II РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Дадена е кружница k (0; 24 mm). Точката M е оддалечена од центарот O за 40 mm. Определи го најголемото и најмалото растојание од точката M до кружницата. Направи цртеж.

2. Дадени се множествата E={1, 2, 3}, F={4, 5, 6} и G={7, 8}. Утврди дали се вистинити следниве искази:

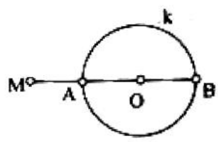
а) $G\times(E\cap F)=(G\times E)\cap(G\times F)$; б) $G\times(E\setminus F)=(G\times E)\setminus(G\times F)$.

3. Збирот на шест последователни природни броеви е 1287. Кои се тие броеви?

4. Колку ламарина е потребно да се направи олук во форма на квадар чии димензии се 12 cm, 2 dm и 3 dm?

V одделение

1. Најблиската и најодалечената точка на кружницата од точката M се точките A и B, во кои правата MO ја сече кружницата. $\overline{MA}=\overline{MO}-\overline{AO}$; $\overline{MA}=40-24=16$ mm
$\overline{MB}=\overline{MO}+\overline{OB}=40+24=64$ mm.



2. Дадени се множествата: E={1, 2, 3}, F={4, 5, 6} и G={7, 8}.

а) $E\cap F=\varnothing$; $G\times(E\cap F)=\{7, 8\}\times\varnothing=\varnothing$;
$G\times E=\{7,8\}\times\{1, 2, 3\}=\{(7, 1); (7, 2); (7, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3)\}$
$G\times F=\{7, 8\}\times\{4, 5, 6\}=\{(7, 4); (7, 5); (7, 6); (8, 4); (8, 5); (8, 6)\}$
$(G\times E)\cap(G\times F)=\varnothing$.

б) $E\setminus F=\{1, 2, 3\}\setminus\{4, 5, 6\}=\{1, 2, 3\}$
$G\times(E\setminus F)=\{7, 8\}\times\{1, 2, 3\}=\{(7, 1); (7, 2); (7, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3)\}$
$(G\times E)\setminus(G\times F)=\{(7, 1), (7, 2), (7, 3), (8, 1), (8, 2), (8, 3)\}$.

Според тоа двете равенства се точни.

3. $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)=1287$;
$6x+15=1287$;
$6x=1287-15=1272$;
$x=1272:6=212$.

Тие броеви се: 212, 213, 214, 215, 216, 217.

4. Бараната ламарина претставува обвивката на олук во форма на квадар. Плоштината M=2(ac+bc). Бидејќи a=12cm, b=20cm, c=300cm, имаме:

$$M=2(12\cdot300+20\cdot300)=19200\text{cm}^2=192\text{ dm}^2.$$

VI одделение

1. Еден автомобил за 3 часа поминал 320 km. Првиот час поминал 0,325 од овој пат, а вториот час 0,75 од преостанатиот дел од патот. Колкав пат поминал автомобилот третиот час ?

2. Две отсечки со заедничка внатрешна точка се поделени така што поголемиот дел на првата отсечка два пати е поголем од поголемиот дел на втората отсечка, а помалиот дел на другата отсечка три пати е поголем од помалиот дел на првата отсечка. Првата отсечка е за 3 cm подолга од втората. Колку се долги тие две отсечки ако помалиот дел од првата отсечка за 2 cm е покус од помалиот дел на втората отсечка ?

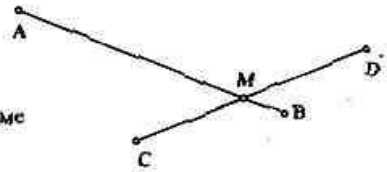
3. Сашко, Јован и Биљана заработиле заедно 4000 денари. Заработувачките на Сашко и Јован се однесуваат како $7\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}$. Биљана заработила $\frac{13}{30}$ од Сашковата заработувачка. Колку заработил секој од нив ?

4. Над кракот на рамнокрак триаголник конструиран е рамностран триаголник. Периметарот на така добиената фигура е 26 cm. Одреди ги страните на тие триаголници, ако кракот на рамнокракиот триаголник е за 2 cm подолг од неговата основа.

VI одделение

1. Првиот час автомобилот поминал $320\cdot 0{,}325=104$ km, вториот $(320-320\cdot 0{,}325)\cdot 0{,}75=$ $=162$ km, а третиот час $320-(104+162)=54$ km.

2. Од условот на задачата имаме: $\overline{AM}=2\overline{CM}$; $\overline{DM}-\overline{BM}=2$ cm;



$\overline{DM}=3\overline{BM}$; $\overline{AB}-\overline{CD}=3$ cm. Од $\overline{DM}=3\overline{BM}$ и
$\overline{DM}-\overline{BM}=2$ *следи* $3\overline{BM}-\overline{BM}=2$; $2\overline{BM}=2$;
$\overline{BM}=1$ cm и $\overline{DM}=3$ cm.
$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AM}+1=2\overline{CM}+1$
$\overline{CD}=\overline{CM}+\overline{MD}=\overline{CM}+3$. Од $\overline{AB}-\overline{CD}=3$ имаме
$2\overline{CM}+1-(\overline{CM}+3)=3\Rightarrow\overline{CM}=3+3-1=5$ cm.
$\overline{AB}=2\cdot 5+1=11$ cm. $\overline{CD}=5+3=8$ cm.

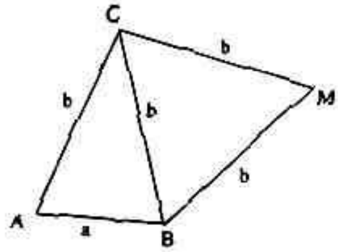
3. Ако С, Ј и Б се првите букви на имињата на Сашко, Јован и Биљана, тогаш нивните заработувачки се: $C:J=7\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}$. Со користење на својствата на пропорција, истата ја заменуваме со: $C:7\frac{1}{2}=J:1\frac{3}{4}=k$; $C:7\frac{1}{2}=k$ т.е. $C=\frac{15}{2}k$; $J:1\frac{3}{4}=k$ т.е. $J=\frac{7}{4}k$.

Биљана ќе заработи $\frac{13}{30}$ од заработувачката на Сашко т.е. $Б=\frac{13}{30}\cdot\frac{15}{2}k=\frac{13}{4}k$.

Бидејќи тие вкупно заработиле 4000 денари, тогаш $\frac{15}{2}k+\frac{7}{4}k+\frac{13}{4}k=4000$, од каде добиваме $\frac{50}{4}k=4000$; $k=320$. Сашко заработил $\frac{15}{2}\cdot 320=2400$ *денари*.

Јован заработил $\frac{7}{4}\cdot 320=560$ денари.

Биљана заработила $\frac{13}{4}\cdot 320=1040$ денари.



4. Бараната фигура е *четириа*голникот АВМС чии периметар е: $L=a+3b=26$.
Бидејќи $b=a+2$, тогаш: $a+3(a+2)=26$;
$a+3a+6=26$;
$4a=20$;
$a=5$ cm и $b=7$ cm.

VII одделение

1. Една пумпа за вода дава $72m^3$ вода за 4 часа и 12 минути. За колку време ќе даде 2140 m^3 вода?

2. Дадени се полиномите: $A=2x^2-3x+4$; $B=x^2-2x-3$; $c=3x^2-8x+5$. Одреди ја вредноста на x ако $2A-B-C=0$.

3. Да се конструира трапез ако збирот од основите $a+b=12$, висината $h=5$ cm и аглите на поголемата основа се $\alpha=75^\circ$ и $\beta=45^\circ$.

4. Во рамнокрак триаголник основата е $\frac{4}{7}$ од кракот. Ако секоја од страните на триаголникот се зголеми за $\frac{1}{7}$ од кракот, периметарот на новодобиениот триаголник ќе биде 42 cm. Одреди ги страните на тој триаголник.

VII одделение

1. I начин: Ако за $4\frac{1}{5}$ часа пумпата дава 72 m^3 вода, тогаш за 1 час ќе даде $72 : 4\frac{1}{5} = 17\frac{1}{7}$ m^3, а 2140 m^3 вода ќе даде за $2140:17\frac{1}{7} = 124\frac{5}{6}$ часа, т.е. за *124* часа и *50* минути.

II начин: Задачата може да се реши и со примена на пропорција.

$\uparrow$ 72 m^3	$\uparrow$ 4 часа 12 мин.
2140 m^3	x часа

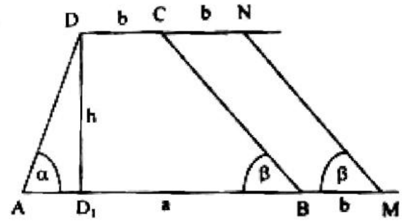
$$x:4\frac{1}{5}=2140:72;\quad x=\frac{2140\cdot 4\frac{1}{5}}{72}=124 \text{ часа и } 50 \text{ мин.}$$

2. Ако дадените полиноми ги замениме во условот, ќе добиеме:

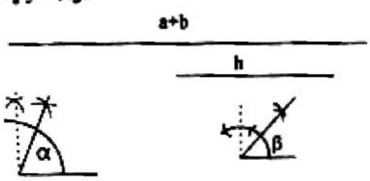
$$2(2x^2-3x+4)-(x^2-2x-3)-(3x^2-8x+5)=0 \Leftrightarrow 4x^2-6x+8-x^2+2x+3-3x^2+8x-5=0 \Leftrightarrow 4x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

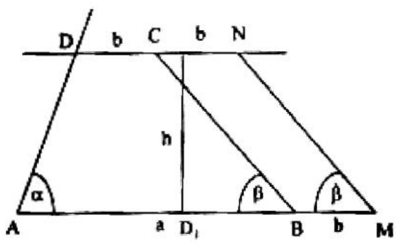
3. I - решение:

Анализа: Да претпоставиме дека задачата е решена т.е. дека трапезот ABCD е конструиран. На правите AB и DC ги определуваме точките M и N, така што $\overline{BM}=\overline{CN}=b$. На тој начин е добиен трапезот ABCD, за кој е познато : $\overline{AM}=a+b$, $\angle DAB=75^0$, $\angle NMB=45^0$ и $\overline{DD_1}=h$, т.е. трапезот може да се конструира. Темето C е на средина на страната DN, а темето B ќе го добиеме како пресек на правата AM и правата повлечена низ темето C паралелна со правата MN .



Конструкција :



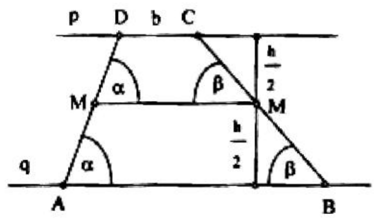


Во точките A и M на отсечката $\overline{AM}=a+b$ ги конструираме аглите α и β, а од произволна точка D_1 на AM повлекуваме нормала на која ја нанесуваме висината h. Од крајната точка на висината повлекуваме права паралелна со AM која ги сече крациите на аглите α и β во точките D и N. На средината на DN е точката C, низ која повлекуваме права паралелна со кракот MN, што ја сече правата AM во точката B.

Доказ: Елементите на трапезот одговараат на конструкцијата.

II - решение:

Анализа: Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека трапезот ABCD е конструиран. Средната линија на трапезот $\overline{MN}=\frac{a+b}{2}$. Низ средните точки M и N на крациите на трапезот, конструирани се аглите α и β. Крациите на аглите ги сечат паралелните прави p и q, кои се на растојание на дадената висина. Пресечните точки се темиња на трапезот.



Конструкцијата изврши ја сам.

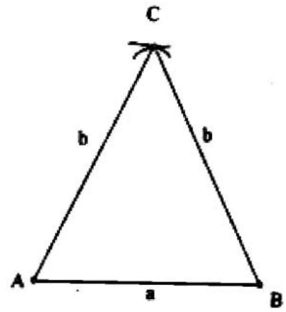
4. Нека a е основата, a b кракот на триаголникот, кои го задоволуваат условот $a=\frac{4}{7}b$. Ако a_1 и b_1 се страните на новиот триаголник, што се зголеми за $\frac{1}{7}$ од кракот b, тогаш $a_1=a+\frac{1}{7}b=\frac{4}{7}b+\frac{1}{7}b=\frac{5}{7}b$.

$b_1=b+\frac{1}{7}b=\frac{8}{7}b$. Периметарот на новиот траголник е:

$L=a_1+2b_1=42$ cm;

$\frac{5}{7}b+2\cdot\frac{8}{7}b=42$, од каде добиваме дека:

$3b=42$; $b=14$ cm и $a=\frac{4}{7}\cdot 14=8$ cm.



VIII одделение

1. Дадена е функцијата $y=(k-2)\cdot x+2\cdot x-5$. Определи го параметарот k така што:
а) графикот на функцијата да поминува низ точката $M(3,4)$;
б) за најдената вредност на k одреди ја плоштината на триаголникот што го образуваат графикот на функцијата и координатните оски.

2. Бројот 1440 реаздели го на три дела така што тие се однесуваат како 2:3:4.

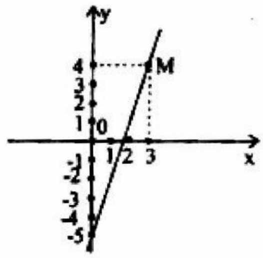
3. Конструирај квадрат што е еквивалентен на делтоид, чии дијагонали се долги $d_1=6$ cm, $d_2=7$ cm.

4. Во правоаголен триаголник ABC ($AC\perp BC$) со должина на страните a, b и c е впишана кружница со радиус r. Докажи дека $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.

VIII одделение

1. а) Ако ги замениме координатите на точката x=3 и y=4 во дадената функција, тогаш $4=(k-2)\cdot3+2\cdot3-5 \Leftrightarrow 3k=9 \Leftrightarrow k=3$.

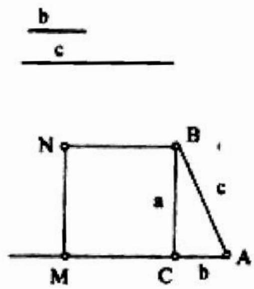
б) За k=3 функцијата е y=3x-5, чиј график е претставен на цртежот. Бараниот триаголник е правоаголен со катети b=5 и a за која $3a-5=0$, т.е. $a=\frac{5}{3}$. $P=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$.



2. Нека деловите a, b и c се со збир 1440, а a:b:c=2:3:4. Од дадената пропорција имаме $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$; a=2k; b=3k; c=4k. $2k+3k+4k=1440 \Leftrightarrow 9k=1440 \Leftrightarrow k=160$.

Деловите се: a=320, b=480 и c=640 .

3. Анализа: Бидејќи квадратот е еквивалентен со делтоидот, тоа значи дека неговата плоштина е: $P=\frac{d_1d_2}{2}=\frac{6\cdot7}{2}=21\,cm^2$. Страната a на квадраратот е катета на правоаголниот триаголник со хипотенуза 5 cm и катета 2 cm .



Конструкција: Конструираме правоаголен триаголник ABC со катета $\overline{AC}$=2cm и хипотенуза $\overline{AB}$=5 cm. Катетата a = $\overline{BC}$ е страна на бараниот квадрат BCMN .

Доказ: Квадратот BCMN е бараниот, бидејќи неговата плоштина е: $P=a^2=5^2-2^2=21\ cm^2$.

Дискусија: Задачата има единствено решение, бидејќи со хипотенузата c и катетата b (c>b) триаголникот ABC е еднозначно определен.

4. Нека a и b се катети, а c хипотенузата на правоаголниот триаголник. Бидејќи радиусот на кружницата е нормален на страната во допирната точка, следува четириаголникот CB_1OA_1 е квадрат со страна r. $\overline{AB_1}=b-r$ и $\overline{BA_1}=a-r$. Страните на триаголникот се тангенти на кружницата .

Според тоа: $\overline{AC_1}=\overline{AB_1}=b-r$;

$\overline{BC_1}=\overline{BA_1}=a-r$; $c=\overline{AC_1}+\overline{BC_1}=b-r+a-r$;

c=b+a-2r т.е. $r=\frac{a+b-c}{2}$.