Više dokaza jedne poznate trigonometrijske nejednakosti u trokutu

Šefket Arslanagić* Alija Muminagić†

Sažetak. *U radu se daje sedam raznih dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti o trokutu. Ta nejednakost je značajna za dokazivanje drugih nejednakosti. Korištene su razne tehnike kod ovih dokaza.*

Ključne riječi: *trigonometrijska nejednakost, razni dokazi, nejednakost C-B-S (Cauchy-Buniakovski-Schwarz), aritmetička i harmonijska sredina i nejednakost između njih, nejednakost Eulera, konveksna funkcija, Jensenova nejednakost*

More proofs of one well-known trigonometric inequality in triangle

Abstract. *In this paper we give seven different proofs for one trigonometric inequality for triangle. This inequality is important for proving other inequalities. We used different methods in this proofs.*

Key words: *trigonometric inequality, different proofs, inequality C-B-S (Cauchy-Buniakovski-Schwarz), inequality between arithmetic and harmonic mean, Euler's inequality, convex function, Jensen's inequality*

Dokazivanje nejednakosti u matematici veoma je zanimljiv i kreativan posao. Pri tome dolaze do izražaja razne ideje koje često dovode do rezultata. Naravno, tko to želi realizirati mora biti solidno upućen u razna područja matematike i diferencijalnog računa.

U ovom članku pokazat ćemo razne dokaze jedne poznate trigonometrijske nejednakosti koja često ima primjenu kod dokazivanja drugih nejednakosti. Riječ je o sljedećoj trigonometrijskoj nejednakosti u trokutu:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1, \tag{1}$$

gdje su α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta.

Kod dokaza ove nejednakosti koristit ćemo neke druge poznate jednakosti i nejednakosti čiji se dokazi mogu naći u [1], [2] i [3]. To su sljedeće jednakosti i nejednakosti koje vrijede za trokut:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=1, \tag{2}$$

*Sarajevo, Bosna i Hercegovina
†Nykobing F., Danska

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{4R+r}{2R}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}, \tag{4}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{4R+r}{s}, \tag{5}$$

$$R\geq 2r\ \text{ (Nejednakost Eulera)}, \tag{6}$$

$$4R+r\geq s\sqrt{3}, \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}, \tag{8}$$

gdje su r i R polumjeri upisane i opisane kružnice trokuta, s je poluopseg trokuta.

Dokaz 1. Koristeći poznatu nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dva pozitivna broja ($A\geq G$), imamo:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}}{2}\geq\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}},\text{, tj.}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Analogno dobivamo i sljedeće nejednakosti:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

i

$$\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Nakon zbrajanja tri gornje nejednakosti, dobivamo:

$$2\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)\geq 2\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

odnosno

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

a odavde zbog (2):

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1,\quad\text{q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (1), ako i samo ako je $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, a odavde $\alpha=\beta=\gamma$ (jednakostranični trokut).

Dokaz 2. Uz oznake $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=y$ i $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=z$, jednakost (2) postaje

$$xy+yz+zx=1. \tag{9}$$

Sada iz nejednakosti

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\geq 0$$

i jednakosti (9) slijedi:

$$2(x^2+y^2+z^2)-2\geq 0,\quad \text{tj.}$$
$$x^2+y^2+z^2\geq 1,$$

odnosno

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 1$$

a ovo je nejednakost (1) koju je trebalo dokazati.

Dokaz 3. Nadalje, spomenimo vrlo bitnu C-B-S (Cauchy-Buniakovski-Schwarz) nejednakost koju ćemo iskoristiti u sljedećem dokazu. Za $n=3$, ona glasi

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

gdje su $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$.
Primjenom jednakosti (2) u C-B-S nejednakosti dobivamo vrlo kratak i elegantan dokaz nejednakosti (1).

$$\begin{aligned}1&=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\leq\\ &\leq\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}}=\\ &=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Dokaz 4. Neka je

$$M=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2}{1+\cos x}-1$, to je:

$$M=2\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\beta}+\frac{1}{1+\cos\gamma}\right)-3. \tag{10}$$

Stavimo da je $x=1+\cos\alpha$, $y=1+\cos\beta$, $z=1+\cos\gamma$; $(x,y,z>0)$.
Aritmetička sredina tih brojeva je

$$A_3=\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}(3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\overset{(4)}{=}\frac{1}{3}\left(3+1+\frac{r}{R}\right)\overset{(6)}{\leq}\frac{3}{2}. \tag{11}$$

Harmonijska sredina tih brojeva je

$$H_3=\frac{3}{\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos\beta}+\dfrac{1}{1+\cos\gamma}},$$

a odavde

$$\frac{1}{H_3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\beta} + \frac{1}{1+\cos\gamma}\right) \overset{(10)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{M+3}{2},$$

te

$$H_3 = \frac{6}{M+3}. \tag{12}$$

Kako je $H_3 \leq A_3$, to dobivamo iz (12) i (11):

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{M+3} \leq \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow\ M+3 \geq 4 \\
&\Leftrightarrow\ M \geq 1,
\end{aligned}$$

a to smo i trebali pokazati.

Dokaz 5. Neka je opet

$$M = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Kako je $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, to je:

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 = \\
&= \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} + \frac{(1-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta} + \frac{(1-\cos\gamma)^2}{\sin^2\gamma} \geq \\
&\geq (1-\cos\alpha)^2 + (1-\cos\beta)^2 + (1-\cos\gamma)^2 = \\
&= 3 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \overset{(4)}{=} \\
&\overset{(4)}{=} 3 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 + 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 - 2\left(q + \frac{r}{R}\right) = \\
&= 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) - 2 - \frac{2r}{R} \overset{(3)}{=} \\
&\overset{(3)}{=} 2 \cdot \frac{4R+r}{2R} - 2 - \frac{2r}{R} = \frac{2R-r}{R} = 2 - \tfrac{r}{R} \overset{(6)}{\geq} 1,\ \text{tj.} \\
M &\geq 1.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali nejednakost (1).

Dokaz 6. Neka je $A = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$ i $B = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Sada dobivamo

$$B^2 = A + 2\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

tj. zbog (2):

$$B^2 = A + 2,$$

a odavde zbog (8):

$$A = B^2 - 2 \overset{(8)}{\geq} \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 = 1,$$

a to smo i trebali dokazati.

Dokaz 7. Zbog (2) vrijedi

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 2.$$

Primjenom (5) i (7) dobivamo traženu nejednakost

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{4R+r}{s}\right)^2 - 2 \overset{(7)}{\geq} \left(\frac{s\sqrt{3}}{s}\right)^2 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Dokaz 8. Za ovaj dokaz koristimo Jensenovu nejednakost[1].
Promotrimo funkciju

$$f(x) = \mathrm{tg}^2\frac{x}{2};\quad x \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Imamo

$$f'(x) = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}},$$

te

$$f''(x) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^4\frac{x}{2}} > 0 \;\text{ za sve }\; x \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Dakle, dana funkcija $f(x) = \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$ je **konveksna** za sve $x \in \langle 0, \pi\rangle$, pa na osnovu Jensenove nejednakosti za $n = 3$ imamo

$$\frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right),$$

a odavde uzimajući da je $x_1 = \frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \frac{\beta}{2}$ i $x_3 = \frac{\gamma}{2}$ dobivamo

$$\frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right) \geq \mathrm{tg}^2\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right), \quad \text{tj.}$$

[1]Detalji o Jensenovoj nejednakosti nalaze se u [2].

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right).$$

zbog $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ vrijedi

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6},\quad \text{tj.}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geq 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1.$$

Time je nejednakost (1) u potpunosti dokazana.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] O. Bottema, and oth., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] A. Muminagić, *Bobillierova formula*, Osječka matematička škola, Vol. **4**(2004), Nr. 2, Osijek, 2004.