

II РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Дадена е кружница k ($0; 24 \text{ mm}$). Точката M е оддалечена од центарот O за 40 mm . Определи го најголемото и најмалото растојание од точката M до кружницата. Направи цртеж.

2. Дадени се множествата $E=\{1, 2, 3\}$, $F=\{4, 5, 6\}$ и $G=\{7, 8\}$. Утврди дали се вистинити следниве искази:

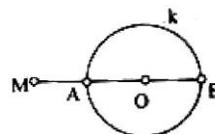
а) $G \times (E \cap F) = (G \times E) \cap (G \times F)$; б) $G \times (E \setminus F) = (G \times E) \setminus (G \times F)$.

3. Збирот на шест последователни природни броеви е 1287 . Кои се тие броеви?

4. Колку ламарина е потребно да се направи олук во форма на квадар чии димензии се 12 cm , 2 dm и 3 dm ?

V одделение

1. Најблиската и најоддалечената точка на кружницата од точката M се точките A и B , во кои правата MO ја сече кружницата. $\overline{MA} = \overline{MO} - \overline{AO}$; $\overline{MA} = 40 - 24 = 16 \text{ mm}$
 $\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB} = 40 + 24 = 64 \text{ mm}$.



2. Дадени се множествата: $E=\{1, 2, 3\}$, $F=\{4, 5, 6\}$ и $G=\{7, 8\}$.

а) $E \cap F = \emptyset$; $G \times (E \cap F) = \{7, 8\} \times \emptyset = \emptyset$;
 $G \times E = \{7, 8\} \times \{1, 2, 3\} = \{(7, 1); (7, 2); (7, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3)\}$
 $G \times F = \{7, 8\} \times \{4, 5, 6\} = \{(7, 4); (7, 5); (7, 6); (8, 4); (8, 5); (8, 6)\}$
 $(G \times E) \cap (G \times F) = \emptyset$.

б) $E \setminus F = \{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$
 $G \times (E \setminus F) = \{7, 8\} \times \{1, 2, 3\} = \{(7, 1); (7, 2); (7, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3)\}$
 $(G \times E) \setminus (G \times F) = \{(7, 1); (7, 2); (7, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3)\}$.

Според тоа двете равенства се точни.

3. $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) = 1287$;
 $6x + 15 = 1287$;
 $6x = 1287 - 15 = 1272$;
 $x = 1272 : 6 = 212$.

Тие броеви се: $212, 213, 214, 215, 216, 217$.

4. Бараната ламарина претставува обвивката на олук во форма на квадар. Плоштината $M = 2(ac + bc)$. Бидејќи $a = 12 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $c = 300 \text{ cm}$, имаме:
 $M = 2(12 \cdot 300 + 20 \cdot 300) = 19200 \text{ cm}^2 = 192 \text{ dm}^2$.

VI одделение

1. Еден автомобил за 3 часа поминал 320 km. Првиот час поминал 0,325 од овој пат, а вториот час 0,75 од преостанатиот дел од патот. Колкав пат поминал автомобилот третиот час ?

2. Две отсечки со заедничка внатрешна точка се поделени така што поголемиот дел на првата отсечка два пати е поголем од поголемиот дел на втората отсечка, а помалиот дел на другата отсечка три пати е поголем од помалиот дел на првата отсечка. Првата отсечка е за 3 cm подолга од втората. Колку се долги тие две отсечки ако помалиот дел од првата отсечка за 2 cm е покус од помалиот дел на втората отсечка ?

3. Сашко, Јоџан и Биљана заработиле заедно 4000 денари. Заработувачките на Сашко и Јован се однесуваат како $7\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}$. Биљана заработила $\frac{13}{30}$ од Сашковата заработувачка. Колку заработил секој од нив ?

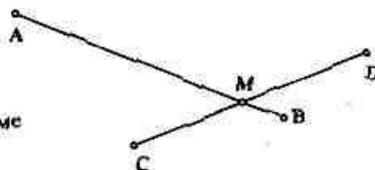
4. Над кракот на рамнокрак триаголник конструиран е рамностран триаголник. Периметарот на така добиената фигура е 26 cm. Одреди ги страните на тие триаголници, ако кракот на рамнокракиот триаголник е за 2 cm подолг од неговата основа.

VI одделение

1. Првиот час автомобилот поминал $320 \cdot 0,325 = 104$ km, вториот $(320 - 320 \cdot 0,325) \cdot 0,75 = 162$ km, а третиот час $320 - (104 + 162) = 54$ km.

2. Од условот на задачата имаме: $\overline{AM} = 2\overline{CM}$; $\overline{DM} - \overline{BM} = 2$ cm;

$\overline{DM} = 3\overline{BM}$; $\overline{AB} - \overline{CD} = 3$ cm. Од $\overline{DM} = 3\overline{BM}$ и $\overline{DM} - \overline{BM} = 2$ следи $3\overline{BM} - \overline{BM} = 2$; $2\overline{BM} = 2$; $\overline{BM} = 1$ cm и $\overline{DM} = 3$ cm.
 $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + 1 = 2\overline{CM} + 1$
 $\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD} = \overline{CM} + 3$. Од $\overline{AB} - \overline{CD} = 3$ имаме $2\overline{CM} + 1 - (\overline{CM} + 3) = 3 \Rightarrow \overline{CM} = 3 + 3 - 1 = 5$ cm.
 $\overline{AB} = 2 \cdot 5 + 1 = 11$ cm. $\overline{CD} = 5 + 3 = 8$ cm.



3. Ако C, J и B се првите букви на имињата на Сашко, Јован и Биљана, тогаш нивните заработувачки се: $C : J = \frac{1}{2} : \frac{3}{4}$. Со користење на својствата на пропорција, истата ја

заменуваме со: $C : \frac{1}{2} = J : \frac{3}{4} = k$; $C : \frac{1}{2} = k$ т.е. $C = \frac{15}{2}k$; $J : \frac{3}{4} = k$ т.е. $J = \frac{7}{4}k$.

Биљана ќе заработи $\frac{13}{30}$ од заработувачката на Сашко т.е. $B = \frac{13}{30} \cdot \frac{15}{2}k = \frac{13}{4}k$.

Бидејќи тие вкупно заработиле 4000 денари, тогаш $\frac{15}{2}k + \frac{7}{4}k + \frac{13}{4}k = 4000$, од каде добиваме $\frac{50}{4}k = 4000$; $k = 320$. Сашко заработил $\frac{15}{2} \cdot 320 = 2400$ денари.

Јован заработил $\frac{7}{4} \cdot 320 = 560$ денари.

Биљанка заработила $\frac{13}{4} \cdot 320 = 1040$ денари.

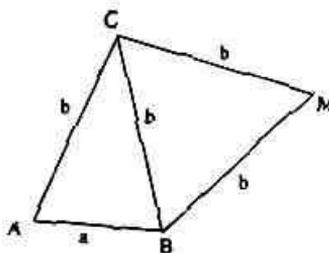
4. Бараната фигура е четириаголникот $ABMC$ чии периметар е: $L = a + 3b = 26$.

Бидејќи $b = a + 2$, тогаш: $a + 3(a + 2) = 26$;

$$a + 3a + 6 = 26;$$

$$4a = 20;$$

$$a = 5 \text{ cm и } b = 7 \text{ cm.}$$



VII одделение

1. Една пумпа за вода дава 72m^3 вода за 4 часа и 12 минути. За колку време ќе даде 2140m^3 вода?

2. Дадени се полиномите: $A=2x^2-3x+4$; $B=x^2-2x-3$; $C=3x^2-8x+5$. Одреди ја вредноста на x ако $2A-B-C=0$.

3. Да се конструира трапез ако збирот од основите $a+b=12$, висината $h=5\text{ cm}$ и аглиите на поголемата основа се $\alpha=75^\circ$ и $\beta=45^\circ$.

4. Во рамнокрак триаголник основата е $\frac{4}{7}$ од кракот. Ако секоја од страните на триаголникот се зголеми за $\frac{1}{7}$ од кракот, периметарот на новодобиениот триаголник ќе биде 42 cm. Одреди ги страните на тој триаголник.

VII одделение

I. I начин: Ако за $4\frac{1}{5}$ часа пумпата дава 72 m^3 вода, тогаш за 1 час ќе даде

$$72 : 4\frac{1}{5} = 17\frac{1}{7} \text{ m}^3, \text{ а } 2140\text{ m}^3 \text{ вода ќе даде за } 2140 : 17\frac{1}{7} = 124\frac{5}{6} \text{ часа, т.е. за } 124 \text{ часа и } 50$$

минути.

II начин: Задачата може да се реши и со примена на пропорција.

$$\frac{\uparrow 72 \text{ m}^3}{2140 \text{ m}^3} = \frac{\uparrow 4 \text{ часа } 12 \text{ мин.}}{x \text{ часа}}$$

$$x:4\frac{1}{5} = 2140:72; \quad x = \frac{2140 \cdot 4\frac{1}{5}}{72} = 124 \text{ часа и } 50 \text{ мин.}$$

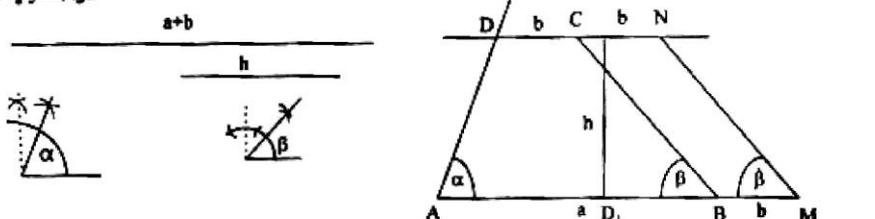
2. Ако дадените полиноми ги замениме во условот, ќе добиеме:

$$2(2x^2-3x+4)-(x^2-2x-3)-(3x^2-8x+5)=0 \Leftrightarrow 4x^2-6x+8-x^2+2x+3-3x^2+8x-5=0 \Leftrightarrow 4x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

3. I - решение:

Анализа: Да претпоставиме дека задачата е решена т.е. дека траpezот ABCD е конструиран. На правите AB и DC ги определуваме точките M и N, така што $\overline{BM} = \overline{CN} = b$. На тој начин е добиен траpezот ABCD, за кој е познато: $\overline{AM} = a + b$, $\angle DAB = 75^\circ$, $\angle NMB = 45^\circ$ и $\overline{DD_1} = h$, т.е. траpezот може да се конструира. Темето C е на средина на страната DN, а темето B ќе го добиеме како пресек на правата AM и правата повлечена низ темето C паралелна со правата MN.

Конструкција:



Во точките A и M на отсечката $\overline{AM} = a+b$ ги конструираме аглите α и β , а од произволна точка D_1 на AM повлекуваме нормала на која ја нанесуваме висината h. Од крајната точка на висината повлекуваме права паралелна со AM која ги сече краците на аглите α и β во точките D и N. На средината на DN е точката C, низ која повлекуваме права паралелна со кракот MN, што ја сече правата AM во точката B.

Доказ: Елементите на траpezот одговараат на конструкцијата.

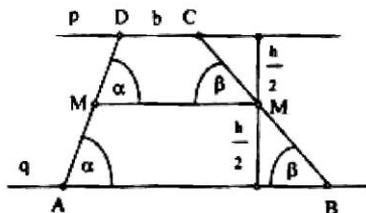
II - решение:

Анализа: Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека траpezот ABCD е конструиран.

Средната линија на траpezот $\overline{MN} = \frac{a+b}{2}$. Низ

средните точки M и N на краците на траpezот, конструирани се аглите α и β . Краците на аглите ги сечат паралелните прави p и q, кои се на растојание на дадената висина. Пресечните точки се темиња на траpezот.

Конструкцијата изврши ја сам.



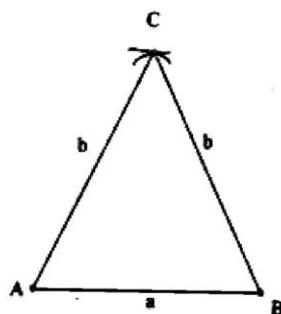
4. Нека a е основата, а b кракот на триаголникот, кој го задоволуваат условот $a = \frac{4}{7}b$. Ако a_1 и b_1 се страните на новиот триаголник, што се зголеми за $\frac{1}{7}$ од кракот b , тогаш $a_1 = a + \frac{1}{7}b = \frac{4}{7}b + \frac{1}{7}b = \frac{5}{7}b$.

$b_1 = b + \frac{1}{7}b = \frac{8}{7}b$. Периметарот на новиот траголник е:

$$L = a_1 + 2b_1 = 42 \text{ cm};$$

$$\frac{5}{7}b + 2 \cdot \frac{8}{7}b = 42, \text{ од каде добиваме дека:}$$

$$3b = 42; b = 14 \text{ cm и } a = \frac{4}{7} \cdot 14 = 8 \text{ cm}.$$



VIII одделение

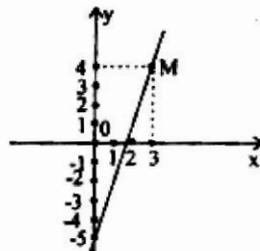
1. Дадена е функцијата $y=(k-2) \cdot x+2 \cdot x-5$. Определи го параметарот k така што:
 - а) графикот на функцијата да поминува низ точката $M(3,4)$;
 - б) за најдената вредност на k одреди ја плоштината на триаголникот што го образуваат графикот на функцијата и координатните оски.
2. Бројот 1440 реаздели го на три дела така што тие се однесуваат како 2:3:4.
3. Конструирај квадрат што е еквивалентен на делтоид, чии дијагонали се долги $d_1=6$ cm, $d_2=7$ cm.
4. Во правоаголен триаголник ABC ($AC \perp BC$) со должина на страните a , b и c е впишана кружница со радиус r . Докажи дека $r = \frac{a+b-c}{2}$.

VIII одделение

1. а) Ако ги замениме координатите на точката $x=3$ и $y=4$ во дадената функција, тогаш $4=(k-2) \cdot 3+2 \cdot 3-5 \Leftrightarrow 3k=9 \Leftrightarrow k=3$.

б) За $k=3$ функцијата е $y=3x-5$, чиј график е претставен на цртежот. Бараниот триаголник е правоаголен со катети $b=5$ и a за која

$$3a-5=0, \text{ т.е. } a=\frac{5}{3}, P=\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{6}$$



2. Нека деловите a, b и c се со збир 1440, а $a:b:c=2:3:4$. Од дадената пропорција имаме

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k; a=2k; b=3k; c=4k. 2k+3k+4k=1440 \Leftrightarrow 9k=1440 \Leftrightarrow k=160.$$

Деловите се: $a=320, b=480$ и $c=640$.

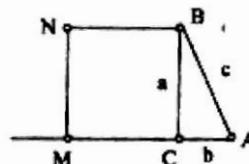
3. **Анализис:** Бидејќи квадратот е еквивалентен со делтоидот, тоа значи дека неговата плоштина е:

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cm}^2. \text{ Страната } a \text{ на квадратот}$$

е катета на правоаголниот триаголник со хипотенуза 5 cm и катета 2 cm.

Конструкција: Конструираме правоаголен триаголник ABC со катета $AC=2$ cm и хипотенуза $AB=5$ cm. Катетата $a=BC$ е страна на бараниот квадрат $BCMN$.

$$\frac{b}{c}$$



Доказ: Квадратот $BCMN$ е бараниот, бидејќи неговата плоштина е: $P=a^2=5^2-2^2=21 \text{ cm}^2$.

Дискусија: Задачата има единствено решение, бидејќи со хипотенузата c и катетата b ($c > b$) триаголникот ABC е еднозначно определен.

4. Нека a и b се катети, а c хипотенузата на правоаголниот триаголник. Бидејќи радиусот на кружницата е нормален на страната во допирната точка, следува четириаголникот CB_1OA_1 е квадрат со страна r . $AB_1 = b - r$ и $BA_1 = a - r$. Страните на триаголникот се тангенти на кружницата.

Според тоа: $AC_1 = AB_1 = b - r$;

$$BC_1 = BA_1 = a - r; c = AC_1 + BC_1 = b - r + a - r;$$

$$c = b + a - 2r \text{ т.е. } r = \frac{a + b - c}{2}$$

