Osječki matematički list **11**(2011), 107–112

Pravila djeljivosti

Bernadin Ibrahimpašić* Senka Ibrahimpašić†
Dragana Kovačević‡ Alma Šehanović§

Sažetak. *Pravila djeljivosti nam služe za ispitivanje je li dani broj djeljiv s fiksnim djeliteljem, ali bez provođenja postupka dijeljenja. Najčešće se ispitivanje provodi ispitujući znamenke danog broja. U ovom članku dajemo pregled nekih pravila djeljivosti prirodnih brojeva.*

Ključne riječi: *djeljivost, pravila djeljivosti*

Divisibility rules

Abstract. *A divisibility rule is a shorthand way of discovering whether a given number is divisible by a fixed divisor without performing the division, usually by examining its digits. In this paper we present some rules for positive integers.*

Key words: *divisibility, divisibility rules*

1. Uvod

Pojam djeljivosti je jedan od najjednostavnijih, ali ujedno i najvažnijih pojmova u teoriji brojeva.

Definicija 1. *Neka su $a \neq 0$ i b cijeli brojevi. Kažemo da je b* djeljiv *s a, odnosno da a* dijeli *b, ako postoji cijeli broj k takav da je $b = ak$. To zapisujemo s $a|b$. Ako b nije djeljiv s a, onda pišemo $a \nmid b$.*

Ako $a|b$, onda još kažemo da je a djelitelj *od b, a da je b* višekratnik *od a. Oznaka $a^n \| b$ znači da $a^n | b$, ali $a^{n+1} \nmid b$.*

Ako trebamo ispitati je li broj 259 djeljiv brojem 7, najlakše je, pa i uz pomoć kalkulatora, izračunati koliko je $259 : 7$. Kako vrijedi da je $259 : 7 = 37$, tj. $259 = 7 \cdot 37$, to zaključujemo da je broj 259 djeljiv brojem 7. Međutim, ako trebamo provjeriti je li broj 2789018937825 djeljiv brojem 7, onda provjera dijeljenjem, bez upotrebe kalkulatora, nije ni malo privlačna. To je jedan od razloga za uvođenje pravila djeljivosti. Navedimo sada pravila djeljivosti s brojevima 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 25, 100 i 10^k, koja su nam, uglavnom, poznata.

*Pedagoški fakultet, Luke Marjanovića bb, BIH-77000 Bihać, e-mail: bernadin@bih.net.ba
†Opća gimnazija, Gimnazijska 1, BIH-77240 Bosanska Krupa, e-mail: senkai@bih.net.ba
‡Katolički školski centar "Sveti Josip", M. P. Sokolovića 11, BIH-71000 Sarajevo, e-mail: draganabrcina@yahoo.com
§Gimnazija "Meša Selimović", Muharema M. Fizovića 1, BIH-75000 Tuzla, e-mail: alma.sehanovic@gmail.com

Pravilo 1. *Vrijede sljedeća pravila:*

a) *Broj je djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8;*

b) *Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj zamenki djeljiv s 3;*

c) *Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4;*

d) *Broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5;*

e) *Broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv i s 2 i s 3;*

f) *Broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8;*

g) *Broj je djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0;*

h) *Broj je djeljiv s 25 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 25;*

i) *Broj je djeljiv sa 100 ako su mu posljednje dvije znamenke 00;*

j) *Broj je djeljiv s* 10^k *ako su mu posljednjih k znamenaka nule.*

Primjer 1. *Pojasnimo na primjerima navedena pravila.*

a) *Brojevi 352, 4098 i 31574 su djeljivi s 2, jer su im posljednje znamenke 2, 8 i 4, redom, dok brojevi 2241, 9047 i 23053 nisu djeljivi s 2.*

b) *Broj 7259420418 je djeljiv s 3, jer mu je zbroj znamenaka* $7+2+5+9+4+2+0+4+1+8=42$*, što je djeljivo s 3, jer je* $4+2=6$ *zbroj znamenaka broja 42, a 6 je djeljivo s 3. Broj 331402 nije djeljiv brojem 3, jer mu je zbroj znamenaka 13, što nije djeljivo s 3.*

c) *Broj 2310732 je djeljiv s 4, jer je njegov dvoznamenkasti završetak, tj. broj 32, djeljiv s 4. Broj 41723 nije djeljiv s 4, jer broj 23, kao njegov dvoznamenkasti završetak, nije djeljiv s 4.*

d) *Brojevi 65285 i 31270 su djeljivi s 5, dok brojevi 55051 i 297 nisu djeljivi s 5.*

e) *Broj 41778 je djeljiv sa 6, jer je djeljiv i s 2 (zadnja znamenka mu je 8) i s 3 (zbroj znamenaka mu je 27). Broj 3352 je djeljiv s 2, ali ne i s 3, pa nije ni sa 6. Broj 3015 je djeljiv s 3, ali nije s 2, pa nije djeljiv ni sa 6.*

f) *Broj 139536 je djeljiv s 8, jer je broj 536, kao njegov troznamenkasti završetak, djeljiv s 8. Broj 88118 nije djeljiv s 8, jer broj 118, koji je njegov troznamenkasti završetak, nije djeljiv s 8.*

g) *Brojevi 270 i 129000 su djeljivi s 10, dok brojevi 10001 i 4373 nisu.*

h) *Brojevi 28675 i 37200 su djeljivi s 25, a brojevi 252520 i 55093 nisu.*

i) *Brojevi 300 i 570000 su djeljivi sa 100, dok brojevi 203040 i 10095 nisu.*

j) *Broj 2350000 je djeljiv s* $10000=10^4$*, a broj 7208000 je djeljiv s* $10^3=1000$*.*

2. Djeljivost s brojevima manjim od 10

Sada ćemo opisati jedno pravilo za djeljivost prirodnim brojevima manjim od 10, tj. pravilo djeljivosti jednoznamenkastim brojem.

Neka je prirodan broj b zapisan u obliku

$$b = \overline{b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_0} = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0, \quad (1)$$

gdje je $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, b_n \neq 0$.

Teorem 1. *Prirodan broj b, zapisan u obliku (1), je djeljiv jednoznamenkastim prirodnim brojem m ako i samo ako je broj*

$$b_n \cdot (10-m)^n + b_{n-1} \cdot (10-m)^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot (10-m)^2 + b_1 \cdot (10-m) + b_0 \quad (2)$$

djeljiv brojem m.

Dokaz: Stavimo li da je $d = 10 - m$, onda tvrdnju iz (2) možemo zapisati kao

$$b_n d^n + b_{n-1} d^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot d^2 + b_1 d + b_0 = m \cdot k, \quad k \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$b_0 = mk - \left(b_n d^n + b_{n-1} d^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot d^2 + b_1 d\right). \quad (3)$$

Sada iz (1) i (3) imamo da je

$$\begin{aligned} b &= b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + \\ &\quad + mk - b_n d^n - b_{n-1} d^{n-1} - \cdots - b_2 \cdot d^2 - b_1 d \\ &= mk + b_n \cdot (10^n - d^n) + \cdots + b_2 \cdot \left(10^2 - d^2\right) + b_1 \cdot (10 - d) \\ &= mk - \sum_{k=1}^{n} b_k \left(10^k - d^k\right). \quad (4) \end{aligned}$$

Kako je

$$10^k - d^k = (10 - d)\left(10^{k-1} + 10^{k-2} d + \cdots + 10 d^{k-2} + d^{k-1}\right), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

to je $10^k - d^k$ djeljivo s $10 - d$, za sve prirodne brojeve k. Iz $d = 10 - m$ slijedi da je $m = 10 - d$, pa zaključujemo da su svi pribrojnici na desnoj strani jednakosti (4) djeljivi s $10 - d$. Iz toga slijedi i da je lijeva strana u (4), tj. broj b, djeljiv s $10 - d = m$.

Obrat tvrdnje se dokazuje potpuno analogno, samo obrnutim redoslijedom.

□

3. Djeljivost s 11

Pogledajmo sada pravilo za djeljivost s brojem 11, koje je vrlo interesantno i često se koristi.

Pravilo 2. *Broj je djeljiv s 11 ako mu je razlika zbroja znamenaka na neparnim i parnim mjestima, djeljiva s 11.*

Primjer 2. *Zbroj znamenaka na neparnim mjestima u broju 43703291247 je* $4+7+3+9+2+7=32$*, a zbroj znamenaka na parnim mjestima je* $3+0+2+1+4=10$*. Razlika ta dva zbroja je* $32-10=22$*, i djeljiva je s 11, pa zaključujemo da je i broj 43703291247 djeljiv s 11.*

Pokažimo da opisano pravilo za djeljivost s brojem 11 zaista vrijedi. Za to će nam trebati tri tvrdnje.

(*i*) Svaki broj koji se sastoji samo od parnog broja znamenaka 9, djeljiv je s 11. Ovo je lako provjeriti, jer se svaki takav broj može zapisati u obliku

$$9999\ldots 99 = 99\cdot\left(10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots 10^2+1\right) = 9\cdot 11\cdot 1010\ldots 101.$$

(*ii*) Svaki broj oblika $10^{2n}-1$ je djeljiv s 11, jer je to broj koji se sastoji samo od parnog broja znamenaka 9.

(*iii*) Svaki broj oblika $10^{2n-1}+1$ je djeljiv s 11, jer se takav broj može zapisati u obliku

$$10^{2n-1}+1 = 9999\ldots 99\cdot 10+11.$$

Sada razdvojimo diskusiju na dva slučaja, u ovisnosti o tome ima li broj b neparan ili paran broj znamenaka. Ako broj b ima neparan broj znamenaka, onda je

$$\begin{aligned}
b &= b_{2n}\cdot 10^{2n}+b_{2n-1}\cdot 10^{2n-1}+\cdots\\
&\quad +b_2\cdot 10^2+b_1\cdot 10+b_0\\
&= b_{2n}\cdot\left(10^{2n}+1-1\right)+b_{2n-1}\cdot\left(10^{2n-1}+1-1\right)+\cdots\\
&\quad +b_2\cdot\left(10^2+1-1\right)+b_1\cdot(10+1-1)+b_0\\
&= \left[b_{2n}\cdot\left(10^{2n}-1\right)+b_{2n-1}\cdot\left(10^{2n-1}+1\right)+\cdots+b_2\cdot\left(10^2-1\right)+b_1\cdot(10+1)\right]\\
&\quad +\left(b_{2n}-b_{2n-1}+\cdots+b_2-b_1+b_0\right).
\end{aligned}$$

Kako je svaki pribrojnik u uglatim zagradama, prema (*ii*) i (*iii*), djeljiv s 11, to je cijeli zbroj u uglatim zagradama djeljiv s 11. Slijedi da je broj b djeljiv s 11 ako i samo ako je zbroj $b_{2n}-b_{2n-1}+\cdots+b_2-b_1+b_0$ djeljiv s 11. Međutim, taj se zbroj može zapisati u obliku

$$\left(b_{2n}+b_{2n-2}+\cdots+b_2+b_0\right)-\left(b_{2n-1}+b_{2n-3}+\cdots+b_3+b_1\right),$$

što predstavlja razliku zbroja znamenaka na neparnim, odnosno parnim mjestima.

Na taj način smo pokazali da navedeno pravilo vrijedi u slučaju kada broj b ima neparan broj znamenaka. Potpuno analogno se analizira slučaj kada broj b ima paran broj znamenaka.

4. Djeljivost prostim brojevima manjim od 50

U ovom poglavlju ćemo dati pravila djeljivosti s prostim brojevima manjim od 50, osim s prostim brojevima 2, 3 i 5. Kako su sva pravila slične forme, to ćemo samo jedno pravilo dokazati, jer se svako drugo dokazuje na potpuno analogan način. Također ćemo i na primjeru objasniti samo jedno od pravila koja ćemo navesti.

Opišimo jedan pojam koji se koristi u sljedećim pravilima. Broj desetica nekog prirodnog broja je broj koji se dobije kada zadanom broju obrišemo znamenku jedinica. Tako je, na primjer, 254 broj desetica brojeva $2540, 2541, \ldots, 2549$.

Pravilo 3. *Broj je djeljiv*

a) sa 7 ako je razlika broja desetica i 2–struke znamenke jedinica djeljiva sa 7;

b) s 11 ako je razlika broja desetica i znamenke jedinica djeljiva s 11;

c) s 13 ako je zbroj broja desetica i 4–struke znamenke jedinica djeljiv s 13;

d) sa 17 ako je razlika broja desetica i 5–struke znamenke jedinica djeljiva sa 17;

e) s 19 ako je zbroj broja desetica i 2–struke znamenke jedinica djeljiv s 19;

f) s 23 ako je zbroj broja desetica i 7–struke znamenke jedinica djeljiv s 23;

g) s 29 ako je zbroj broja desetica i 3–struke znamenke jedinica djeljiv s 29;

h) s 31 ako je razlika broja desetica i 3–struke znamenke jedinica djeljiva s 31;

i) s 37 ako je razlika broja desetica i 11–struke znamenke jedinica djeljiva s 37;

j) s 41 ako je razlika broja desetica i 4–struke znamenke jedinica djeljiva s 41;

k) s 43 ako je zbroj broja desetica i 13–struke znamenke jedinica djeljiv s 43;

l) s 47 ako je razlika broja desetica i 14–struke znamenke jedinica djeljiva s 47.

Napomenimo da se svako pravilo ponavlja sve dok se ne dođe do broja za koji smo sigurni je li djeljiv ili nije s promatranim brojem.

Dokaz: Dokazat ćemo pravilo djeljivosti sa 7. Neka je d broj desetica broja b, i neka je j znamenka jedinica. Tada je broj b oblika

$$b = 10d + j.$$

Pretpostavimo da je razlika broja desetica broja b i dvostruke znamenke jedinica djeljiva sa 7. To znači da je

$$d - 2j = 7k, \quad j \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \; k \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}.$$

Pokažimo da je tada i broj b djeljiv sa 7.

$$\begin{aligned}
b &= 10d + j \\
&= 10(d - 2j + 2j) + j \\
&= 10(d - 2j) + 20j + j \\
&= 10(d - 2j) + 21j \\
&= 10 \cdot 7k + 7 \cdot 3j \\
&= 7 \cdot (10k + 3j)
\end{aligned}$$

Kako je $10k + 3j \in \mathbb{Z}$, zaključujemo da je i broj b djeljiv sa 7.

$\square$

Primjer 3. *Pokažimo da je broj 217413 djeljiv brojem 7.*

$$\begin{aligned} 217413 \quad &\Rightarrow \quad 21741 - 2 \cdot 3 = 21735 \quad \Rightarrow \quad 2173 - 2 \cdot 5 = 2163 \\ &\Rightarrow \quad 216 - 2 \cdot 3 = 210 \quad \Rightarrow \quad 21 - 2 \cdot 0 = 21 = 7 \cdot 3 \end{aligned}$$

Kako je broj 21 djeljiv sa 7, to je i broj 217413 djeljiv sa 7.

Primjer 4. *Pokažimo da broj 359048 nije djeljiv brojem 13.*

$$\begin{aligned} 359048 \quad &\Rightarrow \quad 35904 + 4 \cdot 8 = 35936 \quad \Rightarrow \quad 3593 + 4 \cdot 6 = 3617 \\ &\Rightarrow \quad 361 + 4 \cdot 7 = 389 \quad \Rightarrow \quad 38 + 4 \cdot 9 = 74 \quad \Rightarrow \quad 7 + 4 \cdot 4 = 23 \end{aligned}$$

Kako broj 23 nije djeljiv s 13, to ni broj 359048 nije djeljiv s 13.

Literatura

[1] W. E. Clark: *Elementary number theory*, Lecture Notes, Department of Mathematics, University of South Florida, Florida, 2002.
`shell.cas.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf`

[2] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić: *Male teme iz matematike*, Element, Zagreb, 1994.

[3] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić: *Elementarna teorija brojeva*, Element, Zagreb, 1994.

[4] M. S. Popadić: *Deljivost celih brojeva*, ETF Beograd, Beograd, 1959.