МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Математичка такмичења средњошколаца

1996/1997.

БЕОГРАД 1997.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Редактори:

Др Владимир Драговић и др Павле Младеновић

Обрада:
Др Владимир Драговић

Београд 1997.

Републичка комисија за такмичење из математике
за ученике средњих школа
шк. 1996/1997

1. Анић Иван, Математички факултет у Београду
2. Арсеновић др Милош , Математички факултет у Београду
3. Ацкета др Драган, Природноматематички факултет у Новом Саду
4. Блажић др Новица, Математички факултет у Београду
5. Божин Владимир, Математички институт САНУ
6. Вукмировић мр Јован, Математички факултет у Београду
7. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
8. Достанић др Милутин, Математички факултет у Београду
9. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ – **председник**
10. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет у Београду
11. Живковић др Миодраг, Математички факултет у Београду
12. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
13. Каделбург др Зоран, Математички факултет у Београду
14. Лаудановић Младен, Математички факултет у Београду
15. Миленковић мр Оливера, Математички факултет у Београду
16. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
17. Огњановић мр Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
18. Павловић Иван, професор гимназије Вук Караџић, Лозница
19. Перовић др Жикица, Филозофски факултет у Нишу
20. Петровић др Војислав, Прородно-математички факултет у Новом Саду
21. Радновић Милена, професор Математичке гимназије у Београду
22. Стевановић Драган, Филозофски факултет у Нишу
23. Тодоровић Раде, Математички факултет у Београду
24. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
25. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
26. Црвенковић др Синиша, Природно-математ. факултет у Новом Саду

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 01.02.1997.

Први разред

1. Наћи све парове (n, m) целих бројева за које важи

$$3n^2 + 2nm + 3 = m^2 + 10.$$

2. Нека су a и b произвољни природни бројеви, M њихов најмањи заједнички садржалац, D њихов највећи заједнички делилац. Доказати да је $a^n + b^n \leq M^n + D^n$, за свако $n \in N$.

3. Како се помоћу шестара и лењира дати угао од 7^0 може поделити на седам једнаких делова.

4. Багдадски калиф је наградио тројицу мудраца са 10 новчаника у којима је било: у првом 0 динара, у другом 1 динар, у трећем 2 динара, . . . , у десетом 9 динара. Први мудрац Хусеин Хуслија је узео два новчаника. Абдурахман и његов брат Омар су поделили преостале тако да Омар, као старији, добије више пара. Абдурахману су украли четири новчаника, тако да је њему остало 10 динара. Колико динара је добио Хусеин Хуслија у сваком новчанику?

5. Одредити најмањи природан број чији је производ цифара једнак 75600.

Други разред

1. Израчунати имагинаран део броја:

$$\frac{(1+i)^{96}}{2(1+i)^{92} + (1-i)^{90}}.$$

2. Нека је $f(x) = a - bx^2, \quad a, b \in R$. Решити једначину

$$f(f(x)) = x.$$

3. За које вредности параметра m једначина

$$mx^4 + (m+2)x^2 - 3m - 1 = 0$$

има један корен мањи од $-\sqrt{2}$ и три корена већа од -1?

4. Дате су четири некомпланарне тачке A, B, C, D. Нека су M и N средишта дужи AB и CD. Доказати да је

$$\frac{AC + BD}{2} > MN.$$

5. Наћи све целе бројеве x, y за које важи $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Трећи разред

1. Ако је $tg^2 x = 7 + 6ctgx$ и $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{12}\right)$, одредити $\sin x$.

2. За који природан број n, израз

$$\frac{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \ldots \cdot \log n}{10^n}$$

има најмању вредност? (log је ознака за логаритам са основом 10)

3. У троуглу ABC угао код темена B износи 120^0. Повучене су бисектрисе AA_1, BB_1, CC_1 његових унутрашњих углова. Одредити $\angle A_1B_1C_1$.

4. У скупу природних бројева, решити једначину

$$5^x + 2^{x+1}3^x = 3^{2x} + 2^{2x}.$$

5. Ако су у тетраедру $ABCS$ сви ивични углови код темена S прави, a, b, c дужине ивица SA, SB, SC, а h висина тетраедра која полази из темена S, доказати да је

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Четврти разред

1. Ако је $tg^2 x = 7 + 6ctgx$ и $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{12}\right)$, одредити $\sin x$.

2. Шумар се налази у шуми $2km$ од пута. Свој аутомобил је паркирао $5km$ од тачке на путу најближе месту на коме се налази. Ако се шумар креће брзином $3km/h$ кроз шуму и $4km/h$ путем, одредити путању којом би се кретао тако да најбрже стигне до свог аутомобила.

3. У троуглу ABC угао код темена B износи 120^0. Повучене су бисектрисе AA_1, BB_1, CC_1 његових унутрашњих углова. Одредити $\angle A_1B_1C_1$.

4. Да ли се у равни може распоредити n кругова једнаког полупречника, од којих сваки додирује тачно 3 од преосталих, ако је:

$$\text{(а) } n = 1996;$$
$$\text{(б) } n = 1997.$$

5. Решити једначину $2^{[x]} = 1 + 2x$ у скупу реалних бројева. ($[x]$ је највећи цео број који није већи од x)

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 15.02.1997.

Први разред

1. Ако је $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$, тада је

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4.$$

Доказати.

2. Познато је да је

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000,$$

при чему слова a, b замењују две непознате цифре. Које су то цифре?

3. У троуглу ABC симетрала угла CAB сече страницу BC у тачки N, а симетрала угла CBA сече страницу AC у тачки P, при чему је $PN = a$. Пресек симетрала AN и BP је Q. Тачка C припада кругу одређеном тачкама P, Q, N. Наћи површину троугла NPQ.

4. На колико начина се на осам поља првог реда шаховске табле могу поставити краљ, дама, два топа, два ловца и два коња тако да топови буду са разних страна краља и да један ловац буде на белом а други на црном пољу? Две фигуре истог типа (топови, ловци, коњи) међусобно се не разликују, а на једно поље се поставља једна фигура.

5. Дат је четвороугао $ABCD$ код кога је $AD \cong BC$ и $\angle DAB > \angle ABC$. Доказати да је $\angle BCD > \angle CDA$.

Други разред

1. Решити једначину $2^x - 3^y = 7$, у скупу целих бројева.

2. Основице једнакокраког трапеза $ABCD$ су $AB = 12cm$ и $CD = 3cm$. Дужи SC и SD, где је S средиште AB, секу редом дијагонале BD и AC у тачкама P и Q. Наћи величину дужи PQ.

3. За које вредности параметра a постоји јединствен пар реалних бројева (x, y) за који важи:
$$ax^2 + (3a+2)y^2 + 4axy - 2ax + (4-6a)y + 2 = 0?$$

4. У подне се чамац налази $20km$ јужно од глисера. Чамац се креће на исток брзином $20km/h$, а глисер на југ брзином $40km/h$. Да ли ће се путници на чамцу и глисеру међусобно видети ако је видљивост $10km$?

5. Дат је троугао ABD у коме је $\angle ABD = 120^0$, а на страници AD је одређена тачка C таква да је $AB = CD = 1$ и $\angle ABC = 90^0$. Наћи AC.

Трећи разред

1. Одредити углове троугла, ако су њихови тангенси цели бројеви.

2. Решити једначину
$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

3. Трапез је описан око круга. Доказати да бар једна његова дијагонала образује са основицом угао од највише 45^0.

4. У равни је дат квадрат $ABCD$ странице a. Права p сече AB у тачки M а BC у тачки N. Њој паралелна права q сече странице AD и CD у тачкама P и Q. Ако је одстојање између правих p и q једнако a, израчунати угао између правих NP и MQ.

5. Нека за природне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ важи
$$x_1! + x_2! + \cdots + x_n! = y! \quad (n \in N, n \geq 2).$$

Доказати да је тада $y \leq n$.

Четврти разред

1. Наћи све природне бројеве који су за 1997 већи од збира квадрата својих цифара.

2. Нека за природне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ важи

$$x_1! + x_2! + \cdots + x_n! = y!, \text{ где је } n \in N, n \geq 2.$$

Доказати да је тада $y \leq n$.

3. Дат је тангентни трапез $ABCD$ са основицама AB и CD, и нека је E пресек његових дијагонала. У троуглове ABE, BCE, CDE и DAE уписани су кругови са полупречницима r_1, r_2, r_3, r_4, респективно. Доказати:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

4. Нека је O центар уписаног круга троугла ABC са угловима α, β и γ. Ако важи

$$\cos\frac{\beta - \gamma}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2},$$

доказати да је $OA^2 = OB \cdot OC$.

5. Ако је α оштар угао, доказати да је

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5,7.$$

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
БЕОГРАД — 15. МАРТ 1997.

Први разред

1. Наћи пет реалних бројева чије су суме (по два) једнаке 0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 17.

2. Нека је $a = 123456789$ и $b = 987654321$.

1^0. Наћи $NZD(a,b)$.
2^0. Наћи остатак при дељењу броја $NZS(a,b)$ са 11.

3. Кружнице R_1 и R_2 секу се у тачкама A и B. Променљива права која пролази кроз тачку A сече по други пут кружницу R_1 у тачки P, а кружницу R_2 у тачки Q. Доказати да симетрале дужи PQ пролазе кроз једну утврђену тачку.

4. У равни су дате две утврђене тачке A и B. Наћи скуп свих тачака M, таквих да се при праволинијском кретању од M ка A растојање MB стално повећава.

Други разред

1. Нека су a и b реални бројеви тако да $a+b=2$. Докажи да

$$\min\{|a|,|b|\} < 1 < \max\{|a|,|b|\} \Leftrightarrow a \cdot b \in (-3,1).$$

2. Поља шаховске табле 8×8 нумерисана су бројевима $1,2,3,\ldots,64$. Играчи A и B играју игру у којој наизменично повлаче потезе, а у сваком потезу могу поставити један или неколико жетона на поља шаховске табле по следећем правилу: Играч који је на потезу бира поље шаховске табле на којем се не налази жетон и које је означено, на пример са n, а затим ставља по један жетон на изабрано поље и свако поље које је слободно и које је нумерисано бројем који није узајамно прост са n . На почетку, на табли нема жетона, први потез има играч A, а побеђује играч који последњи стави жетон. Који играч може да победи у овој игри независно од игре противника? Одредити победничку стратегију.

3. Скупштина има 500 посланика и распоређује S динара у буџету на 50 ставки. Сваки посланик предаје свој предлог по ставкама, тако да сума по ставкама не буде већа од S. Скупштина утврђује сваку ставку као број који није већи од предлога бар K посланика за ту ставку. Које је најмањи K које гарантује да сума тако добијених ставки не буде већа од S.

4. Дат је $\triangle ABC$ са угловима $\angle B = 50^0, \angle C = 30^0$. Тачка M је унутар $\triangle ABC$ и задовољава $\angle MBC = 20^0, \angle MCB = 10^0$. Доказати да је $AM \perp BC$.

Трећи разред

1. Скупштина има 500 посланика и распоређује S динара у буџету на 50 ставки. Сваки посланик предаје свој предлог по ставкама, тако да сума по ставкама не буде већа од S. Скупштина утврђује сваку ставку као број који није већи од предлога бар K посланика за ту ставку. Које је најмањи K које гарантује да сума тако добијених ставки не буде већа од S.

2. Сандук облика квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$, који има димензије $AB = 1$, $BC = 1, AA_1 = 2$, лежи на доњој страни $ABCD$. У темену A налази се миш који може да се креће по бочним странама сандука и по горњој страни $A_1B_1C_1D_1$. У коју тачку на бочним или горњој страни сандука треба поставити парче сира, тако да је растојање миша од сира највеће могуће. (Растојање је најкраћи пут који миш треба да пређе крећући се по странама квадра.)

3. За природни број n означимо са $f(n)$ производ свих простих бројева мањих или једнаких од n. Доказати да за $n > 2$ важи $f(n) > n$.

4. Дат је $\triangle ABC$ са угловима $\angle B = 50^0, \angle C = 30^0$. Тачка M је унутар $\triangle ABC$ и задовољава $\angle MBC = 20^0, \angle MCB = 10^0$. Доказати да је $AM \perp BC$.

Четврти разред

1. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број k такав да је
$$\sqrt{k + 1996^n} + \sqrt{k} = \left(\sqrt{1997} + 1\right)^n.$$

2. Сандук облика квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$, који има димензије $AB = 1$, $BC = 1, AA_1 = 2$, лежи на доњој страни $ABCD$. У темену A налази се миш који може да се креће по бочним странама сандука и по горњој страни $A_1B_1C_1D_1$. У коју тачку на бочним или горњој страни сандука треба поставити парче сира, тако да је растојање миша од сира највеће могуће. (Растојање је најкраћи пут који миш треба да пређе крећући се по странама квадра.)

3. За које реалне параметре a систем

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ xyz=a \end{cases}$$

има реалних решења.

4. У равни је дато n разних кругова полупречника 1. Доказати да бар на једном од тих кругова постоји лук дужине барем $2\pi/n$ који не сече ни један од осталих кругова.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1. Дата једнакост је еквивалентна са $(n+m)(3n-m)=7$. Решавајући системе

$$\begin{cases} n+m=7 \\ 3n-m=1 \end{cases} \quad \begin{cases} n+m=1 \\ 3n-m=7 \end{cases} \quad \begin{cases} n+m=-1 \\ 3n-m=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} n+m=-7 \\ 3n-m=-1 \end{cases}$$

Добијамо $(n,m)\in\{(2,5),(2,-1),(-2,1),(-2,-5)\}$.

1.2. $ab=M\cdot D\Rightarrow D=\frac{ab}{M}, \quad a\le M, \quad b\le M.$

$$M^n+D^n-a^n-b^n=M^n+\frac{a^nb^n}{M^n}-a^n-b^n=$$
$$\frac{M^{2n}+a^nb^n-a^nM^n-b^nM^n}{M^n}=$$
$$=\frac{M^n(M^n-a^n)-b^n(M^n-a^n)}{M^n}=\frac{(M^n-a^n)(M^n-b^n)}{M^n}\ge 0$$

1.3. $1^0=13\cdot 7^0-90^0$. Помоћу задатог угла од 7^0 конструишемо угао $\alpha=13\cdot 7^0$ и од њега одузмемо стандардно конструисан прав угао.

1.4. Абдурахман је добио бар 6 новчаника, јер 10 преосталих динара мора да буде у најмање два новчаника. Слично закључујемо да Омар мора да има бар два новчаника. Према томе он има тачно два, а - његов брат 6 новчаника, са не више од 16 динара укупно. Како сума пара у два од њих износи 10 динара, то Абдурахман има новчанике са $0,1,2,3,4,6$ динара. У Омаровим се налази 8 и 9 динара. Дакле Хусеин има новчанике са 5 и 7 динара.

1.5. Број $75600=7\cdot 5^2\cdot 3^3\cdot 2^4$ треба да представимо у облику производа што је могуће мање једноцифрених бројева. Три цифре су $7,5,5$. Имамо да је $3^3\cdot 2^4=6\cdot 9\cdot 8$ и не може се представити као производ две цифре $(9\cdot 9<3^3\cdot 2^4)$. Тражени број има цифре $7,5,5,6,9,8$ и то је 556789.

Други разред

2.1. $(1+i)^2=2i, \quad (1-i)^2=-2i.$

$$\frac{(2i)^{48}}{2\cdot(2i)^{46}+(-2i)^{45}}=\frac{2^{48}\cdot 1}{2\cdot 2^{46}\cdot(-1)-2^{45}i}=-\frac{2^{48}}{2^{47}+2^{45}i}=$$
$$=-\frac{2^3}{4+i}\cdot\frac{4-i}{4-i}=-\frac{8\cdot(4-i)}{16+1}=\frac{8i-32}{17}$$

Одговор: $\frac{3}{17}$.

2.2. $y = a - bx^2, \quad x = a - by^2 \Rightarrow x - y = b(x - y)(x + y)$.

1) $x - y = 0, \quad x = y \Rightarrow x = a - bx^2 \Rightarrow bx^2 + x - a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4ab}}{2b}$.

2) $x - y \neq 0, \quad x \neq y \Rightarrow x + y = 1/b \Rightarrow y = 1/b - x \Rightarrow 1/b - x = a - bx^2 \Rightarrow bx^2 - x + (1/b - a) = 0$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4ab - 3}}{2b}.$$

2.3. Ако су y_1, y_2 решења једначине $f(y) = my^2 + (m+2)y - 3m - 1 = 0$, мора бити $0 < y_1 < 1, \quad 2 < y_2$, односно

1^0 $mf(1) < 0 \Leftrightarrow m(-m+1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$ или $m > 1$

2^0 $mf(2) < 0 \Leftrightarrow m(3m+3) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

3^0 $mf(0) > 0 \Leftrightarrow m(-3m-1) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 0$.

Следи да $m \in (-\frac{1}{3}, 0)$.

2.4. Нека је Q – средиште BC.

$$MN < NQ + QM = \frac{BD}{2} + \frac{AC}{2}.$$

2.5. $3|y \Rightarrow y = 3y_1^2$. $15x^2 - 63y_1^2 = 9$, т. ј. $5x^2 - 21y_1^2 = 3 \Rightarrow 3|x, \quad x = 3x_1, \quad 45x_1^2 - 21y_1^2 = 3, \quad 15x_1^2 - 7y_1^2 = 1$. Ова једначина нема решења јер $-y_1^2 = 1 + 3(2y_1^2 - 5x_1^2)$ а квадрат по модулу $3 \neq -1$.

Трећи разред

3.1. $tg^2 x = 7 + 6 \cdot ctgx \quad \Leftrightarrow \quad tg^3 x - 7tgx - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx \in \{3, -1, -2\}$.
За $x \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{12})$, $\quad tgx \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (1, +\infty)$, па је $tgx = 3$, и $x \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$.
$\Rightarrow \quad \sin x < 0$ и $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

3.2.

$$a_n = \frac{\log 2 \cdot \ldots \cdot \log n}{10^n}$$

$$a_n = \frac{\log n}{10} \cdot a_{n-1}$$

$$\log n < 10 \quad \Rightarrow \quad a_n < a_{n-1}$$

$$\log n = 10 \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1}$$

$$\log n > 10 \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n-1}$$

Дакле, низ a_n опада до члана са индексом $n = 10^{10} - 1$, а расте од члана са индексом $n = 10^{10}$. Према томе, најмању вредност достиже за те две вредности n.

3.3. Спољашњи угао код B је једнак углу $\angle ABB_1 = 60^0$. Зато су растојања тачке C_1 од правих CB и BB_1 једнака. Такође су растојања тачке C_1 од правих BC и CA једнака, јер је CC_1 бисектриса $\angle C$. Дакле, C_1 лежи на симетрали угла $\angle AB_1B$. Слично, A_1 је на бисектриси угла $\angle CB_1B$. Стога је

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1B + \angle BB_1C_1 = \frac{1}{2}\angle AB_1B + \frac{1}{2}\angle BB_1C = 90^0.$$

3.4. $5^x = (3^x - 2^x)^2$ па је 5^x потпун квадрат, дакле x је паран ($x = 2k$). Онда је $5^k = 3^x - 2^x = 3^{2k} - 2^{2k} = (3^k - 2^k)(3^k + 2^k)$, па бројеви $3^k - 2^k$ и $3^k + 2^k$ имају од простих фактора само петицу, т. ј. $3^k - 2^k = 5^a$ и$3^k + 2^k = 5^b$ за неке $a, b \in N_0$; $a < b$, т. ј. $a \leq b$. Стога је $3^k + 2^k \geq 5(3^k - 2^k)$, т. ј. (сређивањем) $6 \cdot 2^k \geq 4 \cdot 3^k$, т. ј. $\frac{3}{2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^k$, па је $k \leq 1$, односно $k = 0$ или $k = 1$. Непосредно се проверава да је само $k = 1$, т. ј. $x = 2$ рашење једначине.

3.5. Лема: У сваком правоуглом троуглу важи: $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Применимо лему на троуглове $\triangle SAD, \triangle SBC$, где је D подножје нормале из S на BC:

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle SAD: & \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{SD^2} \\ \triangle SBC: & \dfrac{1}{SD^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Четврти разред

4.1. Види решење задатка 3.1.

4.2.

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{5-x}{4}, \quad t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4}.$$

$t'(x) = 0$ за $x = \frac{6\sqrt{7}}{7}$. $t''(x) = \frac{4}{3\sqrt{(x^2+4)^3}}$, $\quad t''(\frac{6\sqrt{7}}{7}) > 0$ – минимум.

4.3. Види решење задатка 3.3.

4.4. а) Може. 499 група по четири круга се распореди у облку венца.

б) Не може. Број тачака додира би износио $\frac{1997\cdot 3}{2}$ (сваки круг има 3 тачке додира, али је свака двапут рачуната), што није цео број.

4.5. Прво се индукцијом показује да је $2^n > 2n+3$ за $n \geq 4$.

За $n = 4$ важи. Претпоставимо да важи за $n = k$. Докажимо да важи за $k = n+1$.

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2(2n+3) > 2(n+1)+3.$$

За $x \geq 4$ и $x = n+\alpha, \quad \alpha \in [0,1)$

$$2^{[x]} = 2^n > 2n+3 > 2(n+\alpha)+1 = 2x+1.$$

Даље $2x+1 = 2^{[x]} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$

Дакле: $[x] \in \{-1,0,1,2,3\}$. 1) $[x] = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$. 2) $[x] = 0 \Rightarrow x = 0$. 3) $[x] = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. 4) $[x] = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. 5)$[x] = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Значи, $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, $x = \frac{7}{2}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1.

$$a^2+b^2+(a+b)^2 = c^2+d^2+(c+d)^2 \Rightarrow$$
$$a^2+b^2+ab = c^2+d^2+cd \quad \Rightarrow$$
$$(a^2+b^2+ab)^2 = (c^2+d^2+cd)^2 \quad \Rightarrow$$
$$a^4+b^4+3a^2b^2+2a^3b+2ab^3 = c^4+d^4+3c^2d^2+2c^3d+2cd^3 \Rightarrow$$
$$2a^4+2b^4+6a^2b^2+4a^3b+4ab^3 = 2c^4+2d^4+6c^2d^2+4c^3d+4cd^3 \Rightarrow$$
$$a^4+b^4+(a+b)^4 = c^4+d^4+(c+d)^4.$$

1.2. 35! је дељив са 9 и са 11. Збир цифара (сем слова) је 132. Збир цифара на парним позицијама је 66. Збир цифара на непарним позицијама је 66.

$$9|a+b+132 \quad \Rightarrow a+b \in \{3,12\};$$
$$11|(a+66)-(b+66) \quad \Rightarrow a-b=0, a=b.$$

Једино решење је $a = b = 6$.

1.3. $\angle AQB = \angle PQN = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$. $\gamma = 180^0 - \angle PQN = 90^0 - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 60^0$. Q – пресек симетрала. $\angle PCQ = \angle QCN = 30^0 \Rightarrow PQ = QN \Rightarrow \angle QNP = \angle QPN$. $PN = a \Rightarrow PQ = QN = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow P(NPQ) = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

1.4. Два ловца могу се поставити на $4 \cdot 4 = 16$ начина. Ако су ловци постављени, онда се дама и два коња могу поставити на $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60$ начина. Ако су постављени ловци, дама и коњи, онда се на преостала три поља краљ и топови могу поставити само на један начин. На основу правила производа добијамо да је тражени број распореда једнак $16 \cdot 60 = 960$.

1.5. Ако је $ABCD$ конвексан, имамо следећа четири случаја: *1 случај.* $AD \parallel BC$. Тада је $ABCD$ паралелограм, па је $\angle BCD \cong \angle DAB$ и $\angle CDA \cong \angle ABC$, па тражена неједнакост одмах следи. *2 случај.* $AD \cap BC = S$, и тачка S се налази са исте стране праве AB као и тачке C, D. У троуглу $ABS, AS < BS$ јер $\angle ABS < \angle SAB \Rightarrow SD < SC$, јер је $SD = AS - AD$ и $SC = BS - BC \Rightarrow \angle DCS < \angle SDC$ (из троугла SDC) $\Rightarrow \angle BCD = 180^0 - \angle DCS > 180^0 - \angle SDC = \angle CDA$. *3 случај.* $AD \cap BC = S$, и S се налази са различите стране праве AB него тачке C, D. $\angle SAB = 180^0 - \angle DAB < 180^0 - \angle ABC = \angle ABS \Rightarrow SB < SA$ (из троугла ABS) $\Rightarrow SC = SB + BC < SA + AD + SD \Rightarrow \angle BCD > \angle CDA$ (из троугла CDS). *4 случај.* Слично, као у 2 и 3 се разматра и случај неконвексног четвороугла.

Други разред

2.1. Очигледно, $x, y \geq 0$ (због $2^x \geq 7$ је $x \geq 3$, а онда $3^y = 2^x - 7 \geq 1$ па је $y \geq 0$). Из $2^x = 3^y + 7 \equiv 1(mod3)$ за $y \geq 1$ имамо да је x-парно ($2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot 1^k = 2(mod3)$), а из $3^y = 2^x - 7$ имамо да је y-парно ($3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k \equiv 3 \cdot 1^k \equiv 3(mod8)$), док $2^x - 7 \equiv 1(mod8)$ за $x \geq 3$). Дакле, или је $y = 0$ (онда $x = 3$, $2^3 - 3^0 = 1$, или су x и y парни, но онда је $7 = 2^x - 3^y = (2^{x/2} - 3^{y/2})(2^{x/2} + 3^{y/2})$, одакле, пошто се ради о целим бројевима, $2^{x/2} + 3^{y/2} = 7$ и $2^{x/2} - 3^{y/2} = 1$. Када се овај систем реши, добија се $2^{x/2} = 4, 3^{y/2} = 3$, т. ј. $x = 4, y = 2, 2^4 - 3^2 = 7$.

2.2. $AB = a = 12, DC = b = 3, PQ = x, PQ \parallel AB \parallel CD$.

$$\frac{PQ}{AS} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{\frac{CA}{CQ}} = \frac{1}{1 + \frac{QA}{CQ}} = \frac{1}{1 + \frac{AS}{CD}}$$

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{a/2}{b}} \Rightarrow x = \frac{ab}{2b + a} = 2.$$

2.3. 1) $a = 0, \quad 2y^2 + 4y + 2 = 0$ решење $(x, -1)$. 2) $a \neq 0, \frac{D(x)}{4} = a(a-2)(y+1)^2, a(a-2) < 0 \Rightarrow y = -1, x = 3, 0 < a < 2$.

2.4. $d=\sqrt{(20t)^2+(20-40t)^2}=20\sqrt{t^2+(1-2t)^2}, t\geq 0$. Функција $f(t)=t^2+(1-2t)^2=5t^2-4t+1$ има минимум за $t=\frac{2}{5}:d(\frac{2}{5})=\sqrt{80}<10$. Најмање одстојање је $\sqrt{80}km$ и постиже се у $12h24'$, дакле видеће се путници.

2.5. Нека је E подножје висине из D на AB. $ABC\sim AED$. Означимо са $EB=y, AC=x\Rightarrow 1:y=x:1\Rightarrow y=\frac{1}{x}$. $DE=BE\cdot ctg\angle EDB=y\cdot ctg30^0=y\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{x}$. $AE^2+DE^2=AD^2\Rightarrow(1+\frac{1}{x})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2=(1+x)^2\Rightarrow(x+2)(x^3-2)=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Трећи разред

3.1. Бар један угао (нпр. α) је $\alpha\leq 60^0$, па је $tg\alpha\leq\sqrt{3}$, односно $tg\alpha=1$.

$$tg\alpha=tg(180^0-\beta-\gamma)=-tg(\beta+\gamma)=\frac{tg\beta+tg\gamma}{tg\beta tg\gamma-1},$$

$\Rightarrow tg\beta+tg\gamma=tg\beta\cdot tg\gamma-1\Rightarrow tg\gamma=1+\frac{2}{tg\beta-1}\Rightarrow\frac{2}{tg\beta-1}$ је цео број, па $tg\beta-1\in\{1,-1,2,-2\}$, т. ј. $tg\beta\in\{2,0,3,-1\}$. Случајеви $tg\beta=0$ и $tg\beta=-1$ отпадају, јер би тада имали $\beta=0$ односно $\beta=135^0$ (што је немогуће јер $\alpha=45^0$). Следи да су углови троугла:

$$arctg1=45^0,\quad arctg2,\quad arctg3.$$

3.2. Дата једначина се лако трансформише:

$$4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-4\cos^2\frac{x+y}{2}-1=0.$$

Означимо са $t=\cos\frac{x+y}{2}$, тада $4t^2-4\cos\frac{x-y}{2}t+1=0$. $D/4=4(\cos^2\frac{x-y}{2}-1)\geq 0\Rightarrow\cos^2\frac{x-y}{2}=1$.
1) $\cos\frac{x-y}{2}=1,\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$
2) $\cos\frac{x-y}{2}=-1,\cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$.
Одговор:

$$(\pm\frac{\pi}{3}+2(k+n)\pi;\pm\frac{\pi}{3}+2(k-n)\pi);$$
$$(\pm\frac{2\pi}{3}+\pi+2(k+n)\pi;\pm\frac{2\pi}{3}-\pi+2(k-n)\pi), k,n\in Z.$$

3.3. Приметимо да се краци AD и BC трапеза виде из центра O уписаног круга под правим углом, јер је O пресечна тачка симетрала унутрашњих углова трапеза. Ако би тврђење задатка било нетачно, тада би се основице трапеза виделе из пресечне тачке P његових дијагонала под оштрим углом, па би се краци видели под тупим, т. ј. P би се налазила унутар кругова са пречницима AD и BC. Ако су K и L средишта тих дужи имали би $PK < OK, PL < OL \Rightarrow PK + PL < OK + OL = KL$, што је у противречности са неједнакошћу троугла.

3.4. Транслирајмо квадрат $ABCD$ за вектор $\overrightarrow{DP}$. Нека је добијени квадрат $A'B'C'D'$, и нека су M' и N' тачке пресека праве p са $A'B'$ и $B'C'$. Угао између правих PN и MQ је једнак $\angle M'D'N'$. Ако са T означимо подножје нормале из D' на праву p имамо: $\triangle A'M'D' \cong \triangle TM'D'$ и $\triangle D'TN' \cong \triangle D'N'C'$. Дакле, $\angle M'D'N' = \frac{1}{2}\angle A'D'C' = 45^0$.

3.5. Претпоставимо да је $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n < y$. Тада је $x_n \leq y-1$, па је $x_1! + x_2! + \cdots + x_n! \leq n \cdot x_n!$,

$$y \cdot x_n! \leq y \cdot (y-1)! = y! = x_1! + x_2! + \cdots + x_n! \leq n \cdot x_n!,$$

па је $y \leq n$.

Четврти разред

4.1. Нека је то број x који има n цифара. $x \geq 10^{n-1}$, а збир квадрата цифара је мањи или једнак од $81n$. $10^{n-1} > 81n + 1997$ за $n \geq 5$ (индукција). $n \geq 4$ због $x \geq 1997 \Rightarrow n = 4$.

$$\overline{abcd} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1997.$$

Видимо да је $a = 1$ или $a = 2$ јер $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1000$. За $a = 1 \Rightarrow b = 9$ што је немогуће. $a = 2, 100b + 10c + d = b^2 + c^2 + d^2 + 1 \leq 244 \Rightarrow b \leq 2$. Случај $b = 2$ није могућ. Нека је $b = 1$. Тада $98 + 10c + d = c^2 + d^2, 98 > d^2, 10c \geq c^2 \Rightarrow b = 0$. $10c + d = c^2 + d^2 + 1 \Rightarrow 100 - 4(d^2 - d + 1)$ је потпун квадрат $\Rightarrow 24 - d(d-1)$ је потпун квадрат $\Rightarrow d = 5, \Rightarrow c = 3$ или $c = 7$ па су решења $x_1 = 2035$ и $x_2 = 2075$.

4.2. Види решење задатка 3.5.

4.3. Означимо полуобиме, односно површине $\triangle ABE, \triangle BCE, \triangle CDE, \triangle DAE$ са p_1, p_2, p_3, p_4 односно S_1, S_2, S_3, S_4. Како је $\frac{1}{r_i} = \frac{p_i}{S_i}$, то треба доказати $\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}$. Пре свега, $p_1 + p_3 = \frac{1}{2}(AB + BE + AE + CD + DE + CE) = \frac{1}{2}(AD + DE + AE + BC + CE + BE) = p_2 + p_4$ (овда смо користили да је $AB + CD = AD + BC$ јер $ABCD-$ тангентни). Сем тога је $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AE}{EC}$(заједничка висина из B)$= \frac{BE}{ED}$(сличност $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$)$= \frac{S_2}{S_3}$ и, слично, $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_4}{S_3}$.

Оба ова односа су, јошзбог сличности $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$, једнака $\frac{p_1}{p_3}$. Из $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{p_1}{p_3}$ добија се $\frac{p_1}{S_1} = \frac{p_3}{S_2}, \frac{p_1}{S_2} = \frac{p_3}{S_3}$, а из $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3}(S_2 = \sqrt{S_1 S_3})$ и $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_4}{S_3}(S_4 = \sqrt{S_1 S_3})$ добија се $S_2 = S_4$. Стога

$$\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_3}{S_2} + \frac{p_1}{S_2} = \frac{p_1 + p_3}{S_2} = \frac{p_2 + p_4}{S_2} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}.$$

4.4. Како је $\beta + \gamma = \pi - \alpha$, то је

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta - \gamma}{2} - \cos\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{r^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

т. ј. $OA^2 = OB \cdot OC$.

4.5. Доказаћемо оштрију неједнакост

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Најпре је

$$1 + \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 1 + \frac{2}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 1 + \frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 1 + 2 = 3,$$

а затим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} &= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \geq \frac{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}} \geq 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(неједнакост $\sin\alpha + \cos\alpha \geq 2\sqrt{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ следи из аритметичко-геометријске неједнакости, јер је $\sin\alpha, \cos\alpha \geq 0$). Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1. Нека су то бројеви $x < y < z < u < v$. Очигледно је $x + y = 0, x + z = 2, z + v = 14$ и $u + v = 17$. Како је $x + u = (x + z) - (z + v) + (u + v) = 5$, није тешко закључити да је $y + z = 4$. Решавањем добијеног система од пет једначина добијамо да је $x = -1, y = 1, z = 3, u = 6, v = 11$.

1.2. 1^0. a и b су дељиви са 9, такође $b - 8a = 9$ па је $NZD(a, b) = 9$. 2^0. $a = 11k + 5$, $b/9 = 109739369 = 11l + 3$, $ab/9 = NZS(a, b) = 11m + 4$. Остатак је 4.

1.3. Нека су A_1 и A_2 тачке дијаметрално супротне тачки на кружницама R_1 и R_2, редом. Тада је $\angle APA_1 = \angle AQA_2 = 90^0$, па је PA_1A_2Q правоугли трапез са основицама PA_1 и QA_2. Права s – симетрала крака PQ садржи средњу линију, одатле следи да пролази кроз тачку M – средину утврђене дужи A_1A_2. Ако A није између P и Q доказ је сличан.

1.4. Кружница са пречником AB и цела унутрашност. 1) $M \in K$. Тада је $\angle AMB \geq 90^0$. За $M' \in [AM]$ имамо $\angle BMM' > \angle BM'M$, $BM' > BM$. 2) $M \in GMT$. Тада је $\angle AMB > 90^0$. Претпоставимо да је $\angle AMB < 90^0$. Нека је B' нормална пројекција B на праву AM. Тада $B' \in pp[MA)$, па је $BB' < BM$. Дакле $M \notin GMT$. Остаје $\angle AMB \geq 90^0$, т.ј. $M \in K$.

Други разред

2.1. $\min\{|a|, |b|\} < 1 < \max\{|a|, |b|\} \Leftrightarrow |a| < 1 < |b|$ или $|b| < 1 < |a| \Leftrightarrow a^2 < 1 < b^2$ или $b^2 < 1 < a^2$. $(a^2 - 1)(b^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - (a^2 + b^2) + 1 < 0 \Leftrightarrow (ab)^2 - (4 - 2ab) + 1 < 0 \Leftrightarrow (ab + 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |ab + 1| < 2$. $-3 < ab < 1$.

2.2. Запишимо број 1 и све просте бројеве не веће од 64. То су бројеви: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 и њих има 19. Играч A побеђује ако у првом потезу изабере поље $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ и, сагласно правилима игре, стави жетон на свако поље чији је редни број дељив са 2, 3 или 5. У записаном низу преостаје 16 бројева, а сваким наредним потезом елиминише се тачно један од њих. Како је 16 паран број, играч A ће победити независно од даљег тока игре.

2.3. Претпоставимо да је $K = 490$. Поделимо посланике у 50 група по 10 посланика. Нека i-та група предлаже $S/49$ за сваку ставку осим i-те. Тада би за сваку ставку скупштина утврдила $S/49$, што је укупно

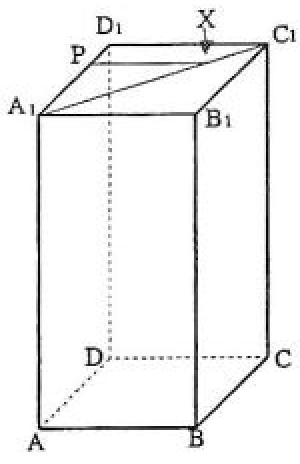
$\frac{50S}{49}$. Значи $K > 490$. Докажимо да је $K = 491$. Тада за сваку ставку, највише 9 посланика би предлагало мање њего што је усвојено. Дакле, највише 450 посланика би бар у једној ставци предложило мање од усвојеног, односно њих бар 50 би за сваку ставку предлагало не мање од усвојеног. То показује да збир усвојених ставки није већи од S.

2.4. Пресликајмо тачку M симетрично у односу на праву BC. Довољно је доказати $AM' \perp BC$. Конструишимо једнакостраничан $\triangle BM'D$ тако да се тачка D налази са различите стране праве BM' него A и C. Због $\angle BM'C = 150^0$ имамо да висина $\triangle BDM'$ лежи на правој CM', т. ј. D је симетрична слика од B при рефлексији у односу на праву CM'. Стога је $\triangle BDC$ једнакокрак са $\angle BDC = \angle DBC = 80^0$. Како је $\angle BAC = 100^0$, то је четвороугао $ABDC$ тетивни, па је $\angle BDA = \angle BCA = 30^0$, одакле следи да висина $\triangle BM'D$ лежи на правој AD, т. ј. да су тачке B и M' симетричне у односу на AD. Но $\angle BAD = \angle BCD = 20^0$ (тетиван $ABDC$), па је и $\angle DAM' = 20^0$, односно $\angle BAM' = 40^0$. Како је још $\angle ABC = 50^0$, то је $BC \perp AM'$ (из $\triangle BA_1A$, где је A_1 пресек BC и AM').

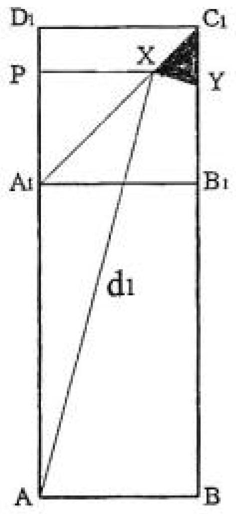
Трећи разред

3.1. Види решење задатака 3. за други разред.

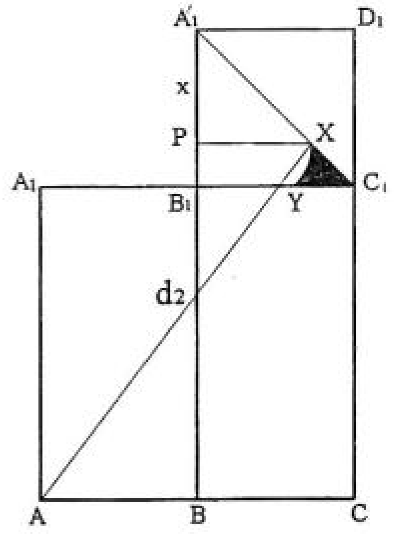
3.2. До сваке тачке на бочним странама сандука миш може да стигне прешавши пут не дужи од $2\sqrt{2}$. Осим тога најкраћи пут до темена C_1 има дужину $2\sqrt{2}$.



Сл. 1



Сл. 2



Сл. 3

Нека је X тачка на дијагонали A_1C_1, P нормална пројекција тачке X на A_1D_1 и $x = A_1P$. Размотримо следећа два случаја: 1) миш се ка тачки X креће преко страна ABB_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$ секући ивицу A_1B_1. 2) миш се ка тачки X креће преко страна ABB_1A_1, BCC_1B_1 и $A_1B_1C_1D_1$, секући ивице BB_1 и B_1C_1. Аналогно се разматрају кретања симетрична у односу на раван ACC_1A_1. Нека је d_1 најкраћи пут у случају 1), а d_2 најкраћи пут у случају 2), види слике 2 и 3. Тада је

$$d_1^2 = (2+x)^2 + x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$d_2^2 = (3-x)^2 + (1+x)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Приметимо да функција $d_1 = d_1(x)$ расте на интервалу $[0,1]$, а функција $d_2 = d_2(x)$ опада на интервалу $[0,1]$. Лако се проверава да је

$$d_1^2 = d_2^2 \Leftrightarrow (2+x)^2 + x^2 = (3-x)^2 + (1+x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

За $x = \frac{3}{4}$ добијамо тачку X_0, такву да је $C_1X_0 : X_0A_1 = 1 : 3$ и чије је растојање од темена A једнако $d_1 = d_2 = \frac{\sqrt{130}}{4}$. До тачака на дужи A_1X_0 миш стиже брже, ако се креће као у случају 1), а до тачака на дужи X_0C_1 стиже брже ако се креће као у случају 2). Приметимо још да је неједнакост $\frac{\sqrt{130}}{4} > 2\sqrt{2}$, тачна . Претпоставимо сада да на слици 2 тачке X и Y представљају пресек круга K са центром A и полупречником $r = \frac{\sqrt{130}}{4}$ са ивицама C_1D_1 и B_1C_1. Тачке криволинијског троугла C_1XY, где је XY лук круга K, без тачака лука XY, су оне тачке троугла $A_1B_1C_1$ до којих миш мора да пређе пут дужи од $\frac{\sqrt{130}}{4}$ ако се креће као у случају 1). Лако се проверава да до сваке од тих тачака миш може стићи прешавши пут краћи од $\frac{\sqrt{130}}{4}$ ако се креће као у случају 2), види слику 3. Аналогно се разматра троугао $A_1C_1D_1$. Одговор: Тражена тачка је тачка X_0 на дијагонали A_1C_1 таква да је $C_1X_0 : X_0A_1 = 1 : 3$ и њено растојање од темена A је $\frac{\sqrt{130}}{4}$.

3.3. Нека је n произвољни природни број већи од два. Тада је $f(n) - 1 = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p - 1$, (где је p највећи прост број $\leq n$) дељиво са неким простим бројем p' различитим од $2, 3, \ldots, p$. Због тога је $p' > n$. Дакле, $f(n) - 1 \geq p' > n$, одатле следи $f(n) > n + 1 > n$.

3.4. Види решење задатка 4. за други разред.

Четврти разред

4.1. Решавањем једначине $\sqrt{k+1996^n}+\sqrt{k}=(\sqrt{1997}+1)^n$ по k показаћемо да она има решење у скупу природних бројева. Ова једначина еквивалентна је редом са

$$\begin{aligned}\sqrt{k+1996^n}&=(\sqrt{1997}+1)^n-\sqrt{k},\\ k+1996^n&=(\sqrt{1997}+1)^{2n}-2\sqrt{k}(\sqrt{1997}+1)^n+k,\\ 2\sqrt{k}(\sqrt{1997}+1)^n&=(\sqrt{1997}+1)^{2n}-1996^n,\\ 2\sqrt{k}&=(\sqrt{1997}+1)^n-1996^n(\sqrt{1997}+1)^{-n},\\ 2\sqrt{k}&=(\sqrt{1997}+1)^n-(\sqrt{1997}-1)^n,\\ 2\sqrt{k}&=\sum\binom{n}{j}1997^{j/2}-\sum\binom{n}{j}1997^{j/2}(-1)^{n-j}.\end{aligned}$$

Ако је $n=2m$, онда је

$$\sqrt{k}=\sqrt{1997}\sum\binom{2m}{2i+1}1997^i,$$

а ако је $n=2m+1$, онда је

$$\sqrt{k}=\sum\binom{2m}{2i}1997^i.$$

(Друго решење) Постоје природни бројеви a и b такви да је

$$(1+\sqrt{1997})^n=a+b\sqrt{1997}.$$

За њих такође важи једнакост

$$(1-\sqrt{1997})^n=a-b\sqrt{1997}.$$

Множење ових двеју једнакости добијамо да је $(-1996)^n=a^2-1997b^2$. Ако је n непарно треба узети да је $k=a^2$, а ако је n парно треба узети да је $k=1997b^2$. Није тешко показати да ће у оба случаја дата једнакост бити задовољена.

4.2. Види решење задатка 2. за трећи разред.

4.3. Добијамо $xy+yz+zx=0$. Бројеви x,y,z су нуле полинома $P(t)=t^3-t^2-a$, $P'(t)=3t^2-2t, P'(t)=0\Leftrightarrow t=0$ или $t=2/3$. Тачка локалног минимума је $t = 2/3$ а локалног максимума је $t = 0$. Систем има реална решења ако је вредност локалног максимума ненегативна а вредност локалног минимума непозитивна. Дакле, $P(0) \geq 0; P(\frac{2}{3}) \leq 0$, т. ј. $-\frac{4}{27} \leq a \leq 0$.

4.4. Ако је $n = 1$, тврђење је очигледно. За $n > 1$, ако су центри ових кругова на једној правој, уочимо онај који је, по распореду на тој правој, "крајњи"(ма са које стране). Ако уочимо праву p нормалну на праву која садржи све центре и пролази кроз уочени центар, тада лук дужине π круга са уоченим центром који лежи у полуравни са ивицом p којој не припадају остали центри задовољава тврђење задатка ($\pi = \frac{2\pi}{2} \geq \frac{2\pi}{n}$). Ако центри ових кругова не припадају истој правој, уочимо конвексни омотач скупа центра, чији је руб m-тоугао ($m \leq n$) са теменима у неким од центара. Тада постоји теме O са највећим спољашним углом $\alpha \geq \frac{2\pi}{m} \geq \frac{2\pi}{n}$. Ако повучемо полупречнике OA и OB нормалне на ивице m-тоугла у спољашности, онда је лук AB коме не припада O управо дужине $\alpha \geq \frac{2\pi}{n}$ и не сече ни један од кругова (наиме, за сваку тачку лука AB најближи од центара није ближе тој тачки од најближе тачке конвексног m-тоугла, а то је O; сви остали центри су строго даљи).

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЗА ШКОЛСКУ 1997/1998. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... 07.02.1998.

Окружно такмичење .... 21.02.1998.

Републичко такмичење .... 14.03.1998.

Савезно такмичење .... 11.04.1998.

САДРЖАЈ