

Шефкет Арсланагиќ
Сараево

НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Во оваа статија ќе го докажеме неравенството на Чебишев и ќе дадеме неколку интересни примени на истото.

Теорема (Чебишев). Ако за броевите $a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$ важи $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ или $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, тогаш е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i . \quad (1)$$

Ако за броевите $a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n$ важи $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ или $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, тогаш е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i . \quad (2)$$

Во равенствата (1) и (2) знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ или } b_1 = b_2 = \dots = b_n .$$

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ или $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Притоа за секои $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи неравенството

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \quad (*)$$

од каде што последователно следува:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j b_j \geq 0,$$

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n a_j + n \sum_{j=1}^n a_j b_j \geq 0,$$

$$2n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i ,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i,$$

што значи дека точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенствата (*) важи знак за равенство за $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, т.е. ако и само ако

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ или } b_1 = b_2 = \dots = b_n.$$

Неравенството (2) се докажува аналогно. Обиди се самостојно да го испишеш доказот. ♦

Пример 1. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 1$. Докажете го неравенството

$$\frac{1+a^2}{1-a^2} + \frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1+c^2}{1-c^2} \geq \frac{15}{4}.$$

Решение. Од $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$ имаме $a < 1, b < 1, c < 1$, па затоа $0 < a < 1, 0 < b < 1$ и $0 < c < 1$. Понатаму, даденото неравенство е симетрично во однос на a, b и c , па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $0 < a \leq b \leq c$. Имаме $a^2 \leq b^2 \leq c^2 < 1$, т.е.

$$1 + a^2 \leq 1 + b^2 \leq 1 + c^2 \text{ и } -a^2 \geq -b^2 \geq -c^2 > -1$$

што значи

$$1 - a^2 \geq 1 - b^2 \geq 1 - c^2 > 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{1-a^2} \leq \frac{1}{1-b^2} \leq \frac{1}{1-c^2}.$$

Сега од неравенството на Чебишев за $n = 3$ и од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{1+a^2}{1-a^2} + \frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1+c^2}{1-c^2} &= (1+a^2) \frac{1}{1-a^2} + (1+b^2) \frac{1}{1-b^2} + (1+c^2) \frac{1}{1-c^2} \\ &\geq \frac{1}{3} (1+a^2 + 1+b^2 + 1+c^2) \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (3+a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \left[3 + \frac{1}{3} (a+b+c)^2 \right] \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[3 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 \right] \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right) \\ &= \frac{10}{9} \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1+a^2}{1-a^2} + \frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1+c^2}{1-c^2} \geq \frac{10}{9} \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \right). \quad (3)$$

Сега ќе докажеме дека

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{27}{8}, \quad (4)$$

за $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Повторно од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3},$$

па затоа $-(a^2 + b^2 + c^2) \leq -\frac{1}{3}$, т.е.

$$3 - (a^2 + b^2 + c^2) \leq 3 - \frac{1}{3}$$

односно

$$1 - a^2 + 1 - b^2 + 1 - c^2 \leq \frac{8}{3},$$

што значи

$$\frac{1}{1 - a^2 + 1 - b^2 + 1 - c^2} \geq \frac{3}{8}. \quad (5)$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}, \text{ т.е. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z},$$

при $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$, $z = 1 - c^2$ и неравенството (5) имаме:

$$\frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - b^2} + \frac{1}{1 - c^2} \geq \frac{9}{1 - a^2 + 1 - b^2 + 1 - c^2} \geq 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{27}{8},$$

т.е. точно е неравенството (4).

Конечно, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\begin{aligned} \frac{1 + a^2}{1 - a^2} + \frac{1 + b^2}{1 - b^2} + \frac{1 + c^2}{1 - c^2} &\geq \frac{10}{9} \left(\frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - b^2} + \frac{1}{1 - c^2} \right) \\ &\geq \frac{10}{9} \cdot \frac{27}{8} = \frac{15}{4}, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = \frac{1}{3}$. Последното следува како од неравенството на Чебишев и фактот дека во неравенствата меѓу средините знак за равенство важи ако и само ако броевите се еднакви. ♦

Пример 2. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините, r_a, r_b, r_c се должините на радиусите на припишаните кружници и r е должината на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажете го неравенството

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq 9r. \quad (6)$$

Решение. За секој триаголник точни се равенствата

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad (8)$$

Понатаму, даденото неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$, од што следува $r_a \geq r_b \geq r_c$,

т.е. $\frac{1}{r_a} \leq \frac{1}{r_b} \leq \frac{1}{r_c}$ и $h_a \leq h_b \leq h_c$. Сега, од неравенството (1) на Чебишев и равенствата (7) и (8) следува

$$\begin{aligned} \frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} &= h_a^2 \frac{1}{r_a} + h_b^2 \frac{1}{r_b} + h_c^2 \frac{1}{r_c} \\ &\geq \frac{1}{3}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) \\ &= \frac{1}{3}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \\ &= \frac{1}{3r}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)^2$$

и ако замениме во неравенството (9) имаме:

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq \frac{1}{9r}(h_a + h_b + h_c)^2. \tag{10}$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

т.е.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9,$$

па затоа

$$\begin{aligned} h_a + h_b + h_c &= \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} = 2P\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= 2 \frac{r(a+b+c)}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9r. \end{aligned}$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (10) добиваме

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq \frac{1}{9r}(h_a + h_b + h_c)^2 \geq \frac{1}{9r}(9r)^2 = 9r.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

- Нека $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$ и $k > 0$. Докажете го неравенството

$$x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \dots + x_n^{k+1} \geq x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.$$

Кога важи знак за равенство?

- Нека $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството

$$\frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Кога важи знак за равенство?

3. Нека $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}.$$

Кога важи знак за равенство?

4. Докажете, дека ако $0 < a \leq b \leq c$, тогаш $a^{c-a} b^{a-b} c^{b-c} \leq 1$.
5. Нека α, β, γ се внатрешните агли, m_a, m_b, m_c се должините на тежишните линии и r е должината на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажете го неравенството

$$\frac{\cos \alpha}{m_a} + \frac{\cos \beta}{m_b} + \frac{\cos \gamma}{m_c} \leq \frac{1}{2r}.$$

Кога важи знак за равенство?

6. Нека α, β, γ се внатрешните агли, m_a, m_b, m_c се должините на тежишните линии, s е полупериметарот и r е должината на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажете го неравенството

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{m_a} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{m_b} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{m_c} \leq \frac{s}{3r^2}.$$

Кога важи знак за равенство?

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š. Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
2. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
3. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
4. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
5. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
6. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ