МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 3 (2018), 9 – 20
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-3.html

МОЌТА И НЕМОЌТА НА ОЧИГЛЕДНОТО ВО МАТЕМАТИКАТА

Љупчо Настовски [1]
Билјана Начевска [2]

Секое свесно суштество кое ја достигнало свеста за свеста, кое е зачудено над самото постоење независно од обичноста или необичноста на неговото пројавување, во други галаксии, во други димензии, како груб или фин ентитет, останува конечно крајно изненадено над постоењето на самата свест како моќ за себеспознавање и спознавање на тоталното постоење. Но, кое постоење? Што е свеста и која е нејзината природа? Колку ние сме моќни со инструментите на интелектот или со други инструменти, како на пример интуицијата која извира од душата, да ја спознаеме тоталната стварност и да го постигнеме конечното знаење? Конечно знаење, кое би било крај на интелектуалната одисеја. Дали тој крај на интелектуалната одисеја е посакуван од самите истражувачи, од самите љубители на вистината? Тоа би било своевидно пензионирање, уништување на предизвикот на мистеријата, испарување на аромата на тајната.

Математиката е моќен инструмент, моќна галија во оваа одисеја за потрага по вистината. Со помош на апстрахирањето го претвора конкретното во општо, пронаоѓа структури кои опстојуваат независно од местото и времето. Но, како ги пронаоѓа и каде ги пронаоѓа? Да направиме еден едноставен мисловен експеримент. Секој може да го изведе со затворање на очите и со обид на блага амнезија за сè што сме виделе во нашиот живот. Каква стварност ни се нуди? Дали го гледаме светот (ако воопшто гледаме) во кој можеме да ги пронајдиме природните броеви како нешто конкретно и да ги апстрахираме во математички поим? Ги гледаме ли како апстракција на конкретна стварност точките, правите, рамнините со нивните меѓусебни односи или сепак ни се отворени вратите за некои други димензии и други светови. Можеби сетилото за вид е затворски чувар, а стварноста која ја познаваме е нашата ќелија. Оној интервал на електромагнетните бранови кој е процеп низ кој може да ѕиркаме не ни дава можност за тотално спознавање на стварноста. Можеби за создавање на математиката, барем таква како што ја познаваме, е доволен почетен краток визуелен допир, како секавица, па потоа математиката повторно би била создадена во целиот нејзин раскош? А можеби и не? Како и да е, сетилото за вид игра голема улога во создавањето на математиката. Или таа постои независно од нас, а ние сме само нејзини интерпретатори. Ја пееме песната на математиката. Како што одговорил Борхес кога го запрашале зошто пишува. Рекол: „Зарем ги прашувате птиците зошто пеат или ѕвездите зошто светат?“. Така и ние можеби, како математичари или љубители на математиката, танцуваме заедно со математиката.

Интелектот го претставува функционирањето на главата, инстинктот го претставува функционирањето на телото, а интуицијата го претставува функционирањето на срцето. Зборчето *ин* (лат. во) се употребува во трите зборови. Тоа значи дека квалитетите се вродени. Тие не може да се научат, не постои начин да се развијат со помош која доаѓа однадвор. Сите клучни функции на телото се во рацете на инстинктот: дишењето, работата на срцето, крвотокот. Во многу процеси што се одвиваат во нашето тело не учествува нашиот интелект. Интелектот го користиме кога се соочуваме со нови ситуации од животот на коишто пакетот програми на инстинктот нема одговор. Го користиме интелектот во обид да разрешуваме актуелни, нови животни ситуации. Интелектот на располагање ја има методологијата на логиката и на други видови размислување. Интуицијата се покажува во квантни скокови. Таа не познава методолошка процедура, таа едноставно согледува. Англискиот збор tuition чиешто значење е подучување, обука, е во составот на англискиот збор intuition, т.е. интуиција. Ако се има предвид значењето на англискиот збор in (внатре), може да кажеме дека интуиција значи нешто што се раѓа внатре во нашето битие, нешто што нè подучува одвнатре во самите нас, тоа е наш сопствен потенцијал. Интуицијата едноставно е знаење без употреба на мислење. Таа е согледување на вистини без признавање на времето и просторот. Кога ќе спомнуваме визуелна интуиција, ќе подразбираме интуитивни согледувања базирани на сетилото за вид. Кога ќе спомнуваме математичка интуиција, ќе подразбираме согледувања базирани на самата математика, на нејзиниот свет од апстракции, односно од апстракции на апстракции, кои за да влезат во нашето “видно” поле, треба да бидат интерпретирани со помош на математички симболи.

Следуваат неколку примери, презентирани хронолошки низ вековите, а можеби следуваат хронолошки и за секој од нас кој ја проучувал и ја проучува математиката.

1. ***Питагора. Немерливост со дропка на дијагонала на квадрат со страна еден.***

Питагора (570 – 500 п.н.е.) бил роден во Самос, грчки остров кој е во близина на брегот на сегашна Турција, непосредно до градот Кушадаси, [2]. Нема документи од периодот во кои живеел, па за неговиот живот и творештво дознаваме од документите кои многу подоцна биле запишани врз основа на легендите кои се пренесувале низ вековите. Учел математика кај Талес од Милет (624 – 547). Питагора исто така патувал во Египет и Вавилон од каде добил многу математички идеи. Тој, поточно неговата школа од Питагорејци, прв го открил доказот на Питагорината теорема, иако самиот тој првобитно не ја формулирал. Се верува дека зборовите математика и филозофија се воведени од Питагора. Околу 540 год. п.н.е. се населил во Кротон, грчка колонија во јужна Италија. На таков потег бил принуден затоа што во родното место Самос бил оневозможен да го негува и пренесува своето знаење. Имено, бил толку многу почитуван во Самос, така што од него било барано да има општествен ангажман околу упавувањето на градот. Во Кротон основал школа чии ученици се познати како Питагорејци. Мотото на школата било „Сè е број“, па Питагорејците се обидувале сè во науката, во религијата и во филозофијата да сведат на законите на броевите. Питагорејската школа се раководела по строги правила на однесување. Од нејзините членови се барало да запазуваат одреден код на дискреција. Кодот за дискреција помеѓу другото барал сите математички резултати кои се откриени од Питагорејците да бидат сопственост на самата школа.

Веќе спомнавме дека мотото на школата било „Сè е број“, па бидејќи им биле познати дропките како броеви, очекувале дека на секоја должина ѝ соодветствува некоја дропка. Тоа очекување се должи на особината на дропките да се густи, т.е. помеѓу кои било две дропки секогаш може да најдеме друга дропка. Визуелната перцепција, очигледното, не согледува празнини во густината на рационалните броеви. Обидот на Питагорејците да ја пронајдат дропката која би била должина на дијагонала на квадрат со страна еден, визуелно е очекуван и оправдан, но законите на математиката и законите на правилното расудување се немилосрдни. Обидот бил неуспешен. Спротивно на нивните очекувања, докажале дека не постои дропка која би ја измерила должината на дијагонала на квадрат со страна еден. Питагорејците биле многу зачудени од ова нивно откритие. Легендата кажува дека Питагора на боговите им принел жртва од стотина бикови. Дали сакале да ги смилостиват боговите или сакале да им заблагодарат за откритието? Како и да е, откритието ги оправадало таквите трошоци, бидејќи ова откритие значело пресвртница во развојот на математиката. Се срушил системот на Питагорејците и била овозможена изградаба на нови, посуптилни и подлабоки теории. Значењето на ова откритие во математиката може да се спореди со значењето на откритието на неевклидската геометрија во XIX век.

Во овој пример е демонстрирана немоќта на визуелната перцепција, на очигледното, понекогаш да антиципира резултати во математиката.

2. *Бесконечноста и Кантор*

Многу филозофи емпиристи, како Хобс, Лок и Хјум, а и некои математичари, меѓу кои и Гаус, не верувале во постоењето на актуелната бесконечност во математиката. Не верувале во бесконечност како готов ентитет кој не е во процес на создавање, откривање. Благодарејќи на германскиот математичар Георг Кантор (1845 – 1918), скоро сите математичари денес ја имаат прифатено бесконечноста. Тој самостојно создал јасна и комплетна теорија на бесконечноста во математиката. Благодарејќи му нему добивме ново и подлабоко разбирање за реалните броеви и за многу области од математиката, како што е на пример математичката анализа. Поради големиот отпор што во времето на создавањето на Канторовата теорија за бесконечноста во математиката, го пружале многу математичари современици на Кантор (меѓу кој бил и Кронекер), Кантор никогаш не добил позиција на универзитетски професор. За време на неговиот живот многу луѓе ја отфрлале неговата теорија. Во 1884 година психички заболел, болест која го следи до крајот на животот. Починал во 1918 година, во психијатриска клиника во Хале во Германија. Сепак, историјата пресудува дека Кантор е еден од најоргиналните и најзначајните математичари на сите времиња, [1].

Еден од најважните резултати на Кантор е дека постои бесконечна хиерархија на различни бесконечности. За разлика од него, Бернард Болцано (1781 – 1848), а и многу други математичари, тврдел дека кои било две бесконечни множества се „еднакви“ затоа што помеѓу нив може да се воспостави инјективно пресликување.

Кардиналните броеви како класи на еквивалентни множества ни се познати и покрај природните броеви како кардинални броеви на конечните множества, добиваме кардинални броеви кои го „мерат“ степенот на бесконечност на бесконечните множества. Првата и најмалата, визуелно најприфатлива бесконечност е бесконечноста на множеството на природните броеви. Без претходно познавање на теоријата на Кантор за бесконечни множества, како Болцано, така и ние, наивно би ја прифатиле идејата за постоење на само еден вид бесконечност. Кантор со познатиот доказ во кој ја применува дијагоналната постапка, докажува дека множеството реални броеви и множеството природни броеви не се еквивалентни, т.е. имаат различни кардинални броеви.

Големо изненадување било кога се докажало дека отсечки со различни должини како множества од точки имаат еднакви кардинални броеви. Кардиналност континиум. Исто изненадување претставувало и тоа дека множеството точки од една права е еквивалентно со множеството точки од една отсечка. Со тоа дека на бесконечната права има исто толку точки колку што има и на отсечката, математичарите се помириле. Но, следниот резултат на Кантор се покажал многу неочекуван. Во потрагата по множества кои би имале поголема моќност отколку што има множеството точки на една отсечка, Кантор го разгледувал множеството точки од еден квадрат. Сомнежи во резултатот што го очекувал немало. Било очигледно дека отсечката целосно се разместува на една страна од квадратот, а множеството од сите отсечки на кои може да се разложи квадратот ја има истата таа моќност што ја има множеството точки на отсечката. Во текот на три години, од 1871 до 1874, Кантор го барал доказот на тоа дека биекција помеѓу множеството од точките на една отсечка и множеството од точките на еден квадрат е невозможна. Годините минувале, а посакуваниот резултат не се добивал. И наеднаш сосема неочекувано, Кантор успеал да пронајде биекција за која сметал дека не постои. На самиот почеток не можел да поверува. На Дедекинд му напишал „Го гледам тоа, но не верувам.“

Сепак Кантор морал да се помири со фактот дека визуелната интуиција потфрлила во овој случај. Строгиот доказ на тврдењето дека постои биекција помеѓу множеството точки од една отсечка и множеството точки од еден квадрат, поради нееднозначноста на децималниот запис на реалните броеви, не е едноставен, но сепак ќе дадеме негова скица.

Ќе ги разгледаме отсечката [0,1] и квадрат со страна 1. Тој квадрат може да сметаме дека е поставен во координатен систем со темиња во A(0,0), B(1,0), C(1,1) и D(0,1). Треба да воспоставиме биекција помеѓу точките на отсечката и точките на квадратот. Проектирањето на точките на квадратот на отсечката AB нема да помогне, бидејќи при проектирањето во една точка од отсечката ќе се пресликаат бесконечно многу точки од квадратот. Решението се добива на следниов начин. За секоја точка T од квадратот ABCD се задаваат два броја и тоа нејзините координати x и y. Нека нивните децимални записи се $0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ За поедноставување на доказот, може да не ги разгледуваме точките на квадратот кои лежат на неговите страни, туку само внатрешните точки. Сега е потребно да најдеме точка E од отсечката AB која еднозначно ќе биде придружена на точката T(x,y). Бараната точка E од отсечката AB ќе биде дадена со $0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\alpha_n\beta_n\ldots$ Точката лежи на отсечката [0,1] и јасно е дека на различни точки од квадратот им соодветствуваат различни точки од отсечката. На овој начин е воспоставена биекција помеѓу точките на квадратот и подмножество од отсечката [0,1]. Со тоа е покажано дека кардиналниот број на квадрат е еднаков на кардиналниот број на отсечка. Не само квадрат, туку и коцка има исто толку точки колку што има точки една отсечка. Уште повеќе, која било n-димезионална коцка има исто толку точки колку што има една отсечка. И тоа е еден пример дека очигледното нè наведува да очекуваме резултати коишто не се доследни на математичката строгост, [3].

Утврдени биле два вида бесконечни множества. Пребројливи и непребројливи. Природно се наметнувало прашањето дали помеѓу овие две бесконечности постојат други бесконечности. Односно, дали постојат множества чиј кардинален број ќе биде строго помеѓу кардиналниот број на природните броеви и кардиналниот број на реалните броеви. Тоа прашање е познато како континиум хипотеза. Многу математичари, меѓу кои и самиот Кантор, се обидувале да ја потврдат оваа хипотеза.

Неуспехот на обидите да се реши проблемот на континиум не бил случаен. Се покажало дека во однос на актуелната аксиоматика на теоријата на множествата, постоењето на множество со моќност која би била строго помеѓу моќноста на природните броеви и моќноста на реалните броеви не противречи на останатите аксиоми (резултат на математичарот Гедел од 1938 година) и дека не може да се изведе од аксиомите (резултат кои скоро истовремено, независно еден од друг го докажале Коен во 1963–1964 година и Вопенка во 1964 година). Кантор докажал дека не постои најголем кардинален број. Имено, за кое било множество постои множество коешто има поголема моќност од првобитното множество. На пример, ако е дадено множеството A, тогаш може да се докаже дека множеството B коешто се состои од сите функции дефинирани на A и кои примаат вредности само 0 и 1, има моќност поголема од множеството A.

3. *Множеството на Кантор. Фатаморганата на неговото исчезнување.*

Позната е визуелната конструкција на множеството на Кантор. Од интервалот [0,1] се отстранува „средната третина“ (1/3, 2/3), понатаму од преостанатите интервали [0,1/3] и [2/3,1] се отстрануваат нивните „средни третини“ (1/9, 2/9) и (7/9, 8/9), итн. Ако се пресмета збирот од должините на сите отстранети интервали ќе се добие бројот еден, што очигледно нѐ доведува до убедување дека од интервалот [0,1] не останува ништо. Тоа е антиципирањето на очигледното, антиципирањето на визуелната перцепција. Но, да се вратиме на доследна примена на правилното расудување во математиката. Може да се докаже дека множеството коешто исчезнува, т.е. множеството на Кантор, за елементи ги има сите броеви од [0,1], кои во својот тријадски развој $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$ за цифри ги имаат само 0 и 2. Оттука едноставно се утврдува еднозначно соодветствие помеѓу елементите на множеството на Кантор и броевите од интервалот [0,1]. Имено, помеѓу дијадскиот развој $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$ на броевите од сегментот [0,1] и елементите од множеството на Кантор се воспоставува биекција на следниов начин: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$ се пресликува во $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k}$, каде што $\beta_k = 0$, доколку $\alpha_k = 0$ и $\beta_k = 1$, доколку $\alpha_k = 2$. Значи множеството на Кантор е непребројливо. Множеството од рационални броеви е пребројливо и густо. Да резимираме што ни нуди очигледното, што ни нуди визуелната перцепција во случајот на множеството на Кантор и множеството на рационални броеви од сегментот [0,1], а што ни нуди математиката со нејзината доследност и строгост во логичките заклучувања.

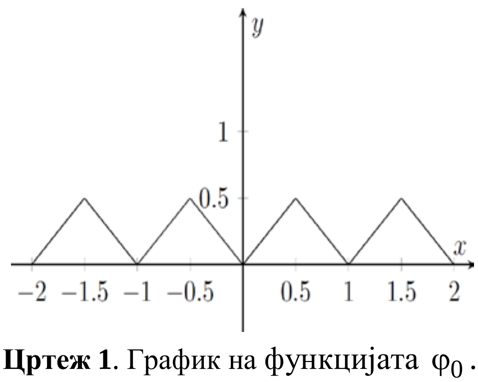
Множеството на Кантор, очигледно визуелно исчезнува, испарува, анихилира, се губи во непостоењето, умира, се вакуумира, но сепак неговата содржина, неговите жители се со поголема кардиналност од кардиналноста на рационалните броеви кои очигледно визуелно се секаде присутни, густо населени на бројната права. Може да кажеме дека имаме уште еден пример од светот на математиката во кој се согледува дека очигледното не секогаш ја дава вистинската слика на математичката стварност. Или сепак може да кажеме дека нашето визуелно перципирање на стварноста не е доволно за да ги ловиме вистините на тоталната стварност. Харолд Путоф докажал дека физиката на вакумот не е лишена од енергија, дека вакуумот е со изобилие од енергија. Тој е меѓу првите научници кои ја измериле енергијата на вселената. Таа енергија е мерена на нула келвинови степени, на апсолутно најниска можна температура во вселената. На таа температура, според Њутновата физика, сите движења на молекулите и атомите би требало да престанат и не би требало да се измери никаква енергија. Наместо непронаоѓање енергија како што се очекувало, било пронајдено огромно количество енергија која подоцна била наречена енергија на нулта точка. Имајќи го предвид физичкиот вакум како отсуство на физичка материја, а кој според претходно спомнатото, изобилува со огромна енергија и имајќи го предвид множеството на Кантор како математички вакум на сегментот [0,1], а кој сепак има кардиналност поголема од рационалните броеви кои визуелно се сеприсутни, можеби може да кажеме дека Канторовото множество е математички модел на физичкиот вакум и дека математички ја антиципира неговата содржина. Можеби ова множество е уште една потврда за ефективноста на математиката за антиципирање вистини од физичкиот свет.

4. *Непрекинати никаде диференцијабилни функции. Функцијата на Ван-дер- Варден.*

Долго време по откривањето на диференцијалното сметање, математичарите сметале дека непрекинатите функции во суштина се диференцијабилни. Мислеле дека „шпицовите“ на нивните графици се блага аномалија во нивната диференцијабилност. Кога во 1861 година германскиот математичар Карл Вајерштрас публикувал пример на функција која е непрекината во секоја точка од реалната права и која нема извод во ниедна точка, тогашниот математички свет бил запрепастен. Францускиот математичар Анри Поенкаре по повод на тоа откритие се запрашал: „Како можеше интуицијата да нè залажува до таков степен?“ Уште поенергично реагирал францускиот математичар Шарл Ермит кој рекол дека „со ужас и одвратност се оградувам од тој беден чир на непрекината функција која нема извод во ниедна точка“.

Примерот на Ваерштрас е доста сложен. Многу поедноставен пример на непрекината функција која е недиференцијабилна во ниедна точка, во минатиот век конструирал холандскиот математичар Ван-дер-Варден. Ќе ја илустрираме визуелно конструкцијата на таа функција иако графикот на самата функција не ќе можеме визуелно да го претставиме.

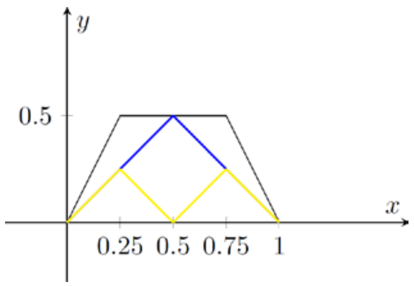
Ќе започнеме со конструкција на функција φ_0 чиј график е прикажан на Цртеж 1. Функцијата φ_0 е непрекината во секоја точка од реалната права и е периодична со период еден.



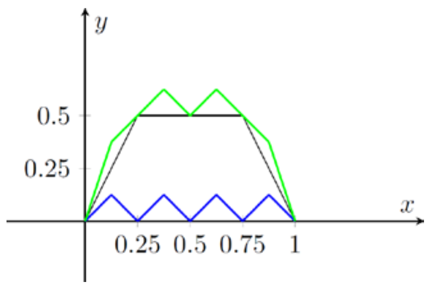
Цртеж 1. График на функцијата φ_0 .

Покрај тоа, $0 \le \varphi_0(x) \le \frac{1}{2}$, за секој реален број x. Освен тоа, графикот на функцијата φ_0 е симетричен во однос на која било вертикална права од облик $x = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Во точките $x = \frac{k}{2}$ функцијата φ_0 не е диференцијабилна.

Функцијата $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(2x)$ нема извод во точките $x = \frac{k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; функцијата $\varphi_2(x) = \frac{1}{2^2}\varphi_1(2^2 x)$ нема извод во точките $x = \frac{k}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$. За секој природен број $n \in \mathbb{N}$ ќе ставиме $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi_1(2^n x)$. Функцијата φ_n е непрекината во секоја точка од реалната права и не е диференцијабилна во точките $x = \frac{k}{2^{n+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Освен тоа, $0 \le \varphi_n(x) \le \frac{1}{2^{n+1}}$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Се гледа дека точките во кои функцијата φ_n е недиференцијабилна, стануваат се погусти и погусти со растењето на n. Што би се случило ако сите функции φ_n се соберат? Може да се надеваме дека сумата би била непрекината во секоја точка и недиференцијабилна во точките од облик $x = \frac{k}{2^{n+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ќе ја формираме низата функции $\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x)$. Дел од графиците на првите две од оваа низа функции се претставени на Цртеж 2 (со црна боја) и Цртеж 3 (со зелена боја), соодветно. Со помош на Теоремата на Вајерштрас, која тврди дека монотоно растечка функција што е ограничена одозгора има граница, може да се докаже дека за секој реален број x постои $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$.



Цртеж 2. График на $\Phi_1(x)$.

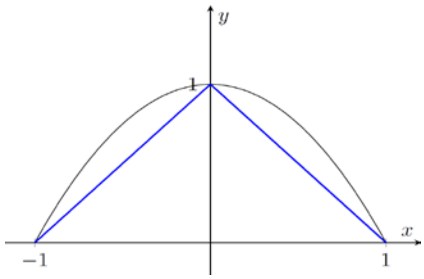


Цртеж 3. График на $\Phi_2(x)$.

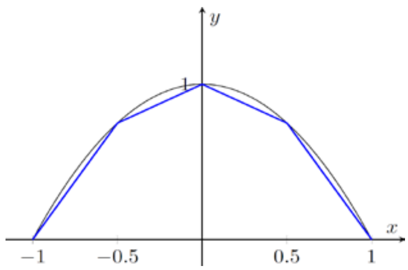
Доказот за тоа дека функцијата $\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ е непрекината, како и доказот за тоа дека функцијата нема извод во ниедна точка од реалната права ќе ги изоставиме.

Недиференцијабилноста на функцијата во ниедна точка од реалната права на прв поглед може да изгледа очигледна, доколку се има предвид дека со растењето на n, множествата точки во кои функциите Φ_n се недиференцијабилни стануваат сè погусти и погусти, па некако природно е да се очекува дека множеството точки на недиференцијабилност на функцијата $\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ ќе биде целата реална права. Сепак, ова е уште еден пример кој укажува дека очигледното може да нè доведе до наивни расудувања.

Дека очекување како претходното може да нè доведе до погрешни заклучоци, може да се види од следниот пример. Функцијата $G(x)$ е дадена со $G(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x)$, каде што функциите G_1, G_2 се покажани на Цртеж 4 и Цртеж 5, соодветно. Сега е очигледно дека $G(x)=1-x^2$, којашто е диференцијабилна во секоја точка.



Цртеж 4. Функцијата $G_1(x)$.



Цртеж 5. Функцијата $G_2(x)$.

По откривањето на непрекинати функции кои се недиференцијабилни во ниедна точка од реалната права, се покажало дека всушност таквите функции се правило, дека нив, на некој начин, ги има многу повеќе од сите други непрекинати функции кои имаат извод во барем една точка. Имајќи предвид дека визуелно не можеме да си ги претставиме непрекинатите функции кои се недиференцијабилни во ниедна точка, може да сметаме дека математиката дава уште еден доказ дека тоталната стварност е многу, многу поголема од нашата визуелна стварност.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. T. Bell, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb, 1972.

[2] Jamblih, *Pitagorin život*, Dereta Beograd, 2012.

[3] Н. Я. Виленкин, *Раскази о множествах*, МЦНМО Москва 2003.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: ljupcona@pmf.ukim.mk

[2] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Руѓер Бошковиќ 18, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: bibanmath@gmail.com

Примен: 31.01.2018
Поправен: 04.03.2018
Одобрен: 05.03.2018

Објавен на интернет: 28.08.2018