МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 24

за учениците од VIII и IX одделение

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Павел Димовски
Даниел Велинов
Самоил Малчески

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Павел Димовски
Данел Велинов
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 24
(збирка задачи за учениците од VIII и IX одделение)

Скопје, 2020

Рецензенти
д-р Методи Главче
д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАТЕМАТИЧКИ талент 24 : (збирка задачи за учениците од VIII и IX одделение) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 224 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Павел Димовски, Данел Велинов, Самоил Малчески. - Библиографија: стр. 218-224

ISBN 978-608-4904-44-1

1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Димовски, Павел [автор] 4. Велинов, Данел [автор] 5. Малчески, Самоил [автор]

COBISS.MK-ID 51665669

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 24 е наменета за талентираните ученици по математика од осмо и деветто одделение и е комплементарна со книгите Математички талент 5, 6, 17, 18 и 21, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 294 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од четиринаесет до шестнаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје   Авторите
јуни, 2020 г.

I АЛГЕБРА

I.1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Дадено е равенството $1*2*3*4*5*6*7*8*9=0$. Дали е можно на местата од * да се постават симболите + и – за да се добие точно равенство?

2. Природните броеви од 1 до 100 се запишани еден по друг, без растојание меѓу два последователни броја, и е добиен бројот 12345678910111213...99100. Определи го најголемиот од броевите кои се добиваат со бришење на 100 цифри од овој број.

3. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$1^2+2^2+3^2+...+2013^2\,. \tag{1}$$

4. Дешифрирај го бројниот ребус
$$\begin{array}{r} \overline{ABC}\cdot\overline{BAC} \\ \hline ---- \\ --A \\ ---B \\ \hline ------ \end{array}$$
каде $\overline{ABC}\cdot C=----$, $\overline{ABC}\cdot A=--A$, $\overline{ABC}\cdot B=---B$, различна буква означува различна цифра, истите букви исти цифри и секоја цртичка означува една цифра.

5. Определи ги сите природни броеви n така што збирот
$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot ...\cdot (n-1)n$$
е точен квадрат.

6. Броевите 1,2,3,...,2011,... се наредени на следниов начин,

1→	5, 6, 7, 8, 9,		21, 22, 23, 24, 25		37, ...
2→	4	10	20	26	36
3→	3	11	19	27	35
4→	2	12	18	28	34
5→	**1**	13, 14, 15, 16, 17		29, 30, 31, 32, 33	

Во која линија од означените се наоѓа бројот 2011.

7. Даден е 3×3 квадрат поделен на 9 квадратчиња и во секое квадратче е запишан цел број, така што збировите на елементите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала се еднакви. Докажи дека овој збир не може да биде еднаков на 2008.

8. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

9. Даден е реален број x. Користејќи ги операциите множење и делење на два добиени броеви можеме да го менуваме степенот на бројот x. На пример: $x\cdot x=x^2, x^2\cdot x^2=x^4, \frac{x^4}{x}=x^3$. Докажи дека во 14 чекори можеме да го добиеме бројот x^{2013}!

10. Колку единици има во записот на бројот

$$9+99+...+\underbrace{999...999}_{2010}.$$

I.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

11. Нека a,b и c се ненулти реални броеви и

$$a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=1.$$

Пресметај ја вредноста на $ab+bc+ca$.

12. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2010}.$$

13. За целите броеви a и b важи $a=a^2+b^2-8b-2ab+16$. Докажи дека a е точен квадрат.

14. Ако n е природен број, дали бројот $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ е точен квадрат? Дали бројот $2005\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011+16$ е точен квадрат?

15. Реалните броеви a,b,c,d ги задоволуваат равенствата

$$abc-d=1, \quad bcd-a=2, \quad cda-b=3, \quad dab-c=-6.$$

Докажи дека

$$a+b+c+d\neq 0.$$

16. Ако за ненултите броеви a,b,c важи $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ тогаш $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи.

17. Определи ја вредноста на изразот $(3x-y)(x+3y)+(3x+y)(x-3y)$ ако важи $x^2+y^2+4x-10y+29=0$.

18. Ако $xy=6$ и $x^2y+xy^2+x+y=63$, пресметај x^2+y^2.

19. Ако $a+b=1$, тогаш докажи дека важи

$$a^2b^2+3=(a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

20. Нека a, b и c се природни броеви такви што

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}.$$

Докажи дека $a=b=c$.

21. Определи ја вредноста на изразот $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, ако $x\neq y$ и $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$.

22. Определи го збирот на природните броеви a и b за кои важи

$$(5x^a y^a)^b+(-3x^b y^b)^a=-2x^6y^6, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}$$

23. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека е исполнето равенството:

$$(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4$$

24. Ако $a+b+c=0$, тогаш

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1.$$

Докажи!

25. Определи ја вредноста на бројниот израз

$$8004^2-8003^2+8002^2-8001^2+\ldots+4^2-3^2+2^2-1^2.$$

26. Докажи дека бројот

$$19991999+19991998\cdot 19991999\cdot 19992000$$

е куб на цел број!

27. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$895231755\tfrac{234}{357118}\cdot 895231754\tfrac{234}{357118}-895231756\tfrac{234}{357118}\cdot 895231753\tfrac{234}{357118}$$

28. Докажи дека дропката $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ е нескратлива за секој цел број a.

29. Нека е даден полиномот $P(x)=4x^4+x^3+8x^2+x+4$.

а) Разложи го полиномот $P(x)$ на производ од два полинома од втор степен.

б) Покажи дека за било која вредност на променливата $x\in N$, вредноста на полиномот $P(x)$ е делива со 2.

30. Пресметај ја вредноста на изразот $a(a+1)(a+2)(a+3)-19875$, каде $a=\frac{1}{2}(\sqrt{569}-3)$.

31. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{x^4-2005x^3+2005x^2-x}{x-1} \text{ за } x=2005 .$$

I.3. ФУНКЦИИ И РАВЕНКИ

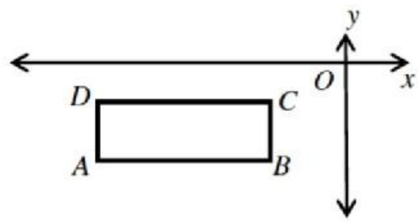
32. За линеарната функција $f(x)$ е познато дека

$$|f(1)|\leq 10 \text{ и } |f(2)|\geq 2010.$$

Определи ја најмалата можна вредност на $|f(3)|$.

33. Функцијата $f(x)$ е таква што $f(m+n)=f(mn)$ за секои природни броеви m и n. Освен тоа $f(10)=5$. Пресметај $f(40)$.

34. Во третиот квадрант на правоаголен координатен систем Oxy е поставен правоаголник како на цртежот десно. Втората координата на секое теме е поделена со првата. За кое теме се добива најмала вредност?



35. Определи ја најмалата вредност на изразот:
$$y=|x+2|+|x|+|x-1|+|x-3|.$$

36. Определи го збирот на решенија на равенката $|x-5|=1$.

37. За кои вредности на параметарот a равенката $|2x+3|=a$ има единствено решение.

38. Определи ги сите вредности на реалните броеви a, b, c и d такви што
$$a^2+b^2+c^2+d^2=a(b+c+d).$$

39. Да се определат сите реални броеви a,b,c и d за кои се исполнети равенствата
$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

40. Нека е a позитивен реален број, таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи дека равенката $x^2+ax+a-6=0$ нема реални решенија.

41. Нека a е решение на равенката $x^3-x-1=0$. Докажи ги равенствата:
$$a^4=a^2+a,\ a^4=a^5-1,\ a^4=a^3+a^2-1 \text{ и } a^4=\frac{1}{a-1}.$$

42. Нека a,b,c,d се различни реални броеви. Колку реални решенија има равенката
$$\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-b}\cdot\sqrt{x-c}\cdot\sqrt{x-d}=0.$$

43. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(x+z)=10 \\ z(x+y)=13 \end{cases}.$$

I.4. НЕРАВЕНСТВА. НАЈГОЛЕМА И НАЈМАЛА ВРЕДНОСТ

44. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$4x^2-12x+2014.$$

45. Кој број е поголем 50^{50} или 339^{33}?

46. Кој од броевите 31^{11} и 17^{14} е поголем?

47. Докажи го неравенството $2^{2010}+3^{2010}<4^{2010}$

48. Аритметичката средина на десет различни природни броеви е $12,5$. Колкава најголема вредност може да има најмалиот од тие броеви?

49. Броевите $a_1,a_2,...,a_{20}$ ги задоволуваат условите:

$$a_1\geq a_2\geq ...\geq a_{20}\geq 0\,,\; a_1+a_2=20\,,\; a_3+a_4+...+a_{20}\leq 20\,.$$

Која е максималната вредност за изразот:

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{20}^2\,.$$

За кои вредности на $a_1,a_2,...,a_{20}$ се постигнува максималната вредност?

50. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се такви што $abc=1$. Да се докаже неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c\,.$$

51. Нека a,b,c се реални броеви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\,.$$

Кога важи знак за равенство?

52. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои што е исполнето равенството $a+b+c+2=abc$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2\,.$$

Кога важи знак за равенство?

53. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3.$$

Кога важи знак за равенсто?

54. Нека a,b,c,d,e се реални броеви за кои $a+b+c+d+e=0$ и нека $A=ab+bc+cd+de+ea$ и $B=ac+ce+eb+bd+da$. Докажи дека $2006A+B\leq 0$ или $A+2006B\leq 0$.

55. Нека x,y,z се реални броеви такви што $0<x,y,z<1$ и

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Докажи дека барем еден од броевите $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ е поголем од $\frac{1}{4}$.

56. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

Кога важи знак за равенство?

57. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)\geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

58. Докажи дека

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geq 16,$$

за било кои позитивни броеви a и b такви што $ab\geq 1$.

59. Докажи:

а) за секој $t\in[0,\frac{1}{3}]$ важи

$$\sqrt{6t^2+7t+1}\geq 3t+1,$$

б) за секои $x,y\in[0,\frac{1}{3}]$ важи

$$\frac{x}{\sqrt{6y^2+7y+1}}+\frac{y}{\sqrt{6x^2+7x+1}}\leq\frac{1}{3}.$$

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Да се определат сите природни броеви n за кои броевите $n+2$ и n^2+n+1 се точни кубови на природни броеви.

2. Дали постои природен број кај кој: првите 2009 цифри се тројки, наредните 2009 цифри се двојки, па наредните 2009 се единици, а останатите нули и е точен куб на природен број?

3. Определи ја цифрата на илјадите во бројот
$$2\cdot 7^{2009}+6\cdot 7^{2008}+3\cdot 7^{2007}-7^{2006}.$$

4. Определи го бројот на осумцифрените природни броеви кои се деливи со 2014 и завршуваат на 2014.

5. Нека A и B се два природни броја кои се напишани со исти цифри (секоја цифра се појавува ист број пати и во едниот и во другиот број, но не мора да значи дека е на истото место). Ако $A+B=10^{10}$, докажи дека бројот A е делив со 10.

6. Определи го бројот на природните броеви n за кои бројот n^2+5n е четирицифрен и е делив со 6.

7. Дропките $\frac{\overline{3a5b}}{36}$ и $\frac{\overline{4c7d}}{45}$ се природни броеви, каде a,b,c,d се цифри. Подреди ги по големина сите вакви броеви.

8. Дали збирот $1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$ е делив со 5?

9. Природниот број n при делење со 2 има остаток a, при делење со 4 има остаток b, а при делење со 6 има остаток c. Ако $a+b+c=9$, да се одреди остатокот при делењето на бројот n со 12.

10. Бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Докажи дека и бројот $\overline{bca}+\overline{cab}$ е делив со 37.

11. Докажи дека збирот на шест последователни природни броеви, од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, а не е делив со 42. Определи шест такви броеви чиј збир е четирицифрен број и претставува квадрат на некој природен број.

12. Докажи дека бројот $\underbrace{666...6}_{2013-\text{пати}}$ не е точен квадрат на природен број.

13. Ако број од облик 2^k е најмалку четирицифрен, докажи дека неговите последни четири цифри не може да се исти!

14. Докажи дека, за секој непарен број x изразот x^3+3x^2-x-3 е делив со 48.

15. Докажи дека за секој природен број н изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

16. Ако природниот број x не е делив со 5, тогаш бројот x^4-1 е делив со 5. Докажи!

17. Нека секој од броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ е еднаков на 1 или -1 и уште важи:
$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1 + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0.$$
Докажи дека n е делив со 4.

18. За природниот број n со $S(n)$ го означуваме збирот на неговите цифри. Дали постои природен број n за кој што важи
$$n + S(n) + S(S(n)) = 2011.$$

19. Определи го најмалиот природен број n за кој бројот $2018^3 - 6054n$ е делив со 2015.

20. Определи ги сите цели броеви m за кои m^3+m^2+7 е делив со m^2-m+1.

21. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се позитивни цели броеви.

22. Определи ги сите цели броеви n, $n \geq 1$ такви што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.

23. Дали постои природен број n, таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

24. Коцка со должина на раб 2015 е поделена на единечни коцки. Ги отстрануваме сите единечни коцки низ кои минуваат просторните дијагонали. Дали бројот на преостанатите единечни коцки е делив со:
А) 2017, б) 2016, в) 2015, г) 2014, д) 2013.

II.2. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

25. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^2+6n+31$ е делив со 121.

26. Докажи дека $2n$ е делител на $(n-1)!$ за секој сложен број $n>4$.

27. Нека p, $p-10$ и $p+10$ се прости броеви. Докажи дека $p-2$ е исто така прост број.

28. Определи ги сите прости броеви n за кој бројот $n^2-37n+314$ е прост.

29. Определи ги сите прости броеви од обликот $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}$, каде n е природен број.

30. Определи го бројот на природните броеви кои се деливи со 2013 и кои имаат точно 2013 делители, вклучувајќи ги 1 и самиот број.

II.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

31. Колку најмалку јаболка треба да купи Елена за на Андреј да му даде една третина од јаболката и уште третина јаболко, на Горјан да му даде една третина од преостантите јаболка и уште третина јаболко, а за неа да остане цел број јаболка?

32. Нека a и b се заемно прости природни броеви. Докажи дека равенката $ax+by=ab$ нема решение во множеството природни броеви.

33. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=5 .$$

34. Определи ги сите парови цели броеви x и y за кои важи
$$xy-7x-y=3 .$$

35. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$mn-3m-n=2017 .$$

36. Определи ги сите тројки (x,y,z) од природни броеви такви што
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=243 .$$

37. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$3p^2+3p=166+q .$$

38. Во множеството на ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$2^a3^b+9=c^2 .$$

39. Најди ги сите прости броеви p и q кои ја задоволуваат равенката
$$(p+q)^p=(q-p)^{2q-1} .$$

40. Определи ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:
$$(p+q+r)^2=2p^2+2q^2+r^2 .$$

41. Определи ги сите прости броеви p, за кои постојат природни броеви x и y кои се решенија на равенката

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p\ .$$

II.4. КОНГРУЕНЦИИ

42. Даден е бројот $2009^{2009^{2009}}$, запишан во декаден броен систем. Во еден чекор ја вршиме следнава операција: ги бришеме првата и последната цифра и нивниот збир го додаваме на бројот што останал по бришењето на првата и последната цифра.

а) Ако по конечен број на чекори останал двоцифрен број, дали тој двоцифрен број може да биде точен квадрат.

б) По конечен број на чекори останал едноцифрен број. Определи го овој едноцифрен број.

43. Ако p е прост број, тогаш $7p + 3^p - 4$ не е квадрат на природен број. Докажи!

44. Определи ги сите прости броеви p, q и r, такви што

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1\ .$$

45. Целиот број $n > 1$ го нарекуваме совршен, ако збирот на сите негови делители (вклучувајќи ги и 1 и n) е еднаков на $2n$. Определи ги сите совршени броеви n, такви што $n - 1$ и $n + 1$ се прости броеви.

46. Најди ги сите природни броеви x, y, z и t такви што

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t\ . \qquad (1)$$

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Ги разгледуваме сите двоцифрени броеви n во чиј запис не се содржи цифрата 0 и за кои во записот на бројот $2n$ не се содржи цифрата 0. Определи го збирот на цифрите на оној од разгледуваните броеви n за кои производот на цифрите на бројот $2n$ е најмалиот можен број.

2. Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред дава број кој е квадрат на некој природен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви.

3. Иван замислил број. Бројот што го замислил е три пати помал од аритметичката средина на пет последователни парни броеви. 75% од вредноста на првиот број во низата парни последователни броеви е еднаква на аритметичката средина на првиот број од низата и бројот што го замислил Иван. Кој број го замислил Иван?

4. За кои вредности на променливите x и y, разликата на изразите $\frac{2x+15}{8}$ и $1\frac{1}{3}\cdot(y-1)$ ќе биде 3 пати помала од изразот $2\cdot(5-2y)$, а изразот $\frac{x+5\frac{3}{4}}{2}$ ќе биде за $0{,}125$ поголем од $3y$?

5. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ со различни цифри за кои важи
$$a^2-b^2-c^2=a-b-c\,.$$

6. Сакајќи да ја дознае брзината со која се движел автобусот во кој се вози, патникот погледнал низ прозорецот и на таблата покрај патот (која ја означува оддалеченоста во километри од градот од кој тргнал) видел двоцифрен број. Точно по еден час, повторно погледнал низ прозорецот и на таблата видел трицифрен број запишан со помош на две цифри како и пред еден час, но во обратен редослед и меѓу нив имало нула. Патникот ја пресметал брзината на автобусот и заспал. Кога се разбудил по точно два часа и погледнал низ прозорецот, на

таблата видел трицифрен број на кој првата и последната цифра му биле исти како и на бројот што го видел пред два часа, само што средната цифра била различна од нула. Ако се знае дека автобусот се движел со постојана брзина, одреди ја брзината на автобусот и броевите кои патникот ги видел на таблите покрај патот.

III.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

7. Цената на пицата во пицеријата *Дон Вито* е пропорционална со количеството пица. Пица со дијаметар $15\,cm$ чини 299 денари. Колку пари чини пица со дијаметар $30\,cm$? (Сите пици се со иста дебелина.)

8. Еден човек влегувајќи во берберница, по 6 часот попладне, забележал дека стрелките на часовникот зафаќаат агол од 90°, а при излегувањето, нешто пред 7 часот, забележал дека стрелките зафаќаат агол од 75°. Колку време човекот се задржал во берберницата?

9. Точно е 9:00 часот. Во колку часот стрелките на часовникот прв пат ќе се преклопат? Решението заокружи го на минути.

10. Имаме две свеќи со различни должини и дебелини. Подолгата и потенка свеќа целосно изгорува за 3,5 часа, а пократката и подебела свеќа за 5 часа. Свеќите биле запалени истовремено, а по 2 часа горење нивните должини биле еднакви. За колку проценти потенката свеќа е подолга од подебелата?

11. Набрани се 600 килограми печурки чија влажност е 98%. По сушењето, влажноста е намалена на 96%. Колкава е масата на печурките по сушењето?

12. Едно шише и една чаша заедно тњеѓат колку еден бокал, а едно шише тежи колку една чаша и една чинија. Колку пати едно шише е потешко од една чаша, ако два бокали тежат колку три чинии?

13. „Мики и јас”, рече Филип, „можеме да ја завршиме зададената работа за 20 дена, но ако работам со Иван истата работа би ја завршиле за 5 дена порано.“

„Имам подобра комбинација”, рече Иван, „Ако јас би работел со Мики би ја завршиле работата за петтина од времето порано отколку кога би ја работел со Филип.“
За колку дена секој од нив би ја завршил работата сам, а за колку дена би ја завршиле сите заедно?

14. Од 3 децилитри сируп против кашлица, кој содржел 10% дестилирана вода, аптекарката подготвила сируп за дете, кој требало да содржи 40% вода. Колку децилитри вода ставила во трите децилитри сируп?

15. Даден е квадрат со страна $49\,cm$. Раздели го дадениот квадрат на 2009 помали квадрати од два типа коишто имаат целобројни страни (должините на страните на делбените квадратите можат да имаат една од две различни целобројни вредности вредности).

16. На кружна патека долга 1650 метри се движат двајца моторциклисти со постојана брзина. Ако моторциклистите се движат во спротивна насока ќе се сретнуваат секоја минута, а ако се движат во иста насока, тогаш моторциклистот кој се движи со поголема брзина ќе го престигнува другиот на секои 11 минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

17. Моторен чамец го минува растојанието од $10\,km$ меѓу две пристаништа по течението на реката и обратно за t_r часови, а растојанието од $20\,km$ меѓу два града на брегот на мирно езеро за t_e часа. Докажи дека $t_r > t_e$.

18. Моторен чамец со постојана брзина во мирна вода престигнува сплав по течението на реката и по 15 минути тргнува обратно наспроти течението на реката. Чамецот по втор пат го сретнува сплавот на $500\,m$ од местото на првата средба. Определи ја брзината на течење на реката.

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

19. Еден наставник и неговите ученици тргнале со автобус на Републички натпревар по математика. Од 52-те седишта во автобусот тие седнале

на седишта чии броеви се последователни природни броеви такви што нивниот збир е 54. Колку ученици носел наставникот со себе ако само еден од броевите на седиштата на кои што седеле е прост број?

20. Во соба се наоѓаат столици со 3 и столици со 4 ногалки. На секоја столица седи по еден човек, па така на подот има 69 нозе и ногалки. Одреди го бројот на столчиња со 3 и столчиња со 4 ногалки.

21. Еден тест со заокружување на понудени решенија се состои од 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 8 поени, а за погрешно решена се одземаат 5 поени. Доколку на некоја задача не се заокружи ниеден од понудените одговори, за неа се даваат 0 поени. Некој ученик на крајот освоил 13 поени. Колку задачи точно решил ученикот?

22. На еден фудбалски турнир учествувале 10 фудбалски екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја друга. За секоја победа се добива 3 поени, за нерешено 1 поен, и за пораз 0 поени. На крај е дадена конечна табела од збирот на поени на секоја екипа. Ако збирот од сите поени на конечната табела изнесувал 120, тогаш колку натпревари на фудбалскиот натпревар завршиле нерешено?

23. Три девојчиња Ана, Марија и Елена во шумата собрале 770 костени и одлучиле да си ги поделат меѓу себе пропорционално на своите години. Секој пат кога Марија зела 4 костени, Ана зела 3, а на секои 6 што ги зела Марија, Елена зела 7 костени. Колку години има секое девојче ако заедно имаат 35 години? По колку костени припаднало на секоја од нив?

24. Според бајката “Илјада и една ноќ” девојката Шехерезада секоја ноќ на царот му раскажувала по 3 или по 5 приказни. Одреди го најмалиот и најголемиот број на ноќи во кои Шехерезада може да му раскаже точно 1001 приказна!

25. Наставничката подредила во редица 20 ученици од една паралелка и им поделила 800 бонбони. Секој ученик добил задача да го пресмета количникот $\frac{x}{x+2k-1}$, каде што x е бројот на бонбони што ги добил, а k е редниот број на местото на ученикот во редицата броејќи од лево кон десно. Сите ученици добиле ист количник.

Колку бонбони добил ученикот кој имал реден број 12?

26. Од квадратен лист хартија, поделен на цел број на единични квадрати (на листот нема делови од квадрати) исечен е квадрат со цел број на исти такви единични квадрати. Колку квадрати содржи првобитниот лист хартија ако бројот на преостанатите квадрати е 124?

27. Учениците од една паралелка изучуваат само англески, само француски или истовремено и англиски и француски јазик. Познато е дека во паралелката има повеќе од 23, а помалку од 28 ученици и дека 30% од тие кои изучуват англиски изучуваат и француски јазик, а 60% од тие кои изучуват француски, изучуваат и англиски јазик. Колку ученици има во оваа паралелка?

28. Во првото полугодие во една паралелка имало неколку одлични ученици. Во второто полугодие еден од одличните ученици го намалил успехот (не бил одличен), па бројот на одличните ученици во паралелката станал 24% од бројот на сите ученици. Ако овој ученик се премести во друга паралелка,тогаш процентото на одличните ученици во паралелката ќе биде 25%. Колку проценти биле одличните ученици во оваа паралелка во првото полугодие?

29. Во една група бројот на момчињата е помал од бројот на девојчињата. Ако бројот на момчињата се зголеми двапати, тогаш во групата ќе има повеќе од 24 деца, а ако бројот на девојчињата се зголеми двапати, тогаш во групата ќе има помалку од 27 деца. Колку момчиња и колку девојчиња има во оваа група?

30. Процентот на учениците кои во едно одделение, во однос на минатата учебна година, го зголемиле својот просечен успех е поголем од 2,9% и е помал од 3,1%. Колку најмалку ученици може да има во оваа одделение?

31. За Нова година секој од учениците во едно одделение му подарил на секое момче од одделението по едно чоколадо, при што биле подарени вкупно 300 чоколади. За Божик секој од учениците во тоа одделение му подарил на секое девојче од одделението по еден сок, при што биле подарени 350 сокови. Колку ученици имало во тоа одделение?

32. Бројот на учениците во одделението на Горјан е 29 и има повеќе од 15 девојчиња. За време на еден викенд момчињата отишле на екскурзија во Белград, а девојчињата во Солун. Следниот викенд момчињата отишле на екскурзија во Солун, а девојчињата во Белград. За втората екскурзија биле потрошени 310 евра повеќе пари отколку за орвата. Колку омомиња има во оддлението на Горјан, ако цената за секоја од екскурзиите за еден ученик е точен број евра и не е променлива?

33. Чаша кока кола, три сенвичи и седум кифли имаат цена од 127 денари. Чаша кока-кола, четири сендвичи и десет кифли имаат цена од 166 денари. Колку заедно чинат една чаша кока-кола, еден сендвич и една кифла?

34. Три професори напишале збирка задачи по математика и го разделиле хонорарот во однос $8:6:5$. Ако хонорарот бил разделен во однос $7:5:4$, тогаш еден од професорите би добил 250 денари повеќе отколку што добил при првата поделба. По колку денари добил секој од авторите?

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Најди ги сите двоцифрени броеви x за кои две од следниве тврдења се вистинити, а две невистинити:
   1) x е делив со 5;
   2) x е делив со 23;
   3) $x+7$ е квадрат на некој природен број;
   4) $x-10$ е квадрат на некој природен број.

2. Нека S е подмножество од $\{1,2,...,9\}$, такво што збировите на секои два елементи од S се различни. На пример, множеството $\{1,2,3,5\}$ има такво својство, но множеството $\{1,2,3,4,5\}$ не, бидејќи $\{2,3\}$ и $\{1,4\}$ имаат збир 5. Колку најмногу елементи може да содржи S?

3. Секое од множествата P и Q се состои од различни природни броеви помали од даден природен број n. Вкупниот број на елементи на множествата P и Q не е помал од n. Докажи дека постојат броеви $p \in P$ и $q \in Q$ за кои важи $p+q=n$.

4. За едно множество **M** што содржи 4 елементи велиме дека е „парно сврзано” ако за секој елемент x во **M**, барем еден од броевите $x-2$ или $x+2$ припаѓа исто така во **M**. Нека S_n е бројот на „парно сврзани” подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Определи го најмалиот број n таков што $S_n \geq 2011$.

5. Нека M е множество точки во рамнината кое го има следново својство: За секој природен број $n, 1 \leq n \leq 5$ постои права на која лежат точно n точки од множеството M. Определи го најмалиот можен број точки на множеството M.

6. Нека a и b се природни броеви поголеми од 2. Докажи дека постои позитивен цел број k, и конечна низа $n_1, n_2, ..., n_k$ од природни броеви, така што $n_1 = a,\ n_k = b$, и $(n_i + n_{i+1}) \mid n_i n_{i+1}$, $\forall i = 1, ..., k$.

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

7. Правоаголна мрежа 2×10 се пополнува со броевите од 1 до 20, на следниов начин. Во првиот ред се броевите од 1 до 10, разместени произволно. Во вториот се броевите од 11 до 20, и уште, ако бројот во некое поле од првиот ред е непарен тогаш бројот запишан во полето под него мора да биде парен. Докажи дека при било кое распоредување на броевите 1 до 20 секогаш постојат две колони со еднаков збир.

8. Дадено е множество од 7 природни броеви кои имаат различни остатоци при делење со 20. Докажи дека од тоа множество може да избереме 4 броја a, b, c и d така што бројот $a + b - c - d$ е делив со 20.

9. Докажи дека меѓу 11 природни броеви секогаш има шест чиј збир е делив со 6.

10. Дадени се девет природни броеви кои имаат прости делители помали или еднакви на 5. Докажи дека може да се изберат два од нив така што нивниот производ да биде квадрат на природен број!

11. За множеството $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ од правоаголен координатен систем се избрани 17 точки од множеството $S \times S$. Докажи дека постојат три точки A, B, C од избраните, такви што B е средина на отсечката AC.

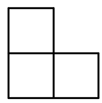
12. Во рамнината се дадени 50 точки, такви што било кои три од нив не лежат на една права. Секоја од дадените точки е обоена во една од четири дадени бои. Докажи дека постои боја и најмалку 130 разнострани триаголници чии темиња се обоени во таа боја.

13. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се m точки такви што никои три од нив не се коли-

неарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Два делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

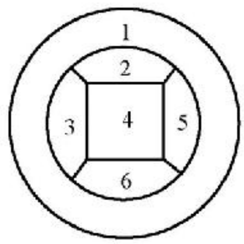
14. Во правилен шестаголник чија страна е $a = 2\text{cm}$, на случаен начин се распоредени 51 точка, при што некои се обоени во сина, а некои во црвена боја. Докажи дека постојат барем две точки во иста боја чие растојание не е поголемо од $1cm$.

15. На шаховска табла поставени се 31 жетон. Докажи дека при било кое разместување на жетоните на полињата на таблата, секој жетон на едно поле, секогаш постои „место” за сместување на триаголно тримино (цртеж десно) на полиња на кои нема поставено жетон).



IV.3. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

16. Едно царство е поделено на шест области (цртеж десно). Управителите на областите биле вситиноЉупци, кои секогаш ја говорат вистината, или лажливци кои секогаш лажат. Секој од нив изјавил: „Најмалку тројца од моите соседи се лажливци.“ Колку вистиноЉупци има меѓу управителите.



17. На табла се запишани пет цели броја. Собирајќи ги по парови добиени се следните збирови: $0;2;4;4;6;8;9;11;13;15$. Одреди ги целите броеви! Дали може, тргнувајќи од пет цели броеви и собирајќи ги по парови да се добијат следниве збирови: $12;13;14;15;16;16;17;17;18;20$?

18. На кружницата во произволен редослед се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 9 и се пресметани збировите на секои три последователни (соседни) броја. Со M да го означиме најголемиот од сите добиени

збирови. Определи ја најмалата можна вредност на M (по сите можни распоредувања на броевите на кружницата).

19. На шаховски турнир учествувале 80 шахисти при што секој шахист одиграл точно една партија со секој друг шахист. На крајотод турнирот се покажало дека секој шахист освоил различен број бодови, при што бодовите на вториот шахист биле колку што бил збирот на бодовите што ги освоиле последните тринаесет пласирани шахисти. Колку бодови освоил шахистот кој го освоил третото место со шахистите кои го освоиле 69-то, 71-то, 72-то и 73-то место? (Во шахот за победа се добива 1 бод, за пораз 0 бодови и за нерешен резултат 0,5 бодови.)

20. Дадени се 19 тегови со различни маси: $1g,2g,...,18g,19g$. Од нив девет се железни, девет се бронзени и еден е сребрен. Железните тегови имаат вкупно $90g$ поголема маса од бронзените. Колкава е масата на сребрениот тег?

21. Дадени се 12 летви секоја со дожина $13\,dm$. Секоја летва е поделена на неколку парчиња, од кои што се направени 13 триаголници. Секој од нив е направен од парчиња со должини $3dm, 4dm$ и $5dm$.
На кој начин треба да се исечат 12-те летви?

22. Синџир составен од 23 алки може да се подели на делови со отворање на некоја алка. Ако се отвори крајна алка, тогаш синџирот се дели на два дела при што едниот дел е крајната алка. Во спротивен случја деловите се три при што еден од нив е самата алка. Колку алки најмалку треба да се отворат за е е можно да се формира од произволен број алки од 1 до 23?

23. Дадено е купче со 2010 жетони. Еден жетон вадиме од купчето и остатокот го делиме произволно на две купчиња. Понатаму, избираме произволно купче од добиените две купчиња, вадиме еден жетон и остатокот произволно го делиме на две купчиња итн. Дали е можно по конечен број повторувања на оваа постапка да добиеме неколку купчиња така што во секое од нив да има по три жетони?

24. На табла се запишани броевите $1,2,...,2009$. Се бришат неколку од нив и на нивно место на таблата се запишува остатокот добиен при делењето на збирот на избришаните броеви со 13. По одреден број

повторувања на оваа постапка на таблата останале само три броја, од кои двата се 99 и 999. Да се определи третиот број кој останал на таблата.

25. Марта игра компјутерска игра “Уништи ги балоните”. Во секој потег Марта може да уништува точно по 1, 11, 15 или 27 балони. При тоа на екранот ако уништи 1 балон се појавуваат точно 10 нови балони, ако уништи 11 балони се појавуваат точно 8 нови балони, ако уништи 15 балони не се појавува ниту еден нов балон, и ако унишшти 27 балони се појавуваат точно 36 нови балони. Марта победува ако на екранот ги уништи сите балони. Дали ако на почетокот на екранот имало 102 балони, Марта може да победи?

26. Даден е лист во облик на правилен шестаголник со плоштина $2010\,cm^2$. Притоа Александар и Елена играат игра. Играта се состои во ставање на кружни парички со плоштина $1\,cm^2$ на листот на тој начин што паричките мора да бидат целосно во листот и не смеат да се преклопуваат. Прв почнува со ставање Александар. Победник во играта е оној кој што ќе стави последен паричка на листот. Докажи дека ако Александар игра добро, може да ја добие играта без разлика како ќе игра Елена.

27. Ана и Бојан се договараат да играат ваква игра: Прво Ана кажува број од 1 до 7 (може и 1 и 7), потоа Бојан на кажаниот број додава еден од броевите меѓу 1 и 7 (може и 1 и 7) и го кажува збирот, па истото тоа го прави Ана итн. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Ана може да биде сигурна дека таа прва ќе го каже бројот 100 со правилен избор на првиот број, или ако еднаш згреши, дали може да победи Бојан?
Како треба да игра Ана за да таа победи? Дали во играта може да победи Бојан и ако може образложи како?

28. Околу тркалезна маса седнале неколку луѓе нумерирани во насока на стрелките на часовникот. Првиот од нив има 1 евро повеќе од вториот, вториот има 1 евро повеќе од третиот итн. $n-1$ има 1 евро повеќе од $n-$ от. Првиот дава на вториот 1 евро, вториот дава на третиот 2 евра итн. $n-1$ от дава на $n-$ от $n-1$ евро и $n-$ от дава $n-$ евра на првиот. Играта продолжува од почеток (првиот дава 1 евро на вториот итн.) се додека е можно. На крајот од играта се покажало дека еден од

играчите имал четири пати повеќе евра од еден од неговите соседи. Колку луѓе седеле на масата и колку пари на почетокот од играта имал „најсиромашниот” од нив?

29. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Алиса и Боб, ја играат следнава игра:
    - Алиса избира n природни броеви, не секогаш различни,
    - Алиса ги запишува сите по парови збирови на лист хартија и листот му го дава на Боб (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви збирови, не секогаш различни),
    - Боб победува ако ги погоди почетните n избрани броеви од Алиса со само едно погодување.

    Дали може Боб да биде сигурен дека ќе победи во следните случаи:

    а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$

    Објасни го твојот одговор.

    (На пример, кога $n=4$, Алиса може да ги избере броевите 1, 5, 7, 9, кои имаат исти по парови суми како и броевите 2, 4, 6, 10, па затоа Боб не може да биде сигурен дека ќе победи.)

30. Од дадена тројка природни броеви добиваме нова тројка кога секој број од првата тројка се замени со збирот на другите два броја. Така, на пример, од тројката $(3,7,9)$ се добива тројката $(16,12,10)$, а од неа се добива тројката $(22,26,28)$ итн. По колку чекори од тројката $(1,2,3)$ може да се добие тројка во која еден од броевите ќе биде 2013?

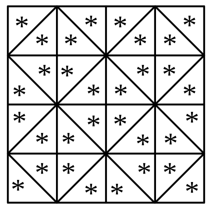
31. Дадена е квадратна 10×10 табела во која се запишани 100 природни броеви. Секој запишан број претставува аритметичка средина на сите свои соседни броеви. Докажи дека сите броеви во табелата се еднакви меѓу себе.

32. Во секоја 1×1 клетка од правоаголна табла запишан е природен број. Во секој чекор дозволено е броевите запишани во секоја од клетките на произволно избран ред да се зголемат двапати, или пак броевите запишани во клетките на произволно избрана колона да се намалат за 1. Дали по конечен број чекори, може да се случи сите броеви запишани на таблата да бидат еднакви на нула.

33. Дали е можно рабовите на коцка да се означат (нумерираат) со броевите 1, 2, 3, ..., 11, 12, така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме на коцката за сите темиња на коцката да е еднаков?

34. На секој од шесте ѕида на една коцка е запишан по еден природен број. Во секое теме го запишуваме производот на трите броја кои се запишани на ѕидовите за кои соодветното теме е заедничко. Ако збирот на броевите запишани во темињата е 2006, пресметај го збирот на броевите запишани на ѕидовите.

35. На местото на ѕвездичките (на цртежот десно) се запишани броевите од 1 до 32, така што секој број е запишан по еднаш. Дали може збировите, на броевите запишани во секое квадратче кое не е поделено на помали квадратчиња, да се еднакви?



36. Дадени се $n \geq 4$ точки во рамнина, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник таков што на неговите страни лежи точно по една од дадените точки и сите останати точки се во неговата внатрешност.

IV.4. КОМБИНАТОРИКА

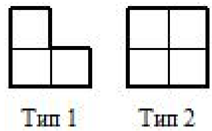
37. Дадени се 2009 различни точки кои припаѓаат на иста рамнина, и секоја од нив е обоена во една боја, плава или црвена. Притоа, на секоја единечна кружница со центар во плава точка се наоѓаат точно две црвени точки.
Определи го најголемиот можен број на плави точки.

38. На табла има n шајки секои две поврзани меѓу себе со конец. Секој конец е обоен со една од n дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли n да биде:
а) 6? б) 7?

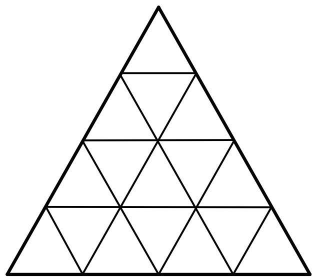
39. Квадратна шема со димензии 4×4 е поделена на 16 бели квадратчиња (со димензии 1×1). Две квадратчиња ќе ги наречеме соседни,

ако ако имаат заедничка страна. Еден чекор се состои во избор на квадратче, при што тоа и неговите соседни квадратчиња во исто време ја менуваат бојата, т.е. ако некое од нив било бело ќе стане црно и обратно, ако било црно ќе стане бело. По точно n чекори сите 16 квадратчиња се обоени во црна боја. Определи ги сите можни вредности за n.

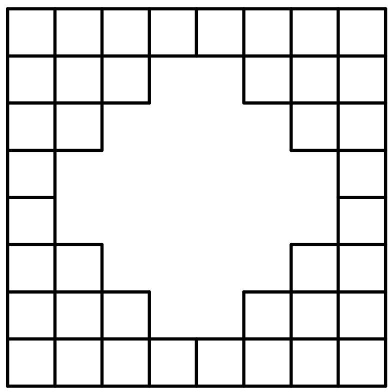
40. Праваоголник со димензии 9×7 се покрива со плочки од два типа, прикажани на цртежите десно (плочките се составени соодветно од три и четири единични квадратчиња и плочките од типот 1 се ротираат за 90° повеќекратно). Нека $n\geq 0$ е бројот на плочки 2×2 (тип 2) кои се употребени при такво препокривање. Определи ги сите можни вредности за n.



41. Нека $n>3$ е природен број. Рамностраниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот десно за $n=4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n.



42. Нека $n\geq 2$ е цел број. Од квадратната шема $2n\times 2n$ (составена од единечни 1×1 квадрати) отстранети се некои од малите квадрати, и тоа: средните два квадрати од втората редица, средните четири квадрати од третата редица,..., средните $2n-2$ квадрати од n-тата редица, средните $2n-2$ квадрати од $(n+1)$-та редица, ..., средните четири квадрати од $(2n-2)$-та редица и средните два квадрати од $(2n-1)$-та редица (на цртежот е прикажан случајот $n=4$).
Најди го најголемиот број на 2×1 правоаголници кои може да се постават на добиената фигура, без прекло-



пување, така што секој од нив да препокрива точно два мали квадрати.

43. Дали може внатрешноста на конвексен дванаесетаголник да биде поделена на десет триаголници, со повлекување на некои негови дијагонали, така што никои два немаат заедничка внатрешност, четири од таквите делбени триаголници се *заградени* триаголници и притоа важи следниот услов: Ако во секој триаголник е запишан реален број различен од нула и притоа бројот во секој *заграден* триаголникот е производ од броевите запишани во триаголниците конструирани над неговите три страни тогаш производот на сите запишани броеви во дванаесетаголникот е константен? (За еден триаголник велиме дека е *заграден* ако над секоја негова страна има конструирано нов триаголник)

44. Нека p е прост број. Колку најмалку бои се потребни за на квадратна $p \times p$ табла да се поставаат жетони од кои секој е обоен со една од тие бои, така што на секое поле од таблата е поставен точно еден жетон и нема два жетони од иста боја кои се напаѓаат? Два жетони се напаѓаат ако се наоѓаат на иста хоризонтала, вертикала или ако линијата која ги поврзува е паралелна со една од дијагоналите на квадратот (како кралицата во шахот).

45. Даден е произволен $\triangle ABC$.

а) Дали може $\triangle ABC$ да се подели на 4 делови, од кои може да се состават два триаголника слични на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

б) Дали може за секој природен број $n \geq 2$, за $\triangle ABC$ да се направи поделба на $2n$ делови, од кои може да се состават два слични триаголника на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

46. Во единечните квадрати на 8×8 табла се запишани природни броеви. Дали е можно збирот на броевите во секој следен ред да е за 3 поголем од збирот на броевите во претходниот ред, а збирот на броевите во секоја следна колона да е за 4 поголен од збирот на броевите во секоја следна колона? (Гледаме од лево кон десно и од горе кон долу.)

47. Михаил наследил куќа во која сите соби биле заклучени и клучевите биле закачени на алка. Колку соби има куќата ако е познато дека во

најлошт случај на Михаил му се потребни 21 проба за да провери со кој клуч која соба се отвара?

48. Определи го најмалиот број тетиви на дадена кружница такви што бројот на нивните пресечни точки кои се во внатрешноста на кружницата и се различни меѓу себе е точно 50.

49. За еден природен број ќе велиме дека е растечки, ако секоја негова цифра е поголема од цифра која се наоѓа лево од неа. Определи го бројот на растечките четирицифрени броеви.

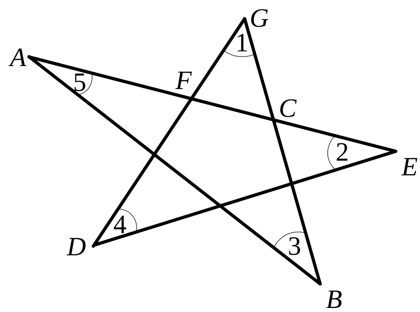
50. На колку начини може да се распореди издание од 9 тома на полица така што третиот и четвртиот том нема да бидат еден до друг?

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ТРИАГОЛНИК

1. Надворешните агли во еден триаголник се 20%, 35% и 45% од збирот на неговите надворешни агли. Определи го аголот меѓу симетралата на најмалиот агол и најкратката страна.

2. Во правоаголен триаголник ABC низ средината M на хипотенузата AB повлечена е права нормална на CM која ги сече правите AC и BC во точките P и Q соодветно. Ако N е средината на отсечката PQ, докажи дека правите CN и AB се заемно нормални.



3. Дадена е ѕвезда како на цртежот. Колку е збирот на аглите $\measuredangle 1+\measuredangle 2+\measuredangle 3+\measuredangle 4+\measuredangle 5$.

4. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот $\measuredangle ACB=100^\circ$, дадена е точка D, таква што $\measuredangle BAD=20^\circ$ и $\measuredangle ABD=30^\circ$. Определи го $\measuredangle BCD$.

5. Кружниот лак над основата на рамнокрак триаголник е $\frac{2}{5}$ од опишаната кружница на тој триаголник. Најди ги аглите на тој триаголник.

6. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle BAC=70^\circ$ и $\measuredangle ABC=50^\circ$. Точката M се наоѓа во $\triangle ABC$ и притоа $\measuredangle MAC=\measuredangle MCA=40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

7. Определи ги аглите на триаголникот чии страни a,b и c го задоволуваат равенството

$$a-4\sqrt{bc}+2b=2\sqrt{ac}-3c.$$

8. Дадени се произволни триаголници $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точките T_1 и T_2 се нивни тежишта, соодветно. Докажи дека
$$3\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}.$$

9. Ако должините на две страни на еден триаголник се $6\,cm$ и $12\,cm$, а аголот меѓу нив е 120°, колкава е должината на симетралата на тој агол?

10. Даден е триаголникот ABC. На страната AC е избрана точка M така што $\overline{AM}:\overline{MC}=1:5$, а на страната BC е избрана точка N така што $\overline{BN}:\overline{NC}=1:6$. Каков е односот меѓу отсечките MP и PB, каде P е пресечната точка на отсечките MB и AN?

11. Даден е триаголникот ABC со $\measuredangle BAC=120^\circ$. На симетралата на $\measuredangle BAC$ избрана е точка D, така да $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$. Докажи дека $\triangle BCD$ е рамностран.

12. Дијаметарот на една кружница е висина на рамностран триаголник. Кружницата сече две страни на триаголникот. Во кој однос се поделени страните на триаголникот со пресечните точки?

13. Околу триаголникот ABC е опишана кружница и D е точка на неа таква што CD е дијаметар. Ако M е средината на страната AB докажи дека симетриочната точка на D во однос на точката M се совпаѓа со ортоцентарот на триаголникот ABC.

14. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C, M е точка на страната AB и K и L се подножјата на висините повлечени од M кон страните AC и BC, соодветно. Која точка треба да биде M за растојанието $\overline{KL}$ да биде најмало.

15. Во триаголникот ABC, отсечките $AA_1, BB_1,$ и CC_1 се висини, а отсечките $AA_2, BB_2,$ и CC_2 се тежишни линии. Докажи дека должината на искршената линија $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ е еднаква на периметарот на триаголникот ABC.

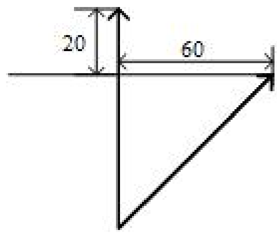
16. Во триаголникот ABC на страната AB избрана е точка M таква што $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$. Докажи дека триаголниците AMC и MBC имаат барем по една тежишна линија со еднаква должина.

17. Даден е триаголник ABC. Симетралата на аголот при темето A ја сече страната BC во точка D, и притоа важи $\overline{BD}=2\cdot\overline{DC}$. Висината повлечена од темето C ја сече симетралата во точка M. Докажи дека $\overline{CM}=\frac{t_c^2}{2h_c}$, каде t_c е должината на тежишната линија, а h_c е должината на висината, повлечени од темето C.

18. Даден е триаголникот ABC. На продолжението на страната CB е избрана точка C_1 ($C_1 \neq C$), таква што $\measuredangle BAC=\measuredangle BAC_1=60^\circ$. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AC_1}}.$$

19. Водена трска чиј врв се наоѓа 20 сантиметри над површината од едно планинско езеро, под налет на ветрот ја допрел водата и исчезнал во точка оддалечена 60 сантиметри од местото каде што првобитно се наоѓал. Сметајќи дека трската е доволно крута за да остане права при движењето определи ја длабочината на езерото.



20. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\measuredangle BAC<60^\circ$. Нека D и E се внатрешни точки од страната AC така што $\overline{EB}=\overline{ED}$ и $\measuredangle ABD=\measuredangle CBE$. Симетралите на аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BDC$ се сечат во точката O. Пресметај го аголот $\measuredangle COD$.

21. Дали може во правоаголен триаголник со должини на страни природни броеви, должините на катетите да се непарни броеви?

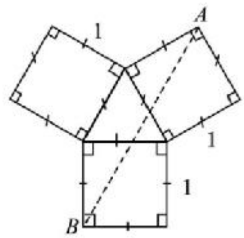
22. Дадени се должините на две страни a и b на триаголникот ABC. Тежишните линии што се повлечени кон дадените страни се заемно нормални. Пресметај ја должината на третата страна c со помош на должините на страните a и b.

23. Аголот BCA на триаголникот ABC е 30°. Нека триаголникот ABD е рамностран така што триаголниците ABC и ABD се во различна полурамнина во однос на правата AB. Докажи дека важи

$$\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 .$$

24. Во рамнокракиот правоаголен триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) симетралата на аголот повлечена од темето B ја сече страната $\overline{AC}$ во точка D. Да се докаже дека должината на отсечката $\overline{AD}$ е еднаква на дијаметарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

25. Даден е рамностран триагоник сп должина на страна 1. Над страните на триаголникот, надвот од него, се конструирани квадрати (цртеж десно).Определи ја должината на отсечката AB.



26. Во триаголникот ABC впишана е кружница што страната AB ја допира во точката P. Ако $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 2\overline{AP} \cdot \overline{PB}$ докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

27. Даден е правоаголен триаголник $\triangle ABC$, со прав агол во темето C. Симетралата на правиот агол ја дели хипотенузата во однос $1:2$. Да се определи во кој однос висината спуштена од темето C ја дели хипотенузата.

28. Во правоаголен триаголник ABC (¥ $= 90^\circ$) центарот на впишаната кружница е оддалечен од темињата A, B, C за $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{2}$ соодветно. Пресметај го радиусот на опишаната кружница на тој триаголник.

V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

29. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB, BC, CD и DA како над дијаметри се конструирани полукругови кон внатрешноста на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека не постои точка од

внатрешноста на четириаголникот која е надворешна точка за сите четири полукругови.

30. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето C. Нека точката P е средина на страната $\overline{AB}$ и нека $\measuredangle PCA = 90°$, $\measuredangle BCP = 30°$, $\overline{AC} = 3cm$. Определи ја должината на страната $\overline{BC}$.

31. Даден е остроаголен триаголник ABC. Точката D е подножје на висината повлечена од A кон страната BC. Точката E лежи на отсечката AD и при тоа важи $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$. Точката F е подножје на нормалата повлечена од точката D кон правата BE. Докажи дека $\measuredangle AFC = 90^\circ$.

32. Нека AK и BL се симетрали на агли во разностраниот триаголник ABC ($L \in BC$ и $K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M. Нека N е точка од правата BK, така што правите LN и BK се паралелни. Докажи дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.

33. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Неговите дијагонали се сечат во точка E и притоа важат равенствата: $\overline{AB} = \overline{CE}$, $\overline{BE} = \overline{AD}$ и $\measuredangle AED = \measuredangle BAD$. Докажи дека важи $\overline{BC} > \overline{AD}$.

34. Докажи дека во конвексен четириаголник средините на неговите дијагонали и точката која е пресек на правите кои ги соединуваат средините на спротивните страни од четириаголникот, лежат на една права.

35. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 16\ cm$, $\overline{CD} = 8\ cm$. Збирот на аглите ABC и BAD е 90°. Ако M и N се средини на страните AB и CD соодветно, пресметај ја должината на отсечката MN.

36. Еден рамнокрак трапез има основи $\overline{AB} = 50\ cm$, $\overline{CD} = 20\ cm$ и агол $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Најди го периметарот на трапезот.

37. Нека ABC е остроаголен триаголник со $\overline{AB} < \overline{AC}$ и O е центар на неговата опишана кружница μ. Нека D е точка од отсечката BC таква што $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO$. Точката E е втора пресечна точка на μ и

правата AD, а точките M,N и P се средини на отсечките BE,OD и AC. Докажи дека M,N и P се колинеарни.

38. Даден е трапез $ABCD$ таков што $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BD}$. Нека M е средина на CD. Да се најдат аглите на трапезот ако $\measuredangle MBC=\measuredangle CAB$.

39. Нека ABC е рамностран триаголник. На страната AB се избрани точки C_1 и C_2, на AC се избрани точки B_1 и B_2 и на страната BC се избрани точки A_1 и A_2, при што важи: $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}$. Нека пресечните точки на правите A_2B_1 и B_2C_1, B_2C_1 и C_2A_1, C_2A_1 и A_2B_1 се E, F, G соодветно. докажи дека триаголникот формиран од отсечките B_1A_2, A_1C_2 и C_1B_2 е сличен со триаголникот EFG.

40. Внатрешните агли на ромбот $ABCD$ се однесуваат како 1:2. Докажи дека висините на ромбот конструирани од темето на еден од тапите агли, ја делат поголемата дијагонала на три еднакви дела.

41. Нека $ABCD$ е паралелограм и M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Нека E е пресекот на правата DM со правата AB и F е пресекот на правата BN со правата AD. Докажи дека E, C и F се колинеарни.

42. Во конвексен четириаголник $ABCD$ (трапезоид) точките E,F,G се средини на страните AD,DC и AB соодветно. При тоа $GE\perp AD$, $GF\perp CD$. Пресметај го аголот $\measuredangle ACB$.

43. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE}:\overline{ED}=m$. Нека F е точка од CE, така што $BF\perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.

44. Темињата A и B на рамностраниот триаголник ABC лежат на кружницата k која има радиус 1, а темето C припаѓа во внатрешноста на k. Точката $D\neq B$ лежи на k, при што $\overline{AD}=\overline{AB}$. Нека E, ($E\neq D$) е пресекот на правата DC и кружницата k.Пресметај ја должината на отсечката CE.

45. Нека е $ABCD$ конвексен четириаголник во кој $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36^\circ$, $\measuredangle CBD = 18^\circ$, $\measuredangle BAC = 72^\circ$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P. Одреди ја големината на аголот $\measuredangle APD$.

46. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со радиус 1. Докажи дека разликата меѓу неговиот периметар и збирот од должините на неговите дијагонали е позитивен број кој е помал од 4.

47. Нека D е произволна точка на страната AB од рамностраниот триаголник ABC. Нека E е точка таква што триаголникот CDE е рамностран и притоа точките B и E се на иста страна од правата CD. Докажи дека четириаголникот $DBEC$ е тетивен.

48. Нека е даден триаголникот ABC. Нека A_1 и B_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A, односно B соодветно. Нека точките A_2 и B_2 се симетрични на точките A_1 и B_1 соодветно, во однос на отсечката AB. Докажи дека четириаголниците ABA_1B_1, AB_2A_2B и $A_1B_1A_2B_2$ се тетивни.

49. Низ темето D од паралелограмот $ABCD$ е повлечена произволна права p, така што темињата A,B,C се на иста страна во однос на правата p. Нека A', B', C' се подножјата на нормалите повлечени кон правата p, од точките $A,B,C,$ соодветно. Докажи дека

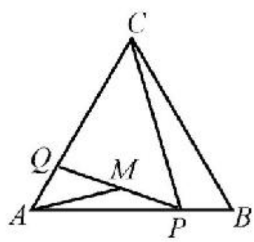
$$\overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{CC'}.$$

50. Даден е паралелограмот $ABCD$. Симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките P,Q,R и S.

а) Докажи дека четириаголникот $PQRS$ е правоаголник;

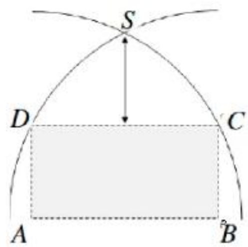
б) Докажи дека должината на дијагоналата на правоаголникот $PQRS$ е еднаква со разликата од должините на соседните страни на паралелограмот $ABCD$.

51. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC земена е точка P таква што $\overline{PB} \le \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{CP} = 6\,cm$ (цртеж десно). Ако Q е точка од



страната AC таква што $\overline{AQ}=\overline{BP}$, а M е средина на отсечката PQ, определија ја должината на отсечката AM.

52. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што важи $\overline{AB}=2\overline{BC}=5,4$ (цртеж десно). Со центри во точките A и B се конструирани два лаци кои минуваат низ темињата C и D, соодветно,кои се сечат во точката S. Определи го растојанието од точката S до правата CD.



53. Околу квадратот $ABCD$ е опишана кружница. Докажи дека за произволна точка X од кружницата е точно равенството

$$\overline{XA}^2-\overline{XB}^2=\overline{XC}^2-\overline{XD}^2.$$

54. Даден е квадратот $ABCD$ со страна $\overline{AB}=5$. На страната CD и дијагоналата AC избрани се точки E и F соодветно, такви што $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\frac{2}{3}$. Пресметај ја должината $\overline{EF}$.

55. На страната CD на квадрат со страна $\sqrt{7}$ е земена точка M така што $\overline{DM}=1$, а на страната BC е земена точка N таква што $\measuredangle MAN=45^\circ$. Ако AN ја сече дијагоналата BD во точката K, определи ја должината на отсечката MK.

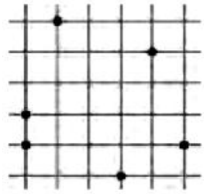
56. Должините на страните на конвексен четириаголник последователно една по друга се 11, 7, 3 и 9. Определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот.

57. Определи ја висината на трапез со основи $\sqrt{20}\,cm$ и $3\,cm$, и краци $5\,cm$ и $6\,cm$.

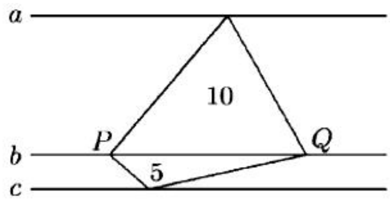
58. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник во кој што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S (различни од темињата на петаголникот). Докажи дека правите PS и AB се паралелни.

V.3. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

59. Во квадратна мрежа со должина на страната на единечните квадрати еднаква на $1cm$ се дадени шест точки како на цртежот десно. Определи ја најмалата можна плоштина на триаголникот со темиња меѓу дадените точки.



60. Двата прикажани триаголника на цртежот десно се со плоштини еднакви на $10\,cm^2$ и $5\,cm^2$, а растојанието меѓу паралелните прави a и b е еднакво на $6\,cm$. Определи ја должината на отсечката PQ.



61. Определи ја плоштината на триаголникот чии должини на страни се природни броеви и неговиот периметар е 8.

62. Нека O е центар на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$. Правата CO ја сече страната AB во точката D. Ако важи $\overline{AB}\cdot\overline{OD}=\overline{AC}\cdot\overline{CO}$ тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Докажи.

63. Точките M и N се средини на страните AB и AC, соодветно, на триаголникот ABC. Точката P лежи на страната BC и важи $\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Правите CM и NP се сечат во точката O. Изрази ја плоштината на триаголникот OPC преку плоштината на триаголникот ABC.

64. Даден е триаголникот ABC и отсечка PQ со должина t на отсечката BC, така што P е меѓу B и Q и Q е меѓу P и C. Од точката P се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во точките P_1 и P_2, соодветно. Од точката Q се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во точките Q_1 и Q_2,

соодветно. Докажи дека збирот од плоштините на четириаголниците PQQ_1P_1 и PQQ_2P_2 не зависи од положбата на PQ на BC .

65. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) со хипотенуза $\overline{AB} = 4$ и висина повлечена кон хипотенузата со должина 2. Определи ја разликата меѓу радиусите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC .

66. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник ако должината на неговата хипотенуза е c, а еден негов остар агол има 15° .

67. Даден е триаголникот ABC. На страната AB дадена е точка M така што $\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AB}$, а на страната BC точка N така што $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Ако плоштината на триаголникот MBN е $16cm^2$, најди ја плоштината на триаголникот ABC .

68. Од средините на страните на остроаголниот триаголник ABC се повлечени нормали кон соседните страни. Докажи дека шестаголникот што тие го формираат има два пати помала плоштина од плоштината на $\triangle ABC$.

69. Со помош на десет прави, паралелни на основата AB на $\triangle ABC$, секоја од страните AC и BC е поделена на единаесет еднакви делови, со што триаголникот е поделен на единаесет делови. Определи го односот на плоштините на најголемиот и најмалиот од тие делови.

70. Определи ја плоштината на триаголникот ABC чии темиња во правоаголен координатен системн се точките $A(0,6), B(4,0), C(4,4)$.

71. Во координатната рамнина xOy е дадена права $4x + 3y = n$, $n > 0$ која од координатниот почеток е на растојание 12. Определи ја плоштината на триаголникот што го формира правата со координатните оски.

72. Определи ја плоштината на триаголникот ABC чии темиња во правоаголен координатен систем се $A(-1,0), B(4,4)$ и $C(0,6)$.

73. Одреди ја вредноста на параметарот n, така што за секоја точка (x, y) од графикот на функцијата $y = -x + n$ важат следните равенства $y = \frac{5}{x}$

и $x^2 + y^2 = 6$. Потоа, пресметај ја плоштината на делот од рамнината што го образуваат координатните оски и графикот на функцијата.

74. Дадени се линеарните функции $y = kx + n$, каде што $k, n \in \{-1,1\}$. Претстави ги графички сите линеарни функции $y = kx + n$ на ист координатен систем, а потоа пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со нив.

75. Една кутија боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати поголема од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за $18\,cm$ и продолжувајќи ја другата за $8\,cm$ за боење ќе потрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.

76. Точката M е средина на страната BC на квадратот $ABCD$. Точката S е во внатрешноста на квадратот и е еднаков оддалечена од точките A, D и M. Должината на страната на квадратот е $a = 40$ cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на четириаголникот $ABMS$.

77. Даден е правоаголникот $ABCD$ кај кој должината на страната AB е два пати поголема од должината на страната BC. На страната CD е избрана точка M така што $\measuredangle AMD = \measuredangle AMB$.
а) Определи го $\measuredangle AMD$.
б) Ако $\overline{DM} = 1$, колкава е плоштината на правоаголникот $ABCD$?

78. Даден е трапез $ABCD$ со помала основа $\overline{CD} = 3\,cm$ и висина $8\,cm$. Краците на трапезот се сечат во точка M. Определи ја поголемата основа на трапезот ако плоштината на триаголникот CDM е $6\,cm^2$.

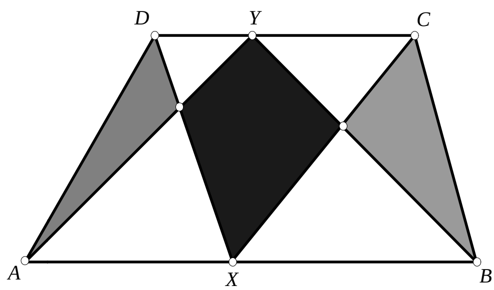
79. Нека T е тежиште на триаголникот ABC. Правата p која минува низ T и е паралелна со AC ја сече страната AB во точка M, правата q која минува низ T и е паралелна со AB ја сече страната BC во точка N и правата r која минува низ T и е паралелна со BC ја сече страната AC во точка P. Докажи дека трапезите $MBNT$, $NCPT$ и $PAMT$ имаат еднакви плоштини.

80. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана произволна точка M. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ е еднаков на збирот на плоштините на траиголниците $\triangle BCM$ и $\triangle DAM$.

81. Точките A, B, E лежат на иста права, така што точката B е меѓу точките A и E. Од иста страна на правата се конструирани квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник BEF. Ако должината на BE е два пати поголема од должината на AB, докажи дека плоштината на четириаголникот $CDEF$ е еднаква на плоштината на триаголникот BEF.

82. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h, а неговата плоштина е h^2. Под кој агол се сечат дијагоналите на трапезот?

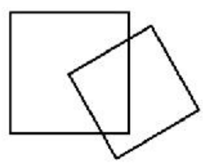
83. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD. На отсечката AB е избрана произволна точка X, а на отсечката CD произволна точка Y. Повлечени се отсечките CX и DX и отсечките AY и BY. Со овие повлечни отсечки на цртежот се добиваат два триаголници и еден четириаголник (види цртеж; исенчени делови од трапезот). Докажи дека, плоштината на исенчениот четириаголник е еднаква на збирот на плоштините на исенчените триаголници.



84. Должините на дијагоналите на еден трапез се 3 и 5, а отсечката која ги сврзува средините на основите е со должина 2. Пресметај ја плоштината на трапезот.

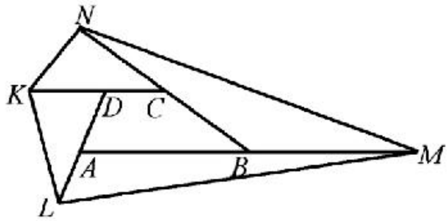
85. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се заемно нормални и имаат должини $18\,cm$ и $9\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот.

86. Двата квадрати на цртежот десно се со должини на страни $10\,cm$ и $9\,cm$. Тие се поставени како што е прикажано на цртежот десно така што едно теме на помалиот квадрат се наоѓа во центарот на поголемиот квадрат. Определи ја плоштината ма



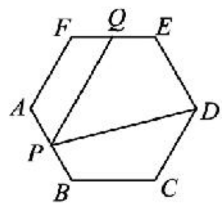
заедничкиот дел на двата квадрати.

87. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=6\,cm$ и $\overline{CD}=3\,cm$. Страните на трапезот се продолжени како што е прикажано на цртежот десно така што точката B е средина на отсечката AM, C е средина на BN, D е средина на CK и A е средина на DL. Плоштината на четириаголникот $KLMN$ е $9\,dm^2$. Определи ја висината на трапезот $ABCD$.



88. Даден е трапез $ABCD\,(AB\,||\,CD)$. Нека O е пресечната точка на дијагоналите на трапезот и нека $P_{ABO}=3$ и $P_{ADO}=2$. Определи ја плоштината на трапезот.

89. Даден е правилен шестаголник $ABCD$. Ако P и Q се средините на страните AB и EF, определи го односот $\frac{P_{APQF}}{P_{PBCD}}$.



90. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник за кој: $\measuredangle ABC=90^\circ$, $\measuredangle DAB=60^\circ$ и $\measuredangle BCD=120^\circ$. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точка M, таква што $\overline{BM}=1$ и $\overline{MD}=2$. Пресметај ја плоштната на $ABCD$.

91. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD соодветно, така што

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CD}:\overline{DF}=n.$$

Ако S е плоштина на четириаголникот $AEFD$, докажи дека

$$S\le \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

V.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

92. Кружница k е впишана во остар агол $\measuredangle XOY$, при што k ги допира краците OX и OY во точките M и N соодветно. На поголемиот лак на

кружницата k е избрана произволна точка P и од неа се спуштени нормалите кон краците на аголот и отсечката MN, $PB \perp OX$, $PC \perp OY$, $PA \perp MN$, при што $A \in MN$, $B \in OX$, $C \in OY$. Докажи дека е исполнето $\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$.

93. Во кружница со центар во точката O, впишан е четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Докажи дека точката O е оддалечена од страната AB колку половина од должината на страната CD.

94. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во две различни точки A и B и нека t е заедничка тангента за k_1 и k_2 која ги допира во M и N. Ако се знае дека $t \perp AM$ и $\overline{MN} = 2\overline{AM}$, определи го $\measuredangle NMB$.

95. Дадени се две кружници k_1 и k_2 со центри P и R соодветно, кои се допираат однадвор во точка A. Нека p е нивна заедничка тангента, што не минува низ A, а ги допира k_1 и k_2 во точките B и C, соодветно. Правата PR ја сече правата BC во точка E, а кружницата k_2 во точките A и D. Ако $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2}$, најди го односот $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$.

96. Дадени се две кружници со различни радиуси кои се допираат од надвор во точката A. Заедничката тангента ја допира поголемата кружница во точката B, а помалата во точката C и ја сече правата која минува низ центрите на дадените кружници во точката S. Во точката S конструирана е нормала на тангентата BC. Правата BA ја сече таа нормала во точката M, а правата AC ја сече истата нормала во точката N. Докажи дека $\overline{SM} = \overline{SN}$.

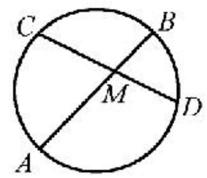
97. Нека r_1, r_2, r_3 $(r_1 < r_2 < r_3)$ се должини на радиуси на кружниците k_1, k_2, k_3 кои допираат краци на даден агол. Притоа k_1 и k_2 се допираат, а исто така и k_2 и k_3 се допираат. Докажи дека r_2 е геометриска средина на r_1 и r_3.

98. Во круг со дијаметар d, тетивите AB и CD се сечат под прав агол во точката E која не се совпаѓа со центарот на кругот. Докажи дека

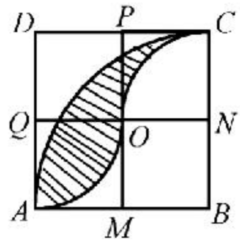
$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2.$$

99. Круг е впишан во кружен исечок (кругот ги допира двата радиуси и лакот на исечокот). Радиусот на исечокот е 3 пати поголем од радиусот на кругот. Најди го односот на плоштините на исечокот и кругот.

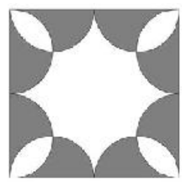
100. Дијаметарот AB и тетивата CD на дадена кружница се сечат во точката M. Определи го $\measuredangle AMC$ ако должините на помалите лаци BC и AD се однесуват како $2:3$, а должините на помалите лаци AC и BD се однесуват како $4:1$.



101. Квадрат $ABCD$ со страна 2 е разделен на четири складни квадрати $AMOQ, MBNO, NCPO, PDQO$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на штрафираниот дел ограничена со лакот од кружницата цо центар во B и минува низ точките A и C, лакот од кружницата со центар во N и минува низ точките O и C, како и лакот од кружницата со центар во Q и минува низ точките A и O.



102. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 4 се конструирани 8 полукругови како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на белиот дел на добиената фигура.



103. За роденден принцезата Арабела добила прстен украсен со скапоцен камен. Каменот имал форма на квадар така што плоштината на трите ѕида на каменот се $1mm^2$, $3mm^2$, $12mm^2$ соодветно. Колку тежи каменот, ако се знае дека $1mm^3$ од него тежи 0,003 грама?

104. Односот на плоштините на ѕидовите на еден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на должините на рабовите на квадарот.

105. Основата на права четириаголна призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$, $k>0$.

Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2.

а) Изрази ги плоштината и волуменот на призмата преку k.

б) За која вредност на k, мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви меѓу себе?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Дадено е равенството $1*2*3*4*5*6*7*8*9=0$. Дали е можно на местата од * да се поставaт симболите + и – за да се добие точно равенство?

   Решение. Збир или разлика на два парни или на два непарни броеви е парен број. Збир или разлика на броеви со различна парност (парен и непарен или непарен и парен) е непарен број**.** На левата страна од равенството има 4 парни и 5 непарни броеви. Било која комбинација на симболите + и – ќе даде непарен број, а 0 е парен број. Значи не е можно да се добие равенство**.**

2. Природните броеви од 1 до 100 се запишани еден по друг, без растојание меѓу два последователни броја, и е добиен бројот 12345678910111213...99100. Определи го најголемиот од броевите кои се добиваат со бришење на 100 цифри од овој број.

   Решение. Постојат 9 едноцифрени броеви. Од 10 до 99 има 99 двоцифрени броеви. Значи дадениот број има $9+2\cdot 90+3=192$ цифри. После бришењето на 100 цифри треба да добиеме 92- цифрен број. За било кои два броја со ист број на цифри, бројот со поголема прва цифра е поголем. Јасно е дека бројот што го бараме треба да почнува со што е можно повеќе 9-ки. Затоа, најпрво ги бришеме првите 8 цифри. Потоа ја бришеме низата од цифри 10111213...181, која се состои од $9\cdot 2+1=19$ цифри. Слично, ги бришеме низите 202122...282, 303132...383, 404142...484. Значи, избришани се $8+19\cdot 4=84$ цифри, а бројот кој што се добива е 9999950515253...99100.

   Потребно е да избришеме уште 16 цифри. Ако ја избришеме низата 505152...57, која се состои од 16 цифри го добиваме бројот 9999958596061...99100.

   Меѓутоа, најголемиот број го добиваме со бришење на низата 505152...565, која се состои од 15 цифри, со тоа што следната цифра што ја бришеме не е 7 туку 5 од 58. Значи, бараниот број е 9999978596061...99100.

3. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1^2+2^2+3^2+...+2013^2. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Броевите $1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2,9^2,10^2$ завршуваат на 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, па затоа збирот на првите 10 природни броеви има цифра на единици иста со збирот

$$1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45=4\cdot 10+5,$$

т.е. таа е 5. Сега броевите од 1 до 2013 ги групираме во 201 група по 10 броја и една група од последните три броја:
(1, 2, ..., 10); (11, 12, ..., 20); ...; (2001, 2002, ..., 2010), (2011, 2012, 2013)
За последната група цифрата на единиците на збирот на квадратите е еднаква на цифрата на збирот $1+4+9=14$, т.е. таа е 4. Конечно, цифрата на единиците на збирот е еднаква на цифрата на единиците на бројот $201\cdot 5+4$, што значи дека таа е 9.
Втор начин. Ако ја искористиме формулата

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

тогаш при $n=2013$ добиваме

$$1^2+2^2+3^2+...+2013^2=\frac{2013(2013+1)(2\cdot 2013+1)}{6}$$
$$=\frac{2013\cdot 2014\cdot 4027}{6}=671\cdot 1007\cdot 4027$$

и овој број завршува на цифрата на која завршува производот $1\cdot 7\cdot 7$, т.е. на цифрата 9.

4. Дешифрирај го бројниот ребус

$$\begin{array}{r} \underline{\overline{ABC}\cdot\overline{BAC}} \\ ---- \\ --A \\ \underline{---B} \\ ------ \end{array}$$

каде $\overline{ABC}\cdot C=----$, $\overline{ABC}\cdot A=--A$, $\overline{ABC}\cdot B=---B$, различна буква означува различна цифра, истите букви исти цифри и секоја цртичка означува една цифра.

Решение. **Б**роевите $\overline{ABC}$ и $\overline{BAC}$ се трицифрени, па затоа $A\neq 0$ и $B\neq 0$. Исто така се добива дека $C\neq 1$, бидејќи за $C=1$ равенството $\overline{ABC}\cdot C=----$ не е можно, затоа што $\overline{AB1}\cdot 1=\overline{AB1}$, што не е четирицифрен број.

Од равенството $\overline{ABC}\cdot A=--A$, ако $A>3$ следува дека

$$\overline{ABC}\cdot A>400\cdot 4=1600>999.$$

Значи, $A\leq 3$. Ако $A=1$, тогаш и $C=1$, што е противречност. Затоа $A=2$ или $A=3$. Ако $A=3$, тогаш од $\overline{ABC}\cdot A=--A$ следува $C=1$ што не е можно. Затоа $A=2$.

Сега, од $\overline{2BC}\cdot 2=--2$, следува $C=1$ или $C=6$. Значи $C=6$.

На крај, од равенството $\overline{2B6}\cdot B=---B$, мора $B\in\{1,2,4,6,8\}$. За $B=1$, добиениот број не е четирицифрен. Од останатите случаи со проверка се добива дека $B=8$.

5. Определи ги сите природни броеви n така што збирот

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)n$$

е точен квадрат.

Решение. За $n=2,3,4,5$ имаме:

$$1+1\cdot 2=3,$$

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3=9,$$

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=33,$$

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=153$$

Секој нареден природен број од облик

$$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)n$$

завршува на 3 бидејки бројот $1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)n$ ги содржи 2 и 5 како множители од каде ќе завршува на нула. Но квадрат на природен број не може да завршува на 3, па решение на задачата се броевите 1 и 3.

6. Броевите 1,2,3,...,2011,... се наредени на следниов начин,

1→		5, 6, 7, 8, 9,				21, 22, 23, 24, 25			37, ...
2→	4		10		20		26		36
3→	3		11		19		27		35
4→	2		12		18		28		34
5→	**1**			13, 14, 15, 16, 17				29, 30, 31, 32, 33	

Во која линија од означените се наоѓа бројот 2011.

Решение. Забележуваме дека броевите лежат на змиулеста патека која се добива со надоврзување на делот во кој лежат првите 16 броеви. Така 17-от број ќе се наоѓа во иста линија со првиот, 18-от во иста линија со вториот,..., 32-от со 16-от, 33-от со првиот итн. Бидејќи $2011=16\cdot 125+11$, следува дека 2011-тиот број ќе се наоѓа во иста линија со бројот 11, односно во третата линија.

7. Даден е 3×3 квадрат поделен на 9 квадратчиња и во секое квадратче е запишан цел број, така што збировите на елементите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала се еднакви. Докажи дека овој збир не може да биде еднаков на 2008.

Решение. Нека збирот на броевите запишани во секој ред и секоја колона е еднаков на m. Тогаш квадратот мора да го има следниов облик:

x	y	$m-x-y$
a	b	$m-a-b$
$m-x-a$	$m-b-y$	$x+a+b+y-m$

Бидејќи и збирот на елементите кои се на дијагоналите мора да е m, добиваме:

$$\begin{cases} x+b+x+a+b+y-m=m \\ m-x-a+b+m-x-y=m \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 2x+a+y+2b=2m \\ 2x+a+y-b=m \end{cases}$$

Со одземање на равенките, се добива:

$$2b+b=2m-m$$

односно $3b=m$, од каде следува $3\,|\,m$. Но, 3 не е делител на 2008, па затоа 2008 не може да биде бараниот збир.

8. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

Решение. Нека $a=x^3, b=x^2+x$. Тогаш

$$a=x^3+x^2-x^2-x+x=xb-b+x$$

или

$$a=x(b+1)-b.$$

Јасно, $b\neq -1$, бидејќи во спротивно $x^2+x=-1$ или $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=-1$, па затоа $(x+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$ што не е можно. Добиваме $x=\frac{a+b}{b+1}$ што е рационален број бидејќи броевите a и b се рационални.

9. Даден е реален број x. Користејќи ги операциите множење и делење на два добиени броеви можеме да го менуваме степенот на бројот x. На пример:

$$x \cdot x = x^2, x^2 \cdot x^2 = x^4, \frac{x^4}{x} = x^3.$$

Докажи дека во 14 чекори можеме да го добиеме бројот x^{2013}!

Решение. Првите 11 чекори се:

$$x \cdot x = x^2,$$
$$x^2 \cdot x^2 = x^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^{1024} \cdot x^{1024} = x^{2048}.$$

Потоа имаме

$$x^{2016} = \frac{x^{2048}}{x^{32}},$$
$$x^{2012} = \frac{x^{2016}}{x^4},$$
$$x^{2013} = x^{2012} \cdot x.$$

Со тоа во 14 чекори го добивме на x^{2013}.

10. Колку единици има во записот на бројот

$$9 + 99 + ... + \underbrace{999...999}_{2010}.$$

Решение. Имаме

$$9 + 99 + ... + \underbrace{999...999}_{2010} = 10 - 1 + 100 - 1 + ... + 1\underbrace{000...000}_{2010} - 1$$
$$= \underbrace{111...111}_{2010}0 - 2010 = \underbrace{111...11}_{2006}09100$$

Значи во записот на бројот $9 + 99 + ... + \underbrace{999...999}_{2010}$ има 2007 единици.

I.2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

11. Нека a, b и c се ненулти реални броеви и

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

Пресметај ја вредноста на $ab + bc + ca$.

Решение. Од даденото равенство, со непосредно пресметување добиваме

$$a+\frac{b}{c}=1 \quad \Rightarrow \quad ac+b=c \quad \Rightarrow \quad ac=c-b\ ;$$

$$b+\frac{c}{a}=1 \quad \Rightarrow \quad ab+c=a \quad \Rightarrow \quad ab=a-c$$

$$c+\frac{a}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad cb+a=b \quad \Rightarrow \quad cb=b-a$$

Ако се соберат последните равенства, се добива

$$ab+bc+ca=(c-b)+(a-c)+(b-a)=0\ .$$

12. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2010}\ .$$

Решение.За секој природен број $k\in\mathbb{N}$ е испонето равенството

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}\ ,$$

Од каде добиваме

$$\frac{1}{1+2+3+...+k}=\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})\ .$$

Според тоа

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2010}&=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+2(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011})\\&=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011})\\&=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2011})=\frac{2009}{2011}.\end{aligned}$$

13. За целите броеви a и b важи $a=a^2+b^2-8b-2ab+16$. Докажи дека a е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$9a=a^2+b^2+8a-8b-2ab+16=(a-b+4)^2\ ,$$

па затоа $9a$ е точен квадрат, а оттука следува дека и a е точен квадрат.

14. Ако n е природен број, дали бројот $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ е точен квадрат? Дали бројот $2005\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011+16$ е точен квадрат?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16&=(4n^2-1)(4n^2-9)+16\\&=16n^4-40n^2+25\\&=(4n^2-5)^2,\end{aligned}$$

што значи дека $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ е точен квадрат. За $n=1004$ добиваме

$$2005\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011+16=(2\cdot 1004-3)(2\cdot 1004-1)(2\cdot 1004+1)\cdot \cdot(2\cdot 1004+3)+16,$$

што значи дека бројот $2005\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011+16$ е точен квадрат.

15. Реалните броеви a,b,c,d ги задоволуваат равенствата

$$abc-d=1,\qquad bcd-a=2,\qquad cda-b=3,\qquad dab-c=-6.$$

Докажи дека

$$a+b+c+d\neq 0.$$

Решение. Ќе го претпоставиме спротивно, т.е. дека $a+b+c+d=0$. Тогаш со собирање на четирите равенства, добиваме

$$abc+bcd+cda+dab=0 \qquad (1)$$

Јасно, $abcd\neq 0$. Ако го претпоставиме спротивно, т.е. дека $abcd=0$, тогаш барем еден од четирите множители е еднаков на нула. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е d. Но, тогаш од (1) добиваме дека $abc=0$. Во тој случај во првата равенка добиваме $0=1$, што не е можно. Слично се разгледуваат и останатите случаи.

Заради добиената контрадикција $abcd\neq 0$, и ако го поделиме равенството (1) со $abcd$ добиваме

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{d}=0.$$

Но, тогаш од $a+b+c+d=0$, добиваме

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}=-\tfrac{1}{d}=\tfrac{1}{a+b+c}. \qquad (2)$$

Од (2), со елементарни трансформации, добиваме

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Тоа не е можно, бидејќи на пример ако $a+b=0$ и ги собереме второто и третото неравенство имаме $(a+b)cd-(a+b)=2+3$, односно $0=2+3$. Слично се постапува и во останатите случаи.

Заради добиените контрадикции важи

$$a+b+c+d\neq 0.$$

16. Ако за ненултите броеви a,b,c важи

$$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$$

тогаш $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи.

Решение. Од $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}$ имаме $y=\frac{c^2x-acz+b^2x}{ab}$, а од $\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ имаме $y=\frac{b^2z-acx+a^2z}{bc}$. Тогаш од

$$\frac{c^2x-acz+b^2x}{ab}=\frac{b^2z-acx+a^2z}{bc}$$

добиваме

$$cx(c^2+b^2+a^2)=az(c^2+b^2+a^2).$$

Бидејќи $a,b,c\neq 0$, тогаш $c^2+b^2+a^2\neq 0$. Затоа $cx=az$, односно $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$. Од $cx=az$ следува

$$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=0,$$

односно $ay-bx=0$. Значи $ay=bx$, односно $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

17. Определи ја вредноста на изразот $(3x-y)(x+3y)+(3x+y)(x-3y)$ ако важи $x^2+y^2+4x-10y+29=0$.

Решение. Од

$$x^2+y^2+4x-10y+29=(x+2)^2+(y-5)^2,$$

следува

$$(x+2)^2+(y-5)^2=0.$$

Оттука $x+2=0$ и $y-5=0$, односно $x=-2$ и $y=5$. Тогаш

$$(3x-y)(x+3y)+(3x+y)(x-3y)=-11\cdot 13+17=-126.$$

18. Ако $xy=6$ и $x^2y+xy^2+x+y=63$, пресметај x^2+y^2.

Решение. Од $x^2y+xy^2+x+y=63$ следува дека важи

$$xy(x+y)+(x+y)=(xy+1)(x+y)=63$$
$$7(x+y)=63$$
$$x+y=9.$$

Значи,

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=81-12=69.$$

19. Ако $a+b=1$, тогаш докажи дека важи

$$a^2b^2+3=(a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a^2+a+1)(b^2+b+1) &= a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1\\ &= a^2b^2+1+ab(a+b)+a^2+ab+b^2+a+b\\ &= a^2b^2+2+a^2+2ab+b^2\\ &= a^2b^2+2+(a+b)^2 = a^2b^2+3.\end{aligned}$$

20. Нека a, b и c се природни броеви такви што

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}.$$

Докажи дека $a=b=c$.

Решение. *Прв начин.* Ако дадените дропки се еднакви, тогаш и дропката, чиј именител е збирот од именителите, а броител збирот од броителите на трите дропки, е еднаква на нив, т.е.

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{b+c+c+a+a+b}=1.$$

Од $1=\frac{a+b}{b+c}$ следува $a=c$. Од $1=\frac{b+c}{c+a}$ следува дека $b=a$.

Значи $a=b=c$.

Втор начин. Нека $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}=k$. Тогаш

$$a+b=k(b+c),\ b+c=k(c+a),\ c+a=k(a+b),$$

од каде $a+b=k(b+c)=k^2(c+a)=k^3(a+b)$, односно $k^3=1$, па затоа $k=1$. Од $1=\frac{a+b}{b+c}$ следува $a=c$. Од $1=\frac{c+a}{a+b}$ следува $b=c$.

Значи $a=b=c$.

Трет начин. Од $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}$ имаме

$$ac+a^2+ab=b^2+bc+c^2. \qquad (1)$$

Од $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ имаме

$$ab+b^2+bc=a^2+ac+c^2 \qquad (2)$$

Ако од (2) го одземеме (1) последователно добиваме

$$\begin{aligned}&b^2+bc-a^2-ac=a^2+ac-b^2-bc,\\ &2(b^2-a^2+bc-ac)=0,\\ &(b-a)(b+a)+c(b-a)=0,\\ &(b-a)(a+b+c)=0.\end{aligned}$$

Бидејќи $a+b+c\neq 0$ следува дека $b=a$. Аналогно од $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ имаме $b=c$.

21. Определи ја вредноста на изразот $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, ако $x\neq y$ и $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$.

Решение. Даденото равенство, можеме да го запишеме во облик

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}=\frac{1}{xy+1}-\frac{1}{y^2+1}$$

$$\frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)}=\frac{y(y-x)}{(y^2+1)(xy+1)}.$$

Бидејќи $x\neq y$ и $xy+1\neq 0$, од последното равенство го добиваме равенството $\frac{x}{x^2+1}=\frac{y}{y^2+1}$, кое е еквивалентно на равенството

$$(xy-1)(x-y)=0.$$

Од тоа што $x-y\neq 0$, добиваме $xy-1=0$, т.е. $xy=1$. Сега

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{2}{xy+1}+\frac{2}{xy+1}=\frac{4}{1+1}=2.$$

22. Определи го збирот на природните броеви a и b за кои важи

$$(5x^ay^a)^b+(-3x^by^b)^a=-2x^6y^6, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}$$

Решение. Имаме

$$x^6y^6=-\tfrac{1}{2}((5x^ay^a)^b+(-3x^by^b)^a)=-\tfrac{1}{2}x^{ab}y^{ab}(5^b+(-3)^a).$$

Равенството $x^6y^6=-\frac{1}{2}x^{ab}y^{ab}(5^b+(-3)^a)$ е можно ако и само ако

$$ab=6 \text{ и } 1=-\tfrac{1}{2}(5^b+(-3)^a).$$

Од второто равенство следува дека $5^b+(-3)^a=-2$. Но, $5^b>1$ за секој природен број b, па затоа a мора да биде непарен број. Од $ab=6$ заклучуваме дека $a=1$ или $a=3$. Во првиот случај

$$b=6 \text{ и } 5^b+(-3)^a=5^6+(-3)^1\neq -2,$$

а во вториот случај

$$b=2 \text{ и } 5^b+(-3)^a=5^2+(-3)^3=-2.$$

Според тоа, единствено решение е $a=3$ и $b=2$, што значи $a+b=5$.

23. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека е исполнето равенството:

$$(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4$$

Решение. Со непосредно пресметување добиваме

$$(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c}) = abc+\tfrac{ab}{c}+\tfrac{ac}{b}+\tfrac{bc}{a}+\tfrac{b}{ac}+\tfrac{c}{ab}+\tfrac{a}{bc}+\tfrac{1}{abc}$$
$$=1+\tfrac{abc}{c^2}+\tfrac{abc}{b^2}+\tfrac{abc}{a^2}+\tfrac{b^2}{abc}+\tfrac{c^2}{abc}+\tfrac{a^2}{abc}+1$$
$$=2+\tfrac{1}{c^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{a^2}+b^2+c^2+a^2$$
$$=a^2+2+\tfrac{1}{a^2}+b^2+2+\tfrac{1}{b^2}+c^2+2+\tfrac{1}{c^2}-4$$
$$=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4.$$

24. Ако $a+b+c=0$, тогаш

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1.$$

Докажи!

Решение. Во првиот член од равенството a го заменуваме со $-b-c$ и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2(b+c)^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2b^2+2c^2+5bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}.$$

Меѓутоа

$$\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{b+2c}=\frac{3(b+c)}{(2b+c)(b+2c)},$$

па затоа

$$\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=(b+c)\frac{b+c}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}(\frac{b+c}{2b+c}+\frac{b+c}{b+2c}).$$

Во последното равенсто повторно користиме $a+b+c=0$ и добиваме

$$\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a}).$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{2b^2+ac}=\frac{1}{3}(\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b}) \text{ и } \frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{1}{3}(\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c}).$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{1}{3}(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a}+\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b}+\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c})$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{b+c-a-c}{b-a}+\frac{b+c-a-b}{c-a}+\frac{a+c-a-b}{c-b})=1.$$

25. Определи ја вредноста на бројниот израз

$$8004^2-8003^2+8002^2-8001^2+\ldots+4^2-3^2+2^2-1^2.$$

Решение. Имаме:

$$8004^2 - 8003^2 + 8002^2 - 8001^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 =$$
$$= (8004 - 8003)(8004 + 8003) + ... + (4 - 3)(4 + 3) + (2 - 1)(2 + 1)$$
$$= 8004 + 8003 + 8002 + 8001 + ... + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$= (8004 + 1) + (8003 + 2) + ... + (4003 + 4002)$$
$$= 4002 \cdot 8005 = 32036010.$$

26. Докажи дека бројот
$$19991999 + 19991998 \cdot 19991999 \cdot 19992000$$
е куб на цел број!

Решение. *Прв начин.* Имаме
$$19991999 + 19991998 \cdot 19991999 \cdot 19992000 =$$
$$= 19991999(1 + 19991998 \cdot 19992000)$$
$$= 19991999 \cdot [1 + (19991999 - 1)(19991999 + 1)]$$
$$= 19991999 \cdot [1 + 19991999^2 - 1] = 19991999^3.$$

Втор начин. Ќе воведеме ознака $n = 19991999$. Тогаш
$$19991999 + 19991998 \cdot 19991999 \cdot 19992000 = n + (n-1)n(n+1)$$
$$= n + n(n^2 - 1)$$
$$= n + n^3 - n = n^3,$$
што и требаше да се докаже.

27. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$895231755\frac{234}{357118} \cdot 895231754\frac{234}{357118} - 895231756\frac{234}{357118} \cdot 895231753\frac{234}{357118}$$

Решение. Ако ставиме $a = 895231755\frac{234}{357118}$, тогаш изразот што треба да се пресмета може да се запише на следниот начин:
$$a(a-1) - (a+1)(a-2) = a^2 - a - (a^2 - 2a + a - 2) = 2,$$
па резултатот што се бара е 2.

28. Докажи дека дропката $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ е нескратлива за секој цел број a.

Решение. *Прв начин.* Имаме
$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11} = \frac{a^2+3}{a^4+6a^2+9+a^2+2} = \frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-1}.$$

Нека броителот $a^2 + 3$ е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)^2$ и (a^2+3) се делат со

k, но 1 не се дели со k, односно именителот дава остаток 1 при делењето со k. Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

Втор начин. Ако именителот на дропката го поделиме со a^2+3, добиваме количник a^2+4 и остаток -1. Според тоа, дропката можеме да ја запишеме да ја запишеме во облик

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)(a^2+4)-1}.$$

Нека броителот a^2+3 е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)(a^2+4)$ се дели со k, но -1 не се дели со k, односно именителот дава остаток $k-1$ при делењето со k. Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

29. Нека е даден полиномот $P(x)=4x^4+x^3+8x^2+x+4$.

а) Разложи го полиномот $P(x)$ на производ од два полинома од втор степен.

б) Покажи дека за било која вредност на променливата $x\in\mathbb{N}$, вредноста на полиномот $P(x)$ е делива со 2.

Решение. а) Имаме

$$P(x)=4(x^4+2x^2+1)+x^3+x=4(x^2+1)^2+x(x^2+1)$$
$$=(x^2+1)(4(x^2+1)+x)=(x^2+1)(4x^2+x+4).$$

б) Нека $x\in\mathbb{N}$. Од тоа што

$$P(x)=4(x^4+2x^2+1)+x^3+x \text{ и } 2\,|\,4(x^4+2x^2+1),$$

следува дека $2\,|\,P(x)$, ако x^3+x е парен број. Ако x е парен број, тогаш x^3 е парен број, па x^3+x е парен број. Ако x е непарен број, тогаш x^3 е непарен број, па x^3+x е повторно парен број. Значи, $2\,|\,P(x)$.

30. Пресметај ја вредноста на изразот $a(a+1)(a+2)(a+3)-19875$, каде $a=\frac{1}{2}(\sqrt{569}-3)$.

Решение. Од $a=\frac{1}{2}(\sqrt{569}-3)$ добоваме $2a+3=\sqrt{569}$ и ако квадрираме последователно добиваме

$$4a^2 + 12a + 9 = 569,$$
$$4a^2 + 12a = 560,$$
$$a^2 + 3a = 140.$$

Затоа

$$a(a+1)(a+2)(a+3) - 19875 = a(a+3)\cdot(a+1)(a+2) - 19875$$
$$= (a^2+3a)(a^2+3a+2) - 19875$$
$$= 140\cdot 142 - 19875 = 19880 - 19875 = 5.$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x^4-2005x^3+2005x^2-x}{x-1}$ за $x = 2005$.

Решение. Да го упростиме изразот $A(x) = \frac{x^4-2005x^3+2005x^2-x}{x-1}$. Имаме:

$$A(x) = \frac{(x^4-x)-2005x^2(x-1)}{x-1} = \frac{x(x^3-1)-2005x^2(x-1)}{x-1}$$
$$= \frac{(x-1)[x(x^2+x+1)-2005x^2]}{x-1} = x^3 + x^2 + x - 2005x^2.$$

Тогаш

$$A(2005) = 2005^3 + 2005^2 + 2005 - 2005^3 = 2005(2005+1) = 4022030 .$$

I.3. ФУНКЦИИ И РАВЕНКИ

32. За линеарната функција $f(x)$ е познато дека

$$|f(1)| \leq 10 \text{ и } |f(2)| \geq 2010 .$$

Определи ја најмалата можна вредност на $|f(3)|$.

Решение. Нека $f(x) = ax + b$ е дадената функција. Имаме $f(1) = a + b$, $f(2) = 2x + b$ и $f(3) = 3a + b$. Значи,

$$f(3) = 3a + b = 4a + 2b - a - b = 2f(2) - f(1)\text{, т.е. } f(3) = 2f(2) - f(1) .$$

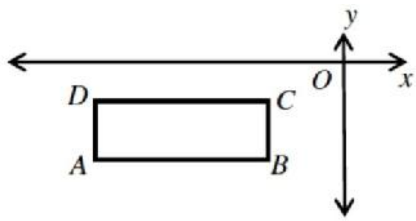
Од неравенствтото $|f(1)| \leq 10$ следува $-10 \leq f(1) \leq 10$, па затоа $-10 \leq -f(1) \leq 10$. Од неравенството $|f(2)| \geq 2010$ следува $f(2) \geq 2010$ или $f(2) \leq -2010$. Ако $f(2) \geq 2010$, тогаш од неравенствата $-f(1) \geq -10$ и $f(2) \geq 2010$ следува дека $f(3) = 2f(2) - f(1) \geq 4010$ и затоа $|f(3)| \geq 4010$. Ако $f(2) \leq -2010$, тогаш од неравенствата $-f(1) \leq 10$ и $f(2) \leq -2010$ следува $f(3) = 2f(2) - f(1) \leq -4010$ и затоа

$|f(3)|\geq 4010$. И во двата случаја бројот 4010 е бараната најмала можна вредност. Останува да дадеме пример на линеарна функција која ги задоволува условите на задачата. Таква е, на пример, функцијата, $f(x)=2000x-1990$.

33. Функцијата $f(x)$ е таква што $f(m+n)=f(mn)$ за секои природни броеви m и n. Освен тоа $f(10)=5$. Пресметај $f(40)$.

Решение. Од условот на задачата последователно следува дека $f(10+1)=f(10)=5$, т.е. $f(11)=5$; $f(11+1)=f(11)=5$, т.е. $f(12)=5$; $f(12+1)=f(12)=5$, т.е. $f(13)=5$ итн. Нека претпоставиме дека $f(k)=5$, за некој природен број $k\geq 10$. Тогаш $f(k+1)=f(k)=5$, па од принципот на математичка индукција следува дека $f(n)=5$, за секој $n\geq 10$. Според тоа, $f(40)=5$.

34. Во третиот квадрант на правоаголен координатен систем Oxy е поставен правоаголник како на цртежот десно. Втората координата на секое теме е поделена со првата. За кое теме се добива најмала вредност?



Решение. Сите координати се негативни броеви и затоа сите количници се позитивни броеви. Најмал количник се добива кога броителот е најмал по апсолутна вредност (тоа се темињата C и D), а именителот е најголем по апсолутна вредност (тоа се темињата A и D). Темето D ги задоволува и двата услова, т.е. тоа е бараното теме.

35. Определи ја најмалата вредност на изразот:

$$y=|x+2|+|x|+|x-1|+|x-3|.$$

Решение. Со ослободување од апсолутните вредности добиваме:

Случај 1. За $x\leq -2$ имаме $y=-x-2-x-x+1-x+3=-4x+2\geq 10$.

Случај 2. За $-2\leq x\leq 0$ имаме $y=-2x+6\geq 6$.

Случај 3. За $0\leq x\leq 1$ имаме $y=6$.

Случај 4. За $1\leq x\leq 3$ имаме $y=2x+4\geq 6$.

Случај 5. За $x\geq 3$ имаме $y=4x-2\geq 10$.

Според тоа, најмалата вредност на дадениот израз е 6 и таа се достигнува кога x припаѓа на интервалот $[0,1]$.

36. Определи го збирот на решенија на равенката $|x-5|=1$.

Решение. Можни се два случаја.

Ако $x-5<0$, т.е. $x<5$, тогаш $|x-5|=-x+5=1$, т.е. $x=4$ и тоа е решение бидејќи $4<5$.

Ако $x-5\geq 0$, т.е. $x\geq 5$, тогаш $|x-5|=x-5=1$, т.е. $x=6$ и тоа е решение бидејќи $6\geq 5$.

Конечно, збирот на решенијата на дадената равенка е $4+6=10$.

37. За кои вредности на параметарот a равенката $|2x+3|=a$ има единствено решение.

Решние. Јасно, ако $a<0$, тогаш равенката нема решение, бидејќи левата страна е позитивна, а десната е негативна. Ако $a>0$, тогаш можни се два случаја:

Случај 1. $2x+3<0$, т.е. $x<-\frac{3}{2}$. Тогаш $|2x+3|=-2x-3=a$, па затоа $x=-\frac{a+3}{2}$. Тоа е решение, бидејќи $-\frac{a+3}{2}<-\frac{3}{2}$.

Случај 2. $2x+3\geq 0$, т.е. $x\geq -\frac{3}{2}$. Тогаш $|2x+3|=2x+3=a$, па затоа $x=\frac{a-3}{2}$. Тоа е решение, бидејќи неравенството $\frac{a-3}{2}\geq -\frac{3}{2}$ е точно за $a>0$.

Според тоа, ако $a>0$, тогаш равенката има две решенија.

Нека $a=0$. Сега равенката го добива видот $2x+3=0$ и решение е $x=-\frac{3}{2}$ и тоа е единствено решение.

Конечно, само за $a=0$ равенката има единствено решение.

38. Определи ги сите вредности на реалните броеви a, b, c и d такви што

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a(b+c+d).$$

Решение. Равенството можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a^2}{4}-ab+b^2+\frac{a^2}{4}-ac+c^2+\frac{a^2}{4}-ad+d^2+\frac{a^2}{4}=0,$$

$$(\frac{a}{2}-b)^2+(\frac{a}{2}-c)^2+(\frac{a}{2}-d)^2+\frac{a^2}{4}=0.$$

Збир на квадрати на реални броеви е нула, ако и само ако секој од нив е нула. Според тоа, последното равенство е точно ако и само ако

$$\tfrac{a}{2}-b=0,\ \tfrac{a}{2}-c=0,\ \tfrac{a}{2}-d,\ \tfrac{a}{2}=0,$$

односно,

$$b=c=d=\tfrac{a}{2}=0.$$

Значи, единствени реални броеви за кои почетното равенство е точно се $a=b=c=d=0$.

39. Да се определат сите реални броеви a,b,c и d за кои се исполнети равенствата

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

Решение. Ако го квадрираме равенството $a+b+c+d=20$, добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=400$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot 150=400$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$

Сега,

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=$$

$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$=3\cdot 100-2\cdot 150=0$$

Збир на квадрати на реални броеви е еднаков на нула ако и само ако секој од тие броеви е еднаков на нула. Според тоа

$$a-b=a-c=a-d=b-c=b-d=c-d,$$

од каде добиваме

$$a=b=c=d.$$

Ако замениме во равенството $a+b+c+d=20$, добиваме $4a=20$, односно $a=5$.

Конечно, $a=b=c=d=5$.

40. Нека е a позитивен реален број, таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи дека равенката $x^2+ax+a \;\; -6=0$ нема реални решенија.

Решение. Десната страна равенката можеме да ја запишеме во облик

$$x^2+ax+a^2-6=x^2+2\tfrac{a}{2}x+\tfrac{a^2}{4}-\tfrac{a^2}{4}+a^2-6=(x+\tfrac{a}{2})^2+\tfrac{3}{4}(a^2-8).$$

Според тоа, за $a^2>8$ равенката нема решенија. Нека $a^2\le 8$. Тогаш $a^3\le 8a$, бидејќи според условот на задачата $a>0$. Но, $a^3=6a+6$, па според тоа $6a+6\le 8a$, т.е. $a\ge 3$. Ако $a\ge 3$, тогаш $a^2\ge 9>8$ што противречи на $a^2 \leq 8$. Значи, не постојат позитивен број a за кој $a^2 \leq 8$ и $a^3 = 6a+6$.

Според тоа, равенката нема реални решенија кога $a>0$.

41. Нека a е решение на равенката $x^3 - x - 1 = 0$. Докажи ги равенствата:

$$a^4 = a^2 + a,\ a^4 = a^5 - 1,\ a^4 = a^3 + a^2 - 1 \text{ и } a^4 = \frac{1}{a-1}.$$

Решение. Бидејќи a е корен на $x^3 - x - 1 = 0$, важи $a^3 - a - 1 = 0$. Од ова равенство добиваме $a^4 - a^2 - a = 0$, т.е. точно е равенството $a^4 = a^2 + a$. Од равенството $a^4 = a^2 + a$ следува $a^5 = a^3 + a^2$, па ако во последното равенство го замениме a^3 со $a+1$ го добиваме равенството $a^5 = a^2 + a + 1$ и како $a^2 + a = a^4$ добиваме дека $a^5 = a^4 + 1$, т.е. $a^4 = a^5 - 1$, т.е. точно е второто равенство. Понатаму, ако двете страни на равенството $a^3 = a+1$ ги помножиме со $a-1$ добиваме $a^4 - a^3 = a^2 - 1$, т.е. $a^4 = a^3 + a^2 - 1$, што значи дека е точно третото равенство. На крајот ако второто докажано равенство го запишеме во облик $a^5 - a^4 = 1$ и истото го поделиме со $a - 1 \neq 0$ добиваме $\frac{a^5 - a^4}{a-1} = \frac{1}{a-1}$, т.е. $a^4 = \frac{1}{a-1}$, што значи дека е точно и четвртото равенство.

42. Нека a,b,c,d се различни реални броеви. Колку реални решенија има равенката

$$\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x-b} \cdot \sqrt{x-c} \cdot \sqrt{x-d} = 0.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d$. Тогаш дефиниционата област на равенката е интервалот $[d,+\infty)$ и затоа таа има еден реален корен $x=d$.

43. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x(y+z) = 5 \\ y(x+z) = 10 \\ z(x+y) = 13 \end{cases}.$$

Решение. *Прв начин.* Ја воведуваме смената $x_1 = xy, x_2 = xz, x_3 = yz$. Тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1+x_3=10 \\ x_2+x_3=13 \end{cases}.$$

Го изразуваме x_2 од првата равенка и го заменуваме во третата,

$$\begin{cases} x_2=5-x_1 \\ x_1+x_3=10 \\ 5-x_1+x_3=13 \end{cases}$$

па според тоа

$$\begin{cases} x_2=5-x_1 \\ x_1+x_3=10 \\ -x_1+x_3=8 \end{cases}.$$

Го изразуваме x_3 од третата равенка и го заменуваме во втората.

$$\begin{cases} x_2=5-x_1 \\ x_1+8+x_1=10 \\ x_3=8+x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=5-x_1 \\ 2x_1=2 \\ x_3=8+x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=4 \\ x_1=1 \\ x_3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ xz=4 \\ yz=9 \end{cases}.$$

Ако ги поделиме првите две равенки и добиваме $\frac{z}{y}=4$ или $z=4y$.

Ако, пак, замениме во третата равенка добиваме $4y^2=9$ или $y=\pm\frac{3}{2}$.

Според тоа, $z=\pm 6$ и $x=\pm\frac{2}{3}$.

Втор начин. Ако во секоја равенка од системот се ослободиме од заграда добиваме

$$\begin{cases} xy+xz=5 \\ yx+yz=10 \\ zx+zy=13 \end{cases}.$$

Ако трите равенки ги собереме, добиваме $2(xy+yz+zx)=28$, т.е. $xy+yz+zx=14$. Ако од последната равенка ги одземеме првата равенка, па втората равенка, па третата равенка, добиваме $yz=9$, $xz=4$ и $xy=1$. Ако ги поделиме првите две од последните три равенки се добива $y=\frac{9}{4}x$, па со замена во третата равенка се добива $\frac{9}{4}x^2=1$, т.е. $x^2=\frac{4}{9}$. Броеви за кои е исполнета последната равенка се $x=\frac{2}{3}$ и $x=-\frac{2}{3}$. Лесно се добива $y=\pm\frac{3}{2}$ и $z=\pm 6$.

I.4. НЕРАВЕНСТВА. НАЈГОЛЕМА И НАЈМАЛА ВРЕДНОСТ

44. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$4x^2 - 12x + 2014.$$

Решение. Имаме:

$$4x^2 - 12x + 2014 = 4x^2 - 12x + 9 + 2005 = (2x-3)^2 + 2005 \geq 2005.$$

Оттука следува дека најмалата вредност на дадениот израз е 2005 и истата се достигнува кога $2x - 3 = 0$, односно $x = \frac{3}{2}$.

45. Кој број е поголем 50^{50} или 339^{33}?

Решение. Непосредно имаме,

$$50^{50} > 49^{50} = (7^2)^{50} = 7^{100} > 7^{99} = (7^3)^{33} = 343^{33} > 339^{33}.$$

46. Кој од броевите 31^{11} и 17^{14} е поголем?

Решение. Од

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} \text{ и } 17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56},$$

следува дека $31^{11} < 17^{14}$.

47. Докажи го неравенството

$$2^{2010} + 3^{2010} < 4^{2010}$$

Решение. Од $2 < 3$, се добива дека $2^{2010} < 3^{2010}$. Од последното неравенство следува

$$2^{2010} + 3^{2010} < 3^{2010} 3^{2010} = 2 \cdot 3^{2010}.$$

Доволно ќе биде да покажеме дека $2 \cdot 3^{2010} < 4^{2010}$. Од

$$2 = \frac{54}{27} < \frac{64}{27} = (\frac{4}{3})^3$$

следува

$$2 \cdot 1 < (\frac{4}{3})^3 \cdot 1 < (\frac{4}{3})^3 \cdot (\frac{4}{3})^{2007} = (\frac{4}{3})^{2010} = \frac{4^{2010}}{3^{2010}}$$

односно $2 \cdot 3^{2010} < 4^{2010}$.

48. Аритметичката средина на десет различни природни броеви е $12,5$. Колкава најголема вредност може да има најмалиот од тие броеви?

Решение. Нека дадените броеви се $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$. Нивната аритметичка средина е $\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10} = 12,5$ од каде следува дека

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 125.$$

Бидејќи броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ се природни имаме

$$a_2 \geq a_1 + 1,\ a_3 \geq a_2 + 1 \geq a_1 + 2\ ..., a_{10} \geq a_1 + 9.$$

Сега имаме

$$125 = a_1 + a_2 + ... + a_{10} \geq a_1 + (a_1 + 1) + ... + (a_1 + 9) = 10a_1 + 45,$$

т.е. $80 \geq 10a_1$, од каде следува дека $a_1 \leq 8$. Според тоа, најмалиот од споменатите броеви може да биде најмногу 8.

49. Броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ ги задоволуваат условите:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0,\ a_1 + a_2 = 20,\ a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20.$$

Која е максималната вредност за изразот:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2.$$

За кои вредности на $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се постигнува максималната вредност?

Решение. Од условот имаме:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 40 \text{ и } a_1 = 20 - a_2$$

па, добиваме:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 &= (20 - a_2)^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \\ &= 400 - 40a_2 + a_2^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \\ &\leq 400 - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{20})a_2 + a_2^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \\ &= 400 - a_1a_2 - a_3a_2 - a_4a_2 - ... - a_{20}a_2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \\ &= 400 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + ... + (a_{20}^2 - a_{20}a_2) \\ &= 400 + a_2(a_2 - a_1) + a_3(a_3 - a_2) + ... + a_{20}(a_{20} - a_2) \end{aligned}$$

Од условот имаме:

$$a_2 - a_1 \leq 0,\ \ a_3 - a_2 \leq 0,\ ...,\ a_{20} - a_2 \leq 0,$$

па затоа

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 \leq 400,$$

и знак за равенство важи ако и само ако

$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} = 20$$

и

$$a_2(a_2-a_1)=0,\ \ a_3(a_3-a_2)=0,\ ...,\ a_{20}(a_{20}-a_2)=0\,.$$

Разгледуваме два случаи, при кои се достигнува ова равенство:

1) $a_2=0$, следува $a_1=20$, $a_3=a_4=...=a_{20}=0$.

2) $a_2=a_1=10$, следува: $a_3=a_4=10,\ a_5=a_6=...=a_{20}=0$, (за еквивалентен го сметаме секој случај на пермутација на индексите 3,4,...,20).

50. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се такви што $abc=1$. Да се докаже неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c\,.$$

Решение. Од тривијалното неравенство $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ добиваме дека за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$ важи

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\,.$$

Со примена на ова неравенство имаме

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\\&\geq(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)\\&=abc(a+b+c)=a+b+c\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

51. Нека a,b,c се реални броеви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}(a+3b)(b+4c)(c+2a)&=(a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\\&\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}\end{aligned}$$

Бидејќи $a\leq b\leq c$, имаме

$$\begin{aligned}60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}&=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{2}{15}}c\geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}b^{\frac{2}{15}}c=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}c\\&=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{1}{12}}bc\geq 60a^{\frac{11}{12}}a^{\frac{1}{12}}bc=60abc\end{aligned}$$

Кај првиот знак за неравенство, равенство важи ако и само ако $a=b=c$, кај вториот ако и само ако $b=c$, а кај третиот ако и само ако $a=b$. Значи, равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

52. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои што е исполнето равенството $a+b+c+2=abc$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин*. Најпрво воочуваме дека важи равенството

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)&=\\ &=a+b+c+(a+b+c+2)+ab+ac+bc+1\\ &=a+b+c+abc+ab+ac+bc+1\\ &=(a+1)(b+1)(c+1).\end{aligned}$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}&=\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)\\ &\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{c+1}\cdot\frac{c+1}{a+1}}-\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)\\ &=3-\frac{(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\\ &=3-1=2.\end{aligned}$$

Знак за равенството важи ако и само ако $a=b=c=2$.

Втор начин. Ако неравенството го помножиме со $(a+1)(b+1)(c+1)$ го добиваме еквивалентното неравенство:

$$a(a+1)(c+1)+b(b+1)(a+1)+c(c+1)(b+1)\geq 2(a+1)(b+1)(c+1)$$

кое може да се запише во облик

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\geq 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2.$$

Но, од неравенствата

$$a^2c+b^2a+c^2b\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\geq 3abc+ab+bc+ca.$$

Сега, ако го примениме условот од задачата, добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\geq 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2.$$

53. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3.$$

Кога важи знак за равенсто?

Решение. Бидејќи $(1-\sqrt{bc})^2 \geq 0$ следува дека $1+bc \geq 2\sqrt{bc}$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{1+bc}$. Според тоа,

$$\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+a}=1. \qquad (2)$$

На ист начин се докажува дека

$$\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{1}{1+b} \geq 1 \qquad (2)$$

и

$$\frac{\sqrt{c}}{2}+\frac{1}{1+c} \geq 1. \qquad (3)$$

Со собирање на (1), (2) и (3) се добива бараното неравенство. Да забележиме дека равенство важи ако и само ако $1=\sqrt{bc}$, т.е. $a=1$. На ист начин добиваме $b=1$ и $c=1$.

54. Нека a,b,c,d,e се реални броеви за кои $a+b+c+d+e=0$ и нека $A=ab+bc+cd+de+ea$ и $B=ac+ce+eb+bd+da$. Докажи дека $2006A+B \leq 0$ или $A+2006B \leq 0$.

Решение. Од равенството $(a+b+c+d+e)^2=0$, следува:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=-2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)$$

Бидејќи левата страна на равенството е збир на ненегативни броеви, добиваме:

$$0 \leq a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=-2(A+B).$$
$$-2(A+B) \geq 0,$$
$$A+B \leq 0.$$

Следува дека

$$(2006A+B)+(A+2006B)=2007(A+B) \leq 0,$$

од што следува дека $2006A+B \leq 0$ или $A+2006B \leq 0$.

55. Нека x,y,z се реални броеви такви што $0<x,y,z<1$ и

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Докажи дека барем еден од броевите $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ е поголем од $\frac{1}{4}$.

Решение. Ќе претпоставиме спротивно, т.е. дека

$$(1-x)y<\frac{1}{4},\ (1-y)z<\frac{1}{4},\ (1-z)x<\frac{1}{4}.$$

Ако ги собереме овие неравенства, добиваме

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x<\frac{3}{4}. \qquad (*)$$

Бидејќи $x,y,z,1-x,1-y,1-z>0$, множејќи ги горните три неравенства, добиваме

$$xyz(1-x)(1-\mathrm{y})(1-\mathrm{z})<\frac{1}{64}.$$

Од равенството дадено во условот од задачата и од последното неравенство ги добиваме неравенствата

$$xyz<\frac{1}{8} \text{ и } (1-x)(1-y)(1-z)<\frac{1}{8}.$$

Ако во последното неравенство се ослободиме од загради, и направиме трансформација, се добива

$$1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)<xyz+\frac{1}{8}<\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$-(x+y+z)+(xy+yz+zx)<-\frac{3}{4}$$

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x>\frac{3}{4}.$$

Последното неравенство е во контрадикција со (*) па според тоа и нашата претпоставка не е точна. Со тоа е докажано тврдењето од задачата.

56. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Заменувајќи ги $1-a, 1-b, 1-c$ со $b+c,\ c+a,\ a+b$, соодветно на десната страна на даденото неравенство, добиваме еквивалентно неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right).$$

Со алгебарски трансформации на последното неравенство ги добиваме следниве еквивалентни неравенства

$$\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}}+2\right)+\left(\frac{c+a}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}}+2\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}}+2\right)\geq 0,$$

$$\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-\sqrt{2}\right)^2\geq 0.$$

Последното неравенство е точно, па затоа е точно почетното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако

$$\sqrt{\tfrac{b+c}{a}}-\sqrt{2}=\sqrt{\tfrac{c+a}{b}}-\sqrt{2}=\sqrt{\tfrac{a+b}{c}}-\sqrt{2}=0,$$

т.е.

$$\sqrt{\tfrac{b+c}{a}}=\sqrt{\tfrac{c+a}{b}}=\sqrt{\tfrac{a+b}{c}}=\sqrt{2}\ .$$

Од равенствата

$$b+c=2a$$
$$c+a=2b$$
$$a+b=2c$$

и равенството $a+b+c=1$ добиваме $a=b=c=\frac{1}{3}$.

57. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)\geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Решение. Ќе го искористиме равенството

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+x)\ ,$$

за $x\in\{a, b, c\}$.

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$a^3+1\geq 2\sqrt{a^3\cdot 1}=2\sqrt{a^3}$$
$$b^3+1\geq 2\sqrt{b^3\cdot 1}=2\sqrt{b^3}$$
$$c^3+1\geq 2\sqrt{c^3\cdot 1}=2\sqrt{c^3}$$

Ако последните три неравенства ги помножиме добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8\sqrt{a^3b^3c^3}=8\sqrt{(abc)^3}=8\ .$$

Сега е јасно дека

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)$$
$$=(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Равенство важи ако и само ако $a^3 = b^3 = c^3 = 1$, односно $a = b = c = 1$.

58. Докажи дека

$$(a + 2b + \tfrac{2}{a+1})(b + 2a + \tfrac{2}{b+1}) \geq 16,$$

за било кои позитивни броеви a и b такви што $ab \geq 1$.

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два позитивни реални броја имаме

$$\tfrac{a+1}{2} + \tfrac{2}{a+1} \geq 2\sqrt{\tfrac{a+1}{2}\tfrac{2}{a+1}} \geq 2,$$

од каде што добиваме

$$a + 2b + \tfrac{2}{a+1} \geq \tfrac{a+3}{2} + 2b = \tfrac{a+4b+3}{2}.$$

На потполно аналоген начин, од истите причини како и претходно имаме

$$b + 2a + \tfrac{2}{b+1} \geq 2a + \tfrac{b+3}{2} = \tfrac{b+4a+3}{2}.$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $ab \geq 1$ имаме

$$\tfrac{a+4b+3}{2} \cdot \tfrac{b+4a+3}{2} \geq \tfrac{1}{4}(\sqrt{ab} + 4\sqrt{ab} + 3)^2 = \tfrac{64}{4} = 16,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Бидејќи $ab \geq 1$, и од тоа што a и b се позитивни реални броеви, имаме

$$a + b \geq a + \tfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\tfrac{1}{a}} = 2.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина меѓу четири позитивни реални броја имаме

$$a + 2b + \tfrac{2}{a+1} = b + (a+b) + \tfrac{2}{a+1} \geq b + 2 + \tfrac{2}{a+1} = (b+1) + \tfrac{2}{a+1} + 1$$

$$= \tfrac{b+1}{2} + \tfrac{b+1}{2} + \tfrac{2}{a+1} + 1 = 4\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.$$

Потполно аналогно, ако a и b си ги сменат местата во претходното неравенство добиваме

$$b + 2a + \tfrac{2}{b+1} \geq 4\sqrt[4]{\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}.$$

Од добиените неравенства и со уште една примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу два реални броја, заедно со неравенството $ab \geq 1$, добиваме

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1}) \geq 16\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}} = 16\sqrt[4]{\frac{b+1}{2}\frac{a+1}{2}}$$

$$\geq 16\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{a}}{2}\frac{2\sqrt{b}}{2}} = 16\sqrt[8]{ab} \geq 16.$$

Трет начин. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1}) = ((a+b)+b+\tfrac{2}{a+1})((a+b)+a+\tfrac{2}{b+1})$$

$$\geq (a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{4}{a+b+2},$$

па затоа

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq a+b+1+\frac{4}{a+b+2} = \frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4 \geq 4$$

со што е завршен доказот.

59. Докажи:

а) за секој $t \in [0, \tfrac{1}{3}]$ важи

$$\sqrt{6t^2+7t+1} \geq 3t+1,$$

б) за секои $x, y \in [0, \tfrac{1}{3}]$ важи

$$\frac{x}{\sqrt{6y^2+7y+1}} + \frac{y}{\sqrt{6x^2+7x+1}} \leq \frac{1}{3}.$$

Решение. а) Ако $t \in [0, \tfrac{1}{3}]$ двете страни на неравенството се ненегативни, па затоа:

$$\tfrac{1}{3} \geq t$$
$$1 \geq 3t$$
$$t \geq 3t^2$$
$$6t^2+7t+1 \geq 9t^2+6t+1$$
$$6t^2+7t+1 \geq (3t+1)^2$$
$$\sqrt{6t^2+7t+1} \geq 3t+1.$$

б) Ако $x=0$ или $y=0$, тогаш даденото неравенство оќигледно важи. Нека $x,y\in(0,\frac{1}{3}]$. Ако го искористиме неравенството под а) и очигледните неравенства

$$3y+1\geq 3y+3x>0 \text{ и } 3x+1\geq 3x+3y,$$

кои се еквивалентни со неравенствата

$$\frac{x}{3y+1}\leq\frac{x}{3x+3y} \text{ и } \frac{y}{3x+1}\leq\frac{y}{3x+3y}$$

добиваме

$$\frac{x}{\sqrt{6y^2+7y+1}}+\frac{y}{\sqrt{6x^2+7x+1}}\leq\frac{x}{3y+1}+\frac{y}{3x+1}\leq\frac{x}{3x+3y}+\frac{y}{3x+3y}=\frac{x+y}{3(x+y)}=\frac{1}{3}.$$

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Да се определат сите природни броеви n за кои броевите $n+2$ и n^2+n+1 се точни кубови на природни броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека n е природен број за кој $n+2$ и n^2+n+1 се точни кубови. Тогаш јасно бројот $(n+2)(n^2+n+1)$ е исто така точен куб на природен број. Но

$$(n+2)(n^2+n+1)=n^3+3n^2+3n+2=(n+1)^3+1,$$

и јасно не може да биде точен куб. Значи не постои природен број n за кој се исполнети условите на задачата.

2. Дали постои природен број кај кој: првите 2009 цифри се тројки, наредните 2009 цифри се двојки, па наредните 2009 се единици, а останатите нули и е точен куб на природен број?

Решение. Дадениот број е од облик

$$n=\underbrace{33...3}_{2009}\underbrace{22...2}_{2009}\underbrace{11...1}_{2009}000...\,.$$

Нека $n=k^3$, каде $k\in\mathbb{N}$. Збирот на цифри на дадениот број е $6\cdot 2009=12054$. Според тоа $3\,|\,n$, од каде следува дека $3\,|\,k$, и $3^3\,|\,k^3=n$. Тоа не е можно бидејќи збирот на цифри на n не е делив со 9. Значи таков број не постои.

3. Определи ја цифрата на илјадите во бројот

$$2\cdot 7^{2009}+6\cdot 7^{2008}+3\cdot 7^{2007}-7^{2006}.$$

Решение. За бројот

$$n=2\cdot 7^{2009}+6\cdot 7^{2008}+3\cdot 7^{2007}-7^{2006}$$

имаме

$$\begin{aligned}n&=7^{2006}(2\cdot 7^3+6\cdot 7^2+3\cdot 7-1)\\&=7^{2004}\cdot 7^2\cdot 1000\\&=(7^4)^{501}\cdot 49\cdot 1000\\&=2401^{501}\cdot 49\cdot 1000.\end{aligned}$$

Бидејќи 2401^{501} за цифра на единици ја има цифрата 1, следува дека $2401^{501}\cdot 49$ завршува на цифрата 9, па последните четири цифри на n се 9000. Значи цифрата на илјадите на бројот n е 9.

4. Определи го бројот на осумцифрените природни броеви кои се деливи со 2014 и завршуваат на 2014.

Решение. Од условот на задачата следува дека броевите со саканите својства може да се запишат во видот $\overline{abcd}\cdot 10000+2014$, каде $\overline{abcd}$ е четирицифрен број. Бидејќи $2014=2\cdot 1007$ и бројот 1007 не е делив ниту со 2 и ниту со 5, а 10000 е делив со 2, заклучуваме дека потребен и доволен услов за бараните броеви е да се деливи со 1007. Значи, задачата се сведува на наоѓање на бројот на четирицифрените броеви кои се деливи со 1007. Бидејќи $9\cdot 1007=9063$, $10\cdot 1007=10070$ е веќе петцифрен број, заклучуваме дека постојат 9 броеви со саканите својства.

5. Нека *A* и *B* се два природни броја кои се напишани со исти цифри (секоја цифра се појавува ист број пати и во едниот и во другиот број, но не мора да значи дека е на истото место). Ако $A+B=10^{10}$, докажи дека бројот *A* е делив со 10.

Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека броевите *A* и *B* се десетцифрени броеви. Нека $A=\overline{a_{10}a_9a_8\dots a_2a_1}$ и $B=\overline{b_{10}b_9b_8\dots b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$ следува дека постои некој $i\in\{1,2,...,10\}$ таков што $a_1+b_1=0$, ..., $a_{i-1}+b_{i-1}=0$, $a_i+b_i=10$, $a_{i+1}+b_{i+1}=9$, ..., $a_{10}+b_{10}=9$. Бидејќи цифрите на броевите *A* и *B* се еднакви, собирајќи ги горните равенства, добиваме

$$2(a_1+a_2+\dots+a_{10})=10+(10-i)9,$$

при што искористивме дека

$$a_1+a_2+\dots+a_{10}=b_1+b_2\dots+b_{10}.$$

Од тоа што $2(a_1+a_2+\dots+a_{10})$ е парен број, следува дека и $10-i$ е парен број, т.е. $i\neq 1$. Значи $a_1+b_1=0$, од каде што следува дека $a_1=b_1=0$. Според тоа бројот *A* (а исто така и бројот *B*) е делив со 10.

6. Определи го бројот на природните броеви n за кои бројот n^2+5n е четирицифрен и е делив со 6.

Решение. Од $29^2+5\cdot 29=986$ и $30^2+5\cdot 30=1050$ следува $n\geq 30$. Аналогно, од $97^2+5\cdot 97=9894$ и $98^2+5\cdot 98=10094$ следува $n\leq 97$. Според тоа, за броевите n со саканите својства треба да важи $n\in[30,97]$. Броевите n може да се запишат во видот

$$6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4 \text{ или } 6k+5.$$

Го разгледуваме производот $n(n+5)$. Лесно се гледа дека кога n е од видот $6k+2$ или $6k+5$, тогаш тогаш 6 не е делител на $n(n+5)$. Според тоа, n е од видот $6k, 6k+1, 6k+3$ или $6k+4$. Броевите 96 и97 ги задоволуваат условите на задачата. Од друга страна, во интервалот $[30,95]$ има 66 природни броеви и 44 од нив се од видот $6k$, $6k+1$, $6k+3$ или $6k+4$. Според тоа, бројот на природните броеви за кои n^2+5n е четирицифрен и е делив со 6 е $44+2=46$.

7. Дропките $\frac{\overline{3a5b}}{36}$ и $\frac{\overline{4c7d}}{45}$ се природни броеви, каде a,b,c,d се цифри. Подреди ги по големина сите вакви броеви.

Решение. Дропките $\frac{\overline{3a5b}}{36}$ и $\frac{\overline{4c7d}}{45}$ се природни броеви ако $\overline{3a5b}$ е делив со 36 (значи со 4 и 9) и $\overline{4c7d}$ е делив со 45 (значи со 5 и 9). Во првиот случај тоа е можно ако последната цифра е 2 или 6, па поради деливост со 9 можни броеви се: $\frac{3456}{36}=96$ и $\frac{3852}{36}=107$. Во вториот случај последната цифра е 0 или 5, па поради деливоста со 9 можни се случаите: $\frac{4275}{45}=95$ и $\frac{4770}{45}=106$. Значи, подредени по големина броевите се $\frac{4275}{45}<\frac{3456}{36}<\frac{4770}{45}<\frac{3852}{36}$

8. Дали збирот $1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$ е делив со 5?

Решение. Најнапред да забележиме дека $1^{2008}=1$. Бидејќи

$$2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32, ...,$$

заклучуваме дека степените на бројот 2 завршуваат на една од цифрите 2, 4, 8 и 6 и по тој ред се повторуваат во зависност од тоа дали степеновиот показател при делење со 4 дава остаток 1, 2, 3 или е делив со 4, соодветно. Од тоа што 2008 е делив со 4, имаме дека 2^{2008} завршува на цифрата 6. Аналогно, 3^{2008} завршува на цифрата 1, 4^{2008} завршува на цифрата 6, 5^{2008} завршува на цифрата 5 и 6^{2008} завршува на цифрата 6. Бидејќи $1+6+1+6+5+6=25$, односно завршува на цифрата 5, следува дека збирот

$$1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$$

завршува на цифата 5 т.е. е делив со 5.

9. Природниот број n при делење со 2 има остаток a, при делење со 4 има остаток b, а при делење со 6 има остаток c. Ако $a+b+c=9$, да се одреди остатокот при делењето на бројот n со 12.

Решение. Бројот n може да се запише во облик $n=2p+a$, $0\le a\le 1$, $n=4q+b$, $0\le b\le 3$ и $n=6r+c$, $0\le a\le 1$. Оттука следува дека $0\le a+b+c\le 9$. Бидејќи $a+b+c=9$ следува $a=1$, $b=3$ и $c=5$. Тогаш $n+1=2p+2=4q+4=6r+6$. Значи $n+1$ е делив со 2, 4 и 6, па е делив и со 12. Значи $n+1=12k$, односно $n=12k-1$. Следува остатокот при делењето на бројот n со 12 е 11.

10. Бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Докажи дека и бројот $\overline{bca}+\overline{cab}$ е делив со 37.

Решение. *Прв начин.* За трите броја запишани со истите цифри како дадениот важи

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}&=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10ab\\&=111a+111b+111c=37(3a+3b+3c)\end{aligned},$$

односно

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=37k\,.$$

Но од условот имаме дека $\overline{abc}=37m$. Тогаш добиваме

$$\overline{bca}+\overline{cab}=37(k-m)\,,$$

што и требаше да се докаже .

Втор начин. Збирот $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ може да се запише во облик

$$\begin{aligned}\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}&=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b\\&=111a+111b+111c\\&=111(a+b+c)\\&=3\cdot 37\cdot(a+b+c)\end{aligned}$$

Значи, $37\,|\,\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$. Но, тогаш

$$37\,|\,\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}-\overline{abc}=\overline{bca}+\overline{cab}\,.$$

11. Докажи дека збирот на шест последователни природни броеви, од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, а не е делив со 42. Определи шест такви броеви чиј збир е четирицифрен број и претставува квадрат на некој природен број.

Решение. Ниту еден од шесте последователни природни броеви не е делив со 7, па тие се од облик $7n+1, 7n+3, 7n+3, 7n+4, 7n+5$ и $7n+6$, $n \in \mathbb{N}_0$. Нивниот збир е $S = 42n + 21 = 21(2n+1)$, од каде што следува дека S е делив со 21 но не е делив со 42 (при делење со 42 се добива остаток 21). За да биде S квадрат на некој природен број мора да важи $2n+1 = 21k^2$ за некој непарен број k, а за да биде S четирицифрен број мора да важи $2 < k^2 < 23$. Ова е можно само ако $k^2 = 9$, од каде што се добива дека $2n+1 = 21k^2 = 189$ и $n = 94$. Бараните броеви се 659, 660, 661, 662, 663 и 664.

12. Докажи дека бројот $\underbrace{666...6}_{2013-\text{пати}}$ не е точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{666...6}_{2013-\text{пати}} = 6 \cdot \underbrace{1111...1}_{2013-\text{пати}},$$

па според тоа тој е делив со 2. Ако овој број е точен квадрат, тогаш тој мора да е делив со 4. Но, $\underbrace{111....1}_{2013\text{-пати}}$ е непарен број, а 6 не е делив со 4, па затоа $\underbrace{666....6}_{2013\text{-пати}}$ не е делив со 4, што значи дека не е точен квадрат.

13. Ако број од облик 2^k е најмалку четирицифрен, докажи дека неговите последни четири цифри не може да се исти!

Решение. Бидејќи бројот 2^k е најмалку четирицифрен $k \geq 10$. Нека претпоставиме дека неговите последни четири цифри се исти. Тогаш

$$2^k = 10^4 X + \overline{xxxx}.$$

Од $16 | 10^4$ и $16 | 2^k$, следува дека бројот $\overline{xxxx} = x \cdot 1111$ е делив со 16, што не е можно. Според тоа, ако број од облик 2^k е најмалку четирицифрен, тој не може да има исти последни четири цифри.

14. Докажи дека, за секој непарен број x изразот $x^3 + 3x^2 - x - 3$ е делив со 48.

Решение. Изразот x^3+3x^2-x-3 можеме да го запишеме како

$$x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x-1)(x+1)\,.$$

Бидејќи x е непарен, имаме $x=2k-1, k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$x^3+3x^2-x-3=(2k-1+3)(2k-1-1)(2k-1+1)=8(k-1)k(k+1)\,.$$

Јасно, изразоте е делив со 8, а $(k-1)k(k+1)$ е делив со 6 како производ на три последователни броја. Значи изразот е делив со 48 за секој непарен природен број x.

15. Докажи дека за секој природен број н изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}&=\frac{1}{6}n(n^2+3n-4)=\frac{1}{6}n(n^2+3n+2-6)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-n\end{aligned},$$

дадениот број е цел број како разлика од два цели броеви, затоа што $n(n+1)(n+2)$ е производ од три последователни броеви и е делив со 6.

16. Ако природниот број x не е делив со 5, тогаш бројот x^4-1 е делив со 5. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2-4+5)\\&=(x-1)(x+1)((x-2)(x+2)+5)\\&=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+5(x-1)(x+1).\end{aligned}$$

Но, x не е делив со 5 и добиваме:

- ако $x=5k+1$, тогаш $x-1$ е делив со 5
- ако $x=5k+2$, тогаш $x-2$ е делив со 5
- ако $x=5k+3$, тогаш $x+2$ е делив со 5 и
- ако $x=5k+4$, тогаш $x+1$ е делив со 5

па оттука следува дека x^4-1 е делив со 5.

17. Нека секој од броевите $x_1,x_2,...,x_n$ е еднаков на 1 или -1 и уште важи:

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+...+x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1+x_{n-1}x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3=0\,.$$

Докажи дека n е делив со 4.

Решение. Нека

$$y_k = x_k x_{k+1} x_{k+2} x_{k+3}, \text{ за } k = 1, 2, ..., n-3,$$

$$y_{n-2} = x_{n-2} x_{n-1} x_n x_1, \ y_{n-1} = x_{n-1} x_n x_1 x_2, \ y_n = x_n x_1 x_2 x_3.$$

Сите y_k се 1 или -1. Тогаш од условот на задачата добиваме $y_1 + ... + y_n = 0$. Па мора $n = 2k$ и уште повеќе мора точно k од броевите $y_1, ..., y_n$ да се еднакви на 1 и останатите k да се еднакви на -1. Но тогаш $y_1 ... y_n = (-1)^k$. Од друга страна да забележеме дека $y_1 ... y_n = x_1^4 x_2^4 ... x_n^4$, од каде добиваме дека мора $y_1 ... y_n = 1$, па $k = 2t$, односно имаме $n = 4t$.

18. За природниот број n со $S(n)$ го означуваме збирот на неговите цифри. Дали постои природен број n за кој што важи

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2011.$$

Решение. Бројот n и $S(n)$ имаат ист остаток при делење со 3 и 9. Имено ако , $n = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1 a_\circ}$ тогаш

$$n = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1 a_0} = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + ... + 10 a_1 + a_0$$
$$= [(10^m - 1) a_m + (10^{m-1} - 1) a_{m-1} + ... + (10-1) a_1] + [a_m + a_{m-1} + ... + a_0]$$

Секој од изразите во малите загради е делив со 9 , па n и $S(n)$ имаат ист остаток при делење со 3 и 9. Броевите $n, S(n), S(S(n))$ имаат ист остаток при делење со 3. Според тоа, $n + S(n) + S(S(n))$ е делив со три додека 2011 не е. Последното значи дека не постои природен број n за кој што важи

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2011.$$

19. Определи го најмалиот природен број n за кој бројот $2018^3 - 6054n$ е делив со 2015.

Решение. Даденот израз ќе го запишеме во видот

$$2018^3 - 6054n = (2015+3)^3 - 3(2015+3)n$$
$$= 2015^3 + 3 \cdot 2015^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2015 \cdot 3^2 + 27 - 3 \cdot 2015n - 9n.$$

Според тоа, дадениот израз е делив со 2015 ако и само ако изразот $27 - 9n$ е делив со 2015. Најмалиот природен број n за кој овој израз е делив со 2015 е $n = 3$.

20. Определи ги сите цели броеви m за кои m^3+m^2+7 е делив со m^2-m+1.

Решение. Од

$$m^3+m^2+7=(m^2-m+1)(m+2)+(m+5)$$

следува дека m^2-m+1 е делител на $m+5$. Очигледно едно решение е $m=-5$. Нека $m\neq -5$. Тогаш

$$|m^2-m+1|\leq |m+5|.$$

Од $m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ следува дека $m^2-m+1\leq |m+5|$. Имаме две можности: $m^2-m+1\leq m+5$ или $m^2-m+1\leq -m-5$. Случајот $m^2-m+1\leq -m-5$, т.е. $m^2+6\leq 0$, не е можен. Од $m^2-m+1\leq m+5$ следува $m^2-2m-4\leq 0$ односно $(m-1)^2\leq 5$. Последното неравенство е задоволено за $m\in\{-1,0,1,2,3\}$. Со проверка се утврдува дека само $m=0$ и $m=1$ го задоволуваат почетниот услов.

Конечно $m\in\{-5,0,1\}$.

21. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се позитивни цели броеви.

Решение. За дадени природни броеви a и b бројот a^3b-1 можеме да го запишеме во облик

$$a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)\ .$$

Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $a+1\,|\,a^3b-1$ и $a+1\,|\,b(a^3+1)$, па затоа $a+1\,|\,b+1$.

Аналогно, b^3a+1 можеме да го запишеме во облик

$$b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)\ .$$

Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1\,|\,b^3a+1$ и $b-1\,|\,a(b^3-1)$, па затоа $b-1\,|\,a+1$.

Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1\,|\,b+1$. Од равенството

$$b+1-(b-1)=2\ ,$$

следува $b-1\,|\,2$, па имаме две можности.

Случај 1. $b=2$. Тогаш $a+1|b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

Случај 2. $b=3$. Тогаш $a+1|b+1=4$, па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

Конечно бараните подредени парови се $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

22. Определи ги сите цели броеви n, $n\geq 1$ такви што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.

Решение. Одговор: $n=0$ или $n=3$.

Јасно, $n2^{n+1}+1$ е непарен број. Ако тој е точен квадрат, тогаш тој е од облик

$$n2^{n+1}+1=(2x+1)^2,$$

за некој природен број $x\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$n2^{n+1}=4x^2+4x, \text{ т.е. } n2^{n-1}=x(x+1).$$

Броевите x и $x+1$ се заемно прости. Значи, точно еден од нив е делив со 2^{n-1}. Според тоа, другиот од нив е најмногу n. Значи,

$$2^{n-1}\leq n+1.$$

Не е тешко да се види дека за $n\geq 4$ последното неравенство не е точно (на пример со принципот на математичка индукција). Значи, $n\leq 3$. Со едноставна проверка се добива дека единствени решенија се $n=0$ и $n=3$. Навистина,

$$\begin{aligned} n2^{n+1}+1&=0\cdot 2^{0+1}+1=1^2 \\ n2^{n+1}+1&=3\cdot 2^{3+1}+1=7^2 \end{aligned}.$$

23. Дали постои природен број n, таков што бројот $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

Решение. Имаме $\mathrm{NZD}(n,n+1)=\mathrm{NZD}(n+2,n+1)=1$, па затоа

$$\mathrm{NZD}(n(n+2),n+1)=1.$$

Според тоа, ако $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број, тогаш $n(n+2)$ треба да е квадрат на природен број. Но,

$$n(n+2)=n^2+2n=n^2+2n+1-1=(n+1)^2-1,$$

од што следува дека за ниту еден природен број n бројот $n(n+1)(n+2)$ не може да биде квадрат на природен број.

24. Коцка со должина на раб 2015 е поделена на единечни коцки. Ги отстрануваме сите единечни коцки низ кои минуваат просторните дијагонали. Дали бројот на преостанатите единечни коцки е делив со:
А) 2017, б) 2016, в) 2015, г) 2014, д) 2013.

Решение. Коцката содржи 2015^3 единечни коцки. Секоја од четирите просторни дијагонали минува низ 2015 единечни коцки, при што една единечна коцка е заедничка за сите дијагонали (Зошто?). Според тоа, бројот на отстранетите единечни коцки е $4\cdot 2015-3$, а бројот на преостанатите единечни коцки е:

$$A=2015^3-(4\cdot 2015-3)=2015^3-4\cdot 2015+3\,.$$

Имаме:

$$\begin{aligned}A&=2015^3-3\cdot 2015-2015+3\\&=2015\cdot(2015^2-1)-3\cdot(2015-1)\\&=2015\cdot 2016\cdot 2014-3\cdot 2014\\&=2014\cdot(2015\cdot 2016-3).\end{aligned}$$

Очигледно изразот во заградите не е делив со 2015 и 2016. Понатаму, од

$$2015\cdot 2016-3=(2013+2)\cdot(2013+3)-3=2013^2+5\cdot 2013+3$$

следува дека $2015\cdot 2016-3$ не е делив со 2013, а од

$$2015\cdot 2016-3=(2017-2)\cdot(2017-1)-3=2017^2-5\cdot 2017-1$$

следува дека $2015\cdot 2016-3$ не е делив со 2017. Сега лесно се добива дека од дадените броеви A е делив само со 2014, т.е. бројот на преостанатите единечнио коцки е делив со 2014, а не е делив со 2013, 2015, 2016 и 2017.

II.2. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

25. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^2+6n+31$ е делив со 121.

Решение. Имаме $n^2+6n+31=(n+3)^2+22$. Нека претпоставиме дека постои n таков што

$$(n+3)^2+22=121k$$

за некој $k\in\mathbb{N}$. Оттука следува

$$(n+3)^2 = 11(11k-2),$$

што значи дека бројот $11(11k-2)$ треба да е точен квадрат. Но 11 е прост број, па затоа треба да важи $11k-2=11m^2$ за некој $m\in\mathbb{N}$, од што следува дека $11|2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои природен број n за кои бројот $n^2+6n+31$ е делив со 121.

26. Докажи дека $2n$ е делител на $(n-1)!$ за секој сложен број $n>4$.

Решение. Ќе разгледаме три случаи.

Случај 1. n е производ на два различни непарни делители поголеми од 1. Секој од непарните делители заедно се бројот 2 се различни меѓу себе и се наоѓаат меѓу броевите $2,3,...,n-1$. Според тоа, и нивниот производ $2n$ е делител на $(n-1)!$.

Случај 2. n е квадрат на непарен број $m>1$. Во овој случај меѓу броевите $2,3,...,n-1$ се наоѓаат броевите m и $2m$, па според тоа $2m^2\,|\,(n-1)!$, т.е. $2n\,|\,(n-1)!$.

Случај 3. n е од облик $2^k m$, каде m е непарен број и $k\geq 1$. Бројот m се содржи меѓу броевите $2,3,...,n-1$. Останува да се докаже дека $(n-1)!$ е делив со 2^{k+1}. Најлош случај е кога $m=1$ и $n=2^k$, $k>2$. Меѓу броевите $2,3,...,n-1$ има $\frac{n}{2}-1=2^{k-1}-1$ парни. За $k>3$, заради неравенството

$$2^{k-1}-1>k+1,$$

добиваме дека производот $(n-1)!$ е делив со 2^{k+1}. За $k=3$ имаме $2^{3+1}=2^4\,|\,7!$ што се проверува непосредно. Значи, за било кое $n=2^k m$, $m\neq 2s$ имаме $2n\,|\,(n-1)!$.

Други случаи нема, со што е докажано тврдењето од задачата.

27. Нека p, $p-10$ и $p+10$ се прости броеви. Докажи дека $p-2$ е исто така прост број.

Решение. Нека p е прост број кој ги исполнува условите од задачата. Тогаш од равенствата

$$p-10=p-1-9,$$

$$p+10=p+1+9,$$

забележуваме дека остатокот од делењето со 3 на $p-10$ е ист како остатокот од делењето на $p-1$ со 3, а остатокот од делењето со 3 на $p+10$ е ист остатокот од делењето на $p+1$ со 3.

Еден од броевите $p-1, p, p+1$ е делив со 3 (три последователни броеви). Според тоа, еден од броевите $p-10, p, p+10$ е делив со 3.

Но сега, од условот на задачата имаме $p-10=3$, односно $p=13$. Значи, $p-2=11$ е исто така прост број.

28. Определи ги сите прости броеви n за кој бројот $n^2-37n+314$ е прост.

Решение. Бројот $n^2-37n+314$ е парен за секој природен број n. Затоа $n^2-37n+314$ е прост ако и само ако $n^2-37n+314=2$. Според тоа,

$$\begin{aligned}&n^2-37n+312=0\\&n^2-37n+13\cdot 24=0\\&n^2-13n-24n+13\cdot 24=0\\&n(n-13)-24(n-13)=0\\&(n-13)(n-24)=0,\end{aligned}$$

па затоа $n-13=0$ или $n-24=0$, т.е. $n=13$ или $n=24$. Бидејќи од двете решенија само 13 е прост број заклучуваме дека решение на задачата е $n=13$.

29. Определи ги сите прости броеви од обликот $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}$, каде n е природен број.

Решение. Го користиме равенството: $\overbrace{11...1}^{k}=\frac{10^k-1}{9}$. Добиваме

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{10^{2n}-1}{11\cdot 9}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}.$$

За $n=1$ имаме $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{11}{11}=1$ што не е прост број.

За $n=2$ имаме

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^2-1)(10^2+1)}{11\cdot 9}=\frac{101\cdot 99}{99}=101,$$

и тоа е прост број.

Ќе докажеме дека за $n>2$, бројот $\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}$ е сложен. Разгледуваме два случаи: n е парен и n е непарен број.

Случај 1. Нека n е парен број. Тогаш 10^{2k} има остаток 1 при делење со 9 и 11. Бидејќи $\text{NZD}(9,11)=1$ добиваме дека 10^n-1 е делив со 99 и бројот

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}=\frac{(10^n-1)}{99}(10^n+1)$$

е производ на два природни броеви поголеми од 1.

Случај 2. Нека n е непарен. Тогаш 10^{2k+1} има остаток -1 при делење со 11. Бројот $10^{2k+1}+1$ е делив со 11, а $10^{2k+1}-1$ е делив со 9. Бројот

$$\frac{\overbrace{11...1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot 9}=\frac{10^{2k+1}-1}{9}\frac{10^{2k+1}+1}{11}$$

е производ на два природни броеви поголеми од 1 па бројот е сложен.

30. Определи го бројот на природните броеви кои се деливи со 2013 и кои имаат точно 2013 делители, вклучувајќи ги 1 и самиот број.

Решение. Ако $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е каноничната репрезентација на бројот n, тогаш бројот на делителите на n, вклучувајќи ги 1 и самиот n, е еднаков на $(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)$. Понатаму, $2013=3\cdot 11\cdot 61$ и броевите 3, 11 и 61 се прости, па затоа треба да важи

$$(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)=3\cdot 11\cdot 61,$$

од каде добиваме дека $k=3$, Значи, единствени прости делители на n се 3, 11 и 61, а за нивните степени во каноничното разложување важи

$$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)=3\cdot 11\cdot 61.$$

Од последното равенство следува дека броевите a_1,a_2,a_3 се во некој редослед еднакви на броевите 2, 10, 60. Според тоа, сите можности за бројот n се:

$3^2 11^{10} 61^{60},\ 3^{10} 11^{60} 61^2,\ 3^{60} 11^2 61^{10},\ 3^2 11^{60} 61^{10},\ 3^{60} 11^{10} 61^2,\ 3^{10} 11^2 61^{60}.$

II.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

31. Колку најмалку јаболка треба да купи Елена за на Андреј да му даде една третина од јаболката и уште третина јаболко, на Горјан да му даде една третина од преостантите јаболка и уште третина јаболко, а за неа да остане цел број јаболка?

Решение. Нека x е бројот на јаболката кои Елена треба да ги распредели, а y е бројот на јаболката кои остануваат за неа. Од условот на задачата следува дека Андреј добива $\frac{x}{3}+\frac{1}{3}=\frac{x+1}{3}$ јаболка. Остануваат $x-\frac{x+1}{3}=\frac{2x-1}{3}$ јаболка. Значи, Горјан добива $\frac{2x-1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{2x+2}{9}$ јаболка. Според тоа, $\frac{x+1}{3}+\frac{2x+2}{9}+y=x$, па затоа $9y+5=4x$. Во множеството природни броеви најмалото решение на последната Диофантова равенка е $x=8, y=3$. Последното значи дека Елена треба да купи 8 јаболка.

32. Нека a и b се заемно прости природни броеви. Докажи дека равенката $ax+by=ab$ нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Да претпоставиме дека равенката $ax+by=ab$ има решение во множеството природни бреови. Равенката можеме да ја запишеме како $a(b-x)=by$. Бидејќи a и b се заемно прости, a е делител на y, односно $y=ka$. Аналогно, b е делител на x, па $x=mb$. Ако замениме во почетната равенка, добиваме $amb+bka=ab$, од каде $m+k=1$, што не може да биде точно за природни броеви m и k.

33. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})=5.$$

Решение. Ако $x\geq 3$ и $y\geq 3$, тогаш $x+\frac{1}{x}>3$ и $y+\frac{1}{y}>3$, па затоа $(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})>9$. Според тоа, $x\leq 2$ или $y\leq 2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x\leq 2$. За $x=1$, добиваме $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$, па затоа $y<\frac{5}{2}$, т.е. $y\leq 2$. Со непосредна проверка добиваме дека во овој случај решение е $y=2$. Ако $x=2$, тогаш $y+\frac{1}{y}=2$, од каде добиваме $y=1$.

Според тоа, решенија на дадената равенка се $x=1, y=2$ и $x=2, y=1$.

34. Определи ги сите парови цели броеви x и y за кои важи

$$xy-7x-y=3.$$

Решение. Равенката $xy-7x-y=3$ може да се запише како

$$xy-y=3+7x,$$

односно

$$y(x-1)=7x+3.$$

За $x=1$ ја добиваме равенка $y\cdot 0=10$ која нема решенија.

За $x\neq 1$, имаме $y=\frac{7x+3}{x-1}=7+\frac{10}{x-1}$. Сега y е цел број ако $\frac{10}{x-1}$ е цел број, т.е. $x-1\in\{1,-1,2,-2,5,-5,10,-10\}$, од каде добиваме дека $x\in\{2,0,3,-1,-4,6,11,-9\}$. Значи целобројни решенија на равенката се:

$$(2,17),\ (0,-3),\ (3,12),\ (-1,2),\ (6,9),\ (-4,5),\ (11,8),\ (-9,6).$$

35. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$mn-3m-n=2017.$$

Решение. Ревнката $mn-3m-n=2017$ е еквивалентна на равенката $(m-1)(n-3)=2017$. Бидејќи 2017 е прост број, од последната равенка во множеството цели броеви следуваат состемите

$$\begin{cases} m-1=1 \\ n-3=2017 \end{cases} \quad \begin{cases} m-1=-1 \\ n-3=-2017 \end{cases} \quad \begin{cases} m-1=2017 \\ n-3=1 \end{cases} \quad \begin{cases} m-1=-2017 \\ n-3=-1 \end{cases}$$

чии решенија се

$$m=2, n=2020;\ m=0, n=-2014;\ m=2018, n=4;\ m=-2016, n=2$$

кои се решенија на пошетната равенка.

36. Определи ги сите тројки (x,y,z) од природни броеви такви што

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=243.$$

Решение. Додаваме +1 од двете страни на даденото равенство па добиваме

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=244,$$

односно

$$xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+z+1=244,$$

т.е.

$$(z+1)(xy+x+y+1)=244,$$

од каде

$$(x+1)(y+1)(z+1)=244.$$

Сега од $244=2\cdot 2\cdot 61$ добиваме дека $(x+1,y+1,z+1)$ е некоја од тројките $(2,2,61)$, $(2,61,2)$, $(61,2,2)$.

Значи бараните тројки се $(1,1,60)$, $(1,60,1)$, $(60,1,1)$.

37. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$3p^2+3p=166+q.$$

Решение. Имаме $3p^2+3p=166+q$ т.е $3p(p+1)=166+q$. Јасно $p(p+1)$ е парен број т.е $2|p(p+1)$ и бидејќи $2|166$ следува $2|q$. Но од условот q е прост, па добиваме дека $q=2$. Сега лесно се добива $p(p+1)=56$, од каде $p=7$.

38. Во множеството на ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a3^b+9=c^2.$$

Решение. Равенката ќе ја напишеме во облик $2^a\cdot 3^b=(c-3)(c+3)$. Ако $b=0$, лесно се наоѓа дека $a=4$ и $b=5$. Ако $b>0$, добивме дека $3|c^2$, т.е. $9|c^2$ и $9|2^a\cdot 3^b$ од каде што очигледно е дека $b>1$. Нека $c=3y$. Со замена во равенката добиваме

$$(y-1)(y+1)=2^a\cdot 3^{b-2}.$$

Ако $a=0$, лесно се заклучува дека $b=3$ и $c=6$. Ако $a\ge 1$, тогаш $y-1$ и $y+1$ се парни броеви, па според тоа $4|2^a\cdot 3^{b-2}$, т.е. $a\ge 2$. Значи, во суштина ја решаваме равенката

$$\frac{y-1}{2}\frac{y+1}{2}=2^{a-2}3^{b-2}.$$

Но, $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ се последователни броеви, па според тоа тие се заемно прости, од каде добиваме дека тие се степени на броевите 2 и 3. Нека $m=a-2$ и $n=b-2$. Останува да разгледаме два случаи.

Случај 1. $\frac{y-1}{2}=3^n$, $\frac{y+1}{2}=2^m$. Тогаш $2^m-3^n=1$ и јасно е дека $m>n$. Ако $n=0$, добиваме $m=1$ и $a=3,b=2$ и $c=9$. Ако $n>0$, разгледувајќи ја претходната равенка по модул 3 заклучуваме дека m е парен број. Нека $m=2t$. Користејќи разлика на два квадрати добиваме $(2^t-1)(2^t+1)=3^n$. Но, $(2^t+1)-(2^t-1)=2$, од каде добиваме

$2^t-1=1$ и $2^t+1=3$. Од последните две равенки имаме $t=1$, $m=2, n=1$, т.е. $a=4, b=3, c=21$.

Случај 2. $\frac{y-1}{2}=2^m$, $\frac{y+1}{2}=3^n$. Тогаш $3^n-2^m=1$, од каде е јасно дека $m>0$. Ако $m=1$, добиваме $n=1$ и во овој случај решение на почетната равенка е $a=3, b=3$ и $c=15$. Ако пак $m>1$, разгледувајќи ја последната равенка по модул 4 заклучуваме дека n е парен број. Нека $n=2t$. Повторно користејќи разлика на два квадрати добиваме $(3^t-1)(3^t+1)=2^m$. Од равенството $(3^t+1)-(3^t-1)=2$, јасно е дека $3^t-1=2$ и $3^t+1=2^{b-1}$. Според тоа, $t=1, n=2, m=3$ и решение на почетната равенка е $a=4, b=3$ и $c=51$.

Конечно, решение на почетната равенка е

$$(a,b,c)\in\{(4,0,5),(0,3,6),(3,2,9),(4,3,21),(3,3,15),(5,4,51)\}$$

39. Најди ги сите прости броеви p и q кои ја задоволуваат равенката

$$(p+q)^p=(q-p)^{2q-1}.$$

Решение. Не може $q-p=1$, бидејќи $(q+p)^p>1$, за секои прости броеви p и q.

Нека r е прост делител на $q-p$, тогаш r е делител и на $q+p$, па тој е делител на $2q=(q+p)+(q-p)$ и на $2p=(q+p)-(q-p)$. Следува дека $p=q=r$ или $r=2$. Случајот $p=q$ не е можен, бидејќи десната страна ќе биде нула, а левата не. Според ова мора $q-p=2^k$ и $q+p=2^l$ за некои позитивни цели броеви k и l. Од равенството

$$q=\frac{(q+p)+(q-p)}{2}=2^{l-1}+2^{k-1},$$

следува дека за $k>1$, $2\,|\,q$, што е можно само за $q=2$, но тогаш $(q-p)^{2q-1}<0<(p+q)^p$, па мора $k=1$. Ова значи дека $q-p=2$. Од друга страна добиваме $lp=2q-1=2p+3$, па мора да е $3\,|\,p$, т.е. $p=3$ и $q=5$. Со проверка добиваме дека овие броеви се решенија на дадената равенка.

40. Определи ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:

$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2 .$$

Решение. По средување на равенката добиваме $2r(p+q)=(p-q)^2$. Бидејќи r е прост, следува дека r е делител на $p-q$, па r^2 е делител на десната страна од последното равенство. Од каде следува дека r е делител на $2(p+q)$. Ако $r>2$, тогаш r е делител на $p+q$, па мора r да е делител и на p и на q, но бидејќи p е прост, тоа е можно само ако $p=r$ и $q=sr$. По средување добиваме

$$2(1+s)=(s-1)^2,$$

од каде $s^2-4s-1=0$. Последното равенство нема целобројни решенија, па во овој случај равенката нема решение. Ако $r=2$, тогаш p и q се со иста парност, случајот кога $p=2$ е не е можен исто како случајот $p=r$ од претходно, па мора да бидат непарни. Нека $a\neq 2$ е прост делител на $p+q$, тогаш мора a да е делител и на $p-q$, па мора да е делител и на p и на q, што е можно само ако $p=a$ и $q=sa$, во овој случај добиваме $4(1+s)=a(s-1)^2$, од каде

$$as^2-(2a+4)s+(a-4)=0,$$

со решенија

$$\frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a}=\frac{a+2\pm2\sqrt{2a+1}}{a}.$$

Ако бројот $\sqrt{2a+1}$ е цел, тогаш е непарен, па $2a+1=4b^2+4b+1$, од каде $a=2b(b+1)$, па не може да е прост. Според ова $p+q$ и $p-q$ мора да се степени на 2, т.е. $p-q=2^k$ и $p+q=2^{2k-2}$, од каде $2p=2^k+2^{2k-2}$ и $2q=2^{2k-2}-2^k$ и бидејќи p и q се непарни, мора $k=1$, но тогаш $p+q=1$, што не е можно. Следува, равенката нема решенија кои се прости броеви.

41. Определи ги сите прости броеви p, за кои постојат природни броеви x и y кои се решенија на равенката

$$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y)(xy-p)=5p .$$

Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x+y=1$ и $xy=6p$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-x+6p=0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x+y=5$ и $xy=2p$. За прости броеви $p\geq 2$ равенката $x^2-5x+2p=0$ има дискриминанта $\Delta=25-8p$. Од неравенството $25-8p\geq 0$ добиваме $p\in\{2, 3\}$. За $p=2$ ги добиваме решенијата $(1,4)$ и $(4,1)$. За $p=3$ ги добиваме решенијата $(2,3)$ и $(3,2)$.

Случај 3. Нека $x+y=p$ и $xy=p+5$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-px+p+5=0$ има дискриминанта $\Delta=p^2-4p-20$. Од неравенството $p^2-4p-20\geq 0$ добиваме $p\geq 7$. Нека $p^2-4p-20=q^2$, каде $1\leq q<p$. Ја добиваме равенката $(p-2)^2-q^2=24$ која е еквивалентна со $(p+q-2)(p-q-2)=24$. Јасно е дека броевите $p+q-2$ и $p-q-2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:

а) $p+q-2=12$ и $p-q-2=2$. Непосредно се добива $p=9$ кој не е прост број.

б) $p+q-2=6$ и $p-q-2=4$. Непосредно се добива $p=7$ и $q=1$. Равенката има решенија $(3,4)$ и $(4,3)$.

Случај 4. Нека $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Во овој случај не постои $p\in\mathbb{N}$ такво што за x,y се добиваат решенија што се природни броеви.

Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p\in\{2,3,7\}$.

II.4. КОНГРУЕНЦИИ

42. Даден е бројот $2009^{2009^{2009}}$, запишан во декаден броен систем. Во еден чекор ја вршиме следнава операција: ги бришеме првата и последната цифра и нивниот збир го додаваме на бројот што останал по бришењето на првата и последната цифра.

а) Ако по конечен број на чекори останал двоцифрен број, дали тој двоцифрен број може да биде точен квадрат.

б) По конечен број на чекори останал едноцифрен број. Определи го овој едноцифрен број.

Решение. Ќе ги користиме следниве познати резултати:

Својство 1. Секој природен број при делење со 3 и 9 дава ист остаток како и збирот на неговите цифри при делењер со 3 и 9, соодветно.
Својство 2. Квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1.
Својство 3. При било кој чекор не се менува остатокот при делење со 3 или со 9.

Доказ. Нека по некој чекор е добиен бројот $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$. Според *Својство 1* имаме

$$A=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 (\bmod 9) \text{ или } (\bmod 3).$$

По бришењето на првата и последната цифра го добиваме бројот $\overline{a_{n-1}...a_1}$. Значи по еден чекор добиен е бројот $B=\overline{a_{n-1}...a_1}+a_n+a_0$. Сега имаме

$$B=\overline{a_{n-1}...a_1}+a_n+a_0 \equiv a_{n-1}+...+a_1+a_n+a_0 (\bmod 9) \text{ или } (\bmod 3),$$

т.е. $A \equiv B (\bmod 9)$ или $(\bmod 3)$, што и требаше да се докаже. ■

а) Ако по конечен број на чекори е добиен двоцифрен број A тогаш според *Својство 3* бројот A ќе дава ист остаток при делење со 3 како и бројот $2009^{2009^{2009}}$. Имаме $2009 \equiv 2 \equiv -1 (\bmod 3)$ па следува

$$2009^{2009^{2009}} \equiv (-1)^{2009^{2009}} \equiv -1 \equiv 2 (\bmod 3). \qquad (1)$$

Сега според *Својство 3* и (1) добиваме дека $A \equiv 2 (\bmod 3)$, па според *Својство 2* бројот A не може да биде точен квадрат.

б) Ако по конечен број на чекори е добиен едноцифрениот број a тогаш според *Својство 3* следува дека

$$a \equiv 2009^{2009^{2009}} (\bmod 9).$$

Имаме $2009 \equiv 2 (\bmod 9)$, па затоа

$$2009^{2009^{2009}} \equiv 2^{2009^{2009}} (\bmod 9)$$

и јасно $2^3 \equiv -1 (\bmod 9)$. Понатаму

$$2009^{2009} \equiv 2^{2009} \equiv (-1)^{2009} \equiv -1 \equiv 2 (\bmod 3)$$

т.е.

$$2009^{2009} = 3k+2,$$

каде k е непарен природен број. Сега имаме

$$2009^{2009^{2009}} \equiv 2^{3k+2} = (2^3)^k \cdot 4 \equiv (-1) \cdot 4 \equiv 5 (\bmod 9)$$

од каде е јасно дека $a=5$.

43. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^p-4$ не е квадрат на природен број. Докажи!

Решение. За $p=2$ добиваме

$$m=7p+3^p-4=7\cdot 2+3^2-4=14+9-4=19\,,$$

кој не е квадрат на природен број. За $p=3$ добиваме

$$m=7p+3^p-4=21+27-4=44\,,$$

кој повторно не е квадрат на природен број.

Ќе претпоствиме спротивно, т.е. дека постои прост број $p, p>3$ таков што $m=7p+3^p-4$ е квадрат на природен број, т.е. $m=n^2$ за некој $n\in\mathbb{N}$. Од малате теорема на Ферма, имаме $3^p\equiv 3\,(\text{mod }p)$, па според тоа

$$m=7p+3^p-4\equiv 0+3-4=-1\,(\text{mod }p)\,.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $p=4k+3$ за некој $k\in\mathbb{Z}$. Повторно според малата теорема на Ферма, имаме

$$-1\equiv m^{2k+1}=n^{4k+2}=n^{p-1}\equiv 1\,(\text{mod }p)\,,$$

што не е можно бидејќи p е прост број кој е поголем од 3.

Случај 2. $p=4k+1$ за некој $k\in\mathbb{Z}$. Во овој случај

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-1=2\,(\text{mod }p)\,.$$

Но, квадрат на природен број нема остаток 2 при делење со 4.

Заради добиените контрадикции, за било кој прост број p бројот $m=7p+3^p-4$ не е е квадрат на природен број.

44. Определи ги сите прости броеви p,q и r, такви што

$$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1\,.$$

Решение. Јасно е дека $p\neq q$, бидејќи во спротивен случај равенката се сведува на равенката $\frac{4}{r+1}=0$ која нема решение.

Равенката можеме да ја запишеме во облик $\frac{pr+p-4q}{q(r+1)}=1$, т.е.

$$r=\frac{5q-p}{p-q}\,, \qquad (1)$$

бидејќи $p-q\neq 0$. Последната равенка може да се запише во облик

$$r=-1+\frac{4q}{p-q}.$$

Ако $p-q=q$, тогаш $p=2q$, што не е можно, бидејќи p е прост број.
Ако $p-q=2q$, тогаш $p=3q$, што не е можно бидејќи p е прост број.
Ако $p-q=4q$, тогаш $p=5q$, па во тој случај би добиле $r=0$ што не е можно бидејќи r е прост број.
Ќе разгледаме три случаи.
а) $p-q=1$. Тогаш $p=q+1$ и бидејќи p и q се соседни прости броеви добиваме $q=2, p=3, r=7$. Значи, едно решение е $p=3$, $q=2$, $r=7$.
б) $p-q=2$. Тогаш $p=q+2$, $r=2q-1$. Ќе разгледаме три подслучаи:
i) $q\equiv 1 \pmod 3$. Тогаш $q+2\equiv 0 \pmod 3$, и како $p=q+2\equiv 0 \pmod 3$ и p е прост број добиваме $p=3$, $q=1$, $r=1$ што не е можно.
ii) $q\equiv -1 \pmod 3$. Тогаш $r=2q-1\equiv -2-1 \pmod 3$, т.е. $r\equiv 0 \pmod 3$. Значи, $r=3, q=2, p=4$ што не е можно бидејќи p не е прост број.
iii) $q=3$. Тогаш $p=5$ и $r=5$. Значи, решение е $p=5$, $q=3$, $r=5$.
в) $p-q=4$. Тогаш $p=q+4$ и $r=q-1$. Ако q е непарен број, тогаш r е парен и бидејќи е прост добиваме $r=2$. Но тогаш $q=3$ и $p=7$.
Значи, решенија на равенката се

$$p=3, q=2, r=7;\ \ p=5, q=3, r=5;\ \ p=7, q=3, r=2.$$

45. Целиот број $n>1$ го нарекуваме совршен, ако збирот на сите негови делители (вклучувајќи ги и 1 и n) е еднаков на $2n$. Определи ги сите совршени броеви n, такви што $n-1$ и $n+1$ се прости броеви.

Решение. *Прв начин.* Најмал совршен број е 6 и тој ги исполнува условите од задачата. Навистина, $6-1=5$ и $6+1=7$ се прости броеви и

$$1+2+3+6=12=2\cdot 6.$$

Затоа, ќе претпоставиме дека $n>6$ е совршен број за кој $n-1$ и $n+1$ се прости броеви. Тогаш n е од облик $n=6k$ (за било кој друг облик на $n=6k+r$, $r=1,2,3,4,5$ еден од броевите $n-1=6k+r-1$ или $n+1=6k+r+1$ е сложен што може непосредно да се провери). Но, во тој случај делители на n се $1,k,2k,3k,6k$, па според тоа

$$1+k+2k+3k+6k=12k+1=2n+1>2n,$$

односно n не е совршен број.
Значи, $n=6$ е единствениот број кој ги исполнува условите од задачата.

Втор начин. Ако n е совршен број кој ги исполнува условите од задачата, тогаш тој е парен број. Ако $n>3$, тогаш $n-1$ и $n+1$ се прости броеви поголеми од 2, па според тоа се непарни. Бројот $n=3$ не е совршен број.
Секој парен совршен број n, според теоремата на Ојлер-Евклид може да се претстави во облик

$$n=2^{p-1}(2^p-1),$$

каде p и 2^p-1 се прости броеви. Ако $p=2$, тогаш се добива совршениот број 6, кој очигледно ги исполнува условите од задачата.
Ако p е непарен прост број, тогаш $2^p\equiv 2 \pmod 3$ и $2^{p-1}\equiv 1 \pmod 3$.
Но тогаш $2^{p-1}-1\equiv 1 \pmod 3$ и $2^p\equiv 1 \pmod p$, па од својствата на конгруенции добиваме

$$2^p(2^{p-1}-1)\equiv 1 \pmod 3,$$

т.е.

$$n\equiv 1 \pmod 3.$$

Според тоа, $n-1\equiv 0 \pmod 3$ и $n-1>3$, т.е. $n-1$ не е прост.
Значи, $n=6$ е единствено решение на задачата.

46. Најди ги сите природни броеви x,y,z и t такви што

$$2^x3^y+5^z=7^t. \tag{1}$$

Решение. Од дадената равенка добиваме $5^z\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, што значи дека $z=2c, c\in\mathbb{N}$. Понатаму, јасно е дека $t\geq 2$. Ако $t=2d+1,\ d\in\mathbb{N}$, тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2^x3^y+25^c=7\cdot 49^d.$$

Ако $x\geq 2$, тогаш $1\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, што е противречност.
Ако $x=1$, добиваме

$$2\cdot 3^y+25^c=7\cdot 49^d$$

и затоа

$$2\cdot 3^y+1\equiv 7(\mathrm{mod}\,24),$$

од што следува дека $24\,|\,6(3^{y-1}-1)$, т.е. $4\,|\,(3^{y-1}-1)$, што значи дека $y-1$ е парен број. Тогаш $y=2b+1, b\in\mathbb{N}$ и добиваме дека

$$6\cdot 9^b+25^c=7\cdot 49^d.$$

Од последното равенство добиваме

$$(-1)^b \equiv 2(-1)^d \pmod 5,$$

што не е можно за кои било $b,d \in \mathbb{N}$. Од досега изнесеното следува дека t е парен број, т.е. $t=2d, d \in \mathbb{N}$.

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d,$$

односно во обликот

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y.$$

Но, $\mathrm{NZD}(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$ и $7^d + 5^c > 2$, па можни се следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2\cdot 3^y \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2\cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \quad (4)$$

Од системот (2) добиваме $7^d = 2^{x-2} + 3^y$, и затоа $2^{x-2} \equiv 1 \pmod 3$, од што следува дека $x-2$ е парен број, т.е. $x = 2a+2$, $a \in \mathbb{N}_0$, каде $a>0$, бидејќи за $a=0$ од претходната равенка следува $7^d = 1+3^y$, што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа, $7^d - 5^c = 2\cdot 4^a$ и затоа $7^d \equiv 1 \pmod 4$, па затоа $d=2e, e\in\mathbb{N}$. Тоа значи дека $49^e - 5^c = 2\cdot 4^a$, па затоа $5^c \equiv 1 \pmod 8$, од што следува дека $c = 2f$, $f \in \mathbb{N}$. Според тоа, $49^e - 25^f = 2\cdot 4^a$, од што следува $0 \equiv 2 \pmod 3$, што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$ следува $x \geq 5$. Тогаш

$$7^d + 5^c \equiv 0 \pmod 4, \text{ т.е. } 3^d + 1 \equiv 0 \pmod 4,$$

па затоа d е непарен број. Но, $7^d = 5^c + 2\cdot 3^y \geq 11$, па затоа $d \geq 2$ и затоа $d = 2e+1$, $e \in \mathbb{N}$. Како и претходно од $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ добиваме

$x=2a+2$ и како $x\geq 5$ добиваме $a\geq 2$. Според тоа, $7^d=4^a+3^y$, т.е. $7\cdot 49^e=4^a+3^y$ и затоа $7\equiv 3^y \pmod 8$, бидејќи 3^y е конгруенстен со 1 по модул 8 ако y е парен, односно со 3 ако y е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (3) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува $7^d=5^c+2$, што значи дека цифрата на единиците на бројот 7^d е 7, што е можно само ако $d=4k+1, k\in\mathbb{N}$. Ако $c\geq 2$, тогаш разгледувајќи го $7^{4k+1}=5^c+2$ по модул 25 добиваме $7\equiv 2 \pmod{25}$, што не е можно. За $c=1$ добиваме $d=1$ и решение на задачата е $x=3, y=1, z=t=2$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Ги разгледуваме сите двоцифрени броеви n во чиј запис не се содржи цифрата 0 и за кои во записот на бројот $2n$ не се содржи цифрата 0. Определи го збирот на цифрите на оној од разгледуваните броеви n за кои производот на цифрите на бројот $2n$ е најмалиот можен број.

Решение. Најмалиот можен производ на цифрите на еден број кој во записот не ја содржи цифрата 0 е 1. Таков број се запишува само со цифрата 1 и затоа тој е непарен. Но бројот $2n$ е парен. Значи, производот на цифрите на бројот $2n$ мора да е најмалку 2. Такви се броевите кои запишуваат со една двојка, а останатите цифри се единици. Најмалиот таков број е 12, но $12:2=6$ не е двоцифрен број. Ако бројот $2n$ содржи повеќе од една единица, тогаш бројот n ќе биде двоцифрен број само ако $2n=112$. Според тоа, $n=56$ и збирот на неговите цифри е еднаков на 11.

2. Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред дава број кој е квадрат на некој природен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви.

Решение.Нека $\overline{ab}$ е бараниот број. Од условот добиваме $10a+b+10b+a=n^2$, ($n\in\mathbb{N}$), т.е. $11(a+b)=n^2$. Бидејќи $a+b<19$, следува дека $a+b=11$, односно $\overline{ab}\in\{29,38,47,56,65,74,83,92\}$.

3. Иван замислил број. Бројот што го замислил е три пати помал од аритметичката средина на пет последователни парни броеви. 75% од вредноста на првиот број во низата парни последователни броеви е еднаква на аритметичката средина на првиот број од низата и бројот што го замислил Иван. Кој број го замислил Иван?

Решение. Нека x е бројот што го замислил Иван и нека низата од пет последователни парни броеви е $y, y+2, y+4, y+6, y+8$, каде y е парен број. Тогаш, од условите го добиваме системот

$$3x=\frac{y+(y+2)+(y+4)+(y+6)+(y+8)}{5},\ \frac{75}{100}y=\frac{y+x}{2},$$

од каде со средување се добива $3x=y+4$, $3y=2y+2x$, односно $x=4$, $y=8$. Значи, Иван го замислил бројот 4.

4. За кои вредности на променливите x и y, разликата на изразите $\frac{2x+15}{8}$ и $1\frac{1}{3}\cdot(y-1)$ ќе биде 3 пати помала од изразот $2\cdot(5-2y)$, а изразот $\frac{x+5\frac{3}{4}}{2}$ ќе биде за $0{,}125$ поголем од $3y$?

Решение. Од условот на задачата се добиваат равенките

$$\frac{2x+15}{8}-1\frac{1}{3}\cdot(y-1)=\frac{2\cdot(5-2y)}{3} \text{ и } \frac{x+5\frac{3}{4}}{2}=3y+0{,}125,$$

кои се еквивалентни на $6x=3$ и $4x-24y=-22$ соодветно. Решението на последниот систем линеарни равенки е $x=\frac{1}{2}$, $y=1$.

5. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ со различни цифри за кои важи

$$a^2-b^2-c^2=a-b-c.$$

Решение. Ако $b=0$ тогаш $a^2-c^2=a-c$, односно

$$(a-c)(a+c)=a-c.$$

Бидејќи од условот во задачата $a\neq c$ добиваме дека $a+c=1$, а оттука $a=1$ и $c=0$, односно цифрите b и c се еднакви што е контрадикција. Значи $b\neq 0$ и аналогно се докажува дека $c\neq 0$. Слично се докажува дека $b\neq 1$ и $c\neq 1$. Ако $a=1$, тогаш $b^2+c^2=b+c$, односно

$$b(b-1)+c(c-1)=0,$$

а од друга страна бидејќи $b,c\neq 0$ и $b,c\neq 1$ имаме $b(b-1)+c(c-1)>0$. Значи, $a\neq 1$. Натаму ќе го разгледуваме еквивалентното равенство

$$a(a-1)=b(b-1)+c(c-1).$$

Производот на левата страна на ова равенство припаѓа во множеството

$$\{2,6,12,20,30,42,56,72\},$$

а збирот на производите на десната страна во

$$\{8,14,22,32,44,58,74,18,26,36,48,62,78,42,$$
$$54,68,84,50,76,92,72,86,102,98,114,128\}.$$

Бидејќи 42 и 72 се во пресекот на двете множества имаме:

а) $42=12+30$, односно $7\cdot 6=4\cdot 3+6\cdot 5$, па ги добиваме броевите 746 и 764;

б) $72=30+42$, односно $9\cdot 8=6\cdot 5+7\cdot 6$, па ги добиваме броевите 967 и 976.

Значи, бараните броеви се 746, 764, 967 и 976.

6. Сакајќи да ја дознае брзината со која се движел автобусот во кој се вози, патникот погледнал низ прозорецот и на таблата покрај патот (која ја означува оддалеченоста во километри од градот од кој тргнал) видел двоцифрен број. Точно по еден час, повторно погледнал низ прозорецот и на таблата видел трицифрен број запишан со помош на две цифри како и пред еден час, но во обратен редослед и меѓу нив имало нула. Патникот ја пресметал брзината на автобусот и заспал. Кога се разбудил по точно два часа и погледнал низ прозорецот, на таблата видел трицифрен број на кој првата и последната цифра му биле исти како и на бројот што го видел пред два часа, само што средната цифра била различна од нула. Ако се знае дека автобусот се движел со постојана брзина, одреди ја брзината на автобусот и броевите кои патникот ги видел на таблите покрај патот.

Решение. Првиот пат патникот го видел бројот $10x+y,\ 0<x\leq 9,\ 0\leq y\leq 9$. По еден час го видел бројот $100y+x,\ y\neq 0$. За тоа време автобусот поминал

$$(100y+x)-(10x+y)=9(11y-x)km\ .$$

Бидејќи автобусот се движел со постојана брзина, за наредните два часа автобусот поминал

$$2\cdot 9(11y-x)=18(11y-x)\ ,$$

а патникот го видел бројот $100y+10z+x,\ 0<z\leq 9$. Добиваме

$$18(11y-x)=(100y+10z+x)-(100y+x)\text{, т.е. } 9(11y-x)=5z\ .$$

Последната равенка е можна само ако $z=9$ и $11y-x=5$. Од тоа што $0<x,y\leq 9$ се добива $x=6$ и $y=1$. Значи, брзината *в* на автобусот се добива од $9(11y-x)=1\cdot v$, од каде $v=45km/h$, а броевите кои патникот ги видел на таблите се 61, 106 и 196.

III.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

7. Цената на пицата во пицеријата *Дон Вито* е пропорционална со количеството пица. Пица со дијаметар $15\,cm$ чини 299 денари. Колку пари чини пица со дијаметар $30\,cm$? (Сите пици се со иста дебелина.)

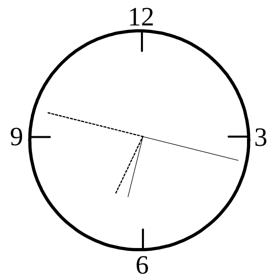
Решение. Нека дебелината на пицата од двата вида е еднаква на $x\ cm$. Тогаш $7{,}5^2 x\pi\ cm^3$ чини 299 денари. Но, $15^2 x\pi\ cm^3 = 4\cdot 7{,}5^2 x\pi\ cm^3$, што значи дека пицата со дијаметар $30\,cm$ ќе чини $4\cdot 299=1196$ денари.

8. Еден човек влегувајќи во берберница, по 6 часот попладне, забележал дека стрелките на часовникот зафаќаат агол од $90°$, а при излегувањето, нешто пред 7 часот, забележал дека стрелките зафаќаат агол од $75°$. Колку време човекот се задржал во берберницата?

Решение. Нека часовната стрелка за тоа време изминала x степени; тогаш минутната стрелка минала од една страна $12x$ степени, а од другата страна $90°+x+75°$. Значи,

$$165°+x=12x \Rightarrow x=15°,$$

т.е. минутната стрелка со своето движење направила агол од $165°+15°=180°$. Бидејќи секои $6°$ чинат една минута добиваме дека човекот се задржал 30 минути во берберницата.



9. Точно е 9:00 часот. Во колку часот стрелките на часовникот прв пат ќе се преклопат? Решението заокружи го на минути.

Решение. Големата стрелка за еден час поминува 60 делови на кои е поделен кругот, а малата за истото време ќе се помести 5 делови на кои е поделен кругот. Нека со y го означиме бројот на деловите што ги поминала големата стрелка до моментот на поклопување, а со x бројот на деловите што ги поминала малата стрелка до истиот момент. Го добиваме следниов систем, $y=45+x$, $y:60=x:5$. Со негово решавање се добива $y=\frac{540}{11}\approx 49,09$. Значи, стрелките ќе се преклопат откако малата стрелка ќе помине 49,09 делови, т.е. во 9:49 часот.

10. Имаме две свеќи со различни должини и дебелини. Подолгата и потенка свеќа целосно изгорува за 3,5 часа, а пократката и подебела свеќа за 5 часа. Свеќите биле запалени истовремено, а по 2 часа горење нивните должини биле еднакви. За колку проценти потенката свеќа е подолга од подебелата?

Решение. За еден час изгоруваат $\frac{2}{7}$ од првата (подолгата и потенка) свеќа, а $\frac{1}{5}$ од втората (пократката и подебела) свеќа. По два часа изгореле $\frac{4}{7}$ од првата и $\frac{2}{5}$ од втората свеќа. Значи останале $\frac{3}{7}$ од првата и $\frac{3}{5}$ од втората свеќа. Бидејќи тие големини се еднакви, тогаш $\frac{1}{7}$ од првата свеќа е еднаква на $\frac{1}{5}$ од втората свеќа.. Според тоа, првата свеќа има должина $7x$, а втората $5x$, па потенката свеќа е за 40% подолга од подебелата свеќа.

11. Набрани се 600 килограми печурки чија влажност е 98%. По сушењето, влажноста е намалена на 96%. Колкава е масата на печурките по сушењето?

    Решение. Во 600 килограми печурки со влажност 98% има 588 килограми вода и 12 килограми сува материја. После сушењето 12 килограми сува материја претставува 4% од вкупната маса на печурките. Нека со x ја означиме масата на печурките после сушењето. Тогаш $0,04\cdot x=12$, од каде $x=300$ килограми.

12. Едно шише и една чаша заедно тежат колку еден бокал, а едно шише тежи колку една чаша и една чинија. Колку пати едно шише е потешко од една чаша, ако два бокали тежат колку три чинии?

    Решение. Нека 1 шише, 1 чаша, 1 бокал и 1 чинија тежат соодветно x,y,z и t во една иста мерна единица. Од условот на заадачата добиваме

$$x+y=z \qquad (1)$$

$$x=y+t \qquad (2)$$

$$2z=3t \qquad (3)$$

Од (2) добиваме $2x=3y+3t$, па затоа $3t=3x-3y$. Сега со замена во (3) добиваме $2z=3x-3y$. Од (1) следува дека , односно $2z=2x+2y$, па затоа $2x+2y=3x-3y$ $x=5y$. Значи, едно шише е пет пати потешко од една чаша.

13. „Миле и јас", рече Филип, „можеме да ја завршиме зададената работа за 20 дена, но ако работам со Иван истата работа би ја завршиле за 5 дена порано."

    „Имам подобра комбинација", рече Иван, „Ако јас би работел со Миле би ја завршиле работата за петтина од времето порано отколку кога би ја работел со Филип."

    За колку дена секој од нив би ја завршил работата сам, а за колку дена би ја завршиле сите заедно?

Решение. Да ги означиме со x, y, z бројот на денови за кои работата би ја завршил Миле, Филип, Иван соодветно. Тогаш $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ е делот од работата која би ја завршиле по истиот редослед Мики, Филип и Иван за еден ден. Па, заради условот од задачата имаме:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12} \end{cases}$$

Со собирање на овие три равенки, по средувањето се добива:

$$2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}, \text{ т.е. } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Значи работејќи заедно би ја завршиле десеттина од работата, т.е. целата работа заедно би ја завршиле за 10 дена. Па, сега:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30}\Rightarrow x=30$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60}\Rightarrow y=60$$
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{10}-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}\Rightarrow z=20$$

Значи, Миле би ја завршил работата сам за 30 дена, Филип за 60, а Иван за 20 дена.

14. Од 3 децилитри сируп против кашлица, кој содржел 10% дестилирана вода, аптекарката подготвила сируп за дете, кој требало да содржи 40% вода. Колку децилитри вода ставила во трите децилитри сируп?

Решение. Со x да го означиме количеството вода (изразено во децилитри) што аптекарката го ставила во трите децилитри сируп. Тогаш, според условите во задачата, ја добиваме равенката

$$\frac{10}{100}\cdot 3+x=\frac{40}{100}(3+x),$$

чие решение е $x=1,5\,dl$.

15. Даден е квадрат со страна $49\,cm$. Раздели го дадениот квадрат на 2009 помали квадрати од два типа коишто имаат целобројни страни (должините на страните на делбените квадратите можат да имаат една од две различни целобројни вредности вредности).

Решение. Ќе разгледуваме квадрати со страни $1\,cm$ и $3\,cm$. Бројот на квадратите со страна $3\,cm$ нека е x. Тогаш бројот на квадратите со страна $1\,cm$ ќе биде $2009-x$. Збирот на плоштините на помалите квадратчиња ќе биде иста со збирот на плоштините на големиот квадрат, т.е.

$$(2009-x)\cdot 1+3x=49^2$$
$$8x=392$$
$$x=49.$$

Според тоа, едно од можните решенија е: 49 квадрати со страна $3\,cm$ и 1960 квадрати со страна $1\,cm$.

16. На кружна патека долга 1650 метри се движат двајца моторциклисти со постојана брзина. Ако моторциклистите се движат во спротивна насока ќе се сретнуваат секоја минута, а ако се движат во иста насока, тогаш моторциклистот кој се движи со поголема брзина ќе го престигнува другиот на секои 11 минути. Определи ги брзините на моторциклистите.

Решение. Нека v_1 е брзината со која се движи побрзиот, а v_2 е брзината на побавниот моторциклист. Од првиот услов (времето е 1 минута или $\frac{1}{60}$ часа) имаме $v_1\frac{1}{60}+v_2\frac{1}{60}=\frac{1650}{1000}$, а од вториот (времето е 11 минути или $\frac{11}{60}$ часа) $v_1\frac{11}{60}-v_2\frac{11}{60}=\frac{1650}{1000}$. Добиваме систем од две линеарни равенки со две непознати: $v_1+v_2=99$, $v_1-v_2=9$, чие што решение е $v_1=54\,km/h$, $v_2=45\,km/h$.

17. Моторен чамец го минува растојанието од $10\,km$ меѓу две пристаништа по течението на реката и обратно за t_r часови, а растојанието од $20\,km$ меѓу два града на брегот на мирно езеро за t_e часа. Докажи дека $t_r>t_e$.

Решение. Ако v_m е брзината на чамецот во мирна вода, а v_r е брзината на течението на реката, тогаш $t_r=\frac{10}{v_m+v_r}+\frac{10}{v_m-v_r}=\frac{20v_m}{v_m^2-v_r^2}$ и $t_e=\frac{20}{v_m}=\frac{20v_m}{v_m^2}$. Јасно, $\frac{20v_m}{v_m^2-v_r^2}>\frac{20v_m}{v_m^2}$, па затоа $t_r>t_e$.

18. Моторен чамец со постојана брзина во мирна вода престигнува сплав по течението на реката и по 15 минути тргнува обратно наспроти течението на реката. Чамецот по втор пат го сретнува сплавот на

$500\,m$ од местото на првата средба. Определи ја брзината на течење на реката.

Решение. Нека $x\,km/h$ е брзината на чамецот во мирна вода, $y\,km/h$ е брзината на течење на реката, а t е времето изразено во часови од моментот кога чамецот тргнува наспроти течението на реката, до моментот на втората средба со сплавот. Ако земеме предвид дека $15\min=\frac{1}{4}h$, добиваме

$$\frac{x+y}{4}-t(x-y)=(t+\frac{1}{4})y\,.$$

Оттука добиваме

$$\frac{x}{4}-tx=0\text{, т.е. } t=\frac{1}{4}h\,.$$

Затоа $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})y=0,5$, т.е. $y=1\,km/h$.

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

19. Еден наставник и неговите ученици тргнале со автобус на Републички натпревар по математика. Од 52-те седишта во автобусот тие седнале на седишта чии броеви се последователни природни броеви такви што нивниот збир е 54. Колку ученици носел наставникот со себе ако само еден од броевите на седиштата на кои што седеле е прост број?

Решение. *Прв начин.* Во автобусот има седишта со редни броеви од 1 до 52. Меѓу нив прости се броевите: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Од овие броеви треба да најдеме еден кој собран со свои претходници и следбеници дава збир 54. Со броевите 2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47 ова не може да се случи бидејќи збирот е или помал или поголем од 54. Од останатите три прости броеви 13, 17, 19, може да се добие 54 на следниве два начини: 12+13+14+15 или 17+18+19, но во вториот збир има два прости броја. Според тоа, седиштата биле со редни броеви 12, 13, 14 и 15 што значи дека наставникот носел тројца ученици.

Втор начин. Нека се $k+1,k+2,\dots,n$ броевите на седиштата на кои седеле наставникот и учениците, $k\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}$ и $n-k>1$. Бидејќи збирот на овие броеви е 54, имаме

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=54$$
$$n^2+n-k^2-k=108$$
$$(n-k)(n+k)+(n-k)=108$$
$$(n-k)(n+k+1)=108$$

Бројот 108 се разложува на множители

$$108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3, \quad n-k>1, \quad n+k+1>n-k,$$

па ги имаме следниве случаи:

прв: $n+k+1=54, \quad n-k=2$

втор: $n+k+1=36, \quad n-k=3 \qquad n=19, k=16$

трет: $n+k+1=27, \quad n-k=4 \qquad n=15, k=11$

четврт: $n+k+1=18, \quad n-k=6$

петти: $n+k+1=12, \quad n-k=9 \qquad n=10, k=1$

Од сите случаи во вториот и петтиот случај има повеќе прости броеви па останува третиот случај според кој редните броеви на седиштата во автобусот биле: 12, 13, 14 и 15, што значи дека наставникот носел три ученици.

20. Во соба се наоѓаат столици со 3 и столици со 4 ногалки. На секоја столица седи по еден човек, па така на подот има 69 нозе и ногалки. Одреди го бројот на столчиња со 3 и столчиња со 4 ногалки.

Решение. Нека x е бројот на столици со 3, а y бројот на столици со 4 ногалки. Од условот на задачата имаме $3x+4y+2(x+y)=69$, односно $5x+6y=69$. Решението го бараме во множеството природни броеви. Бидејќи, $6y$ е парен број, мора бројот x да биде непарен. Последното равенство го множиме со 2 и добиваме $10x+12y=138$, од каде $12y=138-10x$. Значи, $12y$ мора да завршува на 8 и x да е помал од 12. Од тука заклучуваме дека задачата има две решенија: $x=3, y=9$ или $x=9, y=4$.

21. Еден тест со заокружување на понудени решенија се состои од 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 8 поени, а за погрешно решена се одземаат 5 поени. Доколку на некоја задача не се заокружи ниеден од понудените одговори, за неа се даваат 0 поени. Некој ученик на крајот освоил 13 поени. Колку задачи точно решил ученикот?

Решение. Нека x е бројот на точно решени задачи, y е бројот на неточно решени задачи, а z е бројот на задачи на кои ученикот не одговорил ништо. Според условите од задачата, се добива системот

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ 8x-5y=13 \end{cases}$$

при што x, y и z се ненегативни цели броеви.

Од втората равенка, се добива дека

$$8x=13+5y$$

$$x=\frac{13+5y}{8}=1+\frac{5+5y}{8}=1+\frac{5}{8}(1+y)$$

од каде, за x да е цел број, треба $1+y$ да биде делив со 8, т.е. $1+y=0$ или $1+y=8$ или $1+y=16$. Притоа,

1) $y=-1$, што не можно, бидејќи y не може да е негативен.

2) $y=7$, $x=\frac{13+5\cdot 7}{8}=6$, $z=20-6-7=7$

3) $y=15$, $x=\frac{13+5\cdot 15}{8}=11$, $z=20-15-11=-6<0$, што не е можно бидејќи $z\in\mathbb{N}$.

Значи, ученикот одговорил точно на 7 задачи.

22. На еден фудбалски турнир учествувале 10 фудбалски екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја друга. За секоја победа се добива 3 поени, за нерешено 1 поен, и за пораз 0 поени. На крај е дадена конечна табела од збирот на поени на секоја екипа. Ако збирот од сите поени на конечната табела изнесувал 120, тогаш колку натпревари на фудбалскиот натпревар завршиле нерешено?

Решение. Бројот на сите одиграни натпревари на фудбалскиот турнир е $9+8+7+...+2+1=45$. Ако со x го означиме бројот на нерешени натпревари тогаш $45-x$ е бројот на натпревари кои завршиле со победник. Оттука ја добиваме равенката

$$3(45-x)+2x=120\,,$$

чие решение е $x=15$.

Значи, на фудбалскиот турнир 15 натпревари завршиле нерешено.

23. Три девојчиња Ана, Марија и Елена во шумата собрале 770 костени и одлучиле да си ги поделат меѓу себе пропорционално на своите години. Секој пат кога Марија зела 4 костени, Ана зела 3, а на секои 6 што ги зела Марија, Елена зела 7 костени. Колку години има секое

девојче ако заедно имаат 35 години? По колку костени припаднало на секоја од нив?

Решение. Нека a се годините на Ана, m се годините на Марија, а e се годините на Елена. Па според тоа, $a+m+e=35$. Годините се однесуваат како костените и тоа:

$$m:a=4:3,\quad m:e=6:7$$

$$a=\tfrac{3}{4}m,\quad e=\tfrac{7}{6}m$$

Сега,

$$m+\tfrac{3}{4}m+\tfrac{7}{6}m=35$$

$$\tfrac{12m+9m+14m}{12}=35$$

$$\tfrac{35}{12}m=35$$

$$m=12,\quad a=\tfrac{3}{4}\cdot 12=9,\quad e=\tfrac{7}{6}\cdot 12=14.$$

Од $770:35=22$, следува дека на Марија и припаднале $22\cdot 12=264$ костени, на Ана $22\cdot 9=198$ костени, а на Елена $22\cdot 14=308$ костени.

24. Според бајката „Илјада и една ноќ“ девојката Шехерезада секоја ноќ на царот му раскажувала по 3 или по 5 приказни. Одреди го најмалиот и најголемиот број на ноќи во кои Шехерезада може да му раскаже точно 1001 приказна!

Решение. Ако x е бројот на ноќите во кои Шехерезада раскажувала по 3 приказни, а y е бројот на ноќите во кои раскажувала по 5 приказни, тогаш

$$3x+5y=1001.$$

Едно целобројно решение е

$$x_0=332,\ y_0=1,$$

па општото решение е

$$x=332-5t \text{ и } y=1+3t,\ t\in\mathbb{Z}.$$

Бидејќи

$$x\ge 0\Rightarrow 332-5t\ge 0\Rightarrow t\le 66,4,$$

а од тоа што

$$y\ge 0\Rightarrow 1+3t\ge 0\Rightarrow t\ge -\tfrac{1}{3},\text{ т.е. } -\tfrac{1}{3}\le t\le 66,4.$$

Конечно, најмалиот број ноќи за се добива за $t=66$ и тогаш $x=2$, $y=199$, па затоа $x+y=201$, а најголемиот број ноќи се добива за $t=0$ и тогаш $x=332, y=1$, па затоа $x+y=333$.

25. Наставничката подредила во редица 20 ученици од една паралелка и им поделила 800 бонбони. Секој ученик добил задача да го пресмета количникот $\frac{x}{x+2k-1}$, каде што x е бројот на бонбони што ги добил, а k е редниот број на местото на ученикот во редицата броејќи од лево кон десно. Сите ученици добиле ист количник. Колку бонбони добил ученикот кој имал реден број 12?

Решение. Нека претпоставиме дека првиот ученик добил x_1 бонбони, вториот x_2 бонбони, итн. дваесеттиот ученик добил x_{20} бонбони.

Според тоа, $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=800$. Нека $\frac{x_k}{x_k+2k-1}=M$, од каде добиваме $x_k=(2k-1)\frac{M}{1-M}$. За збирот $x_1+x_2+\cdots+x_{20}$ добиваме

$$x_1+x_2+\cdots+x_{20}=\frac{M}{1-M}(1+3+5+\cdots+39)=\frac{M}{1-M}\frac{40\cdot 20}{2}=400\frac{M}{1-M}.$$

Од условот $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=800$, имаме

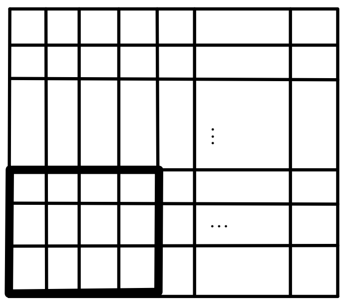
$$400\frac{M}{1-M}=800, \text{ т.е. } \frac{M}{1-M}=2.$$

Според тоа, ученикот кој имал реден број 12 добил

$$x_{12}=(2\cdot 12-1)\cdot 2=46 \text{ бонбони.}$$

26. Од квадратен лист хартија, поделен на цел број на единични квадрати (на листот нема делови од квадрати) исечен е квадрат со цел број на исти такви единични квадрати. Колку квадрати содржи првобитниот лист хартија ако бројот на преостанатите квадрати е 124?

Решение. Нека страната на листот е a единици. Толку и единични квадрати ќе има долж страната на листот. Значи се вкупно a^2 на број, бидејќи според условот на задачата на листот нема делови од единични квадрати. Нека е исечен квадрат како на цртежот и нека неговата страна е b, т.е. во него има b^2 единични квадрати. Ова значи дека за останатите 124 единични квадрати ќе важи $a^2-b^2=124$, т.е.



$$(a-b)(a+b)=1\cdot 2\cdot 2\cdot 31.$$

Значи $a-b=1$, $a+b=124$ или $a-b=2$, $a+b=62$ или $a-b=4$, $a+b=31$. Бидејќи од првиот и третиот систем решенијата не се целобројни, следува дека решението е $a=32$, $b=30$, т.е. листот хартија содржи $32\cdot 32=1024$ квадрати.

27. Учениците од една паралелка изучуваат само англиски, само француски или истовремено и англиски и француски јазик. Познато е дека во паралелката има повеќе од 23, а помалку од 28 ученици и дека 30% од тие кои изучуват англиски изучуваат и француски јазик, а 60% од тие кои изучуват француски, изучуваат и англиски јазик. Колку ученици има во оваа паралелка?

Решение. Нека x е бројот на учениците кои истовремено изучуваат англиски и француски јазик. Тогаш бидејќи 30% од $\frac{10}{3}x$ е $\frac{30}{100}\cdot\frac{10}{3}x=x$ бројот на тие кои изучуваат англиски јазик е $\frac{10}{3}x$. Бидејќи 60% од $\frac{5}{3}x$ е $\frac{60}{100}\cdot\frac{5}{3}x=x$ бројот на тие кои изучуваат француски јазик е $\frac{5}{3}x$. Според тоа, бројот на сите ученици во паралелката е $\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}x+x=4x$, т.е. тој е делив со 4. Единствен број кој е поголем од 23 и е помал од 28, а е делив со 4 е 24. Конечно, во паралелката има 24 ученици.

28. Во првото полугодие во една паралелка имало неколку одлични ученици. Во второто полугодие еден од одличните ученици го намалил успехот (не бил одличен), па бројот на одличните ученици во паралелката станал 24% од бројот на сите ученици. Ако овој ученик се премести во друга паралелка, тогаш процентото на одличните ученици во паралелката ќе биде 25%. Колку проценти били одличните ученици во оваа паралелка во првото полугодие?

Решение. Нека n е бројот на учениците во паралелката, а k е бројот на одличните ученици во првото полугодие. Од условите на задачата добиваме $\frac{k-1}{n}=0,24$ и $\frac{k-1}{n-1}=0,25$. Според тоа, $\frac{n-1}{n}=0,96$, од каде добиваме $n=25$. Според тоа, $k-1=0,24n=0,24\cdot 25=6$, т.е. $k=7$. Значи, бараниот процент е $\frac{7}{25}\cdot 100=28\%$.

29. Во една група бројот на момчињата е помал од бројот на девојчињата. Ако бројот на момчињата се зголеми двапати, тогаш во групата ќе има повеќе од 24 деца, а ако бројот на девојчињата се зголеми двапати, тогаш во групата ќе има помалку од 27 деца. Колку момчиња и колку девојчиња има во оваа група?

Решение. Нека бројот на момчињата и бројот на девојчињата во групата се x и y, соодветно. Од условот на зазадачата имаме $x < y, 2x + y > 24$ и $x + 2y < 27$, односно

$$y > x, 2x + y > 24 \text{ и } 27 > x + 2y .$$

Ако ги собереме второто и третото неравенство добиваме $3 > y - x$, што заедно со првото неравенство дава $0 < y - x < 3$. Според тоа, $y - x = 1$ или $y - x = 2$. Понатаму имаме $3x = 2x + x < 2y + x < 27$, т.е. $x < 9$. Аналогно, $3y = 2y + y > 2x + y > 24$, т.е. $y > 8$. Сега ако $y = 9$, тогаш од $y - x = 1$ или $y - x = 2$ следува $x = 8$ или $x = 7$. Со непосредна проверка добиваме дека само $y = 9$ и $x = 8$ е решение (за $y = 9$ и $x = 7$ имаме $2x + y = 14 + 9 < 24$, што противречи на условот на задачата). Ако $y = 10$, тогаш единствена можност е $x = 8$, но тогаш $2y + x = 10 + 8 > 27$, што противречи на условот на задачата). Според тоа, единствено решение на задачата е $x = 8$ и $y = 9$.

30. Процентот на учениците кои во едно одделение, во однос на минатата учебна година, го зголемиле својот просечен успех е поголем од 2,9% и е помал од 3,1%. Колку најмалку ученици може да има во оваа одделение?

Решение. Нека x е бројот на учениците во одделението. Нека k ученици го зголемиле успехот. Тогаш $2{,}9 < \frac{100k}{x} < 3{,}1$, односно $\frac{1000k}{31} < x < \frac{1000k}{29}$, па затоа најмалиот број ученици во оваа одделение има за $k = 1$. Притоа важи $\frac{1000}{31} < x < \frac{1000}{29}$, т.е. $32\frac{8}{31} < x < 34\frac{14}{29}$. Значи, во случајов $x = 33$ или $x = 34$, што значи дека најмалиот можен број ученици е 33.

31. За Нова година секој од учениците во едно одделение му подарил на секое момче од одделението по едно чоколадо, при што биле подарени вкупно 300 чоколади. За Божик секој од учениците во тоа одделение му подарил на секое девојче од одделението по еден сок, при што биле подарени 350 сокови. Колку ученици имало во тоа одделение?

Решение. Нека во одделението има n момчиња и m девојчиња. Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} n(n+m-1)=300 \\ m(n+m-1)=350. \end{cases}$$

Ако втората равенка на системот ја поделиме со првата, добиваме $\frac{m(m+n-1)}{n(m+n-1)}=\frac{350}{300}$, т.е. $\frac{m}{n}=\frac{7}{6}$, од каде добиваме $m=\frac{7}{6}n$. Ако замениме во првата равенка од системот добиваме $n(n+\frac{7}{6}n-1)=300$, т.е.

$$\begin{aligned} &n(13n-6)=1800 \\ &13n^2-6n-1800=0 \\ &13n^2-156n+150n-1800=0 \\ &13n(n-12)+150(n-12)=0 \\ &(n-12)(13n+150)=0. \end{aligned}$$

Решенија на последната равенка се $n=12$ и $n=-\frac{150}{13}$. Јасно, второто решение не е можно, па затоа во одделението имало $n=12$ момчиња и $m=\frac{7\cdot 12}{6}=14$ девојчиња, т.е. вкупно $12+14=26$ ученици.

32. Бројот на учениците во одделението на Горјан е 29 и има повеќе од 15 девојчиња. За време на еден викенд момчињата отишле на екскурзија во Белград, а девојчињата во Солун. Следниот викенд момчињата отишле на екскурзија во Солун, а девојчињата во Белград. За втората екскурзија биле потрошени 310 евра повеќе пари отколку за првата. Колку момчиња има во оддлението на Горјан, ако цената за секоја од екскурзиите за еден ученик е точен број евра и не е променлива?

Решение. Нека бројот на момчињата е x. Тогаш бројот на девојчињата е $29-x$. Нека цената на екскурзијата за еден ученик за Белград е a евра, а за Солун е b евра. Од условот на задачата следува

$$ax+(29-x)b=bx+(29-x)a-310,$$

т.е.

$$(a-b)(29-2x)=310.$$

Според тоа, $29-2x$ е делител на 310. Но, овој број е непарен и од условот на задачата следува дека е поголем од 1 (момчињата се најмногу 13 и затоа $29-2x\geq 3$) и е помал од 29. Од друга страна $310=2\cdot 5\cdot 31$ и затоа $29-2x=5$, т.е. $x=12$. Значи, во одделението на Горјан има 12 момчиња и 17 девојчиња.

33. Чаша кока-кола, три сенвичи и седум кифли имаат цена од 127 денари. Чаша кока-кола, четири сендвичи и десет кифли имаат цена од 166 денари. Колку заедно чинат една чаша кока-кола, еден сендвич и една кифла?

Решение. Нека ги означиме цената на кока-колата со c, цената на сендвичот со s а цената на кофлата со k. Од условот на задачата имаме

$$c+3s+7k=127,$$

$$c+4s+10k=166.$$

Втората равенка можеме да ја запишеме во облик

$$(c+3s+7k)+(s+3k)=166,$$

од каде што добиваме $s+3k=166-127=39$.

Ако ги собереме почетните равенки, добиваме

$$(c+3s+7k)+(c+4s+10k)=293,$$

односно

$$2(c+s+k)+5(s+3k)=293,$$

па од $s+3k=39$ имаме

$$2(c+s+k)+5\cdot 39=293, \text{ т.е. } c+s+k=98:2=49.$$

Значи, еден сендвич, една кока-кола и една кифла заедно чинат 49 денари.

34. Три професори напишале збирка задачи по математика и го разделиле хонорарот во однос $8:6:5$. Ако хонорарот бил разделен во однос $7:5:4$, тогаш еден од професорите би добил 250 денари повеќе отколку што добил при првата поделба. По колку денари добил секој од авторите?

Решение. Нека вкупниот хонорар што го добиле тројцата професори е x денари. Тогаш првиот професор добил $\frac{8}{19}x$ денари, вториот $\frac{6}{19}x$ денари и третиот $\frac{5}{19}x$ денари . Ако хонорарот се раздели во однос $7:5:4$, тогаш првиот би добил $\frac{7}{16}x$, вториот $\frac{5}{16}x$ и третиот $\frac{4}{16}x$ денари. Бидејќи $\frac{8}{19}<\frac{7}{16}$, $\frac{6}{19}>\frac{5}{16}$ и $\frac{5}{19}>\frac{4}{16}$, следува дека при втората поделба првиот професор би добил 250 денари повеќе отколку при првата поделба , односно $\frac{7}{16}x-\frac{8}{19}x=250$. Оттука, $x=15200$. Значи, првиот професор добил 6400 денари, вториот 4800 денари и третиот 4000 денари .

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. МНОЖЕСТВА

1. Најди ги сите двоцифрени броеви x за кои две од следниве тврдења се вистинити, а две невистинити:
   1) x е делив со 5;
   2) x е делив со 23;
   3) $x+7$ е квадрат на некој природен број;
   4) $x-10$ е квадрат на некој природен број.

   Решение. Множествата кои соодветствуваат на тврдењата 1) – 4) се:
   - за 1) тоа е множеството $A=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95\}$,
   - за 2) множеството $B=\{23,46,69,92\}$,
   - за 3) множеството $C=\{18,29,42,57,74,93\}$ и
   - за 4) множеството $D=\{11,14,19,26,35,46,59,74,91\}$.

   Тогаш $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $A\cap D=\{35\}$, $B\cap C=\varnothing$, $B\cap D=\{46\}$, $C\cap D=\{74\}$. Од $A\cap D=\{35\}$ и $35\notin B, 35\notin C$ заклучуваме дека 35 е број за кој се точни тврдењата 1) и 4), а неточни тврдењата 2) и 3). Од $B\cap D=\{46\}$ и $46\notin A, 46\notin C$ заклучуваме дека 46 е број за кој се точни тврдењата 2) и 4), а неточни тврдењата 1) и 3). Од $C\cap D=\{74\}$ и $74\notin A, 74\notin B$ заклучуваме дека 74 е број за кој се точни тврдењата 3) и 4), а неточни тврдењата 1) и 2).
   Значи бараните двоцифрени броеви се 35, 46 и 74.

2. Нека S е подмножество од $\{1,2,...,9\}$, такво што збировите на секои два елементи од S се различни. На пример, множеството $\{1,2,3,5\}$ има такво својство, но множеството $\{1,2,3,4,5\}$ не, бидејќи $\{2,3\}$ и $\{1,4\}$ имаат збир 5. Колку најмногу елементи може да содржи S?

   Решение. Лесно се проверува дека $\{1,2,3,5,8\}$ го задоволува условот.
   Ќе покажеме дека S не може да содржи повеќе од 5 елементи.
   Нека S содржи барем шест елементи. Тогаш најмалиот можен збир на паровите е $1+2=3$, а најголемиот $8+9=17$, т.е. можни збирови се 3, 4, 5, ..., 17 (вкупно 15 збирови). Од друга страна имаме најмалку

$5+4+3+2+1=15$ различни парови. Според тоа, сите можни збирови се јавуваат по еднаш. Последното значи дека мора 1, 2 и 8, 9 да се во S. Но тогаш $1+9=2+8$. што противречи на условот.
Значи, максималниот број елементи што може да ги содржи S е 5.

3. Секое од множествата P и Q се состои од различни природни броеви помали од даден природен број n. Вкупниот број на елементи на множествата P и Q не е помал од n. Докажи дека постојат броеви $p \in P$ и $q \in Q$ за кои важи $p+q=n$.

Решение. Да го означиме со R множеството од сите природни броеви од облик $n-t$, каде $t \in \mathbb{Q}$, т.е. $R=\{n-t \mid t \in Q\}$. Множеството R има онолку елементи колку што има и множеството Q. Освен тоа броевите во R се различни меѓу себе и се помали од n. Од условот во P и R заедно има најмалку n броеви па според тоа ќе постои број што припаѓа на P и број што припаѓа на R, т.е. постојат $p \in P$ и $q \in Q$, такви што $p=n-q$, т.е. $p+q=n$.

4. За едно множество **M** што содржи 4 елементи велиме дека е „парно сврзано” ако за секој елемент x во **M**, барем еден од броевите $x-2$ или $x+2$ припаѓа исто така во **M**. Нека S_n е бројот на „парно сврзани” подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Определи го најмалиот број n таков што $S_n \geq 2011$.

Решение. Нека $\mathbf{M}=\{a,b,c,d\}$ е „парно сврзано” множество. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d$. Бидејќи $a-2$ не припаѓа на **M**, следува дека $a+2$ е во **M**. Исто така бидејќи $d+2$ не припаѓа на **M**, следува дека $d-2$ е во **M**. Можни се следниве случаи:

i) $b=a+2; b=d-2$, т.е. $d=b+2=a+4$. Овој случај не е можен бидејќи тогаш $c=a+3$ и множеството **M** е од обликот $\{a,a+2, a+3,a+4\}$, но $a+1,a+5 \notin \mathbf{M}$.

ii) $b=a+2; c=d-2$, т.е. $d=c+2$. Следува дека **M** е од обликот $\{a,a+2,c,c+2\}$, $c-a>2$. Овој облик ќе го наречеме **облик 1**.

iii) $b=a+2; a=d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $b=d$.

iv) $c=a+2; b=d-2$. Следува $b=a+1$ и $d=a+3$ и множеството **M** е од обликот $\{a,a+1,a+2,a+3\}$. Овој облик ќе го наречеме **облик 2**.

v) $c = a+2; c = d-2$. Следува дека $b = a+1$, $d = a+4$ и множеството **M** е од обликот $\{a, a+1, a+2, a+4\}$, но $a-1, a+3 \notin \mathbf{M}$. Значи и овој случај не е можен.

vi) $c = a+2; a = d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $c = d$.

vii) Случајот $d = a+2$ не е можен.

Со тоа се исцрпени сите можности за облик на **M**.

Нека n е доволно голем. За $\{1, 2, ..., n\}$, „парно сврзани" подмножества од **облик 2** се вкупно $n-3$. Останува да го пресметаме бројот на „парно сврзани" подмножества од **облик 1**.

Ако $a=1$ постојат вкупно $n-5$ различни подмножества.

Ако $a=2$ постојат вкупно $n-6$ различни подмножества.

Ако $a=3$ постојат вкупно $n-7$ различни подмножества.

....

Ако $a = n-5$ постои само едно такво подмножество.

Значи бројот на „парно сврзани" подмножества од **облик 1** се вкупно

$$1+2+...+(n-5) = \frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{n^2-9n+20}{2}.$$

Значи, вкупниот број на „парно сврзани" подмножества на $\{1, 2, ..., n\}$ изнесува

$$S_n = n-3+\frac{n^2-9n+20}{2} = \frac{n^2-7n+14}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}+1.$$

Треба да го одредиме најмалиот n за кој $\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1 \geq 2011$, односно

$$(n-3)(n-4) \geq 4020.$$

Со проверка се добива дека $n \geq 67$. Значи најмалиот број е 67.

5. Нека M е множество точки во рамнината кое го има следново својство: За секој природен број $n, 1 \leq n \leq 5$ постои права на која лежат точно n точки од множеството M. Определи го најмалиот можен број точки на множеството M.

Решение. Ќе користиме дека една права е еднозначно определена со две различни точки. Да ја означиме со a_5 правата која минува точно низ 5 точки од множеството M. Аналогно нека a_4 е правата која минува точно низ 4 точки од множеството M и a_3 е правата која минува точно низ 3 точки од множеството M. Јасно, правите a_3, a_4, a_5 се по парови различни. Тоа значи дека најмалку три од точките во M кои лежат на a_4 не лежат на a_5. Исто така, барем една од точките во M која лежи на a_3 не лежи истовремено на a_4 и a_5. Последното значи дека множеството M има најмалку $5+3+1=9$ точки. Ако разгледаме произволен триаголник ABC и на страната AB земеме произволни точки C_1, C_2, C_3, на страната BC земеме произволни точки A_1, A_2, а на страната AC земеме произволна точка B_1, тогаш множеството $\{A, B, C, C_1, C_2, C_3, A_1, A_2, B_1\}$ има точно 9 елементи и ги задоволува условите на задачата.

6. Нека a и b се природни броеви поголеми од 2. Докажи дека постои позитивен цел број k, и конечна низа $n_1, n_2, ..., n_k$ од природни броеви, така што $n_1 = a,\ n_k = b$, и $(n_i + n_{i+1}) \mid n_i n_{i+1}$, $\forall i = 1,...,k$.

Решение. Пишуваме $a \leftrightarrow b$, ако постои бараната низа. Лесно се гледа дека "$\leftrightarrow$" е релација за еквиваленција.

Да забележиме дека за секој $n,\ n \geq 3$, важи $n \leftrightarrow 2n$, и бараната низа е:

$$n_1 = n,\ n_2 = n(n-1),\ n_3 = n(n-1)(n-2),\ n_4 = n(n-2),\ n_5 = 2n .$$

За природен број $n,\ n \geq 4$, $n' = (n-1)(n-2) \geq 3$, па следува

$$n' \leftrightarrow 2n'. \tag{1}$$

За $n \geq 4$, имаме:

$$n_1 = n,\ n_2 = n(n-1),\ n_3 = n(n-1)(n-2),$$
$$n_4 = n(n-1)(n-2)(n-3),\ n_5 = 2(n-1)(n-2) = 2n'$$

т.е.

$$n \leftrightarrow 2n' \tag{2}$$

и

$$n_1' = n' = (n-1)(n-2),\ n_2' = n-1$$

т.е.

$$n' \leftrightarrow n-1 \tag{3}$$

Од (1), (2), (3) добиваме:

$$n \leftrightarrow 2n',\quad 2n' \leftrightarrow n',\quad n' \leftrightarrow n-1,$$

Од транзитивност, добиваме

$$n \leftrightarrow n-1, \text{ за секој природен број } n,\ n \geq 4,$$

односно, заради симетричност

$$n \leftrightarrow n+1, \text{ за секој природен број } n,\ n \geq 3.$$

Одовде, лесно, може, секои два природни a и b, да се поврзат со оваа релација, од каде добиваме дека бараното тврдење важи.

IV.2. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

7. Правоаголна мрежа 2×10 се пополнува со броевите од 1 до 20, на следниов начин. Во првиот ред се броевите од 1 до 10, разместени произволно. Во вториот се броевите од 11 до 20, и уште, ако бројот во некое поле од првиот ред е непарен тогаш бројот запишан во полето под него мора да биде парен. Докажи дека при било кое распоредување на броевите 1 до 20 секогаш постојат две колони со еднаков збир.

 Решение. Имаме по 5 парни и 5 непарни броеви во двата реда и според условот двата броја во една колона мора да се со различна парност.

 Затоа збирот на броевите во било која колона е непарен број, и е поголем од $12=1+11$, а помал од $30=10+20$. Според тоа, имаме 9 можности $(13,15,...,29)$, а 10 колони, па од Принципот на Дирихле барем две од нив имаат еднаков збир.

8. Дадено е множество од 7 природни броеви кои имаат различни остатоци при делење со 20. Докажи дека од тоа множество може да избереме 4 броја a,b,c и d така што бројот $a+b-c-d$ е делив со 20.

 Решение. Од даденото множество може да избереме два броја a и b на $\frac{7\cdot6}{2}=21$ начини. За секој таков избор го формираме збирот $a+b$ и го одредуваме остатокот при делење со 20. Значи добиени се 21 остатоци. Но при делење со 20 можат да се добијат 20 остатоци, па меѓу добиените остатоци има барем два исти. Според тоа постојат два пара броеви, пар a и b и пар c и d, така што $a+b$ и $c+d$ имаат ист остаток при делење со 20. Броевите a,b,c и d се различни меѓу себе, бидејќи во спротивно, ако $a=c$, тогаш b и d ќе имаат ист остаток при делење со 20, што не е можно. Значи, бараниот број е $a+b-c-d$.

9. Докажи дека меѓу 11 природни броеви секогаш има шест чиј збир е делив со 6.

 Решение. Меѓу секои пет природни броеви, постојат три чиј збир е делив со три (од принципот на Дирихле, меѓу произволни пет броеви секогаш има три кои даваат ист остаток при делење со три или има три броеви кои даваат различни остатоци при делење со 3). Тие формираат група броеви I.

Броевите од групата I ги тргаме настрана од 11-те броја, а постапката се повторува со останатите осум броја. Од нив произволно избираме пет. Меѓу нив постојат три чиј збир е делив со три и тие ја формираат групата броеви II. Нив ги отстрануваме. Од последните пет броеви формираме III група од три броја чиј збир е делив со 3.

Од трите групи од по три броја чии збирови се деливи со три, бираме две групи кои имаат збир со иста парност. Тие ја формираат бараната група од шест броја. Збирот на овие шест броја е делив со 2, а исто така и со 3, значи е делив со 6.

10. Дадени се девет природни броеви кои имаат прости делители помали или еднакви на 5. Докажи дека може да се изберат два од нив така што нивниот производ да биде квадрат на природен број!

Решение. Нека M е множеството од дадените девет природни броеви. Тогаш е јасно дека $M \subset N = \{2^i 3^j 5^k \mid i, j, k \in \{0,1,2,...\}\}$. Означуваме $N_{m,n,p}$, $m, n, p \in \{0,1\}$ подмножество од N каде m, n, p се 0 ако степенот на 2, 3, 5 соодветно се парни и 1 ако степенот на 2, 3, 5 соодветно се непарни. Значи постојат 8 подмножества $N_{m,n,p}$ од N (секое од m, n, p може да добие по две вредности). Подмножествата $N_{m,n,p}$ се меѓу себе дисјунктни и нивната унија е N. Од принципот на Дирихле од дадените девет природни броеви постојат два кои припаѓаат на едно од множествата $N_{m,n,p}$. Нека се тоа броевите x и y. Значи

$$x = 2^{2a+m}3^{2b+n}5^{2c+p},\ y = 2^{2d+m}3^{2e+n}5^{2f+p}$$

па

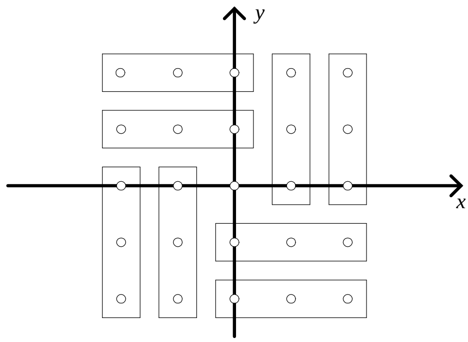
$$xy = 2^{2(a+d+m)}3^{2(b+e+n)}5^{2(c+f+p)} = (2^{a+d+m}3^{b+e+n}5^{c+f+p})^2.$$

11. За множеството $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ од правоаголен координатен систем се избрани 17 точки од множеството $S \times S$. Докажи дека постојат три точки A, B, C од избраните, такви што B е средина на отсечката AC.

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) Координатниот почеток е во избраните 17 точки. Од преостанатите 24 точки ќе формираме 12 пара точки. Точките од еден пар се централно симетрични во однос на координатниот почеток. Бидејќи бројот на парови е 12, а бројот на избрани точки е поголем од 13 во еден пар двете точки ќе бидат од избраните точки. Координатниот почеток и тие две точки се бараните точки. За B се бира координатниот почеток, а точките од парот се A и C.

б) Координатниот почеток не е во избраните 17 точки. Преостанатите 24 точки ќе ги разбиеме во групи по три точки како на цртежот. Во една од групите, според принципот на Дирихле, имаме три точки од избраните. Навистина, ако претпоставиме спротивно, т.е. дека во секоја група имаме најмногу две точки од избраните 17 точки, тогаш сме избрале не повеќе од 16 точки, контадикција.



Групата од точки во која сите три точки се од избраните се бараните три точки. Средната од нив е B а крајните се A и C.

12. Во рамнината се дадени 50 точки, такви што било кои три од нив не лежат на една права. Секоја од дадените точки е обоена во една од четири дадени бои. Докажи дека постои боја и најмалку 130 разнострани триаголници чии темиња се обоени во таа боја.

Решение. Нека n е произволен природен број и дадени се n точки во рамнина, такви што било кои три од нив не лежат на една права. За било кои две од нив, постојат најмногу два рамнокраки триаголници со основа отсечката што ги сврзува двете точки што сме ги избрале. Заради тоа, максималниот број на рамнокраки триаголници, со темиња во две избрани точки е

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n(n-1).$$

Кога од вкупниот број на триаголници го одземеме максималниот број на рамнокраки триаголници, го добиваме минималниот број на разнострани триаголници. Тој минимален број е

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}, \text{ за } n > 8.$$

Сега ќе се вратиме на задачата. Бројот 50 можеме да го запишеме во облик $50 = 4\cdot 12 + 2$. Според принципот на Дирихле, постои барем една боја во која се обоени најмалку 13 точки. Во тој случај, според првиот дел од задачата, за $n=13$ најмалиот број на разнострани триаголници е $\frac{13\cdot 12\cdot 5}{6}=130$.

Значи, постојат 130 разнострани триаголници чии темиња се обоени во иста боја.

13. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се m точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Два делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Прво го определуваме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120°. Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180°, бројот на делбени триаголници е: $\frac{m\cdot 360^\circ+6\cdot 120^\circ}{180^\circ}=2m+4$.

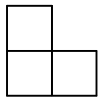
Нека претпоставиме спротивно на тврдењето, односно дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од $(2m+4)\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголникот е еднаква на $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

14. Во правилен шестаголник чија страна е $a=2\text{cm}$, на случаен начин се распоредени 51 точка, при што некои се обоени во сина, а некои во црвена боја. Докажи дека постојат барем две точки во иста боја чие растојание не е поголемо од $1cm$.

Решение. Повлекуваме отсечки кои го сврзуваат центарот на шестаголникот со неговите темиња. Шестаголникот е разделен на шест рамнострани триаголници со страна $2cm$. Во секој од овие триаголници ги повлекуваме средните линии, со што тие се делат на четири рамнострани триаголници со страна $1cm$. Растојанието меѓу кои било две точки од овие триаголници со страна $1cm$ не е поголемо од $1cm$. Бројот 51 е непарен, па бројот на точки од една боја е поголем од бројот на точки од другата боја. Нека x е бројот на црвени точки и е поголем од бројот на сини точки. Тогаш, $x > 51 - x$, од каде $2x > 51$, па $x > 25$. Бројот на рамностраните триаголници со страна $1cm$ е 24, а бројот на црвени точки е поголем од 25, што значи дека во еден од овие триаголници има барем две црвени точки чие растојание не е поголемо од $1cm$.

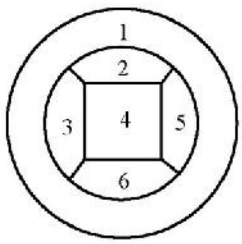
15. На шаховска табла поставени се 31 жетон. Докажи дека при било кое разместување на жетоните на полињата на таблата, секој жетон на едно поле, секогаш постои „место“ за сместување на триаголно тримино (цртеж десно) на полиња на кои нема поставено жетон).



Решение. Ја делиме дадената табла на 16 квадрати 2×2. Тогаш бидејќи имаме 31 жетон и 16 квадрати следува дека постои квадрат кој „содржи“ најмногу еден жетон (бидејќи ако таков квадрат не постои, би требало секој од 16-те квадрати да содржи барем по 2 жетона, т.е. вкупно би имале најмалку $16 \cdot 2 = 32$ жетони, што не е можно). Во тој квадрат може да се смести бараната фигура.

IV.3. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

16. Едно царство е поделено на шест области (цртеж десно). Управителите на областите биле вистинољупци, кои секогаш ја говорат вистината, или лажливци кои секогаш лажат. Секој од нив изјавил: „Најмалку тројца од моите соседи се лажливци.“ Колку вистинољупци има меѓу управителите.



Решение. Секоја област се граничи со точно 4 области. Не е можно сите шест управители да се лажливци, бидејќи во спротивно нивните тврдења ќе бидат вистинити. Значи, барем еден од шесте управители е вистинољубец. Да претпоставиме дека само еден е вистинољубец. Бидејќи секој управител има точно четири соседи, заклучуваме дека управителот кој не е сосед на вистинољубецот исто така мора да е вистинољубец (ако е лажливец, тогаш неговото тврдење че биде точно). Значи, вистинољупци се најмалку двајца и тие не се соседи. Ако има трет вистинољубец, тогаш тој сигурно е сосед на некој од прите два вистинољупци и тоа доведува до противречност. Значи има два вистинољупци и можните парови вистинољупци се: $(1,4)$, $(2,6)$ и $(3,5)$.

17. На табла се запишани пет цели броја. Собирајќи ги по парови добиени се следните збирови: $0;2;4;4;6;8;9;11;13;15$. Одреди ги целите броеви! Дали може, тргнувајќи од пет цели броеви и собирајќи ги по парови да се добијат следниве збирови: $12;13;14;15;16;16;17;17;18;20$?

Решение. Да забележиме дека меѓу петте цели броеви нема два еднакви броја, затоа што, во спротивно, ќе имаме повеќе од два пара еднакви збирови. Значи, бараните цели броеви се различни меѓу себе.
Ако ги собереме првите дадени збирови се добива
$$0+2+4+4+6+8+9+11+13+15=72.$$
Од условот на задачата имаме дека секој цел број од петте запишани на табла во овој збир учествува точно четири пати, па збирот на петте цели броеви е еднаков на $72:4=18$.
Да ги означиме петте цели броеви со a,b,c,d,e и притоа
$$a<b<c<d<e.$$
Од дадените збирови имаме дека најмалиот збир е 0, најголемиот збир е 15, а збирот на петте цели броеви е 18, па мора
$$c=18-(a+b)-(d+e)=18-0-15=3, \text{ т.е. } a<b<3<d<e.$$
Според вредностите на дадените збирови, вториот по ред збир е добиен од првиот и третиот цел број т.е. $a+c=2$, па $a=2-3=-1$. Бидејќи збирот на првите два цели броја е еднаков на 0, следува дека вториот цел број е еднаков на 1, т.е. $b=0-(-1)=1$. Аналогно, претпоследниот по ред збир е добиен од третиот и последниот цел број т.е. $c+e=13$, па $e=13-3=10$. Конечно од последниот збир добиваме дека $d=15-10=5$. Значи бараните броеви се: $-1;1;3;5;10$.
Ако, пак, ги собереме вторите дадени збирови се добива
$$12+13+14+15+16+16+17+17+18+20=158.$$
Но бројот 158 не е делив со 4, па такви цели броеви не постојат.

18. На кружницата во произволен редослед се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 9 и се пресметани збировите на секои три последователни (соседни) броја. Со M да го означиме најголемиот од сите добиени

збирови. Определи ја најмалата можна вредност на M (по сите можни распоредувања на броевите на кружницата).

Решение. Нека претпоставиме дека постои распоредување $a_1, a_2, ..., a_9$ на броевите за кое важи $M = 15$. Тоа значи дека се точни неравенствата

$a_1 + a_2 + a_3 \le 15,\ a_2 + a_3 + a_4 \le 15, .., \ a_8 + a_9 + a_1 \le 15,\ a_9 + a_1 + a_2 \le 15$.

Во овие неравенства секој од деветте броеви се јавува точно три пати, па затоа ако ги собереме неравенствата и поделиме со 3 добиваме $a_1 + a_2 + ... + a_9 \le 45$. Од друга страна

$$a_1 + a_2 + ... + a_9 = 1 + 2 + ... + 9 = 45,$$

Што значи дека во последното неравенство важи равенство. Тоа значи дека во сите девет неравенства важи равенство, па затоа

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 \text{, т.е. } a_1 = a_4,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека случајот $M = 15$ не е можен. Со аналогни размислувања се докажува дека случајот $M < 15$ не е можен. Следниов пример покажува дека најмалата можна вредност е 16. Навистина, бројот 16 се добива за распоредот 1, 9, 5, 2, 8, 4, 3, 7, 6.

19. На шаховски турнир учествувале 80 шахисти при што секој шахист одиграл точно една партија со секој друг шахист. На крајотод турнирот се покажало дека секој шахист освоил различен број бодови, при што бодовите на вториот шахист биле колку што бил збирот на бодовите што ги освоиле последните тринаесет пласирани шахисти. Колку бодови освоил шахистот кој го освоил третото место со шахистите кои го освоиле 69-то, 71-то, 72-то и 73-то место? (Во шахот за победа се добива 1 бод, за пораз 0 бодови и за нерешен резултат 0,5 бодови.)

Решение. Шахистите кои ги освоиле последните 13 места меѓу себе играле $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ партии, од кои распределиле 78 бодови. Значи, шахистот кој го освоил второто место освоил најмалку 78 бодови. Но, тој играл 79 партии и не може да освои 79 бодови, бидејќи тогаш победникот треба да има повеќе од 79 бодови, што не е можно. Вториот не можел да освои 78,5 бодови, бидејќи тогаш тој нема да има изгубена партија, а во исто време првиот шахист треба да има 79 бодови, т.е. да ги победил сите партии, што повторно не е можно. Значи, единствена можност е вториот шахист да има 78 бодови, а тоа значи дека шахистите кои се пласирале на последните 13 места вкупно освоиле 78 бодови, т.е. тие ги загубиле партиите кои ги играле со сите останати шахисти. Значи, овие шахисти ги загубиле партиите и со шахистот кој го освоил третото место, па затоа овој шахист со шахистите кои го освоиле 69-то, 71-то, 72-то и 73-то место освоил точно 4 бода.

20. Дадени се 19 тегови со различни маси: $1g, 2g, ..., 18g, 19g$. Од нив девет се железни, девет се бронзени и еден е сребрен. Железните тегови имаат вкупно $90g$ поголема маса од бронзените. Колкава е масата на сребрениот тег?

Решение. Ако деветте бронзени тегови имат вкупна маса x, тогаш вкупната маса на железните тегови е $90+x$. Нека масата на сребрениот тег е y. Бидејќи $1+2+3+...+19=190$, добиваме дека

$$2x+90+y=190 \text{, т.е. } 2x+y=100 .$$

Според тоа, y е парен број и ако ставиме $y=2z$ добиваме $x+z=50$. Можната најмала вредност на x е $1+2+3+...+9=45$, што значи дека можните вредности на z се 5, 4, 3, 2 и 1. Ако $z=1,2,3$ или 4, тогаш $y=2,4,6$ или 8, соодветно. Но, тогаш ниту еден од броевите $x=49,48,47$ и 46 не може да се запише како збир на девет од останатите тегови (Зошто?). Значи, $z=5$, т.е. $y=10$, и притоа

$$x=45=1+2+3+...+9 \text{ и } x+90=135=11+12+...+19 .$$

21. Дадени се 12 летви секоја со дожина $13\,dm$. Секоја летва е поделена на неколку парчиња, од кои што се направени 13 триаголници. Секој од нив е направен од парчиња со должини $3dm, 4dm$ и $5dm$.

На кој начин треба да се исечат 12-те летви?

Решение. Периметарот на секој од триаголниците е

$$3dm+4dm+5dm=12\ dm .$$

Збирот на сите периметри е $13\cdot 12dm=156\ dm$, т.е. еднаков на збирот на должините на сите стапчиња. Значи, сите стапчиња се исечени така што секое делче кое е добиено е искористено.

Бројот 13 може да се запише како збир од тројки, четворки и петки на следниве три начини

I начин: $13=3+3+3+4$ (x-стапчиња)

II начин: $13=4+4+5$ (y-стапчиња)

III начин: $13=3+5+5$ (z-стапчиња)

Нека x-стапчиња се исечени на првиот начин, y-стапчиња се пресечени на вториот начин и z-стапчиња се пресечени на третиот начин. Сега се добиваат равенствата

$x+y+z=12$, затоа што бројот на стапчиња е 12

$3x+z=13$, има 13 дела со должина $3\ dm$

$x+2y=13$, има 13 дела со должина $4\ dm$

$y+2z=13$, има 13 дела со должина $5\ dm$.

Веќе не е тешко да се определат вредностите за x, y и z. Навистина,

$$x=13-2y$$
$$z=13-3x=13-3(13-2y)=6y-26$$

од каде добиваме

$$13-2y+y+6y-26=12$$
$$5y-13=12$$

Значи, $y=5$ стапчиња треба да се исечат на делови $4\ dm, 4\ dm, 5\ dm$, $x=3$ стапчиња треба да се исечат на четири дела со должини $3\ dm, 3\ dm, 3\ dm, 4\ dm$ и $z=4$ стапчиња треба да се исечат на три дела со должини $3\ dm, 5\ dm, 5\ dm$.

22. Синџир составен од 23 алки може да се подели на делови со отворање на некоја алка. Ако се отвори крајна алка, тогаш синџирот се дели на два дела при што едниот дел е крајната алка. Во спротивен случја деловите се три при што еден од нив е самата алка. Колку алки најмалку треба да се отворат за да е можно да се формира синџир од произволен број алки од 1 до 23?

Решение. Бидејќи синџирите се 23 (за секој број од 1 до 23), деловите треба да се такви што ќе може да се групираат на најмалку 23 начини. Ако деловите се четири, можните начини на групирање се: 4 пати по еден, 6 пати по два, 4 пати по три и еднаш четири, т.е. вкупно $4+6+4+1=15<23$. Заклучуваме дека треба да имаме најмалку пет делови и тогаш групирањата се: 5 пати по еден, 10 пати по два, 10 пати по три, 5 пати по четири и еднаш пет дела, т.е. вкупно $31>23$ групирања.

Пет дела може да се добијат со отварање на најмалку 2 алки: отварање на средна алка во почетниот синџир и отварање на средна алка во еден од двата дела со повеќе од една алка. Значи, треба да се отворат најмалку две алки. Ќе докажеме дека тоа е доволно. Почетниот синџир ќе го поделиме на три дела: 1 средна алка, дел од 12 алки и дел од 10 алки. Сега делот од 10 алки ќе го поделиме на три дела: 1 средна алка, дел од 3 алки и дел од 6 алки. Значи, имаме 1, 1, 3, 6 и 12 алки. Со овие броеви како збир може да се добие секој број од 1 до 23. Навистина:

$1=1$,	$1+6=7$,	$1+12=13$,	$1+6+12=19$,
$1+1=2$,	$1+1+6=8$,	$1+1+12=14$,	$1+1+6+12=20$,
$3=3$,	$3+6=9$,	$3+12=15$,	$3+6+12=21$,
$1+3=4$,	$1+3+6=10$,	$1+3+12=16$,	$1+3+6+12=22$,
$1+1+3=5$,	$1+1+3+6=11$,	$1+1+3+12=17$,	$1+1+3+6+12=23$.
$6=6$,	$12=12$,	$6+12=18$,	

23. Дадено е купче со 2010 жетони. Еден жетон вадиме од купчето и остатокот го делиме произволно на две купчиња. Понатаму, избираме произволно купче од добиените две купчиња, вадиме еден жетон и остатокот произволно го делиме на две купчиња итн. Дали е можно по конечен број повторувања на оваа постапка да добиеме неколку купчиња така што во секое од нив да има по три жетони?

Решение. Нека на почетокот во првото купче имаме 2010 жетони.

По секој чекор да го разгледаме збирот S, на бројот на купчиња и бројот на жетони кои што се наоѓаат во нив. Имаме

$$S_0=1+2010=2011,$$

$$S_1=2+(2010-1)=2011,$$

$$S_2=3+(2009-1)=2011$$

итн. т.е. S е инавријанта (не се менува), при било кој чекор.

Нека претпоставиме дека бараната состојба е можна, т.е. нека по конечен број чекори сме добиле n купчиња секое со по 3 жетони. Тогаш од претходното имаме $S=n+3n=4n$, односно $2011=4n$, што не е можно. Според тоа бараната состојба не може да се достигне.

24. На табла се запишани броевите $1,2,...,2009$. Се бришат неколку од нив и на нивно место на таблата се запишува остатокот добиен при делењето на збирот на избришаните броеви со 13. По одреден број повторувања на оваа постапка на таблата останале само три броја, од кои двата се 99 и 999. Да се определи третиот број кој останал на таблата.

Решение. Нека третиот број е x. Јасно, по секој чекор остатокот при делење со 13 на збирот на броевите запишани на таблата не се менува, т.е. тој е инваријантен во однос на делењето со 13. Имаме,

$$1+2+3+...+2009=\frac{2009\cdot 2010}{2}=1005\cdot 2009,$$

т.е. при делење на збирот на броевите со 13 се добива остаток 2. Значи, $99+999+x$ треба да дава остаток 2 при делење со 13. Бидејќи $99+999=1098$, т.е. дава остаток 6 при делење со 13 и 99 и 999 не се остатоци при делење со 13, следува дека x е остаток, т.е. $0\le x<13$. Но, $6+x$ при делење со 13 треба да дава остаток 2, па оттука заклучуваме дека $x=9$.

25. Марта игра компјутерска игра „Уништи ги балоните“. Во секој потег Марта може да уништува точно по $1, 11, 15$ или 27 балони. При тоа на екранот ако уништи 1 балон се појавуваат точно 10 нови балони, ако уништи 11 балони се појавуваат точно 8 нови балони, ако уништи 15 балони не се појавува ниту еден нов балон, и ако унишшти 27 балони се појавуваат точно 36 нови балони. Марта победува ако на екранот ги уништи сите балони. Дали ако на почетокот на екранот имало 102 балони, Марта може да победи?

Решение. Марта може да победи, бидејќи еден редослед по кој ќе уништува балони е

$$15, 15, 15, 15, 15, 15, 11, 1, 11, 15.$$

Забелешка. Да забележиме дека во секој чекор разликата на појавени и уништени балони е број кој е делив со 3. Бројот 102 е делив со 3. Не е тешко да се провери дека ако бројот на балоните е број кој не е делив со 3 Марта не може да ги уништи сите балони во било кој број чекори.

26. Даден е лист во облик на правилен шестаголник со плоштина $2010\,cm^2$. Притоа Александар и Елена играат игра. Играта се состои во ставање на кружни парички со плоштина $1\,cm^2$ на листот на тој начин што паричките мора да бидат целосно во листот и не смеат да се преклопуваат. Прв почнува со ставање Александар. Победник во играта е оној кој што ќе стави последен паричка на листот. Докажи дека ако Александар игра добро, може да ја добие играта без разлика како ќе игра Елена.

Решение. Александар ја става првата паричка така што центарот на паричката ќе се совпадне со центарот на шестаголникот. Елена мора да стави паричка во слободниот простор, а Александар ја става неговата паричка на положбата која е централно симетрична на положбата од паричката на Елена во однос на центарот на шестаголникот. Така, ако има место на листот каде Елена ќе постави паричка, ќе има место и за наредната паричка која ќе ја стави Александар. Јасно, играта завршува по конечен број чекори и Александар е оној кој ќе стави паричка на листот последен, т.е. Александар ќе биде победник.

27. Ана и Бојан се договараат да играат ваква игра: Прво Ана кажува број од 1 до 7 (може и 1 и 7), потоа Бојан на кажаниот број додава еден од броевите меѓу 1 и 7 (може и 1 и 7) и го кажува збирот, па истото тоа го прави Ана итн. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Ана може да биде сигурна дека таа прва ќе го каже бројот 100 со правилен избор на првиот број, или ако еднаш згреши, дали може да победи Бојан?
Како треба да игра Ана за да таа победи? Дали во играта може да победи Бојан и ако може образложи како?
Решение. Ана ќе биде сигурна во победата ако постигне прва да каже 92, бидејќи Бојан може најмногу да каже 99, па таа ќе каже 100. Значи Ана треба да каже 92, 84, 76,..., значи да почне со бројот 4, па потоа број секогаш за 8 поголем (што е можно, бидејќи Бојан може максимално да додаде 7, а Ана најмалку 1).
Ако Ана еднаш згреши, т.е. каже некој број кој не е од облик $4+8k$, $k=0,1,2,...,11$, Бојан може да го искористи така што да го каже најблискиот број од облик $4+8k$ и да продолжи да игра како што би требало да игра Ана ако не згрешеше.

28. Околу тркалезна маса седнале неколку луѓе нумерирани во насока на стрелките на часовникот. Првиот од нив има 1 евро повеќе од вториот, вториот има 1 евро повеќе од третиот итн. $n-1$ има 1 евро повеќе од $n-$ от. Првиот дава на вториот 1 евро, вториот дава на третиот 2 евра итн. $n-1$ от дава на $n-$ от $n-1$ евро и $n-$ от дава $n-$ евра на првиот. Играта продолжува од почеток (првиот дава 1 евро на вториот итн.) се додека е можно. На крајот од играта се покажало дека еден од играчите имал четири пати повеќе евра од еден од неговите соседи.

Колку луѓе седеле на масата и колку пари на почетокот од играта имал „најсиромашниот“ од нив?

Решение. Нека во играта учествувале $n-$луѓе, а „најсиромашниот“ од нив, т.е $n-$от на почетокот од играта нека имал $x-$евра. Од условот на задачата по првиот „круг“ на играта учесниците имале (по редот на нумерирање):

$$x+2n-2, x+n-3, ..., x+1, x, x-1 \text{ евра.}$$

Следува дека играта може да продолжи x „кругови“ по кои учесниците ќе имаат соодветно : $x+(x+1)(n-1), n-2, n-3, ..., 2, 1, 0$ евра. Од тоа што броевите $0, 1, 2, ..., n-2$ се последователни природни броеви само првиот може да има четири пати повеќе од својот сосед. Но негови соседи се вториот и $n-$от. Од тоа што последниот има 0 евра на крајот од играта добиваме:

$$x+(x+1)(n-1)=4(n-2)$$

$$x=\frac{3n-7}{n}=3-\frac{7}{n}$$

За $n=1$ се добива $x<0$ што не е можно, па $n=7$ и $x=2$.

29. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Алиса и Боб, ја играат следнава игра:

- Алиса избира n природни броеви, не секогаш различни,
- Алиса ги запишува сите по парови збирови на лист хартија и листот му го дава на Боб (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви збирови, не секогаш различни),
- Боб победува ако ги погоди почетните n избрани броеви од Алиса со само едно погодување.

Дали може Боб да биде сигурен дека ќе победи во следните случаи:

а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$

Објасни го твојот одговор.

(На пример, кога $n=4$, Алиса може да ги избере броевите 1, 5, 7, 9, кои имаат исти по парови суми како и броевите 2, 4, 6, 10, па затоа Боб не може да биде сигурен дека ќе победи.)

Решение. а) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e$ се броевите избрани од Алиса. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 4 пати, со собирање на сите 10 по парови добиени збирови и делење на резултатот со 4, Боб го добива збирот $a+b+c+d+e$. Со одземање на најмалиот и најголемиот по парови збир $a+b$ и $d+e$ тој го добива c. Со одземање на c од вториот најголем по парови збир $c+e$ тој го добива e. Одземајќи го e од најголемиот по парови збир $d+e$ тој го добива d. На ист начин може да ги добие и a и b.

б) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e \le f$ се броевите избрани од Алиса. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 5 пати, со собирање на добиените 15 по парови збирови и делење на резултатот со 5, Боб го добива збирот $a+b+c+d+e+f$. Со одземање на најмалиот и најголемиот добиен по парови збир $a+b$ и $e+f$ тој го добива збирот $c+d$.

Со одземање на најмалиот и вториот најголем по парови збир $a+d$ и $d+f$ од $a+b+c+d+e+f$ тој го добива збирот $c+e$. На сличен начин може да го добие $b+d$. Тој ги користи нив за да ги добие $a+f$ и $b+e$.

Сега $a+d$, $a+e$, $b+c$ се трите најмали меѓу останатите шест добиени по парови збирови. Ако Боб ги собере овие три пара и притоа од нив ги одземе $c+d$ и $b+e$ и добиениот резултат го подели со 2, тој го добива a. Потоа тој може да ги одреди останатите броеви.

в) Не. Ако Алиса ги избере осумте броеви 1,5,7,9,12,14,16,20 тогаш Боб не може да биде сигурен дека точно ќе ги погоди осумте броеви, бидејќи броевите 2,4,6,10,11,15,17,19 ги даваат точно истите 28 по парови добиени збирови како и претходните броеви.

30. Од дадена тројка природни броеви добиваме нова тројка кога секој број од првата тројка се замени со збирот на другите два броја. Така, на пример, од тројката $(3,7,9)$ се добива тројката $(16,12,10)$, а од неа се добива тројката $(22,26,28)$ итн. По колку чекори од тројката $(1,2,3)$ може да се добие тројка во која еден од броевите ќе биде 2013?

Решение. Ќе докажеме некои својства на разгледуваната операција. Ако (a,b,c) е произволна тројка, од неа се добива тројката $(b+c,c+a,a+b)$. Збирот на броевите во втората тројка е двапати поголем од збирот на броевите во првата тројка. Сега со математичка индукција лесно се докажува дека:

Својство 1. По n чекори од тројката (a,b,c) се добива тројка во која збирот на броевите е еднаков на $2^n(a+b+c)$.

Да ја разгледаме тројката $(k,k+1,k+2)$. Од неа се добива тројката $(2k+3,2k+2,2k+1)$, а од неа тројката $(4k+3,4k+4,4k+5)$.

Според тоа, важи:

Својство 2. Од тројка со три последователни броја се добива нова тројка во која броевите исто така се последователни. Притоа, ако броевите во тројката се во растечки (опаѓачки) редослед, тогаш броевите во новата тројка се во опаѓачки (растечки) редослед.

Нека претпоставиме дека таква тројка може да се добие. Согласно својството 2 тоа значи дека за тројка со 2013 има три можности и тоа во неа да се броевите: 2011, 2012 и 2013; 2012, 2013 и 2014; 2013, 2014 и 2015. Збирот на броевите во овие случаи е: 6026, 6039 и 6042. Имаме $6036=6\cdot 1006$ и $6042=6\cdot 1007$, а бројот 6039 не е делив со 6. Од друга страна, според својството 1, овие броеви треба да се од видот

$$2^n(1+2+3)=6\cdot 2^n.$$

Но, броевите 1006 и 1007 не се степени на бројот 2, што е противречност. Конечно, од добиената противрелност сле-дува дека од тројката $(1,2,3)$ не може да се добие тројка во која еден од броевите е 2013.

31. Дадена е квадратна 10×10 табела во која се запишани 100 природни броеви. Секој запишан број претставува аритметичка средина на сите свои соседни броеви. Докажи дека сите броеви во табелата се еднакви меѓу себе.

Решение. Нека u е најмалиот од сите броеви во табелата. Тој е аритметичка средина на 3, 5 или 8 броеви од табелата во зависност од тоа каде се наоѓа во табелата. Ќе го разгледаме најопштиот случај кога u е аритметичка средина на 8 соседни броеви. Другите два случаи се аналогни. Нека соседните броеви се: a,b,c,d,e,f,g,h. Тогаш

u	*a*								
c	*b*								
					a	*b*	*c*		
a	*b*				*h*	*u*	*d*		
u	*c*				*g*	*f*	*e*		
e	*d*								

$$a+b+c+d+e+f+g+h=8u,$$

од каде

$$(a-u)+(b-u)+(c-u)+(d-u)+(e-u)+(f-u)+(g-u)=0$$

Но, од претпоставката u е најмалиот број од табелата, па затоа ниту еден број од заградите не може да биде негативен. Од овде сите броеви во заградите мора да се еднакви на 0, што е можно само ако тие се еднакви меѓу себе. Со повторување на ова размислување за останатиот дел од табелата се добива дека сите броеви во табелата се еднакви.

32. Во секоја 1×1 клетка од правоаголна табла запишан е природен број. Во секој чекор дозволено е броевите запишани во секоја од клетките на произволно избран ред да се зголемат двапати, или пак броевите запишани во клетките на произволно избрана колона да се намалат за 1. Дали по конечен број чекори, може да се случи сите броеви запишани на таблата да бидат еднакви на нула.

Решение. Ќе покажеме дека бараната состојба може да се достигне.

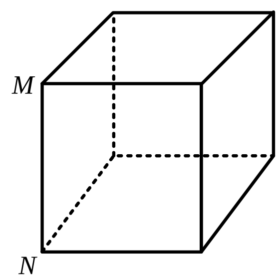
Ако постојат броеви од првата колона еднакви на 1, тогаш ги „дуплираме" нивните редови, а потоа првата колона ја намалуваме за 1. Оваа постапка ја повторуваме се додека сите броеви од првата колона не станат еднакви на 1, а со нејзино „намалување" за 1 сите броеви од првата колона стануваат нули.

Опишаната постапка ја применуваме на сите останати колони, и со тоа задачата е решена.

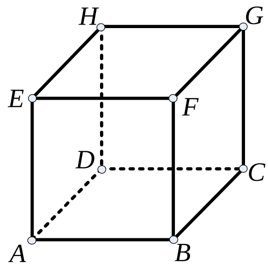
Ако пак ниту еден од броевите од дадена колона не е еднаков на 1, тогаш таа колона ја „намалување" за 1 се додека барем еден број од дадената колона не стане еднаков на 1, а потоа ја применуваме погоре опишаната постапка.

33. Дали е можно рабовите на коцка да се означат (нумерираат) со броевите 1, 2, 3, ..., 11, 12, така што збирот на броевите придружени на три раба кои излегуваат од исто теме на коцката за сите темиња на коцката да е еднаков?

Решение. Нека работ MN е означен со бројот x. Бројот x влегува во збирот кој соодветствува на темињата M и N. На ист начин секој од броевите 1, 2, ..., 12 се појавува два пати во вкупниот збир. Тогаш, збирот на сите осум збирови кои се придружени на 8-те темиња на коцката е $2\cdot(1+2+...+12)=156$. Ако сите осум збирови кои се придружени на осумте темиња на коцката се еднакви природни броеви, тогаш секој од нив изнесува $\frac{156}{8}=\frac{39}{2}=19,5$, од каде следува дека бараното означување не е можно.



34. На секој од шесте ѕида на една коцка е запишан по еден природен број. Во секое теме го запишуваме производот на трите броја кои се запишани на ѕидовите за кои соодветното теме е заедничко. Ако збирот на броевите запишани во темињата е 2006, пресметај го збирот на броевите запишани на ѕидовите.



Решение. Да ја означиме коцката со $ABCDEFGH$. Нека на страната $ABCD$ е запишан бројот a_1, на страната $EFGH$ бројот a_2, на $ABFE$ бројот b_1, на $DCGH$ b_2, на $BCGF$ c_1 и на $ADHE$ c_2. Тогаш кај темето A е запишан бројот $a_1b_1c_2$, кај B бројот $a_1b_1c_1$, кај C бројот $a_1b_2c_1$, кај D бројот $a_1b_2c_2$, кај E бројот $a_2b_1c_2$, кај F бројот $a_2b_1c_1$, кај G бројот $a_2b_2c_1$ и кај H бројот $a_2b_2c_2$. Тогаш, од условот во задачата важи

$$a_1b_1c_2 + a_1c_1b_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = 2006$$

Изразот од левата страна во последното равенство ќе го трансформираме во

$$a_1b_1c_2 + a_1c_1b_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = \\ = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2).$$

Значи,

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) = 2006 = 1 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 59 .$$

Бидејќи запишаните броеви се природни следува дека

$$a_1 + a_2 > 1,\ b_1 + b_2 > 1,\ c_1 + c_2 > 1 ,$$

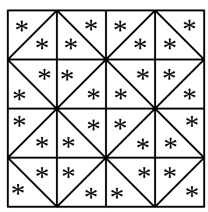
па затоа без ограничување на општоста можеме да земеме дека

$$a_1 + a_2 = 2,\ b_1 + b_2 = 17,\ c_1 + c_2 = 59 .$$

Конечно,

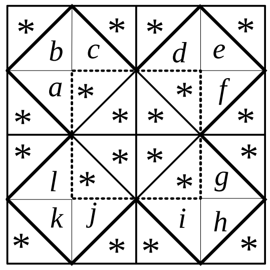
$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 2 + 17 + 59 = 78 .$$

35. На местото на ѕвездичките (на цртежот десно) се запишани броевите од 1 до 32, така што секој број е запишан по еднаш. Дали може збировите, на броевите запишани во секое квадратче кое не е поделено на помали квадратчиња, да се еднакви?



Решение. Збирот на сите броеви е $\frac{32 \cdot 33}{2} = 16 \cdot 33$.

Сите броеви се распределени во 16 мали квадрати.



Следува дека збирот на броевите во секој од овие квадрати е 33. Фигурата ограничена со задебелената линија се состои од пет квадрати кои не се поделени на помали квадрати, па збирот на броевите запишани во неа е $5\cdot 33$. Исто, фигурата ограничена со испрекинатата линија се состои од четири квадрати па збирот на броевите во неа е $4\cdot 33$. Следува дека

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l=33,$$

што не е можно, бидејќи

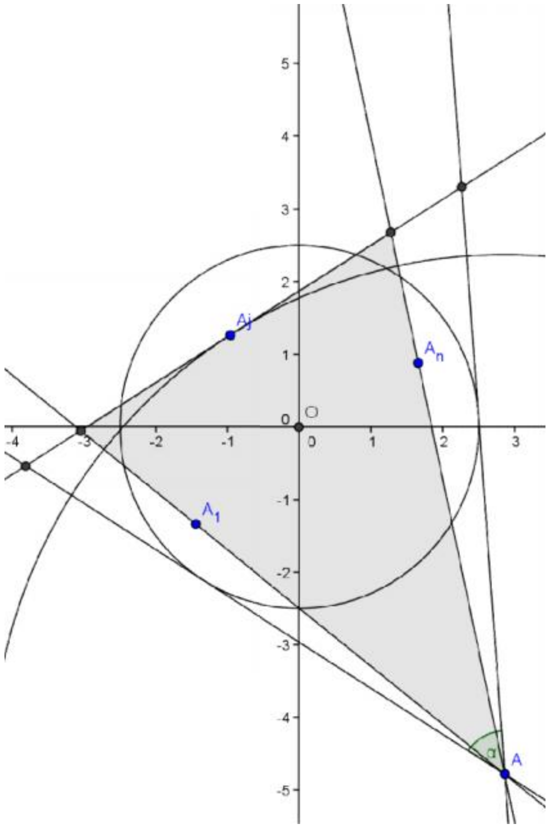
$$33=a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l\geq 1+2+...+12=78>33.$$

36. Дадени се $n\geq 4$ точки во рамнина, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник таков што на неговите страни лежи точно по една од дадените точки и сите останати точки се во неговата внатрешност.

Решение. Дадените точки се конечно многу па постои круг во чија внатрешност се наоѓаат сите точки. Имено, ја бараме максимално оддалечената точка од координатниот почеток. Ако тоа растојание го означиме со R, тогаш кругот со центар во координатниот почеток и радиус $2R$ во внатрешноста ги содржи сите точки.

Ги повлекуваме сите можни прави меѓу $n-$те точки во рамнината. Овие прави се конечно многу (ги има $\frac{n(n-1)}{2}$), па можеме да избереме точка A која не лежи на ниту една од тие прави, која е надвор од кругот кој ги содржи точките и најголемиот агол под кој се гледа секоја отсечка од кругот е остар. Повлекуваме низ A произволна права која не го сече кругот. Таа права ја ротираме околу A додека не помине низ првата од дадените n точки и оваа точка да ја означиме со A_1. На таа права се наоѓа една од страните на триаголникот. Продолжуваме со ротацијата во истата насока се додека не добиеме права на која лежи последната од дадените точки и оваа точка да ја означиме со A_n. На таа права се наоѓа друга страна од триаголникот.

Нека најоддалечената од сите n точки од точката A ја означуваме со A_j, а растојанието до A со d. Може да има повеќе точки кои се на максимално растојание од A и произволно избираме една од нив.



Повлекуваме тангента на кружницата со центар во A и радиус d. На таа права лежи третата од страна на бараниот триаголник (Зошто?). Јасно, сите останати од дадените точки се во внатрешноста на триаголникот.

IV.4. КОМБИНАТОРИКА

37. Дадени се 2009 различни точки кои припаѓаат на иста рамнина, и секоја од нив е обоена во една боја, сина или црвена. Притоа, на секоја единечна кружница со центар во сина точка се наоѓаат точно две црвени точки.

    Определи го најголемиот можен број на сини точки.

    Решение. За секој пар црвени точки постојат најмногу две единечни кружници. Ако n е бројот на црвени точки, тогаш тие формираат $\frac{n(n-1)}{2}$ парови на точки. Според тоа, бројот на сини точки не е поголем од двојната вредност на бројот на парови точки, т.е. бројот на сини точки не може да е поголем од $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$.

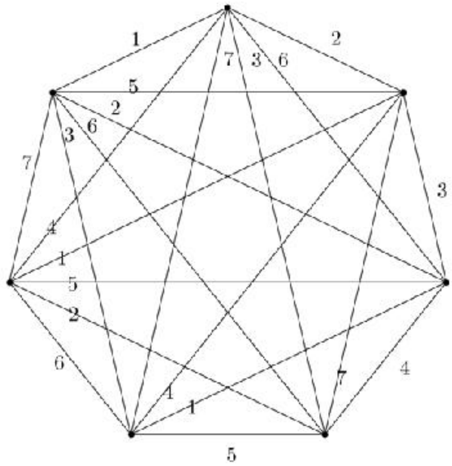
Но, тогаш $n+n(n-1)=n^2$ е вкупниот број на точки, сини и црвени за кои е исполнет условот на задачата, т.е. за секоја сина точка и кружница со центар во неа и радиус 1, на неа се наоѓаат две црвени точки. Бидејќи $44^2<2009$, добиваме дека n мора да биде најмалку 45.
Доволно е да покажеме дека постои конфигурација која што одговара на 45 црвени точки. Ќе распоредиме 45 различни црвени точки на отсечка со должина 1. Околу секоја од нив ќе опишеме кружница со радиус 1. Пресеците на сите конструирани кружници ќе ги обоиме во сина боја, освен шеснаесет од нив ($45^2-2009=16$), било кои. Сите конструирани точки се различни меѓу себе (во спротивен случај три единечни кружници би имале заедничка точка, т.е. единечна кружница со центар во сина точка би ја сечела отсечката со должина 1 во три точки, што не е можно).
Значи, најголемиот број сини точки ќе биде $2009-45=1964$.

38. На табла има n шајки секои две поврзани меѓу себе со конец. Секој конец е обоен со една од n дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли n да биде:

а) 6? б) 7?

Решение. а) Одговорот е не.
Да претпоставиме дека тоа е можно. Да земеме една боја, да речеме сина. Секој син конец е страна на 4 триаголници формирани во темиња за дадена точка. Бидејќи постојат $\binom{5}{2}=\frac{5\cdot4}{2}=10$ парови на бои, во кои немаме сина боја, и за секој пар на бои заедно со сината боја постои триаголник со конци во овие бои, можеме да заклучиме дека постојат најмалку три сини конци (во спротивно бројот на триаголници со сини конци како една страна ќе биде најмалку $2\cdot4=8$, што е противречност). Истото е точно за секоја друга боја, па сите заедно имаат $6\cdot3=18$ конци, но ние имаме само $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot5}{2}=15$ конци.

б) Одговорот е да. Да ги распоредиме шајките така да секоја од нив е теме на правилен седумаголник и да ја обоиме секоја негова страна со различна боја. Сега да ја обоиме секоја секоја дијагонала на овој седумаголник со боја која е иста со неговата страна која е паралелна на дијагоналата. Може директно да се провери дека тројка од бои се појавува кај секој триаголник (заради симетријата, доволно е да се провери само тројката која ја содржи првата боја).



Забелешка. Аргументот во а) може да се примени на секој парен број n. Аргументот во б) може да се примени за секој непарен број $n=2k+1$ како што следи: прво означи ги шајките со $0,1,2,...,2k$ и исто така означи ги боите со $0,1,2,...,2k$. Потоа поврзи ја шајката x со шајката y со конец со боја $x+y(\text{mod}\, n)$. За секоја тројка бои (p,q,r) постојат темиња x,y,z кои се поврзани со овие три бои. Навистина, мора да го решиме $(\text{mod}\, n)$ системот

$$x+y\equiv p, x+z\equiv q, y+z\equiv r \qquad (*)$$

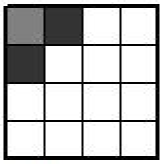
Ако ги собереме сите три ќе добиеме $2(x+y+z)\equiv p+q+r$ и доколку ги помножиме со $k+1$ ќе добиеме $x+y+z\equiv(k+1)(p+q+r)$. Сега можеме да ги најдеме x, y, z од (*).

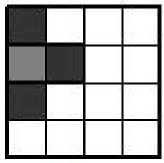
39. Квадратна шема со димензии 4×4 е поделена на 16 бели квадратчиња (со димензии 1×1). Две квадратчиња ќе ги наречеме соседни, ако ако имаат заедничка страна. Еден чекор се состои во избор на квадратче, при што тоа и неговите соседни квадратчиња во исто време ја менуваат бојата, т.е. ако некое од нив било бело ќе стане црно и обратно, ако било црно ќе стане бело. По точно n чекори сите 16 квадратчиња се обоени во црна боја. Определи ги сите можни вредности за n.

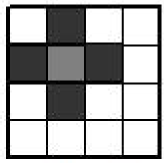
Решение. Ако избереме квадратче кое содржи теме на квадратната шема, тогаш три квадратчиња ќе ја променат својата боја во било кој чекор (види цртеж 1).

Ако избереме квадратче кое содржи дел од страна на квадратната шема а не содржи теме на квадратната шема, тогаш точно четири квадратчиња ќе ја променат својата боја во било кој чекор (види цртеж 2).

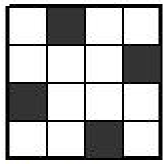
Ако избереме квадратче кое нема заеднички точки со страните на квадратот, тогаш во еден чекор точно пет квадратчиња ќе ја променат својата боја (види цртеж 3). Значи, најголемиот број на квадратчиња кои ќе ја променат својата боја во еден чекор е пет. Бидејќи $3 \cdot 5 = 15 < 16$ треба да направиме најмалку четири чекори за да се добијат 16 црни квадратчиња.


Цртеж 1

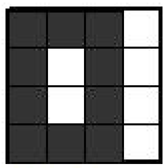

Цртеж 2


Цртеж 3

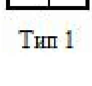
Постојат точно четири чекори за да сите 16 квадратчиња ја променат својата боја од бела во црна. Еден таков начин е ако се изберат обоените квадратчиња на цртеж 4. Откако секое квадратче од квадратната шема ќе го обоиме во црна боја, тогаш со избор на едно квадратче и примена на чекорот два пати на него се добива бараното боење. Според тоа, бараното боење може да се направи за секој парен број на чекори n, $n \geq 4$

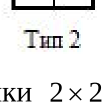

Цртеж 4

Ќе ја разгледаме затемнетата фигура која е дел од квадратната шема и се состои од 10 единечни квадратчиња, како на цртежот 5. Нека разликата на белите и црните квадратчиња кои се во исто време и затемнети е k. Со избор на било кое квадратче од квадратната 4×4 шема, и примена на чекорот од задачата, бројот на квадратчиња кои ќе ја променат бојата од бела во црна и обратно е број кој е конгруентен со 2 по модул 4. Почетната вредност на k е 10, а крајната вредност е -10. Сега не е тешко да се провери дека нема непарен број на чекори во кој ќе се добие вредноста -10. Според тоа, за ниту еден непарен број n не постои барано боење на квадратната шема.

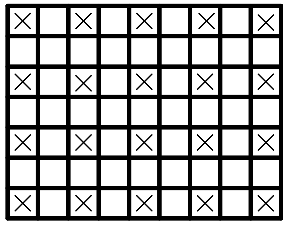

Цртеж 5

40. Правоаголник со димензии 9×7 се покрива со плочки од два типа, прикажани на цртежите десно (плочките се составени соодветно од три и четири единични квадратчиња и плочките од типот 1 се ротираат за 90° повеќекратно). Нека $n \geq 0$ е бројот на плочки 2×2


Тип 1


Тип 2

(тип 2) кои се употребени при такво препокривање. Определи ги сите можни вредности за n.



Решение. Нека е дадено препокривање и со x ќе го означиме бројот на плочки од типот 1, т.е. аголните плочки, а со y ќе го означиме бројот на плочки од типот 2, т.е. квадратните плочки.

Во 20 квадратчиња од единечните квадратчиња на правоаголникот 9×7 ќе ставиме знак $\times$ како на цртежот. Секоја поставена плочка, дали од типот 1 или од типот 2 може да покрие само еден знак $\times$ во означениот правоаголник, Според тоа, бидејќи има 20 знаци

$$x+y\geq 20\,. \tag{1}$$

од каде добиваме

$$3x+3y\geq 60 \tag{2}$$

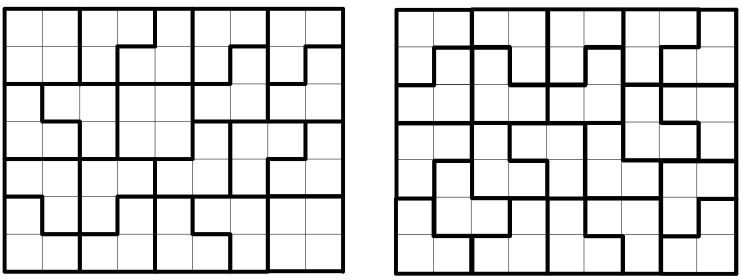
Но бидејќи

$$3x+4y=63\,, \tag{3}$$

добиваме

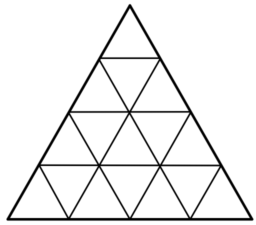
$$-y\geq -3\,,$$

односно $y\leq 3$ (со одземање на (3) од (2)). Уште повеќе $3\,|\,y$ (заради (3)), па затоа $y=0$ или $y=3$.



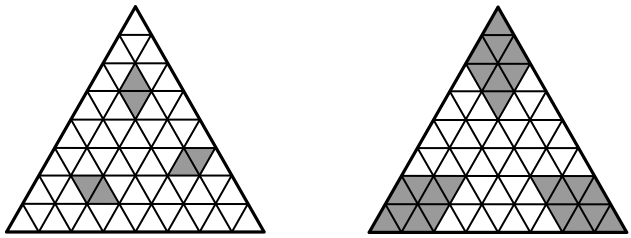
И двете вредности се можни, т.е. тоа се гледа од двете шеми на покривање.

41. Нека $n>3$ е природен број. Рамностраниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е прикажана на цртежот десно за $n=4$. Нека m е бројот



на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n.

Решение. Со M ќе го означиме множеството ромбови составено од два делбени триаголници, а со D ќе го означиме множеството ромбови кои се составени од осум делбени триаголници. Делбените триаголници може да се добијат ако се повлечат прави паралелни со страните на триаголникот.

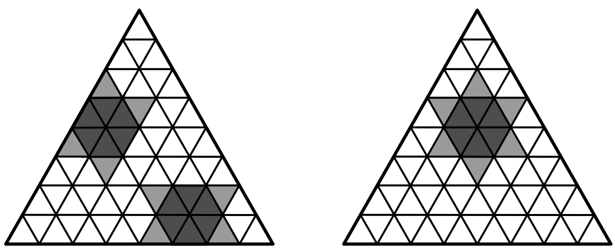


Секоја делбена отсечка (страна на делбен триаголник, која не е дел од страна на почетниот триаголник) е дијагонала на еден и само еден ромб од множеството M . Такви делбени отсечки, паралелни со една страна на триаголникот има

$$1+2+3+...+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Според тоа, вкупниот број на елементи од множестото M е

$$m=3\frac{n(n-1)}{2}.$$



За да ги преброиме елементите од множеството D, точките кои се темиња на делбени триаголници ќе ги поделиме во три групи.

Во првата група се точките кои се центри (пресек на дијагоналите) на точно еден ромб од типот D. Такви точки има точно три, за секој природен број n (види цртеж).

Во втората група се точките кои се центари на точно два ромба од множеството ромбови D. Таквите точки припаѓаат на делбена отсечка која е дел од делбена права и е на најмало растојатние од страните на триаголникот. Такви отсечки има три, а на секоја од нив има по $n-4$ точки (на цртежот е даден пример на такви точки во случајот $n=8$).

Во третата категорија се точки кои се центри на три ромбови од множеството D (на цртежот е даден пример на таква точка во случајот $n=8$). Вкупниот број на такви делбени точки е

$$1+2+3+...+(n-5)=\frac{(n-5)(n-4)}{2}.$$

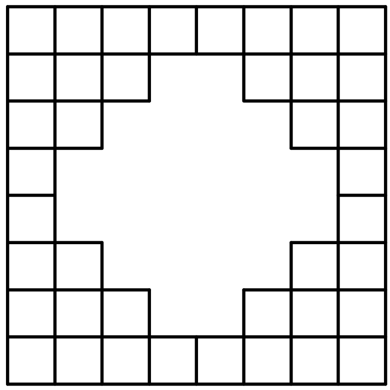
Според тоа, вкупниот број на елементи на множеството D е

$$d=3+6(n-4)+3\frac{(n-5)(n-4)}{2}=\frac{3}{2}[2+(n-1)(n-4)].$$

Сега не е тешко да се пресмета дека

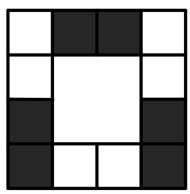
$$m-d=3(2n-3).$$

42. Нека $n\geq 2$ е цел број. Од квадратната шема $2n\times 2n$ (составена од единечни 1×1 квадрати) отстранети се некои од малите квадрати, и тоа: средните два квадрати од втората редица, средните четири квадрати од третата редица,..., средните $2n-2$ квадрати од n -тата редица, средните $2n-2$ квадрати од $(n+1)$-та редица, ..., средните четири квадрати од $(2n-2)$-та редица и средните два квадрати од $(2n-1)$-та редица (на цртежот е прикажан случајот $n=4$).



Најди го најголемиот број на 2×1 правоаголници кои може да се поставaт на добиената фигура, без преклопување, така што секој од нив да препокрива точно два мали квадрати.

Решение. За $n=2$ фигурата може да се покрие со помош на 6 плочки(домина-правоаголници со димензии 2×1 (види цртеж).



За $n>2$ фигурата ќе ја поделиме на четири складни меѓу себе геометриски фигури со помош на една хоризонтална права која ги дели n -тата и $(n+1)$ -та редица квадрати, и една вертикална права која ги дели n -тата и $(n+1)$ -та колона(верикала) квадрати.

Секој до деловите ќе го обоиме на шаховски начин, т.е. како што е обоена шаховската табла За $n=5$ и $n=4$ боењата се прикажани на цртежот (за парно n полето во кое е темето на квадратната шема е обоено во бело, а за n непарно полето во кое е темето на квадратната шема е обоено во црно; на тој начин бројот на црни полиња секогаш е поголем од бројот на бели полиња). Секое поставено домино покрива точно едно бело поле. Значи, бројот на поставени домина не може да е поголем од вкупниот број на бели полиња што ги имаме на еден делбен дел на квадратната шема а со тоа и вкуниот број на домина кои може да се постават на фигурата.

На секој од четирите делбени делови на квадратната шема(без крајното десно поле и крајното горно поле-квадратче) домината за да ги покриваат белите полиња може да се постават на следниот начин:

– на двете најдолни редици (хоризонтали) од лево кон десно поставуваме вертикални домина се додека тоа е можно
– на останатите хоризонтали, од лево кон десно поставуваме домина се додека е тоа можно.

Со тоа препокриени се сите бели полиња. Сега имаме два случаи.

Случај 1. $n = 2k - 1$. На секој делбен дел има

$$2[(k-1)+(k-2)+...+2+1] = 2\frac{k(k-1)}{2} = k(k-1),$$

бели полиња, па тоа е најголемиот број на домина што можеме да ги поставиме.

Според начинот на кој ги поставуваме домината, квадратчињата со кои делбените делови се допираат останаа непокриени. За нивно препокривање потребни се 4 домина. Според тоа, вкупниот број на домина кои може да се постават во овој случај е

$$4k(k-1)+4 = 4k^2 - 4k + 1 + 3 = (2k-1)^2 + 3 = n^2 + 3.$$

Случај 2. $n = 2k$. Во овој случај вкупниот број на бели полиња во еден делбен дел на квадратната шема е

$$(2k-1)+(2k-3)+...+3+1 = k^2.$$

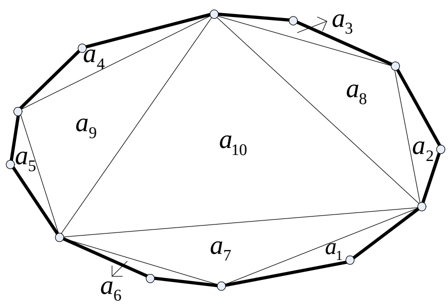
Според тоа, најголемиот број на домина кои може да се постават е

$$4k^2 + 4 = (2k)^2 + 4 = n^2 + 4.$$

43. Дали може внатрешноста на конвексен дванаесетаголник да биде поделена на десет триаголници, со повлекување на некои негови дијагонали, така што никои два немаат заедничка внатрешност, четири од таквите делбени триаголници се *заградени* триаголници и притоа важи следниот услов: Ако во секој триаголник е запишан реален број различен од нула и притоа бројот во секој *заграден* триаголникот е производ од броевите запишани во триаголниците конструирани над

неговите три страни тогаш производот на сите запишани броеви во дванаесетаголникот е константен? (За еден триаголник велиме дека е *заграден* ако над секоја негова страна има конструирано нов триаголник)

Решение. Поделбата на дванаесетаголникот е единствена и е дадена на цртежот десно. Нека $a_1, a_2, ..., a_{10}$ се ненулти реални броеви запишани во делбените триаголниците. Од условот на задачата имаме



$$a_7 = a_1 a_6 a_{10}, \quad a_8 = a_2 a_3 a_{10},$$

$$a_9 = a_4 a_5 a_{10} \text{ и } a_{10} = a_7 a_8 a_9$$

Оттука добиваме,

$$a_{10} = a_7 a_8 a_9 = (a_1 a_6 a_{10}) \cdot (a_2 a_3 a_{10}) \cdot (a_4 a_5 a_{10}) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_{10}^3,$$

т.е.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_{10}^2 = 1 \qquad (1)$$

Користејќи го (1) за производот на сите запишани броеви добиваме ,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} &= a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 (a_1 a_6 a_{10})(a_2 a_3 a_{10})(a_4 a_5 a_{10}) a_{10} \\ &= a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^2 a_{10}^4 \\ &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_{10}^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Значи производот на сите запишани броеви е константен и изнесува 1.

44. Нека p е прост број. Колку најмалку бои се потребни за на квадратна $p \times p$ табла да се постават жетони од кои секој е обоен со една од тие бои, така што на секое поле од таблата е поставен точно еден жетон и нема два жетони од иста боја кои се напаѓаат? Два жетони се напаѓаат ако се наоѓаат на иста хоризонтала, вертикала или ако линијата која ги поврзува е паралелна со една од дијагоналите на квадратот (како кралицата во шахот).

Решение. Не е тешко да се провери дека за $p = 2$ решението е 4, а за $p = 3$, решението е 5. Нека $p > 3$. На секое поле на таблата ќе му придружиме координати (i, j), што означува дека полето е во i – тата редица, броејќи ги редиците од горе кон долу и во j – тата колона, броејќи ги колоните од лево на десно. Полињата со координати (i, i)

ќе велиме дека ја сочинуваат главната дијагонала на таблата, а другата дијагонала ќе ја наречеме споредна дијагонала. На секое од полињата (i,i) на главната дијагонала ќе ставиме жетони со p различни бои нумерирани со $0,1,2,...,p-1$ можните остатоци при делење со p. Потоа, во секоја редица ги пополнуваме полињата циклично, ставајќи во секое наредно поле број за 2 поголем од бројот во претходното поле. Притоа, по $p-2$ доаѓаат 0, 2, 4, ..., а по $p-1$ доаѓаат 1, 3, ...

Значи, во полето со координати (i, j) ставаме жетон чија боја е означена со бројот кој е остаток при делење на бројот $i+2(j-i)=2j-i$ со бројот p. Бидејќи p е прост број поголем од 3, тој е непарен, па јасно е дека во секоја редица ќе бидат застапени p бои, односно нема да бидат застапени жетони со иста боја.

Ако во колоната j се сретнат два жетони со иста боја, на пример во редиците m и n ($m>n$), тогаш броевите $2j-m$ и $2j-n$ даваат ист остаток при делење со p, па нивната разлика ќе биде делива со p. Следува дека $m-n$ е делив со p, што не е можно бидејќи m и n се помали од p.

Значи во ниту една колона не е можно да се сретнат два жетони со иста боја. Од поставеноста на жетоните, очигледно е дека во дијагоналите паралелни со главната дијагонала, не е можно да има два жетони со иста боја.

Ако две полиња се на споредната дијагонала или на дијагонала паралелна со споредната дијагонала, тогаш збировите на нивните координати се меѓусебно еднакви. Претпоставувајќи дека на полињата со координати $(m,k-m)$ и $(n,k-n)$ има жетони со иста боја, се добива дека броевите $2(k-m)-m$ и $2(k-n)-n$ даваат ист остаток при делење со p. Тоа значи дека $2k-3m$ и $2k-3n$ даваат ист остаток при делење со p, од што следува дека $3(m-n)$ е делив со p. Но, $m-np$ е заемно прост и со 3 и со $m-n$, па не е можно $3(m-n)$ да е делив со p.

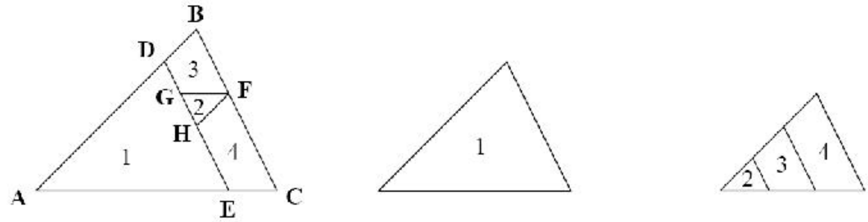
Конечно, следува дека ако $p>3$, тогаш можен е распоред на жетони со p бои кој го задоволува условот во задачата, па n е најмалиот број на бои.

45. Даден е произволен $\triangle ABC$.

а) Дали може $\triangle ABC$ да се подели на 4 делови, од кои може да се составaт два триаголника слични на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

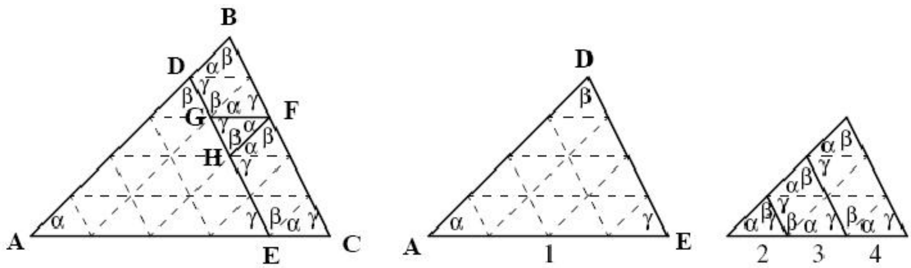
б) Дали може за секој природен број $n \geq 2$, за $\triangle ABC$ да се направи поделба на $2n$ делови, од кои може да се составaт два слични триаголника на $\triangle ABC$ (секој дел се користи само еднаш)?

Решение. Поделбата е можна. За случајот под а) тоа изгледа вака:

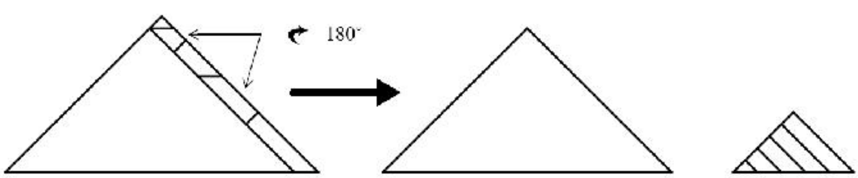


Како е изведена поделбата, т.е. дека таа е точна, ќе утврдиме на случајот под б).

Страната AC ја делиме на $2[1+3+5+...+(2n-3)]+2n-1$ еднакви делови и низ делбените точки повлекуваме паралелни прави на страните AB и BC (види цртеж). Да ја означиме со $\overline{DE}$ најблиската паралелна отсечка со страната $\overline{BC}$. $\triangle ADE$ е едниот од бараните триаголници, а другиот се формира од останатите мали триаголничиња кои се наоѓаат во трапезот $ECBD$ (види цртеж). Случајот под а) би бил:



На ист начин се добива и случајот под б), со тоа што поставувањето на првиот триаголник и останатите трапези може да се постигне и како на долниот цртеж. Имено, прво на страната BC се поставува триаголник со страна 1, па потоа трапез со основа еден, па два трапези со основи 3, па два трапези со основи 5 итн.



46. Во единечните квадрати на 8×8 табла се запишани природни броеви. Дали е можно збирот на броевите во секој следен ред да е за 3 поголем од збирот на броевите во претходниот ред, а збирот на броевите во секоја следна колона да е за 4 поголен од збирот на броевите во секоја следна колона? (Гледаме од лево кон десно и од горе кон долу.)

Решение. Не. Да претпоставиме дека е можно и да го означиме збирот на броевите во првиот ред со x, а збирот на броевите во првата колона со y. Тогаш збирот на броевите запишани на таблата ќе биде

$$x+(x+3)+(x+6)+...+(x+21)=8x+\frac{7\cdot(3+21)}{2}=8x+84,$$

односно

$$y+(y+4)+(y+8)+...+(y+28)=8y+\frac{(4+28)\cdot 7}{2}=8y+112.$$

Според тоа,

$$8x+84=8y+112 \text{, т.е. } 8(x-y)=28,$$

што не е можно бидејќи левата страна во последното равенство е делива со 8, а десна не е делива со 8.

47. Михаил наследил куќа во која сите соби биле заклучени и клучевите биле закачени на алка. Колку соби има куќата ако е познато дека во најлошт случај на Михаил му се потребни 21 проба за да провери со кој клуч која соба се отвара?

Решение. *Прв начин*. Нека куќата има k соби. За наоѓање на клучот за првата соба во најлош случај се потребни $k-1$ проба (последниот клу да е тој што ја отвара собата). Сега имаме $k-1$ соба и $k-1$ клуч, па за наоѓање на клучот за втората соба во најлош случај се потребни $k-2$ проби. Продолжувајќи на ист начин за наоѓање на клучот за $(k-1)-$ та соба е потребна $k-(k-1)=1$ проба и последниот клуч е за $k-$тата соба. Според тоа, во најлош случај бројот на пробите е $(k-1)+...+2+1=\frac{k(k-1)}{2}$, па затоа $\frac{k(k-1)}{2}=21$, т.е. $k(k-1)=42=7\cdot 6$, од каде добиваме $k=7$. Според тоа, куќата има 7 соби.

Втор начин. Ако имаме 3 соби, тогаш во најлош случај за првата соба се потребни 2 проби и уште една проба за втората соба, т.е. вкупно 3 проби. Ако имаме 4 соби, тогаш во најлош случај за првата соба се потребни 3 проби и уште три проби за преостанатите три соби, т.е. вкупно $3+3=6$ проби. Ако имаме пет соби, тогаш во најлош случај за првата соба се потребни 4 проби и уште 6 проби за преостанатите 4 соби, т.е. $4+6=10$ проби. Слично, во случај на 6 соби во најлошт случај се потребни 5 проби за првата соба и уште 10 проби за преостанатите соби, т.е. вкупно $10+5=15$ проби. Конечно, ако имаме 7 соби, тогаш за првата соба се потребни 6 проби и уште 15 проби за преостанатите 6 соби, односно вкупно $6+15=21$ проба. Значи, во куќата има 7 соби.

48. Определи го најмалиот број тетиви на дадена кружница такви што бројот на нивните пресечни точки кои се во внатрешноста на кружницата и се различни меѓу себе е точно 50.

Решение. За n тетиви максималниот број пресечни точки е $\frac{n(n-1)}{2}$. Овој број се реализира кога секоја тетива ја сече секоја од преостанатите тетиви во внатрешна точка и сите пресечни точки се различни. Задачата се сведува ба наоѓање на природен број n за кој $\frac{n(n-1)}{2}\geq 50$, односно $n^2-n-100\geq 0$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(n-\frac{1}{2})^2-\frac{401}{4}\geq 0$, т.е. со неравенството

$$(n-\tfrac{1-\sqrt{401}}{2})(n-\tfrac{1+\sqrt{401}}{2})\geq 0.$$

Бидејќи n е природен број, добиваме

$$n\geq \tfrac{1+\sqrt{401}}{2}>\tfrac{1+\sqrt{400}}{2}=\tfrac{1+20}{2}=\tfrac{21}{2},$$

т.е. минималната можна вредност за n е 11.

49. За еден природен број ќе велиме дека е растечки, ако секоја негова цифра е поголема од цифра која се наоѓа лево од неа. Определи го бројот на растечките четирицифрени броеви.

Решение. Ако првата цифра на едед растечки четирицифрен број е 1, тогаш останатите три цифри може да се изберат меѓу цифрите од 2 до 9, кои ги има вкупно 8. Притоа првата цифра можеме да ја избереме на 8 начини, втората на 7 начини и третата на 6 начини, но бидејќи цифрите се запишуваат во растечки редослед вака добиениот вкупен број избори треба да го поделиме со бројот на разпоредувања на трите избрани цифри, односно со $3\cdot 2\cdot 1$. Значи, кога првата цифра е 1, тогаш број на растечките четирицифрени броеви е $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$. На потполно ист начин се добива дека во случавите кога првата цифра е 2, 3, 4, 5 и 6, тогаш бројот на растечките четирицифрени броеви е $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$,

$\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$, $\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$, $\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}=4$ и $\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=1$. Конечно, вкупниот број на растечки четирицифрени броеви е $56+35+20+10+4+1=126$.

50. На колку начини може да се распореди издание од 9 тома на полица така што третиот и четвртиот том нема да бидат еден до друг?

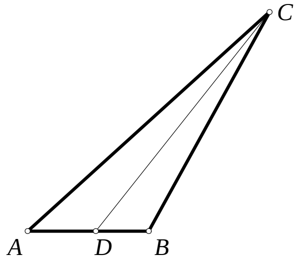
Решение. Местата на полицата ги нумерираме со броевите од 1 до 9. Третиот том може да се да се постави на едно од овие девет места. Ако тој е на првото место, тогаш останатите томови можат да се распоредат на $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8!$ различни начини. Четвртиот том е до третиот том само кога е на второто место и во овој случај останатите седум тома може да се распоредат на $7!$ различни начини. Но ваквото распоредување е неповолно, па затоа кога третиот том е на првото место поволни се $8!-7!$ распоредувања. Ситуацијата е наполно аналогна кога третиот том се наоѓа на деветтото место, т.е. и тогаш имаме $8!-7!$ поволни распоредувања. Сега, ако третиот том е на местото 2, тогаш останатите томови може да се распоредат на $8!$ начини, при што неповолни се $7!$ распореди кога четвртиот том е на првото место и $7!$ распореди кога четвртиот том е на третото место. Значи, во овој случај имаме $8!-2\cdot7!$ поволни распореди. Слично, бројот на поволните распореди е $8!-2\cdot7!$ и во случаевите кога третиот том е на местата со броевите 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Вакви случаи се вкупно 7, па затоа вкупниот број поволни распореди е еднаков на

$$\begin{aligned}2\cdot(8!-7!)+7\cdot(8!-2\cdot7!)&=9\cdot8!-16\cdot7!=(72-16)\cdot7!\\&=56\cdot7!=7\cdot8!=282240.\end{aligned}$$

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ТРИАГОЛНИК

1. Надворешните агли во еден триаголник се 20%, 35% и 45% од збирот на неговите надворешни агли. Определи го аголот меѓу симетралата на најмалиот агол и најкратката страна.



Решение. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот. Тогаш надворешните агли се

$$180^\circ-\alpha,\ 180^\circ-\beta \text{ и } 180^\circ-\gamma,$$

а нивниот збир е

$$(180^\circ-\alpha)+(180^\circ-\beta)+(180^\circ-\gamma)=540^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=540^\circ-180^\circ=360^\circ.$$

Но, тогаш надворешните агли на триаголникот се $72^\circ, 126^\circ$ и 162°. Според тоа, неговите внатрешни агли се 108°, 54° и 18°. Нека ABC е триаголник со пресметаните агли. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle ABC=108^\circ$ и $\measuredangle ACB=18^\circ$. Ако CD е симетралата на најмалиот агол ($D\in AB$), тогаш $\measuredangle DCB=9^\circ$ и

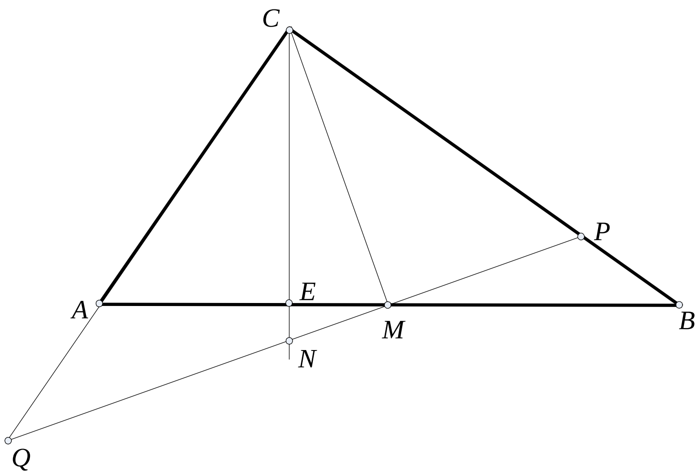
$$\measuredangle CDB=180^\circ-(9^\circ+108^\circ)=180^\circ-127^\circ=53^\circ.$$

2. Во правоаголен триаголник ABC низ средината M на хипотенузата AB повлечена е права нормална на CM која ги сече правите AC и BC во точките P и Q соодветно. Ако N е средината на отсечката PQ, докажи дека правите CN и AB се заемно нормални.

Решение. Нека со E го означиме пресекот на AB и CN. Јасно дека $\overline{AM}=\overline{CM}$ од што добиваме $\measuredangle MAC=\measuredangle ACM$. Бидејќи CM е нормална на PQ уште имаме

$$\measuredangle MPC=90^\circ-\measuredangle PCM=90^\circ-\measuredangle MAC=\measuredangle ABC.$$

Од ова се добива дека $\measuredangle PQC=\measuredangle BAC$. Бидејќи N е средина на PQ, $\measuredangle NCB=\measuredangle BAC$. Од овде се добива дека CN е нормална на AB.



3. Дадена е ѕвезда како на цртежот. Колку е збирот на аглите

$$\measuredangle 1+\measuredangle 2+\measuredangle 3+\measuredangle 4+\measuredangle 5 .$$

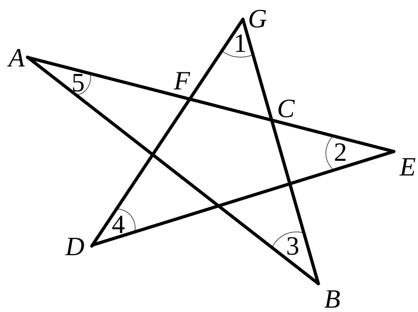
Решение. Од триаголникот $\triangle ABC$ имаме

$$\measuredangle 3+\measuredangle 5=\measuredangle FCG .$$

Од триаголникот $\triangle DEF$ имаме

$$\angle 2+\measuredangle 4=\measuredangle CFG .$$

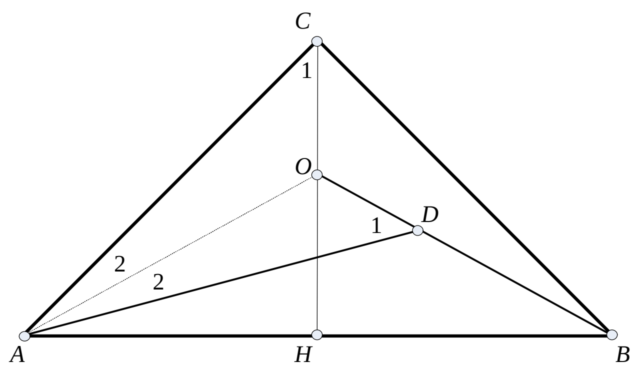
Од триаголникот $\triangle FCG$ имаме



$$180^\circ=\measuredangle 1+\measuredangle FCG+\measuredangle CFG=\measuredangle 1+\measuredangle 3+\measuredangle 5+\measuredangle 2+\measuredangle 4$$

4. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC со агол при врвот $\measuredangle ACB=100^\circ$, дадена е точка D, таква што $\measuredangle BAD=20^\circ$ и $\measuredangle ABD=30^\circ$. Определи го $\measuredangle BCD$.

Решение. Нека со O го означиме пресекот на правата BD со висината CH. На таков начин го добиваме рамнокракиот $\triangle ABO$, со агли при осно-



вата еднакви на 30°. Од тоа заклучуваме дека $\measuredangle OAD = 10^\circ$, а бидејќи

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

добиваме $\measuredangle OAC = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$. Понатаму, $\measuredangle ODA = 50^\circ$, како надворешен агол за $\triangle ABD$ и $\measuredangle ACO = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$. Следува дека $\triangle AOC \cong \triangle AOD$ (АСА), од каде што $\overline{AC} = \overline{AD}$, односно $\triangle ACD$ е рамнокрак, со основа CD и агли при основата од 80° (бидејќи аголот при врвот е 20°). Конечно, за бараниот агол добиваме:

$$\measuredangle BCD = \measuredangle ACB - \measuredangle ACD = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ.$$

5. Кружниот лак над основата на рамнокрак триаголник е $\frac{2}{5}$ од опишаната кружница на тој триаголник. Најди ги аглите на тој триаголник.

Решение. Централниот агол над основата е $\frac{2}{5} \cdot 360^\circ = 144^\circ$. Тогаш аголот на триаголникот спроти основата е 72°, а аглите на основата се $\frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$.

6. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle BAC = 70^\circ$ и $\measuredangle ABC = 50^\circ$. Точката M се наоѓа во $\triangle ABC$ и притоа $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 40^\circ$. Определи ги аглите $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

Решение. Од условите на задачата следува

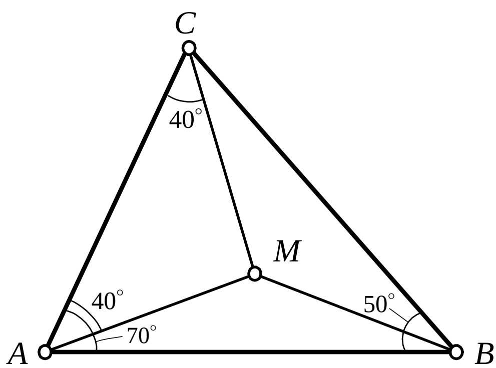
$\measuredangle ACB = 60^\circ$, $\measuredangle AMC = 100^\circ$,

(види цртеж).

Бидејќи $\triangle AMC$ е рамнокрак и

$$\measuredangle ABC = \frac{1}{2} \measuredangle AMC = 50^\circ$$

следува дека M е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Оттука имаме:



$$\measuredangle AMB = 120^\circ \text{ и } \measuredangle BMC = 140^\circ,$$

како централни агли.

7. Определи ги аглите на триаголникот чии страни a,b и c го задоволуваат равенството

$$a-4\sqrt{bc}+2b=2\sqrt{ac}-3c\,.$$

Решение. Равенството ќе го запишеме во облик

$$a-2\sqrt{ac}+c+2c-4\sqrt{bc}+2b=0,$$

$$(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{c}+(\sqrt{c})^2+2[(\sqrt{b})^2-2\sqrt{b}\sqrt{c}+(\sqrt{c})^2]=0,\,,$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0.$$

Збир на два ненегативни броја е нула, само ако секој од нив е нула. Според тоа

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2=2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=0\,,$$

од каде добиваме

$$\sqrt{a}-\sqrt{c}=\sqrt{b}-\sqrt{c}=0\,,$$

односно $\sqrt{a}=\sqrt{c}$ и $\sqrt{b}=\sqrt{c}$. Заради последните равенства, имаме $a=c=b$. Значи, триаголникот е рамностран, па неговите агли се еднакви меѓу себе.

8. Дадени се произволни триаголници $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точките T_1 и T_2 се нивни тежишта, соодветно. Докажи дека

$$3\overrightarrow{T_1T_2}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}\,.$$

Решение. Од својствата на операцијата собирање на вектори, имаме

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2A_2}\,,$$

$$\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2B_2}\,,$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\,.$$

Ако ги собереме последните три векторски равенства и ги искористиме својствата на операцијата собирање на вектори, добиваме:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=3\overrightarrow{T_1T_2}+(\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{C_1T_1})+(\overrightarrow{T_2A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_2C_2})\,. \quad (1)$$

Од дефиницијата на тежишна линија и од својствата на тежиштето, имаме:

$$\overrightarrow{A_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1})\,,$$

$$\overrightarrow{B_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1})\,,$$

$$\overrightarrow{C_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{C_1A_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1})\,.$$

Според тоа,

$$\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{C_1T_1}=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1})+\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1})+\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{C_1A_1}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B_1})$$
$$=\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1})+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_1B_1})$$
$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1A_1}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{B_1B_1}=\tfrac{2}{3}\vec{o}+\tfrac{1}{3}\vec{o}=\vec{o}+\vec{o}=\vec{o}.$$

Слично, имаме $\overrightarrow{A_2T_2}+\overrightarrow{B_2T_2}+\overrightarrow{C_2T_2}=\vec{o}$, од каде добиваме дека

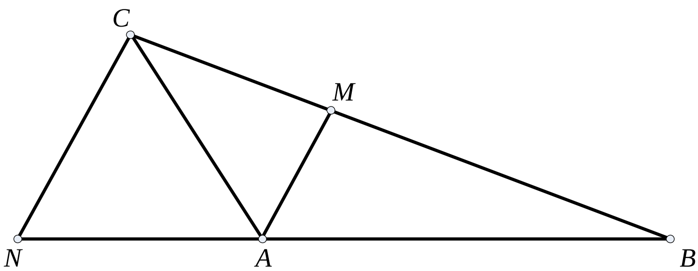
$$\overrightarrow{T_2A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_2C_2}=\vec{o}.$$

Конечно, ако замениме во (1), имаме

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=3\overrightarrow{T_1T_2}+\vec{o}+\vec{o}=3\overrightarrow{T_1T_2}.$$

9. Ако должините на две страни на еден триаголник се $6\,cm$ и $12\,cm$, а аголот меѓу нив е 120°, колкава е должината на симетралата на тој агол?

Решение. Нека AM е симетралата на $\measuredangle BAC=120^\circ$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle BAN=\measuredangle MAC=60^\circ$. Нека N е точка на продолжението на



страната AB таква што $\overline{AN}=\overline{AC}=6cm$. Од

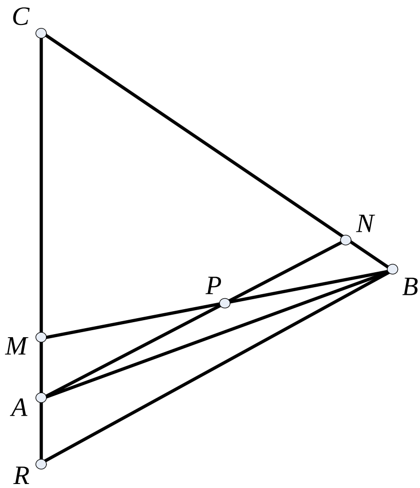
$$\measuredangle NAC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

следува дека триаголникот NAC е рамностран. Тогаш од $\measuredangle CNA=\measuredangle MAB=60^\circ$ добиваме дека CN и MA се паралелни отсечки. Со примена на Талесовата теорема за пропорционални отсечки добиваме дека $\overline{AM}:\overline{NC}=\overline{AB}:\overline{NB}$ од каде што следува дека

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{NC}}{\overline{NB}}=\frac{12\cdot 6}{6+12}=4\,cm.$$

10. Даден е триаголникот ABC. На страната AC е избрана точка M така што $\overline{AM}:\overline{MC}=1:5$, а на страната BC е избрана точка N така што $\overline{BN}:\overline{NC}=1:6$. Каков е односот меѓу отсечките MP и PB, каде P е пресечната точка на отсечките MB и AN?

Решение. Низ точката B повлекуваме права паралелна со AN. Пресекот на оваа права и страната AC е точката R. Триаголниците ANC и RBC се слични, па затоа $\overline{AR}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{NC}$. Оттука $\overline{AR}=\frac{\overline{AC}}{6}$. Од друга страна $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}=\frac{1}{6}$, па $\overline{AM}=\frac{\overline{AC}}{6}$. Според тоа, $\overline{AM}=\overline{AR}$. Точката A е средина на страната RM од триаголникот RBM. $AP \parallel RB$, т.е. AP е средна линија на триаголникот RBM. Значи $\overline{MP}=\overline{PB}$, односно $\overline{MP}:\overline{PB}=1$.



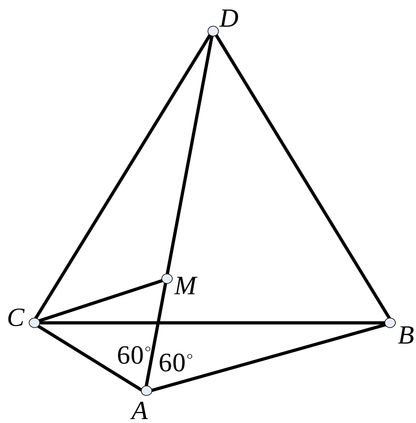
11. Даден е триаголникот ABC со $\measuredangle BAC=120^\circ$. На симетралата на $\measuredangle BAC$ избрана е точка D , така да $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$. Докажи дека $\triangle BCD$ е рамностран.

Решение. На AD бираме точка M таква што $\overline{AM}=\overline{AC}$. Бидејќи, $\measuredangle MAC=60^\circ$, следува дека $\triangle ACM$ е рамностран. Бидејќи,

$$\measuredangle CAB=\measuredangle CMD=120^\circ,$$

а исто така $\overline{MC}=\overline{AC}$ и $\overline{AB}=\overline{MD}$, следува дека $\triangle CAB\cong\triangle CMD$. Од последното следува дека $\overline{BC}=\overline{CD}$ и $\measuredangle ACB=\measuredangle MCD$. На крај, од

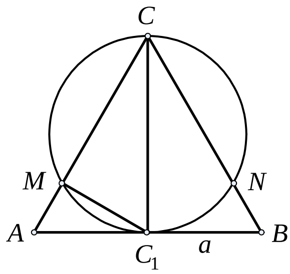
$$\begin{aligned}\measuredangle ACM &= \measuredangle ACB+\measuredangle BCM\\ &= \measuredangle MCD+\measuredangle BCM\\ &= \measuredangle BCD=60^\circ\end{aligned}$$



и $\overline{BC}=\overline{CD}$ следува дека $\triangle BCD$ е рамностран.

12. Дијаметарот на една кружница е висина на рамностран триаголник. Кружницата сече две страни на триаголникот. Во кој однос се поделени страните на триаголникот со пресечните точки?

Решение. Нека $\triangle ABC$ е рамностран, CC_1 е дијаметарот на кружницата, а M и N се пресечните точки на кружницата со страните AC и BC, соодветно. Според Талесова теорема, аголот $\measuredangle CMC_1 = 90^\circ$, од што следува дека и $\measuredangle AMC_1 = 90^\circ$. Ова значи дека $\triangle AC_1M$ е правоаголен триаголник и при тоа $\measuredangle AC_1M = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Имаме,



$$\overline{AM} = \tfrac{1}{2}\overline{AC_1} = \tfrac{1}{4}a,\ \overline{CM} = \overline{AC} - \overline{AM} = \tfrac{3}{4}a,$$

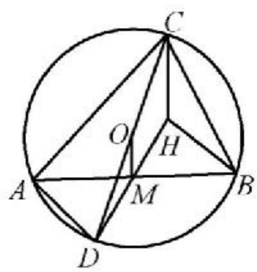
т.е.

$$\overline{AM} : \overline{MC} = 1:3$$

Точката N е симетрична на точката M во однос на висината, па затоа важи $\overline{BN} : \overline{NC} = 1:3$.

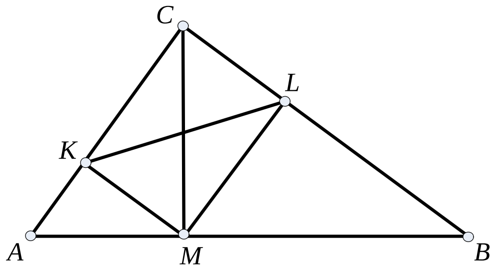
13. Околу триаголникот ABC е опишана кружница и D е точка на неа таква што CD е дијаметар. Ако M е средината на страната AB докажи дека симетричната точка на D во однос на точката M се совпаѓа со ортоцентарот на триаголникот ABC.

Решение. Нека O е центарот на кружницата, а H е симетричната точка на D во однос на M. Бидејќи OM е средна линија за триаголникот DHC, заклучуваме дека $OM \parallel CH$. Но, $OM \perp AB$ и затоа $CH \perp AB$. Според тоа, H припаѓа на висината на триаголникот ABC повлечена од темето C. Од друга страна триаголниците ADM и MBH се складни, па затоа $\measuredangle DAM = \measuredangle MBH$. Според тоа, $AD \parallel HB$ и како $\measuredangle DAC = 90^\circ$ заклучуваме дека $BH \perp AC$. Значи, H припаѓа на висината на триаголникот ABC повлечена од темето B, т.е. H е ортоцентар на триаголникот ABC.



14. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C, M е точка на страната AB и K и L се подножјата на висините повлечени од M кон страните AC и BC, соодветно. Која точка треба да биде M за растојанието $\overline{KL}$ да биде најмало?

Решение. Да забележиме дека $MLCK$ е правоаголник, па затоа неговите дијагонали се еднакви, односно $\overline{CM}=\overline{KL}$. Понатаму, растојанието $\overline{CM}$ е најмало кога CM е висина на триаголникот ABC. Значи, M треба да биде подножјето на висината повлечена од темето C.



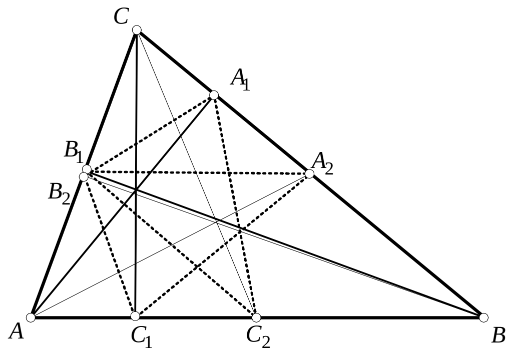
15. Во триаголникот ABC, отсечките AA_1, BB_1, и CC_1 се висини, а отсечките AA_2, BB_2, и CC_2 се тежишни линии. Докажи дека должината на искршената линија $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ е еднаква на периметарот на триаголникот ABC.

Решение. Го користиме фактот дека тежишната линија во правоаголен триаголник повлечена од правиот агол е еднаква на половина од хипотенузата.

Триаголниците ACC_1 и BCC_1 се правоаголни (CC_1 е висина) па добиваме

$\overline{B_2C_1}=\frac{\overline{AC}}{2}$ и $\overline{C_1A_2}=\frac{\overline{BC}}{2}$.

Аналогно, бидејќи триаголниците ABB_1 и CBB_1 се правоаголни (BB_1 е висина), BAA_1 и CAA_1 се правоаголни (AA_1 е висина), добиваме



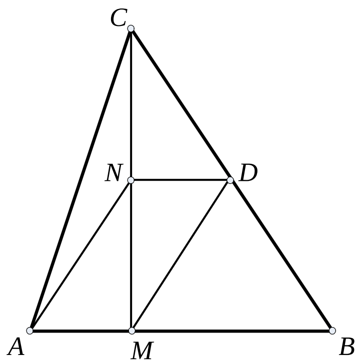
$$\overline{B_1C_2}=\frac{\overline{AB}}{2},\ \overline{A_2B_1}=\frac{\overline{BC}}{2},\ \overline{C_2A_1}=\frac{\overline{AB}}{2} \text{ и } \overline{A_1B_2}=\frac{\overline{AC}}{2}.$$

Должината на искршената линија $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ е

$$\overline{A_2B_1}+\overline{B_1C_2}+\overline{C_2A_1}+\overline{A_1B_2}+\overline{B_2C_1}+\overline{C_1A_2}=\frac{\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{BC}}{2}$$
$$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}.$$

16. Во триаголникот ABC на страната AB избрана е точка M таква што $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$. Докажи дека триаголниците AMC и MBC имаат барем по една тежишна линија со еднаква должина.

Решение. Да ги означиме средишните точки на CM и CB со N и D, соодветно. Тогаш ND е средна линија за триаголникот MBC, па $ND \| MB$ и $\overline{ND}=\frac{1}{2}\overline{MB}$. Од $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{MB}$ следува $\overline{ND}=\overline{AM}$. Значи $AMDN$ е паралелограм, па $\overline{AN}=\overline{MD}$ и AN е тежишна линија на триаголникот AMC, а MD е тежишна линија на триаголникот MBC.

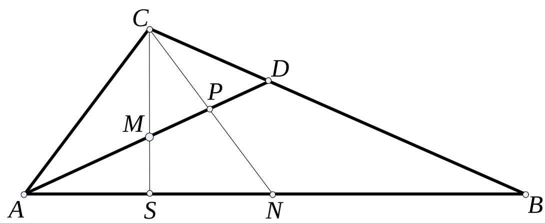


17. Даден е триаголник ABC. Симетралата на аголот при темето A ја сече страната BC во точка D, и притоа важи $\overline{BD}=2\cdot\overline{DC}$. Висината повлечена од темето C ја сече симетралата во точка M. Докажи дека $\overline{CM}=\frac{t_c^2}{2h_c}$, каде t_c е должината на тежишната линија, а h_c е должината на висината, повлечени од темето C.

Решение. Бидејќи AD е симетрала на аголот во теме A следува дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=2,$$

односно $\overline{AB}=2\cdot\overline{AC}$.



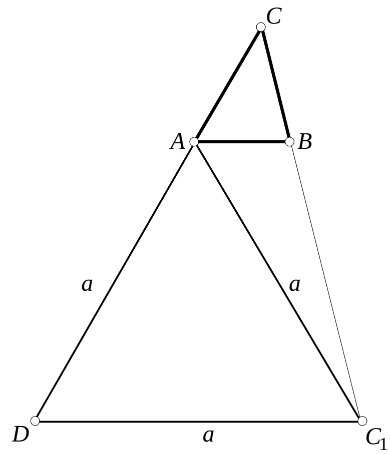
Нека N е средишна точка на страната AB, P е пресечна точка на симетралата AD и тежишната линија CN, и S е подножна точка на висината спуштена од темето C кон страната AB.

Тогаш јасно е дека $\overline{AN}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}$, односно триаголникот ANC е рамнокрак. Од очигледната складност на триаголниците ANP и ACP следува дека $\overline{CP}=\overline{PN}=\frac{t_c}{2}$ и $\measuredangle APC=90^\circ$.

Правоаголните триаголници CPM и CSN се слични бидејќи имаат заеднички агол во темето C. Од сличноста следува $\frac{\overline{CN}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}$, односно $\frac{t_c}{h_c}=\frac{\overline{CM}}{\frac{t_c}{2}}$. Оттука добиваме дека $\overline{CM}=\frac{t_c^2}{2h_c}$, што и требаше да се докаже.

18. Даден е триаголникот ABC. На продолжението на страната CB е избрана точка C_1 ($C_1 \neq C$), таква што $\measuredangle BAC=\measuredangle BAC_1=60^\circ$. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AC_1}}.$$



Решение. Низ точката C_1 повлекуваме права паралелна со AB, која правата AC ја сече во точката D. Тогаш триаголникот DC_1A е рамностран. Имено $\measuredangle C_1AD=60^\circ$, како суплементен агол на

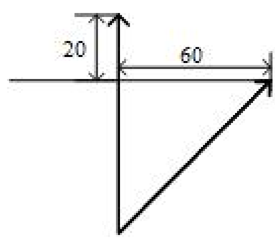
$$\measuredangle C_1AC=\measuredangle BAC+\measuredangle BAC_1=120^\circ$$

и

$$\measuredangle C_1DA=\measuredangle BAC=60^\circ.$$

Нека $\overline{C_1D}=\overline{DA}=\overline{AC_1}=a$. Равенството што треба да се докаже $\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{a}$ е еквиваленно со $\frac{\overline{AC}\cdot a}{\overline{AB}}=a+\overline{AC}$ односно $\frac{\overline{AC}\cdot a}{\overline{AB}}=\overline{DC}$ или $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DC}}{a}$. Точноста на последното равенство следува од сличноста на триаголниците ABC и DC_1C.

19. Водена трска чиј врв се наоѓа 20 сантиметри над површината од едно планинско езеро, под налет на ветрот врвот ја допрел водата и исчезнал во точка оддалечена 60 сантиметри од местото каде што првобитно се наоѓал. Сметајќи дека трската е доволно крута за да остане права при движењето определи ја длабочината на езерото.



Решение. Конструираме кружница со центар во дното на трската и радиус $l=\overline{OD}=\overline{OA}$-должината на трската.

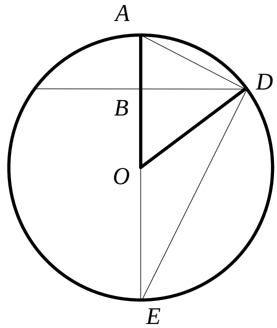
Да забележиме дека триаголникот $\triangle ADE$ е правоаголен па триаголникот $\triangle ABD$ е сличен со $\triangle DBE$ од каде имаме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}},$$

што значи дека

$$\overline{BE} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}}.$$

Од друга страна $\overline{BE} = 2x + 20$, па затоа $x = 80$ сантиметри.



20. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\measuredangle BAC < 60^\circ$. Нека D и E се внатрешни точки од страната AC така што $\overline{EB} = \overline{ED}$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$. Симетралите на аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BDC$ се сечат во точката O. Пресметај го аголот $\measuredangle COD$.

Решение. Најпрво ќе покажеме дека D припаѓа на отсечката AE. Во спротивно, точката E би припаѓала на отсечката AD, од каде што добиваме

$$\measuredangle ACB + \measuredangle CBD = \measuredangle BDE = \measuredangle EBD < \measuredangle ABC,$$

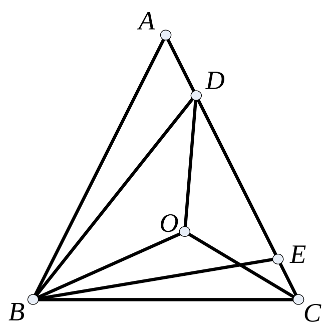
што не е можно. Според тоа, распоредот на точките е $A - D - E$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle DBC &= \measuredangle DBE + \measuredangle CBE = \measuredangle EDB + \measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BAC + \measuredangle ABD + \measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BAC + 2\measuredangle EBC = 180^\circ - 2\measuredangle ABC + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2(\measuredangle DBC + \measuredangle ABD) + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2(\measuredangle DBC + \measuredangle EBC) + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2\measuredangle DBC.\end{aligned}$$

од каде што добиваме $\measuredangle DBC = 60^\circ$

Бидејќи O е центар на впишаната кружница во триаголникот ΔCDB, имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle COD &= 180^\circ - (\measuredangle OCD + \measuredangle ODC)\\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle BDC + \measuredangle DCB)\\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DBC)\\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 120^\circ,\end{aligned}$$



што и требаше да се пресмета.

21. Дали може во правоаголен триаголник со должини на страни природни броеви, должините на катетите да се непарни броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека должините на катетите се непарни броеви, т.е. $a = 2k+1$ и $b = 2n+1$. Тогаш од Питагоровата теорема добиваме

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(k^2 + n^2 + k + n) + 2 .$$

Последното не е можно бидејќи c е природен број а квадратот на природен број е делив со четири или дава остаток еден при делење со четири. Значи, таков триаголник не постои.

22. Дадени се должините на две страни a и b на триаголникот ABC. Тежишните линии што се повлечени кон дадените страни се заемно нормални. Пресметај ја должината на третата страна c со помош на должините на страните a и b.

Решение. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$, а тежишните линии кон страните $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ нека се $\overline{AA_1} = t_a$ и $\overline{BB_1} = t_b$ соодветно. Бидејќи

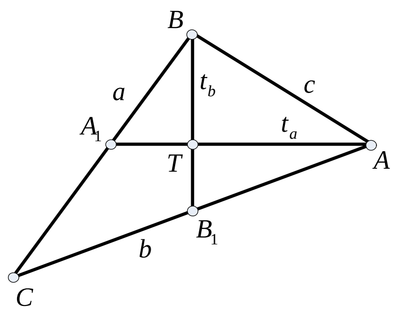
$$\overline{A_1T} = \tfrac{1}{3}t_a \text{ и } \overline{TB} = \tfrac{2}{3}t_b ,$$

од правоаголниот триаголник $\triangle BA_1T$ имаме

$$(\tfrac{a}{2})^2 = (\tfrac{1}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2 .$$

Бидејќи $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$ и $\overline{TB_1} = \frac{1}{3}t_b$, од правоаголниот триаголник $\triangle B_1AT$ имаме

$$(\tfrac{b}{2})^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{1}{3}t_b)^2 .$$



Со собирање на двете равенства се добива

$$\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{5}{9}(t_a{}^2 + t_b{}^2) ,$$

односно

$$t_a{}^2 + t_b{}^2 = \frac{9}{20}(a^2 + b^2) .$$

Конечно, од правоаголниот триаголник $\triangle ABT$ имаме

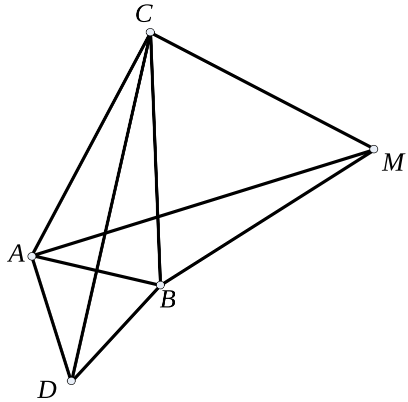
$$c^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2 = \tfrac{4}{9}(t_a{}^2 + t_b{}^2) = \frac{a^2+b^2}{5} ,$$

од каде $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

23. Аголот BCA на триаголникот ABC е 30°. Нека триаголникот ABD е рамностран така што триаголниците ABC и ABD се во различна полурамнина во однос на правата AB. Докажи дека важи

$$\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 .$$

Решение. Нека M е точка така што триаголникот CBM е рамностран и триаголниците ABC и CBM се во различни полурамнини во однос на правата CB.



Тогаш $\measuredangle ACM = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, па триаголникот AMC е правоаголен. Значи

$$\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 .$$

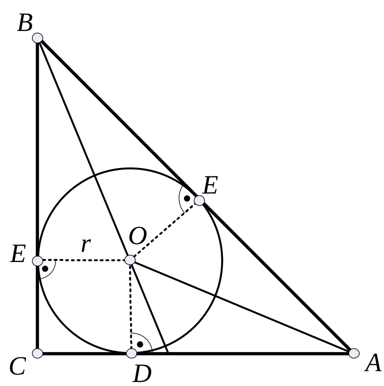
Од друга страна, триаголниците DBC и ABM се складни ($\overline{DB} = \overline{AB}$, $\measuredangle DBC = \measuredangle ABM$ и $\overline{BC} = \overline{BM}$) и затоа $\overline{CD} = \overline{AM}$. Значи,

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AM}^2 = \overline{CD}^2 .$$

24. Во рамнокракиот правоаголен триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) симетралата на аголот повлечена од темето B ја сече страната $\overline{AC}$ во точка D. Да се докаже дека должината на отсечката $\overline{AD}$ е еднаква на дијаметарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. Нека $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ и r е радиусот на впишаната кружница која ги допира страните $\overline{BC}$ и $\overline{AB}$ во точките E и F, соодветно. Триаголниците AFO, FBO и OBE се складни, па следува дека

$$\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{BE} = a - r.$$

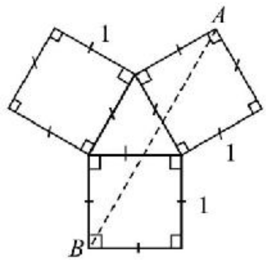


Според Питагоровата теорема, за хипотенузата на триаголникот ABC имаме $\overline{AB} = a\sqrt{2}.$ Од друга страна $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$, па добиваме $2(a-r) = a\sqrt{2},$ односно $r = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a$.

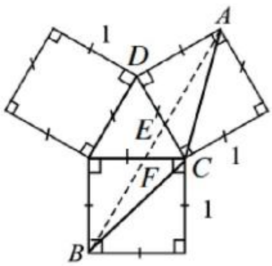
Триаголниците OBE и DBC се слични, па следува дека $\frac{a-r}{a}=\frac{r}{\overline{CD}}$, од каде што $\overline{CD}=\frac{ar}{a-r}$. Тогаш, $\overline{DA}=a-\overline{CD}=a-\frac{ar}{a-r}=\frac{a(a-2r)}{a-r}$. Заменуваме $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$, добиваме

$$\overline{DA}=\frac{a(a-(2-\sqrt{2})a)}{a-\frac{2-\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}a=2r.$$

25. Даден е рамностран триагоник сп должина на страна 1. Над страните на триаголникот, надвот од него, се конструирани квадрати (цртеж десно). Определи ја должината на отсечката AB.



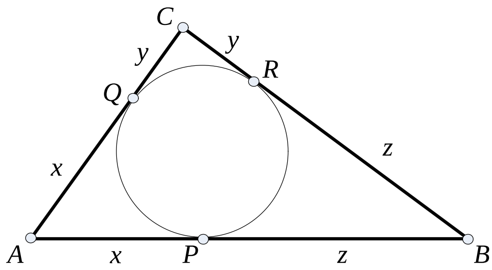
Решение. Нека CD е страна на триаголникот, како што е прикажано на цртежот долу, лево.



Нека E е пресечната точка на AB и CD, а F е пресечната точка на AB со втората страна на триаголникот на која припаѓа темето C. Јасно, $\overline{AC}=\overline{BC}$, како дијагонали на складни квадрати. Според тоа, триаголникот ABC е рамнокрак со агол при врвот еднаков на $45^\circ+60^\circ+45^\circ=150^\circ$. Значи, $\measuredangle EAC=15^\circ$ и $\measuredangle DAE=45^\circ-15^\circ=30^\circ$. Од правоаголниот триаголник EAD следува дека $\overline{ED}=\frac{1}{2}\overline{EA}$, т.е. $\overline{EA}=2\overline{ED}$ и $\overline{ED}^2+1=4\overline{ED}^2$. Значи, $\overline{ED}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\overline{EA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Аналогно добиваме $\overline{BF}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Понатаму, важи $\overline{EC}=1-\overline{ED}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и бидејќи триаголникот EFC е рамностран важи $\overline{FE}=\overline{EC}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Конечно,

$$\overline{AB}=\overline{BF}+\overline{FE}+\overline{EA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=1+\sqrt{3}.$$

26. Во триаголникот ABC впишана е кружница што страната AB ја допира во точката P. Ако $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\overline{AP}\cdot\overline{PB}$ докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.



Решение. Според условот на задачата имаме

$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\overline{AP}\cdot\overline{PB},$$

т.е.

$$(x+y)(y+z)=2xz .$$

Нека

$$2s=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC},$$

т.е. $2x+2y+2z=2s$ од каде следува $x+y+z=s$.Од $x+(y+z)=s$, т.е $x+a=s$ следува $x=s-a$, од $y+(x+z)=s$, т.е $x+c=s$ следува $x=s-c$ и од $z+(x+y)=s$, т.е $x+b=s$ следува $x=s-b$.

Со замена во $(x+y)(y+z)=2xz$ добиваме дека $ab=2(s-a)(s-b)$.

Ако ставиме $s=\frac{a+b+c}{2}$ добиваме дека

$$ab=2(\tfrac{a+b+c}{2}-a)(\tfrac{a+b+c}{2}-b)=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2},$$

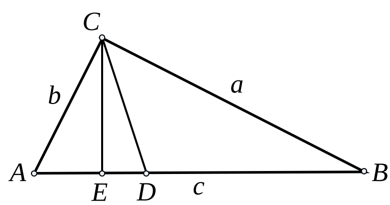
од каде се добива дека $c^2=a^2+b^2$, т.е. триаголникот ABC е правоаголен.

27. Даден е правоаголен триаголник $\triangle ABC$, со прав агол во темето C . Симетралата на правиот агол ја дели хипотенузата во однос $1:2$. Да се определи во кој однос висината спуштена од темето C ја дели хипотенузата.

Решение. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ и нека D и E се подножјата на симетралата и висината спуштени од темето C кон хипотенузата AB , соодветно.

Тогаш од теорема за симетрала имаме дека важи $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{BC}$, од каде поради условот добиваме дека

$$b:a=1:2 \qquad (1) .$$



Понатаму од Евклидовите формули за $\triangle ABC$ имаме

$$b^2=\overline{AE}\cdot c \text{ и } a^2=\overline{BE}\cdot c$$

од каде добиваме

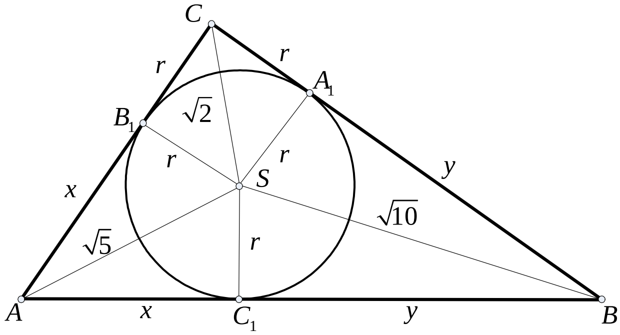
$$\overline{AE}:\overline{BE}=b^2:a^2,$$

и сега поради (1) имаме

$$\overline{AE}:\overline{BE}=1:4 .$$

28. Во правоаголен триаголник ABC (¥ $=90^\circ$) центарот на впишаната кружница е оддалечен од темињата A, B, C за $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{2}$ соодветно. Пресметај го радиусот на опишаната кружница на тој триаголник.

Решение. Нека C е центарот на впишана кружница, r е радиусот на впишаната кружница, R е радиусот на опишана кружница, а A_1, B_1, C_1 се допирните точки на впишаната кружница и триаголникот. Хипотенузата на правоаголен триаголник е дијаметар на опишана кружница, па значи бараниот радиус е половина од хипотенузата. Исто така



$$\overline{AB_1}=\overline{AC_1},\ \overline{BA_1}=\overline{BC_1},\ \overline{CA_1}=\overline{CB_1}.$$

При тоа од тоа што триаголникот е правоаголен, следува дека CB_1SA_1 е квадрат, т.е. $\overline{CA_1}=\overline{CB_1}=r$.Нека ги воведеме следниве ознаки

$$\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=x,\ \overline{BC_1}=\overline{BA_1}=y.$$

Од правоаголните триаголници $AB_1S,\ BC_1S,\ CA_1S,$ имаме

$$x^2+r^2=5,\ y^2+r^2=10,\ 2r^2=2.$$

Од третата равенка следи дека $r=1,$ од каде што $x=2,\ y=3.$ Хипотенузата е $c=x+y=5,$ а бараниот радиус е $R=\frac{5}{2}$.

V.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

29. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB, BC, CD и DA како над дијаметри се конструирани полукругови кон внатрешноста на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека не постои точка од внатрешноста на четириаголникот која е надворешна точка за сите четири полукругови.

Решение. Нека точката P е внатрешна за четириаголникот $ABCD$, а е надворешна точка за четирите полукругови. Нека правата AP ја сече полукружницата со дијаметар $\overline{AB}$ во точка Q, па $\measuredangle AQB = 90^\circ$. Тогаш

$$90^\circ = \measuredangle AQB = \measuredangle QPB + \measuredangle PBQ > \measuredangle QPB = \measuredangle APB .$$

Слично, $\measuredangle BPC < 90^\circ$, $\measuredangle CPD < 90^\circ$ и $\measuredangle DPA < 90^\circ$. Тогаш

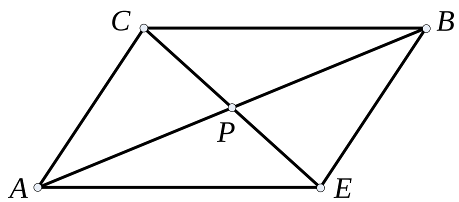
$$360^\circ = \measuredangle APB + \measuredangle BPC + \measuredangle CPD + \measuredangle DPA < 360^\circ ,$$

што не е можно.

Значи, не постои точка од внатрешноста на четириаголникот која е надворешна точка за сите четири полукругови.

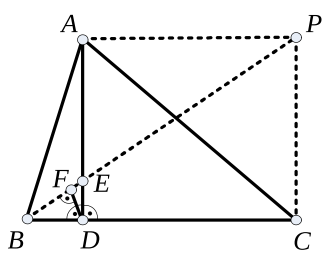
30. Даден е тапоаголен триаголник ABC со тап агол во темето C. Нека точката P е средина на страната $\overline{AB}$ и нека $\measuredangle PCA = 90^\circ$, $\measuredangle BCP = 30^\circ$, $\overline{AC} = 3cm$. Определи ја должината на страната $\overline{BC}$.

Решение. Триаголникот ABC го дополнуваме до паралелограм $AEBC$. Тогаш важи $\measuredangle AEC = 30^\circ$, што значи дека триаголникот AEC е половина од некој рамностран триаголник, па $\overline{AE} = 2\overline{AC} = 2\cdot 3 = 6$, односно $\overline{BC} = 6cm$.



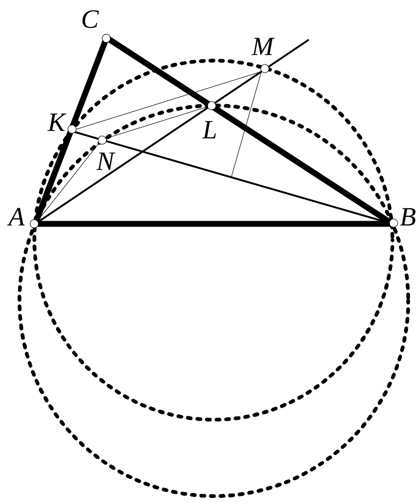
31. Даден е остроаголен триаголник ABC. Точката D е подножје на висината повлечена од A кон страната BC. Точката E лежи на отсечката AD и при тоа важи $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$. Точката F е подножје на нормалата повлечена од точката D кон правата BE. Докажи дека $\measuredangle AFC = 90^\circ$.

Решение. Нека P е точка таква што четириаголникот $ADCP$ е правоаголник. Тогаш $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DB}}$, па затоа B, E и P се колинеарни. Затоа $\measuredangle DFP = 90^\circ$ и бидејќи $\measuredangle DCP = 90^\circ$, добиваме дека F, D, C, P лежат на иста кружница, т.е



кружницата опишана околу правоаголникот $ADCP$. Конечно $\measuredangle AFC = 90^\circ$ (агол над дијаметар).

32. Нека AK и BL се симетрали на агли во разностраниот триаголник ABC ($L \in BC$ и $K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M. Нека N е точка од правата BK, така што правите LN и BK се паралелни. Докажи дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.



Решение. Точката M лежи на симетралата на отсечката BK и на симетралата на аголот $\measuredangle KAB$. Според тоа $\measuredangle KAM = \measuredangle MAB$, па затоа M припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABK (M е средина на кружниот лак BK на таа кружница). Според тоа

$\measuredangle CBK = \measuredangle ABK = \measuredangle AMK = \measuredangle NLA$,

(последното равенство е точно заради тоа што $NL \| KM$). Заради равенството $\measuredangle NLA = \measuredangle NBA$, добиваме дека $ABLN$ е тетивен четириаголник. Значи,

$$\measuredangle NAL = \measuredangle NBL = \measuredangle CBK = \measuredangle NLA .$$

Ако аглите се исти, исти се и должините на кружните лаци па и тетивите определени со нив. Значи, точно е равенството $\overline{LN} = \overline{NA}$.

33. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Неговите дијагонали се сечат во точка E и притоа важат равенствата: $\overline{AB} = \overline{CE}$, $\overline{BE} = \overline{AD}$ и $\measuredangle AED = \measuredangle BAD$. Докажи дека важи $\overline{BC} > \overline{AD}$.

Решение. Важи равенството

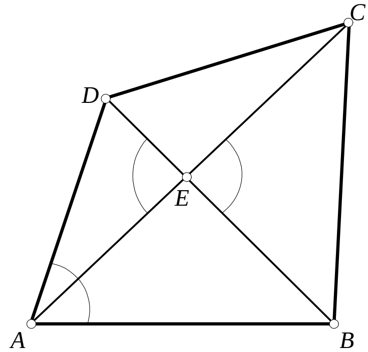
$$\measuredangle AED = \measuredangle BEC ,$$

затоа што аглите се накрсни. Сега, бидејќи

$$\overline{AB} = \overline{CE} ,\ \overline{BE} = \overline{AD} ,$$

$$\measuredangle BAD = \measuredangle AED = \measuredangle BEC ,$$

од признакот САС следува дека $\triangle BAD \cong \triangle CEB$. Затоа важи

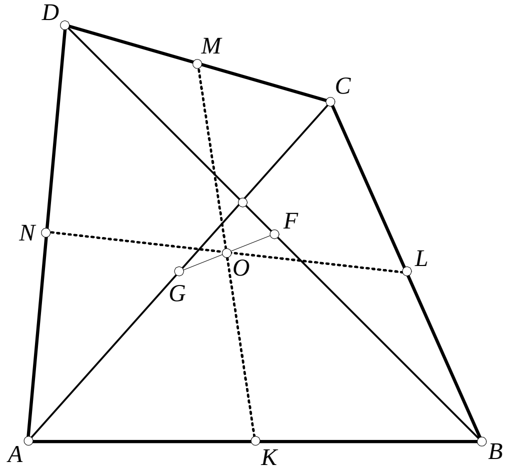


$$\overline{BC} = \overline{BD} > \overline{BE} = \overline{AD} .$$

34. Докажи дека во конвексен четириаголник средините на неговите дијагонали и точката која е пресек на правите кои ги соединуваат средините на спротивните страни од четириаголникот, лежат на една права.

Решение. Нека средините на страните на четириаголникот $ABCD$ ги означиме со K, L, M, N, соодветно. Средините на дијагоналите ги означуваме со G, F, соодветно и $\{O\} = LN \cap KM$.

Тогаш KL е средна линија за $\triangle ABC$ од каде $KL \| AC$ и MN е средна линија за $\triangle ACD$ од каде $NM \| AC$. Добиваме дека $KL \| NM$. Од $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ добиваме $ML \| NK$. Значи четириаголникот $KLMN$ е паралелограм.

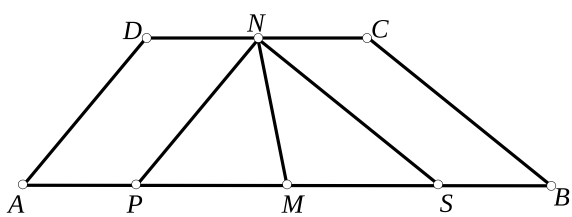


Отсечката GL е средна линија за $\triangle ABC$, па затоа $GL \| AB$. Отсечката NF е средна линија за $\triangle ADB$ од каде $NF \| AB$. Добиваме $GL \| NF$. Од $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ аналогно добиваме $FL \| NG$ односно четириаголникот $GLFN$ е паралелограм.

Бидејќи O е пресек на дијагоналите на $KLMN$, O ги преполовува LN и KM. Во паралелограмот $GLFN$ дијагоналите се преполовуваат од каде O е средина на GF па точките O, G, F се колинеарни.

35. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB} = 16\ cm$, $\overline{CD} = 8\ cm$. Збирот на аглите ABC и BAD е 90°. Ако M и N се средини на страните AB и CD соодветно, пресметај ја должината на отсечката MN.

Решение. Нека P и S се точки на страната AB таков што $NP \| AD$ и $NS \| BC$. Триаголникот PNS е



правоаголен, со прав агол во темето N, затоа што

$$\measuredangle PSN + \measuredangle SPN = \measuredangle ABC + \measuredangle BAD = 90^\circ .$$

Значи, MN е тежишна линија кон хипотенузата и затоа

$$\overline{MN} = \tfrac{1}{2}\overline{PS} = \tfrac{1}{2}(16-4-4) = 4$$

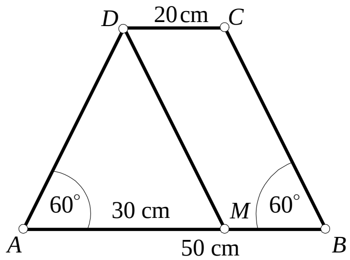
36. Еден рамнокрак трапез има основи $\overline{AB} = 50\ cm$, $\overline{CD} = 20\ cm$ и агол $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Најди го периметарот на трапезот.

Решение. Нека $DM \parallel BC$. Триаголникот AMD е рамностран затоа што

$\measuredangle AMD = 60^\circ, \measuredangle ABC = 60^\circ, \measuredangle BAD = 60^\circ$.

Затоа отсечките AD и AM се со еднаква должина $30\ cm$. За периметарот се добива дека

$$L = 50 + 20 + 2\cdot 30 = 130\ cm .$$



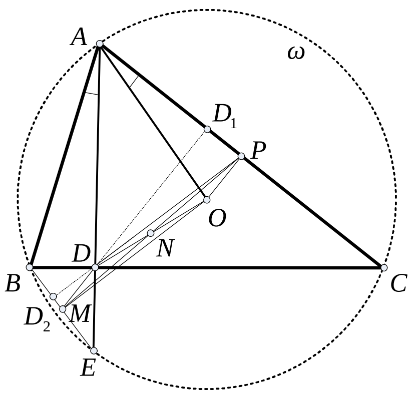
37. Нека ABC е остроаголен триаголник со $\overline{AB} < \overline{AC}$ и O е центар на неговата опишана кружница μ. Нека D е точка од отсечката BC таква што $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO$. Точката E е втора пресечна точка на μ и правата AD, а точките M, N и P се средини на отсечките BE, OD и AC. Докажи дека M, N и P се колинеарни.

Решение. Ќе докажеме дека $MOPD$ е паралелограм. Од тоа ќе следува дека M, N и P се колинеарни.

Бидејќи

$$\measuredangle BAD = \measuredangle CAO = 90^\circ - \measuredangle ABC ,$$

D е подножјето на нормалата повлечена од A до страната BC. Бидејќи M е средина на отсечката BE, имаме $\overline{BM} = \overline{ME} = \overline{MD}$, па затоа $\measuredangle MDE = \measuredangle MED = \measuredangle ACB$. Нека MD ја сече страната AC во точка D_1. Од $\measuredangle ADD_1 = \measuredangle MDE = \measuredangle ACD$, следува дека MD е нормална на AC. Од друга страна, бидејќи O е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и P е средина на страната AC, добиваме дека OP е нормална на AC. Затоа MD и OP се паралелни. Слично,



бидејќи P е средина на страната AC, имаме $\overline{AP}=\overline{PC}=\overline{DP}$, па оттука $\measuredangle PDC=\measuredangle ACB$. Да земеме дека PD ја сече BE во точка D_2. Бидејќи $\measuredangle BDD_2=\measuredangle PDC=\measuredangle ACB=\measuredangle BED$, заклучуваме дека PD е нормална на BE. Бидејќи M е средна точка на отсечката BE, OM е нормална на BE и оттука OM и PD се паралелени.

38. Даден е трапез $ABCD$ таков што $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BD}$. Нека M е средина на CD. Да се најдат аглите на трапезот ако $\measuredangle MBC=\measuredangle CAB$.

Решение. Од условот следува дека дадениот трапез е рамнокрак. Нека K е средина на AD, и нека $\measuredangle CAB=\measuredangle MBC=\varphi$. Тогаш

$$\measuredangle MKA=180^\circ-\measuredangle KAC=180^\circ-\measuredangle MBA.$$

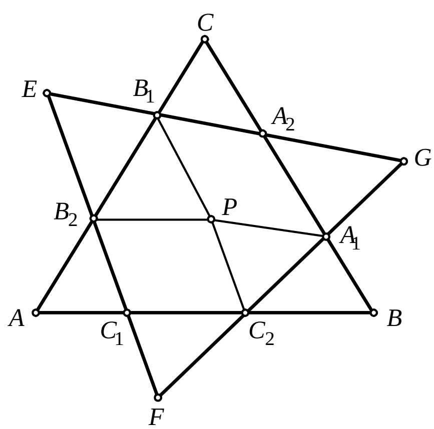
Значи четириаголникот $ABMK$ е тетивен.

Понатаму од услов имаме дека триаголникот $\triangle ABD$ е рамнокрак, од каде следува дека $\measuredangle AKB=90^\circ$. Сега заради тетивноста на $ABMK$ следува дека $\measuredangle AMB=\measuredangle AKB=90^\circ$, т.е. имаме дека триаголникот $\triangle AMB$ е рамнокрак правоаголен. Нека M_1 е подножјето на висината од M.

Тогаш $\overline{MM_1}=\overline{AM_1}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\overline{AC}}{2}$, па добиваме дека $\varphi=30^\circ$.

Сега лесно $\measuredangle ABC=30^\circ+45^\circ=75^\circ$ и $\measuredangle ADC=105^\circ$.

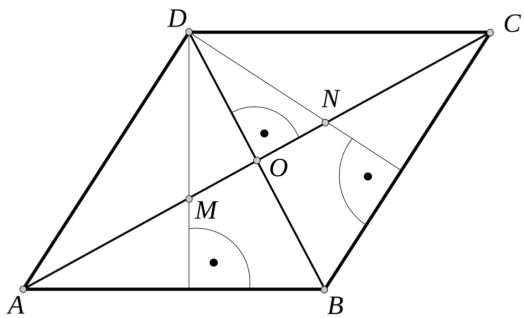
39. Нека ABC е рамностран триаголник. На страната AB се избрани точки C_1 и C_2, на AC се избрани точки B_1 и B_2 и на страната BC се избрани точки A_1 и A_2, при што важи: $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}$. Нека пресечните точки на правите A_2B_1 и B_2C_1, B_2C_1 и C_2A_1, C_2A_1 и A_2B_1 се E, F, G соодветно. Докажи дека триаголникот формиран од отсечките B_1A_2, A_1C_2 и C_1B_2 е сличен со триаголникот EFG.



Решение. Нека триаголникот формиран од отсечките B_1A_2, A_1C_2 и C_1B_2 го означиме со $A_3B_3C_3$. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот EFG таква што $C_1C_2PB_2$ е паралелограм.

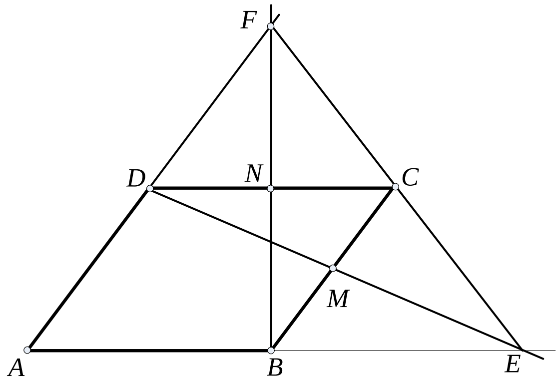
Тогаш триаголникот B_2PB_1 е рамностран (две еднакви страни и агол меѓу нив еднаков на 60°). Според тоа, четириаголникот $PA_1A_2B_1$ е паралелограм. Од претходните разгледувања следува $PC_2 \parallel EF$ и $PA_1 \parallel EG$. Затоа $\triangle PC_2A_1 \sim \triangle EFG$. Од друга страна $\triangle PC_2A_1 \cong \triangle A_3B_3C_3$, па затоа $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle EFG$.

40. Внатрешните агли на ромбот $ABCD$ се однесуваат како 1:2. Докажи дека висините на ромбот конструирани од темето на еден од тапите агли, ја делат поголемата дијагонала на три еднакви дела.



Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на ромбот. Аглите во ромбот се 60° и 120°. Тогаш ромбот се состои од два рамнострани триаголника ABD и BDC. Користејќи ги својствата на дијагоналите на ромбот и рамностраниот триаголник, лесно се покажува дека точките M, N се тежишта на соодветните триаголници. Во секој триаголник, тежииштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, од каде добиваме $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AM}, \overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{CN}$. Конечно, ако земеме предвид дека $\overline{AM} = \overline{CN}$ добиваме $\overline{MN} = \overline{OM} + \overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{CN}) = \overline{AM} = \overline{CN}$.

41. Нека $ABCD$ е паралелограм и M и N се средини на страните BC и CD соодветно. Нека E е пресекот на правата DM со правата AB и F е пресекот на правата BN со правата AD. Докажи дека E, C и F се колинеарни.

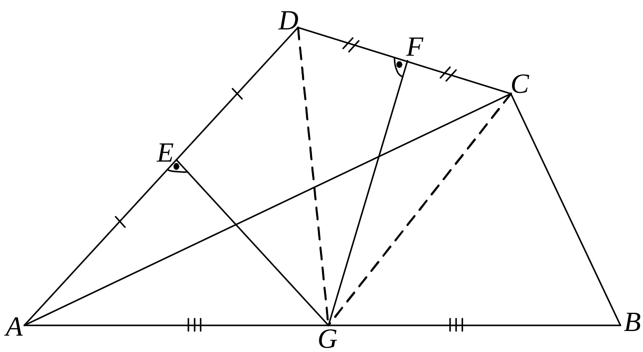


Решение. Од условот на задачата $\overline{DN} = \overline{CN}$. Уште $\measuredangle BNC = \measuredangle DNC$ и $\measuredangle FDN = \measuredangle NCB$, па $\triangle DNF \cong \triangle CNB$.

Добиваме дека $\overline{BC}=\overline{DF}$ и бидејќи тие се и паралелни $DBCF$ е паралелограм. Значи, BD и CF се паралелни. Понатаму $\overline{BM}=\overline{CM}$, $\measuredangle DMC=\measuredangle EMB$ и $\measuredangle MCD=\measuredangle EBM$. Значи, $\triangle CDM\cong\triangle BEM$. Следува $\overline{BE}=\overline{DC}$, па бидејќи тие се и паралелни добиваме дека $BECD$ е паралелограм. Значи, CE е паралелна со BD. Од ова следува дека E, C и F се колинеарни.

42. Во конвексен четириаголник $ABCD$ (трапезоид) точките E,F,G се средини на страните AD,DC и AB соодветно. При тоа $GE\perp AD$, $GF\perp CD$. Пресметај го аголот $\measuredangle ACB$.

Решение. Од условот на задачата $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\measuredangle GEA=\measuredangle DEG=90^\circ$ и GE е заедничка страна, па според САС триаголниците AGE и DGE се складни. Од складноста следи дека $\overline{AG}=\overline{GD}$.



Аналогно, $\Delta GFD\cong\Delta GFC$ од каде што $\overline{GD}=\overline{GC}$.

Значи $\overline{AG}=\overline{GD}=\overline{GC}$ и $\overline{AG}=\overline{GB}$ од условот точката G да е средина на страната AB, што значи дека $\overline{GC}=\overline{GB}$ односно дека $\triangle GBC$ е рамнокрак. Нека означиме $\measuredangle CAG=\sim$. Тогаш $\measuredangle GCA=\sim$, па затоа

$$\measuredangle CGB=\measuredangle CAG+\measuredangle GCA=2\sim.$$

Понатаму,

$$\measuredangle BCG=\measuredangle GBC=\frac{180^\circ-\measuredangle CGB}{2}=90^\circ-\sim.$$

Конечно, $\measuredangle ACB=\measuredangle GCA+\measuredangle BCG=\sim+90^\circ-\sim=90^\circ$.

43. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE}:\overline{ED}=m$. Нека F е точка од CE, така што $BF\perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на

опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.

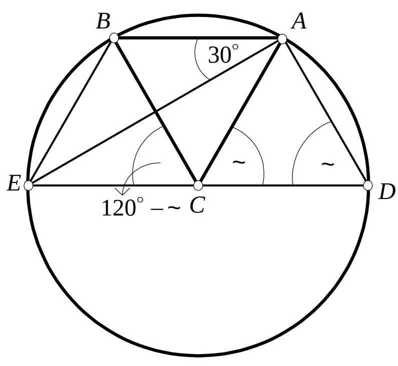
Решение. За да точката A биде центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, треба $\overline{AB} = \overline{AG} = \overline{AF}$. Бидејќи точката G е симетрична на F во однос на AB имаме дека $\overline{AG} = \overline{AF}$. Останува да го одредиме m од условот $\overline{AB} = \overline{AF}$.

Нека S е точка од страната BC таква што $\overline{CS} : \overline{SB} = \overline{AE} : \overline{ED} = m$. Тогаш $AS \,||\, CE$. Нека M е пресечната точка на AS и BF, а точката B_1 нека е симетрична точка на B во однос на M. Тогаш, имаме дека $\overline{BM} = \overline{MB_1}$, $AM \perp BF$ (од $BF \perp CE$ и $AS \,||\, CE$), од каде следува дека $\overline{AB} = \overline{AB_1}$. Бидејќи треба да важи $\overline{AB} = \overline{AF}$, го бараме m од условот $\overline{AB_1} = \overline{AF}$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{AB_1}$ и B, B_1, F се колинеарни, тогаш $\overline{AB_1} = \overline{AF}$ ако $B_1 \equiv F$, т.е. ако M е средина на BF, односно ако S е средина на BC, односно ако $m = \overline{AE} : \overline{ED} = 1$.

44. Темињата A и B на рамностраниот триаголник ABC лежат на кружницата k која има радиус 1, а темето C припаѓа во внатрешноста на k. Точката $D \neq B$ лежи на k, при што $\overline{AD} = \overline{AB}$. Нека E, ($E \neq D$) е пресекот на правата DC и кружницата k. Пресметај ја должината на отсечката CE.

Решение. Бидејќи $\overline{AD} = \overline{AC}$ триаголникот CDA е рамнокрак. Основа на триаголникот DAC е CD, и ако $\measuredangle ADC = \sim$, тогаш $\measuredangle ACD = \sim$ и

$$= \measuredangle ECB = 120^\circ - \sim .$$



Четириаголникот $ABED$ е тетивен, па според тоа $\measuredangle ABE = 180^\circ - \sim$. Но тогаш

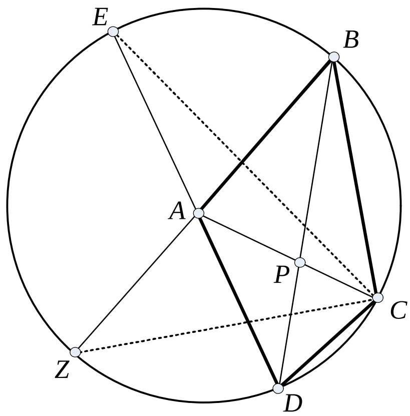
$$\measuredangle CBE = 120^\circ - \sim = \quad .$$

Значи, триаголникот CBE е рамнокрак со основа CB. Бидејќи триаголникот ABC е рамностран, добиваме дека AE е симетрала на BC и симетрала на аглите BAC и BEC. Од тоа следува дека EB од точката A се гледа под агол од 30°. Значи, соодветниот централен агол е 60° и $\overline{BE}=1$. Сега е јасно дека $\overline{CE}=1$.

45. Нека е $ABCD$ конвексен четириаголник во кој $\measuredangle DAC=\measuredangle BDC=36^\circ$, $\measuredangle CBD=18^\circ$, $\measuredangle BAC=72^\circ$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P. Одреди ја големината на аголот $\measuredangle APD$.

Решение. На правите DA и BA ќе избереме точки E и Z (види цртеж) такви што $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{AZ}$. Бидејќи

$$\measuredangle DEC=\frac{\measuredangle DAC}{2}=18^\circ=\measuredangle CBD,$$



добиваме дека четириаголникот $DEBC$ е тетивен. Од друга страна

$$\measuredangle AZC=\frac{\measuredangle CAB}{2}=36^\circ=\measuredangle DBC,$$

па четириаголникот $ZDCB$ е тетивен.

Од последните два заклучоци, добиваме дека петаголникот $ZDCBE$ е впишан во кружница со центар во A и радиус $r=\overline{AC}$. Но тогаш $\overline{AC}=\overline{AD}$ и $\measuredangle ACD=\measuredangle ADC=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ$, од каде добиваме дека $\measuredangle ADP=36^\circ$ и конечно $\measuredangle APD=108^\circ$, што и требаше да се пресмета.

46. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со радиус 1. Докажи дека разликата меѓу неговиот периметар и збирот од должините на неговите дијагонали е позитивен број кој е помал од 4.

Решение. Од неравенството на триаголник имаме:

$$2L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{DA}+\overline{AB}>\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{BD},$$

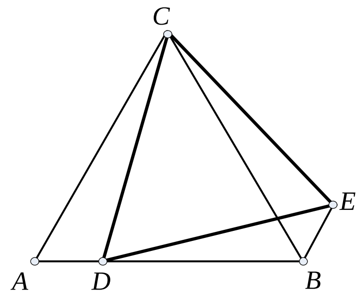
од што го добиваме едното неравенство (направи цртеж). Нека пресечната точка на дијагоналите ја означиме со R, а со d должината на дијаметарот на кружницата. Тогаш имаме

$$\begin{aligned}L&=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\\&<\overline{AR}+\overline{BR}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{CR}+\overline{DR}+\overline{DR}+\overline{AR}\\&=\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{BD}\\&\le\overline{AC}+\overline{BD}+2d=\overline{AC}+\overline{BD}+4,\end{aligned}$$

од што се добива другото неравенство.

47. Нека D е произволна точка на страната AB од рамностраниот триаголник ABC. Нека E е точка таква што триаголникот CDE е рамностран и притоа точките B и E се на иста страна од правата CD. Докажи дека четириаголникот $DBEC$ е тетивен.

Решение. Бидејќи $\measuredangle ECD = 60^\circ$, за да докажеме дека четириаголникот $DBEC$ е тетивен доволно е да докажеме дека $\measuredangle DBE = 120^\circ$. Триаголниците ADC и BEC се складни, бидејќи $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{DC} = \overline{EC}$ и



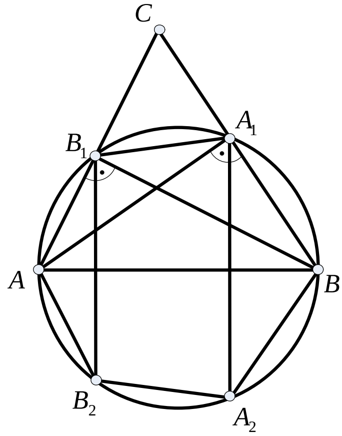
$$\begin{aligned}\measuredangle ACD &= 60^\circ - \measuredangle DCB \\ &= \measuredangle DCE - \measuredangle DCB \\ &= \measuredangle BCE.\end{aligned}$$

Од нивната складност добиваме $\measuredangle EBC = \measuredangle DAC = 60^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle DBE = \measuredangle DBC + \measuredangle EBC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$$

48. Нека е даден триаголникот ABC. Нека A_1 и B_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A, односно B соодветно. Нека точките A_2 и B_2 се симетрични на точките A_1 и B_1 соодветно, во однос на отсечката AB. Докажи дека четириаголниците ABA_1B_1, AB_2A_2B и $A_1B_1A_2B_2$ се тетивни.

Решение. Нека е даден триаголникот ABC и нека A_1, B_1, A_2 и B_2 се точки кои го задоволуваат условот на задачата (цртеж десно). Ако ја нацртаме кружницата со центар во средината на страната AB на триаголникот и радиус колку што е должината на половината на оваа страна, тогаш заради тоа што A_1 и B_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A, односно B соодветно и Талесовата теорема, точ-

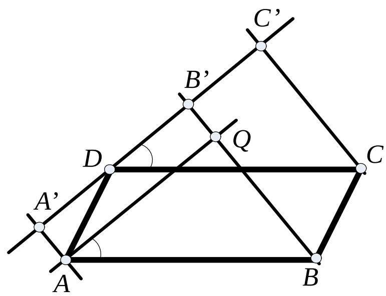


ките A_1 и B_1 лежат на нацртаната кружница. Точките A_2 и B_2 исто така лежат на кружницата бидејќи тие заради својата симетрија во однос на страната AB формираат тетиви во кружницата нормални на дијаметарот и преполовени од него. Па, бидејќи шесте точки кои ги формираат трапезите ABA_1B_1, AB_2A_2B и $A_1B_1A_2B_2$ лежат на истата кружница, следува дека истите се тетивни.

49. Низ темето D од паралелограмот $ABCD$ е повлечена произволна права p, така што темињата A,B,C се на иста страна во однос на правата p. Нека A',B',C' се подножјата на нормалите повлечени кон правата p, од точките $A,B,C,$ соодветно. Докажи дека

$$\overline{BB'}=\overline{AA'}+\overline{CC'}.$$

Решение. Нека правата паралелна со p, повлечена низ точката A ја сече правата BB' во точката Q (види цртеж).



Четириаголникот $AQB'A'$ има три прави агли, па тој е правоаголник, од што следува дека

$$\overline{AA'}=\overline{QB'}. \qquad (1)$$

Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, следува дека $\overline{AB}=\overline{DC}$ и $AB \| DC$. Аглите $\measuredangle QAB$ и $\measuredangle C'DC$ се еднакви како агли со паралелни краци. Бидејќи BB' и CC' се нормални на правата p, следува дека тие се паралелни. Од тоа следува дека и аглите $\measuredangle QBA$ и $\measuredangle C'CD$ се еднакви како агли со паралелни краци.

Сега, за триаголниците ABQ и DCC' имаме

$$\overline{AB}=\overline{DC}, \ \measuredangle QAB=\measuredangle C'DC \text{ и } \measuredangle QBA=\measuredangle C'CD,$$

па од признакот АСА следува дека тие се складни. Од складноста на овие триаголници следува дека

$$\overline{CC'}=\overline{BQ}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{BB'}=\overline{QB'}+\overline{BQ}=\overline{AA'}+\overline{CC'}$.

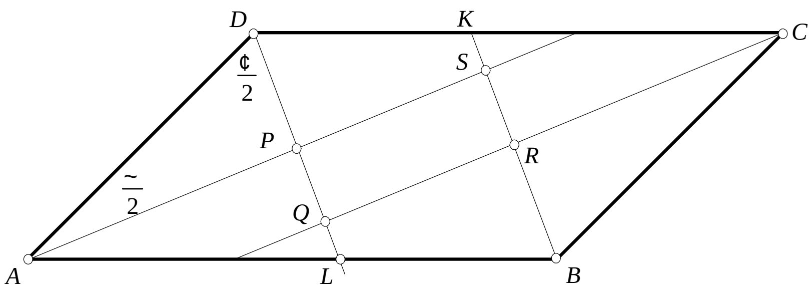
50. Даден е паралелограмот $ABCD$. Симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките P,Q,R и S.

а) Докажи дека четириаголникот $PQRS$ е правоаголник;

б) Докажи дека должината на дијагоналата на правоаголникот $PQRS$ е еднаква со разликата од должините на соседните страни на паралелограмот $ABCD$.

Решение. Нека е даден паралелограмот $ABCD$ и нека симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките P, Q, R и S (види цртеж).

а) Очигледно, симетралите на аглите кај темињата A и C се меѓусебно паралелни, а исто така и симетралите кај темињата B и D. Значи четириаголникот $PQRS$ е паралелограм. Од $\triangle APD$ имаме:



$$\frac{\sim}{2} + \measuredangle P + \frac{\text{¢}}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{\sim + \text{¢}}{2} + \measuredangle P = 180^\circ$$

$$90^\circ + \measuredangle P = 180^\circ \text{ .}$$

$$\measuredangle P = 90^\circ$$

Следи дека $\measuredangle QPS = 90^\circ$ како накрсни агли со $\measuredangle P$, од што следува дека четириаголникот $PQRS$ е правоаголник.

б) Триаголниците APL и APD се складни, бидејќи имаат заедничка страна AP и по два еднакви агли:

$$\measuredangle APL = \measuredangle APD = 90^\circ; \measuredangle PAL = \measuredangle PAD = \frac{\sim}{2} \text{ ,}$$

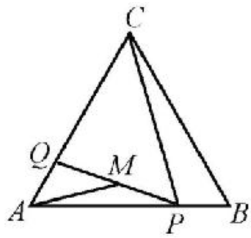
па затоа

$$\overline{AL} = \overline{AD}, \overline{PL} = \overline{PD} \text{ .}$$

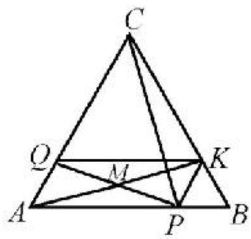
Аналогно се покажува дека $\overline{RB} = \overline{RK}, \overline{BC} = \overline{KC}$. Тогаш, отсечката $\overline{PR}$ е средна линија за паралелограмот $LBKD$, од каде што следува дека

$$\overline{PR} = \overline{LB} = \overline{AB} - \overline{AL} = \overline{AB} - \overline{AD} \text{ .}$$

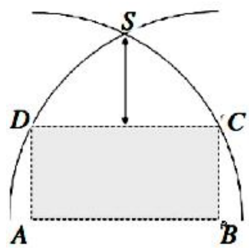
51. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC земена е точка P таква што $\overline{PB} \leq \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{CP} = 6\,cm$ (цртеж десно). Ако Q е точка од страната AC таква што $\overline{AQ} = \overline{BP}$, а M е средина на отсечката PQ, определи ја должината на отсечката AM.



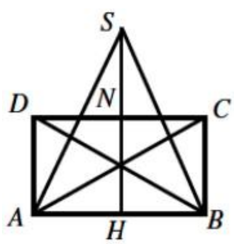
Решение. Нека K е точка е точка од страната BC таква што $\overline{BK} = \overline{BP}$. Во рамнокракиот триаголник PBK аголот меѓу краците е еднаков на 60°, па затоа тој е рамностран. Од $\measuredangle BPK = 60^\circ = \measuredangle PAQ$ следува $PK \parallel AQ$. Понатаму, триаголникот QKC е рамностран (има агол 60° и $\overline{CQ} = \overline{CA} - \overline{AQ} = \overline{BC} - \overline{BK} = \overline{CK}$). Од $\measuredangle KQC = 60^\circ = \measuredangle PAQ$ следува дека $QK \parallel AP$. Значи, четириаголникот $APKQ$ е паралелограм. Точката M е пресек на неговите дијагонали и затоа важи $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AK}$. Од друга страна триаголниците PBC и KBA се складни, па затоа $\overline{CP} = \overline{AK}$. Според тоа, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{CP} = 3\,cm$.



52. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што важи $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 5,4$ (цртеж десно). Со центри во точките A и B се конструирани два лаци кои минуваат низ темињата C и D, соодветно, кои се сечат во точката S. Определи го растојанието од точката S до правата CD.



Решение. Радиусите на двете кружници се еднакви на дијагоналите на правоаголникот, па затоа тие се еднакви меѓу себе. Според тоа, триаголникот ABS е рамнокрак, па затоа висината $SH\,(H \in AB)$ е медијана (цртеж десно). Значи, $\overline{HB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BC}$. Според тоа, правоаголните триаголници ABC и SHB имаат еднакви хипотенузи и по една катета. Значи, тие се складни, па затоа $\overline{SH} = \overline{AB}$. Бидејќи $AB \parallel CD$, заклучуваме дека $SN \perp CD$, каде N е пресечната точка на

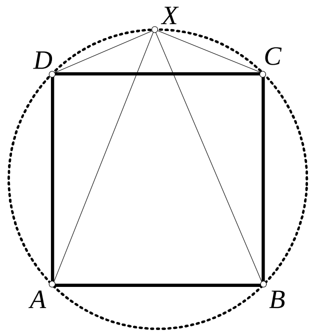


SH и CD. Значи, бараното растојание е $\overline{SN}$. Освен тоа, $\overline{NH}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{SH}$, па затоа $\overline{SN}=\overline{NH}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot 5,4=2,7$.

53. Околу квадратот $ABCD$ е опишана кружница. Докажи дека за произволна точка X од кружницата е точно равенството

$$\overline{XA}^2-\overline{XB}^2=\overline{XC}^2-\overline{XD}^2.$$

Решение. Триаголниците XAC и XBD се правоаголни (според Талесова теорема), па според тоа



$$\overline{XA}^2+\overline{XC}^2=4R^2=\overline{AC}^2,$$
$$\overline{XB}^2-\overline{XD}^2=4R^2=\overline{BD}^2$$

каде R е радиусот на опишаната кружница. Сега лесно се добива равенството

$$\overline{XA}^2-\overline{XB}^2=\overline{XC}^2-\overline{XD}^2.$$

Ако пак X е едно од темињата, на пример A, тогаш

$$-\overline{AB}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2,$$

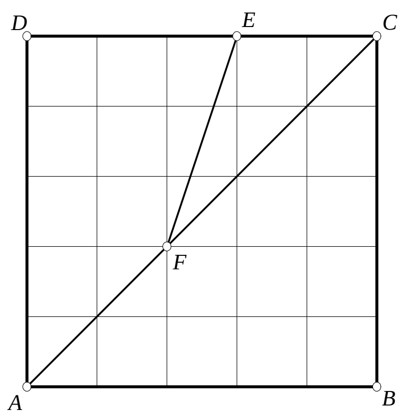
односно

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2,$$

што всушност е Питагоровата теорема. Аналогна е дискусијата и за останатите три темиња.

54. Даден е квадратот $ABCD$ со страна $\overline{AB}=5$. На страната CD и дијагоналата AC избрани се точки E и F соодветно, такви што $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\frac{2}{3}$. Пресметај ја должината $\overline{EF}$.

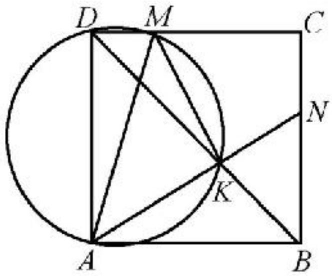
Решение. Од $\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\frac{2}{3}$ следува дека $\overline{DE}=\frac{3}{5}\overline{CD}$. Слично и $\overline{FC}=\frac{3}{5}\overline{AC}$. Ќе го разделиме квадратот на 25 единични квадрати секој со должина на страна 1 тогаш од претходното имаме дека E и F се како на цртежот десно. Сега лесно се гледа дека



$$\overline{EF}^2 = 3^2 + 1^2 = 10\text{, т.е. } \overline{EF} = \sqrt{10}\ .$$

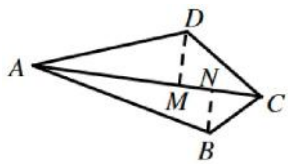
55. На страната CD на квадрат со страна $\sqrt{7}$ е земена точка M така што $\overline{DM} = 1$, а на страната BC е земена точка N таква што $\measuredangle MAN = 45^\circ$. Ако AN ја сече дијагоналата BD во точката K, определи ја должината на отсечката MK.

Решение. Од правоаголниот триаголник AMD наоѓаме $\overline{AM} = \sqrt{7+1} = \sqrt{8}$. Бидејќи $\measuredangle KDM = \measuredangle MAN = 45^\circ$, околу четириаголникот $AKMD$ може да се опише кружница чиј дијаметар е AM. Според тоа, $\measuredangle AKM = 90^\circ$. Ако $\overline{MK} = x$, тогаш од правоаголниот триаголник AKM добиваме $x^2 + x^2 = 8$, т.е. $x = 2$.



56. Должините на страните на конвексен четириаголник последователно една по друга се 11, 7, 3 и 9. Определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот.

Решение. Нека $\overline{AB} = 11, \overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = 3$ и $\overline{AD} = 9$. Со M и N да ги означиме подножјата на нормалите повлечени соодветно од точките D и B на дијагоналата AC. Имаме,



$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DM}^2 \text{ и } \overline{CM}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DM}^2,$$

од каде добиваме

$$\overline{AM}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 9^2 - 3^2 = 72\ .$$

Аналогно,

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BN}^2 \text{ и } \overline{CN}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BN}^2,$$

од каде добиваме

$$\overline{AN}^2 - \overline{CN}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = 11^2 - 7^2 = 72\ .$$

Според тоа,

$$\overline{AM}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{CN}^2,$$

т.е.

$$(\overline{AC}-\overline{CM})^2-\overline{CM}^2=(\overline{AC}-\overline{CN})^2-\overline{CN}^2$$

и оттука

$$\overline{AC}(\overline{AC}-2\overline{CM})=\overline{AC}(\overline{AC}-2\overline{CN}),$$

т.е. $\overline{CM}=\overline{CN}$.

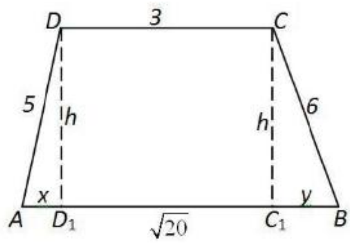
Значи, точките M и N се совпаѓаат, од каде следува $AC\perp BD$, т.е. аголот меѓу дијагоналите е еднаков на 90°.

57. Определи ја висината на трапез со основи $\sqrt{20}\ cm$ и $3\,cm$, и краци $5\,cm$ и $6\,cm$.

Решение. Нека $\overline{CC_1}=\overline{DD_1}=h$ се висините во трапезот, $\overline{AD_1}=x$ и $\overline{BC_1}=y$. Од правоаголните триаголници AD_1D и BC_1C следува

$$6^2-y^2=h^2=5^2-x^2$$

(цртеж десно). Освен тоа,



$$\overline{D_1C_1}=3=\sqrt{20}-x-y.$$

Така го добивме системот

$$\begin{cases} y^2-x^2=11, \\ x+y=\sqrt{20}+3. \end{cases}$$

Со замена во $(y-x)(y+x)=11$ го добиваме ситемот

$$\begin{cases} y-x=\sqrt{20}-3, \\ y+x=\sqrt{20}+3, \end{cases}$$

од каде добиваме $x=3,\ y=\sqrt{20}$. Според тоа, $h=\sqrt{5^2-3^2}=4\ cm$.

58. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник во кој што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB,BC,CD и DE во точките P,Q,R и S (различни од темињата на петаголникот). Докажи дека правите PS и AB се паралелни.

Решение. Нека O е центар на кругот k. Тогаш

$$\overline{BP}=\overline{BQ},\ \overline{CQ}=\overline{CR} \text{ и } \overline{DR}=\overline{DS}$$

(тангентни отсечки кон кругот k). Од условот

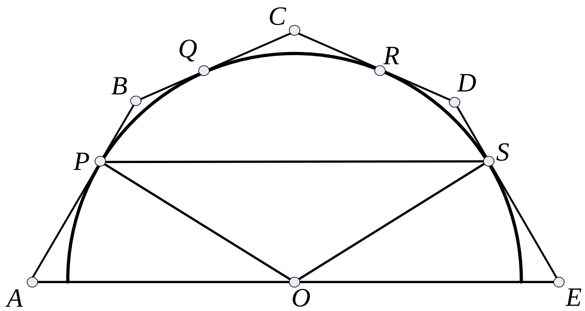
$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$$

добиваме дека

$$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{CR}+\overline{RD}=\overline{BQ}+\overline{QC}+\overline{DS}+\overline{SE},$$

па со оглед на претходните равенства имаме $\overline{AP}=\overline{ES}$. Сега, триаголниците APO и ESO се складни, бидејќи $\overline{PO}=\overline{OS}$, $\overline{AP}=\overline{ES}$ и $\measuredangle APO=\measuredangle ESO=90^\circ$. Според тоа, $\measuredangle PAO=\measuredangle SEO$.

Од рамнокракиот триаголник POS добиваме $\measuredangle OPS=\measuredangle OSP$, па заради тоа



$$\measuredangle APS=\measuredangle APO+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OSP=\measuredangle PSE.$$

Од четириаголникот $APSE$ добиваме

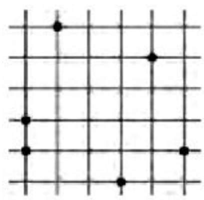
$$2\measuredangle EAP+2\measuredangle APS=\measuredangle EAP+\measuredangle APS+\measuredangle PSE+\measuredangle SEA=360^\circ,$$

односно $\measuredangle EAP+\measuredangle APS=180^\circ$.

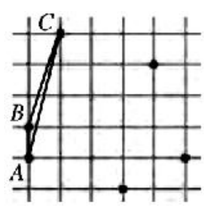
Значи, $APSE$ е рамнокрак трапез и конечно $AB\,||\,PS$.

V.3. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

59. Во квадратна мрежа со должина на страната на единечните квадрати еднаква на $1cm$ се дадени шест точки како на цртежот десно. Определи ја најмалата можна плоштина на триаголникот со темиња меѓу дадените точки.

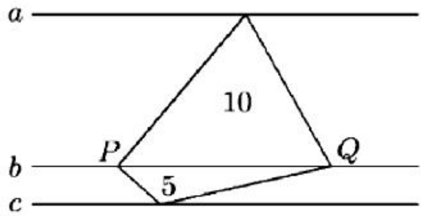


Решение. Кога ќе ги означиме дадените точки, заклучуваме дека триаголникот со најмалата можна плоштина чии темиња се меѓу дадените точки е ABC (цртеж десно). Имено, овој триаголник има најмали можни страна и висина



соодветна на неа кои се еднакви на $1\,cm$. Според тоа, неговата плоштина е $P=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}\,cm^2$.

60. Двата прикажани триаголника на цртежот десно се со плоштини еднакви на $10\,cm^2$ и $5\,cm^2$, а растојанието меѓу паралелните прави a и b е еднакво на $6\,cm$. Определи ја должината на отсечката PQ.



Решение. Нека h_1 и h_2 се висините на триаголниците повлечени кон заедничката страна PQ. Тогаш $h_1+h_2=6$, па затоа

$$10+5=\frac{\overline{PQ}\cdot h_1}{2}+\frac{\overline{PQ}\cdot h_2}{2}=\frac{\overline{PQ}\cdot(h_1+h_2)}{2}=\frac{6\overline{PQ}}{2}=3\overline{PQ}\text{, т.е. } \overline{PQ}=5\,cm.$$

61. Определи ја плоштината на триаголникот чии должини на страни се природни броеви и неговиот периметар е 8.

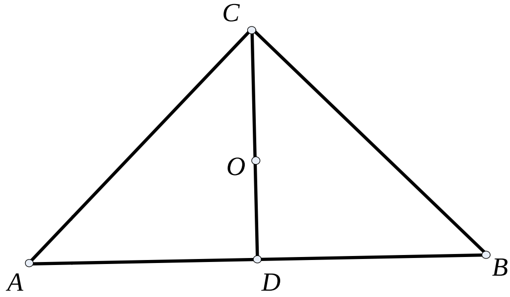
Решение. Најголемата страна на триаголникот не може да е поголема од 3, бидејќи тогаш таа ќе биде поголема или еднаква на збирот на другите две страни, т.е. нема да важи неравенството на триаголник. Исто така таа не може да е помала од 3, бидејќи збирот на три природни броја кои се помали од 3 не може да е 8. Значи, најголемата страна на триаголникот е 3. Слично за другите две страни единствена можност е 3 и 2. Бидејќи полупериметарот на триаголникот е 4, Хероновата формула следува дека неговата плоштина е

$$P=\sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)}=2\sqrt{2}\ .$$

62. Нека O е центар на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$. Правата CO ја сече страната AB во точката D. Ако важи $\overline{AB}\cdot\overline{OD}=\overline{AC}\cdot\overline{CO}$ тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Докажи.

Решение. Да означиме со $\overline{OD}=r$, $\overline{CD}=h$. Тогаш $\overline{CO}=h-r$. Од

$$\overline{AB}\cdot\overline{OD}=\overline{AC}\cdot\overline{CO}$$



имаме

$$\overline{AB}\cdot r=\overline{AC}\cdot(h-r)$$

од каде што

$$h=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}}r\ .$$

Од $\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}=\frac{(\overline{AB}+2\overline{AC})r}{2}$ имаме $h=\frac{\overline{AB}+2\overline{AC}}{\overline{AB}}r$. Значи,

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}}r=h=\frac{\overline{AB}+2\overline{AC}}{\overline{AB}}r$$

и оттука

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}\cdot\overline{AB}+2\overline{AC}^2\ .$$

Конечно,

$$\overline{AB}^2=2\overline{AC}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

односно триаголникот ABC е правоаголен.

63. Точките M и N се средини на страните AB и AC, соодветно, на триаголникот ABC. Точката P лежи на страната BC и важи $\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Правите CM и NP се сечат во точката O. Изрази ја плоштината на триаголникот OPC преку плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Нека

$P_{\triangle ABC}=P$,

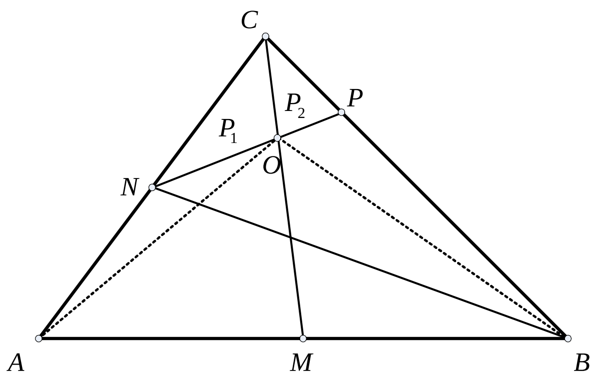
$P_{\triangle OPC}=P_1$ и

$P_{\triangle NOC}=P_2$.

Од $\overline{CP}=\frac{1}{3}\overline{CB}$ следува

$P_{\triangle CNP}=\frac{1}{3}P_{\triangle BNC}$.

Бидејќи BN е тежишна линија за $\triangle ABC$ следува дека $P_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}P$. Оттука добиваме



$$P_1+P_2=P_{\triangle CNP}=\frac{1}{6}P\ .$$

Натаму, M е средина на AB па важи

$$P_{\triangle AMO}=P_{\triangle MOB}\ \text{ и }\ P_{\triangle AMC}=P_{\triangle MBC}\ .$$

Од тоа што O лежи на тежишната линија CM следува

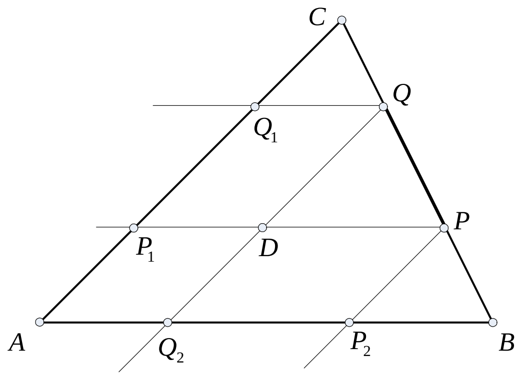
$$P_{\triangle AOC} = P_{\triangle AMC} - P_{\triangle AMO} = P_{\triangle MBC} - P_{\triangle MBO} = P_{\triangle OBC}.$$

Бидејќи N е средина на AC следува

$$P_{\triangle AOC} = 2P_{\triangle NOC} = 2P_2.$$

Слично, $P_{\triangle OBC} = 3P_1$. Значи, $3P_1 = 2P_2$. Оттука и од $P_1 + P_2 = \frac{1}{6}P$ добиваме $P_1 + \frac{3}{2}P_1 = \frac{1}{6}P$, т.е. $P_1 = \frac{1}{15}P$.

64. Даден е триаголникот ABC и отсечка PQ со должина t на отсечката BC, така што P е меѓу B и Q и Q е меѓу P и C. Од точката P се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во точките P_1 и P_2, соодветно. Од точката Q се повлечени паралелни прави со AB и AC кои ги сечат AC и AB во точките Q_1 и Q_2, соодветно. Докажи дека збирот од плоштините на четириаголниците PQQ_1P_1 и PQQ_2P_2 не зависи од положбата на PQ на BC.



Решение. Нека D е пресекот на PP_1 и QQ_2. Да забележеме дека

$$P_{PDQ_2P_2} = 2P_{\triangle ADP} \text{ и } P_{QDP_1Q_1} = 2P_{\triangle ADQ}.$$

Сега имаме:

$$\begin{aligned} P_{PQQ_2P_2} + P_{PP_1Q_1Q} &= P_{PDQ_2P_2} + P_{QDP_1Q_1} + 2P_{\triangle PQD} \\ &= 2P_{\triangle ADP} + 2P_{\triangle ADQ} + 2P_{\triangle PQD} \\ &= 2P_{\triangle APQ} = \overline{PQ} \cdot h_a. \end{aligned}$$

65. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB = 90^\circ$) со хипотенуза $\overline{AB} = 4$ и висина повлечена кон хипотенузата со должина 2. Определи ја разликата меѓу радиусите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. Нека a и b се должините на катетите, $c = 4$ е хипотенузата и $h_c = 2$ е висината повлечена кон неа. Имаме

$$\begin{cases} \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

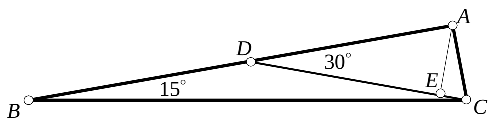
т.е.

$$\begin{cases} ab = 8 \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases}$$

од каде добиваме $a = b = 2\sqrt{2}$. За радиусите на опишаната и впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC добиваме $R = \frac{c}{2} = 2$ и $r = \frac{a+b-c}{2} = 2\sqrt{2} - 2$, па затоа $R - r = 4 - 2\sqrt{2}$.

66. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник ако должината на неговата хипотенуза е c, а еден негов остар агол има 15°.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{AB} = c$ и остар агол $\measuredangle ABC = 15^\circ$. Средината на



хипотенузата AB ќе ја означиме со D. Според тоа $\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{CD} = \frac{c}{2}$, и триаголниците CDB и ADC се рамнокраки со основи BC и AC. Аголот $\measuredangle ADC$ е надворешен агол за триагол-никот CDB, па според тоа $\measuredangle ADC = 2\measuredangle DBC = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. Отсечката AE е висина на триаголникот ADC (види цртеж). Според тоа, триаголникот DEA е правоаголен со остри агли $\measuredangle ADE = 30^\circ$ и $\measuredangle DAE = 60^\circ$, од каде добиваме дека $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\frac{c}{2} = \frac{c}{4}$. За триаголникот CAD имаме

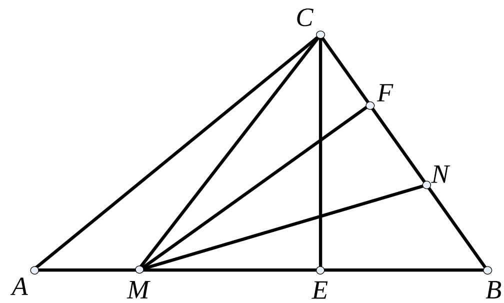
$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\frac{c}{2}\frac{c}{4} = \frac{c^2}{16}.$$

Триаголниците CAD и CDB имаат еднакви плоштини, па според тоа

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC} + P_{\triangle CDB} = 2P_{\triangle ADC} = 2\frac{c^2}{16} = \frac{c^2}{8}.$$

67. Даден е триаголникот ABC. На страната AB дадена е точка M така што $\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AB}$, а на страната BC точка N така што $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{BC}$. Ако плоштината на триаголникот MBN е $16\,cm^2$, најди ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Плоштината на триаголникот MBC е



$$P_{MBC}=\frac{1}{2}(\overline{MB}\cdot\overline{CE})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{4}{5}\overline{AB}\cdot\overline{CE})$$
$$=\frac{4}{5}(\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CE})\,.$$
$$=\frac{4}{5}P_{ABC}$$

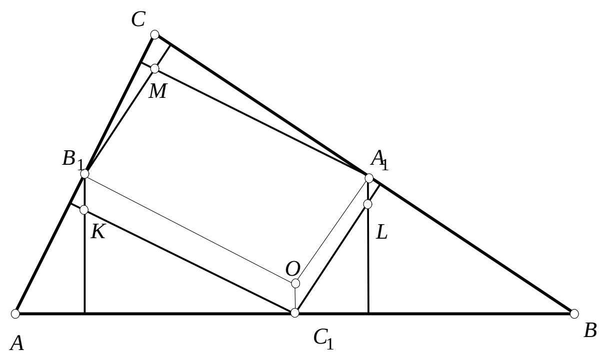
Од друга страна,

$$P_{MBC}=\frac{1}{2}(\overline{BC}\cdot\overline{MF})=\frac{1}{2}(3\overline{BN}\cdot\overline{MF})=3(\frac{1}{2}\overline{BN}\cdot\overline{MF})=3P_{MBN}\,.$$

Значи, $3P_{MBN}=\frac{4}{5}P_{ABC}$ и оттука $P_{ABC}=\frac{15}{4}\cdot 16=60\ cm^2$.

68. Од средините на страните на остроаголниот триаголник ABC се повлечени нормали кон соседните страни. Докажи дека шестаголникот што тие го формираат има два пати помала плоштина од плоштината на $\triangle ABC$.

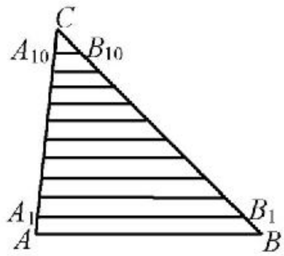
Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $\triangle ABC$. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB соодветно. Точката O ја поврзуваме со A_1, B_1, C_1 и добиваме три паралелограми C_1OB_1K, A_1OC_1L и B_1OA_1M, чија вкупна плоштина е еднаква на плоштината на шестаголникот.



Од друга страна јасно дека нивната вкупна плоштина е двојно поголема од плоштината на триаголникот $\triangle A_1B_1C_1$. Сега бидејќи важи $P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}P_{\triangle ABC}$ следува бараниот резултат.

69. Со помош на десет прави, паралелни на основата AB на $\triangle ABC$, секоја од страните AC и BC е поделена на единаесет еднакви делови, со што триаголникот е поделен на единаесет делови. Определи го односот на плоштините на најголемиот и најмалиот од тие делови.

Решение. Од условот на задачата следува дека триаголникот е разделен на десет трапези и еден триаголник (цртеж десно). Сите единаесет фигури имаат еднаква висина h. Фигурата со најголема плоштина е трапезот ABB_1A_1 и неговата плоштина е $P_1=\frac{\overline{AB}+\overline{A_1B_1}}{2}h$. Понатаму, од $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{10}{11}$, добиваме $\overline{A_1B_1}=\frac{10}{11}\overline{AB}$, па затоа $P_1=\frac{\overline{AB}+\frac{10}{11}\overline{AB}}{2}h=\frac{21}{22}\overline{AB}\cdot h$. Фигурата со најмала плоштина е триаголникот $A_{10}B_{10}C$ и неговата плоштина е $P_2=\frac{\overline{A_{10}B_{10}}}{2}h$. Понатаму, од $\frac{\overline{A_{10}B_{10}}}{\overline{AB}}=\frac{1}{11}$, добиваме $\overline{A_{10}B_{10}}=\frac{1}{11}\overline{AB}$, па затоа $P_2=\frac{\frac{1}{11}\overline{AB}}{2}h=\frac{1}{22}\overline{AB}\cdot h$.



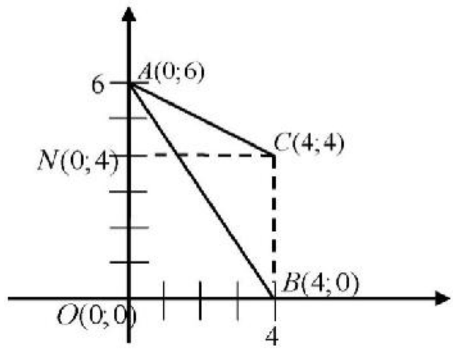
Конечно,

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac{21}{22}\overline{AB}\cdot h}{\frac{1}{22}\overline{AB}\cdot h}=21.$$

70. Определи ја плоштината на триаголникот ABC чии темиња во правоаголен координатен системн се точките $A(0,6), B(4,0), C(4,4)$.

Решение. Имаме $\overline{OB}=\overline{NC}=4$ и $\overline{BC}=4$. Според тоа, триаголникот ABC има основа со должина $\overline{BC}=4$ и висина $\overline{OB}=\overline{NC}=4$, па затоа неговата плоштина е

$$P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{NC}}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8.$$

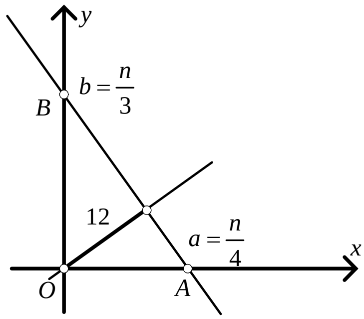


71. Во координатната рамнина xOy е дадена права $4x+3y=n$, $n>0$ која од координатниот почеток е на растојание 12. Определи ја плоштината на триаголникот што го формира правата со координатните оски.

Решение. Правата со координатните оски формира правоаголен триаголник со катети

$$\overline{OA}=a=\frac{n}{4} \text{ и } \overline{OB}=b=\frac{n}{3}$$

(види цртеж) . Според тоа должината на хипотенузата на овој триаголник е

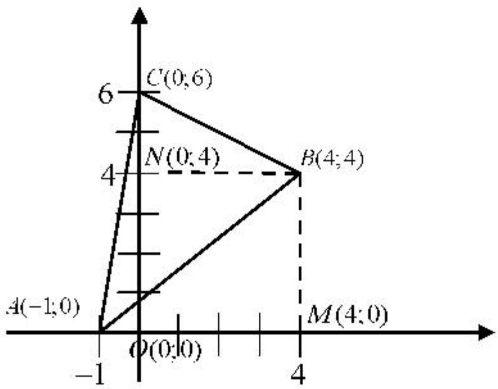


$$\overline{AB} = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{n^2}{16} + \frac{n^2}{9}} = \frac{5n}{12}.$$

Висината повлечена кон хипотенузата е долга $h_c = 12$, од каде добиваме $P = \frac{\frac{5n}{12} \cdot 12}{2} = \frac{5n}{2}$. Од друга страна $P = \frac{ab}{2} = \frac{n^2}{24}$. Според тоа $\frac{n^2}{24} = \frac{5n}{2}$, т.е. $n = 60$. Конечно, $P = 150$.

72. Определи ја плоштината на триаголникот ABC чии темиња во правоаголен координатен систем се $A(-1,0)$, $B(4,4)$ и $C(0,6)$.

Решение. Дадениот триаголник е прикажан на долниот цртеж.



Имаме

$$P_{ABC} = (P_{OMBN} + P_{NBC} + P_{AOC}) - P_{AMB}$$
$$= (4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 6}{2}) - \frac{5 \cdot 4}{2} = 16 + 4 + 3 - 10 = 13.$$

73. Одреди ја вредноста на параметарот n, така што за секоја точка (x, y) од графикот на функцијата $y = -x + n$ важат следните равенства $y = \frac{5}{x}$ и $x^2 + y^2 = 6$. Потоа, пресметај ја плоштината на делот од рамнината што го образуваат координатните оски и графикот на функцијата.

Решение. Имаме $x^2 + y^2 = 6$, а од $y = \frac{5}{x}$ се добива $xy = 5$, $x \neq 0$. Со квадрирање на $y = -x + n$ добиваме $x^2 + y^2 + 2xy = n^2$. Според тоа

$n^2 = 6+10$, а оттука $n = \pm 4$. Значи, се добиваат две функции $y = -x+4$ и $y = -x-4$. За секоја од овие функции важи дека делот од рамнината што го образуваат со координатните оски е правоаголен триаголник со должина на катетите еднаква на 4, па бараната плоштина е $P = \frac{4\cdot 4}{2} = 8$.

74. Дадени се линеарните функции $y = kx+n$, каде што $k,n \in \{-1,1\}$. Претстави ги графички сите линеарни функции $y = kx+n$ на ист координатен систем, а потоа пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со нив.

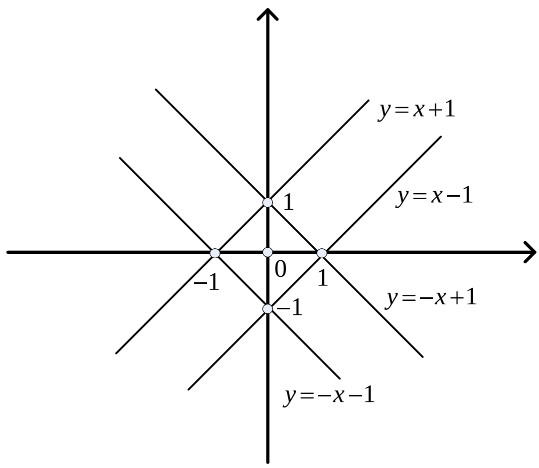
Решение. Функциите кои треба да се претставаат се:

$y = -x-1$, $y = -x+1$,

$y = x-1$, $y = x+1$

(цртеж десно). Ограничениот дел е квадрат со дијагонала $d = 2$, па затоа бараната плоштина е

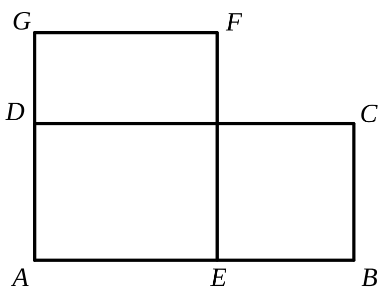
$$P = \frac{d^2}{2} = 2.$$



75. Една кутија боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати поголема од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за $18\ cm$ и продолжувајќи ја другата за $8\ cm$ за боење ќе потрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.

Решение. Да го означиме почетниот правоаголник со $ABCD$, каде $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$. Од условот на задачата имаме $a = 3b$. Ако пак со $AEFG$ го означиме новиот правоаголник, тогаш

$$\overline{AE} = \overline{AB} = 3b-18 \text{ и}$$



$$\overline{EF} = \overline{BC} + 8 = b + 8.$$

Бидејќи за боењето ќе искористиме исто количество боја, имаме

$$P_{ABCD} = P_{AEFG},$$

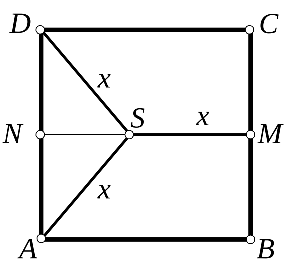
$$3b^2 = (3b-18)(b+8),$$

$$3b^2 = 3b^2 + 24b - 18b - 144.$$

Од последната равенка имаме $b = 24\ cm$. Според тоа,

$$L_{AEFG} = 2(3\cdot 24 - 18 + 24 + 8) = 172\ cm.$$

76. Точката M е средина на страната BC на квадратот $ABCD$. Точката S е во внатрешноста на квадратот и е еднаков оддалечена од точките A, D и M. Должината на страната на квадратот е $a = 40$ cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на четириаголникот $ABMS$.



Решение. Точката S е еднакво оддалечена од точките A и D, па според тоа припаѓа на симетралата на страната DA. Ако N е средина на страната на AD, тогаш точките N, S и M се колинеарни и лежат на симетралата на DA. Отсечката SN е висина во триаголникот ASD. Бидејќи $\overline{MN} = 40\ cm$ и $\overline{SM} = x$, добиваме дека $\overline{NS} = \overline{MN} - \overline{SM} = (40 - x)cm$. Од правоаголниот триаголник DNS, со страни $x, 20, 40 - x$, според Питагоровата теорема, добиваме

$$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2, \text{ т.е. } x = 25\ cm.$$

Според тоа, плоштината на трапезот $ABMS$ е еднаква на

$$P = \frac{40+25}{2}\cdot 20\ cm^2 = 650\ cm^2,$$

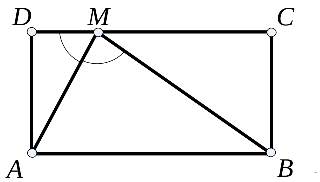
а периметарот е еднаков на

$$L = (40 + 20 + 25 + 25)\ cm = 110\ cm.$$

77. Даден е правоаголникот $ABCD$ кај кој должината на страната AB е два пати поголема од должината на страната BC. На страната CD е избрана точка M така што $\measuredangle AMD = \measuredangle AMB$.

а) Определи го $\measuredangle AMD$.

б) Ако $\overline{DM} = 1$, колкава е плоштината на правоаголникот $ABCD$?



Решение. а) Бидејќи AB и CD се паралелни, $\measuredangle BAM = \measuredangle AMD$ (наизменични агли). Од условот $\measuredangle AMD = \measuredangle AMB$, па заклучуваме дека $\measuredangle BAM = \measuredangle AMB$. Значи, триаголникот AMB е рамнокрак и $\overline{AB} = \overline{MB}$.
Во триаголникот BCM хипотенузата BM е два пати поголема од катетата BC ($\overline{AB} = 2\overline{BC}$, а $\overline{AB} = \overline{MB}$). Тогаш $\measuredangle BMC = 30^\circ$, па $\measuredangle AMB + \measuredangle AMD = 150^\circ$. Од овде добиваме $\measuredangle AMB = \measuredangle AMD = 75^\circ$.
б) Нека $\overline{BC} = b,\ \overline{CD} = 2b$. Од условот $\overline{DM} = 1$ имаме

$$\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD} = \overline{CM} + 1, \text{ т.е. } 2b = \overline{CM} + 1.$$

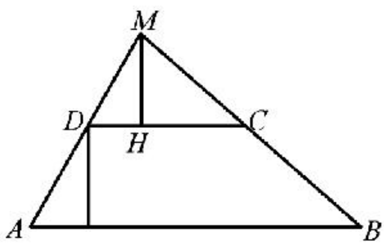
Од Питагоровата теорема следува дека

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{BM}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = b\sqrt{3}.$$

Според тоа, $2b = b\sqrt{3} + 1$, односно $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. Плоштината на правоаголникот е

$$P = ab = 2b^2 = 2(2+\sqrt{3})^2 = 2(7+4\sqrt{3}).$$

78. Даден е трапез $ABCD$ со помала основа $\overline{CD} = 3\,cm$ и висина $8\,cm$. Краците на трапезот се сечат во точка M. Определи ја поголемата основа на трапезот ако плоштината на триаголникот CDM е $6\,cm^2$.

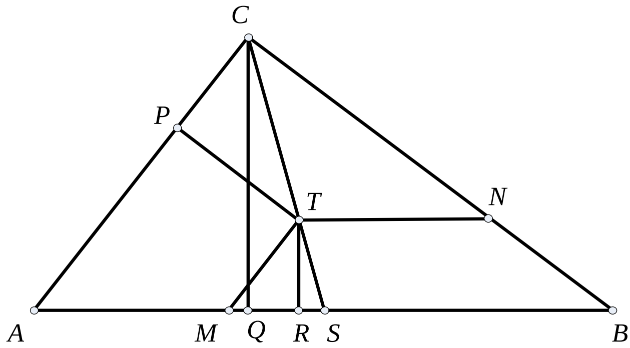


Решение. Од условот на задачата следува дека $6 = P_{CDM} = \frac{3\overline{MH}}{2}$ од каде наоѓаме $\overline{MH} = 4\,cm$. Според тоа висината на триаголникот ABM повлечена кон основата AB е еднаква на $8 + 4 = 12\,cm$. Понатаму, триаголниците ABM и DCM се слични, па затоа $\overline{AB} : \overline{CD} = 12 : 4$, односно $\overline{AB} = 3\overline{CD} = 9\,cm$.

79. Нека T е тежиште на триаголникот ABC. Правата p која минува низ T и е паралелна со AC ја сече страната AB во точка M, правата q која минува низ T и е паралелна со AB ја сече страната BC во точка N и правата r која минува низ T и е паралелна со BC ја сече страната

AC во точка P. Докажи дека трапезите $MBNT$, $NCPT$ и $PAMT$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека CS е тежишна линија во триаголникот ABC. Тогаш триаголниците CSB и CTN се слични и важи $\frac{\overline{TN}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{CS}} = \frac{2}{3}$.



Оттука $\overline{TN} = \frac{2}{3}\overline{SB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Исто така, триаголниците ASC и MST се слични и важи $\frac{\overline{MS}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CS}} = \frac{1}{3}$, па $\overline{MS} = \frac{1}{3}\overline{AS} = \frac{1}{6}\overline{AB}$. Тогаш

$$\overline{MB} = \overline{MS} + \overline{SB} = \frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AB}.$$

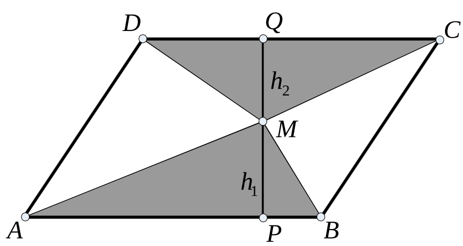
Ако CQ е висина во триаголникот ABC, а TR е висина во трапезот $MBNT$ тогаш триаголниците QSC и RST се слични и имаме $\frac{\overline{TR}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CS}} = \frac{1}{3}$. Значи, $\overline{TR} = \frac{1}{3}\overline{CQ}$ и за плоштината на трапезот $MBNT$ добиваме

$$P_{MBNT} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB}}{2} \cdot \frac{1}{3}\overline{CQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CQ}}{2} = \frac{1}{3} P_{ABC}.$$

Слично, се добива дека $P_{NCPT} = \frac{1}{3} P_{ABC}$ и $P_{PAMT} = \frac{1}{3} P_{ABC}$.

80. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана произволна точка M. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ е еднаков на збирот на плоштините на траиголниците $\triangle BCM$ и $\triangle DAM$.

Решение. Нека $h_1 = \overline{MP}$ е висината на $\triangle ABM$ и $P_1 = P_{\triangle ABM}$. Нека $h_2 = \overline{MQ}$ е висината на $\triangle CDM$ и $P_2 = P_{\triangle CDM}$. Доволно е да се докаже дека



$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}P,$$

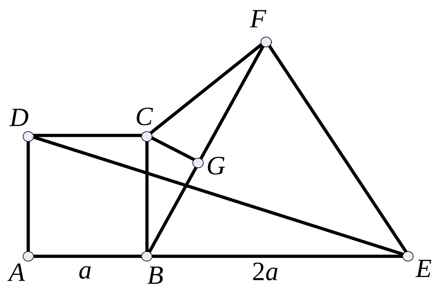
каде P е плоштината на дадениот паралелограм. Точките P, M и Q се колинеарни. Ако h е висина на паралелограмот тогаш јасно е дека $h = \overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{MQ} = h_1 + h_2$, па според тоа

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}P.$$

81. Точките A, B, E лежат на иста права, така што точката B е меѓу точките A и E. Од иста страна на правата се конструирани квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник BEF. Ако должината на BE е два пати поголема од должината на AB, докажи дека плоштината на четириаголникот $CDEF$ е еднаква на плоштината на триаголникот BEF.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$, тогаш од условот на задачата $\overline{BE} = 2a$. Нека CG е висина во триаголникот BFC. Бидејќи $\measuredangle ABC = 90^\circ$ и $\measuredangle FBE = 60^\circ$, а

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBG + \measuredangle FBE = 180^\circ,$$

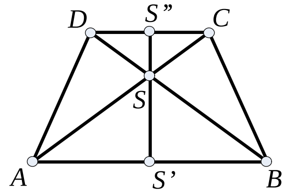


наоѓаме дека $\measuredangle CBG = 30^\circ$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BGC катетата CG е еднаква на половина од хипотенузата BC, т.е. $\overline{CG} = \frac{a}{2}$. Конечно, плоштината P на четириаголникот $CDEF$ е

$$P = P_{ABCD} + P_{BEF} + P_{BCF} - P_{ADE}$$
$$= a^2 + P_{BEF} + \frac{1}{2} \cdot 2a\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a = P_{BEF}.$$

82. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h, а неговата плоштина е h^2. Под кој агол се сечат дијагоналите на трапезот?

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD и висина h чија плоштина е $P = h^2$. Точката S е пресек на дијагоналите, а S' и S'' се подножјата на нормалите спуштени врз основите AB и CD

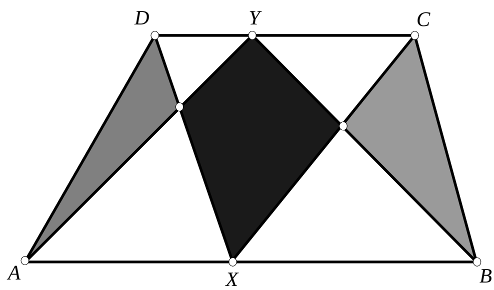


соодветно. Триаголниците $SS"D$ и $SS'B$ се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Според тоа $\overline{SS"}:\overline{DS"}=\overline{SS'}:\overline{BS'}$. Ако a и b се должините на основите, а $\overline{SS'}=h_1$ и $\overline{SS"}=h_2$, тогаш $h_1+h_2=h$ и $h_2:\frac{b}{2}=h_1:\frac{a}{2}$. Значи,

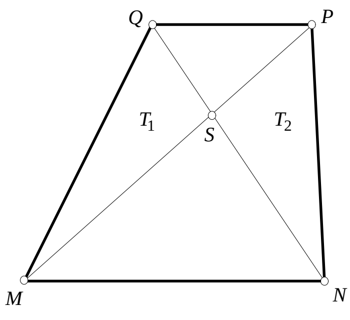
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{2}\frac{h_1}{h_2}. \qquad (1)$$

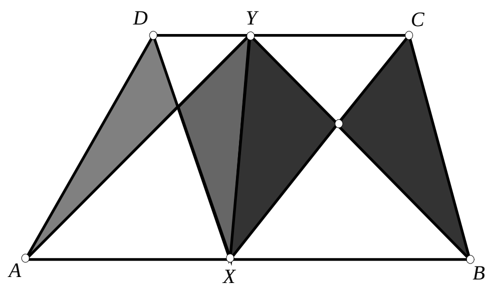
Од условот на задачата имаме $\frac{a+b}{2}h=h^2$, односно $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=h$. Од равенството (1) и претходната формула добиваме $\frac{b}{2}\frac{h_1}{h_2}+\frac{b}{2}=h$, односно $\frac{b}{2}=h_2$. Слично се добива дека $\frac{a}{2}=h_1$. Според тоа $SS"D$ и $SS'B$ се рамнокраки правоаголни триаголници. Аголот под кој се сечат дијагоналите на трапезот е еднаков на 90°.

83. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD. На отсечката AB е избрана произволна точка X, а на отсечката CD произволна точка Y. Повлечени се отсечките CX и DX и отсечките AY и BY. Со овие повлечни отсечки на цртежот се добиваат два триаголници и еден четириаголник (види цртеж; исенчените делови од трапезот). Докажи дека, плоштината на исенчениот четириаголник е еднаква на збирот на плоштините на исенчените триаголници.



Решение. На почеток ќе разгледаме произволен трапез $MNPQ$ на кој дијагоналите му се сечат во точката S. Нека T_1 е триаголникот MSQ



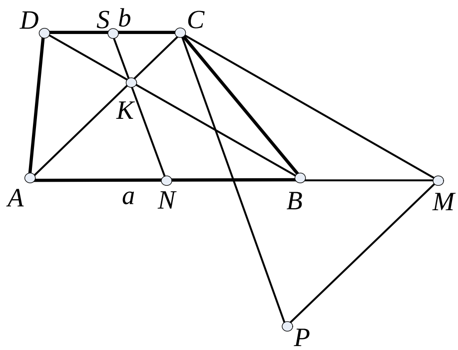


а T_2 триаголникот MPS. Ќе покажеме дека $P_{T_1}=P_{T_2}$. Јасно е дека $P_{MNQ}=P_{MNP}$, од каде имаме

$$P_{T_1}=P_{MNQ}-P_{MNS}=P_{MNP}-P_{MNS}=P_{T_2}.$$

Ќе ја повлечеме отсечката XY. Сега ќе ги разгледаме трапезите $AXYD$ и $XBCY$ одвоено, од каде следува тврдењето на од задачата.

84. Должините на дијагоналите на еден трапез се 3 и 5, а отсечката која ги сврзува средините на основите е со должина 2. Пресметај ја плоштината на трапезот.



Решение. Низ точката C повлекуваме права паралелна со дијагоналата BD. Пресекот на оваа права со правата на која лежи основата AB го означуваме со M. Триаголниците ACD и BMC имаат еднакви основи, $\overline{BM}=\overline{CD}=b$ и висини, па $P_{\triangle ACD}=P_{\triangle BMC}$. Тогаш, $P_{ABCD}=P_{\triangle AMC}$.

Низ точката C повлекуваме права паралелна со отсечката која ги сврзува средините на основите на трапезот. Нека пресекот на оваа права со основата AB е точката H. На истата права избираме точка P така што $\overline{CN}=\overline{NP}$. Тогаш, триаголниците ANC и PMN се складни $\overline{CN}=\overline{NP}$, $\measuredangle PNM=\measuredangle ANC$, $\overline{AN}=\overline{NM}=\frac{a+b}{2}$, па нивните плоштини се еднакви. За триаголниците AMC и PMC важи $P_{\triangle AMC}=P_{\triangle PMC}$, бидејќи

$$P_{\triangle AMC}=P_{\triangle ANC}+P_{\triangle NMC},$$

а

$$P_{\triangle PMC}=P_{\triangle PMN}+P_{\triangle NMC}.$$

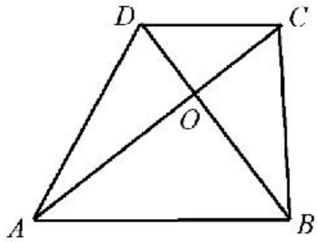
Страните на триаголникот PMC се:

$$\overline{PM}=\overline{AC}=5,\ \overline{MC}=\overline{BD}=3 \text{ и } \overline{PC}=2\overline{CN}=4$$

и формираат Питагорова тројка. Значи, триаголникот PMC е правоаголен, па $P_{\triangle PMC}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$. Според тоа, $P_{ABCD}=6$.

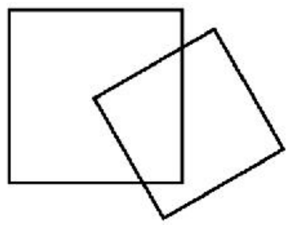
85. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се заемно нормални и имаат должини $18\,cm$ и $9\,cm$. Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Нека должините на дијагоналите се $\overline{AC}=18\,cm$ $\overline{BD}=9\,cm$ и нека тие се сечат во точката O. Имаме:

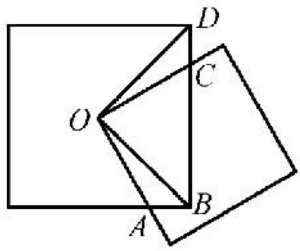


$$P_{ABCD}=P_{ABC}+P_{ACD}$$
$$=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{OB}}{2}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{OD}}{2}$$
$$=\frac{\overline{AC}\cdot(\overline{OB}+\overline{OD})}{2}$$
$$=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{18\cdot 9}{2}=81\,cm^2.$$

86. Двата квадрати на цртежот десно се со должини на страни $10\,cm$ и $9\,cm$. Тие се поставени како што е прикажано на цртежот десно така што едно теме на помалиот квадрат се наоѓа во центарот на поголемиот квадрат. Определи ја плоштината ма заедничкиот дел на двата квадрати.

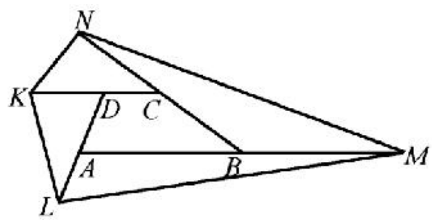


Решение. За триаголниците OAB и OCD, цртеж десно, важи $\measuredangle ABO=\measuredangle ODC=45^\circ$. $\overline{OB}=\overline{OD}$ и $\measuredangle OAB=\measuredangle OCD$, како агли со нормални краци. Според тоа, овие триаголници се складни, па затоа

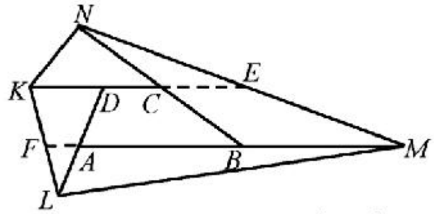


$$P_{ABCO}=P_{OAB}+P_{OBC}=P_{DOC}+P_{OBC}$$
$$=P_{BOD}=\frac{1}{4}\cdot 10^2=25\,cm^2.$$

87. Даден е трапез $ABCD$ со основи $\overline{AB}=6\,cm$ и $\overline{CD}=3\,cm$. Страните на трапезот се продолжени како што е прикажано на цртежот десно така што точката B е средина на отсечката AM, C е средина на BN, D е средина на CK и A е средина на DL. Плоштината на четириаголникот $KLMN$ е $9\,dm^2$. Определи ја висината на трапезот $ABCD$.



Решение. Нека E е пресекот на правите CD и MN, а F е пресекот на правите AB и KL. Бидејќи CE е средна линија за триаголникот BMN, добиваме



$$\overline{CE} = \tfrac{1}{2}\overline{BM} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} = 3 = \overline{CD}.$$

Тоа значи дека $P_{ABCD} = P_{BMEC} = x$. Трапезите $FADK$ и $ABCD$ имаат еднакви висини и $\overline{KD} = \overline{CD}$, $\overline{FA} = \tfrac{1}{2}\overline{KD} = \tfrac{1}{4}\overline{AB}$. Според тоа, $P_{FADK} = \tfrac{1}{2}x$. Понатаму, ќе искористиме дека средната линија во еден триаголник отсекува од него триаголник кој има четири пати помала плоштина од почетниот триаголник. Оттука лесно добиваме дека $P_{LAF} = \tfrac{1}{3}P_{FADK} = \tfrac{1}{6}x$. Страната FM на триаголникот LMF е девет пати поголема од страната FA на триаголникот FAL. Бидејќи двата триаголника имаат еднакви висини повлечени од темето L, заклучуваме дека $P_{LMF} = \tfrac{9}{6}x = \tfrac{3}{2}x$. На крај да забележиме дека

$$P_{CEN} = \tfrac{1}{4}P_{BMN} = \tfrac{1}{3}P_{BMEC} = \tfrac{1}{3}x.$$

Но, страната KE на триаголникот KEN е три пати поголема од страната CE на триаголникот CEN и како двата триаголника имаат еднакви висини повлечени од темето N заклучуваме дека $P_{KEN} = x$. Сега,

$$\begin{aligned} P_{LMNK} &= P_{LMF} + P_{FADK} + P_{ABCD} + P_{BNEC} + P_{KEN} \\ &= \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}x + x + x + x = 5x. \end{aligned}$$

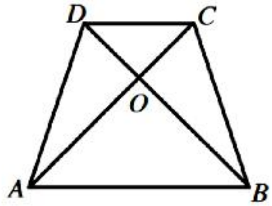
Од друга страна $P_{LMNK} = 9\,dm^2 = 900\,cm^2$. Според тоа, $5x = 900$, т.е. $x = 180\,cm^2$. Конечно, ако h е висината на трапезот $ABCD$ добиваме $180 = \frac{(\overline{AB}+\overline{CD})h}{2} = \frac{9h}{2}$, односно $h = 40\,cm$.

88. Даден е трапез $ABCD\,(AB \| CD)$. Нека O е пресечната точка на дојагоналите на трапезот и нека $P_{ABO} = 3$ и $P_{ADO} = 2$. Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Ќе искористиме дека $P_{ADO} = P_{BCO}$, што значи дека задачата се сведува на наоѓање на P_{CDO}. Бидејќи тиаголниците ABO и

ADO имаат заедничка висина повлечена од темето A добиваме дека $\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}=\frac{P_{ABO}}{P_{ADO}}=\frac{3}{2}$. Од друга страна $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, па затоа

$$\frac{P_{ABO}}{P_{CDO}}=\frac{\overline{BO}^2}{\overline{OD}^2}=\frac{9}{4}.$$



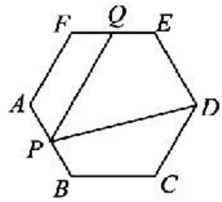
Според тоа,

$$P_{CDO}=\frac{4P_{ABO}}{9}=\frac{4\cdot 3}{9}=\frac{4}{3}.$$

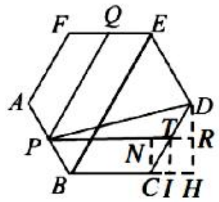
Конечно,

$$P_{ABCD}=P_{abo}+P_{CDO}+2P_{ADO}=3+\frac{4}{3}+4=8\frac{1}{3}.$$

89. Даден е правилен шестаголник $ABCD$. Ако P и Q се средините на страните AB и EF, определи го односот $\frac{P_{APQF}}{P_{PBCD}}$.



Решение. Нека a е должината на страната на шестаголникот и нека $P_{APQF}=S$. Ако T е средина на страната CD, тогаш $P_{BCTP}=S$. Да означиме $P_{PTD}=x$. Ќе го изразиме x преку S. Нека I и H се соодветно проекциите на точките T и D врз првата BC (цртеж десно), R е пресечната точка на правите PT и DH, а N е подножјето на нормалата повлечена од C на правата PT. За правоаголниот триаголник CTN едниот агол е 30°, па затоа $\overline{NT}=\frac{1}{2}\overline{CT}=\frac{1}{4}a$.



Оттука лесно следува дека $\overline{PT}=\frac{1}{4}a+a+\frac{1}{4}a=\frac{3}{2}a$. Според тоа,

$$S=\frac{a+\frac{3}{2}a}{2}\cdot\overline{CN}=\frac{5a}{4}\cdot\overline{CN}.$$

Ако искористиме дека R е средина на отсечката DH, добиваме дека

$$x=\frac{\overline{PT}\cdot\overline{DR}}{2}=\frac{\frac{3a}{2}\cdot\overline{DR}}{2}=\frac{3a}{4}\cdot\overline{CN}.$$

Според тоа,

$$\frac{x}{S}=\frac{\frac{3a}{4}\cdot\overline{CN}}{\frac{5a}{4}\cdot\overline{CN}}=\frac{3}{5}, \text{ т.е. } x=\frac{3}{5}S.$$

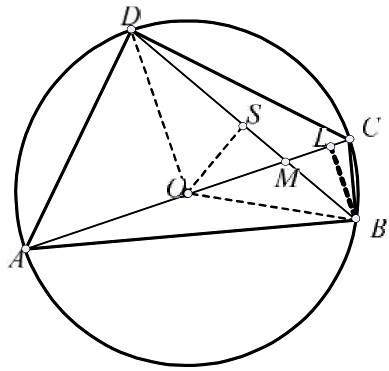
Сега

$$P_{PBCD}=P_{BCTP}+P_{PDT}=S+x=S+\frac{3}{5}S=\frac{8}{5}S,$$

па бараниот однос е $\frac{P_{APQF}}{P_{PBCD}} = \frac{S}{\frac{8}{5}S} = \frac{5}{8}$.

90. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник за кој: $\measuredangle ABC = 90^\circ$, $\measuredangle DAB = 60^\circ$ и $\measuredangle BCD = 120^\circ$. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точка M, таква што $\overline{BM} = 1$ и $\overline{MD} = 2$. Пресметај ја плоштната на $ABCD$.

Решение. Дадени се трите агли во четириаголникот $ABCD$, па може да се пресмета $\measuredangle ADC = 90^\circ$. Нека k е кружница со дијаметар AC. Бидејќи $\measuredangle ABC = 90^\circ$ и $\measuredangle ADC = 90^\circ$ следува дека $B, D \in k$, што значи дека $ABCD$ е тетивен четириаголник.



Триаголникот BOD е рамнокрак со агол $\measuredangle DOB = 120^\circ$, како централен агол двојно поголем од соодветниот периферен агол $\measuredangle DAB = 60^\circ$. Следува дека $\measuredangle OBD = 60^\circ$, па од правоаголниот триаголник BOS, каде S е средина на BD, се добива дека $\overline{OS} = \frac{\overline{OB}}{2}$. Но,

$$\overline{BS} = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{BM} + \overline{MD}}{2} = \frac{3}{2},$$

па од Питагоровата теорема следува:

$$\frac{\overline{OB}^2}{4} + \frac{9}{4} = \overline{OB}^2, \text{ т.е. } \overline{OB} = \sqrt{3} \text{ и } \overline{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Бидејќи $\overline{MS} = \overline{BS} - \overline{BM} = \frac{1}{2}$, од правоаголниот триаголник MOS, се добива: $\overline{OM} = \sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{MS}^2} = 1$. Следува дека OBM е рамнокрак триаголник, па затоа $\measuredangle BOM = \measuredangle OBM = 30^\circ$ и $\measuredangle OMB = 120^\circ$. Триаголникот ABO е рамнокрак, па

$$2\measuredangle BAM = 180^\circ - \measuredangle AOB = 180^\circ - (\measuredangle OBM + \measuredangle OMB) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Следува $\measuredangle BAM = 15^\circ$ и $\measuredangle CAD = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Сега, $\measuredangle ACD = 45^\circ$ па затоа ACD е рамнокрак правоаголен триаголник. Неговата плоштина изнесува

$$P_{ACD}=\frac{\overline{AD}^2}{2}=\frac{\overline{AC}^2}{4}=\frac{(2\cdot\overline{AO})^2}{4}=\frac{(2\overline{BO})^2}{4}=3.$$

Ако BL е висина на триаголникот ABC спуштена врз страната AC, за триаголникот BLM се добива дека е правоаголен со остри агли 30° и 60°, по што се добива дека $\overline{ML}=\frac{1}{2}$ и $\overline{BL}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. За плоштината на триаголникот ABC се добива

$$P_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BL}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\overline{BL}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Конечно, плоштината P на четириаголникот $ABCD$ изнесува:

$$P=P_{ABC}+P_{ACD}=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}.$$

91. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD соодветно, така што

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CD}:\overline{DF}=n.$$

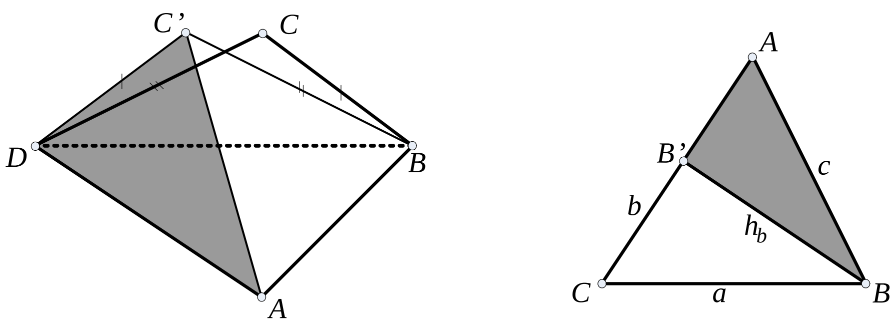
Ако S е плоштина на четириаголникот $AEFD$, докажи дека

$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

Решение. На почеток ќе докажеме една лема.

Лема. Нека $ABCD$ е четириаголник и S е неговата површина. Тогаш

$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.$$



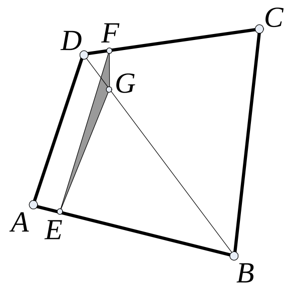
Доказ. Ќе конструираме точка C' така што $\overline{BC'}=\overline{CD}$ и $\overline{DC'}=\overline{BC}$. Јасно, триаголниците BCD и $BC'D$ се складни, и плоштините на четираголниците $ABCD$ и $ABC'D$ се еднакви. Плоштината на даден триаголник е помала или еднаква од половината од производот на негови две страни. Според тоа

$$S=S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle ABC'}\le\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DC'}}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC'}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.\ \blacksquare$$

Применувајќи ја лемата на четириаголникот $AEFD$ имаме:

$$S \le \frac{\overline{AE}\cdot\overline{DF}+\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2} = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}.$$

Нека G е точка од дијагоналата BD така што $\overline{DB}:\overline{DG}=n$. Од Талесовата теорема имаме $\overline{GE}=\frac{n-1}{n}\overline{AD}$ и $\overline{GF}=\frac{1}{n}\overline{BC}$. Применувајќи го неравенството за триаголникот EGF добиваме



$$\overline{EF} \le \overline{EG}+\overline{GF} = \frac{(n-1)\overline{AD}+\overline{BC}}{n}.$$

Конечно, имаме

$$S \le \frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2} \le \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

V.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

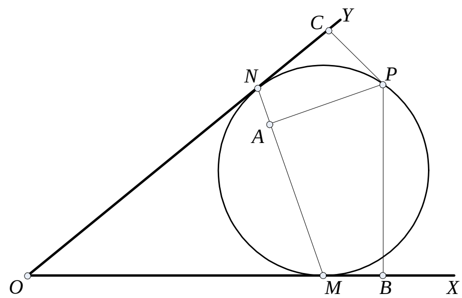
92. Кружница k е впишана во остар агол $\measuredangle XOY$, при што k ги допира краците OX и OY во точките M и N соодветно. На поголемиот лак на кружницата k е избрана произволна точка P и од неа се спуштени нормалите кон краците на аголот и отсечката MN, $PB \perp OX$, $PC \perp OY$, $PA \perp MN$, при што $A \in MN$, $B \in OX$, $C \in OY$. Докажи дека е исполнето $\overline{PA}^2 = \overline{PB}\cdot\overline{PC}$.

Решение. Аглите $\measuredangle MBP = \measuredangle MAP = 90^\circ$, па четириаголникот $AMBP$ е тетивен (точките A, M, B, P лежат на кружницата со дијаметар MP). Затоа $\measuredangle ABP = \measuredangle AMP$ како периферни над тетивата AP. Слично, $\measuredangle NAP = \measuredangle NCP = 90^\circ$, па четириаголникот $ANCP$ е тетивен (точките A, N, C, P лежат на кружницата со дијаметар NP). Затоа $\measuredangle PAC = \measuredangle PNC$ како периферни над CP. Но, точно е равенството

$$\measuredangle PMC = \measuredangle PNC,$$

како агол кој го зафаќа тетивата PN со тангентата CN и периферниот агол над тетивата. Затоа е исполнето

$$\measuredangle ABP = \measuredangle AMP = \measuredangle NMP = \measuredangle PNC = \measuredangle PAC, \text{ т.е. } \measuredangle ABP = \measuredangle CAP.$$

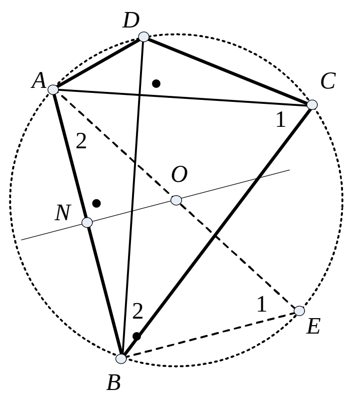


Слично се покажува дека $\measuredangle BAP = \measuredangle ACP$. Од последните две равенства, $\triangle BPA \sim \triangle APC$. Конечно, од докажаната сличност следува

$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PB} : \overline{PA}, \text{ т.е. } \overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}.$$

93. Во кружница со центар во точката O, впишан е четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Докажи дека точката O е оддалечена од страната AB колку половина од должината на страната CD.

Решение. Нека $\{M\} = AC \cap BD$ и од услов $AC \perp BD$. Нека $\{E\} = AO \cap k$. Тогаш од Талесова теорема $\measuredangle ABE = 90^\circ$. Имаме и дека $\measuredangle AEB = \measuredangle ACB$ како два периферни агли над тетивата AB во кружницата k. Значи триаголниците $\triangle ABE$ и $\triangle BMC$ имаат два пара еднакви агли, т.е.

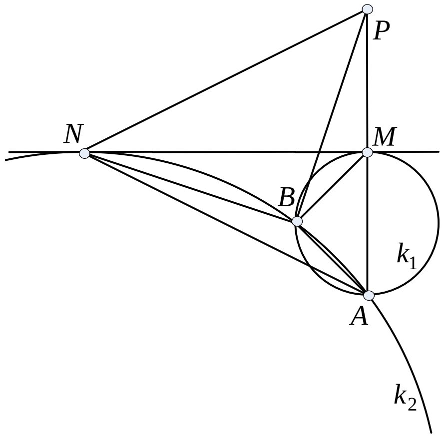


$$\measuredangle ABE = \measuredangle BMC = 90^\circ$$
$$\measuredangle EAB = \measuredangle ACB = \measuredangle MCB$$
$$\measuredangle EAB = \measuredangle CBM = \measuredangle CBD$$

Ова се агли над тетивите BE и CD, па следува дека $\overline{BE} = \overline{CD}$.

Нека $\overline{ON}$ е растојанието од точката O до страната AB. При тоа, $ON \parallel BE$ и $\overline{OA} = \overline{OE} = r$ па ON е средна линија во триаголникот $\triangle ABE$. Тоа значи дека $\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ што и требаше да се докаже.

94. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во две различни точки A и B и нека t е заедничка тангента за k_1 и k_2 која ги допира во M и N. Ако се знае дека $t \perp AM$ и $\overline{MN} = 2\overline{AM}$, определи го $\measuredangle NMB$.



Решение. Нека P е точка осно симетрична на A во однос на t. Тогаш од $\overline{AM}=\overline{MP}$ и $t\perp AP$, следува дека триаголникот APN е рамнокрак со основа AP, па според тоа $\measuredangle NAP=\measuredangle NPA$. Од друга страна

$$\measuredangle BAP=\measuredangle BAM=\measuredangle BMN \text{ и}$$
$$\measuredangle BAN=\measuredangle BNM\,,$$

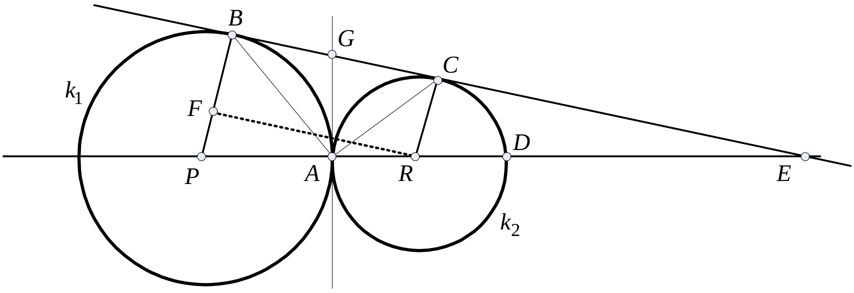
како периферен агол и агол меѓу тангента и тетива. Според тоа,

$$\begin{aligned}180^\circ-\measuredangle NBM&=\measuredangle BNM+\measuredangle BMN\\&=\measuredangle BAN+\measuredangle BAP\\&=\measuredangle NAP=\measuredangle NPA\end{aligned}$$

од каде, четириаголникот $MBNP$ е тетивен (точките B и P се од различни страни на MN), па $\measuredangle APB=\measuredangle MPB=\measuredangle MNB$ и според АСА, триаголниците APB и MNB се складни ($\overline{MN}=2\overline{AM}=\overline{AM}+\overline{MP}=\overline{AP}$). Оттука следува дека $\overline{AB}=\overline{MB}$, т.е. триаголникот AMB е рамнокрак, а од тоа што $t\perp AM$, следува дека AM минува низ центарот на кружницата, па AMB е правоаголен. Од последното следува дека $\measuredangle ABM=45^\circ$, па затоа $\measuredangle NMB=90^\circ-\measuredangle ABM=45^\circ$.

95. Дадени се две кружници k_1 и k_2 со центри P и R соодветно, кои се допираат однадвор во точка A. Нека p е нивна заедничка тангента, што не минува низ A, а ги допира k_1 и k_2 во точките B и C, соодветно. Правата PR ја сече правата BC во точка E, а кружницата k_2 во точките A и D. Ако $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2}$, најди го односот $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}$.

Решение. Нека радиусот на k_1 е r, на k_2 е t и нека заедничката тангента на k_1 и k_2 во точката A ја сече правата BC во G. Да забележиме дека $\overline{AG}=\overline{BG}=\overline{CG}$, како тангентни отсечки. Уште важи $\measuredangle APB=180^\circ-\measuredangle AGB=\measuredangle AGC$. Значи, рамнокраките триаголници APB и AGC се слични. Бидејќи знаеме дека $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2}$, следува дека $r=\overline{AP}=2\overline{AG}$, од каде $\overline{BC}=r$. Нека правата паралелна со BC низ R, ја сече PB во точка F. Тогаш, од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник PRF, имаме $(r+t)^2=(r-t)^2+\overline{RF}^2$. Односно имаме $\overline{RF}=2\sqrt{rt}$. Од ова имаме $\overline{BC}=2\sqrt{rt}$. Сега имаме $r=2\sqrt{rt}$.



Добиваме $r=4t$. Од сличноста на правоаголните триаголници REC и PRF, имаме $\frac{\overline{PR}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{RE}}{\overline{RC}}$, односно $\frac{r+t}{r-t}=\frac{t+\overline{DE}}{t}$, од каде добиваме

$$\frac{5t}{3t}=1+\frac{\overline{DE}}{t},\ \overline{DE}=\frac{2}{3}t.$$

Сега имаме:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\frac{r}{\frac{2}{3}t}=\frac{12t}{2t}=6.$$

96. Дадени се две кружници со различни радиуси кои се допираат од надвор во точката A. Заедничката тангента ја допира поголемата кружница во точката B, а помалата во точката C и ја сече правата која минува низ центрите на дадените кружници во точката S. Во точката S конструирана е нормала на тангентата BC. Правата BA ја сече таа нормала во точката M, а правата AC ја сече истата нормала во точката N. Докажи дека $\overline{SM}=\overline{SN}$.

Решение. Нека AD е заедничката тангента на кружниците нормална на O_1O_2, каде O_1 и O_2 се центрите на кружниците. Од тоа што $\triangle\Delta O_1AD\cong\triangle O_1BD$ следува $\overline{AD}=\overline{BD}$, а од $\triangle O_2AD\cong\triangle O_2CD$ следува дека $\overline{AD}=\overline{CD}$. Заклучуваме дека триаголниците ABD и ACD се рамнокраки, од каде следува дека кружницата со дијаметар BC ја содржи точката A. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle BAC=90^\circ$. Ги разгледуваме триаголниците ABD и ASN. Од тоа што правата AD е нормална на правата AS и правата AN е нормална на правата AB следува дека

$\measuredangle NAS = \measuredangle BAD$ (1)

како агли со заемно нормални краци. Исто така,

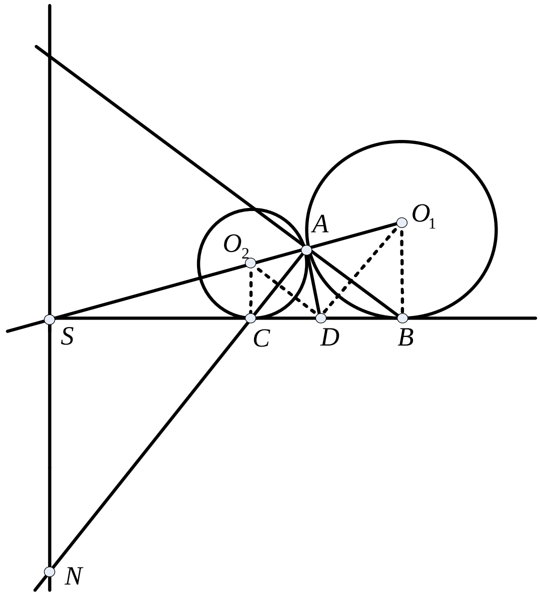
$\measuredangle ANS = \measuredangle ABD$ (2)

$\measuredangle BAD = \measuredangle ABD$ (3)

како агли при основата на рамнокракиот триаголник ABD. Од равенствата (1), (2) и (3) следува

$\measuredangle NAS = \measuredangle ANS$,

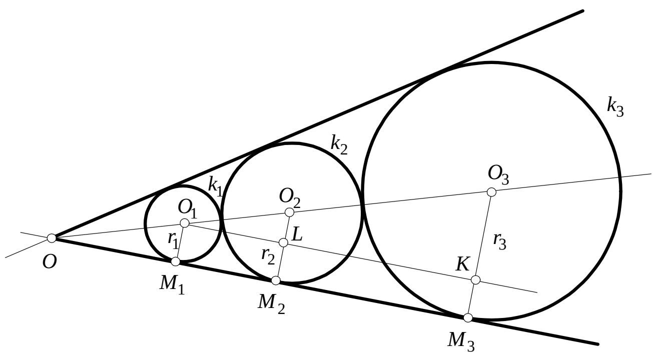
па триаголникот ASN е рамнокрак и $\overline{AS} = \overline{SN}$. На ист начин, со споредба на аглите на $\triangle ACD$ и $\triangle AMS$ се добива дека $\overline{AS} = \overline{SM}$,



па следи дека $\overline{SN} = \overline{SM}$, што и требаше да се докаже.

97. Нека r_1, r_2, r_3 $(r_1 < r_2 < r_3)$ се должини на радиуси на кружниците k_1, k_2, k_3 кои допираат краци на даден агол. Притоа k_1 и k_2 се допираат, а исто така и k_2 и k_3 се допираат. Докажи дека r_2 е геометриска средина на r_1 и r_3.

Решение. Нека O_1, O_2, O_3 се центри на кружниците k_1, k_2, k_3, а M_1, M_2, M_3 се допирни точки на k_1, k_2, k_3 со еден крак на аголот (види цртеж).



Јасно,

$$\overline{O_1M_1} = r_1,\ \overline{O_2M_2} = r_2,\ \overline{O_3M_3} = r_3.$$

Точката K припаѓа на O_3M_3 и $O_1K \parallel M_1M_3$. Точката L е пресечна точка на O_1K со O_2M_2 (види цртеж). Триаголниците O_1LO_2 и O_1KO_3 се слични, од каде добиваме

$$\overline{O_3K} : \overline{O_2L} = \overline{O_1O_3} : \overline{O_1O_2} . \qquad (1)$$

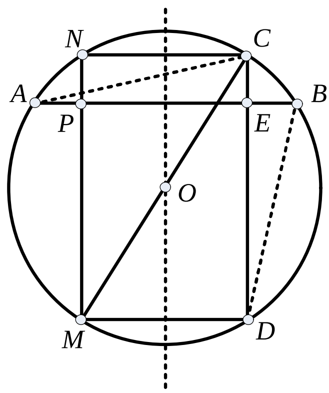
Бидејќи $\overline{O_3K} = r_3 - r_1$, $\overline{O_2L} = r_2 - r_1$, $\overline{O_1O_3} = r_1 + 2r_2 + r_3$, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, ако замениме во (1) добиваме

$$(r_3 - r_1)(r_2 - r_1) = (r_1 + 2r_2 + r_3)(r_1 + r_2) . \qquad (2)$$

Ако во (2) се ослободиме од загради и добиеното равенство го средиме, добиваме $r_2^2 = r_1r_3$.

98. Во круг со дијаметар d, тетивите AB и CD се сечат под прав агол во точката E која не се совпаѓа со центарот на кругот. Докажи дека

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2 .$$



Решение. За дадените тетиви важи $AB \perp CD$ и $\{E\} = AB \cap CD$, $E \neq O$, каде O е центарот на кругот. Правата низ точката D, повлечена паралелно со AB, нека ја сече кружницата во точка M, а потоа правата низ M, паралелна со CD, нека ја сече кружницата во точката N.
Бидејќи $\measuredangle MDC = 90^\circ$, отсечката MC минува низ центарот на кругот, а тоа значи дека $\measuredangle MNC = 90^\circ$. Според тоа, четириаголникот $MDCN$ е правоаголник. Но, $\overline{AP} = \overline{EB}$ (точките P и E, а исто така и точките A и B се осносиметрични точки во однос на оската на симетрија на правоаголникот $MDCN$ која минува низ центарот O и е паралелна со страните DC и MN), па затоа

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} \text{ и } \overline{MD} = \overline{PE} = \overline{AE} - \overline{AP} = \overline{AE} - \overline{EB} .$$

Од $\triangle MDC$ имаме дека

$$d^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2$$
$$= \overline{CE} + \overline{ED})^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 - 2 \cdot \overline{AE}\,\overline{EB} + \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 + 2 \cdot \overline{CE}\,\overline{ED}.$$

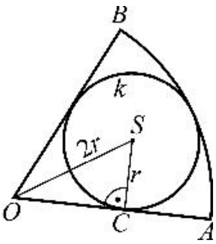
Потоа**,** $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ како периферни агли над лакот BC, па од сличноста на $\triangle AEC \sim \triangle BED$, добиваме $\overline{AE} : \overline{CE} = \overline{ED} : \overline{BE}$, односно $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$. Со замена во последното равенство добиваме

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2,$$

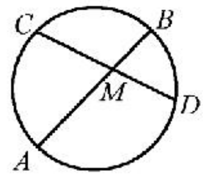
што и требаше да се докаже.

99. Круг е впишан во кружен исечок (кругот ги допира двата радиуси и лакот на исечокот). Радиусот на исечокот е 3 пати поголем од радиусот на кругот. Најди го односот на плоштините на исечокот и кругот.

Решение. Кругот $k(S,r)$ е впишан во кружниот исечок AOB и затоа S лежи на симетралата на $\measuredangle AOB$. Нека C е точката во која $k(S,r)$ го допира радиусот OA. Тогаш триаголникот OCS е правоаголен, а од условот во задачата имаме $\overline{OS} = 2r$. Бидејќи хипотенузата на триаголникот OCS е два пати поголема од катетата CS ($\overline{OS} = 2r$, $\overline{SC} = r$), следува дека $\measuredangle COS$ е еднаков на 30°. Тогаш $\measuredangle AOB = 60^\circ$ и затоа плоштината на кружниот исечок AOB е $P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ}(3r)^2 \text{®} = \frac{3}{2}r^2\text{®}$. Плоштината на кругот $k(S,r)$ е $P_2 = r^2\text{®}$, па тогаш $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{2}$.

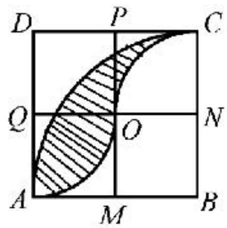


100. Дијаметарот AB и тетивата CD на дадена кружница се сечат во точката M. Определи го $\measuredangle AMC$ ако должините на помалите лаци BC и AD се однесуват како $2:3$, а должините на помалите лаци AC и BD се однесуват како $4:1$.



Решение. Од $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$ следува $\overset{\frown}{AC} = 180^\circ - \overset{\frown}{BC}$. Од друга страна $\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{4}\overset{\frown}{AC}$, па затоа $\overset{\frown}{BD} = 45^\circ - \frac{1}{4}\overset{\frown}{BC}$. Освен тоа, $\overset{\frown}{AD} = \frac{3}{2}\overset{\frown}{BC}$, па затоа $180^\circ - \overset{\frown}{BC} + 45^\circ - \frac{1}{4}\overset{\frown}{BC} + \frac{3}{2}\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ$, т.е. $\overset{\frown}{BC} = 108^\circ$. Сега $\overset{\frown}{BD} = 45^\circ - \frac{1}{4}\cdot 108^\circ = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$ и $\overset{\frown}{AC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, поа затоа $\measuredangle AMC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{72^\circ + 18^\circ}{2} = 45^\circ$.

101. Квадрат $ABCD$ со страна 2 е разделен на четири складни квадрати $AMOQ, MBNO, NCPO, PDQO$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на штра-

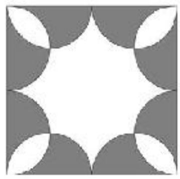


фираниот дел ограничена со лакот од кружницата цо центар во B и минува низ точките A и C, лакот од кружницата со центар во N и минува низ точките O и C, како и лакот од кружницата со центар во Q и минува низ точките A и O.

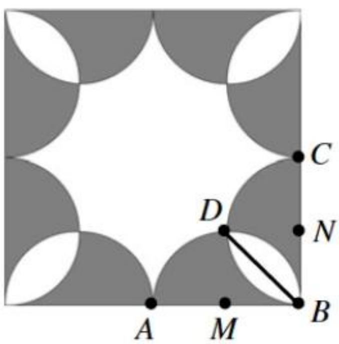
Решение. Фигурата формирана од отсечките AB, BC и лакот AC е $\frac{1}{4}$ од круг со радиус 2 и има плоштина π. Фигурата формирана од отсечките ON, NC и лакот OC е $\frac{1}{4}$ од круг со радиус 1 и има плоштина $\frac{\pi}{4}$. Оваа фигура ја дополнува фигурата формирана од отсечките AQ, OQ и лакот OA, до квадрат со страна 1. Според тоа, збирот на плоштините на двете фигури кои дополнуваат е еднаков на 1. Конечно, плоштината на штрафираниот дел е еднаква на

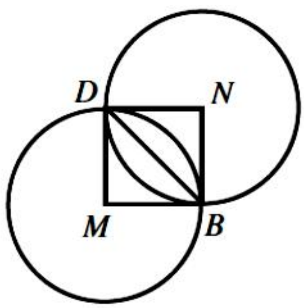
$$\pi - (1+1) = \pi - 2.$$

102. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 4 се конструирани 8 полукругови како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на белиот дел на добиената фигура.



Решение. Да ги разгледаме двете полукружници кои минуваат низ темето B на квадратот, со M да го означиме центарот на полукружницата со дијаметар AB, а со N центарот на полукружницата со дијаметар BC (цртеж долу лево).





Јасно, $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$, па затоа $\overline{MB} = \overline{BN} = \overline{ND} = \overline{DM} = 1$. Бидејќи $\measuredangle MBN = 90^\circ$ заклучуваме дека четириаголникот $MBND$ е квадрат. Плоштината на леќата (заедничкиот бел дел на двата полукруга) е еднаква на двократната разлика на кружниот исечок кој соодветствува на централен агол од 90° и плоштината на триаголникот DBN. Оваа плоштина е еднаква на $2(\frac{®}{4}-\frac{1}{2})=\frac{®}{2}-1$. За плоштината на затемнетиот дел на секој од аглите на квадратот наоѓаме $® -(\frac{1}{2}® -1)=\frac{1}{2}® +1$. Според тоа, бараната плоштина е еднаква на $16-4(\frac{1}{2}® +1)=12-2®$.

103. За роденден принцезата Арабела добила прстен украсен со скапоцен камен. Каменот имал форма на квадар така што плоштината на трите ѕида на каменот се $1mm^2$, $3mm^2$, $12mm^2$ соодветно. Колкава е масата на каменот, ако се знае дека $1mm^3$ од него има маса 0,003 грама?

Решение. Да ги означиме со a,b,c должините на трите раба на каменот. Од условот на задачата имаме дека важи $ab=1$, $bc=3$ и $ac=12$. Користејќи ги последните равенства добиваме

$$1\cdot 3\cdot 12=(ab)\cdot(bc)\cdot(ca)=(abc)\cdot(abc)=V\cdot V=V^2,$$

каде V е волуменот на каменот, па од тука за волуменот на скапоцениот камен добиваме

$$V=\sqrt{1\cdot 3\cdot 12}=\sqrt{36}=6mm^3.$$

Конечно, бараната маса на каменот е $6\cdot 0,003=0,018$ грама.

104. Односот на плоштините на ѕидовите на еден квадар е $2:3:5$. Определи го односот на должините на рабовите на квадарот.

Решение. Нека a, b и c се должините на рабовите на квадарот. Од условот на задачата имаме $ab:bc:ca=2:3:5$, односно $\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$. Според тоа, $\frac{a}{2}=\frac{c}{3}$ и $\frac{b}{3}=\frac{a}{5}$. Но, тогаш $\frac{a}{10}=\frac{c}{15}$ и $\frac{b}{6}=\frac{a}{10}$. Значи, $\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15}$, па затоа $a:b:c=10:6:15$.

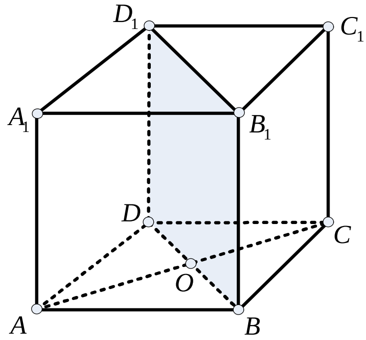
105. Основата на права четириаголна призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$, $k>0$. Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2.

а) Изрази ги плоштината и волуменот на призмата преку k.

б) За која вредност на k, мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви меѓу себе?

Решение. Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2, па затоа висината на призмата е $H=k$ и помалата дијагонала на нејзината основа е $d_1 = k$. Основата на призмата е ромб со плоштина $B = \frac{2}{3}k^2$, од каде добиваме

$$\frac{2}{3}k^2 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \text{ т.е. } \frac{2}{3}k^2 = \frac{k \cdot d_2}{2}.$$



Од последното равенство се добива поголемата дијагонала на ромбот е $d_2 = \frac{4}{3}k$. Според тоа, за должината на страната на основата добиваме

$$a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2,$$

односно

$$a^2 = (\frac{k}{2})^2 + (\frac{4k}{6})^2,$$

од каде се добива дека $a = \frac{5}{6}k$.

а) За волуменот и површината на призмата добиваме

$$V = B \cdot H = \frac{2}{3}k^2 \cdot k = \frac{2}{3}k^3 \text{ и } P = 2B + 4ak = 2 \cdot \frac{2}{3}k^2 + 4 \cdot \frac{5}{6}k^2 = \frac{14}{3}k^2.$$

б) Од условот дека мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви меѓу себе добиваме $\frac{2}{3}k^3 = \frac{14}{3}k^2$, од каде $k = 7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.(1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988).: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скоје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на збирови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по елементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме збирови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Анѓелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, СКопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019).Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерсу, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теория на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, СКопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на збирови од производи и степени, Нумерус, Скопје
87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамностран триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, ММM, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, СКопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шариќ, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Караџова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерсу, Скопје