

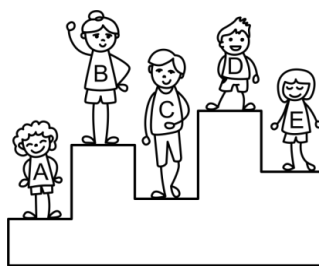
Ристо Малчески, Скопје
Марија Попоска, Охрид

ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

Во ова наше дружење ќе разгледаме поголем број елементарни логички и комбинаторни задачи, за кои што сметаме дека се погодни за подготовка на учениците за општинските и регионалните натпревари. Меѓутоа, истите може да се користат и во редовната настава сè со цел кај учениците да се унапредат квалитетите на мислењето.

Задача 1. На колку повисоко скалило се наоѓа тркачот на пртежот десно, толку подобар резултат има потигнато. Кој пристигнал трет на целта?

Решение. Со a, b, c, d, e да ги означиме височините на скалилата на кои се наоѓаат натпреварувачите A, B, C, D, E . Лесно се гледа дека $a < c < e < b < d$, што значи дека натпреварувачот E простигнал трет на целта.



Задача 2. На еден фудбалски турнир учествуваат 4 тимови. Секоја тим игра по еден натпревар со секој друг тим. Во секој натпревар, победникот добива 3 поени, додека губитникот добива 0 поени. Во случај на нерешен резултат, двата тима добиваат по 1 поен. Петар „математичарот“ му соопштил на Филип дека тој учествувал на турнирот и неговата екипа освоила 8 поени, на што Филип му рекол дека не ја говори вистината. Како Филип заклучил дека Петар лаже?

Решение. На турнирот учествувале 4 тимови и секој тим играл по еден натпревар со секој друг тим, што значи дека секој тим играл по 3 натпревари. Според тоа, тимот на Петар одиграл 3 натпревари и на секој од нив освоил 0, 1 или 3 поени. Бидејќи бројот 8 не може да се запише како збир на три броја, секој од кои е еднаков на 0, 1 или 3, Филип заклучил дека Петар лаже.

Задача 3. Бранко е 5 *cm* повисок од Арон, но 10 *cm* е понизок од Киро. Дарко е 10 *cm* повисок од Киро, но 5 *cm* е понизок од Емил. Кој од следниве искази е точен?

- 1) Арон и Емил се со еднакви височини
- 2) Арон е 10 *cm* повисок од Емил
- 3) Арон е 10 *cm* понизок од Емил
- 4) Арон е 30 *cm* повисок од Емил
- 5) Арон е 30 *cm* понизок од Емил

Решение. Висините на децата да ги означиме со малите први букви од нивните имиња. Од условот на задачата имаме

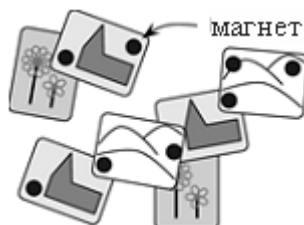
$$\begin{aligned}b &= a + 5, \\k &= b + 10, \\d &= k + 10, \\e &= d + 5.\end{aligned}$$

Според тоа, точни се следниве равенства

$$e = d + 5 = k + 15 = b + 25 = a + 30.$$

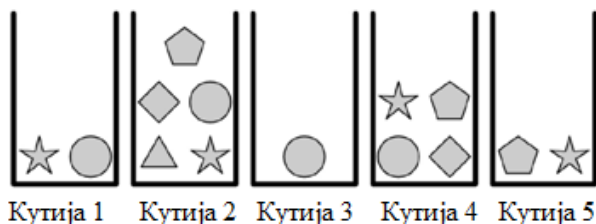
Оттука следува Арон е 30 *cm* понизок од Емил, што значи дека точен е исказот 5), а додека останатите искази не се точни.

Задача 4. На фрижидерот на Маја, 8 магнети држат неколку разгледници (цртеж десно). Колку најмногу магнети може да отстрани Маја, но така што ниту една разгледница да не падне на земја?



Решение. Од двата магнети кои ги држат двете одделени разгледници Маја може да отстрани 1 магнет. Потоа таа може да ги отстрани двата магнети кои се крано десно горе и едниот магнет кој е крајно лево долу. Значи, Маја може да отстрани вкупно $1+2+1=4$ магнети и нема да падне ниту една разгледница.

Задача 5. Софија сака да избере 5 различни форми од кутиите. Таа може да избере само една форма од секоја кутија.



Која форма таа мора да ја избере од кутијата 5?

Решение. Софија од третата кутија мора да го земе , па затоа од првата кутија мора да ја земе , а од петтата кутија мора да го земе . Според тоа, од четвртата кутија Софија мора да го земе  и од петтата кутија мора да го земе .

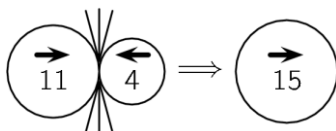
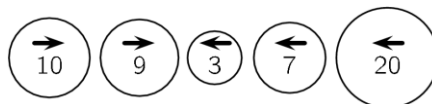
Задача 6. Бравата на велосипедот има четири тркалца нумерирани по ред со цифрите од 0 до 9.  Секое од четирите тркалца се ротира за 180° од положбата прикажана на цртежот десно и се добива бројот со кој се отклучува бравата. Кој е точниот број за отклучување на бравата на велосипедот?

Решение. Бидејќи на секое тркалце цифрите од 0 до 9 се наредени по ред, при ротација за 180° се добива цифра која е за 5 поголема (помала) од цифрата која се гледа. Така цифрите, гледајќи од лево кон десно се: $6-5=1$, $3+5=8$, $4+5=9$ и $8-5=3$. При отклучувањето изгледот на бројчаникот е прикажан на цртежот десно. 

Задача 7. Група девојки седи во круг. Марија е четврта од лево од Јана и седма од десно од Јана. Колку девојки има во групата?

Решение. Лево од Јана до Марија има 3 девојки, а десно од Јана до Марија има 6 девојки. Според тоа, во кругот има $3+6+1+1=11$ девојки.

Задача 8. Дадените 5 топки на цртежот почнуваат да се движат истовремено во насоките кои се дадени со нивните стрелки. Кога две топки

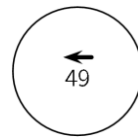


кои одат во спротивна насока ќе се судрат, поголемата топка ја проголта помалата топка и ја зголемува својата вредност за вредноста на помалата топка. Поголемата топка продолжува да се движи по нејзината почетна насока, како што е дадено на цртежот лево.

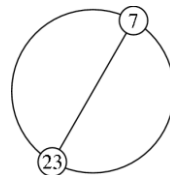
Кој е конечниот резултат од судирите на дадените 5 топки?

Решение. По првиот судар добиената топка се движи во десно и има вредност 12. По вториот судар добиената топка продолжува во десно и

има вредност 19. По третиот судар добиената топка продолжува во лево и има вредност 39. Конечно по четвртиот судар се добива топката која е прикажана на цртежот десно.



Задача 9. Сите природни броеви од 1 до n , во растечки редослед, се запишани на еднакво растојание околу кружница. Дијаметарот на кружницата минува низ точката која соодветствува на бројот 7 и низ точката која соодветствува на бројот 23 (цртеж десно). Кој е бројот n ?



Решение. На кружницата се означени n точки. Бидејќи точките означени со 7 и 23 се дијаметрално спротивни, бројот на точките е двапати поголем од разликата $23-7=16$. Според тоа, на кружницата се означени $n=2 \cdot 16=32$ точки.

Задача 10. Марионка сака да пресече парче конец на девет парчиња со иста должина, па затоа ги означува точките во кои треба да сече. Менче сака да го пресече истото парче конец на осум еднакви парчиња, па затоа и таа ги означува точките во кои треба да сече. На крајот Зоран го зел конецот и го пресекол во сите означени точки. Колку делови добил Зоран?

Решение. Марионка на на конецот означила 8 точки, а Менче означила 7 точки. Ако должината на конецот е еднаква на a , тогаш од почетокот до точките кои ги означила Марионак растојанијата се $\frac{ka}{9}$, $k=1,2,\dots,8$, а растојанијата до точките кои ги означила Менче се $\frac{ma}{8}$, $m=1,2,\dots,7$. Ако $\frac{ka}{9} = \frac{ma}{8}$, тогаш $k = \frac{9m}{8}$, што не е можно бидејќи $\text{NZD}(8,9)=1$ и $m \leq 7$. Значи, на конецот се означени $8+7=15$ точки, кои истиот го делат на 16 делови. Конечно, Зоран добил 16 делови.

Задача 11. Свонко има две машини: едната разменува 1 бел жетон за 4 црвени жетони, додека другата разменува 1 црвен жетон за 3 бели жетони. Свонко има 4 бели жетони. По точно 11 размени, тој има 31 жетон. Колку од нив се црвени?

Решение. Нека Свонко x пати заменил бел жетон и y пати заменил црвен жетон. Тогаш $x+y=11$ и како при замена на бел жетон бројот на жетоните се зголемува за 3, а при замена на црвен жетон бројот на жетоните се зголемува за 2, добиваме $4+3x+2y=31$, т.е. $3x+2y=27$. Оттука лес-

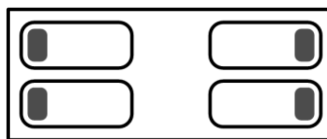
но наоѓаме $x=5$ и $y=6$. На почетокот имаме само бели жетони, па затоа на крајот бројот на црвените жетони ќе биде $5 \cdot 4 - 6 = 14$.

Задача 12. Ана на масата поставила три чинии со прибор како на цртежот десно. Нејзината мајка побарала покрај секоја чинија да има нож на десната страна и виљушка на левата страна од чинијата. Колку најмалку промени на местата на ножевите и виљушките треба да направи Ана, за да ги подреди според барањата на мајка ѝ?



Решение. Забележуваме дека Ана ставила два ножа на лева и две виљушки на десна страна. Оттука следува дека потребни се две и повеќе преместувања. Ако Ана, прво ги замени местата на десната виљушка на првата чинија и левиот нож на втората чинија, а потоа ги земени местата на ножот и вилупката на третата чинија, тогаш таа приборот ќе го подреди според барањата на нејзината мајка. Значи, доволни се две преместувања.

Задача 13. На левата страна од собата, Марија и Мери спијат со лицата свртени една кон друга. На десната страна од собата, Кате и Кристина спијат свртени една на друга со грб. Колку девојчиња спијат така што нивното десно уво ја допира перницата?



Решение. Девојчето во левиот горен агол спие така што нејзиното десно уво ја допира перницата, а девојчето во долниот лев агол перницата ја допира со левото уво. Девојчето во горниот десен агол спие така што нејзиното десно уво ја допира перницата, а девојчето во долниот десен агол перницата ја допира со левото уво. Според тоа, две девојчиња спијат така што нивното десно уво ја допира перницата.

Задача 14. Едно од петте деца: Алек, Бојан, Ведран, Горјан и Дејан го изело колачето од масата.

Алек рекол: „Јас не го изедов колачето.“

Бојан рекол: „Јас го изедов колачето.“

Ведран рекол: „Дејан не го изеде колачето.“

Горјан рекол: „Јас не го изедов колачето.“

Дејан рекол: „Алек го изеде колачето.“

Само едно од децата излагало. Кој го изел колачето?

Решение. Изјавите на Алек и Дејан се противречни, па затоа не е можно и двете да се вистинити. Според тоа, едно од децата Алек или Дејан излагало.

Ако Алек излагал, тогаш тој го изел колачето. Но, тогаш Бојан исто така излагал, што противречи на условот дека само едно дете излагало.

Ако Дејан излагал, тогаш Алек не го изел колачето, што значи дека тој ја говори вистината. Но, само едно дете излагало, па затоа Бојан, Ведран и Горјан ја говорат вистината, од каде заклучуваме дека колачето го изел Бојан.

Задача 15. Кралицата сака да го открие името на сопругата на Румпел. Таа ја прашала сопругата:

„Дали твоето име е Адел Лили Клео?“

„Дали твоето име е Адел Лаура Кора?“

„Дали твоето име е Аби Лаура Клео?“

Секој пат точно едно име и неговата позиција се точни. Како се вика сопругата на Румпел?

Решение. Ако е точно името Адел, тогаш бидејќи едно име и неговата позиција се точни, заклучуваме дека не се точни Лили и Лаура, што не е можно. Значи, точно е името Аби. Сега, не е точно името Лаура, што значи дека е точно името Лили. Понатаму, не е точно името Клео, што значува дека е точно името Кора.

Конечно, сопругата на Румпел се вика Аби Лили Кора.

Задача 16. Лав се наоѓа во едната од трите соби. На вратата на првата соба пишува „Лавот е тука“. На врата на втората соба пишува „Лавот не е тука“. На вратата на третата соба пишува „ $2 + 3 = 2 \times 3$ “. Од трите реченици напишани на вратите само една е вистинита.

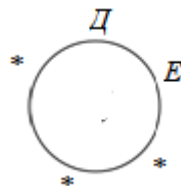
Во која соба е лавот?

Решение. Ако лавот е во првата соба, тогаш тој не е во втората соба, па затоа имаме две вистинити реченици, што противречи на условот на задачата дека само една реченица е вистинита. Ако лавот е во втората соба, тогаш тој не е во првата соба и како третата реченица не е вистинита, добиваме дека ниту една од трите реченици не е вистинита, што повторно противречи на условот на задачата. Ако лавот е во трета соба, тогаш вистинита е втората реченица, а не се вистинити првата и третата реченица, т.е. условот на задачата е задоволен.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека лавот е во третата соба.

Задача 17. Ана, Боби, Кате, Дени и Елена седат на тркалезна маса. Ана не седи до Боби, Дени седи до Елена, а Боби не седи до Дени. Кои две деца седат до Кате?

Решение. Дени и Елена седат еден до друг, па како Боби не седи до Дени, тој или седи до Елена или седи на средното од трите празни места. Ако Боби седи на средното празно место, тогаш на едно од преостанатите две места ќе седи Ана, што значи дека таа ќе седи до Боби, а тоа не е можно. Значи, Боби седи до Елена, Ана седи до Дени и до Кате седат Ана и Боби.

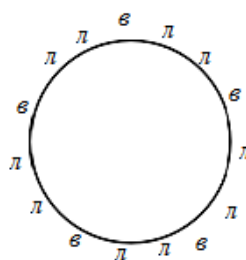


Задача 18. Петнаесет луѓе седат околу тркалезна маса. Секој од нив или е лажливец или витез. Витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат. Секој од петнаесетте луѓе ја изговорил реченицата: „Двата мои соседи се лажливци“.

Кој е најголемиот број лажливци кои може да седат околу масата?

Решение. Не може да има повеќе од 10 лажливци, бидејќи во тој случај ќе имаме тројца лажливци кои седат еден по друг. Но, тогаш средниот од овие тројца лажливци ја кажал вистината, што противречи на условот на задача.

На масатата може да има 10 лажливци, што покажува распоредот на цртежот десно.



Задача 19. Павел, Томи и Даниел одат на прошетка секој ден. Ако Павел не носи капа, тогаш Томи носи капа. Ако Томи не носи капа, тогаш Даниел носи капа. Денес Томи не носи капа. Кој носи капа?

Решение. Бидејќи Томи не носи капа, од условот следува дека Даниел носи капа. Понатаму, не е можно Павел да не носи капа, бидејќи тогаш Томи треба да носи капа, а според условот Томи не носи капа. Значи, Павел носи капа.

Конечно, капа носат Павел и Даниел.

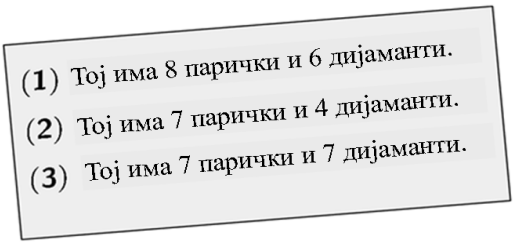
Задача 20. Никола запишал пет тврдења, од кои што само едно не е вистинито. Кое е тоа тврдење?

- 1) Мојот син Лука има три сестри.
- 2) Мојата ќерка Кате има два брата.
- 3) Мојата ќерка Кате има две сестри.
- 4) Мојот син Лука има два брата.
- 5) Имам пет деца.

Решение. Ако тврдењето 1) не е вистинито, тогаш и тврдењето 3) не е вистинито, што не е можно бидејќи само едно од петте тврдења не е вистинито. Аналогно, ако тврдењето 3) не е вистинито, тогаш и тврдењето 1) не е вистинито, што е противречност. Понатаму, ако тврдењето 5) не е вистинито, тогаш барем едно од тврдењата 2) и 3) не е вистинито, што е противречност. Сега, ако тврдењето 2) не е вистинито, тогаш 1) и 4) се вистинити, па вкупниот број деца ќе биде шест, што противречи на тврдењето 5).

Од претходните разгледувања следува дека тврдењето 4) не е вистинито и во овој случај сите преостанати тврдења се вистинити.

Задача 21. Три пирати добиле прашање колку парички и колку дијаманти има нивниот пријател Сивобрадиот. Секој од нив кажал една точна и една лажна информација. Нивните одговори се запишани на парчето хартија прикажано на цртежот десно. Колку е точниот вкупен број на парички и дијаманти што ги има Сивобрадиот?

- 
- (1) Тој има 8 парички и 6 дијаманти.
 - (2) Тој има 7 парички и 4 дијаманти.
 - (3) Тој има 7 парички и 7 дијаманти.

Решение. Ако Сивобрадиот имал 8 парички, тогаш вториот и третиот пират дале лажна информација за паричките. Но, тие дале различни информации за дијамантите, па затоа еден од нив дал две неточни информации, што противречи на условот на задачата. Значи, Сивобрадиот имал 7 парички и во овој случај точната информација на првиот пират е дека Сивобрадиот имал 6 дијаманти. Конечно, Сивобрадиот имал $7+6=13$ парички и дијаманти.

Задача 22. Се сретнале цуце и трол. Тролот секогаш лаже, додека цуцето секогаш ја кажува вистината. Двајцата кажале една иста од следниве реченици:

- 1) Јас ја кажувам вистината.
- 2) Ти ја кажуваш вистината.

- 3) И двајцата ја кажуваме вистината.
- 4) Јас секогаш лажам.
- 5) Еден и само еден од нас ја кажува вистината.

Решение. Тоа не може да е реченицата 2) бидејќи во тој случај цуцето ќе излаже, што не е можно. Тоа не може да е реченицата 3) бидејќи во тој случај цуцето ќе излаже. Тоа не може да е реченицата 4) бидејќи во тој случај тролот ќе каже вистина. Тоа не може да е реченицата 5) бидејќи во тој случај тролот ќе каже вистина. Останува цуцето и тролот да ја кажал реченицата 1) и во тој случај цуцето кажало вистина, а тролот излагал.

Задача 23. Во една кутија има 20 јаболка и 20 круши. Кире по случаен избор зел 20 парчиња овошје од кутијата, а Лука ги зел преостанатите. Кое од следниве тврдења е секогаш точно?

- 1) Кире зел барем една круша.
- 2) Кире зел ист број јаболка како и круши.
- 3) Кире зел ист број јаболка како Лука.
- 4) Кире зел круши колку што Лука зел јаболка.
- 5) Кире зел ист број круши како Лука.

Решение. Јасно, тврдењата 1), 2), 3) и 5) не се секогаш точни, бидејќи Кире може да земе 20 јаболка и тогаш овие тврдења не се точни.

Точно е тврдењето 4). Навистина, ако Кире зел x круши, тогаш тој зел $20 - x$ јаболка. За Лука остануваат $20 - x$ круши и $20 - (20 - x) = x$ јаболка, што значи дека тој зел јаболка колку што Кире зел круши.

Задача 24. Во една чинија со овошје има двапати повеќе јаболки од круши. Кристина и Лилјана го поделиле овошјето од чинијата така што Кристина зела двапати повеќе парчиња овошје од Лилјана. Кој од следниве искази е секогаш вистинит?

- 1) Кристина зеде барем една круша.
- 2) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од круши.
- 3) Кристина зеде двапати повеќе јаболка од Лилјана.
- 4) Кристина зеде толку јаболка колку што Лилјана доби круши.
- 5) Кристина зеде круши онолку колку што Лилјана доби јаболка.

Решение. Ако Кристина ги земе сите јаболка, тогаш е јасно дека исказите 1), 2), 3) и 4) не се вистинити. Нека во чинијата има $2a$ јаболка и a круши. Ако Кристина земе x круши, тогаш таа ќе земе $2a - x$ јаболка, па затоа Лилјана ќе земе $a - x$ круши и $2a - (2a - x) = x$ јаболка. Според тоа, секогаш е точен исказот 5).

Задача 25. Во група од 10 цуциња и тролови, на секој од нив му бил даден жетон на кој е запишан различен број од 1 до 10. Тие биле прашани да го кажат бројот на својот жетон, на што кажале броеви од 1 до 10. Збирот на одговорите што ги дале е 36. Секој трол кажал лага, а секое цуце кажало вистина. Кој е најмалиот број можен број тролови во групата?

Решение. Ако во групата има 9 цуциња, бидејќи секое цуце ја говори вистината тие кажале 9 различни броја од 1 до 10. Но, збирот на било кои 9 различни броја поголеми или еднакви на 1 и помали или еднакви од 10 е поголем или еднаков на 45. Последното значи дека во групата имало помалку од 9 цуциња. Слично, ако имало 8 цуциња, тогаш збирот на броевите кои ги кажале цуцињата е поголем или еднаков на 36, па затоа не може да се 8 цуциња. Значи, најголемиот број цуциња е помал или еднаков на 7, што значи дека најмалиот број тролоци е поголем или еднаков на 3. Еден пример на броеви кои ги кажале цуцињата и троловите, а чиј збир е еднаков на 36 е: цуцињата ги кажале броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а троловите ги кажале броевите 2, 2 и 4.

Задача 26. Нора си игра со 3 филцани на кујнската маса. Таа го зема најлевиот филцан, го превртува и го става става најдесно. На цртежот е даден првиот потег. Како изгледаат филцаните по 10 потези?



Решение. По три потези имаме три превртени филцани. Потоа, по следните три потези сите филцани се наоѓаат во почетната положба. По следните три потези, т.е. по деветтиот потез имаме три превртени филцани. Јасно, по десеттиот потез првите два филцани се превртени, а третиот филцан е во почетната положба (цртеж десно).



Задача 27. Ева ги има следниве налепници:



Таа лепи по една од нив во секое од петте квадратчиња на долната табла

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

така што  не е во квадратчето 5,  е во квадратчето 1,  е соседно на  и . На кое квадратче Ева ја залепила налепницата  ?

Решение. Бидејќи  е во квадратчето 1, останува трите соседни налепници ,  и  да се во квадратчињата 2, 3 и 4, или пак во квадратчињата 3, 4 и 5. Тогаш  е во квадратчето 5 или во квадратчето 2, па како таа не е во 5, заклучуваме дека  е во 2. Сега ,  и  со во 3, 4 и 5 и како  е соседна на другите две, заклучуваме дека таа е во квадратчето 4.

Задача 28. Марко ги запишал сите броеви со следниве својства: првата цифра е 1, секоја следна цифра е поголема или еднаква на претходната цифра, збирот на цифрите е еднаков на 5.

Колку броеви запишал Марко?

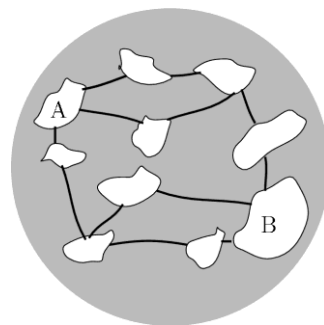
Решение. Бидејќи

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 4 = 1 + 2 + 2,$$

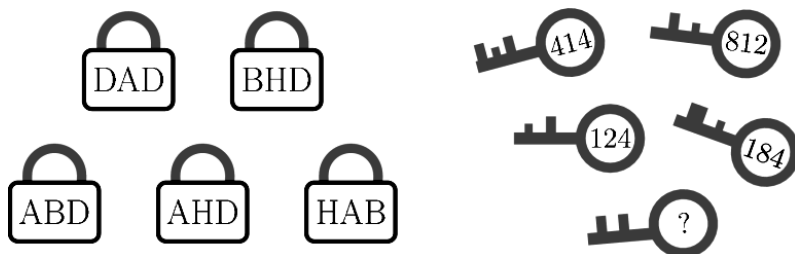
првата цифра е 1, а секоја следна цифра е поголема или еднаква на претходната Марко ги запишал броевите: 11111, 1112, 113, 14 и 122. Значи, тој запишал пет броја.

Задача 29. На една планета има 10 острови и 12 мостови, цртеж десно. Во моментот сите мостови се отворени за сообраќај. Кој е најмалиот број на мостови кои треба да се затворат за да се запре сообраќајот меѓу островите А и В.

Решение. Од островот А излегуваат три моста, при што од двата во В се влегува само преку еден мост. Слично од другите два моста кои излегуваат од В во А се влегува преку третиот мост кој излегува од А. Значи, доволно е да затвориме два моста и на тој начин ќе се запре сообраќајот меѓу островите А и В.



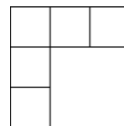
Задача 30. Пет клучеви отклучуваат пет катанци. Бројот на секој од клучевите соодветствува на буквите на катанецот кој го отклучува (види цртеж).



Кој број е напишан на последниот клуч?

Решение. Меѓу зборовите запишани на катанците има само еден збор кај кој првата и третата буква се исти и тоа е зборот DAD. Јасно, на овој збор соодветствува бројот 414. Според тоа имаме D на 4, A на 1. Понатаму, буквата D четири пати се јавува како последна буква на зборовите, па затоа цифрата на единиците на непознатиот број е 4. Буквата A два пати се јавува како прва цифра на зборовите, па затоа B и H се цифрите 2 и 8 во некој редослед. Сега, од зборот HAB и бројот 812 добиваме дека H е 8, а B е 2. Конечно, непознатиот број соодветствува на зборот BHD и тоа е бројот 284.

Задача 31. Броевите 1, 2, 3, 4 и 5 треба да бидат запишани во петте квадратчиња од цртежот така што да важи: Ако бројот е точно под друг број, тогаш тој мора да биде поголем од бројот над него. Ако бројот е десно од друг број, тогаш тој мора да биде поголем од бројот лево од него. На колку начини може да се пополни фигурата од цртежот?



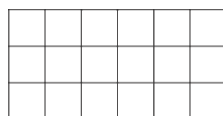
Решение. Ако во редот се запишани броевите a, b, c , а во колоната броевите a, d, e , тогаш важи $a < b < c$ и $a < d < e$, што значи дека $a = 1$. Јасно бројот 2 не може да биде ниту во најдолното поле на колоната, ниту во најдесното поле во реедот. Ако 2 е запишан во средното поле од редот, тогаш за третото поле во редот имаме три можности и за секоја од нив броевите во колоната се пополнуваат еднозначно. Слично, ако 2 е запишан во средното поле од колоната, тогаш за третото поле во колоната имаме три можности и за секоја од нив броевите во редот се пополнуваат еднозначно.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека броевите во фигурата може да се запишат на $3+3=6$ различни начини.

Задача 32. Правоаголник е поделен на 40 идентични квадрати. Правоаголникот содржи повеќе од еден ред квадрати. Стојан го нашол средниот ред квадрати и истиот го обоил. Колку квадрати не обоил Стојан?

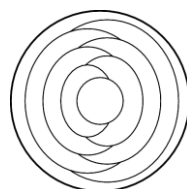
Решение. Имаме $40 = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 8 \cdot 5$. Според условот на задачата правоаголникот има повеќе од еден ред и има среден ред, што значи дека тој има непарен број редови. Единствена можност е правоаголникот да има 5 реда со по 8 полиња. Според тоа, Стојан не обоил $4 \cdot 8 = 32$ квадрати.

Задача 33. На цртежот десно е даден правоаголник. Мартин сака да ги обои квадратите во правоаголникот така што третина од сите квадрати се сини и половина од сите квадрати се жолти. Останатите квадрати Мартин сака да ги обои со црвена боја. Колку квадрати Мартин ќе обои со црвена боја?

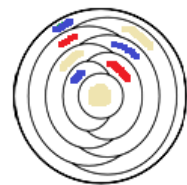


Решение. Правоаголникот има $6 \cdot 3 = 18$ квадрати. Од нив $18 : 3 = 6$ се сини, а $18 : 2 = 9$ се жолти. Според тоа, Мартин со црвена боја ќе обои $18 - (6 + 9) = 3$ квадрати.

Задача 34. Горјан ја обоил секоја област од фигурата прикажана на цртежот десно или со црвена или со сина или со жолта боја. Притоа, соседните области ги обоил со различни бои. Надворешниот прстен го обоил со сина боја. Колку области обоил со сина боја?

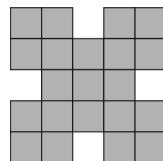


Решение. Бидејќи надворешниот прстен е обоен со сина боја, двете области кои му се соседни се обоени со жолта и црвена боја. Понатаму, областа која е соседна на овие две области е обоена со сина боја итн. (види цртеж десно). Конечно, заклучуваме дека три области се обоени со сина боја.

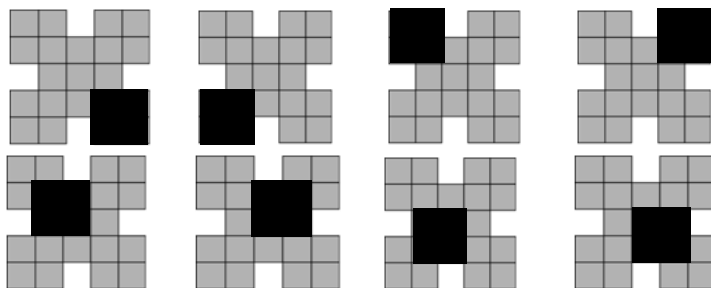


Забелешка. Боенето е единствено до замена на местата на црвената и жолтата боја.

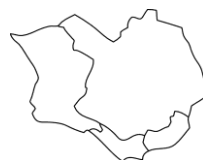
Задача 35. Пабло сака на фигурата прикажана на цртежот десно да обои еден 2×2 квадрат. На колку начини Пабло може тоа да го направи?



Решение. Четири 2×2 квадрати кои Пабло може да ги обои се квадратите кои се во четитите агли на фигурата. Понатаму, средишниот 3×3 квадрат содржи уште четири 2×2 квадрати кои Пабло може да ги обои и нема други такви квадрати. Значи, Пабло може да обои осум 2×2 квадрати.



Задача 36. Јулија има четири дрвени боички со различни бои и сака да искористи неколку или сите дрвени боички за да нацрта мапа на остров поделен на четири држави, како на цртежот десно. На мапата две држави со заедничка граница не смее да се обоени со иста боја. На колку начини може да се обои мапата на островот?



Решение. Државите да ги означиме како на цртежот десно. Имаме 4 бои, па за бојење на државата a имаме 4 можности. Ако ги користиме сите бои, тогаш за бојење на државата b имаме 3 можности, за бојење на државата c имаме 2 можности и за бојење на државата d имаме 1 можност. Според тоа, во случај кога ги користиме сите четири бои имаме $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различни бојења.

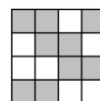


Мапата можењ да се обои и со три бои и тоа: за државата a имаме 4 можности, за државите b и c имаме 3 можности и за државата d имаме 2 можности. Значи, во овој случај вкупно имаме $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ различни бојења на мапата.

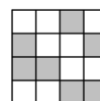
Јасно, мапата не може да се обои во две бои, бидејќи за бојење на државите a, b, d , односно a, c, d ни се потребни најмалку 3 бои.

Конечно, од горните разгледувања следува дека имаме $24 + 24 = 48$ различни бојења на мапата.

Задача 37. Големиот квадрат на цртежот десно е составен од мали бели и сиви квадратчиња. Како ќе изгледа големиот квадратот ако на малите квадратчиња ги замениме боите?



Решение. Кога на малите квадратчиња ги замениме боите, белата во сива, а сивата во бела го добиваме квадратот прикажан на цртежот десно.

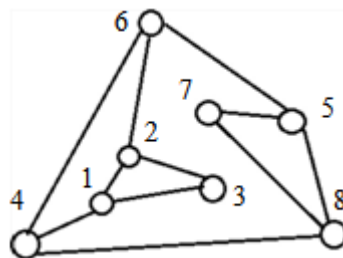
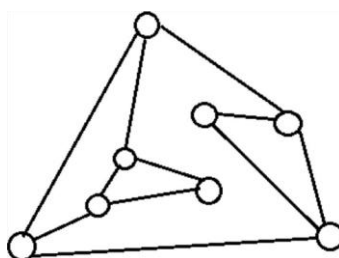


Задача 38. Колку пати најмалку треба да ја фрлиме правилната коцка за играње, за да бидеме сигурни дека барем еден од паднатите броеви точки ќе се повтори?

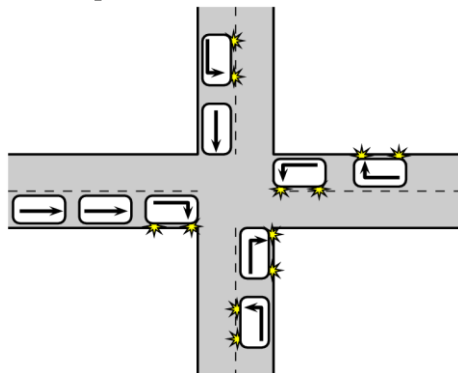
Решение. Ако шест пати ја фрлиме коцката, тогаш може да се случи да паднат шест различни броеја. Но, кога седум пати ќе ја фрлиме коцката, бидејќи имаме шест можности, од принципот на Дирихле следува дека барем во две фрлања ќе падне еден ист број.

Задача 39. На цртежот лево со кружниците се прикажани светилки, некои од кои се поврзани меѓу себе. Кога ќе допреме една светилка, таа и сите светилки со кои непосредно е поврзана се палат. Кој е најмалиот број светилки што треба да ги допреме за да сите светилки се запалени?

Решение. Бидејќи не постои светилка која е поврзана со сите преостанати светилки, заклучуваме дека со допирање на една светилка не може да се запалат сите светилки. Значи, треба да допреме најмалку две светилки. Да ги означиме светилките како на цртежот десно. Тогаш со допирање на светилката 1 се палат светилките 1, 2, 3 и 4, а со допирање на светилката 5 се палат светилките 5, 6, 7 и 8. Според тоа, најмалиот број светилки кој треба да го допреме е 2.



Задача 40. На цртежот долу се прикажани девет автомобили кои пристигнале на раскрсница. Секој од автомобилите се движи во правецот кој го покажува стрелката нацртана на него.

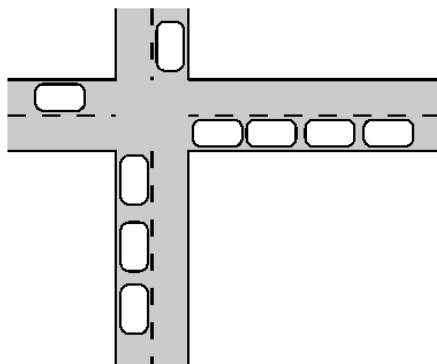


Како ќе бидат распоредени автомобилите по поминување на раскрсницата?

Решение. Дискусијата ќе ја направиме според страните на светот на географската карта. Имаме:

- 1) од север 1 автомобил оди на југ и 1 оди на исток,
- 2) од исток 1 автомобил оди на југ и 1 оди на север,
- 3) од југ 1 автомобил оди на исток и 1 оди на запад, и
- 4) од запад 1 автомобил оди на југ и 2 автомобили одат на исток.

Според тоа, на југ имаме 3 автомобили, на исток имаме 4 автомобили, на север имаме 1 автомобил и на запад имаме 1 автомобил. По преминување на автомобилите состојбата на раскрсницата е прикажана на долниот цртеж.



Задача 41. Во понеделник Андреј споделил фотографија со 5 свои пријатели. Следните неколку дена секое лице кое ја примило фотографијата ја испратило на двајца свои пријатели, кои сè уште не ја виделе фотографијата. Кој ден бројот на луѓето кои ја виделе фотографијата ќе биде поголем од 100?

Решение. Во вторникот фотографијата ја виделе нови $5 \cdot 2 = 10$ луѓе. Во средата фотографијата ја виделе нови $2 \cdot 10 = 20$ луѓе. Во четвртокот фотографијата ја виделе нови $2 \cdot 20 = 40$ луѓе и во петокот фотографијата ја виделе нови $2 \cdot 40 = 80$ луѓе. Според тоа, до четвртокот заедно со Андреј фотографијата ја виделе $1 + 5 + 10 + 20 + 40 = 76$ луѓе, а до петокот ја виделе $80 + 76 = 156$ луѓе. Значи, одговорот на прашањето е петок.

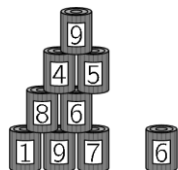
Задача 42. Филип сака да ги подели броевите 2, 3, 4, ..., 10 во неколку групи, но така што збирот на броевите во секоја група да биде еднаков. Кој е најголемиот број групи што Филип може да ги направи?

Решение. Имаме

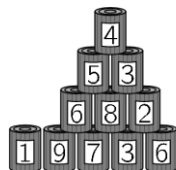
$$2+3+4+\dots+9+10=54=2\cdot 27=3\cdot 18=6\cdot 9.$$

Јасно, броевите не може да се поделат ниту во 6, ниту во 9 групи, бидејќи во првиот случај збирот на броевите во секоја група треба да биде $9 < 10$, а во вториот случај треба да биде $6 < 10$. Понатаму, поделбата не е можна ниту во 18, ниту во 27 групи. Ќе покажеме дека броевите може да се поделат во три групи така што збирот на броевите во секоја група е 18. Навистина: $\{8,10\}$, $\{9,6,3\}$ и $\{2,4,5,7\}$ е една таква поделба. Според тоа, најголемиот можен број групи е три.

Задача 43. Јуле и Коста гаѓаат со топки врз две идентични пирамиди направени од по 15 лименки. Јуле срушила 6 лименки и освоила вкупно 25 поени. Коста срушил 4 лименки. Колку поени освоил Коста?



по фрлањето на Јуле

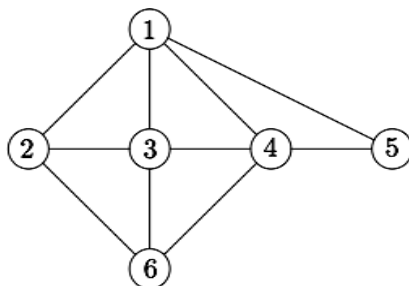


по фрлањето на Коста

Решение. Очигледно Јуле ги срушила лименките со броевите 3, 8, 2, 3 и 4, при што со рушењето на овие лименки таа освоила $3+8+2+3+4=20$ поени. Но, таа вкупно освоила 25 поени, па затоа шестата лименка која е на врвот на пирамидата вредела $25-20=5$ поени.

Коста срушил 4 лименки кои носат 8, 4, 9 и 5 поени, што значи дека тој освоил $8+4+9+5=26$ поени.

Задача 44. Шемата прикажана на цртежот десно ги покажува пријателствата меѓу Ана, Берта, Цвета, Дијана, Елизабета и Марта. Секој број претставува една од девојките, а секоја линија пријателство меѓу две девојки. Секоја од следниве три девојки Цвета, Дијана и Марта имаат четири пријателки. Цвета и Дијана се и двете пријателки со Берта. Берта нема други пријателки. Кој број ја претставува Марта?

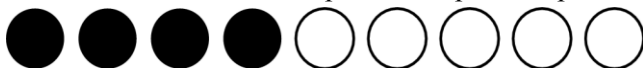


Решение. Јасно Берта е девојчето означено со бројот 5, бидејќи единствено тоа има само две пријателки, а девојките означени со броевите 1 и 4 се Цвета и Дијана. Понатаму, на броевите 1, 3 и 4 им соодветствуваат девојките Цвета, Дијана и Марта, па затоа Марта е претставена со бројот 3.

Задача 45. Еден трицифрен број го нарекуваме „убав“, ако цифрата на десетките е поголема од збирот на другите две цифри. Колку најмногу последователни „убави“ броеви постојат?

Решение. Нека убавиот трицифрен број е од видот $\overline{abc}$. Притоа треба да важи $a+c < b$. Најголемиот можен број последователни трицифрени „убави“ броеви се добива за $b=9$ и $a=1$. Тоа се броевите: 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196 и 197, што значи дека постојат најмногу 8 последователни „убави“ броеви.

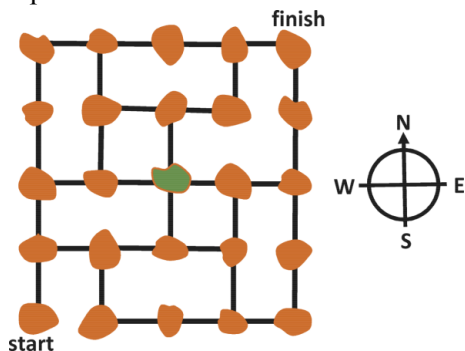
Задача 46. Девет жетони се црни од едната страна, а бели од другата страна. На почетокот, 4 жетони се завртени со црната страна на горе.



При секое превртување на жетоните, мора да се превртат точно 3 жетони. Кој е најмалиот број на превртувања на жетоните што е потребен, за сите жетони да покажуваат иста боја од горната страна?

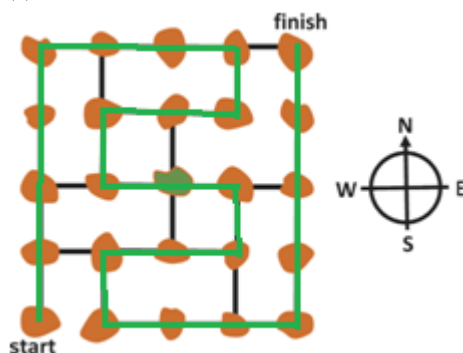
Решение. Јасно, со едно превртување целта не може да се постигне. Ќе покажеме дека целта може да се постигне со две превртувања, при што сите жетони ќе бидат бели. Во првото превртување ќе превртиме 2 црни и 1 бел жетон, со што ќе добиеме 3 црни и 6 бели жетони. Во второто превртување ќе ги превртиме трите црни жетони и така ќе добиеме 9 бели жетони.

Задача 47. Сликата претставува карта на острови и начин на нивна поврзаност со мостови. Поштарот треба да ги посети сите острови и тоа точно еднаш. Почнал од островот кој е означен со „start“, а би сакал да заврши на островот означен со „finish“. Во овој момент се наоѓа на островот во центарот на картата.



Како треба да продолжи, кој е негов следен чекор?

Решение. Поштарот ќе ги посети сите острови почнувајќи од од островот кој е означен со „start“, а завршувајќи на островот означен со „finish“ само ако се движи по зелената патека на мапата на долниот цртеж.



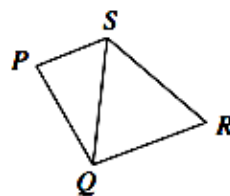
Според тоа, поштарот од островот на кој се наоѓа треба да продолжи на исток.

Задача 48. Четири кошници содржат 1, 4, 6 и 9 јаболка, соодветно. Кој е најмалиот број јаболка кои треба да се префрлат од една во друга кошница, за да во секоја кошница има еднаков број на јаболка?

Решение. Во кошниците вкупно има $1+4+6+9=20$ јаболка, што значи дека по префрлањето во секоја кошница мора да има по $20:4=5$ јаболка. Ова со најмалку префрлања може да се постигне ако во кошницата со 1 јаболко префрлиме 4 јаболка од кошницата со 9 јаболка, а во кошницата со 4 јаболка префрлиме 1 јаболко од кошницата со 6 јаболка.

Според тоа, најмалиот број јаболка кои треба да ги префрлиме е $1+4=5$.

Задача 49. Четири градови P , Q , R и S се поврзани со патишта, како на цртежот десно. Трка се организира така што почнува од градот S , завршува во градот Q и по секој пат се поминува само по еднаш. На колку начини може да се организира трката?



Решение. Ако од S тргнеме кон P , тогаш според условот на задачата постојат следниве два начини за организација на трката: $SPQSRQ$ и $SPQRSQ$. Слично, кога прво тргнеме кон R имаме два начина: $SRQSPQ$ и $SRQPSQ$, а ако прво тргнеме кон Q повторно имаме два начина: $SQPSRQ$ и $SQRSPQ$. Конечно, трката може да се организира на вкупно 6 начини.

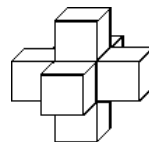
Задача 50. Коста ги запишува резултатите од четвртфиналето, полуфиналето и финалето на еден тениски турнир. Резултатите се (не се подредени по редослед): Бранко го победил Андон, Киро го победил Дамјан, Ѓорѓи го победил Христо, Ѓорѓи го победил Киро, Киро го победил Бранко, Павел го победил Филип и Ѓорѓи го победил Павел. Кој победил на турнирот?

Решение. Задачата ќе ја решиме користејќи неравенства. Притоа ако Z го победил Y ќе пишуваме $Y < Z$. Со првите букви од имињата да ги означиме учесниците на турнирот. Според условот на задачата имаме:

$$A < B, D < K, X < \dot{G}, K < \dot{G}, B < K, \Phi < P \text{ и } P < \dot{G}.$$

Од осумте тенисери во четвртфиналето отпаднале 4 и тоа се тенисерите кои во неравенствата се среќаат само по еднаш и тоа на левата страна. Значи, резултатите од четвртфиналето се: $A < B, X < \dot{G}, \Phi < P$ и $D < K$. Понатаму, остануваат резултатите $K < \dot{G}, B < K$ и $P < \dot{G}$. Слично во полуфиналето се постигнати резултатите $B < K$ и $P < \dot{G}$, а во финалето е постигнат резултатот $K < \dot{G}$. Конечно, на турнирот победил Ѓорѓи.

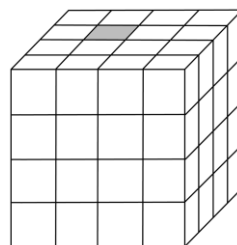
Задача 51. Седум коцки за играње се споени (залепени) така што е добиено телото на цртежот десно. Спојувањето се врши така што се лепат две страни со ист број на точки на нив. Колку точки има на површината на телото?



Решение. Збирот на точките кои се запишани на страните на една коцка е еднаков на $1+2+3+4+5+6=21$. На секоја од шесте коцки кои се залепени на централната коцка не се гледа по еден број точки кој е еднаков со бројот на точките на заедничката страна со централната коцка. Според тоа, збирот на броевите на точките кои се на шесте коцки и не се на површината на телото е еднаков на 21. Конечно, збирот на точките кои се на површината на телото е еднаков на $6 \cdot 21 - 21 = 105$.

Задача 52. Коцката на цртежот е поделена на 64 помали коцки. Само една од коцките е сива. Првиот ден, сивата коцка ги променила сите свои бели соседи во сиви коцки (две коцки се соседни ако имаа заеднички сид). Вториот ден, сите сиви коцки ги промениле сите свои бели соседи во сиви коцки.

Колку сиви коцки имало на крајот од вториот ден?



Решение. Првиот ден сивата коцка ќе промени 5 бели коцки во сиви и тоа се коцките кои имаат заеднички сидови со неа. Притоа 4 од овие коцки се на површината и 1 е внатрешна.

Сега коцките кои се на површината ќе ги разгледуваме во насока на движење на стрелката на часовникот. Вториот ден, првата рабна коцка ќе промени 3 бели коцки, втората рабна коцка дополнително ќе промени 2 бели коцки, следната коцка дополнително ќе промени 3 бели коцки и последната коцка која е на површината дополнително ќе промени 2 бели коцки. Конечно, внатрешната сива коцка дополнително ќе промени 1 бела коцка.

Според тоа, по вториот ден вкупниот број сиви коцки ќе биде еднаков на

$$1+5+3+2+3+2+1=17.$$

Задача 53. Влатко сака да си направи седмичен распоред за трчање. Тој сака да трча точно двапати седмично. Тој не сака да трча во два последователни денови. Колку различни распореди може да направи Влатко?

Решение. Деновите од седмицата ќе ги означиме со: По, Вт, Ср, Че, Пе, Са и Не. Според условот на задача Влатко може да трча во:

По-Ср, По-Че, По-Пе, По-Са,

Вт-Че, Вт-Пе, Вт-Са, Вт-Не,

Ср-Пе, Ср-Са, Ср-Не,

Че-Са, Че-Не,

Пе-Не.

Значи, Влатко може да направи 14 различни неделни распореди за трчање.

Задача 54. Соња сака да запише број во секое поле во 3×3 табела така да збирот на броевите на било кои две полиња кои имаат заедничка страна е еднаков. Таа има веќе запишано два броја, како на цртежот. Кој е збирот на сите броеви во квадратната шема?

2		
		3

Решение. Лесно се заклучува дека во петте полиња кои се на дијагоналите на квадратот Соња го запишала бројот 2, а во другите четири полиња таа го запишала бројот 3. Според тоа, збирот на броевите запишани во квадратната шема е $5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 22$.

Задача 55. Осум кенгури се наредени во редица како на цртежот.



Во даден момент, два кенгури кои се еден до друг и свртени еден кон друг ги заменуваат местата прескокнувајќи се еден со друг. Ова се повторува се додека вакви прескокнувања се можни. Колку прескокнувања се направени?

Решение. Доволно е да ги броиме прескокнувањата кои ги прават кенгурите свртени кон лево. Првиот кенгур свртен кон лево прави 3 прескокнувања, а вториот и третиот кенгур свртени кон лево прават по 5 прескокнувања.

Според тоа, вкупниот број прескокнувања е еднаков на $3 + 2 \cdot 5 = 13$.

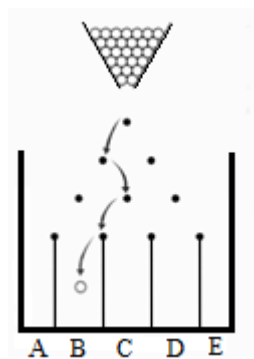
Задача 56. Десет кенгури се наредени во редица како на цртежот. Во даден момент, два кенгура кои се еден до друг и се свртени еден кон друг, ги заменуваат местата прескокнувајќи се еден со друг. Ова се повторува се додека вакви прескокнувања се можни. Колку прескокнувања се направени?



Решение. Доволно е да ги броиме прескокнувањата кои ги прават кенгурите свртени кон лево. Првиот и вториот кенгур свртени кон лево прават по 3 прескокнувања, а третиот и четвртиот кенгур свртени кон лево прават по 6 прескокнувања. Според тоа, вкупниот број прескокнувања е еднаков на $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 18$.

Задача 57. Топче се пушта од врвот на таблата на која во редици се поставени прегради (види цртеж). Ако топчето удри во преграда, тоа продолжува лево или десно од преградата. Една можна патека на движење на топчето е прикажана на цртежот. Кој е бројот на различните патеки по кои топчето може да стигне до корпата В?

Забелешка. Топчињата кои се пуштаат се такви што тие можат да поминат меѓу преградите на таблата.



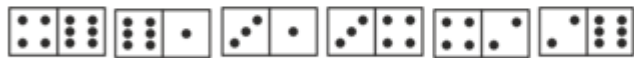
Решение. На првата преграда топчето може да оди лево или десно, т.е. имаме Л и Д. Ако оди лево, тогаш на втората преграда може да оди лево или десно, па затоа имаме ЛЛ и ЛД, а ако оди десно имаме ДЛ. Сега по третата преграда за да топчето падне во корпата В можни се следниве случаи: ЛЛЛД, ЛЛДЛ, ЛДЛЛ и ДЛЛЛ. Значи, имаме 4 различни патеки по кои топчето може да стигне во корпата В.

Задача 58. Домино плочките се правилно наредени ако две домина кои се допираат имаат ист број точки на соседните половинки. Павле наредил шест домина како што е прикажано на цртежот. Тој во еден потез може или да ги замени местата на две домина или за 180° да ротира едно домина.



Кој е најмалиот број потези што треба да ги направи Павле за домината да се правилно наредени?

Решение. Во случајот домината кои ги наредил Павле не се правилно наредени на пет места. Бидејќи со поместување на едно домино можеме најмногу на две места да ја поправиме грешката, потребни ни се најмалку три потези. Дека три потези се и доволни покажува следната постапка:



1. потез

2. потез

3. потез

Задача 59. Хотел на еден остров на Карибите се рекламира користејќи го слоганот: „350 сончеви денови секоја година!“. Ако рекламата е точна, колку најмалку денови во 2022 година треба да остане Вангел на островот за да биде сигурен дека во текот на одморот ќе има два последователни сончеви денови?

Решение. Во 2022 година имаме 365 денови. Ако 350 денови се сончеви (1), тогаш има $365 - 350 = 15$ денови кои не се сончеви (0). Најлош можеен распоред на деновите кои не се сончеви е по секој сончев ден да има ден кој не е сончев. Во овој случај ако Вангел остане 31 ден тогаш може да се случи распоредот на сончевите и деновите кои не се сончеви да биде:

1010101010101010101010101010101,

па така тој нема да има два сончеви денови еден по друг. Ако остане 32 дена, тогаш во текот на одморот сигурно ќе има два последователни сончеви денови.

Задача 60. Алан, Бела, Клер, Дора и Ерик се сретнале на забава и секој од нив се ракувал точно по еднаш со секој со кој што од порано се поз-

навал. Алан се ракувал еднаш, Бела се ракувала двапати, Клер се ракувала трипати и Дора се ракувала четири пати. Колку пати се ракувал Ерик?

Решение. Бидејќи Дора се ракувала 4 пати, таа се ракувала со сите, што значи дека на Алан не му преостанале други ракувања, Бела се ракувала само уште еднаш и Клер се ракувала уште два пати. Јасно, Клер може да се ракува само уште со Бела и Ерик, и притоа на Бела не и останале други ракувања. Конечно, сите ракувања на Алан, Бела, Клер и Дора се преброе-ни, од што следува дека Ерик се ракувал 2 пати.

Задача 61. Колку четирицифрени броеви A постојат, така што полови-ната од бројот A е број делив со 2, неговата третина е број делив со 3 и неговата петина е број делив со 5?

Решение. Според условот на задачата трееба да ги определиме четири-цифрените броеви кои се деливи со 4, 9 и 25, односно кои се деливи со $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$. Тоа се броевите 1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000 и 9900. Значи, постојат 10 броеви со бараното својство.

Задача 62. Колку четирицифрени броеви имаат својство нивните цифри гледани од лево на десно да се последователни природни броеви подреде-ни во растечки редослед?

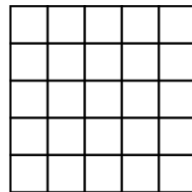
Решение. Тоа се броевите; 1234, 2345, 3456, 4567, 5678 и 6789. Според тоа, постојат четири четирицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

Задача *. Кој е најголемиот број на фигури со облик  кои може да се исечат од 5×5 квадрат?

Решение. Дадениот квадрат има 25 мали квадрат-чиња, а фигурите кои треба да се исечат имаат по 4 мали квадратчиња. Сега, од $25 = 6 \cdot 4 + 1$ сле-

1	1	2	2	2
1	5	6	6	2
1	5		6	3
4	5	5	6	3
4	4	4	3	3

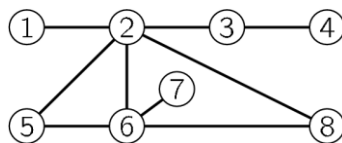
дува дека бројот на фигурите кои може да се исечат е помал или еднаков на 6. Дека може да се исечат 6 фигури покажува расекнувањето на цртежот лево.



Задача 63. Пабло избрал 5 различни броја. Тој некои од броевите ги помножил со 2, а останатите со 3 при што добил најмал број различни ре-зултати. Кој е најмалиот број на различни резултати кои Пабло може да ги добие?

Решение. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку три броја или се помножени со 2 или се помножени со 3. Бидејќи петте броја се различни, заклучуваме дека трите производи кои се помножени со еден ист број се различни. Според тоа, најмалиот број на различни резултати кои Пабло може да ги добие е три. На пример, ако ги земеме броевите 1, 4, 6, 8 и 12, три различни резултати ќе добиеме ако 1, 4 и 8 ги помножиме со 3, а 6 и 12 ги помножиме со 2, при што се добиваат резултатите: 3, 12 и 24.

Задача 64. Никола ги обоил секој од осумте кругови на цртежот десно во црвена, жолта или сина боја, така што било кои два круга кои се поврзани со линија не се обоени во иста боја. Кои два круга мора да бидат обоени во иста боја?



Решение. Круговите 2 и 6 мора да се обоени со различни бои, да кажеме со црвена и жолта боја, соодветно. Сега, бидејќи кругот 5 е поврзан со круговите 2 и 6, тој мора да биде обоен со сина боја, а истото се однесува и на кругот 8. Јасно, 7 може да биде црвен или син, т.е. има две можности, а истото важи и за круговите 1, 3 и 4.

Конечно, во иста боја мора да се обоени круговите 5 и 8.

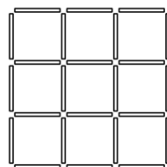
Задача 65. Неколку тимови од по три шахисти учествуваат на турнир во шах. Секој шахист од секој тим игра точно по една партија со секој шахист од сите останати тимови. Поради организациони причини, вкупно може да се одиграат најмногу 250 партии шах. Колку најмногу тимови можат да учествуваат на овој шаховски турнир?

Решение. Нека имаме n тимови од по 3 шахисти. Тоа се вкупно $3n$ шахисти и кога секој шахист би играл по една партија со секој друг шахист тогаш на турнирот би се одиграле $\frac{3n(3n-1)}{2}$ партии шах. Но, шахистите од секој тим не играат меѓу себе, што значи дека за секој тим имаме по 3 партии кои не се играат, односно вкупно не се играат $3n$ партии шах. Значи, на турнирот се одиграни $\frac{3n(3n-1)}{2} - 3n$ партии шах, па затоа

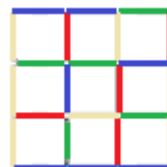
$$\frac{3n(3n-1)}{2} - 3n \leq 250, \text{ т.е. } 9n(n-1) \leq 500.$$

За $n=8$ имаме $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504 > 500$, што значи дека $n < 8$. Јасно на турнирот може да учествуваат најмногу 7 тимови и тогаш ќе се одиграат $\frac{9 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 189$ партии шах.

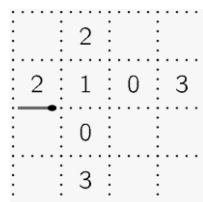
Задача 66. Наташа има доволно стапчиња со должина 1. Стапчињата се обоени сино, црвено, жолто или зелено. Таа сака да направи 3×3 мрежа, како на цртежот десно, така што секое 1×1 квадратче во мрежата има четири страни обоени во различни бои. Кој е најмалиот број зелени стапчиња кои Наташа може да ги искористи?



Решение. Едно зелено стапче може да биде страна на најмногу две 1×1 квадратчиња. Бидејќи имаме 9 вакви квадратчиња потребни ни се најмалку 5 зелени стапчиња. Дека 5 е најмалиот можен број зелени стапчиња покажува примерот на цртежот десно, на кој се и 5 црвени стапчиња.

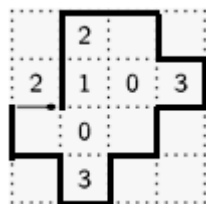


Задача 67. Ана треба да направи пат од чкорчиња, притоа користејќи што е можно помалку чкорчиња. Таа го става секое чкорче на парче хартија, како на цртежот, во правец на непрекинатите линии. Нејзиниот пат треба да стигне до левиот дел од чкорчето кое е веќе поставено. Броевите кои се наоѓаат во квадратчињата го означуваат бројот на чкорчиња поставени околу тоа квадратче.

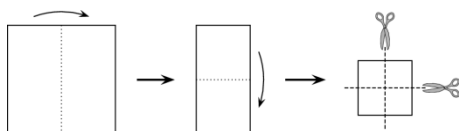


Колку чкорчиња се потребни за патот на Ана?

Решение. Патот кој треба да го направи Ана, при што се исполнети условите на задача и кој содржи најмал број чкорчиња е прикажан на цртеж десно. Според тоа, за Патот на Ана се потребни 16 чкорчиња.



Задача 68. Кети превиткала квадратно парче хартија преку половината двапати последователно, а потоа превитканото парче го пресекла двапати по средината, како што е прикажано на цртежот десно. Колку од новодобиените парчиња хартија се квадрати?



Решение. Со превиткувањето е добиен квадрат кој има четири слоја хартија. Во горното лево поле сите четири слоја се поврзани, во долното десно поле сите четири слоја се слободни, а во другите две темиња два по два слоја се поврзани. Затоа при сечењата во горното лево поле ќе остане квадрат, во долното десно поле ќе останат четири квадрати и во другите две темиња ќе се добијат по два правоаголници. Според тоа, од добиените 9 парчиња хартија 5 ќе бидат квадрати.

Задача 69. Во финалето на еден натпревар за танцување, секој од трите членови на жирито на петте натпреварувачи им доделува 0 поени, 1 поен, 2 поени, 3 поени или 4 поени. Било кои два натпреварувачи не добиле иста оценка од било кој судија. Пабло ги знае збирите на сите оценки и некои поединечни оценки, како што е дадено во табелата. Пополни ја табелата со добиените оценки на натпреварувачите од секој судија одделно.

	Адам	Берта	Клара	Давид	Емил
I	2	0			
II		2	0		
III					
Збир	7	5	3	4	11

Решение. Јасно, Берта редоследно ги добила оценките 0, 2 и 3. Клара не може да добие од првиот судија оценки 0 или 2, па како збирот на нејзините оценки е $3=0+1+2$, јасно е дека таа редоследно ги добила оценките 1, 0 и 2. Понатаму, Давид не може да добие оценка 2 од ниту еден судија, не може оценка 1 од првиот судија и оценка 0 од првиот и вториот судија, па како збирот на неговите оценки е $4=3+1+0$, тој редоследно ги добил оценките 3, 1 и 0. Бројот 11 како збир на три ненегативни броја помали или еднакви на 4 може да се запише на единствен начин и тоа $4+3+4=11$, па заклучуваме дека Емил редоследно добил оценки 4, 3 и 4. Конечно, Адам ги добил оценките 2, 4 и 1. Пополнетата табела е прикажана на долниот цртеж (Различните бои на броевите покажуваат пополнување во секој од разгледаните чекори.)

	Адам	Берта	Клара	Давид	Емил
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
Збир	7	5	3	4	11

Задача 70. Горјан искажал пет точни тврдења за бројот кој го замислил.

4	1	3	2	Две од цифрите се точни, но се наоѓаат на погрешни места
9	8	2	6	Една цифра е точна и се наоѓа на точната позиција

5	0	7	9	Две цифри се точни, една се наоѓа на точна позиција, а другата на погрешна позиција
2	7	4	1	Една цифра е точна, но се наоѓа на погрешна позиција
7	6	4	2	Ниту една цифра не е точна

Кој број го замислил Горјан?

Решение. Од петтото тврдење следува дека цифрите на четирицифрениот број припаѓаат на множеството $\{0,1,3,5,8,9\}$. Сега, од првото тврдење слеува дека две цифри на бараниот број се 1 и 3. Понатаму, од четвртото и првото тврдење следува дека цифрата 1 не е цифра на единиците и на стотките, а цифрата 3 не е цифра на десетките.

Сега, од второто тврдење следува дека бројот ја содржи или цифрата 9 или цифрата 8 и има вид или $\overline{9xxx}$ или $\overline{x8xx}$. Во првиот случај од третото тврдење следува дека бројот е запишан со цифрите 0, 1, 3 и 9 и имајќи ги предвид претходните заклучувања, тоа е бројот 9013. Вториот случај не е можен, бидејќи веќе ги имаме цифрите 1, 3 и 8, па не може во записот на бројот да ги има цифрите 0 и 5.

Конечно, Горјан го замислил бројот 9013.

Задача 71. Дванаесет обоени коцки се наредени во еден ред. Од нив, 3 се сини, 2 се жолти, 3 се црвени и 4 се зелени коцки, но не се наредени во овој редослед. На еден од краевите има жолта коцка, а на другиот има црвена коцка. Коцките обоени црвено се соседни. Коцките обоени зелено се соседни. Десеттата коцка од лево кон десно е обоена сино. Која е бојата на шестата коцка од лево кон десно?

Решение. Коцките ќе ги претставиме со квадратите на горните сидови. Бидејќи десеттата коцка броено од лево кон десно е сина, а имаме 3 црвени коцки кои треба да се соседни и една да е на еден од краевите, заклучуваме дека црвените коцки се на левата страна, а жолта коцка е на десната страна. Така ја имаме следнава состојба.

ц	ц	ц						с		ж
---	---	---	--	--	--	--	--	---	--	---

Сега, имаме 4 зелени коцки кои треба да се соседни, па затоа тие се распоредени од четвртото до деветтото место. Јасно, ако тие се поставени почнувајќи од четвртото место, тогаш шестата коцка е зелена, а исто така шестата коцка е зелена ако зелените коцки се поставени од деветтото

место кон лево. Конечно, како и да се распоредени пресотанатите седум коцки, секогаш шестата коцка ќе биде зелена.

Задача 72. Секој ученик во едно одделение плива или танцува. Три петини од учениците во одделението пливаат и три петини од учениците танцуваат. Пет ученици и пливаат и танцуваат. Колку ученици има во одделението?

Решение. Бидејќи секој ученик плива или танцува, а $\frac{3}{5}$ од учениците во одделението пливаат и $\frac{3}{5}$ од учениците во одделението танцуваат, заклучуваме дека $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5}$ од учениците и пливаат и танцуваат. Но, во одделението 5 ученици и пливаат и танцуваат, па затоа во ова одделение учат $5 \cdot 5 = 25$ ученици.

Задача 73. Во една торба има само црвени и зелени цамлии. Ако од кутијата без гледање земеме 5 цамлии, тогаш најмалку една од нив е црвена, а ако без гледање извлечеме 6 цамлии, тогаш најмалку една од нив е зелена. Колку најмногу цамлии може да има во кутијата?

Решение. Бидејќи кога вадиме 5 цамлии најмалку една од нив црвена, во кутијата може да има најмногу 4 зелени цамлии. Слично во кутијата може да има најмногу 5 црвени цамлии. Според тоа, во кутијата може да има најмногу $5 + 4 = 9$ цамлии и тоа 4 зелени и 5 црвени.

Задача 74. Во една кутија има само зелени, црвени, сини и жолти топчиња. Ако од кутијата без гледање извадиме 27 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно зелено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 25 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно црвено топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 22 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно сино топче. Ако од кутијата без гледање извадиме 17 топчиња, тогаш меѓу извадените топчиња секогаш има барем едно жолто топче.

Кој е најголемиот број топчиња што може да бидат во кутијата?

Решение. Нека во кутијата има a зелени, b црвени, c сини и d жолти топчиња. Бидејќи кога вадиме 27 топчиња, меѓу нив сигурно има барем едно зелено топче заклучуваме дека $b + c + d < 27$. Слично добиваме дека $a + c + d < 25$, $a + b + d < 22$ и $a + b + c < 17$. Четирите неравенства ги собираме и го добиваме неравенството $3a + 3b + 3c + 3d < 91$, т.е.

$$a+b+c+d < 30\frac{1}{3}.$$

Но, a, b, c, d се природни броеви, па од последното неравенство следува дека

$$a+b+c+d \leq 30.$$

Нека претпоставиме дека $a+b+c+d=30$. Тогаш $30-a < 27$, т.е. $a > 3$ и слично се добива $b > 5$, $c > 8$ и $d > 13$. Но, a, b, c, d се природни броеви, па затоа $a \geq 4, b \geq 6, c \geq 9, d \geq 14$. Ако ги собереме последните четири неравенства, добиваме $a+b+c+d \geq 33$, што е противречност. Од добиената противречност следува $a+b+c+d \leq 29$. Пример на 29 топчиња, што е и најголемиот број топчиња кои може да бидат во кутијата е: $a=3, b=5, c=8$ и $d=13$.

Задача 75. 2021 клоннови се наредени во редица и по ред се нумерирани со броевите од 1 до 2021. Секој клонн е облечен или во црвено, или во жолто или во сино. Во редот меѓу било кои три последователни клоннови, секогаш има клоннови од сите три бои. Горјан ги погодува боите на пет клоннови. Ова се неговите претпоставки: клоннот 2 е жолт; клоннот 20 е син; клоннот 202 е црвен; клоннот 1002 е син; клоннот 2021 е жолт. Само една од неговите претпоставки е погрешна. Кој е бројот на клоннот чија боја Горјан не ја погодиил?

Решение. Ако клонновите $n, n+1, n+2$ во сите три бои, тогаш бидејќи клонновите $n+1, n+2, n+3$ се во сите три бои, заклучуваме дека клонновите n и $n+3$ се во иста боја. Од произволноста на n следува дека сите клоннови со реден број $3k$ се во иста боја, сите клоннови со реден број $3k+1$ се во друга иста боја и сите клоннови со реден број $3k+2$ се во трета иста боја.

Имаме:

$2=3 \cdot 0+2$, $20=3 \cdot 6+2$, $202=3 \cdot 67+1$, $1002=3 \cdot 334$ и $2021=3 \cdot 673+2$, па затоа клонновите 2, 20 и 2021 треба да се во иста боја, клоннот 202 треба да е во друга боја и клоннот 1002 треба да е во трета боја. За клонновите 2 и 2021 Горјан кажал дека се жолти, а за клонното 20 кажал дека е син. Според тоа, Горјан не ја погодил бојата на клоннот 20.

Задача 76. Во еден град има 21 витез и 2000 штитоносци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а штитоносците секогаш лажат. Волшебник поделил 2020 од овие 2021 луѓе на 1010 парови. Секој човек во парот го опишува другиот човек од парот или како витез или како штитоносец.

Како резултат на тоа, 2000 луѓе беа наречени витези, а 20 луѓе беа наречени штитоносци. Колку парови составени од двајца штитоносци имало во поделбата?

Решение. Нека имаме a парови составени од два штитоносци, b парови составени од два витеза и $1010-(a+b)$ парови составени од витез и штитоносец. Тогаш витези ќе бидат наречени $2a+2b$ луѓе, па затоа $2a+2b=2000$, од каде добиваме дека имаме $a+b=1000$ парови составени или од два витеза или од два штитоносци (еднородни парови). Според тоа, $1010-(a+b)=10$ парови се составени од витез и штитоносец и затоа $2000-10=1990$ штитоносци и $21-10=11$ витези се распоредени во 1000 еднородни парови. Тоа значи дека сите штитоносци се распоредени во еднородни парови, т.е. дека имаме $1990:2=995$ парови составени од два штитоносци.

Задача 77. На турнир, секоја од шесте екипи игра по еден натпревар против секоја друга екипа. Во секое коло трите натпревари се одвиваат истовремено. Една ТВ станица одлучила кој натпревар

1	2	3	4	5
A-B	C-D	A-E	E-F	A-C

ќе го пренесува за секое коло и тоа е прикажано на дијаграмот десно. Состави го целиот распоред на натпревари на турнирот.

Решение. Екипата А во првото, третото и петтото коло игра против екипите В, Е и С, па затоа во второто и четвртото коло треба да игра против екипите D и F. Но, F е зафатена во четвртото коло, па затоа во ова коло А ќе игра против D, а во второто коло А ќе игра против F. Така го имаме следниот распоред, при што во второто коло се среќаваат В и Е, а во четвртото коло се среќаваат В и С.

1	2	3	4	5
A-B	C-D	A-E	E-F	A-C
	A-F		A-D	
	B-E		B-C	

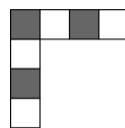
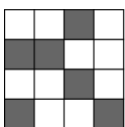
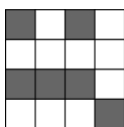
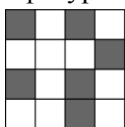
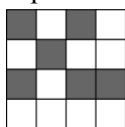
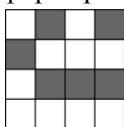
Понатаму, екипата С натпреварите со Е и F треба да ги одигра во првото и третото коло, па како Е е зафатена во третото коло, преостанува во првото коло да играат С и Е, а во третото коло да играат С и F. Така го добиваме следниов распоред, при што во второто коло се среќаваат D и F, а во третото коло се среќаваат В и D.

1	2	3	4	5
A – B	C – D	A – E	E – F	A – C
C – E	A – F	C – F	A – D	
D – F	B – E	B – D	B – C	

Конечно, во петтото коло B игра со F и D игра со E. Целиот распоред на натпревари на турнирот е даден во долната табела.

1	2	3	4	5
A – B	C – D	A – E	E – F	A – C
C – E	A – F	C – F	A – D	B – F
D – F	B – E	B – D	B – C	D – E

Задача 78. На цртежот десно се прикажани две фигури. Кој од дадените 4×4 квадрати не може да се формира со прикажани фигури?



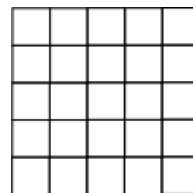
Решение. За првите четири квадрати, сметајќи од лево на десно имаме



т.е. тие може да се состават со помош на дадените фигури. Петтиот квадрат не може да се состави со помош на дадените фигури, бидејќи, на пример не содржи 3×3 квадрат со дадениот облик.

Задача 79. Броевите 0 и 1 се запишани во единечните полиња на квадратна табла со димензии 5×5 така што секој 2×2 квадрат од таблата содржи точно три еднакви броеви.

Колку изнесува најголемиот можен збир на сите броеви запишани во таблата?



Решение. Барањето збирот на броевите да биде најголем, всушност е барање да се запишат најголем можен број единици. Четирите 2×2 квадрати кои се во аглиите на големиот квадрат се дисјунктни, па како секој од

нив треба да содржи по точно три еднакви броја, заклучуваме дека во секој од нив има точно по една нула. Значи, во големиот квадрат мора да има најмалку 4 нули. Дека 4 нули се доволни покажува распоредот прикажан на цртежот десно, при што се добива најголемиот можен збир на сите броеви запишани во таблицата. Значи, најголемиот можен збир е 21.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Задача 80. Две девојчиња, Ева и Олга и три момчиња, Александар, Иван и Михаил играат со топка. Ако топката е кај девојче, тоа топката ја фрла на момче или на девојче. Ако топката е кај момче, тоа топката ја фрла на момче, но не на момчето од кое непосредно ја добило топката. Играта ја почнува Ева и таа топката му ја фрлила на Александар. Кој ќе го направи петтото фрлање на топката?

Решение. Имаме две можности:

Прва можност		
Фрлање	Фрла	Прима
Прво	Ева	Александар
Второ	Александар	Иван
Трето	Иван	Михаил
Четврто	Михаил	Александар
Петто	Александар	Иван

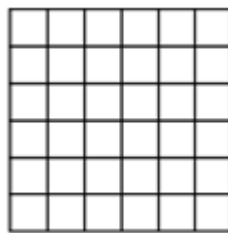
Втора можност		
Фрлање	Фрла	Прима
Прво	Ева	Александар
Второ	Александар	Михаил
Трето	Михаил	Иван
Четврто	Иван	Александар
Петто	Александар	Михаил

Значи, и во двата случаја по првото фрлање на топката продолжуваат да играат само момчињата. Притоа Александар и во двата случаја ќе го направи петтото фрлање. Имено, во првиот (вториот) случај Александар ќе го прави секое $3k+2$, $k \geq 0$ фрлање, Иван (Михаил) ќе го прави секое $3k$, $k \geq 1$ фрлање, а Михаил (Иван) ќе го прави секое $3k+1$, $k \geq 1$ фрлање.

Во претходниот дел презентиравме вкупно 80 решени задачи.

Се надеваме дека истите ќе ти помогнат полесно да ги совладуваш математичките содржини и дека со усвојување на овие задачи ќе се оспособиш да решаваш различни видови логички задачи. За почеток, обиди се да ги решиш следниве две задачи.

Задача 81. Во секое поле од 6×6 квадрат има по една светилка. Велиме дека две светилки се соседни ако тие лежат во полиња кои имаат заедничка страна. На почетокот некои светилки светат и во секоја минута, секоја светилка која има две соседни светилки кои светат почнува да свети. Кој е минималниот број на светилки кои треба да светат на почетокот, за да бидеме сигурни дека по некое време сите светилки ќе светат?



Задача 82. Симона обожава парни броеви, Маја обожава броеви деливи со 3, а Александра обожава броеви деливи со 5. Во кутија има 8 топчиња на кои се запишани броеви. Тие последователно од кутијата земаат топчиња на кои се напишани броеви кои ги обожаваат. Се покажало дека Симона ги зела топчињата со броеви 32 и 52, Маја со 24, 33 и 45, Александра со 20, 25 и 35. По кој редослед девојките ги земале топчињата?