, т.е. само три суштински произволни константи. 1.31. $x^2y'' + xy' + y = 0$. 1.32. а) $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$; $(x^2-2xy)y'^2 - 2xyy' + y^2 - 2xy = 0$. б) $(x-p)^2 + (y-r)^2 = r^2$; $(y'^2+1)^3 = (y''y+y'^2+1)^2$. 1.33. а) $(y-2)^2 = C(x-1)$; $2y'(x-1) = y-2$. б) $y-b = a(x-1)^2$; $(x-1)y'' - y' = 0$.
1.34. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$. 1.35. а) $dP/dt = kP(100.000-P)$, k е константа на пропорционалноста. б) $dP/dT = kP/T^2$. в) $m\,\frac{dv}{dt} = F$ или $m\,\frac{d^2s}{dt^2} = F$. 1.36. а) $x^2 + y^2 = C$ (општ интеграл); $xy + 1 = 0$ (сингуларен интеграл). б) $e^x + e^{-y} = C$. Уп. $e^{x+y} = e^x e^y$. в) $y = \arcsin(x^2+C)$. г) $x^2e^{2y} = Cy$. д) $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$. ѓ) $\operatorname{arctg} y + \ln C\sqrt{1+x^2} = 0$. е) $y^2 = 2\cos x + C$; $y = k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$. Уп. $\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2} = 2\sin x \sin y$. ж) $e^{x+y} = C(e^y - 1)$. з) $\rho = Ce^{\varphi}$.

ѕ) $\rho \sin\phi = C$. 1.37. а) $(1+x^2)(1+2y) = C$ (општо); $(1+x^2)(1+2y) = 35$. б) $y = e^{Cx}$, $y = e^x$. в) $y = Cx/(1-Cx)$, $y = -x/(2+x)$. г) $y/\sqrt{1-y^2} = (x+C)/(1-Cx)$, $y = x\sqrt{1-y^2}$. д) $\rho = \sec\phi$. 1.38. $f(3) = 3^6 = 729$. Уп. Општиот интеграл на ДР $dy/y = k(1+\ln x)dx$ е $y = Cx^{kx}$. Од $x = 1$, $y = 1$ и $x = 2$, $y = 16$ за константите C и k се добива $C = 1$, $k = 2$, па $f(x) = x^{2x}$. 1.39. а) $y = 3 \operatorname{arctg} \frac{x+y}{3} + C$; смена: $u = x + y$, $u = u(x)$. б) $x + y + 1 = \operatorname{tg}(x+C)$; $x + y + 1 = u$. в) $(x+y)^2 + 2(x+y+1) = Ce^y$; $x + y = u$. г) $\ln(4x-4y-1) = 12x + 4y - C$. 1.40. а) $1 + 2xy - x^2y^2 = C^2x^2$. б) $xy^2 = Ce^{xy}$ (општ); $xy + 1 = 0$ (сингуларен). в) $y = Cx(1+x) - x$; $x = 0$. г) $y = x^2(C+\ln x)$. д) $2y/(x+y) + 2\ln[x/(x+y)] = C + 1/(x+y)^2$. Уп. Од смените, добиваме: $dx + dy = dv$, $ydx - xdy = y^2dw$, $y = v/(w+1)$, па дадената ДР се сведува на ДР $dv/v + dw/w(1+w)^2 = 0$. ѓ) $x = Cye^{1/xy}$. 1.41. $a d\rho/\rho(\rho^2-b) = d\phi$; за $a = 2$, $b = 0$: $2d\rho/\rho^3 = d\phi$; $\rho^2(\phi+C) + 1 = 0$, т.е. $(x^2+y^2)(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C) + 1 = 0$. 1.42. $y = 3e^x - 2$. 1.43. а) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = C^2$. 1.44. а) $y = x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. б) $y^3 = x^3(C-\ln x^3)$. в) $y = xe^{Cx}$. г) $x \sin \frac{y}{x} = C$. д) $x^3 + y^3 = Cxy$. ѓ) $x^2 = 2Cy + C^2$. е) $(y-x)^{a-b}(y+x)^{a+b} = C$. 1.45. а) $3x + 2y + 7\ln(x+y-3) = C$. б) $4\ln(x+y-1) = (x+5)/(x+y-1) + C$. в) $x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y = C$. ѓ) $y + 2 = C \exp\{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}\}$. д) $\ln \frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{y+x}$. 1.46. а) $y^3 = y^2 - x^2$. б) $(x-y-3)^2 + 10x = 0$. в) $(x+y+1)^2 = y - 2x + 4$. 1.48. $y^2 + 2xy = 0$. 1.49. $(y-x)^2(2y+x) = C$. Уп. $yy' = (x+y)/2$. 1.50. $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Уп. $\operatorname{tg}\alpha = y/x$, $y' = \operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$, $y' = 2(y/x)/[1-(y/x)^2]$; в.зад. 1.10. 1.51. $\rho = Ce^{-\phi/a}$, т.е. $\sqrt{x^2 + y^2} = C \exp\{\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\}$. Уп. Ако β е аголот меѓу тангентата и $0x$, а γ е аголот меѓу радиус-векторот и $0x$, тогаш $y/x = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = (\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$, а по $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = y'$ се добива $y/x = (y'+a)/(1-ay')$ - ДР на бараната фамилија. 1.52. $t = \frac{40(\ln 5-\ln 0{,}32)}{\ln 5 - \ln 2} \approx 120$ sek. Уп. $\frac{dv}{dt} = kv$, $v = Ce^{kt}$; од дадените услови се добива $C = 5$ и $e^k = (\frac{2}{5})^{1/40}$, па $v = 5(\frac{2}{5})^{t/40}$.

1.53. а) $x_{max} = 17640$ cm при $t = 6$. б) 12 sek. Уп. Ако телото со маса m е на растојание x од земјата по време t, тогаш силата е еднаква со тежината: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, т.е. $\ddot{x} = -980$, $\dot{x} = 5880 - 980t$, $x = 5880t - 490t^2$. 1.54. а) $\frac{dv}{dt} = g - kv$ (k е константа на пропорционалноста), $v = 0$ при $t = 0$; $v = \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$; $s = 0$ за $t = 0$, па $s = \frac{g}{k}\left[t+\frac{1}{k}(e^{-kt}-1)\right]$. б) $v_{max} = \frac{g}{k}$. 1.56. $v^{2-n} = V^{2-n} - \frac{k}{m}(2-n)x$ за $n \neq 2$, $v = Ve^{-kx/m}$ за $n = 2$ (k е коефициентот на пропорционалноста). Уп. $m\frac{dv}{dt} = 0 - kv^n$, $m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$, па $mvdv = -kv^n dx$, т.е. $mv^{1-n}dv = -kdx$. 1.58. 3,2 кг. 1.59. а) $x = 150(1-e^{-0,02t})$. б) 20 мин. Уп. Ако x е количеството сол во садот во моментот t (значи $x = 0$ за $t = 0$), тогаш во секој литар, во моментот t има $x/500$, па $\frac{dx}{dt}$ (кг/мин) $= 0,3$ (кг/л)$\cdot$ $\cdot 10$(л/мин) $- \frac{x}{500}\cdot 10$(л/мин), т.е. $dx/dt = 3 - x/50$. 1.60. а) $x = 300(1-e^{-0,01t})$; $x = 50$ за $t \approx 19$ мин. б) $x = 60(1-e^{-t/20})$. Во садот не може, при тие услови, да се соберат 50 кг сол. Формално, $x = 50$ за $t \approx 36$ мин; но, за $t = 35$ мин садот ќе биде сосем празен. 1.61. $T = \frac{B}{ak}\sqrt{\frac{2H}{g}}$. Уп. За време dt, висината x на водата ќе се измени за dx. Промената на волуменот на водата, $-Bdx$, е еднаква со количеството на истечената вода, $ak\cdot vdt = ak\sqrt{2gx}\,dt$, па $-Pdx = ak\sqrt{2gx}\,dt$; $t = \frac{B}{ak}\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot(\sqrt{H} - \sqrt{x})$. 1.62. а) 6,01 мин. Уп. Од $T = T_c + (T_o - T_c)e^{-kt}$ (в. (4) од зад. 1.20), за $T = 70$ при $t = 5$ имаме $70 = 15 + 65e^{-5k}$, па $e^{-k} = (55/65)^{1/5}$, т.е. $k = \frac{1}{5}(\ln 65 - \ln 55)$. Значи, $T = 15 + 65\cdot(55/65)^{t/5}$. За $T = 60$: $(55/65)^{t/5} = 65/45$, т.е. $t = 5(\ln 65-\ln 45)/(\ln 65-\ln 55) \approx 11,01$. Значи: $11,01 - 5 = 6,01$. б) 30 мин. в) 37 мин. 1.63. а) $P = P_o(1 + \frac{a}{100})^t$. б) $P_1 \approx 32,1$ мил. в) Во 2011 г. Уп. $dP/dt = kP$, $P = Ce^{kt}$, $C = P_o$. Бројот на жителите по една година, со прираст $a\%$ ќе биде $P_o + aP_o/100$, па заменувајќи $P = P_o + aP_o/100$ во формулата $P = P_o e^{kt}$ при $t = 1$ се добива $e^k = 1 + a/100$. 1.64. а) $8x_o$. б) $10^4/8$. Уп. $dx/dt = kx$, $x = Ce^{kt}$, $C = x_o$, $x = x_o e^{kt}$. а) $t = 4$,

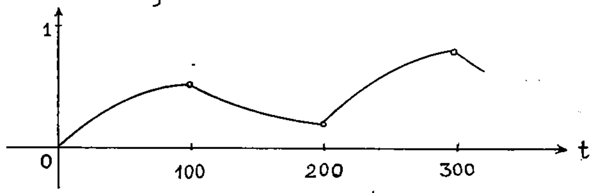
$x = 2x_o$ $e^{4k} = 2$; $t = 12$, $x = x_o e^{12k} = x_o(e^{4k})^3 = x_o(2)^3 = 8x_o$.
б) $10^4 = Ce^{3k}$, $4\cdot 10^4 = Ce^{5k}$ $C = 10^4 . e^{-3k} = 4\cdot 10^4 e^{-5k}$, па $e^k = 2$.
Значи $C = 10^4 . e^{-3k} = 10^4/8$. 1.65. $v = 14\,\frac{5+3e^{-7t/5}}{5-3e^{-7t/5}}$. Уп. (Силата на системот) = (тежината на системот) - (отпорот на воздухот), па $\frac{T}{g}\cdot\frac{dv}{dt} = T - \frac{Tv^2}{196}$, т.е. $\frac{dv}{v^2-196} = -\frac{dt}{20}$; одлево се интегрира од $v = 56$ до $v = v$, а оддесно - од $t = 0$ до $t = t$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА (ГЛ. 2)

2.31. $y = Ce^{x^2} - 2$. 2.32. $y = Cx + xe^{-x^2/2}$. 2.33. $y = 2x - 2$. 2.34. $y = x^k(e^x+C)$. 2.35. $y = x^{-k}(ax+C)$. 2.36. $y = Ce^{-p} + p - 1$. 2.37. $y = C\sin x + x^2\sin x$; $y = x^2\sin x$. 2.38. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$; $y = \sin x - 1$. 2.39. $y = (x^2+C)e^{\cos x}$. 2.40. $y = C\cdot\cos x + \sin x$. 2.41. Уп. Бидејќи $y_1(x)$ е решение на (1), со директна проверка се покажува дека и (2) е решение на (1); (2) е општо решение зашто содржи една произволна константа. 2.42. Уп. Како и 2.41; $y = \sin x + C\cdot\cos x$. 2.43. $y = -1 + C(x+x^2)$. 2.44. $x = Cy - 1 - \ln y$; $y = e^{-x-1}$. Уп. Со $y'_x = 1/x'_y$, равенката се сведува на $yx'_y - x = \ln y$ - линеарна по x. 2.45. $\cos y + x\sqrt{1+y^2} = C$. Уп. $(1+y^2)dx/dy + yx = \sqrt{1+y^2}\sin y$ е линеарна по x. 2.46. $x+\ln y = e^y(C+\int y^{-1}e^{-y}dy)$. 2.47. $x = y^2(1+Ce^{1/y})$. Уп. Се сведува на линеарна по x, dx/dy. 2.48. $x^2(1+y^2) = Cy^2$. 2.49. $1/y = 1 + Cx + \ln x$. 2.50. $1/y^2 = Ce^{x^2} + x^2 + 1$; $y^2 = 1/(1+x^2)$. 2.51. $y^2 = (2x+C)\cos^2 x$; $C = 4$. 2.52. $1/r = C\cdot\cos\omega + \sin\omega$. 2.53. $1/y = Ce^{-\operatorname{tg}x} - \operatorname{tg}x + 1$. 2.54. $y = e^{1/x-1}$. Уп. Равенката се сведува на бернулиева по x, x'. 2.55. $y = 2(e^x-x-1)$. Уп. $y' = y + 2x$. 2.56. $y = Ce^{-x/a} + x - a$; $y = x - a$. Уп. $S_T/y = a/(x-y)$, т.е. $ay' + y = x$. 2.57. а) $y = Cx + k/2x$. б) $y = x\sqrt{C+k/x^2}$ (k е коефициентот на пропорционалноста). Уп. а) $y - xy' = k/x$ - линеарна; б) $y - xy' = k/y$ - бернулиева. 2.58. а) $x = (y+1/y)/2$. б) $x = 1$. Уп. а) $x - yx' = 1/y$, па $x = Cy + 1/2y$. б) $x - yx' = 1/x^2$, па $x = y.(C+1/y^3)^{1/3}$. 2.59. $t = \frac{1}{k}\cdot\ln(1+\frac{k}{g}v_o)$, k е коефициентот на пропорционалноста. Уп. $\frac{dv}{dt} = -g-kv$.

2.60. Реш. а) Ако во моментот t хоризонталната компонента на брзината е u m/sek, а вертикалната е v m/sek, тогаш $mdu/dt = -mku$, $mdv/dt = = mg - mkv$, па $u = Ue^{-kt}$, $v = g(1-e^{-kt})/k$; следствено, $tg\phi = v/u$. б) Аголот на упатувањето на бомбата е $arctg(H/x)$, каде што x е хоризонталната промена; $dx/dt = u = Ue^{-kt}$, па $x = U(1-e^{-kt})/k$ ($x=0$ за $t = 0$). За голема висина H, ќе биде големо и t, па $e^{-kt} \to 0$ и $x \to U/k$. Значи, $\alpha = arctg(kH/U)$. 2.61. $s = g(e^{-kt} + tk - 1)/k^2$. 2.62. $vr^3 = g(r^4-a^4)/4k$ Уп. Според II Њутнов закон, $\frac{d}{dt}(mv) = mg$, па $\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{m}\frac{dm}{dt}$. За волуменот V на капката имаме $dV/dt = 4k\pi r^2$, $V = 4\pi r^3/3$, а бидејќи $m = \rho V$ (ρ е густината), $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{3k}{r}$. Следствено, $\frac{dv}{dt} = g - \frac{3kv}{r}$. Од $r = a + kt$ имаме $kdt = dr$, па $\frac{dv}{dr} + \frac{3}{r}v = \frac{g}{k}$, од што се добива последниот заклучок. 2.63. Уп. За движењето нагоре: $mvdv/dx = -mg - mkv^2$; $x = = -\frac{1}{2k}\cdot\ln(g+kv^2) + C$; од $x = 0$ и $v = Vtg\alpha$: $C = \frac{1}{2k}\ln(g+kV^2tg^2\alpha)$; за $v = 0$: $x = \frac{V^2}{2g}\cdot\ln sec^2\alpha$. За движењето надолу: $vdv/dx = g - kv^2$, па $dv/dx = 0$ дава $V^2 = g/k$ (V нема физичко значење за движење нагоре); $x = -\frac{1}{2k}\cdot\ln(g-kv^2) + C$; $x = 0$, $v = 0$: $C = \frac{1}{2k}\cdot\ln g$. Кога телото е на земја, т.е. $x = \frac{V^2}{2g}\ln sec^2\alpha$, имаме $\frac{V^2}{2g}\ln sec^2\alpha = \frac{V^2}{2g}\cdot\ln\frac{g}{g-kv^2}$, па $v^2 = = \frac{g}{k}(1-\cos^2\alpha)$, т.е. $v = V\cdot\sin\alpha$. 2.64. $q = q_o e^{-t/CR}$, $u = u_o e^{-t/CR}$. Уп. $u = q/C$, $u = iR$, $i = -dq/dt$; $dq/dt = -q/CR$. 2.66. Уп. $q = Ae^{-t/CR} + + EC\cos(\omega t-\alpha)/\sqrt{1+C^2R^2\omega^2}$, $tg\alpha = 1/CR\omega^2$, $A = -EC\cdot\sin\alpha\cos\alpha$. 2.67. а) $q = 3(1-e^{-t})$, $i = 3e^{-t}$. б) $q = 5e^{-2t}(e^t-t-1)$, $i = 5e^{-2t}(2t+1-e^t)$. в) $q = 2\sin 2t + \cos 2t - e^{-t}$, $i = 4\cos 2t - 2\sin 2t + e^{-t}$. 2.68. а) $8(1-e^{-16t})$, $i_{max} = 8$ амп. б) $8t^2e^{-16t}$, $e^{-2/8}$ 0,01692 амп. в) $8(e^{-8t}-e^{-16t})$, 2 амп. г) $6{,}4\sin 8t - 3{,}2\cos 8t + 3{,}2e^{-16t}$. 2.69. б) $i'(0) = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{\tau}$. 2.71. $\tau = 1/\ln 100 \approx 0{,}217$ sek, $R = L/\tau \approx 46$ ома. Уп. $\frac{99}{100}\cdot\frac{E}{R} = \frac{E}{R}(1-e^{-1/\tau})$. 2.72. а) $i = 4$ за $0 \le t \le 100$, $i = 4e^{-t/10}$ при $t > 100$. б) Од (7), $i = i_1 = 1 - e^{-0{,}01t}$ $(0 \le t \le 100)$; $i = i_2 = = c_2e^{-0{,}01(t-100)}$ $(100 \le t \le 200)$, при што $i_1(100) = i_2(100)$ дава

$c_2 = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$; $i = i_3 = 1 + c_3e^{-0{,}01(t-200)}$ $(200 \le t \le 300)$. а $i_2(200) = i_3(200)$ дава $c_3 = (1-e^{-1})e^{-1}-1 \approx -0{,}77$ итн. (Црт. 15). 2.73.



Црт. 15

$i(t) = 0{,}035\cdot(\cos 314t + 314.\sin 314t - e^{-t}) \approx 11\cdot\sin 314t$. 2.74. $20q' + 100q = 10$, $q(0) = 0$, $q(t) = 0{,}1(1-e^{-5t})$; $u = q/c = 10(1-e^{-5t})$; $i = dq/dt = 0{,}5e^{-5t}$. 2.75. а) $i = 2-2\cdot(1-0{,}1t)^5$ при $0 \le t \le 10$, $i = 2$ при $t > 10$. б) $i = (t-1)\ln(1-t)$. 2.76. $y = Ae^{-x} + Be^{2x}$. 2.77. $y = Ae^{-4x} + Be^{x/2}$. 2.78. $y = (A+Bx)e^{-3x}$. 2.79. $y = (Ax+B)e^{-2x/3}$.
2.80. $y = 2e^{x}\cos\frac{x}{2}$. 2.81. $y = e^{x}(\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}e^{x}\cos(3x-\pi/4)$.
2.82. $y = \operatorname{sh}x$. 2.83. $y_{min} = -1/4$ за $x = \ln 2$; $y = 0$ за $x = \ln\frac{4}{3}$.
2.84. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$; а) $A = B = 1/2$; б) $A = 1/2$, $B = -1/2$. 2.85. а) $y'' - 7y' + 12y = 0$. б) $y'' - 2y' + y = 0$. в) $y'' - 3y' = 0$. г) $y'' + 4y = 0$. д) $y'' + ay' - (a+1)y = 0$, a е произволен број.
2.86. а) $y = A\cos\pi x + B\sin\pi x$. б) $y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$. 2.87. $a = 2p$, $b = p^2 + q^2$. Уп. $r^2 + ar + b = (r-r_1)(r-r_2) = (r-p-iq)(r-p+iq) = r^2 - 2pr + p^2 + q^2$. а) $y'' + 9y = 0$. б) $y'' - 2y' + 5y = 0$. 2.89. Уп. Замени ја функцијата во дадената ДР и уочи дека $r + r = -a$ (ако и само ако r е двоен корен). 2.91. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - 4/3$. 2.92. $y = C_1 + C_2e^{x/7} - 7x^2 - 98x$. 2.93. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + (20x-5x^2)e^{-2x}$.
2.94. $y = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2-6x+7)e^{x}$. 2.95. $y = \frac{1}{6}(\operatorname{sh}2x + 2\operatorname{ch}2x - 2e^{x})$.
2.96. $y = e^{x} + \sin x$. 2.97. $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x) - \frac{1}{2}xe^{x}\cos x$. 2.98. а) $-\frac{x}{4}\cos 2x$. б) $x\cos x + x^2\sin x$. в) $-\frac{1}{2}(9\cos 3x + 7\sin 3x)$. г) $\frac{1}{5}e^{x}(2\sin x - \cos x)$. 2.100. а) $-3x^2 - 2x + \cos x + 3\sin x$. б) $\frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\cos 4x$. Уп. $2\cos ax.\cos bx = \cos(a-b)x + \cos(a+b)x$. в) $\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{2}$. Уп. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. 2.101. $y = e^{x}[A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}]$; $A = -1/8$, $B = 1/2$. Уп. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. 2.102. ДР на еласти-

чната линија: $EIY'' = P(\ell - x)$; $y = \frac{P}{2EI}(\ell x^2 - x^3/3)$; за $x = \ell$: $y = \frac{P\ell^3}{3IE} = \frac{2000.600^3}{90000.21.10^5} = 2,3$ cm. 2.104. $5P\ell^3/6EI$; $23P\ell^3/24EI$. 2.105. а) $y = \cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos(t+\pi/4)$; б) $y = \cos t$; в) $y = \sqrt{2}\cos(t-\pi/4)$; $y(\pi) = -1$, $y(2\pi) = 1$; $\dot{y}(\pi) = 1, 0, -1$; $\dot{y}(2\pi) = -1, 0, 1$. 2.107. $y = \left[(\alpha y_o + v_o)t + y_o\right]e^{-\alpha t}$. 2.108. $\dot{y} = 0$ дава $t = t_o = 1/\alpha - c_2/c_1$, т.е. $\alpha < (v_o + \alpha y_o)/y_o$ (в. 2.107), т.е. $v_o/y_o > 0$. Значи, максимум или минимум се добива ако y_o и v_o имаат ист знак. Екстремна амплитуда: $(y_o + v_o/\alpha)\cdot \exp\{-1+\alpha y_o/(v_o+\alpha y_o)\}$. 2.109. 1,19 единици. 2.110. $x = e^{-0,055t}(3\cos\pi t + 0,052\cdot\sin\pi t)$. Уп. $\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = 0$ (2a i b се константи), оптшо решение: $x = e^{-at}\,A\left[\cos\sqrt{b-a^2}\,t + B\sin\sqrt{b-a^2}\,t\right] = e^{-at}(A\cdot\cos\pi t + B\cdot\sin\pi t)$, зашто периодот $2\pi/\omega = 2$, па $\pi = \omega = \sqrt{b-a^2}$; $t = 0$, $x = 3$ дава $A = 3$; кога $t = 20$ (по 10 осцилации): $1 = e^{-20a}\cdot 3$, па $a \approx 0,55$; $t = 0$, $\dot{x} = 0$ дава $B \approx 0,052$. 2.111. $u(t) = 200\cdot\cos 10^4 t$; 1590 цикл/cek. Уп. $u_L + u_R + u_C = 0$, $u_L = Lq''$, $u_R = 0$, $u_C = q/c$, па $L'' + q/c = 0$; види и 2.30. 2.112. $i = -100e^{-100t}$. 2.113. $V = \frac{10}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{2}E_o\omega t\cdot\sin\omega t$. 2.114. а) $\bar{i} = e^{-tR/L}(A\cdot\cos pt + B\cdot\sin pt)$, $p^2 = L/C - R^2/4$. б) $i = \bar{i} + E_oC\omega\cos(\omega t-\alpha)/\sqrt{(1-\omega^2CL)^2 + C^2R^2\omega^2}$, $\mathrm{tg}\alpha = CR\omega/(1-\omega^2CL)$. 2.115. Види 2.114 б), вториот собирок (по $\bar{i}$). 2.116. а) $q = \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cdot\cos 3t + 2\cdot\sin 3t)$. б) $i = \frac{dq}{dt} = \frac{75}{52}(2\cdot\cos 3t + 3\cdot\sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}\cdot(17\cdot\sin 3t + 6\cdot\cos 3t)$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА (ГЛ. 3)

3.21. Уп. Бидејќи е решение на (1), $\Phi(x)$ ги има сите изводи до n-тиот. Од (1), $\Phi^{(n)}(x)$ може да се изрази како збир (од производи) на непрекинати функции. 3.22. а) $-3x$. б) 0. в) $k\ell nx - (k+1)/x-1$. г) 0. 3.23. а) $c(1+x+x^2/2)$, б) $c(1+x+x^2/2!+x^3/3!)$, $c \neq 0$. 3.27. а) Не. б) Не. в) Да. г) Да. д) Не. ѓ) Да. е) Не. ж) Да. з) Не. ѕ) Не. и) Не. ј) Не. к) Да. л) Не. 3.28. Уп. Тврдењето е контрапозиција од Т.1 во §3.3. Обратното не важи: земи $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ на $(-\infty,+\infty)$. 3.29. Уп. Да се искористи зад. 3.28 односно Т.1 од §3.3. 3.30. а) 0. б) -1. в) $2e^{-2x}$. г) 0. д) 0. ѓ) x^2. е) x^2. Вронскијанот во а), б), в), е) е различен од нула во I, па функциите се линеарно независни (в. 3.28); во а), г), д), ѓ) вронскијанот не е различен од нула во I, па од тоа не може да се направи бараниот заклучок. 3.31. а) -729/20. б) 97/240. в) 1/21. г) 0. д) $\pi(\pi^2-9)/4$. ѓ) $\pi^2/4$ за $k \neq p$; 0 за $k = p$. Линеарно независни се под а), б), в), д), како и ѓ) кога $k \neq p$: линеарно зависни под г) и во ѓ) при $k = p$. 3.32. Уп. в) y_1, y_2 се линеарно зависни $\Leftrightarrow y_2 = cy_1 \Leftrightarrow (y_1,y_2) = c(y_1,y_1) \Leftrightarrow \Gamma(y_1,y_2) = 0$. 3.33. а) и б) Фундаментален систем. в) Линеарно независни; не е фундаментален систем. г) и д) Линеарно зависен. 3.34. Уп. Покажи дека x, x^2 се линеарно независни во $(-\infty,+\infty)$, а $W(x,x^2) = x^2$ има нула во $x = 0$. Потоа искористи ја последицата на Т.1' од §3.4. 3.35. а) $y'' - 4y + 3y = 0$. б) $y'' + 2y' + y = 0$. в) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$. г) $y'' - 2y' + 5y = 0$. д) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$. ѓ) $x^2y'' + xy' + y = 0$. е) $x^2y''' - 2y' = 0$. 3.37. а) $A\cdot\cos t + B\cdot\sin t$, $t = \mathrm{sh}^{-1}x$. б) $y = C_1\cos\frac{k}{x} + C_2\sin\frac{k}{x}$. в) $y = (x-2)^2\left[C_1 + C_2\cdot\ln(x-2)\right]$. 3.38. а)

$y = C_1\cos e^x + C_2\sin e^x$; $t = e^x$, $\ddot{y} + y = 0$. б) $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$; $t = \ln x$, $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$. в) $y = C_1\sin(2\sin x) + C_2\cos(2\sin x)$; $t = \sin x$. г) $y = C_1e^{3\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}}$; $t = \sqrt{x}$. д) $y = C_1\cos(\mathrm{arctg}x) + C_2\sin(\mathrm{arctg}x)$; $t = \mathrm{arctg}x$. 3.39. Уп. $y' = \dot{y}/\phi'(t)$, $y'' = \ddot{y}/\phi'^{-2} - \dot{y}\cdot\phi''/\phi'^{-3}$ (каде што $\dot{y} = dy/dt$ итн.); ... ; $y^{(k)}(x)$ е хомогена функција од изводите $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ... , d^ky/dt^k ($P=P(u,v)$ се вика хомогена, со ред на хомогеност k, ако $P(su,sv) = s^kP(u,v)$); заменувањето во $L(y) = 0$ дава пак хомогена и линеарна ДР. 3.40. $y = \sqrt{\pi/x}\,\cos x$.
3.41. а) $x^2y = A + B\,e^{-4x}$; $z'' + 4z' = 0$. б) $x^2y = e^{-x}(A\cdot\cos x + B\cdot\sin x)$; $z'' + 2z' + 2z = 0$; $x^2y = \pi^2e^{\pi-x}\cos x$. в) $y = e^{-2x}\cdot x^{-2}$; $y = x^{-2}z$. 3.42. Уп. $y^{(k)} = \alpha z^{(k)} + k\alpha' z^{(k-1)} + \binom{k}{2}\alpha'' z^{(k-2)} + \dots + \alpha^{(k)}z$, т.е. $y^{(k)}$ е линеарна хомогена функција по z, z', ... , $z^{(k)}$, па таква ќе биде и левата страна на $L(y) = 0$ по заменувањето на y, y', ... со $\alpha z, \alpha' z + \alpha z'$, ... 3.43. $y = C_1x + C_2(x^2-1)$, во $(-\infty,+\infty)$
3.44. $y = C_1\cos(\sin x) + C_2\sin(\sin x)$. 3.45. $y = C_1e^x + C_2x$, $x \neq 1$.
3.46. $y = C_1x + C_2\ln x$, $x > 0$, $x \neq e$. 3.47. $y = C_1x + C_2(1+2x\ln x)$; $y_1 = ax$. 3.48. $y = C_1(x+1) + C_2(x^2-1)$, $x \neq -1$. 3.49. $y = C_1e^x + C_2(x^2-1)$, $x \neq 1 \pm \sqrt{2}$. 3.50. а) $y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2+1)$, $x \neq -1/2$. б) $y = C_1e^{-2x} + C_2x$, $x \neq -1/2$. 3.51. $y = C_1x + C_2x^{-1} + C_3(x\ln+1)$, $x > 1/2$. 3.52. $y = C_1e^x + C_2e^x\int x^ke^{-x}dx$; $k = 3$: $y = C_1e^x + C_2(x^3+3x^2+6x+6)$. Уп. $x(y''-y') - k(y'-y) = 0$; $y' - y = 0$, па $y_1 = e^x$ е п.и. што не зависи од k (в. и зад. 3.22). 3.53. а) $y = A + Be^{3x} + Ce^{-4x}$. б) $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x$. в) $y = e^x(C_1+C_2x+C_3\cos x + C_4\sin x)$. г) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4\cos x + C_5\sin x$. д) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. ѓ) $y = C_1 + (C_2+C_3x+C_4x^2+C_5x^3)e^x$. 3.55. а) $y = C_1x^2 + C_2x^{-2}$. б) $y = C_1x + C_2x^{-1/2}$. в) $y = C_1x^{\sqrt{3}} + C_2x^{-\sqrt{3}}$; г) $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x$. 3.56. а) $y = C_1x + C_2x^{-1} + C_3x^{-2}$. б) $y = C_1x^2 + C_2\sqrt{x} + C_3\sqrt[3]{x^2}$. 3.57. а) $y = (C_1+C_2\ln x)x^3$. б) $y = x^4[C_1\cos(2\ln x) +$

$+ C_2\sin(2\ln x)]$. в) $y = C_1(3x+2)^2 + C_2(3x+2)^{-2}$. г) $y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1)$. д) $y = (C_1+C_2\ln x)\cos\ln x + (C_3+C_4\ln x)\sin\ln x$. Уп. $x^i = e^{i\ln x} = \cos(\ln x) + i\sin(\ln x)$. 3.58. а) $z = y^2 = C_1x + C_2x^2$; $x^2z'' - 2xz' + 2z = 0$. б) $z = y^2 = C_1x^{-1} + C_2x^{-2}$; $x^2z'' + 4xz' + 2z = 0$.
3.59. а) $y = e^x(A+x/6) + e^{-x}(B-1/4)$. б) $y = e^{-x}[C_1+C_2x+(6-x^2)\cos x + 4x\sin x]$. в) $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - (x^2+3x+1)$. г) $y = C_1 + C_2x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \sin 3x$. д) $y = [C_1 + C_2x + C_3x^2 + 2x^4]e^x$.
3.60. а) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{5}{9} - \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x$. б) $y = C_1 + (C_2+C_3x)e^{-2x} + 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$. в) $y = C_1e^{2x} + C_2\sin x + C_3\cos x - 1 - 2x + xe^{2x} - 2x\cos x - 4x\sin x$. 3.61. а) $-\frac{x}{2n}e^{-kx}\cos nx$. б) $(e^{-kx}\sin px)/(n^2-p^2)$. 3.62. $y = A + Be^x - \cos e^x$. 3.63. $y = A\cos x + B\sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

3.64. $y = [(A-x)\cos x + (B+\ln\sin x)\sin x]e^{-x}$.

3.65. $y = e^x(A+Bx-x+x\ln x)$. 3.66. $y = e^{3x}(A+Bx-\ln x)$. 3.67. $y = A + B\cos x + C\sin x + \ln|\operatorname{tg}x + \sec x| - x\cos x - \sin(\ln|\cos x|)$. 3.68. $y = Ax^3 + Bx^2 - x/2$. 3.69. $y = Ax^2 + B + x^2/3$. 3.70. $y = Ax + Bx^2 + x^3$. 3.71. $y = Ax^2 + B/x - \frac{1}{2}\ln x + 1/4$. 3.72. $y = [A + \ln\cos\ln(2x-3)]\cos\ln(2x-3) + [B + \ln(2x-3)]\cdot\sin\ln(2x-3)$. 3.73. $y = (A\ln x+B)x + x^2 + \ln x + 2$. 3.74. $y = (A\ln x+B)x + C/x^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{4}$.

* * *

3.75. а) и б) $a = 1/2$, $b = -1/4$; $y = A\operatorname{sh}\sqrt{x} + B\cdot\operatorname{ch}\sqrt{x} = C_1e^{\sqrt{x}} + C_2e^{-\sqrt{x}}$. г) $a = b = 1/2$; $y = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$. 3.77. $y = (A+Bx)\cos x + (Ax-B)\sin x$. Уп. Ја диференцираме (1) двапати и, имајќи предвид дека $2y' = xy'' + xy$, добиваме $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, чиј општ интеграл е $y = (C_1+C_2x)e^{ix} + (C_3+C_4x)e^{-ix}$. Заменувајќи y, y', y'' во (1), добиваме $C_3=-C_4i$, $C_1=iC_2$; $y=C_2(i+x)e^{ix}+C_4(-i+x)e^{-ix} = [i(C_2-C_4)+(C_2+C_4)x]\cos x+[-(C_2+C_4)+i(C_2-C_4)x]\sin x$. 3.78. $y=Ax^5$. 3.80. $y = Ax^2 + B(2x-1) + x^3$. 3.81. $y = A/(x-1) + B/(x^2-1) + 3x^2/(x^2-1)$. 3.82. $y = Ax\sin x + Bx\cos x + x^2$. 3.83. $y_1 = 1/x$; $y = A(x+2) + B/x +$

$+ (1+x/2)\ln x + 3/2$. 3.84. $y_{1_3} = x$; $y = Ax + B\ell nx + x\ln x - x$. 3.85. $y_1 = x$; $y = Ax + B(\ln x+1) + \frac{x^3}{12}(2\ell nx-1)$. 3.86. а) $y = A(x^2+1) + B/x + 2x$. б) $y = Ax + B(1+\mathrm{arctg}x) + x^2$; $y = 2x + x^2$. в) $y = A + B\cdot\mathrm{arctg}x + x^2$. 3.87. $y = A + B\cdot\sin x + \sin x\cdot\ln|\sin x|$. 3.88. а) $y = A\cdot\cos t + B\cdot\sin t + \frac{1}{10}\,\mathrm{ch}2t + \frac{1}{2}$. б) $y = A\sin(2\sin x) + B\cos(2\sin x) + 3 - 2\sin^2 x$. в) $z = x^2y = A + Be^{-4x} + \frac{1}{17}(4\sin x-\cos x)$. г) $z = x^2y = e^{-x}(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x + \frac{x}{2}\sin x)$. 3.90. а) $y = (C_1+C_2e^{-x})/x$. б) $y = (1-x^2)^{-1/2}(C_1+C_2\arcsin x) - 1$. в) $y = e^{-x^2}\left[C_2 + \int(C_1+x^2)e^{x^2}dx\right]$. г) $y = e^{-\int pdx}\left[C_2 + C_1\int e^{\int pdx}dx\right]$. д) $y = e^{-\int pdx}\left[C_2 + \int e^{\int pdx}\left(C_1+\int f(x)dx\right)dx\right]$.

3.91. Не противречи, зашто не е исполнет условот за непрекинатост на коефициентите (тие имаат прекин за $x = 1$); според тоа, тој услов во Т.1 не може да се изостави. Значи, $y = C_1x + C_2e^x$ е оптшо решение на (1) на секој од интервалите $(-\infty,1)$, $(1+\infty)$, но не на $(-\infty,+\infty)$. 3.92. $u = e^{-\int(a/2)dx}$. 3.93. а) $y = e^{-x^2/2}(Ae^x+Be^{-x})$. б) $y = x^{-1/2}.(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2})$. в) $y = A\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. г) $y = \frac{1}{x}(Ae^x+Be^{-x}) + \frac{1}{2}e^x$. Уп. Да се искористи 3.92. 3.94. Уп. а) Следува од фактот што $y = v/u$ и $u \neq 0$. б) Ако v_1, v_2 се линеарно независни решенија на $v'' + pv = 0$, тогаш $0 = v_1''v_2 - v_2''v_1 = (v_1'v_2-v_2'v_1)' = 0$, па $v_1'v_2 - v_2'v_1 = C$. Кога би било $y_1(x_o) = y_2(x_o) = 0$ (за некој $x = x_o$), тогаш и $v_1(x_o) = v_2(x_o) = 0$, па би морало $C = 0$; поради тоа, $v_1'/v_1 = v_2'/v_2$, т.е. v_1/v_2 = конст., а тоа противречи на линеарната независност на v_1, v_2. 3.95. Уп. $K' = pu''v - puv'' + p'u'v - p'uv'$; ако ги помножиме $pu'' + p'u' + qu = 0$ и $pv'' + p'v' + qv = 0$ со v и u соодветно и ги одземеме, добиваме $K' \equiv 0$, па K = константа. 3.96. $a_o = W(x)$, $a_1 = -W'(x)$, $a_2 = W(y_1',y_2')$, $W(x)$ е вронскијанот на y_1, y_2. Уп. Да се искористи идејата од зад. 3.10, (2). 3.98. Покажи дека $\mathcal{S}$ е потпростор од векторскиот простор $C^{(n)}$ од сите функции што се дефинирани и имаат непрекинат n-ти извод на I; да се искористат зад. 3.21 и 3.24, а за вториот дел - теоремата за егзистенција и единственост на решение (§3.1). 3.99. Уп. Докажи дека димензијата на $\mathcal{S}$ од 3.98 е n.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА (ГЛ. 4)

4.31. а) $y = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + \ldots = e^x$. б) $y = 2x^3/3! + 2x^4/4! + 2x^5/5! + \ldots$ в) $y = (x-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)^3/3! + 16(x-1)^4/4! + 52(x-1)^5/5! + \ldots$ г) $y = (x-1) - (x-2)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + (x-1)^5/5 + \ldots = \ln x$. 4.32. Не; $y'' = 2yy' + 1/\sqrt{x}$ не е дефинирана за $x = 0$, па решението $y = y(x)$ не може да се развие во тејлоров ред во околина на $x = 0$.

4.33. а) $y = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + \ldots = e^x$. б) $y = 1 + 2(x-3) + 3(x-3)^2/2! + 7(x-3)^3/3! + 13(x-3)^4/4! + 30(x-3)^5/5! + \ldots$ в) $y = x + x^3/3! + 2x^5/5! + \ldots$ г) $y = 1 - (x-1)^2/2! + (x-1)^3/3! - 2(x-1)^4/4! + 10(x-1)^5/5! + \ldots$ д) Не може да се реши со овој метод зашто y'', y''', ... не се дефинирани во точката $x = 0$.

4.34. а) $K = 410/(290)^{3/2}$. б) $K = 3$. Уп. $K = |y_0''|/(1+y_0'^2)^{3/2}$.

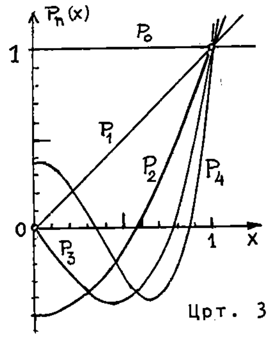
4.35. а) $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + x^5/15 + \ldots$ Уп. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = 1/\cos^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$; $y'' = 2yy'$; итн. за $x = 0$: $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = 0$, $y''' = 2$, итн. б) $\sec x = 1 + x^2/2! + 5x^4/4! + \ldots$ Уп. $y = 1/\cos x$; $y' = \sin x/\cos^2 x = y^2 \sin x$; $y'' = 2yy'\sin x + y^2\cos x$; итн. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$, $y^{iv}(0) = 5$ итн. в) $y = 1 + x^2/2! + 5x^4/4! + 61x^6/6! + \ldots$ Уп. $y = 1/\cos x$, $y' = \sin x/\cos^2 x$; $y'' = (1+\sin^2 x)/\cos^3 x = (2-\cos^2 x)/\cos^3 x = 2y^3 - y$; $y''' = 6y^2y' - y'$; итн.

4.36. а) $y = 2 + 3x + x^2/2 - x^3/6 + x^4/12 + \ldots$ 4.37. $y = 1 + x - x^2 + \ldots$ 4.38. $y = 1 + x + x^2 + 4x^3/3 + 25x^4/12 + \ldots$ 4.39. $y = x + x^2/2 + 2x^3/3 + x^4/3 + 17x^5/60 + \ldots$ Уп. $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$; $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$; $e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \ldots = 1 + (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) + \frac{1}{2!}[a_1^2x^2 +$

$+ 2a_1a_2x^3 + (a_2{}^2 + 2a_1a^3)x^4 + \ldots] + \frac{1}{3!}[a_1{}^3x^3 + 3a_1{}^2a_2x^4 + \ldots] +$ $+ \frac{1}{4!}[a_1{}^4x^4 + \ldots] = 1 + a_1x + (a_2 + \frac{1}{2}a_1{}^2)x^2 + (a_3 + a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1{}^3)x^3 +$ $+ (a_4 + \frac{1}{2}a_2{}^2 + a_1a_3 + \frac{1}{2}a_1{}^2a_2 + \frac{1}{24}a_1{}^4)x^4 + \ldots$. 4.40. $y = x^2/2 +$ $+ x^3/6 + x^4/6 + \ldots$. 4.41. $y = 4$ $y=4-2x+2x^2-2x^3+19x^4/6+\ldots$ 4.42. $y = 2x + a_2x^2(1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n! + \ldots) = 2x + a_2x^2e^x$, a_2 - произволна константа; $R = \infty$. Уп. $a_n = \frac{1}{n-2}a_{n-1} = \frac{1}{(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1}a_2$. 4.43. $y = a_o(1-x) + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}x^n + \ldots$, a_o е произволна константа; $R = 1$; $y = C(1-x) + x + (1-x)\ln(1-x)$, $|x| < 1$. 4.44. $y = a_ox + 2\cdot(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n-1)n}(x-1)^n$, $R = 1$, т.е. $|x - 1| < 1$; $y = Cx + x\ln x - 1$. Уп. Смена $t = x - 1$; в. зад. 4.5. 4.45. $y = 2\cdot[1 + (x-1) + (x-1)^2/2! + \ldots + (x-1)^n/n! + \ldots] - x^2 - 1$; $R = \infty$; $y = 2e^{x-1} - x^2 - 1$. 4.46. $y = a_ox + x[(x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 + - \ldots]$; $y = Cx + x\ln x$. Уп. Нема решение како степенски ред по x зашто се добива противречноста $-1 = 0$. 4.47. $y = a_o[1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots] + a_1[x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots] = a_o\cos x + a_1\sin x$; конвергентни за секој x. 4.48. $y = a_o[1 + (2x) + (2x)^2/2! + \ldots] + a_1[1 - x + x^2/2! - \ldots] = a_oe^{2x} + a_1e^{-x}$; $|x| < +\infty$. 4.49. $y = a_1x + a_o[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(-1)\cdot 1\cdot 3\ldots(2k-3)x^{2k}/(2k)!]$; $|x| < +\infty$. 4.50. $y_1 = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = 1/(1-x)^2$; $y_2 = x + x^3 + x^5 + \ldots = x/(1-x)^2$; $|x| < 1$. 4.51. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; $|x| < +\infty$. 4.52. $y_1 = 1 + x^2/2! + 3x^4/4! + \ldots$, $y_2 = x + 12x^5/5! + \ldots$. 4.53. $y = a_o(1+x^2/2 + x^4/2\cdot 4 + x^6/2\cdot 4\cdot 6 + \ldots) + a_1(x + x^3/3 + x^5/3\cdot 5 + \ldots)$, $|x| < +\infty$. Уп. $a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n$. За првиот ред: $c_{n+1} = x^{2n}/2^nn!$, па $|x| < +\infty$; слично за вториот ред. 4.54. $y_1 = 1 - x^2/3! + x^4/5! + \ldots = \frac{1}{x}\sin x$, $y_2 = \frac{1}{x}(1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots) = \frac{1}{x}\cos x$. 4.57. $y_1 = 1 - x^3/3\cdot 2 + \ldots + (-1)^nx^{3n}/3n(3n-1)\ldots 3\cdot 2 + \ldots$ $|x| < +\infty$. Уп. $n(n+1)a_n = a_{n-3}$. 4.58. $y_1 = x(1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots) = xe^x$; $|x| < +\infty$. Уп. $n(n+1)a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$. 4.59. $y = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots = \sin x$. Уп. $a_{k+3} =$

$= \frac{k+1}{k+3} a_{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}\cdot(a_k - a_{k+1})$. 4.60. $y = e^x$. 4.61. $y = a_o(1 + t^2/2! + \dots) + a_1(t + t^3/3! + \dots) = A\cdot chx + B\cdot shx$, $A = a_o ch1 - a_1 sh1$, $B = a_1 ch1 - a_o sh1$. 4.63. $y = a_o \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} (\frac{x}{2})^{2k}$. Не противречи, зашто условите на теоремата се доволни, но не се и неопходни.
4.64. $H_o = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - 1$, $H_3 = x^3 - 3x$, $H_4 = x^4 - 6x^2 + 3$.
4.65. $H_5 = x^5 - 10x^3 + 15x$, $H_6 = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$, $H_7 = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$. 4.66. Уп. 1) Очигледно од дефинициите (4') и (4'') - така се избрани нормирачките фактори c_o и c_1. Уп. 2) Користејќи ја релацијата (6) од §4.3, со индукција по n. 4.67. б) Уп. $H_{n+1} = (-1)^{n+1}.e^{x^2/2}(e^{-x^2/2})^{(n+1)} = (-1)^n e^{x^2/2}(xe^{-x^2/2})^{(n)} = (-1)^n e^{x^2/2}[x\cdot(e^{-x^2/2})^{(n)} + n(e^{-x^2/2})^{(n-1)}] = xH_n - nH_{n-1}$; ова да се спореди со $H_{n+1} = xH_n - H_n'$. 4.68. $H_8 = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$; $H_9 = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x$. 4.69. $H_{10} = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945$. 4.70. В. зад. 4.64. Уп. Спореди ги изразите $e^{tx-t^2/2} = H_o(x) + H_1(x)t + H_2(x)t^2/2! + H_3(x)t^3/3! + \dots$ со $e^{tx-t^2/2} = 1 + (tx-t^2/2) + (tx-t^2/2)^2/2! + (tx-t^2/2)^3/3! + \dots$ 4.71. Уп. Од маклореновиот развој на $e^{tx-t^2/2}$ имаме: $H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{tx-t^2/2}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2/2 - (x-t)^2/2}\right]_{t=0} = e^{x^2/2}\left[\frac{\partial^n}{\partial(-x)^n} e^{-(x-t)^2/2}\right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2/2}.\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$. 4.73. $\sqrt{2\pi}$ за $n = 0$; $2\sqrt{2\pi}$ за $n = 2$; 0 за $n \neq 0;2$. 4.74. Уп. Директно да се заменат w и w'' во дадената ДР и да се уочи дека $H_n'' - xH_n' + nH_n = 0$. 4.75. а) $y = C_1 + C_2\int e^{x^2/2}dx$. б) $y = C_1x + C_2x\int x^{-2}e^{x^2/2}dx$. в) $y = (x^2-1)[C_1 + C_2\int(x^2-1)^{-2}e^{x^2/2}dx]$. Уп. Да се уочи дека решение на дадената ДР е полиномот H_o, H_1, H_2 соодветно и да се примени формулата (6) од §3.5. 4.76. а) $y = a_o + a_1[x + x^3/6 + x^5/40 + \dots]$, $a_{n+2} = na_n/(n+2)(n+1)$, $n = 1,3,5, \dots$ б) $y = a_1x + a_o[1 - x^2/2 - x^4/24 - \dots]$, $a_{n+2} = (n-1)a_n/(n+1)(n+2)$, $n = 4, 6, \dots$, $a_2 = -a_o/2$.

4.77. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$; $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$; $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$. 4.78. Црт. 3. Нули има: 0; 1; 2; 3; 4 соодветно.



Црт. 3

4.80. а) $y = a_0(1-3x^2) + a_1(x-2x^3/3-x^5/5 - 4x^7/35 - \dots)$ б) $y = a_0(1-6x^2+3x^4+4x^6/5 +\dots) + a_1(3x-5x^3)/3$. 4.81. $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Уп. В. 4.80 а). 4.82. Види 4.77. 4.83. Уп. Да се диференцира $(x-1)^n(x+1)^n$ n пати ставајќи во Лајбницовата формула (зад. 4.14) $u = (x-1)^n$, $v = (x+1)^n$. Во добиениот резултат да се стави $x = 1$ и да се замени во (8) од §4.4 при $x = 1$.

4.84. Уп. (1) следува од (7), §4.4; а) се добива од (1) при $x = 1$ и од фактот $P_n(1) = 1$; б) следува од (1) со непосредно диференцирање.

4.86. В. 4.77. Уп. Да се развие $G(t,x)$ по степените на t (до t^n).

4.87. Уп. а) $x = 1$ во (1) дава $1 + t + \dots + t^n + \dots = (1-t)^{-1} = P_0(1) + tP_1(1) + \dots + t^nP_n(1) + \dots$; изедначувањето на коефициентите пред еднаквите степени на t дава $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ б) $x = -1$ во (1) дава $\sum_0^\infty(-1)^nt^n = (1+t)^{-1} = \sum_0^\infty t^nP_n(-1)$, од каде што $P_n(-1) = (-1)^n$. в) $x = 0$ во (1) дава $(1+t^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty t^nP_n(0)$; од друга страна, $(1+t^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$, од каде што следува тврдењето.

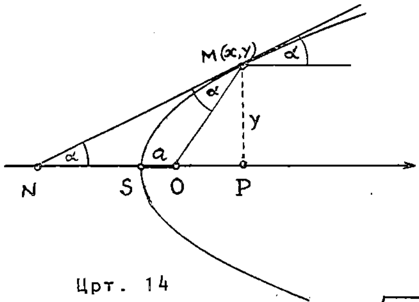
4.88. $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$; $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$.

4.90. Уп. 1°. Да се искористи 4.89. Имено, диференцирајќи ја $G(t,x)$ од зад. 4.86 по t односно по x, се добива $t(1-2tx+t^2)^{-3/2} = \sum_1^\infty t^nP_n'$, односно $(x-t)(1-2tx+t^2)^{-3/2} = \sum_0^\infty nt^{n-1}P_n(x)$, па $(x-t)\sum_0^\infty t^nP_n'(x) = t\sum_1^\infty nt^{n-1}P_n(x)$; формулата 1° се добива со изедначување на коефициентите пред t^n. 2°. Уп. Да се диференцира (1) од 4.15 по x и да се искористи 1° за елиминација на $xP_n'(x)$. 3°. Уп. Во изводот на (1) од 4.15 да се замени $P_{n-1}'(x)$ од 1° (или: да се соберат 1° и 2°). 4°. Уп. Во 3° да се стави $n-1$ наместо n и да се исклучи $P_{n-1}'(x)$ од 1°.

5°. Уп. Ставајќи во 1° $n+1$ наместо n, се добива $xP'_{n+1} = P'_n + (n+1)P_{n+1}$; од 3° се добива $xP'_{n+1} = x[xP'_n + (n+1)P_n]$; на крајот да се изедначат и десните страни. 6°. Уп. Во 3° да се стави $n-1$ наместо n, во добиениот израз да се замени P'_{n-1} од 2°, а $xP_{n+1} - P_n'$ да се земе од 1°. 4.91. Уп. Да се искористи претходната задача: 5° за а) при $x = 2$, 4° за б), 6° за в) при $n = 7$, 3° за г). 4.92. $A_n = 1\cdot 3\cdots(2n-1)/n! = (2n-1)!!/n!$ Уп. Да се искористи (1) од 4.15. 4.95. Уп. Да се искористи 2° од 4.90 и 4.84. 4.96. Уп. Да се помножат двете страни на (1) во 4.17, да се интегрира од -1 до 1 и да се искористат (2) од 4.16, како и зад. 4.94. 4.98. а) $2P_o + P_1$. б) $\frac{2}{3}P_2 - 2P_1 + \frac{8}{3}P_o$. в) $-2P_3 + 4P_1$. г) $\frac{8}{35}P_4 + \frac{4}{5}P_3 + \frac{40}{21}P_2 + \frac{1}{5}P_1 - \frac{224}{105}P_o$. 4.99. $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1$; $y = A(x + \frac{2}{3}x^2 + \ldots + \frac{n}{2n-1}x^n + \ldots) + Bx^{1/2}$; $|x| < 1$. 4.100. а) $r_1 = 0$: $3(n+1)a_{n+1} = (3n+1)a_n$, $y_1 = a_o\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}x^n\right] = (1-x)^{-1/3}$; $r_2 = 7/3$: $(3n+10)a_{n+1} = (3n+8)a_n$, $y_2 = a_o x^{7/3}\left[1 + \frac{8}{10}x + \frac{8\cdot 11}{10\cdot 13}x^2 + \frac{8\cdot 11\cdot 14}{10\cdot 13\cdot 16}x^3 + \ldots\right]$; $y = Ay_1 + By_2$, $|x| < 1$. б) $y = Ay_1 + By_2$, $y_1 = 1 - x/3! + x^2/5! + \ldots + (-1)^n x^n/(2n+1)! + \ldots$, $y_2 = x^{-1/2}[1 - x/2! + x^2/4! + \ldots + (-1)^n x^n/(2n)! + \ldots]$; $2n(2n+1)a_n = -a_{n-1}$, $n \geq 1$. в) $y = Ax\,(1 - x/3 + x^2/6 - x^3/10 + \ldots) + Bx^{-1}(1+x)$, x: $0 < a < |x| < 1$; $(r+n+1)a_n = -(r+n-1)a_{n-1}$. г) $y = A[1 + x/2 + x^2/2^2\cdot 2! + x^3/2^3\cdot 3! + \ldots] + Bx^{1/2}[1 + x/3 + x^2/3\cdot 5 + x^3/3\cdot 5\cdot 7 + \ldots]$. 4.101. а) $a_{n+1} = a_n$; $y = Ay_1 + By_2$, $y_1 = 1/(1-x)$, $y_2 = \ln x/(1-x)$. б) $y = [A + B\cdot(\ln x - x)]/(1-x)^2$. 4.102. $r_1 = 0$, $r_2 = 4$, $(r+n-4)a_n = (r+n-3)a_{n-1}$; $y = A(3+2x+x^2) + Bx^4/(1-x)^2$. б) $y = (A+Bx)/(1-x^2)$; $a_{n+2} = a_n$. в) $y = Ay_1 + By_2$, $y_1 = 1 - 2x + 3x^2/2 - 2x^3/3 + \ldots$, $y_2 = y_1 \ln x + 3x - 13x^2/4 - 31x^3/18 + \ldots$. 4.104. а) $y = Ay_1 + By_2$, $y_1 = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x) = 1 + x/6 + 3x^2/40 + \ldots$, $y_2 = x^{-1/2}F(0, 0, \frac{1}{2}; x) = 1/\sqrt{x}$. б) $y = Ay_1 + By_2$, $y_1 = F(1, 2, 3; x)$, $y_2 = x^{-3}F(-2, -1, -2; x) = x^{-3}(1-x)$. 4.106. а) $15\sqrt{\pi}/8$. б) $(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}/2^k$. в) $\frac{10}{9}\,\Gamma(\frac{2}{3})$. Уп. Да се искористи 2°, §4.6. 4.107. а) 1/3960. б) $I = B(6,7) = 1/5544$. в) $\pi/12$. г) $I = B(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{3\pi}{256}$. Уп. Да се искористи 8°.§4.6. 4.110. а) $5\pi/2048$. б) 1/40. в) $35\sqrt{\pi}/512$. г) 9/56. 4.111. а) $-2\sqrt{\pi}$. б) $-8\sqrt{\pi}/15$. в) 2/15. 4.113. $J_{-1}(x) = -J_1(x)$. 4.114. а) $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{x} - \cos x)$. б) $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-\sin x - \frac{\cos x}{x})$. в) $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(3x^{-2} - 1)\sin x - 3x^{-1}\cos x\right]$. г) $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[3x^{-1}\sin x + (3x^{-2} - 1)\cos x\right]$. 4.116. а) $2x^{-1}J_1(x) - J_0(x)$. б) $(8x^{-2} - 1)J_1(x) - 4x^{-1}J_0(x)$. в) $(48x^{-3} - 8x^{-1})J_1(x) + (1-24x^{-2})J_0(x)$. 4.118. а) $x^nJ_n(x) + C$. Уп. $\left[x^nJ_n(x)\right]' = x^nJ_{n-1}(x)$. б) $-x^{-n}J_n(x) + C$. 4.119. а) $x^3J_3(x) + C$. б) $2J_0(x) - 3J_1(x)$. в) $x^2J_1(x) + xJ_0(x) - \int J_0(x)dx$. г) $xJ_0(x)\sin x - xJ_1(x)\cos x + C$. 4.121. а) $y = AJ_1(\frac{x}{2}) + BY_1(\frac{x}{2})$. б) $y = AJ_{1/2}(x^2) + BJ_{-1/2}(x^2)$. в) $y = AJ_0(x) + BY_0(x)$. Уп. Дадената ДР да се помножи со x. г) $y = AJ_0(\sqrt{x}) + BY_0(\sqrt{x})$. д) $y = Ax^{1/2}J_{1/2}(x) + Bx^{1/2}J_{-1/2}(x)$. ѓ) $y = x^{1/2}\left[AJ_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + BJ_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})\right]$. е) $y = x^{-2}\left[AJ_2(x) + BY_2(x)\right]$. 4.128. Уп. Ако x_0 би бил повеќекратен корен на $P_n(x)$, тогаш $P_n(x_0) = 0$ и $P_n'(x_0) = 0$, па според 4° од 4.90, $P_{n-1}(x_0) = 0$. Според (1) од 4.15, $P_{n-2}(x_0) = 0$, $P_{n-3}(x_0) = 0$, ... , $P_0(x_0) = 0$, а тоа противречи на фактот дека $P_0(x) \equiv 1$. 4.129. Реш. Нека $P_n(x)$ во $[-1,1]$ има m реални нули $r_1,\dots,r_m$, $0 \le m \le n$. Тогаш за полиномот $Q_m(x) = (x-r_1)\ \dots\ (x-r_m)$ важи $Q_k(1) > 0$ (ако $m = 0$, $Q_0(x) \equiv 1$), па $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ имаат еднакви знаци на $[-1,1]$ (зашто корените се заеднички, а за $x = 1$ знаците им се еднакви). Поради тоа, $\int_{-1}^{1}Q_m(x)P_n(x)dx > 0$, што би противречело на (1) од 4.16 ако $m < n$. Следствено, $m = n$, т.е. сите корени на $P_n(x)$ се реални и лежат во $[-1,1]$. 4.131. Уп. Да се помножат двете страни на (1) со $P_k(x)$ и да се интегрира од -1 до 1. Потоа да се искористат 4.16 и 4.93. 4.133. $P(x) = 1 - 2x + x^2/2$, $u(x) = 5x - 9x^2/4 + x^3/18$. 4.136. а) $(r+n)(2r+2n+1)a_n + a_{n-1} = 0$; $y = A(1-1/3x+1/30x^2-1/630x^3 + \dots) + B\sqrt{x}(1-1/x+1/6x^2-1/90x^3 + \dots)$; конвергентни за секој $x \ne 0$. б) $(r+n)(2r+2n-1)a_n =$

$= [2(r+n)^2 - (r+n) + 1]\cdot a_{n-1}$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1/2$; $y = A(1 + 2/x + 7/3x^2 + \dots) + Bx^{-1/2}(1 + 4/3x + 22/15x^2 + \dots)$; конвергентни за $|x| > 1$. в) $(r+n)a_n = a_{n-1}$; $y = (A + B\cdot\ln\frac{1}{x})\,[1 + 1/x + 1/2x^2 + 1/6x^3 + \dots] + B\,[1/x + (1+1/2)/2x^2 + (1+1/2+1/3)/6x^3 + \dots]$; конвергентни за $x \neq 0$. 4.137. $I_{p,q,r} = \Gamma(\frac{p+1}{q})\cdot\Gamma(r+1)/q\Gamma(\frac{p+1}{q}+r+1)$. Уп. Смена $x^q = y$. а) 1/32. б) $15\pi/256$. 4.138. а) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)/\Gamma(p + q + 1) = A$. Уп. $I = \int_0^1 x^{p-1}dx \int_0^{1-x} y^{q-1}dy = \frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx$. б) $I = a^{p+q}A$, A е изразот од а). Уп. Стави $x = aX$, $y = aY$. в) $I = a^p b^q A$, A е од а). г) $I = \frac{1}{4}\,a^p b^q \Gamma(\frac{p}{2})\cdot\Gamma(\frac{q}{2})/\Gamma(\frac{p+q}{2} + 1)$. Уп. Смена $x^2 = a^2X$, $y^2 = b^2Y$. 4.139. Уп. Да се искористи 8^o од §4.6 и зад. 4.25 б). 4.141. а) $y = x^2[AJ_2(x^2/2) + BY_2(x^2/2)]$. б) $y = \frac{1}{x}[AJ_1(2x) + BY_1(2x)]$. 4.144. а) Уп. Членот со $\frac{1}{x}$ во изразот $J_p'J_{-p} - J_pJ_{-p}'$ се јавува само во производот на членовите од редовите при кои $k = 0$ и тој е $\frac{1}{x}\cdot\frac{-2p}{\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)} = -\frac{2p}{xp\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = \frac{2\sin p\pi}{\pi x}$ (в.зад. 4.139).

5.31. а) $x^3+y^2-ye^x=C$. б) $y\ln x+xy^3=C$. в) Не е точна. г) $\mathrm{arctg}(y/x)+$ $+\ln(y/x)-y/x=C$. д) и ѓ) Не е точна. е) $x^2+2y\sin x=C$. ж) Не е точна. 5.32. $u\equiv xy=C$, $u_1\equiv\ln x+\ln y=C_1$; $u_1=\ln u$. 5.34. Да се искористи Ојлеровата теорема за хомогени функции (зад. 5.4). 5.35. Формата на огледалото треба да биде параболична, т.е. ротационен параболоид којшто се добива со ротација на параболата $y^2=4a(x+a)$ околу оската OX; притоа, a е растојанието од O до центарот S на огледалото. Уп. Бидејќи упадниот агол α е еднаков со одбивниот, т.е. $\measuredangle ONM=\alpha$ (црт.14),

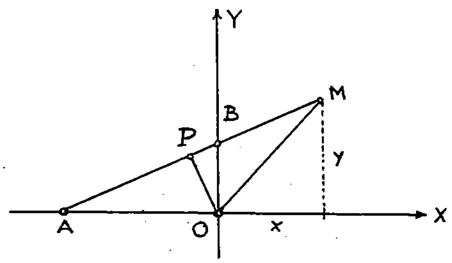


Црт. 14

добиваме дека ΔOMN е рамнокрак, па $\overline{ON}=\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$; $dy/dx=\mathrm{tg}\alpha=$ $=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{NP}}=y/(\sqrt{x^2+y^2}+x)$; $(x+yy')/\sqrt{x^2+y^2}=1$, $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2+y^2})=1$; $y^2=2C(x+C/2)$; за $x=-a$: $y=0$, па $C=2a$. 5.36. $(Q'_x-P'_y)/P=f(y)$; $\lambda=1/(1+y^2)$; $3\,\mathrm{arctg}\,y+$ $+xy=C$; $y=0$ е сингуларен интеграл (с.и.). 5.37. в) $\lambda=x^{-2}$; $3/x+xy-y^2=C$. д) $\lambda=x^{-2}$; $2y=xy^2+Cx$. ѓ) $\lambda=y^{-2}$; $3x^4+y^4-3=Cy$. ж) $\lambda=e^y$; $2e^y\sin x+e^y(2y-$ $-2+\sin y-\cos y)=C$. 5.38. а) $\lambda=(2x+1)^{-2}$; $(2x+1)^2-4y^2+1=C(2x+1)$; $C=-2$. б) $\lambda=y^{-3}$; $y^4+2x^4y-5=Cy^2$; $C=-4$. в) $\lambda=1/(x^2-y^2)$; $\ln(x+y)-\ln(x-y)=x^2+C$; $(x+y)/(x-y)=e^{x^2-4}$. г) $\lambda=x^{-2}(1+x^2)^{-1}$; $y^2+x\,\mathrm{arctg}\,y+1=Cx$; $C=0$. 5.39. Да ставиме $D = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. а) $D/(P-Q)=f(x+y)$. б) $D/2(yP-xQ)=f(x^2+y^2)$. в) $D/(xP-yQ)=f(xy)$. г) $x^2D/(xP+yQ)=f(y/x)$. 5.40. а) $\lambda=(x+y+1)^{-4}$; $(x+y+1)^3=Cxy$. б) $\lambda=(x+y)^2$; $(x^2+y^3)(x+y)^3=C$. в) $\lambda=x^2+y^2$; $2x^6-y^6+3x^4y^2=C$. г) $\lambda=(x^2+y^2)^{-1}$; $y=\operatorname{arctg}(x/y)+C$. д) $\lambda=(xy)^{-2}$; $xy-\ln y-3\ln x=C$. ѓ) $\lambda=1/x^2y^2$; $xy(x^2+y^2)+1=Cxy$. е) $\lambda=y/x$; $y(x^3+y^2)+x^2y=Cx$. 5.41. а) $k=-2$; $y^2+x\ln x=Cx$. б) $k=-2$; $2/xy+\ln^2x=C$. в) $k=1$; $x^4+2x^3y+x^2y+3x^2y+6xy^2+3y^3=C$. г) $k=-3/2$; $y-1=\sqrt{x^2+y^2}$. 5.42. $(Q'_x-P'_y)/(2yP+Q)=f(y^2-x)$; $\lambda=1/(y^2-x)$; $2\ln(y^2-x)=x+y+C$. 5.43. $(Q'_x-P'_y)/(P-2xQ)=f(x^2+y)$; $\lambda=(x^2+y)^{-3}$; $C(x^2+y)^2=y-x^2$. 5.44. $(Q'_x-P'_y)/(3y^2P-Q)=f(x+y^3)$; $\lambda=(x+y^3)^{-2}$; $x^3+y=C(x+y^3)$. 5.45. $9x^4y^2-2x^3y^2+6x^2y=C$. 5.46. $Q'_x-P'_y=\frac{s}{y}P-\frac{r}{x}Q$. а) $\lambda=x^2y$; $x^3y^2+x^4y^3=C$. б) $\lambda=x^{-9}y^{-13}$; $2x^2y^2+1=Cx^8y^{12}$. 5.47. Уп. Откако ДР (1) ќе се помножи со x^uy^v, добиената ДР ќе биде точна ако $pu-av=a-p$ и $qu-bv=bn-q(m+1)$; при условите на задачата, овој систем има решение по u и v: $u=[ab(n-1)-aq(m+1)+bp]/(aq-bp)$, $v=p(u+1)/a-1$. 5.48. $\ln(y/x)-x^2=C$. Уп. $(xdy-ydx)/xy-2xdx=0$. 5.49. $y+x^2+1=Cx$. Уп. На последниот член од ДР се испробуваат можностите 1°-5° од зад. 5.7. 5.50. $6\ln y+1/x^2y^2=\ln C$. Уп. $\lambda=1/(xy)^k$, $k=3$. 5.51. $\arcsin(y/x)=x^3+C$. Уп. $(xdy-ydx)/x\sqrt{x^2-y^2}=3x^2dx$. 5.52. $y^2=-x$. Уп. $dy+(ydx-xdy)/y^2=0$, $y+x/y=C$. 5.53. $(x+y)/(x-y)=y^2+C$. Уп. $(xdy-ydx)/(x-y)^2=ydy$. 5.54. $\ln x+\operatorname{arctg}(y/x)=0$. 5.55. $x+y=Cx^2(x-y)$; $x+y=0$. 5.56. $\lambda=e^{\int a(x)dx}$. 5.57. $\lambda=\exp\{-\int\frac{P'+Q'}{P+Q}dz\}$, каде што $z=x-y$, а P' и Q' се изводите на P и Q по z; $\exp(A)$ значи e^A. Уп. Равенката има интегрален множител од обликот $\lambda(x-y)$. 5.58. Уп. $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial y}=\frac{\partial(-\lambda)}{\partial x}$ повлекува дека f'_y е функција само од x, $f'_y=a(x)$, па $f(x,y)=a(x)y+b(x)$. 5.59. $x^2+y^2+a^2=Cy$. Уп. $P(x-y/y',0)$; $\overline{AP}=\overline{PM}$ ја дава ДР $2xydx+(y^2-x^2-a^2)dy=0$, којашто има интегрален множител $\lambda=1/y^2$. 5.60. $k=-1$; $y=(2C-e^{2/x})/(2Cx-xe^{2/x})$; $y=-1/x$. 5.61. $a=-1$; $y=1/(Cx-x\ln x)-1/x$. 5.62. $y=(3\cos^2x)/(C-\cos^3x)+1/\cos x$. 5.63. $k=1$, $a=\pm1$;

$y=(2Cx^2+1)/(2Cx^3-x)$. 5.64. $a=1$, $b=0$; $y=x+(Ce^{x^2}+1)/x$; $y=x+1/x$. 5.65. $a=1$, $b=0$; $y=x+1/(1+Cx)$. 5.66. $k=-1$; $y=3x^2/(C-x^3)+1/x$. 5.67. $\sqrt{x}u'=$ $=au^2+c$; $2\sqrt{x}=\int(au^2+c)^{-1}du$. 5.69. а) Целата рамнина Oxy. б) $y\neq 0$. в) $y\neq 5x$. 5.70. Не. Исполнети се условите на теоремата за егзистенција и единственост на решение од §5.4. 5.71. $y(0,1)=0$; $y(0,2)=0{,}001$; $y(0,3)=0{,}005$; $y(0,4)=0{,}014$. 5.72. а) 1,2503. б) 0,7778. 5.73. $y_1(x)=1+x+x^2/2$, $y_2=1+x+3x^2/2+2x^3/3+x^4/4+x^5/20$. 5.74. а) $y_1=0{,}82$; $y_2=0{,}83867$; $y_3=0{,}83740$; $y_4=0{,}83746$. б) $y_1=1{,}115$; $y_2=1{,}1264$; $y_3=1{,}1272$. 5.75. а) $y=Cx+C^2/2$; $x^2+2y=0$. б) $y=Cx-C^2$; $4y=x^2$. в) $y=Cx\pm\sqrt{1+C^2}$; $x^2+y^2=1$. г) $y=Cx\pm\sqrt{C}$; $4xy+1=0$. Уп. $(y-xy')^2=y'$. 5.76. $x^2+4y=0$. Уп. $y/y'=x+y'$, $y=xy'+y'^2$; $y=Cx+C^2$; сингуларниот интеграл ја дава бараната крива. 5.77. $27y=4x^3$. Уп. $(x-y/y')^2=y'$, $y=xy'-y'^{3/2}$. 5.78. а) $x=Cy-C^3$; с.и. $4y^3=27x^2$. Уп. $x=yx'-x'^3$ е клероова по x, $x'=dx/dy$. б) $\sin y=C\sin x+C^2$; с.и. $4\sin y+\sin^2x=0$. Уп. $w=uw'-2w'/(1+w')$, $w'=dw/du$. 5.79. $4xy=\pm a^2$ (и секоја права од фамилијата $y=Cx\pm a\sqrt{C}$). 5.80. $x^{2/3}+$ $+y^{2/3}=a^{2/3}$. Уп. $(x-y/y')^2+(y-xy')^2=a^2$, $y=xy'\pm ay'/\sqrt{1+y'^2}$ - клероова. 5.81. $(y-x-2a)^2=8ax$ (и правите $y=Cx+2aC/(C-1)$, $C\neq 1$). 5.82. а) $x=$ $=(C+\ln p)/p^2$, $y=(2\ln p+2C+1)/p$; с.и. $y=0$. б) $(y-C)^2=Cx$; с.и. $4y+x=0$. в) $x=Ce^{-p}-2p+2$, $y=x(1+p)+p^2$; с.и. нема. г) $x=(pC-p\ln p-1)/p(p-1)^2$, $y=p^2x+\ln p$; с.и. $y=x$. д) $x=(C-\ln\sqrt{1+p^2})/p^2$, $y=2px+\operatorname{arctg}p$; с.и. нема. ѓ) $2Cx=y^2-C^2$; с.и. нема. 5.83. $x=(2Cp^2+2p-1)/2p^2(p-1)^2$, $y=xp^2-1/p$, $C=3/2$; с.и. $y=x-1$ не минува низ (0,1). Уп. Дадената ДР е лагранжова: $y=xp^2-1/p$, $p=y'$. 5.84. $y=(x-2C)^2/2C$; $C=-1/2$ за $x=1$ и $y=-4$, т.е. низ (1,-4) минува интегралната крива $y=-(x+1)^2$. Но, и с.и. $y=-4x$ минува низ (1,-4). Уп. Дадената ДР се сведува на лагранжова ако y се изрази преку x и y′, а на хомогена - ако y′ се изрази со x и y. 5.85. $x=$ $=(\frac{2}{p}+p)y$, $y=C\sqrt{1+p^2}/p^2$. Уп. $xy'-y/\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+y'^2}$; $xy'-y=y(1+y'^2)$; $x=2y/y'+yy'$; $x=y(2x'+1/x')$ - лагранжова по x, x′. 5.86. а) $x^2+y^2=$

5.86. а) $x^2+y^2=(x+C)^2$. б) $x^3y^2-Cxy(x+1)+C^2=0$. в) $y(C^2x-1)+C=0$; $4xy^2+1=0$. г) $(\ln y+2x-C)(y-x^2/2-C)(y+x^2/2-C)=0$. Уп. Да се групираат првиот со третиот, а вториот со четвртиот собирок. д) $(x+y-C)\cdot(y-Cx)(y-x^2-C)=0$. Уп. Равенката да се напише во обликот $(y'+1)\cdot(xy'-y)(y'-2x)=0$. 5.87. а) $x=2p+\ln p$, $y=p^2+p+C$. б) $9(x+y-C)^2=4(1-x^3)$. в) $x=p^2+\cos p$ $y=\frac{2}{3}p^3+p\cos p-\sin p+C$. г) $x=a\sin^3 t$ $y=\frac{3a^2}{16}(t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{3}\sin^3 2t)+C$. 5.88. а) $x=2p+3p^2+C$, $y=2p^3+p^2$. б) $x=\ln p-\ln\sqrt{1+p^2}+2\operatorname{arctg} p+C$, $y=\ln(1+p^2)+\operatorname{arctg} p$. в) $x=\ln p+(p+1)e^p+C$, $y=p+p^2e^p$. г) $y=C-x+\frac{1}{C-x}$; $y=2$. Уп. Да се стави $2+y'=ty$; $y=(1+t^2)/t$, $y'=t^2-1$, па $dx=dy/p$; $x=-1/t+C$. д) $y=4/(C-x)^2-x+C$; $y=3$. Уп. $3+y'=ty$; $y=t^2+2/t$, $y'=t^3-1$. ѓ) $x=2\operatorname{tg}^2 t-\ln(1+\operatorname{tg}^2 t)^2+C$, $y=a\sin^4 t$, т.е. $x=2y^2(a-y)^{-2}+\ln(a-y)^2-\ln a^2+C$. Уп. $y=a\sin^4 t$, $y'=a\cos^4 t$. 5.89. а) $y=(x-C)^2+C$; $y=x-1/4$. б) $4(x+C)^3=27(y-C)^2$; $x+y=1$. в) $(x^2+y^2-4C)^3+27Cy^4$. г) $8y-4Cx^2+3C^3=0$; $9y=2x^3$. 5.90. а) о.и. $y=Cx+C^3$; ПДК, СДК, с.и. $4x^3+27y^2=0$. б) о.и. $y^2=2Cx-C^2$. Уп. Да се реши по x: $2x=y/p+yp$ и да се диференцира по y. ПДК и СДК: $x^2-y^2=0$; с.и. $y=x$, $y=-x$. 5.91. а) о.и. $C^2+Cxy+x=0$; ПДК: $x^3(xy^2-4)=0$; СДК: $x(xy^2-4)=0$; с.и.: $xy^2=4$; $x=0$ е партикуларен интеграл ($C=0$). Уп. За о.и., да се изрази y преку x,y' и да се диференцира по x. б) $(x+C)^2=y(y-1)^2$; ПДК: $y=0$; СДК: $y(y-1)^2=0$; с.и. $y=0$; г.м. на јазли: $y=1$. в) ПДК: $6y-x^3=0$; о.и. $(3y+2C)^2=4Cx^3$ (Уп. Дадената ДР да се диференцира по x; ќе се добие $(x^2-2p)(p-2xp')=0$.) СДК: $x^3(6y-x^3)=0$; с.и. $6y=x^3$; $x=0$ г.м. на повратни точки. г) $(4x^3+3xy+C)^2=2(2x^2+y)^3$: нема с.и.; г.м. на повратни точки: $2x^2+y=0$. 5.92. а) $y^2=4x^2$. б) $y=\pm 2e^{x/2}$. в) $xy=1$. 5.93. а) $4y=x^3$. б) $y^{3/2}=x^{3/2}+2^{3/2}$. 5.94. а) $y=\pm x$. б) $y^2=4x$. в) $y=0$, $y=4x$. г) Нема. 5.95. а) $y=x^2+1$. б) $y^2=1$. в) $xy=0$. г) $y=0$, $y=3$. Уп. СДК: $y(y-3)^2=0$, ПДК: $y(y-3)^2=0$. 5.96. Астроида, $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Уп. Од равенката на отсечките (во сегментен вид), $x/\cos\alpha+y/\sin\alpha=1$, да се елиминира параметарот α, откако таа ќе се диференцира по α. 5.97. а) $xy=C$. б) $y=Ce^{-x/2}$. в) $3x^2+2y^2=C$. г) $x^{3/2}-y^{3/2}=C$. д) $16y^3=9(x-C)^2$. ѓ) $(x^2+y^2)^2=Cxy$. Уп. ДР на дадената фамилија е $y'=(3xy^2-x^3)/(3x^2y-y^3)$, а ДР на ортогоналните траектории: $y'=(y^3-3x^2y)/(3xy^2-x^3)$ – хомогена. е) $x^{2-k}-y^{2-k}=C$ за $k\neq 2$; $y=Cx$ за $k=2$. 5.98. а) $\rho^2=C\cos 2\phi$. б) $\rho=C(1-\cos\phi)$. в) $\rho^4=C\cos 2\phi$. г) $\rho=C\sin^2(\phi/2)$, $C>0$. д) $\rho^2=C(1+\cos^2\phi)$. ѓ) Види ѓ) од 5.97. 5.99. а) $x^2+y^2=C(y-x)$. б) $\rho=Ce^{\phi/k}$, $k=\operatorname{tg}\alpha$ (ρ и ϕ се поларни координати). в) $x=y-\ln(y+1)^2+C$. г) $x=y\sqrt{3}-\ln(y+\sqrt{3})^4+C$. д) $3y+x\sqrt{3}+\ln(x\sqrt{3}-2)^2=C$. ѓ) $x=Cy^2+y\sqrt{3}$. 5.101. а) $\phi(p)=1-p^2$. б) $\phi(p)=\ln p$. в) $\phi(p)=ap/\sqrt{1+p^2}$. 5.102. а) $x=(C-\varepsilon at)\sin t+\varepsilon a\cos t$, $y=(\varepsilon at-C)\cdot\cos t+a\sin t$, $\varepsilon=\pm 1$, $p=\operatorname{tg}t$. Уп. $x^2+y^2=a^2$ е с.и. за ДР $y=xp+\varepsilon a\sqrt{1+p^2}$, $\varepsilon=\pm 1$; ДР на ортогоналните траектории на фамилијата прави $y=Cx+\varepsilon a\sqrt{1+C^2}$ е $y=(-x+\varepsilon a\sqrt{1+p^2})/p$ – лагранжова. За $C=0$ и $\varepsilon=1$ се добиваат: $x=a(\cos t-t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$ – најчесто среќавани параметарски равенки на еволвентата на $x^2+y^2=a^2$. б) $x=(C-\ln|1+\sin t|+\ln|\cos t|)\sin t$, $y=(\ln|1+\sin t|-\ln|\cos t|-C)\cos t-\frac{1}{2}\operatorname{tg}t$. в) $x=a(t-\operatorname{th}t)+C/\operatorname{ch}t$, $y=C\operatorname{th}t+a/\operatorname{ch}t$. г) $x=C\sin t-2\operatorname{tg}t$, $y=3-C\cos t-\operatorname{tg}^2 t$. 5.103. Бараната ДР е $y=x\phi(p)+\psi(p)$, $p=y'$, т.е. лагранжова, каде што $\phi(p)=(p-1)/(p+1)$ и $\psi(p)$ е за: а) $-(p-1)^2/(p+1)^2$; б) $\pm 2ap/\sqrt{2(1+p^2)}$; в) $(p-1)^3/(p+1)^3$. 5.105. $\lambda=1/(1+x^2)^2$; $\mu=1/(x-y)^2$; $y=x+C(1+x^2)$. 5.107. $\lambda=1/x^2$, $\mu=(x^2-y^2-1)^{-2}$; $x^2-y^2-1=Cx$. 5.108. $(fg_1-f_1g)y'=(f_1g_1'-f_1'g_1)y^2+(f'g_1-f_1g'-fg_1'+f_1'g)y+fg'-f'g$. Уп. $(Cf_1+g_1)y=Cf+g$, т.е. $(g_1y-g)/(f-f_1y)=C$. 5.110. $\dfrac{y-y_2}{y-y_1}:\dfrac{y_3-y_1}{y_3-y_1}=C$. Уп. Со смената $y=y_1+1/z$, рикатиевата ДР се сведува на линеарна по z,z'. Од $z=1/(y-y_1)$ се добиваат $z_2=1/(y_2-y_1)$ и $z_3=1/(y_3-y_1)$ – два партикуларни интеграла на линеарната ДР; потоа се применува зад. 2.42: $z=z_2+C(z_3-z_2)$. 5.111. а) $y=(2x^3-3C)/x(3C+x^3)$. б) $(xy-1)\ln Cx=1$. в) $(C+\ln x)(xy-1)=2$. 5.113. а) $y=0$ и $y=x+1$. Уп. Ако $y=ax+b$ е решение, тогаш заменувајќи го тоа и $y'=a$ во дадената ДР, ќе се добие $xa^2+a-(ax+b)\equiv 0$, па $a^2-a=0$, $b=a$. б) Нема. 5.114. а) $z=xz'-z'^3$; $1/y=Cx-C^3$; $4x^3y^2=27$. б) $y=C/x+1/C$; $xy^2=4$. в) $(e^y-Ce^x)^2=C^2+1$; $e^{2x}+e^{2y}=1$. 5.115. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. Уп. Кривата е сингуларен интеграл на ДР $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}-y'+1$. 5.116. $x=-ab/(a+p)^2$, $y=bp^2/(a+p)^2$, p-параметар. 5.117. Има три можности (црт. 15):



Црт. 15

1°. OB=OM: $y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$, па $2Cy=C^2-x^2$. 2°. OB=BM: $y-xy'=x\sqrt{1+y'^2}$, т.е. $(y/x-y')^2=1+y'^2$, па $x^2+y^2=Cx$. 3°. BM=OM: $x\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $x^2(1+y'^2)=x^2+y^2$, па $xy=C$. 5.118. $x^2+y^2=y$. Уп. $\overline{MA}=\overline{OA}$ (црт. 15); $(x^2-y^2)y'=2xy$. 5.119. $x^2+y^2=Cx$, $C>0$. Уп. $\overline{OP}=x$ (црт. 15, но $x\geq 0$); $2xyy'+x^2-y^2=0$. 5.120. $1/x^2+1/y^2=1$. Уп. $\overline{OA}=x$ (црт. 15, но $x\geq 0$); $x-yx'=x^3$ - бернулиева. 5.121. $f(x)=Cx^{1/k-1}$. Уп. Да се диференцира по параметарот x под знакот на интегралот: $\int_0^1 yf'(xy)dy=kf'(x)$ и да се примени парцијална интеграција; имајќи предвид дека $\int_0^1 f(xy)dy=kf(x)$, ќе се добие ДР $\frac{1}{x}f(x)-\frac{k}{x}f(x)=kf'(x)$. 5.122. $f(x)=Ce^{kx}$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА (ГЛ. 6)

6.11. $y = x^3 + \sin x + Ax + B$. 6.12. $y = \ln \frac{1+\sin x}{\cos x} + Ax + B$.
6.13. $y = Ax^4/4 + B$. 6.14. $x = 1 + 20t^3$, $y = 3t^5 + At + B$.
6.15. $x = t + \ln t$, $y = t^3/6 + 3t^2/4 + (1+A)t + A\ln|t| + B$.
6.16. $y = (x^2+Ax+B)(2x^2+Ax+B)$. Уп. Равенката е квадратна по y''; $y'' = 2$, $y'' = 4$. 6.17. $y = \ln\sqrt{x^2-A} + B$. Уп. $y' = p$ – бернулиева.
6.18. $y = Ax^3 + Bx + C - x^2$. 6.19. $y = Ax\ln|x| + (B-A)x + C + x^3 - x^2$; $y = x^3 - x^2 + x - 1$. 6.20. $y = (x-1)e^x$; $y_{min} = -1$ за $x = 0$. 6.21. $y = 1/x + \ln x$. 6.22. $y = (x-x^2)/4$, $y = (1-x^3)/12$; парцијалниот извод $f_{y'} = \pm 1/\sqrt{x^2+4y'}$ на функцијата $f(x,y,y') = (-x\pm\sqrt{x^2+4y'})/2$ $(=y'')$ има прекин во точката $(1,0,-1/4)$. Уп. $y' = p$, $p = xp' + p^2$ – клероова; о.р. $y = Ax^2 + 4A^2 + B$, с.р. $y = -x^3/12 + C$. 6.23. $y = Ae^x + Be^{-x}$. 6.24. $Ay^2 = 1 + (Ax+B)^2$.
6.25. $\int(y^3+A)^{-1/2}dy = \pm x + B$. 6.26. $y = -\ln\cos x$; о.и. $y = -\ln\cos(x+A) + B$. 6.27. $x = \ln\sin(y+A) + B$. 6.28. $y^2 - x^2 = 1$. Уп. $y''y^3 = 1$ – зад. 6.24. 6.29. $Ay^2 - (x-B)^2 = kA^2$. Уп. $y''y^3 = k$.
6.30. $x + B = \int\left[(y/A)^{2/k}-1\right]^{-1/2}dy$. Уп. $(1+y'^2)^{3/2}/y'' = ky(1+y'^2)^{1/2}$, па – како во 6.9. а) $(x+B)^2 + y^2 = A^2$ – кружници со произволен радиус и центри на оската Ox. б) $y = A\,\mathrm{ch}\left[(x+B)/A\right]$ – верижни линии. в) $(x+B)^2 = 4A(y-A)$ – параболи; в. зад. 6.9. 6.31. $y = a\ln\sec(x/a+A) + B$. Уп. $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 1/\sqrt{1+y'^2}$, $\cos\alpha = a/R$, $1/\sqrt{1+y'^2} = ay''/(1+y'^2)^{3/2}$; $ay'' = 1 + y'^2$. 6.32. $x^2 - A = \frac{k}{m}(t+B)^2$. Уп. $m\ddot{x} = k/x^3$; в. и зад. 6.10. 6.33. $y^2 = Ax + B$. 6.34. $y = Be^{Ax}$.
6.35. $y = 1 + \frac{1}{x}$; $y = 1 + 1/(Ax+B)$. 6.36. $Ay = Be^{Ax} + 2$. 6.37. $(x+A)^2 + y^2 = B^2$. 6.38. $\ln|y+A| + A/(y+A) = x + B$; $y = e^x$.

6.39. $\ln y = Be^{Ax}$. 6.40. $\ln y = Ae^{x} + Be^{-x}$; смена: $y = e^{z}$.
6.41. $y' = 1/\cos x$; хомогена. 6.42. $y^2 - x^2 = 3$ хомогена . 6.43.
$y = \frac{A}{6}x^3 - \frac{A^3}{2}x^2 + Bx + C$. 6.44. $y = \frac{A}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}(A+2)x^2 + Bx + C$.
6.45. $y = 4/(x-2)^2$. 6.46. $y = x^3/6$. 6.47. $y = \arccos e^{x}$. Уп.
$\sin\alpha = a/R$; $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = y'/\sqrt{1+y'^2}$; $y'(1+y'^2) = ay''$; о.и.
$y = \arcsin e^{(x-A)/a} + B$. 6.48. $3y = (x-2)\sqrt{2x-1} - 5$. Уп. $(1+y'^2)^{3/2} =$
$= x^2y''$; $A - 1/x = p/\sqrt{1+p^2}$, $A = 1$; $y' = p = (x-1)/\sqrt{2x-1}$; $2x-1 = t^2$
итн. 6.49. $y\cos^2(x+A) = B$; $y_a = 1/\cos^2 x$; $a \geq 1$; а) $x = k\pi$;
б) $x = \pi/3 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. 6.50. $x = Ae^{2y} + Be^{y} + y/2 + 3/4$.

7.15. $dx_1/dt = x_2$, $dx_2/dt = 3x_1 - x_3 + 5t$, $dx_3/dt = 2x_3 - x_2$. Уп. $x = x_1$, $dx/dt = x_2$, $y = x_3$. 7.16. $x_1' = \frac{1}{t} x_2 + 4$, $x_2' = x_3$, $x_3' = 3x_1 - x_3$. Уп. $x = x_1$, $y = x_2$, $dy/dt = x_3$. 7.17. $y_1' = y_2$, $y_2' = xy_2 - x^2y_1 + 1$. Уп. $y = y_1$, $y' = y_2$. 7.18. $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = 2y_3 - xy_2^2 + 3x$. Уп. $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$. 7.19. $Ax'' + Bx' + Cx + h(t) = 0$, A, B, C – константи. 7.20. $y = e^x$, $z = x + e^{-x}$. 7.21. $y = Ax + Bx^2$, $z = A(1-x) + B(2x-x^2)$ 7.22. $y = Ax + B/x$, $z = -Ax + B/t$. 7.23. $x = Ae^{2t} + Be^{-3t} + t^2 + t$, $y = -Ae^{2t} + \frac{B}{4} e^{-3t} - t^2/2$. 7.24. $2x = 4 + t^2 + e^{-t} - 3\sin t + \cos t$, $2y = 2 - e^{-t} + 3\sin t - \cos t$. 7.25. $x = -C_2e^{-2t} + 4C_3e^{3t}$, $y = 2C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 6C_3e^{3t}$, $z = -2C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 6C_3e^{3t}$. 7.26. $e^y - e^x = C_1$, $z = C_2(x-1)$. Не; некои системи ДР не можат да се сведат на една ДР. 7.27. $x^2 - y^2 = C_1$, $x + y = C_2z$. 7.28. $y = C_1z$, $x^2 = y + z + C_2$. 7.29. $x^2 - 4z = C_1$, $(y+x)^2 = C_2x$. 7.30. $z = C_1x$, $x^2 - y^2 + z^2 = C_2x$. 7.31. $y = C_1z$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2y$. 7.32. $cx + by + az = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Уп. $dx = k(ay-bz)$, $dy = k(cz-ax)$, $dz = k(bx-cy)$ да се помножат со c, b, a односно со x, y, z соодветно и потоа да се соберат. 7.33. $z = C_1y$, $y(x^2+y^2) = C_2x^2$. 7.34. $z^2 = y^2 + C_1$, $zy - y^2 - x = C_2$. 7.35. $z = x - y$, $y(y-2x)^3 = (y-x)^2$. Уп. $dx = k(x^2-yz)$, $dy = k(y^2-yz)$, $dz = kz(x+y)$; од првата ја одземаме втората, па $k = (dx-dy)/(x^2-y^2)$, а од третата, $k = dz/z(x+y)$; тогаш $dz/z(x+y) = (dx-dy)/(x^2-y^2)$, па $z = C_1(x-y)$; $C_1 = 1$. Во $y' = (y^2-yz)/(x^2-yz)$ заменуваме $z = x - y$ – ќе добиеме хомогена ДР од прв ред. 7.36. $x = 5e^{-t} - 2e^{4t}$, $y = 5e^{-t} + 3e^{4t}$. 7.37. $x = -8e^{-2t} + 11e^{-8t}$, $y = 4e^{-2t} + 11e^{-8t}$. 7.38. $x = C_1e^{-6t} + C_2e^{-2t}$, $y = 2C_1e^{-6t} - 2C_2e^{-2t}$. 7.39. $x = (A+Bt)e^{3t}$, $y = -(A+B+Bt)e^{3t}$.

7.40. $x = \frac{3}{2}(t+3)e^{2t}$, $y = (t+2)e^{2t}$. 7.41. $x = A\cos t + B\sin t$, $y = -A\sin t + B\cos t$. 7.42. $x = 2e^{2t}\cos t$, $y = e^{2t}(\cos t+\sin t)$. 7.43. $x = C_1 + C_2e^t + 2C_3e^{2t}$, $y = 3C_1 - 2C_3e^{2t}$, $x = 2C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t}$. 7.44. $x = 2C_1e^{2t} + (C_2t+C_3)e^t$, $y = -2C_1e^{2t} + 3C_2e^t$, $z = C_1e^{2t} + (C_2t+C_2+C_3)e^t$. 7.45. $x = C_1e^t + C_2\cos t - C_3\sin t$, $y = (C_2+C_3)\cos t + (C_2-C_3)\sin t$, $z = C_1e^t + C_2\sin t + C_3\cos t$. 7.46. $x = e^{-t} + 2\operatorname{ch}t$, $y = -2e^{-t}$, $z = 2\operatorname{ch}t$. 7.47. $x = A\cos 2t + B\sin 2t - t\sin 2t$, $y = -B\cos 2t + A\sin 2t + t\cos 2t$. 7.48. $x = A + Be^{-2t} + e^t$, $y = A - Be^{-2t} + e^t$. 7.49. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \cos t\cdot\ln|\sin t\cos t| + 2t\sin t$, $y = -C_1\sin t + C_2\cos t - \sin t\,\ln|\sin t\cos t| + 2t\cos t$. 7.50. $x = At + Bt^2 + t^3/2 + t(1+\ln t)$, $y = -A - 2Bt + (t^2-1)\ln t - 3t^2/2 - 2$. Уп. "Слободниот член" $g(t)$ е t/t^2, а не t; в. и зад. 3.20. 7.51. $x = -2A - 3Be^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t-1|$, $y = A + 2Be^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t-1|$. 7.52. $x = t/3 = -y$. 7.53. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + t + 2$, $y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - 2t + 1$. 7.54. $x = 2\operatorname{ch}t$, $y = \sin t - 2\operatorname{sh}t$. 7.55. $x = 3\sin t - 2\cos t + e^{-2t}$, $2y = 9\cos t - 7\sin t - e^{-3t}$. 7.56. $x = 1$, $y = z = e^{-t}$. 7.57. $x = e^t + e^{2t}$, $y = e^t - e^{2t}$. 7.58. $x = C_1e^t + C_2e^{-2t} + 2e^{-t}$, $y = 3C_1e^t + 2C_2e^{-2t} + 3e^{-t}$. 7.59. $x + 2y = A_1\cos(3t+\alpha_1)$, $x - 2y = A_2\cos(t+\alpha_2)$ или: $x = 2C_1\cos 3t + 2C_2\sin 3t + 2C_3\cos t + 2C_4\sin t$, $y = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t - C_3\cos t + C_4\sin t$, при што $4C_1 = A_1\cos\alpha_1$, $4C_2 = -A_1\sin\alpha_1$, $4C_3 = A_2\cos\alpha_2$, $4C_4 = -A_2\sin\alpha_2$. 7.60. $x + y = A_1\cos(t\sqrt{2}+\alpha_1)$, $x-3y = A_2\cos(t\sqrt{6}+\alpha_2)$. 7.62. $x = \cos t + 3$, $y = -\sin t$; $(x-3)^2 + y^2 = 1$. 7.63. $x = 2e^{2t} - 2e^t$, $y = 5e^{2t} - 4e^t$; $(5x-2y)^2 = 4(y-2x)$. 7.64. $x \approx 2$ km. Уп. Зад. 7.13; $g \approx 9{,}81$ m/сек^2. 7.65. $x = a(ct-\sin ct)$, $y = a(1-\cos ct)$. 7.66. $x = \frac{a}{4}(1-2^{-t})$, $y = \frac{3a}{4}(1-2^{-t})$. Уп. Во моментот t, количеството нераспаднатa материја од A е $a - x - y$, па $x' = k_1(a-x-y)$, $y' = k_2(a-x-y)$, k_1, k_2 - коефициенти на пропорционалноста. За определувањето на k_1 и k_2 да се земе час за единица време; од партикуларното решение (со $x = y = 0$ при $t = 0$) и од $x = a/8$, $y = 3a/8$ при $t = 1$, ќе се добие $k_1 = (\ln 2)/4$, $k_2 = (3\ln 2)/4$. 7.67. $x = 2 - e^{-20t} - e^{-60t}$, $y = e^{-60t} - e^{-20t}$. 7.68. $I_1' = \frac{1}{K}(-L_2R_1I_1+MR_2I_2+EL_2)$, $I_2' = \frac{1}{K}(MR_1I_1-L_1R_2I_2-EM)$, $K = L_1L_2 - M^2$. 7.69. $x = \frac{E}{1050}(21-5e^{-10t/3} - 16e^{-100t/9})$, $y = \frac{E}{105}(e^{-100t/9}-e^{-10t/3})$. 7.69. $x = \frac{E}{6R}(4-3e^{-T} - e^{-3T})$, $y = \frac{E}{6R}(2-3e^{-T}+e^{-3T})$, $T = Rt/L$. 7.70. $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos 3t + C_4\sin 3t - 4t/3$, $x = -C_1e^t - C_2e^{-t} + \frac{7}{3}C_3\cos 3t + \frac{7}{3}C_4\sin 3t + 14t/9$. 7.71. $x = e^t + t - t^3/6$, $y = -e^t + 1 + t^4/24$. 7.72. $2x = 3(1-e^{-4t})$, $2y = 5 + 4t - e^{-4t}$, $z = t^2 - 2t - 4 + 2e^{-4t}$.

8.29. а) Да, но не општ. б), в) Да. г), д) Да, но не општ, зашто содржи само една произволна функција (а треба - две). 8.30. Да; $z = \ln(x^2+y^2+1)$. 8.31. а) $xp = z$. б) $p = 2xq$. в) $z = px + qy - pxyctgy$. г) $z_x = xz_{xx}$; $z_{xy} = 0$; $z_y = yz_{yy}$ ($z_{xx} = \partial^2 z/\partial x^2$ итн; уочи дека се добиваат три различни ПДР). 8.32. $xp = z - y$; $q = 1$ (уочи дека се добиваат две ПДР; тоа е обично така при функции од два аргумента со само една произволна константа. 8.33. а) $z = ax^3 + by^3 = x^3 \cdot \times \{a + b(y/x)^3\} = x^3 g(y/x)$, б) $z = x^3 \cdot \{a + b(y/x) + c(y/x)^2 + d(y/x)^4\} = x^3 h(y/x)$. 8.34. а) $yp + (1-x)q = 0$. б) $zp + q = 0$. в) $yp + q = xy$. г) $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = xz_x - yz_y$. д) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (2a^2/x)u_x$. 8.35. $p - q = 0$. Уп. Да се елиминираат a и b од $x/a + z/b = 1$. 8.36 $z^2(z_x^2+z_y^2+1) = 1$. 8.37. а) $z^2(1+p^2) + y^2 = 25$ или $y + zq = 0$. Уп. $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 25$. б) $(x-y)^2(1+p^2+q^2) = 25(p-q)^2$. Уп. $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = 25$. 8.38. $yp - xq = 0$. Уп. Да се елиминира произволната функција ψ од $z = \psi(x^2+y^2)$. 8.39. $F(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 0$, F - произволна функција и a,b,c - даени броеви; $(x-a)p + (y-b)q = z-c$. Уп. Равенките на генератрисите се: $\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{1}$, т.е. $\frac{x-a}{z-c} = \alpha$, $\frac{y-b}{z-c} = \beta$; генетрисите ја сечат директрисата, па: $\xi(t) = a + \alpha(z-c)$, $\eta(t) = b + \beta(z-c)$, $\zeta(t) = z$. По елиминацијата на t и z, се добива врска меѓу параметрите α и β: $F(\alpha,\beta) = 0$. 8.40. $z - xp - yq = d\sqrt{1+p^2+q^2}$. 8.41. $xp + yq + (x^2+y^2)/2z = 0$. 8.42. $xp + 2yq = z$. 8.43. $xp + yq + z = 0$. 8.44. $z = xy(x+y) + f(y)$. 8.45. $z = x^2 y + y^2 - 2x^4 + 1$. 8.46. $z = x^2 + xy - 1$. 8.47. $z = x \cdot \frac{y+xf(x)}{x-yf(x)}$. Уп. За константа при интегрирањето да се земе $\frac{1}{x}$ arctgC; $C = f(x)$. 8.48. $z = xf(y) - \{f(y)\}^2/y$. 8.49. а) $u \cdot (\partial z/\partial u) = z$. б) $z = uf(v) = xf(y/x)$. 8.50. $\partial z/\partial v = 1/2$. б). $2z = v + f(u) = z + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} +$

$+ 2f(y/x)$. 8.51. а) $\partial w/\partial v = -1$. б) $w = -v + f(u)$, $z^2 = f(y/x) - x^2 - y^2$. 8.52. $z = f(3x+y^2)$. 8.53. $z = f(x^2+2xy)$. 8.54. $u = F(y^2-z^2, x-yz)$. 8.55. $u = F(y^2+z^2, x(y-z))$. 8.56. $z = \ln xy + 2$. 8.57. $z = \pm\text{arctg}\,\frac{y}{x} + C$. 8.58. $z = (y^2+2xy)^2$. 8.59. $4yz - x^3 - 2x = f(xy)$. 8.60. $F(z, x^2-(y-z)^2) = 0$. 8.61. $z = xf(y/x) - x^2 - y^2 - 1$. 8.62. $z = xyf(y^2-x^2)$. 8.63. $z = yf(y+y^3/x^2)$. 8.64. $F(xyz, x^2+y^2+z^2)=0$. 8.65. $F(y+\ln(z/x), 3x^2+2y^3+3z^2) = 0$. 8.66. а) $z = xf(y/x) + 2$. б) $z = 3 + (x-1)f(\frac{y-2}{x-1})$. 8.67. $\lambda = 1/x^3y^3$. Уп. Од соодветниот систем на добиената ПДР се добива $dx/x = k(-2xy-1)$, $dy/y = k(2xy-x^2y^2+1)$, $d\lambda/3\lambda = kx^2y^2$, па $dx/x + dy/y + d\lambda/3\lambda = 0$. 8.68. $\lambda = 1/x^2y^4$. 8.69. $\lambda = y^{-k}e^{(1-k)\int pdx}$. 8.70. $\lambda = 1/y^2$; $1 + x^2 - y^2 = Cy$. 8.71. $\lambda = 1/x^2$; $y^2 = 2xy + 2/x + 2C$. 8.72. $\lambda = 1/xy$; $xy - \ln x^3y = C$. 8.73. $\lambda = 1/x^2y^3$; $x^3 + y = Cxy^2$. 8.74. а) $a(x^2-z^2) + b(x^2-y^2) + c = 0$; б) $a(x^2+y^2+z^2) + b(x+2y+z) + c = 0$ (a,b,c - произволни константи). 8.75. $z^2 + y^2 + x + z = 3$. 8.76. $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. 8.77. $z = x^2/2y + x^2/4$. 8.78. $z(x+y-3xy) + 2xy = 0$. 8.79. $y^2 = xz$. Уп. $C_1 = z/x$, $C_2 = y^4 - x^2z^2$. 8.80. $(x+2y+z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2)$. Уп. $dx = k(y-2z)$, $dy = k(z-x)$, $dz = k(2x-y)$ да се помножат, прво со $1,2,1$ (и да се соберат), а потоа со x,y,z соодветно. 8.81. $2x^2z = y^2(x^2+y^2)$. Уп. $dy/dx = 2y^3/(x^3+3xy^2)$ е хомогена. 8.82. $x^2 = y^2 + z^2$. Уп. $C_1 = z^2/y$, $C_2 = (x^2-y^2)/y$. 8.83. $u = (y+z)/x$. 8.84. $4xz = y^2$. 8.85. $x^2 + z^2 = f(x^2-y^2)$. 8.86. $z^2 + x^2/2 = f(y)$. 8.87. $z = yf(y/x^2)$. 8.88. $z = \frac{1}{x}\,f(\frac{y}{x})$. 8.89. $x^2 + y^2 + z^2 = f(y/x)$. 8.90. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. б) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x+y}{x}$. 8.91. $x^2 + y^2 + 2z^2 = r^2 + k^2$. 8.92. $z = c(xy)^k$ (k,c - произволни константи). 8.93. $z = ce^{kx^2+(k-1)y^2}$ (k,c - произволни константи). 8.94. $z = ce^{k(x^2/2a+y^2/2b)}$ (k,c - произволни константи). 8.95. $z = cx^2e^{k(x^2+y^2)}$. 8.96. а) $z = ax \pm \sqrt{1-a^2}\cdot y + c$; $a^2 \le 1$; б) $z = ax + y/a + c$ (a,c - произволни константи). 8.97. а) $z = cx^ky^{,-k}$;

б) $z = ax + by$ (c,k,a,b – произв. конст.). 8.98. $z = -1/(x+y^2+C)$.
8.99. Нема решение. 8.100. $z + x + y^2 = Ce^{x^2}$. 8.101. $x^2y-3xyz=C$.
8.102. $z = x^2(y+\ln x-x+C)$. 8.103. $z = Cxy^2$. 8.104. Нема решение.
8.105. $x^2yz + x^3 = C$. 8.106. $2xy + y^2 + 6xz^2 = C$. Уп. $6zz'_y = -(1+y/x)$, $3z^2 = -y - y^2/2x + f(x)$, $f(x) = C/x$. 8.107. $z = ax + \sqrt{a^2-1}\cdot y + b$. 8.108. $z = ax - ay/(a+1) + b$. 8.109. $z = \frac{1}{6}(2x-a)^3 + a^2y + b$. Уп. $q = a^2$. 8.110. $z = ax + y^2 - 3ay + b$.
8.111. $x = (a-y)(z+b)$. 8.112. $z = a(x^{3/2}+y^{3/2}) + b$. 8.113. $z = ax^2/2 + ay^2/(6a-2) + b$. 8.114. $z^2 = 2x/a + 2y/a^2 + b$. 8.115. $(1+a)z^2 = 2a(ax+y) + b$. 8.116. $\ln z = -x/a - y + b$; $z = c$. 8.117. $z = ax + by + a^2 - ab$. 8.118. $\ln z = \frac{2}{3}(a+x)^{3/2} + \frac{2}{3}(y-a)^{3/2} + b$.
Уп. $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = x + y$, каде што $u = \ln z$, па новата ПДР е од типот како 8.112. 8.119. $\ln z = 2\sqrt{ax} + 2\sqrt{(1-a)y} + b$. 8.120. $z^2 = x/a^2 + y/a + b$. 8.121. $z^3 = ax + a^2y + b$. 8.122. $z = ax + by + f(a,b)$. 8.123. $z = axe^{-y} - a^2e^{-2y}/2 + b$. 8.124. $z^2 = 2ax + a^2y^2 + b$. 8.125. $z^2 - 1 = b^2(x+ay)^2/z$. Уп. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z-1/z} = \frac{dp}{p/z} = \frac{dq}{q/z^2}$, $q = ap$, $p = b\sqrt{z^2-1}/z$. 8.126. $z = xy$. 8.127. $z^2 = 3x + 9y$.
Уп. $(1+a)z^2 = 4a(x+ay) + b$. 8.128. $z = (x+y)^2$. 8.129. $(x+y)^2 + 2z^2 = 32$. Уп. $(a^2+1)(16-z^2) = (ax+y+b)^2$. 8.130. $(a^2+1)(4-z^2) = (ax+y+b)^2$. Уп. Нека A е прободот на рамнината OXY со нормалата на бараната површина во M. Тогаш $A(x+zp,\ y+zq,\ 0)$, па $\overline{MA} = (z^2p^2+z^2q^2+z^2)^{1/2} = 2$. 8.131. $f(y/x) = \frac{Ax}{x+y} + B$ (A,B – произволни константи). Уп. $u = y/x$, па $(1+u)f''(u) + 2f'(u) = 0$. 8.132. а) $3x^2z = x^3 + y^3 + 3kxy$. б) $f(x,y) = \phi(y/x)$. Уп. По диференцирањето на дадената функција z (по x и по y) добиваме $a = p - f'_x$, $b = q - f'_y$, па $z = px + qy - xf'_x - yf'_y + f$; изедначувајќи ја оваа со $z = px + qy + f$, добиваме $xf'_x + yf'_y = 0$. 8.133. $z = xf(y/x) + g(y/x)$; $x^2z_{xx} + 2xy\,z_{xy} + y^2z_{yy} = 0$. 8.134. Уп. Најди $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ од диференцира-

њето на $\psi_1 - a\psi_2 - b = 0$, а по заменувањето во (2) искористи го фактот што ψ_1 и ψ_2 се интеграли на (2). <u>8.135</u>. а) $F(z/y,\ (x^2+y^2+z^2)/y) = 0$. б) $x^2 + y^2 + z^2 = ay + bz$ - сфери низ координатниот почеток со центри на рамнината OYZ. <u>8.136</u>. а) $x^2 + y^2 + z^2 = f(\mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2})$. Уп. $P(x,y,0)$, $N(x+zp,\ y+zq,\ 0)$; коефициент на правецот на правата OP е $k_1 = y/x$, на ON е $k_2 = (y+zq)/(x+zp)$; $1 = \mathrm{tg}(\sphericalangle NOP) = (k_1-k_2)/(1+k_1k_2)$, па $z(x-y)p + z(x+y)q + x^2 + y^2 = 0$. б) $z^2 = (x^2+y^2)(e^{-2\mathrm{arctg}(y/x)}-1)$. <u>8.137</u>. $4z = (a\ln x+b\ln y+C)^2$, $a^2 + b^2 = 1$. Уп. $X = \ln x$, $Y = \ln y$, $Z = 2z^{1/2}$ или $X = \ln x$, $Y = \ln y$. <u>8.138</u>. $\ln z^2 = ((a^2+4)^{1/2}-a)(\ln x+a\ln y+b)$. Уп. $X = \ln x$, $Y = \ln y$. <u>8.139</u>. $\ln z = \frac{2}{3}\ (x+a)^{3/2} + \frac{2}{3}\ (y-a)^{3/2} + b$. Уп. $Z = \ln z$; $p = z\cdot Z_x$, $q = z\cdot Z_y$. <u>8.140</u>. $x\ln z = a + (a^2-1)x\ln y + bx$. Уп. $X = 1/x$, $Y = \ln y$, $Z = \ln z$. <u>8.141</u>. $z = y \pm x$. <u>8.142</u>. $z = (x-y)^2$. <u>8.143</u>. $z = (x^2+y^2)/4$. Уп. Со елиминација на a и b од равенките: $g \equiv z - ax - by + a^2 + b^2 = 0$, $\frac{\partial g}{\partial a} \equiv -x + 2a = 0$, $\frac{\partial g}{\partial b} \equiv -y + 2b = 0$. <u>8.144</u>. Решение. Од двопараметарската фамилија решенија $z = u(x,y;a,b)$ се издвојува еднопараметарска фамилија ако a и b се претставaт како функции од еден параметар t, т.е. $a = f(t)$, $b = g(t)$. Тогаш ја добиваме следнава еднопараметарска фамилија површини: $z = u(x,y;f(t),g(t))$ (равенка (1)), чијашто обвивка ќе се добие ако се изрази t од равенката $z_t \equiv u_a\cdot f'(t) + u_b\cdot g'(t) = 0$ и добиениот израз се замени во равенката (1). Добиената функција од x и y ќе биде решение на дадената ПДР зашто: $z = u(x,y;a,b)$; $z_x = u_x+u_t\cdot t_x = u_x(x,y;a,b)$; $z_y = u_y + u_t\cdot t_y = u_y(x,y;a,b)$, а $z = u(x,y;a,b)$ ја задоволува ПДР зададена во условот. За конкретната ПДР, ново решение е $u = x\sqrt{y}/\sqrt{x+k} + y\sqrt{x+k}/\sqrt{y} + k\sqrt{y}/\sqrt{x+k}$.

9.18. Да. 9.20. $G'-4G=0$, $G(y)=Ce^{-4y}$. 9.21. $u=x\cdot A(y)+B(y)$. 9.22. $u=A(y)\cdot\cos 2x+B(y)\cdot\sin 2x$. 9.23. $u=A(x)\cdot e^{5y}+B(y)$. 9.24. $u=A(y)e^{x}+B(y)e^{2x}$. 9.25. а) $u=A(x)+B(y)$. б) $u=A(x)+B(y)+2xy$. 9.26. $u=e^{y}f(x)+g(y)$. 9.27. $u=e^{-y}f(x)+g(y)-x^2/2-xy$. 9.28. $u=f(x)+\frac{1}{x}\cdot g(y)+xy(x-y/2)$. 9.29. а) $u=axy+bx+cy+d$; б) $u=ax+by+c$ (a,b,c,d – произволни константи). 9.30. $\alpha=-b$, $\beta=-a$; $k=c-ab$. 9.31. $u=f(x)+g(x+y)$. 9.32. $u=xf(x+y)+g(x+y)$. 9.33. $u=f(xy)/y^2+g(y)$. 9.34. $w_{uu}=1/2$; $xy-z=(x+y)f(x-y)+g(x-y)+(x+y)^2/4$. 9.35. $V''+n^2V=0$; $V(\theta)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$. 9.36. $z=f(y+3x)+g(y-2x)$. 9.37. $z=f(y+3ax)+g(y-2ax)$. 9.38. $u=f(y-x)+g(y-5x)$. 9.39. $u=f(y+ax)+x\cdot g(y+ax)$. 9.40. $z=f(x+at)$ или $z=g(x-at)$. 9.41. $z=(x+y)(3x+4y)$. 9.42. $z=3x^2+y^2$. 9.43. $z=2\sin(y/2+x)+\sin(y/2-x)$. 9.44. $z=\sin x\cdot(\cos\frac{y}{2}+2\sin\frac{y}{2})$. 9.45. $u=\frac{1}{2}\cdot\{\phi(x-at)+\phi(x+at)\}+\frac{1}{2a}\cdot\{\psi(x+at)-\psi(x-at)\}$. 9.46. $z=\frac{1}{b}(x+y)^2+(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})\cdot x(x+y)$. 9.47. $z=f(y+x)+e^{-x}g(y-x)$. 9.48. $z=f(y+x)+e^{-x}g(y-5x)$. 9.49. $z=f(y+x)+e^{-3x}g(y-x)$. 9.50. $z=e^{2x}\cdot\{f(y+x)+g(y+3x)\}$. Уп. $(D-D'-2)\cdot(D-3D'-2)z=0$. 9.51. $z=e^{-2x}f(y+3x/2)+e^{2x}g(y+x)$. 9.52. $u=xe^{-ax}\sin at$; $u=1/2ae$ за $x=1/a$ е максимум ако $a>1/2$, а минимум при $a<1/2$. 9.53. $z=xy-c^2$. 9.54. а) $z=\frac{1}{5}\cdot\sin(2x+y)$. б) $z=\frac{1}{3}\cdot(y+\frac{5}{3})e^{3x}$. 9.55. $z=f(y-2x)+g(y+4x)+x^2y/2+2x^3/3$. 9.56. $z=f(y-x)+g(y+x)-x^2y^2/2$. 9.57. $z=f(y)+g(y+x)+(\cos x\cdot\cos 2y-2\sin x\cdot\sin 2y)/3$. 9.58. $z=f(y-x)+f(y-2x)+x^2y/2-x^3/3$. 9.59. $u=f(x-at)+g(x+at)+E\sin px/a^2p^2$. 9.60. $z=f(y+x)+g(y+2x+\frac{2}{5}\cdot e^{3x+4y}$. 9.61. $u=f(x+iy)+g(x-iy)+x^3y/6$. 9.62. $z=f(y)+e^{-x}g(y+x)+x^3/3+xy^2-x^2-12xy+4x$. 9.63. $z=f(y+x)+e^{3x}g(y-x)-xe^{x+2y}$. 9.64. а) Елиптичен тип (во целата рамнина Oxy).

б) Параболичен тип (во целата Oxy). в) Параболична во точките од правите $y=\pm x$; хиперболична во $y^2-x^2>0$; елиптична во $y^2-x^2<0$.

__9.65__. $u_{\xi\eta}=u_\eta/2\xi$; $\xi=xy$, $\eta=y/x$. __9.66__. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$; $\xi=y+x$, $\eta=x$. __9.67__. $u_{\xi\eta}=0$; $\xi=3x+\sin x+y$, $\eta=3x-\sin x+y$. __9.68__. $u_{\eta\eta}=u_\xi$; $\xi=y+x^2/2$, $\eta=x$. __9.69__. $u_{\eta\eta}=2\xi\cdot u_\xi/(\xi^2+\eta^2)$; $\xi=y\,\mathrm{tg}(x/2)$, $\eta=y$. __9.70__. $u=x\cdot f(x+y)+g(x+y)$ (в. 9.32). __9.71__. $u=f(xy)/y^2+g(y)$ (в. 9.33). __9.72__. $u=f(y/x)+y\cdot g(y/x)$; $u_{\eta\eta}=0$; $\xi=y/x$, $\eta=y$. __9.73__. $u=f(3x+\sin x-y)+g(3x-\sin x+y)$; $u_{\xi\eta}=0$ (в. зад. 9.67). __9.74__. $u=y\cdot f(y/x)+g(y)$; $u_{\xi\eta}=u_\eta/\xi$; $\xi=y$, $\eta=y/x$. __9.75__. $u=f(\sqrt{x}+\sqrt{y})+g(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. __9.76__. $u=Ae^{\lambda y}+Be^{\lambda(x+y)}$ (A,B,λ: произволни константи). __9.77__. $u=A\cdot e^{-(xy^3+\lambda^2)/\lambda x}$. __9.78__. $u=(Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x})\cdot(C\cos\lambda y+D\sin\lambda y)$ (A,B,C,D,λ - произволни константи). __9.79__. $F''/F=\lambda^2$, $G''/G=a-\lambda^2$; 1°. $\lambda^2<a$: $u=(Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x})(Ce^{ky}+De^{-ky})$, $k=\sqrt{a-\lambda^2}$; 2°. $\lambda^2=a$: $u=(Ae^{x\sqrt{a}}+Be^{-x\sqrt{a}})(Cy+D)$; 3°. $\lambda^2>a$: $u=(Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x})(C\cos ky+D\sin ky)$, $k=\sqrt{a-\lambda^2}$. __9.80__. а) $u=Ax+B$; б) $u=Ax+By+C+\lambda(x^2-y^2)/2$. __9.81__. $u=(4\cos x)/y$. __9.82__. $u=e^{-y}\sin x$. __9.83__. $u=e^{x/3+3y-2/3}$. __9.84__. $u=2e^{-2\pi y/3}\cos(2\pi x/3)$. __9.85__. $u=\frac{1}{3}\cdot(1-e^{6y})\cos 3x$. __9.86__. $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{sh}\,x\sqrt{2}+e^{-3y}\sin x$. __9.88__. $I=ae^{-kt}(\mathrm{tg}\,\ell\cdot\cos x-\sin x)=ae^{-kt}\sin(\ell-x)/\cos\ell$. __9.89__. а) $u=x(1+2t)$. б) $u=\frac{1}{3}\cdot\cos x\cdot\sin 3t$. __9.90__. $u=\sin x\cdot\cos 2t+t$; за $t=\pi/4$: $u=\pi/4$, т.е. жицата е паралелна со апсцисната оска. __9.91__. $u=-\sin x$. __9.95__. $a^2u_{\xi\xi}+c^2u_{\eta\eta}$. __9.96__. $a=3/\ln 4$, $b=0$; $u=3\ln(x^2+y^2)/\ln 4$. __9.102__. $r^2f''+2rf'-2f=0$; $f(r)=Ar+Br^{-2}$; $u=(-a^3\cos\psi)/2r^2$ ($A=0$, $B=-a^3/2$). __9.103__. $z=f_1(y+x)+f_2(y+2x)+f_3(y-2x)$. __9.104__. $z=f_1(y-x)+xf_2(y-x)+f_3(y-6x)$. __9.105__. $z=f_1(x+y)+(x-y)f_2(x+y)+g_1(x-y)+(x+y)g_2(x-y)$. __9.106__. $z=f_1(y-x)+xf_2(y-x)+f_3(y+x)+e^x(\cos 2y+2\sin 2y)/25$. __9.107__. $z=f_1(y+x)+f_2(y-x)+f_3(y-2x)+ye^x$. __9.108__. $f''+k^2f=0$, $f(r)=A\cos kr+B\sin kr$; $u=r^{-1/2}(A\cos kr+B\sin kr)\cos(\theta/2)$; $A=\sqrt{b}\cdot\sin ka/\sin k(b-a)$, $B=\sqrt{b}\cdot\cos kb/\sin k(b-a)$; $u=\sqrt{b}/r\cdot\cos(\theta/2)\cdot\sin k(r+a)/\sin k(b-a)$. __9.109__. $f(x)=Ae^{cx\sqrt{a}}+Be^{-cx\sqrt{a}}$ ($a>0$), $f(x)=A\cos cx\sqrt{|a|}+B\sin cx\sqrt{|a|}$ ($a<0$); $u=e^{-t}\cdot\sin cx/\sin c$.

10.31. а) Оригинал; $s_o=0$. б) Оригинал; $s_o=-2$. в) Оригинал; $s_o=5$. Уп. в. (2) во 10.3. г) Не е оригинал ($s_o=+\infty$). д) Не е оригинал. Уп. $\int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{dt}{t}$ дивергира за секој s, зашто $e^{-st}\cdot\frac{1}{t}:\frac{1}{t}\to 1$ кога $t\to 0$; врз основа на критериумот за споредување несвојствени интеграли, дадениот интеграл има иста природа како $\int_0^\infty\frac{dt}{t}$, а овој е дивергентен. (При $s<0$, уште повеќе, интегралот дивергира.) ѓ) Оригинал; $s_o=0$. Уп. $\left|\sin\frac{1}{t}\right|\le 1$. е) Оригинал; $s_o=3$. ж) Оригинал; $s_o=2$.

10.32. а) $\frac{1}{p}(1-e^{-3p})$, $\operatorname{Re}p>0$. б) $\frac{1}{p^2}$. в) $(1-e^{-2p})/2p^2$. г) $\frac{1}{p-\ln a}$. Уп. $a^t=e^{t\cdot\ln a}$. **10.34.** а) $2/(p^2+4)$, $\operatorname{Re}p>0$. б) $p/(p^2-9)$, $\operatorname{Re}p>3$. в) $(12-5p)/(p^2+4)$, $\operatorname{Re}p>0$. г) $(p^2-2p+4)/p(p^2+4)$, $\operatorname{Re}p>0$. д) $2ap^2/(p^4-4)$, $\operatorname{Re}p>2$. ѓ) $(3p-20)/(p^2-25)$, $\operatorname{Re}p>5$. **10.35.** а) $8/(p^2+64)+6/(p^2+36)$. б) $4!/p(p^2+4)(p^2+16)$. Уп. $\sin^4 t=\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2$. в) $a(p^2-a^2-b^2)/p\cdot\left[(p-a)^2+b^2\right]\left[(p+a)^2+b^2\right]$. г) $\frac{6}{p^3}+\frac{1}{p+2}$. д) $\frac{4}{p-6}-\frac{20}{p-3}+\frac{25}{p}$, $\operatorname{Re}p>6$. ѓ) $\frac{p^2-32}{p(p^2-64)}$, $\operatorname{Re}p>8$. **10.36.** $(p^2-2p+4)/4(p+1)^2(p-2)$.

10.37. а) $e^{-2p}/(p^2+1)$. б) $pe^{-3p}/(p^2+4)$. в) $ae^{-bp/a}/(p^2-a^2)$. г) $6/(p+2)^4$. д) $2/(p^2-6p+13)$. ѓ) $\frac{1}{2}\left[\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-\frac{p-2}{(p-2)^2+49}\right]$. е) $pe^{-2p\pi/3}/(p^2+1)$. **10.38.** а) $(1-e^{-ap})/p^2$. б) $1/p^2-2e^{-2p}/p^2+e^{-4p}/p^2$. Уп. $f(t)=t\eta(t)-2(t-2)\eta(t-2)+(t-4)\eta(t-4)$, $\eta(t)$ – единичната функција.

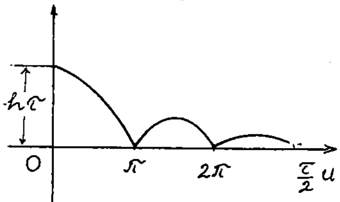
10.39. а) $p/(p^2+1)$. б) $(p\cos 2-\sin 2)/(p^2+1)$. **10.40.** $f(t)=\kappa\cdot[\eta(t-a)-\eta(t-b)]$; $f(t)\risingdotseq\frac{\kappa}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})$. **10.41.** $f(t)=-\kappa\eta(t)+\kappa\eta(t-a)\risingdotseq-\frac{\kappa}{p}(1-e^{-ap})$. **10.42.** $f(t)=\eta(t-a)-2\eta(t-2a)+\eta(t-3a)\risingdotseq\frac{1}{p}(e^{-ap}-2e^{-2ap}+e^{-3ap})$. **10.43.** $f(t)\risingdotseq\frac{1}{p}(-2+e^{-p}+e^{-2p}+e^{-3p}-e^{-4p})$. **10.44.** $f(t)=a\{\eta(t)+\eta(t-T)+\eta(t-2T)+\dots\}\risingdotseq a/p(1-e^{-pT})$. **10.45.** $f(t)=\eta(t)-2\eta(t-a)+2\eta(t-2a)-2\eta(t-3a)+\dots\risingdotseq\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{ap}{2}$. **10.46.** $1/p(1+e^{-ap})$.

10.47. $1/(p^2+1)(1-e^{-p\pi})$. **10.48.** $\frac{p}{p^2+n^2}(1+n/\text{sh}\,\frac{\pi p}{2n})$. **10.49.** $\frac{2}{ap^2}\cdot\text{th}\,\frac{ap}{4}$. **10.50.** $(1-e^{-2p}-2pe^{-2p})/2p^2(1-e^{-4p})$. **10.51.** а) $p/\left[(p+a)^2+1\right]$. б) $p(p+a)/\left[(p+a)^2-b^2\right]-1$. **10.52.** а) $(p^2+5p-7)X-p-5+2/p$. б) $(p^3-2p+1)X+1/(p-2)$. **10.53.** а) $(p^2+2)/p(p^2+4)$. б) $(p^2-7p+14)/(p-3)^3$. в) $1/2(p-a)^2-1/2(p+a)^2$. г) $2(p^2+p+1)/(p^2-1)^2$. д) $(2p^2+4p+8)/(p^2+4)^2$. ѓ) $(6p^4-36p^2+6)/(p^2+1)^4$. **10.54.** $2ap/(p^2+a^2)^2$. **10.55.** $1/(p-a)^2+1/(p+a)^2$. **10.56.** $(2p^3-6a^2p)/(p^2+a^2)^3$. **10.57.** а) $1/(p^2+1)$. б) $2/p^4+1/p-p/(p^2+1)$. в) $\ln\frac{p+1}{p}$. г) $\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{p+1}{p-1}$. д) $\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}$. ѓ) $\pi/2-\text{arctg}(p+a)$. **10.58.** а) $t*\cos t=1-\cos t \risingdotseq 1/p(p^2+1)$. б) $e^{2t}*\sin 3t=\frac{1}{13}(e^{2t}-3\cos 3t-2\sin 3t)\risingdotseq 3/(p-2)(p^2+9)$. в) $t^2*\text{ch}t=2(\text{sh}t-t)\risingdotseq 2/p^2(p^2-1)$. г) $t^n*f(t)\risingdotseq n!F(p)/p^{n+1}$. д) $\frac{t}{2}\sin t$. ѓ) $t^{n-1}/(n-1)!\risingdotseq 1/p^n$. **10.59.** а) $(e^t-e^{-3t})/4$. б) $2e^t-2\cos t+\sin t$. в) $\frac{t}{2}\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t$. **10.60.** а) $5e^{2t}-\frac{3}{2}\cdot e^{t/2}+2e^{-t}$. б) $\frac{1}{2}\sin 4t+\cos 2t-\sin 2t$. в) $\sin 5t\cdot\sin 2t$. г) $\frac{1}{2}(1+t)e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$. д) $2\text{ch}t+\sin t-1$. ѓ) $\frac{1}{2}e^t-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$. **10.61.** а) $(t-1)^2\eta(t-2)$. б) $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$. **10.62.** а) $\text{ch}t-t^2/2-1$. б) $e^{4t}\text{ch}3t$. в) $e^{-2t}(3\cos 6t-5\sin 6t)$. г) $e^{-t}\sin^2 t$. д) $1-e^{-2t}\cos 3t$. **10.63.** $x(t)=(t-1)e^{-2t}$. **10.64.** $x(t)=e^{2t}$. **10.65.** $x(t)=2-e^{-t}-e^{-2t}$. **10.66.** $x=3e^{-t}\cos t$. **10.67.** $x=(4t^2+3t+1)e^{-2t}$. **10.68.** $x=e^{-t}\cos t-2\cos 2t-\sin 2t$. **10.69.** $x=2t-3+\frac{13}{5}e^{-t}-\frac{1}{5}(\sin 2t-2\cos 2t)$. **10.70.** $x=t^3+e^t$. **10.71.** $x=e^t-\frac{1}{2}\cdot e^x\sin 2x$. **10.72.** $x=2te^t$. **10.73.** $x=(c_1+c_2t)e^{-t}$. **10.74.** $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+2\cos t-\sin t$. **10.75.** $x=(c_1+c_2t+c_3t^2+t^3/2)e^{-2t}$. **10.76.** $x(t)=t$. **10.77.** $x(t)=c_1t^3/3!+x(0)$. 10.78. $(C_1+C_2t^2)e^{-t}$. **10.79.** $x=(2t+1)e^{2t}$, $y=(2t-1)e^{2t}$. **10.80.** $x=2e^{-t}-t-2$, $y=e^{-t}+t+2$. **10.81.** $x=e^{3t}+2e^{-t}$, $y=-2e^{3t}+4e^{-t}$. **10.82.** $x=2t+5e^t/2$, $y=2t+e^t$. **10.83.** $x=e^t+t-t^3/6$, $y=1-e^t+t^4/24$. **10.84.** $x=2-e^t$, $y=(4-t)e^t-2$, $z=(5-t)e^t-2$.

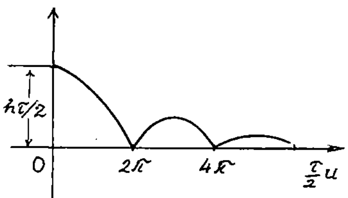
10.85. $x = e^t+2\sin t$, $y = t-e^t+2\cos t$, $z = 1+2\sin t$. **10.86**. $x = -te^t$, $y = (1-t)e^t$. **10.87**. $x = -t$, $y = 0$. **10.88**. $x = 2-e^{-t}=y$, $z = 2e^{-t}-2$. **10.89**. $x = e^t+1$, $y = te^t-t-2$, $z = te^t-e^t-t-2$. **10.90**. $u(x,t)=x+t$. **10.91**. $u(x,t) = 6e^{-2t-3x}$. **10.92**. $u(x,t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi t$. **10.93**. $u = e^{-kx}\sin kt$. **10.94**. а) $x(t)=e^{2t}$. б) $x(t)=t^3+t^5/20$. в) $x(t)=t$. г) $x(t)=(1+3\cos 2t)/2$. **10.95**. а) $x(t)=2\operatorname{ch}t-1$, $y(t)=2\operatorname{sh}t$. б) $x=\sin t$, $y=\sin t+\cos t$, $z=\cos t$. **10.96**. а) $x=1+t^2/2$. б) $x = \frac{1}{27}(24+120t+$ $+30\cos 3t+50\sin 3t)$. в) $x = t-\frac{2}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^t(3\cos t+4\sin t)$. **10.97**. $i(t) = \frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$. Уп. $L\cdot\frac{di}{dt}+Ri = E$, $i(0)=0$. **10.98**. $q(t) =$ $= e^{-t/RC}$. Уп. $q(t) = -\int_0^t i(t)dt+q(0)$; $q(0)=CU_o$, $U_o-\frac{1}{C}\int_0^t idt-Ri=0$. **10.99**. $i(t) = \frac{E}{L\omega}\cdot e^{-Rt/2L}\sin\omega t$; $\omega = \sqrt{(4L-R^2C)/4LC}$. Уп. $Ri+L\frac{di}{dt}+$ $+\frac{1}{C}\cdot q = E$. **10.100**. а) 1. б) $\frac{3}{4}$. в) $2\ln 2-1$. г) $2-2\ln 2$. д) $\frac{3}{2}$. **10.101**. $3e^{-5p/3}/(p^2-9)$. **10.102**. $\frac{1}{p+2}\cdot e^{-3/(p+2)}$. **10.103**. Уп. $r^t=e^{t\ln r}$. **10.104**. а) $1/(p-a)^3-1/(p+a)^3$. б) $1/[(p-ai)^2+4]+1/[(p+ai)^2+4]$. **10.106**. Уп. Да се искористи теоремата за диференцирање на оригиналот, $\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt = pF(p)-f(0)$; да се земе лимес од левата страна при $p\to 0$ $\left[\text{значи: } \lim_{r\to\infty}\int_0^r f'(t)dt = \lim_{r\to\infty}f(t)-f(0)\right]$, а потоа - лимес од десната страна при $p\to 0$. **10.107**. а) $F(p) = (9p+23)/(p^2+5p+6)$; $f(0)=9$, $f(\infty)=0$. б) $F(p) = 1/2p+p/2(p^2+4)$; $f(0)=1$, $f(\infty)$ не постои. **10.108**. $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$. **10.109**. а) $3/25$. Уп. $I =$ $= \mathscr{L}(t\cos t) = (p^2-1)/(p^2+1)^2$ при $p=2$. б) $-22/125$. в) $\ln 3$. Уп. $I = \mathscr{L}\left[\frac{1}{t}(e^{-t}-e^{-3t})\right] = \int_p^\infty\left[\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+3}\right]du = \ln\frac{p+3}{p+1}$ при $p=0$ $(p\to 0^+)$. г) $\frac{1}{4}\ln 5$. д) $\ln\frac{3}{2}$. ѓ) $\frac{\pi}{2}$. **10.111**. $f(t) = e^t\operatorname{erf}\sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$, $f'(t) = f(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, $pF(p)-f(0) = F(p)+\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right)$; поради $f(0)=0$, користејќи ја 10.110 а), се добива $F(p) = 1/\sqrt{p}(p-1)$. **10.112**. $\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p}$. Уп. б) $f'(t) = \frac{\sin t}{t}$, $\mathscr{L}(tf'(t)) = \mathscr{L}(\sin t)$, $-\frac{d}{dp}[pF(p)]-f(0)=$ $=1/(p^2+1)$; $pF(p)=-\operatorname{arctg}p+c$, $c=\pi/2$. **10.116**. $x(t)=3J_o(2t)$. Уп. $\frac{dX}{X}=pdp/(p^2+4)$, $X = C/\sqrt{p^2+4}$.

11.15. а) $f(t) = \frac{8}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \ldots)$.
б) $f(t) = \frac{8}{\pi^2}(\sin t - \frac{1}{3^2}\sin 3t + \frac{1}{5^2}\sin 5t - \ldots)$.
в) $f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi t}{3} - \frac{6\cos n\pi}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi t}{3}\right\}$.
г) $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n}{L}t$. **11.16**. $f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi t}{2}$.
б) $f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2}$. **11.17**. а)
$2\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nt}{n} - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)^3}$, $0\le t<\pi$. б) $\frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$,
$0\le t<\pi$. **11.18**. а) $\pi^2/6$. б) $\pi^2/12$; в) $\pi^2/8$. **11.19**. $f(t) =$
$= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(n\omega t+\psi_n)$, каде што $\mathrm{tg}\psi_n = -b_n/a_n$. Уп.
$c_n\cos(n\omega t+\psi_n) = c_n(\cos n\omega t\cdot\cos\psi_n - \sin n\omega t\cdot\sin\psi_n)$ да се спореди со изразот под знакот на сумата; $c_o=a_o$, $c_n\cos\psi_n=a_n$, $-c_n\sin\psi_n=b_n$. **11.20**.
а) $f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+in}{1+n^2}e^{int}$; $f(t) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}(\frac{1}{2} +$
$+ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos nt}{1+n^2} - \frac{n\sin nt}{1+n^2})$; $t\neq 2k\pi$, k-цел број. б) $f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{int}$;
$f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nt$. **11.21**. $f(t) = \frac{1-e^{-\pi}}{2\pi} +$
$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-\pi}+1}{1+n^2}(\cos nt + n\sin nt)$. **11.22**. $\mathrm{sh}\, t =$
$= \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nt}{1+n^2}$, $-\pi<t<\pi$. **11.23**. а) $\pi + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$.
б) $\pi + \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{i(-1)^n}{n}\cdot e^{int}$ $(n\neq 0)$. в) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos(nt - \frac{\pi}{2})$. **11.24**.
а) $\frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t$, $\omega=2\pi/T$. б) $\frac{A}{2} + \frac{Ai}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{in\omega t}$ $(n\neq 0,\ \omega=2\pi/T)$.
в) $\frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\omega t+\pi)$. **11.25**. а) $x(t) = -\pi +$
$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}\sin nt$. б) $x(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2[(2k-1)^2+1]} +\right.$

$+ (-1)^{k+1} \frac{\sin kt}{k(k^2+1)}\Big\}$. **11.26**. $x(t) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n(2+n^2)}$, $t\neq 2k\pi$, k-цел број. **11.27**. $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{1}{\omega^2-1}\cos t + \frac{1}{4(\omega^2-4)}\cos 2t - + \dots$ **11.28**. $x(t) = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{1}{1\cdot 3(\omega^2-4)}\cos 2t - \frac{1}{3\cdot 5(\omega^2-16)}\cos 4t - \dots$ **11.29**. $x(t) = -\frac{t}{2}\cos t + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n(1-n^2)}$, $t\neq 2k\pi$, k-цел број. **11.30**. $x(t) = -\frac{k}{c}\cos t$. **11.31**. $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}$, $x_n = A_n\cos nt + B_n\sin nt$, $A_n = 4(25-n^2)/n^2\pi D$, $B_n = 0{,}08/n\pi D$, каде што $D = (25-n^2)^2 + (0{,}02n)^2$. **11.32**. $\frac{2h}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin wa}{w}\cos wt\, dw$. **11.33**. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{w}[\sin w(t-a) - \sin w(t-b)]\,dw$. **11.34**. $\frac{2}{\pi\tau}\int_0^\infty \frac{1-\cos w\tau}{w^2}\cos wt\,dw$. **11.35**. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w\pi}{1-w^2}\cdot\sin wt\,dw$. **11.36**. а) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wt}{1+w^2}\,dw$. б) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wt}{1+w^2}\,dw$. **11.37**. а) и б) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos w)\sin wt}{w}\,dw$. в) $f(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos w}{w} e^{iwt}\,dw$. **11.39**. а) $|C(w)| = 2h\tau\left|\frac{\sin w\tau}{w\tau}\right|$. (црт. 1); парна.



Црт. 1



Црт. 2

б) $|C(w)| = 2h\tau|1-\cos w\tau|/|w\tau|^2$ (црт. 2); парна функција. **11.40**. $(2h\cdot\sin w)/w\sqrt{2\pi}$. **11.41**. $2/\sqrt{2\pi}(1+w^2)$. **11.42**. $F(w) = (4\cos\pi w)/\sqrt{2\pi}(1-4w^2)$. **11.43**. $-4w\sqrt{2\pi}/(w^2+1)^2$. **11.44**. $4(w\cos w - \sin w)/\sqrt{2\pi}w^3$; $I = 3\pi/16$. **11.45**. $(\sin 2w - \sin w)/w\sqrt{2\pi} + i(w\cos w - \sin w)/w^2\sqrt{2\pi}$. **11.46**. $F_c(w) = 4(\cos\frac{3w}{2} - 1)/w^2\sqrt{2/\pi}$. **11.47**. $F_c = (1+\cos\pi w)/\sqrt{2/\pi}(1-w^2)$. **11.48**. $F_c(w) = 2\sin w/w\sqrt{2\pi}$; $F_s(w) = 2(1-\cos w)/w\sqrt{2\pi}$. **11.49**. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-w/\sqrt{2}}\sin(w/\sqrt{2}+\pi/4)$. **11.50**. $F_s(w) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot we^{-w}$.

ЛИТЕРАТУРА

[БЕ] Берман Г.Н.: Сборник задач по курсу математического анализа; Москва 1969

[ДЕ] Демидович Б.П. (редактор): Задачи и упражнения по математическому анализу, для втузов; Москва 1974

[ДИ] Димова-Нанчева В.С. и др.: Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, ч.4; София 1972

[КО] Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е.: Ряды и интеграл Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа (задачи и упражнения); Москва 1964

[КР1] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.: Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения); Москва 1971

[КР2] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.: Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям; Москва 1978

[КРУ] Кручкович Г.М. (редактор) и др.: Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики; Москва 1970

[МАР] Мартыненко В.С.: Операционное исчисление; Киев 1973

[МАТ] Матвеев Н.М.: Сборник задач и упражнений по дифференциальным уравнениям; Минск 1970

[ПО] Пономарев К.К.: Составление дифференциальных уравнений; Минск 1973

[СМ] Смирнов М.М.: Задачи по уравнениям математической физики; Москва 1968

[ФИ] Филиппов А.Ф.: Сборник задач по дифференциальным уравнениям;

[ША] Шапкарев И.: Задачи за вежбање по математика II за студентите од техничките факултети; Скопје 1974

[AY] Ayres F.: Theory and problems of differential equations; McGraw-Hill, New York 1952

[EL] Elen L.W.: Differential equations, 1 and 2; London 1967

[MI] Mitrinović D.S.: Zbornik matematičkih problema II; 1960

[PE] Perić V., Tomić M.: Zbirka riješenih zadataka; 1. Diferencijalne jednačine; Sarajevo 1975

[SP1] Spiegel M.R.: Theory and problems of Laplace transformations; McGraw-Hill, New York 1965

[SP2] Spiegel M.R.: Theory and problems of Advanced mathematics; McGraw-Hill, New York 1971