Ристо Малчески
Алекса Малчески
Катерина Аневска

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА АЛГЕБРА

Скопје, 2019

Рецензенти
д-р Слаѓана Брсакоска
професор на Природно-математички факултет, Скопје
д-р Методи Главче
професор на Педагошки факултет, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

512.1:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Збирка задачи по елементарна алгебра / Ристо Малчески, Алекса Малчески, Катерина Аневска. - Скопје : Армаганка, 2020. - 280 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 279-280

ISBN 978-608-4904-70-0
1. Малчески, Алекса [автор] 2. Аневска, Катерина [автор]
а) Елементарна алгебра - Основно образование - Задачи од натпревари
COBISS.MK-ID 111968266

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета на надарените учениците за математика во основното образование. Меѓутоа мислиме дека истата ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на надарените ученици за математика.

Книгата всушност е збирка од 625 задачи, од кои 542 се целосно решени. Меѓутоа, дел од задачите содржат и по неколку подзадачи, што значи дека вкупниот број задачи е значително поголем. Во секој дел, на почетокот се дадени формулациите на задачите, за да во продолжение се презентирани решенијата на поголем број од зададените проблеми. Затоа, на корисниците на оваа книга им препорачуваме прво да се обидат определена задача самостојно да ја решат, па ако тоа не им успее да го проучат понуденото решение. Задачите се поделени во тринаесет целини и тоа:

- операции со реални броеви,
- полиноми,
- алгебарски рационални изрази,
- идентитети,
- неравенства,
- најголема и најмала вредност,
- функции и функционални равенки,
- линеарна функција,

- линеарна равенка со една непозната,
- линеарна неравенка со една непозната,
- системи линеарни равенки,
- квадратни равенки и квадратни неравенки и
- дополнителни задачи.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква, што тие се посебно интересни за комисиите кои ги составуваат задачите за математичките натпревари. Имено, во сите делови на книгата се содржани голем број задачи од натпреварите кои се одржани во нашата држава, Србија, Црна Гора, Босна и Херцеговина, Романија, Бугарија, Хрватска, како и задачи од Јуниорските балкански олимпијади.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, па затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Ќе ни биде особено задоволство ако оваа збирка допринесе да навлезете во тајните на математиката, да ја засакате истата и можеби таа да Ви стане и животен позив.

На крајот сакаме да им се заблагодариме на сите кои допринесоа да се издаде оваа книга, а посебно на рецензентите за корисните сугестии при конечното обликување на истата.

Скопје, 2019 Авторите

1. ОПЕРАЦИИ СО РЕАЛНИ БРОЕВИ

1.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Нека A е двоцифрен број кој завршува на 5. Ако m е цифрата на десетки на A тогаш A^2 е еднаков на бројот кој се добива кога на $m(m+1)$ од десно му се допише 25.

Задача 2. Ако $xy=6$, $yz=9$ и $zx=24$, колку изнесува вредноста на xyz?

Задача 3. Дадени се множествата

$$A=\{1,2,\dots,1993\} \text{ и } B=\{0,-1,\dots,-1993\}.$$

Нека c е збирот на сите броеви од A и B, d нивниот производ и e разликата од збировите на непарните броеви од A и парните броеви од B. Подреди ги броевите

$$|c-d|, |d-e| \text{ и } |e-c|$$

по големина.

Задача 4. Ако за три броја a, b и c важи $a:b=7:3$, $b:c=5:2$, колку е $(a-b):(b+c)$?

Задача 5. Која цифра се наоѓа на 1999 место во децималниот запис на дропката $\frac{2}{7}$?

Задача 6. Пресметај:

а) $1\frac{5}{8}+(1\frac{1}{2}+((\frac{1}{2}-\frac{1}{6})\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+1)):\frac{2}{3}$, б) $0,6:\frac{1\frac{1}{2}+0,5:2\frac{1}{2}-0,25}{15-0,5}$.

Задача 7. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$[\frac{7,5\cdot 0,028}{\frac{3}{4}-0,36:0,6}-(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+0,725):\frac{7}{6}]:(4,5-3\frac{4}{7}):\frac{28}{65}.$$

Задача 8. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$[15:\frac{(0,6+0,425-0,005):0,01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}]\cdot(0,645:0,3-1\frac{107}{180})\cdot(4:6,25-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot 1,96)$$

Задача 9. Колку пати вредноста на изразот

$$\frac{(4,07:\frac{1}{20}-23,01\cdot 0,06):4+0,0703\cdot\frac{1}{2}}{(7,3745:3,01-1\frac{1}{4})\cdot 1\frac{1}{50}+13:16\frac{2}{3}}$$

е поголема од вредноста на изразот

$$\frac{6}{7}+\frac{4\frac{4}{7}:2-\left(1:\frac{1}{25}-2,5:\frac{1}{10}\right)\cdot 8\frac{8}{17}}{13\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}:0,5}$$

Задача 10. Вредноста на изразот

$$\frac{3+4,2:0,1}{[1:0,3-\frac{7}{3}]\cdot 0,3125}$$

е $3,6\,\%$ од бројот A. Најди го бројот A!

Задача 11. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

за секој природен број n.

Задача 12. Да се пресмета збирот

$$S=1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\frac{3}{4!}-\dots-\frac{1998}{1999!}$$

каде $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$

Задача 13. Одреди кој од изразите е поголем:

(1) $$(1+19)(1+\frac{19}{2})(1+\frac{19}{3})...(1+\frac{19}{81}),$$

(2) $$(1+81)(1+\frac{81}{2})(1+\frac{81}{3})...(1+\frac{81}{19}).$$

Задача 14. Ако n е природен број поголем од 2, докажи дека меѓу дропките $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n-1}{n}$ има парен број нескратливи дропки.

Задача 15. Нека дропката $\frac{m}{n}$ е правилна, т.е. m и n се цели позитивни броеви и $m<n$. Дропките $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ се пресликуваат на бројната

оска во точките A и B. Која од овие две точки е поблиску до точката E, која е слика на бројот 1?

Задача 16. Докажи дека ниту збирот, ниту разликата на две нескратливи дропки, чии именители се различни не можат да бидат цели броеви.

Задача 17. Што е поголемо 65^{334} или 2^{2000}?

Задача 18. Докажи дека $32^{24} > 13^{32}$.

Задача 19. Кој од броевите 31^{11} и 17^{14} е поголем?

Задача 20. Докажи дека $1600^4 + 400^4 > 39^8 + 19^8$.

Задача 21. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10} + 12^{10}}$, б) $\frac{2^{18}\cdot 3^{22}\cdot 5 - 7\cdot 2^{18}\cdot 3^{21}}{6^{18}\cdot 9^2 - 4^9\cdot 9^{10}}$.

Задача 22. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9 - 4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19} - 7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}.$$

Задача 23. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$-\frac{1}{0,25}[(\frac{1}{0,25})^2\cdot(\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{0,5})^3\cdot(-\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{0,8})^2] : (2 - \frac{2}{2^2})^2 .$$

Задача 24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(-10)^2\,\frac{[6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} - 10^2\cdot(-0,2)^3]\cdot(0,015 : 0,12 + 0,7)}{1,2 : [(-3)\cdot(-\frac{1}{2})^3] - 0,2}.$$

Задача 25. Без користење на калкулатор докажи дека

$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 = 11\cdot 91\cdot 111.$$

Задача 26. Бројот 2014^7 претстави го како збир од квадрати на три природни броеви.

Задача 27. Упрости го изразот:

$$88\cdot(89^{2002} + 89^{2001} + \ldots + 89^2 + 89 + 1) + 1.$$

Задача 28. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$9^{15} - 10\cdot 9^{14} + 10\cdot 9^{13} - 10\cdot 9^{12} + \ldots - 10\cdot 9^2 + 10\cdot 9 - 1.$$

Задача 29. а) Користејќи дека равенството $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ важи за секој природен број n, пресметај го збирот

$$S=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2.$$

б) Нека

$$a=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\frac{4^2}{7}+...+\frac{1001^2}{2001} \text{ и } b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+...+\frac{1001^2}{2003}.$$

Пресметај $a-b$.

Задача 30. Пресметај: $1^2-2^2+3^2-4^2+...+99^2-100^2+101^2$.

Задача 31. За кој цел број m бројот $\frac{1+2+\ldots+2011+m}{1+2+\ldots+2010+m}$ ќе биде најмал и природен број?

Задача 32. Пресметај го збирот

$$1999^2-1997^2+1995^2-1993^2+...+7^2-5^2+3^2-1^2.$$

Задача 33. Пресметај го збировите:

а) $1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}+5^n$,

б) $1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1}+3^n$.

Задача 34. Пресметај го збирот

$$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+...+2\cdot 3^{2014}.$$

Задача 35. Пресметај

$$A=a+ax+ax^2+ax^3+...+ax^{n-1},\ a,x\in\mathbf{R},\ x\neq 0,1,\ a\neq 0.$$

Задача 36. Пресметај го збирот: $8+88+888+...+\underbrace{88...88}_{n}$.

Задача 37. Пресметај го збирот

$$S_n=1+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+...+(1+3+3^2+...+3^{n-1}),\ n\geq 1.$$

Задача 38. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^k+2^{k+1}+2^{k+2}+...+2^{k+n}=2^{55}-2^{25}.$$

Задача 39. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=(1+3+3^2+...+3^7)(\frac{1}{1+2+3+...+1007}+\frac{1}{1+2+3+...+1008}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2013}).$$

Задача 40. Пресметај го збирот:

$$S=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}. \tag{1}$$

Задача 41. Пресметај го збирот:

$$2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+...+n\cdot 2^n.$$

Задача 42. Димитар на некој начин цифрите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ги распоредил на кружница. Секои три последователни цифри, во насока на стрелките на часовникот, формираат трицифрен број. Сите такви броеви тој ги собрал. Кој збир го добил Димитар?

Задача 43. Пред секој од броевите $1,2,\ldots,2011$, избери еден од знаците + или -, така што изразот $A=|\pm 1\pm 2\pm\ldots\pm 2011|$ да има најмала вредност.

Задача 44. За кои реални вредности на a,b и c важи равенството:

$$\frac{a^{2002}+b^8+c^6+1}{2}=a^{1001}+b^4+c^3-1?$$

Задача 45. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Ако

$$S_k=b_1+b_2+...+b_k,\ k=1,2,3,...,n,$$

докажи дека

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+...+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n.$$

Задача 46. Од непарните природни броеви ги формираме множествата

$$A_1=\{1\},\ A_2=\{3,5\},\ A_3=\{7,9,11\},\ A_4=\{13,15,17,19\},\ldots$$

Да се пресмета збирот на броевите на множеството A_n.

Задача 47. Пресметај:

а) $(xy)^4$, ако $x^{-2}y^{-2}=3,\ xy\neq 0$,

б) $\frac{(x^{-2})^{-3}(x^3)^4(x^{-17})^{-1}}{x^7}$, ако $x^7=3$,

в) $a^6+3a^2b^2+b^6$, ако $a^2+b^2=1$.

Задача 48. Ако $9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12$ и $3x-2y+4a=4$, колку е $3x-2y$?

Задача 49. За реалните броеви x,y,z важи $xyz=1$. Ако $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$, $c=z+\frac{1}{z}$, пресметај $a^2+b^2+c^2-abc$.

Задача 50. Упрости го изразот: $[\frac{b^{-3}b^7(b^{-1})^2}{(-b)^2(b^2)^3}]^{-2}$.

Задача 51. Кој израз е поголем и за колку:

$$A\equiv(16\cdot 0,25^{3n-2}):(-0,5\cdot 0,25^{3n-4}) \text{ или } B\equiv 81\cdot(\tfrac{2}{3})^{12-4n}\cdot 3\cdot(-\tfrac{2}{3})^{4n-7}.$$

Задача 52. Кој израз е поголем и за колку:

$$A\equiv(-4\cdot 0,5^{2n-7})\cdot(12\cdot 0,5^{10-2n}) \text{ или } B\equiv[27\cdot(\tfrac{1}{3})^{5n-1}]:[0,5\cdot(\tfrac{1}{3})^{5n-3}].$$

Задача 53. Пресметај ја вредноста на изразот $\underbrace{11...1}_{200}-\underbrace{22...2}_{100}$.

Задача 54. Одреди го бројот a ако $a^2=1\underbrace{00...0}_{1990}5\cdot\underbrace{11...1}_{1991}+1$.

Задача 55. Дали бројот $\overbrace{111...1}^{1998}\overbrace{555...5}^{1997}6$ е квадрат на природен број?

Задача 56. Природните броеви a,b и c се такви, што броевите $a+c$ и $b+c$ се квадрати на два последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ исто така се квадрати на два последователни природни броеви.

Задача 57. Нека a,b,c,d се рационални броеви $c\neq 0$ или $d\neq 0$ и нека x е ирационален број. Кој услов треба да го задоволуваат броевите a,b,c,d за да $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален број?

Задача 58. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

Задача 59. За три реални броеви е познато дека збирот на секои два е поголем од третиот. Докажи дека броевите се позитивни.

Задача 60. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2\sqrt{75}-3\sqrt{48}+5\sqrt{108}-27\sqrt{3}\ .$$

Задача 61. Спореди ги броевите

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}}\ \text{ и } 10\ .$$

Задача 62. Нека $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}},\ y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$. Пресметај

$$x^4+y^4+(x+y)^4\ .$$

Задача 63. Докажи дека вредноста на изразот

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

е природен број.

Задача 64. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Задача 65. Докажи дека бројот

$$2\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{(2\sqrt{7}-6)^2}$$

е рационален.

Задача 66. Докажи дека

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4\ .$$

Задача 67. Докажи дека

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Задача 68. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}\ .$$

Задача 69. Упрости го изразот

$$A=(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ .$$

Задача 70. Пресметај:

$$(2012-\sqrt{1+2014\sqrt{1+2013\cdot 2011}})^2\ .$$

Задача 71. Упрости го изразот:

$$\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\tfrac{9}{2}}\,.$$

Задача 72. Одреди дропка со именител 9, поголема од $\frac{2}{3}$ и помала од $\frac{5}{6}$.

Задача 73. Најди ги сите дропки, кај кои именителот е едноцифрен број, а се поголеми од $\frac{5}{7}$ и помали од $\frac{6}{7}$.

Задача 74. Дропката $\frac{93}{91}$ претставија како збир на две позитивни дропки со именители 7 и 13.

Задача 75. Збирот на три нескратливи дропки изнесува $\frac{65}{72}$, при што нивните броители се однесуваат како $1:3:5$. Именителот на првата спрема именителот на вората дропка се однесува како $1>2$, а именителот на втората спрема именителот на третата дропка се однесува како $4:9$. Најди ги овие дропки.

Задача 76. Броевите p, q и $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ се рационални. Докажи дека и двата броеви, $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ се рационални!

Задача 77. Нека x, y, z се агли на даден триаголник, (во степени). Докажи дека ако $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ се рационални броеви, тогаш x, y, z се исто така рационални броеви.

Задача 78. а) Докажи дека $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е ирационален број.

б) Ако за позитивните броеви a, b, $a>b$ важи

$$a^2+b^2=4ab\,,$$

докажи дека бројот $\frac{a+b}{a-b}$ е ирационален.

Задача 79. За позитивните рационални броеви a, b и c е исполнето равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Задача 80. Докажи дека $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$ е ирационален број.

Задача 81. Ако a,b,c и $\frac{a-b\sqrt{2003}}{b-c\sqrt{2003}}$ се рационални броеви, докажи дека $ac=b^2$.

Задача 82. Докажи дека

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\,.$$

Задача 83. Рационализирај го именителот на дропката

а) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, б) $\frac{2}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$, в) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$.

Задача 84. Рационализирај го именителот на дропката

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$, б) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Задача 85. Докажи го равенството

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}=\sqrt{2}-1.$$

Задача 86. Пресметај ја вредноста на бројниот израз:

$$\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right).$$

Задача 87. Пресметај 22,5% од $\frac{1}{3}$ од

$$\left[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2-1000\cdot1940+970^2)(1000^2-1000\cdot1998+999^2)}\right]^{30}.$$

Задача 88. Докажи дека бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

Задача 89. Ако $\frac{a+5b}{a-5b}=5$, $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq5b$, колку е $\frac{a+2b}{a-2b}$?

Задача 80. Докажи дека:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{197}-\frac{1}{198}+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}.$$

Задача 91. Пресметај го производот

$$101\cdot10001\cdot100000001\cdot\ldots\cdot1\underbrace{00\ldots00}_{2^n-1}1.$$

Задача 92. Ако x е парен цел број, докажи дека

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}+\sqrt{2x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+2}}}$$

е цел број.

Задача 93. Нека се p и q природни броеви такви што $p<q$. Што е поголемо $\frac{p-1}{q-1}\cdot\frac{p}{q}$ или $\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{p}{q}$ и зошто?

Задача 94. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\left(\frac{43}{2\frac{1}{84}-1\frac{1}{2}}+\frac{73}{4\frac{13}{20}-2\frac{7}{18}-1\frac{107}{108}}\right)\cdot\frac{1}{354}$;

б) $(42\frac{1}{2}-31{,}3):(12\frac{3}{4}-\frac{1{,}8\cdot\frac{1}{5}}{(0{,}63-0{,}27)\cdot\frac{2}{9}})+(2\frac{1}{2}+\frac{(0{,}2+\frac{1}{3}):\frac{2}{3}}{0{,}4}):\frac{3}{5}$.

Задача 95. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $1+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1{,}5}}}[5-\frac{7}{8}(1+0{,}405:0{,}945)+1{,}25-\frac{1}{9}(5-0{,}35:0{,}32):\frac{1}{9}]$;

б) $\frac{10\frac{47}{180}-8\{(0{,}46+\frac{1}{90}+\frac{1}{24})-[\frac{19}{6}-(6+0{,}0675:1{,}215)]\}}{3{,}9986+0{,}1\sqrt{0{,}000196}}$;

в) $\frac{\sqrt{0{,}75+2\frac{1}{3}+\frac{64}{30}:0{,}12-1\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{18}}}{\sqrt{\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^3}{3\cdot 2^3\cdot 5^2}\cdot\frac{5}{9}:\frac{2}{3}\cdot\frac{2{,}5-1}{3{,}5-1}\cdot\frac{1}{16}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{36}}$.

Задача 96. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{4a+b+3c}{3a-c+b}$, ако $a:b=1:3$ и $a+b=c$.

Задача 97. а) Ако k е произволен природен број, докажи дека

$$\frac{1}{k(k+100)}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+100}\right);$$

б) Пресметај $\frac{a}{b}$ ако

$$a=\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 13}+...+\frac{1}{100\cdot 110},\quad b=\frac{1}{1\cdot 101}+\frac{1}{2\cdot 102}+\frac{1}{3\cdot 103}+...+\frac{1}{10\cdot 110}.$$

в) Пресметај го збирот

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{97\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 101}.$$

Задача 98. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{25})...(1-\frac{1}{64})(1-\frac{1}{81}).$$

Задача 99. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)(11^4+11^2+1)}.$$

Задача 100. Бројот $\underbrace{111...11}_{1988}\cdot\underbrace{222...22}_{1988}$ претстави го како производ на два последователни природни броеви.

1.2. РЕШЕНИЈА

1. Имаме $A=10m+5$. Па добиваме

$$A^2=100m^2+100m+25=100m(m+1)+25.$$

Бидејќи бројот $100m(m+1)$ завршува на две нули го добиваме тврдењето на задачата.

2. Ако ги помножиме сите три равенки ќе добиеме

$$xyyzzx=6\cdot9\cdot24,\text{ т.е. } x^2y^2z^2=3^2\cdot4^2\cdot3^2.$$

Ова е еквивалентно со $(xyz)^2=36^2$, од каде добиваме дека $xyz=36$ или $xyz=-36$.

3. Имаме $c=0,\ d=0$ и

$$e=(1+3+\ldots+1993)-(0-2-\ldots-1992)=$$
$$=1+2+\ldots+1993=\frac{1993\cdot(1993+1)}{2}=997\cdot1993.$$

Според тоа, $|c-d|=0,\ |d-e|=997\cdot1993$ и $|e-c|=997\cdot1993.$ Сега подредувањето е очигледно.

4. Од првото равенство имаме $a=\frac{7}{3}b$, а од второто равенство следува дека $b=\frac{5}{2}c$. Од последните две равенства се добива дека

$$a=\frac{7}{3}b=\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}c=\frac{35}{6}c.$$

Конечно,

$$(a-b):(a+b)=(\tfrac{35}{6}c-\tfrac{5}{2}c):(\tfrac{35}{6}c+\tfrac{5}{2}c)=\tfrac{10}{3}c:\tfrac{25}{3}c=10:25=2:5.$$

5. Од $\frac{2}{7}=0,28571428571428571...$ и $1999:6=333$ со остаток 1 наоѓаме дека бараната цифра е 2.

6. а) Имаме

$$1\frac{5}{8}+(1\frac{1}{2}+((\frac{1}{2}-\frac{1}{6})\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+1)):\frac{2}{3}=1\frac{5}{8}+(1\frac{1}{2}+(\frac{2}{6}\cdot\frac{7}{12}+1)):\frac{2}{3}$$
$$=1\frac{5}{8}+(1\frac{1}{2}+1\frac{7}{36}):\frac{2}{3}$$
$$=1\frac{5}{8}+2\frac{25}{36}:\frac{2}{3}=1\frac{5}{8}+\frac{97}{36}\cdot\frac{3}{2}=\frac{13}{8}+\frac{97}{24}$$
$$=\frac{13\cdot 3+97}{24}=\frac{136}{24}=5\frac{2}{3}$$

б) Имаме

$$0,6:\frac{1\frac{1}{2}+0,5:2\frac{1}{2}-0,25}{15-0,5}=0,6:\frac{1,5+0,5:2,5-0,25}{15-0,5}=0,6:\frac{1,5+0,2-0,25}{15-0,5}$$
$$=0,6:\frac{1,45}{14,5}=0,6:0,1=6.$$

7. Со последователни пресметувања добиваме

$$[\frac{0,21}{0,75-0,6}-(\frac{1}{15}+\frac{3}{8}+\frac{29}{40}):\frac{7}{6}]:(\frac{9}{2}-\frac{25}{7}):\frac{28}{65}=(\frac{0,21}{0,15}-\frac{140}{120}\cdot\frac{6}{7}):\frac{13}{14}:\frac{28}{65}$$
$$=(\frac{7}{5}-1)\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{65}{28}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=1.$$

8. Со последователни пресметувања добиваме

$$(15:\frac{1,02:0,01}{34})\cdot(2,15-1\frac{107}{180})\cdot(\frac{16}{25}-\frac{5}{25}+0,28)=(15:\frac{102}{34})\cdot(2\frac{3}{20}-1\frac{107}{180})\cdot(\frac{16}{25}-\frac{5}{25}+\frac{7}{25})$$
$$=5\cdot(1\frac{207}{180}-1\frac{107}{180})\cdot\frac{18}{25}=5\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{18}{25}=2.$$

9. Вредноста на првиот израз е:

$$A_1=\frac{(81,4-1,3806):4+0,03515}{(2,45-1,25)\cdot 1,02+13\cdot\frac{3}{50}}=\frac{80,0194:4+0,03515}{1,20\cdot 1,02+0,78}=\frac{20,04}{2,004}=10\,.$$

Вредноста на вториот израз е:

$$A_2=\frac{6}{7}+\frac{2\frac{2}{7}-(25-25)\cdot 8\frac{7}{18}}{13\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}}=\frac{6}{7}+\frac{2\frac{2}{7}}{16}=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}=1\,.$$

Значи, $A_1=10=10A_2$, што значи дека вредноста на првиот израз е десет пати поголема од вредноста на вториот израз.

10. Вредноста на дадениот израз е:

$$\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-\frac{7}{3})\cdot 0,3125}=\frac{3+4,2\cdot 10}{(1\cdot\frac{10}{3}-\frac{7}{3})\cdot 0,3125}=\frac{45}{0,3125}=144\,.$$

Според тоа, за бројот A добиваме:

$$A = 144 : \frac{3{,}6}{100} = 144 \cdot \frac{1000}{36} = 4000 .$$

11. Ако искористиме дека

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ за } k = 1, 2, ..., n$$

добиваме

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

12. Ако земеме дека за $k = 2, 3, \dots, 1999$ важи

$$\frac{1-k}{k!} = \frac{1}{k!} - \frac{k}{k!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!},$$

добиваме

$$S = 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{1998!} - \frac{1}{1997!} + \frac{1}{1999!} - \frac{1}{1998!} = \frac{1}{1999!} .$$

13. Ќе докажеме поопшто тврдење т.е. за произволни природни броеви m и n важи:

$$(1+m)(1+\frac{m}{2})(1+\frac{m}{3})...(1+\frac{m}{n}) = (1+n)(1+\frac{n}{2})(1+\frac{n}{3})...(1+\frac{n}{m}) .$$

Имено,

$$(1+m)(1+\frac{m}{2})(1+\frac{m}{3})...(1+\frac{m}{n}) = (1+m)\cdot\frac{2+m}{2}\cdot\frac{3+m}{3}\cdot ... \cdot\frac{m+n}{m}$$

$$= \frac{(1+m)(2+m)(3+m)\cdot ...\cdot(n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m\cdot(m+1)\cdot ...\cdot(m+n)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m)}$$

$$= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)(n+1)(n+2)\cdot ...\cdot(n+m)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m}$$

$$= (1+n)\frac{2+n}{2}\cdot\frac{3+n}{3}\cdot ... \cdot\frac{m+n}{m}$$

$$= (1+n)(1+\frac{n}{2})(1+\frac{n}{3})...(1+\frac{n}{m}).$$

Според тоа, ако во докажаното равенство замениме $m = 19$ и $n = 81$ добиваме дека изразите (1) и (2) се еднакви.

14. Ако k е природен број, $1 \le k < \frac{n}{2}$ и $\frac{k}{n}$ е нескратлива дропка, тогаш НЗД$(k, n) = 1$. Но, тогаш и

$$НЗД(n-k,n)=НЗД(n-(k-n),n)=НЗД(k,n)=1$$

т.е. дропката $\frac{n-k}{n}$ е исто така нескратлива. Значи за секој $1\le k<n$ имаме две нескратливи дропки $\frac{k}{n}$ и $\frac{n-k}{n}$ и како за нескратливи дропки важи $\frac{k}{n}\ne\frac{n-k}{n}$, бидејќи во спротивно $n=2k$ и $НЗД(k,n)=k\ge 2$, добиваме дека бројот на нескратливи дропки е парен.

15. За да ги споредиме растојанијата од точките A и B до точката E ги формираме разликите $1-\frac{m}{n}=\frac{n-m}{n}$ и $\frac{n}{m}-1=\frac{n-m}{m}$. Од условот на задачата имаме $n-m>0$ и $\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$. Значи, $\frac{n-m}{n}<\frac{n-m}{m}$.

Според тоа, точката A која е слика на правилната дропка $\frac{m}{n}$ е поблиску до точката E.

16. Нека се $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ две нескратливи дропки и да претпоставиме дека $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=N$, $N\in\mathbf{N}$. Ако ова равенство го помножиме со b добиваме $a+\frac{c}{d}b=Nb$, од што следува дека d е делител на b. Ако потоа равенството $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=N$ го помножиме со d добиваме $\frac{a}{b}d+c=Nd$ од што следува дека b е делител на d. Значи, $d=b$ што противречи на условот на задачата.

Доказот на тврдењето за разликата е аналоген.

17. Последователно имаме:

$$65^{334}>64^{334}=(2^6)^{334}=2^{2004}>2^{2000}.$$

18. Нека $a=32^{24}, b=13^{32}.$ Бидејќи

$$a=32^{24}=\underbrace{32^3\cdot 32^3\cdots 32^3}_{8-пати} \text{ и } b=13^{32}=\underbrace{13^4\cdot 13^4\cdots 13^4}_{8-пати}$$

доволно е да докажеме дека $32^3>13^4.$ Се проверува дека

$$32^3=32768>28561=13^4.$$

19. Од $31^{11}<32^{11}=(2^5)^{11}=2^{55}$ и $17^{14}>16^{14}=(2^4)^{14}=2^{56}$, следува дека $31^{11}<17^{14}.$

20. Од $19<20$ следува

$$19^8<20^8=(20^2)^4=400^4\,,$$

т.е. $400^4-19^8>0.$ Исто така, од $39<40$ следува

$$39^8<40^8=(40^2)^4=1600^4.$$

Оттука $39^8-1600^4<0.$ Според тоа, важи

$$400^4-19^8>39^8-1600^4\,,$$

т.е. важи

$$1600^4+400^4>39^8+19^8.$$

21. Ако степените во дадениот израз ги сведеме на степени со основа 2, 3 и 5 добиваме:

$$\frac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}=\frac{2^{19}\cdot 3^9+5\cdot 3\cdot 2^{18}\cdot 3^8}{2^9\cdot 3^9\cdot 2^{10}+2^{20}\cdot 3^{10}}=\frac{2^{19}\cdot 3^9+2^{18}\cdot 3^9\cdot 5}{2^{19}\cdot 3^9+2^{20}\cdot 3^{10}}=\frac{2^{18}\cdot 3^9(2+5)}{2^{19}\cdot 3^9(1+2\cdot 3)}=\frac{7}{2\cdot 7}=\frac{1}{2}\,.$$

22. Ако степените во дадениот израз ги сведеме на степени со основа 2, 3, 5 и 7 добиваме:

$$\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}=\frac{5\cdot 2^{30}\cdot 3^{18}-2^2\cdot 3^{20}\cdot 2^{27}}{5\cdot 2^9\cdot 2^{19}\cdot 3^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 3^{18}}=\frac{5\cdot 2^{30}\cdot 3^{18}-2^{29}\cdot 3^{20}}{5\cdot 2^{28}\cdot 3^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 3^{18}}=\frac{2^{29}\cdot 3^{18}(5\cdot 2-3^2)}{2^{28}\cdot 3^{18}(5\cdot 3-7\cdot 2)}=\frac{2\cdot 1}{1}=2.$$

23. Вредноста на дадениот израз е:

$$-\frac{1}{0{,}25}[(\frac{1}{0{,}25})^2\cdot(\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{0{,}5})^3\cdot(-\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{0{,}8})^2]:(2-\frac{2}{2^2})^2=$$

$$=-\frac{100}{25}[(\frac{100}{25})^2\cdot\frac{1}{8}-(-\frac{10}{5})^3\cdot(-\frac{1}{8})-(\frac{10}{8})^2]:(2-\frac{1}{2})^2$$

$$=-4[16\cdot\frac{1}{8}-8\cdot\frac{1}{8}-\frac{25}{16}]\cdot\frac{4}{9}=-4[2-1-\frac{25}{16}]\cdot\frac{4}{9}=-4[-\frac{9}{16}]\cdot\frac{4}{9}=1.$$

24. Имаме:

$$(-10)^2\,\frac{[6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}-10^2\cdot\left(-0{,}2\right)^3]\cdot\left(0{,}015:0{,}12+0{,}7\right)}{1{,}2:[\left(-3\right)\cdot(-\frac{1}{2})^3]-0{,}2}=100\cdot\frac{[\frac{154}{25}:\frac{77}{5}-100\cdot(-\frac{1}{5})^3]\cdot(\frac{15}{1000}:\frac{12}{100}+\frac{7}{10})}{\frac{12}{10}:[(-3)\cdot(-\frac{1}{8})]-\frac{2}{10}}$$

$$=100\cdot\frac{(\frac{154}{25}\cdot\frac{5}{77}+\frac{100}{125})\cdot(\frac{15}{1000}\cdot\frac{100}{12}+\frac{7}{10})}{\frac{12}{10}:\frac{3}{8}-\frac{2}{10}}=100\cdot\frac{(\frac{2}{5}+\frac{4}{5})\cdot(\frac{5}{40}+\frac{28}{40})}{\frac{12}{10}\cdot\frac{8}{3}-\frac{2}{10}}=100\cdot\frac{\frac{6}{5}\cdot\frac{33}{40}}{\frac{32}{10}-\frac{2}{10}}$$

$$=100\cdot\frac{\frac{99}{100}}{\frac{30}{10}}=33.$$

25. Имаме

$$1+10+10^2+10^3+10^4+10^5=(1+10+10^2)+(10^3+10^4+10^5)$$
$$=(1+10+10^2)+10^3(1+10+10^2)$$
$$=(1^3+10^3)(1+10+10^2)=1001\cdot 111=11\cdot 91\cdot 111.$$

26. Важи $2014=41^2+18^2+3^2.$ Според тоа добиваме

$$2014^7=2014\cdot 2014^6=(41^2+18^2+3^2)\cdot 2014^6=(41^2+18^2+3^2)\cdot(2014^3)^2$$
$$=(41\cdot 2014^3)^2+(18\cdot 2014^3)^2+(3\cdot 2014^3)^2.$$

27. Имаме:

$$88\cdot(89^{2002}+89^{2001}+...+89+1)+1=(89-1)(89^{2002}+89^{2001}+...+89+1)+1$$
$$=89^{2003}+89^{2002}+...+89^2+89-(89^{2002}+89^{2001}+...+89+1)+1$$
$$=89^{2003}-1+1=89^{2003}.$$

28. Ако во изразот замениме $10=9+1$, добиваме:

$$9^{15}-10\cdot 9^{14}+10\cdot 9^{13}-10\cdot 9^{12}+...-10\cdot 9^2+10\cdot 9-1=$$
$$=9^{15}-(9+11)9^{14}+(9+11)9^{13}-(9+11)9^{12}+...-(9+11)9^2+(9+11)9-1$$
$$=9^{15}-9^{15}-9^{14}+9^{14}+9^{13}-9^{13}-9^{12}+...-9^3-9^2+9^2+9-1=9-1=8.$$

29. а) Бидејќи за секои реални броеви a и b важи

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

за дадениот збир имаме:

$$S=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+...+((2k-1)-2k)((2k-1)+2k)$$
$$=-(1+2+3+4+5+6+...+(2k-1)+2k)=-\frac{2k(2k+1)}{2}=-k(2k+1)$$

б) Имаме

$$a-b=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\frac{4^2}{7}+...+\frac{1001^2}{2001}-(\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+...+\frac{1001^2}{2003})$$
$$=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\frac{4^2-3^2}{7}+...+\frac{1001^2-1000^2}{2001}-\frac{1001^2}{2003}$$
$$=1+\frac{(2-1)(2+1)}{3}+\frac{(3-2)(3+2)}{5}+\frac{(4-3)(4+3)}{7}+...+\frac{(1001-1000)(1001+1000)}{2001}-\frac{1001^2}{2003}$$
$$=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+...+\frac{2001}{2001}-\frac{1001^2}{2003}=1001-\frac{1001^2}{2003}=\frac{1001(2003-1001)}{2003}=\frac{1001\cdot 1002}{2003}.$$

30. Ако го користиме идентитетот

$$-n^2+(n+1)^2=(n+1+n)(n+1-n)=n+n+1,$$

добиваме:

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+99^2-100^2+101^2&=\\ &=1+(-2^2+3^2)+(-4^2+5^2)+\dots+(-100^2+101^2)\\ &=1+2+3+4+5+\dots+100+101=\tfrac{101\cdot 102}{2}=5151.\end{aligned}$$

31. Имајќи во предвид дека

$$\frac{1+2+\ldots+2011+m}{1+2+\ldots+2010+m}=\frac{1+2+\ldots+2010+m+2011}{1+2+\ldots+2010+m}=1+\frac{2011}{1+2+\ldots+2010+m},$$

почетниот број ќе биде природен ако $\frac{2011}{1+2+\ldots+2010+m}$ е природен број, а ќе има најмала вредност ако

$$1+2+\ldots+2010+m=2011,$$

од каде добоваме

$$\tfrac{2010\cdot 2011}{2}+m=2011,$$

односно $m=-2019044$.

32. Имаме

$$\begin{aligned}1999^2-1997^2+1995^2-1993^2+\dots+7^2-5^2+3^2-1^2&=\\ &=(1999-1997)(1999+1997)+(1995-1993)(1995+1993)\\ &\quad+\dots+(7-5)(7+5)+(3-1)(3+1)\\ &=2(1999+1997+1995+1993+\dots+7+5+3+1)\\ &=2[(1999+1)+(1997+3)+(1995+5)+\dots+(1001+999)]\\ &=2\cdot 500\cdot 2000=2000000.\end{aligned}$$

33. а) Имаме

$$\begin{aligned}S&=1+5+5^2+5^3+\dots+5^{n-1}+5^n=1+5\cdot(1+5+5^2+5^3+\dots+5^{n-1})\\ &=1+5\cdot(1+5+5^2+5^3+\dots+5^{n-1}+5^n-5^n)\\ &=1+5S-5^{n+1},\end{aligned}$$

од каде добиваме $S=\frac{5^{n+1}-1}{4}$.

б) На потполно ист начин се добива

$$1+3+3^2+3^3+\dots+3^{n-1}+3^n=\tfrac{3^{n+1}-1}{2}.$$

34. Според задача 33 б), за $n=2014$ добиваме

$$S=2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+...+2\cdot 3^{2014}=2\cdot(1+3+3^2+...+3^{2014})$$
$$=2\cdot\frac{3^{2015}-1}{2}=3^{2015}-1.$$

35. Јасно, за $x=1$ се добива $A=na$. Нека $x\neq 1$. Тогаш
$$A=a+ax+ax^2+...+ax^{n-1}=a+x(a+ax+ax^2+...+ax^{n-2}+ax^{n-1}-ax^{n-1})$$
$$=a+x(A-ax^{n-1})=a(1-x^n)+Ax,$$
од каде наоѓаме $A=a\frac{1-x^n}{1-x}$.

36. Според задача 35 за $a=x=10$ добиваме
$$8+88+888+...+\underbrace{88...88}_{n}=8\cdot(1+11+111+...+\underbrace{11...11}_{n})$$
$$=\tfrac{8}{9}(9+99+999+...+\underbrace{99...99}_{n})$$
$$=\tfrac{8}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)]$$
$$=\tfrac{8}{9}(10+10^2+10^3+...+10^n-n)$$
$$=\tfrac{8}{9}(10+10\cdot 10+10\cdot 10^2+...+10\cdot 10^{n-1}-n)$$
$$=\tfrac{8}{9}(10\cdot\tfrac{1-10^n}{1-10}-n)=\tfrac{8}{9}(\tfrac{10^{n+1}-10}{9}-n)=\tfrac{8\cdot 10^{n+1}-80-72n}{81}.$$

37. Последователно добиваме
$$S_n=1+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+...+(1+3+3^2+...+3^{n-1})$$
$$=\tfrac{3-1}{2}+\tfrac{3^2-1}{2}+\tfrac{3^3-1}{2}+\tfrac{3^4-1}{2}+...+\tfrac{3^n-1}{2}=\tfrac{3+3^2+3^3+3^4+...+3^n-n}{2}$$
$$=\tfrac{3(1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1})-n}{2}=\tfrac{3\cdot\frac{3^n-1}{2}-n}{2}=\tfrac{3^{n+1}-3-2n}{4}.$$

38. Од условот на задачата последователно добиваме:
$$2^k(1+2+2^2+...+2^n)=2^{55}-2^{25},$$
$$2^k(2^{n+1}-1)=2^{25}(2^{30}-1).$$
Броевите $2^{n+1}-1$ и $2^{30}-1$ се непарни и како $2^k\,|\,2^{25}(2^{30}-1)$ добиваме $2^k\,|\,2^{25}$. Аналогно, $2^{25}\,|\,2^k$, па затоа $2^{25}=2^k$, од каде следува $k=25$. Според тоа, $2^{n+1}-1=2^{30}-1$, односно $2^{n+1}=2^{30}$, па затоа $n+1=30$, т.е. $n=29$. Конечно, единствено решение на дадената равенка е $k=25, n=29$.

39. Ако ги искористиме познатото равенство

$$1+2+...+m=\frac{m(m+1)}{2}, \text{ за } m=1007,1008,...,2013$$

и разложувањето $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, за $k=1007,1008,...2013$ добиваме

$$A=\frac{3^8-1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1007\cdot 1008}{2}}+\frac{1}{\frac{1008\cdot 1009}{2}}+...+\frac{1}{\frac{2013\cdot 2014}{2}}\right)$$

$$=(3^8-1)\left(\frac{1}{1007\cdot 1008}+\frac{1}{1008\cdot 1009}+...+\frac{1}{2013\cdot 2014}\right)$$

$$=(3^4-1)(3^4+1)\left(\frac{1}{1007}-\frac{1}{1008}+\frac{1}{1008}-\frac{1}{1009}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$$

$$=80\cdot 82\cdot\left(\frac{1}{1007}-\frac{1}{2014}\right)=\frac{80\cdot 82}{2014}=\frac{3280}{1007}.$$

40. Јасно, за $x=1$ важи

$$S=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Нека $x\neq 1$. Ако (1) го помножиме со x добиваме

$$Sx=x+2x^2+3x^3+...+(n-1)x^{n-1}+nx^n. \qquad (2)$$

Понатаму, од (1) го одземаме (2) и добиваме

$$S-Sx=1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}-nx^n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{1-x},$$

од каде добиваме $S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

41. Според задача 96 за $x=2$ последователно добиваме:

$$A=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+...+n\cdot 2^n=2(2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1})$$

$$=2(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n\cdot 2^{n-1}-1)=2\left(\frac{n\cdot 2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^n+1}{(1-2)^2}-1\right)$$

$$=2(n\cdot 2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^n+1-1)=2^{n+1}(2n-n-1)=2^{n+1}(n-1).$$

42. Секоја запишана цифра ќе се појави во три различни броја, еднаш како цифра на стотки, еднаш како цифра на десетки и еднаш како цифра на единици. Според тоа, цифрата n во вкупниот збир ќе учествува со

$$(1+10+100)n=111n.$$

Бидејќи вкупно има 9 такви броја, добиваме дека вкупниот збир ќе биде

$$111(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=111\frac{9\cdot 10}{2}=111\cdot 45=4995.$$

43. Јасно е дека $A \geq 0$. Ако најдеме избор на знаци за кој $A = 0$, тогаш за таквиот избор A има најмала вредност . Пред првите три броеви ги избираме знаците -, - и +, а пред останатите 2008 броја (2008 е делив со 4), ги избираме наизменично знаците +, - , - , + . Се добива:

$$A = |-1-2+3+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\ldots+(2008-2009-2010+2011)| = 0$$

44. После средување даденото равенство може да се трансформира во видот

$$(a^{1001}-1)^2+(b^4-1)^2+(c^3-1)^2=0 .$$

Овој збир е еднаков на нула само ако сите три собироци се нули, односно $a^{1001}=1, b^4=1, c^3=1$, т.е. $a=1, b=\pm 1, c=1$.

45. Од $S_1=b_1$, $S_2=b_1+b_2$, $S_3=b_1+b_2+b_3, \ldots$ следува:

$$b_1=S_1,\ b_2=S_2-S_1,\ b_3=S_3-S_2, \ldots,\ b_n=S_n-S_{n-1}.$$

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n &= a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+\ldots+a_n(S_n-S_{n-1}) \\ &= a_1S_1+a_2S_2-a_2S_1+a_3S_3-a_3S_2+\ldots+a_nS_n-a_nS_{n-1} \\ &= (a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n. \end{aligned}$$

46. Да го најдеме првиот број во множеството A_n. Множествата $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ се попарно дисјунктни, па бројот на елементите во нивната унија е

$$1+2+3+4+\ldots+n-1=\tfrac{n(n-1)}{2} .$$

Значи, последниот број во множеството A_{n-1} е $n(n-1)-1$. Според тоа, првиот број во множеството A_n ќе биде $n(n-1)+1$, а последниот $n(n+1)-1$. Според тоа, множеството A_n има n елементи, првиот елемент е $a_1=n(n-1)+1$, а последниот $a_n=n(n+1)-1$ и секои два последователни елементи се разликуваат за $d=2$. За да го пресметаме нивниот збир формираме $\frac{n}{2}$ збирови кои се еднакви на збирот на првиот и $n-$тиот член. Имаме

$$S_n=\tfrac{n}{2}[n(n-1)+1+(n(n+1)-1]=n^3 .$$

47. а) Бидејќи $x^{-2}y^{-2}=3$, $xy \neq 0$ добиваме:

$$(xy)^4 = \frac{1}{(xy)^{-4}} = \frac{1}{(x^{-2}y^{-2})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

б) Бидејќи $x^7 = 3$ добиваме:

$$\frac{(x^{-2})^{-3}(x^3)^4(x^{-17})^{-1}}{x^7} = \frac{x^6 x^{12} x^{17}}{x^7} = \frac{x^{35}}{x^7} = x^{28} = (x^7)^4 = 3^4 = 81.$$

в) Бидејќи $a^2 + b^2 = 1$ добиваме:

$$a^6 + 3a^2b^2 + b^6 = a^6 + 3a^2b^2(a^2+b^2) + b^6 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$$
$$= (a^2+b^2)^3 = 1.$$

48. Го трансформираме првото равенство и последователно добиваме:

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy - 16a^2 = 12$$
$$(3x-2y)^2 - (4a)^2 = 12$$
$$(3x-2y-4a)(3x-2y+4a) = 12.$$

Понатаму, ако во последното равенство замениме од второто равенство во условот наоѓаме

$$4(3x-2y-4a) = 12$$
$$3x-2y-4a = 3.$$

Конечно, ако последното равенство го собереме со второто равенство во условот добиваме

$$2(3x-2y) = 7$$
$$3x-2y = \frac{7}{2},$$

што и требаше да се определи.

49. Од $xyz = 1$ следува $xy = \frac{1}{z}, yz = \frac{1}{x}, zx = \frac{1}{y}$, па затоа

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = (x+\tfrac{1}{x})^2 + (y+\tfrac{1}{y})^2 + (z+\tfrac{1}{z})^2 - (x+\tfrac{1}{x})(y+\tfrac{1}{y})(z+\tfrac{1}{z})$$
$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + \frac{1}{z^2} + 6 -$$
$$-(xyz + xy\frac{1}{z} + xz\frac{1}{y} + zy\frac{1}{x} + x\frac{1}{yz} + y\frac{1}{xz} + z\frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz})$$
$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + \frac{1}{z^2} + 6 -$$
$$-(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} + x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 4.$$

50. Имаме:

$$[\frac{b^{-3}b^7(b^{-1})^2}{(-b)^{-2}(b^2)^3}]^{-2}=[\frac{(-b)^{-2}(b^2)^3}{b^{-3}b^7(b^{-1})^2}]^2=\left[\frac{\frac{1}{(-b)^2}b^6}{\frac{1}{b^3}b^7\frac{1}{b^2}}\right]^2=\left[\frac{\frac{1}{b^2}b^6}{\frac{1}{b^3}b^7\frac{1}{b^2}}\right]^2.$$

$$=[\frac{b^6b^3b^2}{b^2b^7}]^2=[\frac{b^{11}}{b^9}]^2=(b^2)^2=b^4$$

51. Прво да ги упростиме дадените изрази. Имаме:

$$A\equiv-\tfrac{16}{0,5}\cdot\tfrac{0,25^{3n-2}}{0,25^{3n-4}}=-\tfrac{16}{\frac{1}{2}}\cdot 0,25^{3n-2-(3n-4)}=-32\cdot 0,25^2=-32(\tfrac{1}{4})^2=-\tfrac{32}{16}=-2$$

и

$$B\equiv-243\cdot(\tfrac{2}{3})^{12-4n+4n-7}=-243\cdot\tfrac{2^5}{3^5}=-2^5=-32.$$

Значи, првиот израз е поголем од вториот за $A-B=-2-(-32)=30$.

52. Да ги упростиме дадените изрази. Имаме:

$$A\equiv(-4\cdot 0,5^{2n-7})\cdot(12\cdot 0,5^{10-2n})=-48\cdot 0,5^{2n-7+10-2n}=-48\cdot 0,5^3=-\tfrac{48}{2^3}=-6$$

и

$$B\equiv[27\cdot(\tfrac{1}{3})^{5n-1}]:[0,5\cdot(\tfrac{1}{3})^{5n-3}]=\tfrac{27}{0,5}(\tfrac{1}{3})^{5n-1-(5n-3)}=54\cdot\tfrac{1}{3^2}=6.$$

Значи, вториот израз е поголем од првиот за $B-A=6-(-6)=12$.

53. Имаме:

$$\underbrace{11...1}_{200}-\underbrace{22...2}_{100}=\frac{\overbrace{99...9}^{200}}{9}-2\frac{\overbrace{99...9}^{100}}{9}=\frac{10^{200}-1}{9}-2\frac{10^{100}-1}{10^{100}-1}$$

$$=\frac{10^{200}-2\cdot 10^{100}+1}{9}=(\frac{10^{100}-1}{3})^2=(\underbrace{33...3}_{100})^2.$$

54. Со елементарни трансформации добиваме:

$$a^2=\underbrace{100...0}_{1990}5\cdot\underbrace{11...1}_{1991}+1=(\underbrace{100...0}_{1991}+5)\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{1991}+1$$

$$=(10^{1991}+5)\cdot\tfrac{1}{9}\cdot(10^{1991}-1)+1$$

$$=\frac{1}{9}[(10^{1991})^2+5\cdot 10^{1991}-10^{1991}-5+9]$$

$$=\frac{1}{9}[(10^{1991})^2+4\cdot 10^{1991}+4]=\frac{1}{9}(10^{1991}+2)^2=(\tfrac{10^{1991}+2}{3})^2$$

Според тоа, $a=\frac{10^{1991}+2}{3}$ или $a=-\frac{10^{1991}+2}{3}$. Да забележиме дека

$$\frac{10^{1991}+2}{3}=\frac{1}{3}1\underbrace{00...0}_{1990}2=\underbrace{33...3}_{1990}4.$$

55. Бројот $\overbrace{11...1}^{1998}\overbrace{55...5}^{1997}6$ го запишуваме во видот

$$\underbrace{11...1}_{1998}\underbrace{55...5}_{1997}6=\underbrace{11...1}_{1998}\overbrace{55...55}^{1998}+1=\underbrace{11...1}_{1998}\underbrace{00...0}_{1998}+\underbrace{5...5}_{1998}+1$$

$$=10^{1998}\underbrace{11...1}_{1998}+5\underbrace{11...1}_{1998}+1=\underbrace{11...1}_{1998}(10^{1998}+5)+1$$

$$=\underbrace{11...1}_{1998}(\underbrace{99...9}_{1998}+1+5)+1=\underbrace{11...1}_{1998}(9\cdot\underbrace{11...1}_{1998}+6)+1$$

$$=9(\overbrace{11...1}^{1998})^2+6\cdot\overbrace{11...1}^{1998}+1=(3\cdot\overbrace{11...1}^{1998}+1)^2.$$

56. Нека $a+c=k^2$ и $b+c=(k+1)^2$, $k\in\mathbf{N}$. Тогаш $a=k^2-c$ и $b=(k+1)^2-c$, па затоа

$$ab+c=(k^2-c)[(k+1)^2-c]+c=c^2-[k^2+(k+1)^2-1]c+[k(k+1)]^2$$
$$=c^2-2k(k+1)c+[k(k+1)]^2=[k(k+1)-c]^2=(k^2+k-c)^2$$

и

$$ab+a+b+c=(k^2-c)[(k+1)^2-c]+k^2-c+(k+1)^2-c+c$$
$$=c^2-[k^2+(k+1)^2+1]c+[k(k+1)]^2+k^2+(k+1)^2$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)]^2+2k(k+1)+1$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+[k(k+1)+1]^2$$
$$=c^2-2(k^2+k+1)c+(k^2+k+1)^2=(k^2+k+1-c)^2$$

што и требаше да се докаже.

57. Нека $\frac{ax+b}{cx+d}=p$, p е рационален број, т.е.

$$(a-pc)x+(b-pd)=0.$$

Бидејќи броевите a,b,c,d и p се рационални, а бројот x е ирационален, последното равенство е можно ако $a-pc=0$ и $b-pd=0$, од што следува

$$ad=bc. \qquad (1)$$

Според тоа, условот (1) е потребен за да бројот $\frac{ax+b}{cx+d}$ е рационален.

Сега да докажеме дека условот (1) е доволен. Ако $a=0$, тогаш од (1) следува дека мора $b=0$ или $c=0$, од што следува дека $\frac{ax+b}{cx+d}$ е рационален број. Ако $a\neq 0$, тогаш од (1) добиваме $d=\frac{bc}{a}$, од што следува

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+b}{cx+\frac{bc}{a}}=\frac{ax+b}{\frac{c}{a}(ax+b)}=\frac{a}{c}.$$

Јасно, $ax+b\neq 0$ и во последниот израз кратењето е дозволено. Имено, во спротивно ќе добиеме дека x е рационален број.

58. Нека $a=x^3, b=x^2+x$. Тогаш

$$a=x^3+x^2-x^2-x+x=xb-b+x$$

или

$$a=x(b+1)-b.$$

Јасно, $b\neq -1$, бидејќи во спротивно

$$x^2+x=-1 \text{ т.е. } (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}=-1,$$

што значи $0=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$, што е противречност. Според тоа, $x=\frac{a+b}{b+1}$ и како a и b се рационални броеви добиваме дека x е рационален број.

59. Нека за броевите a,b и c важи $a+b>c, b+c>a$ и $c+a>b$. Тогаш $a+b-c>0$ и $b+c-a>0$, па затоа важи

$$0<(a+b-c)+(b+c-a)=2b,$$

т.е. $2b>0$ од што следува дека $b>0$.

Аналогно се докажува дека $a>0$ и $c>0$.

60. Имаме:

$$\begin{aligned}2\sqrt{75}-3\sqrt{48}+5\sqrt{108}-27\sqrt{3}&=2\cdot 5\sqrt{3}-3\cdot 4\sqrt{3}+5\cdot 6\sqrt{3}-27\sqrt{3}\\&=(10-12+30-27)\sqrt{3}=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

61. Најпрво да забележиме дека за секои реални броеви a и b такви што $0<a<b$ важи $0<\sqrt{a}<\sqrt{b}$ и $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Од претходно изнесеното и од $1<2<3<...<100$ следува

$$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<...<\sqrt{100},$$

односно

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>...>\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}.$$

Според тоа,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}>100\cdot\frac{1}{10}=10\,.$$

62. Имаме

$$x=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{7-4}=\frac{1}{4}(10+2\sqrt{21})=\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})\,.$$

Слично за y добиваме:

$$y=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3}=\frac{1}{4}(10-2\sqrt{21})=\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})\,.$$

Од врските $x+y=5$, $xy=1$ имаме:

$$\begin{aligned}x^4+y^4+(x+y)^4&=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2+5^4\\&=((x+y)^2-2xy)^2-2(xy)^2+625=1152.\end{aligned}$$

63. Најпрвин ќе ги трансформираме изразите под квадратните корени, а потоа ќе искористиме дека за произволен реален број a важи:

$$\sqrt{a^2}=|a| \text{ и } |a|=\begin{cases}a, & \text{ако } a\ge 0\\ -a, & \text{ако } a<0\end{cases}.$$

Добиваме:

$$\begin{aligned}\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}&=\sqrt{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}+\sqrt{9-2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}\\&=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}\\&=|3+\sqrt{2}|+|3-\sqrt{2}|=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6.\end{aligned}$$

64. Имаме

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=1\,.$$

65. Бидејќи за секој реален број a , $\sqrt{a^2}=|a|$, добиваме

$$\begin{aligned}2\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{(2\sqrt{7}-6)^2}&=2\sqrt{1-2\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}+\sqrt{(2\sqrt{7}-6)^2}\\&=2\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(2\sqrt{7}-6)^2}\\&=2\,|1-\sqrt{7}\,|+|\,2\sqrt{7}-6\,|\\&=2(\sqrt{7}-1)+(6-2\sqrt{7})=4.\end{aligned}$$

66. Имаме

$$\begin{aligned}20+14\sqrt{2}&=8+12+12\sqrt{2}+2\sqrt{2}\\&=2^3+3\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^3\\&=(2+\sqrt{2})^3\end{aligned}$$

Слично,

$$20-14\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3.$$

Конечно,

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$$

67. Прв начин. Нека

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ .$$

Ако ги степенуваме двете страни на ова равенство на трети степен добиваме:

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

односно $x^3=4-3x$, а од тука добиваме $(x-1)(x^2+x+4)=0$. Бидејќи равенката $x^2+x+4=0$ нема реални решенија, следува дека $x=1$.

Втор начин.

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2})^3}+\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^3}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}=1\,.$$

68. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{(4+\sqrt{15})^2(4-\sqrt{15})}\\&=\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{4+\sqrt{15}}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{8+2\sqrt{15}}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}\ .\\&=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\,|\sqrt{5}+\sqrt{3}|=(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=5-3=2.\end{aligned}$$

69. Од

$$9+4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4=\sqrt{5}^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2=(\sqrt{5}+2)^2$$

добиваме

$$\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ .$$

Значи,

$$\begin{aligned}A&=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=2\sqrt[3]{2^2-\sqrt{5}^2}\ .\\&=2\sqrt[3]{4-5}=2\sqrt[3]{-1}=2(-1)=-2.\end{aligned}$$

70. Имаме

$$
\begin{aligned}
(2012-\sqrt{1+2014\sqrt{1+2013\cdot 2011}})^2 &= (2012-\sqrt{1+2014\sqrt{1+(2012+1)\cdot(2012-1)}})^2\\
&= (2012-\sqrt{1+2014\sqrt{1+2012^2-1^2}})^2\\
&= (2012-\sqrt{1+2014\sqrt{2012^2}})^2\\
&= (2012-\sqrt{1+2014\cdot 2012})^2\\
&= (2012-\sqrt{1+(2013+1)(2013-1)})^2\\
&= (2012-\sqrt{1+2013^2-1^2})^2\\
&= (2012-\sqrt{2013^2})^2\\
&= (2012-2013)^2=(-1)^2=1.
\end{aligned}
$$

71. Имаме:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\tfrac{9}{2}} = \sqrt{\tfrac{4\sqrt{6}+8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+18}{4}} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}+8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+18}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{12+8\sqrt{3}+4+4\sqrt{6}+4\sqrt{2}+2}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2+2\sqrt{2}(2\sqrt{3}+2)+2}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}+2+\sqrt{2})^2} = \tfrac{1}{2}|2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2|\\
&= \tfrac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2).
\end{aligned}
$$

72. Имаме $\frac{2}{3}<\frac{x}{9}<\frac{5}{6}$, односно ако ги сведеме на заеднички именител, $\frac{24}{36}<\frac{4x}{36}<\frac{30}{36}$, од каде $4x=28$, па $x=7$, а дропката е $\frac{7}{9}$.

73. Нека бараните дропки се од облик $\frac{a}{b}$, каде $a,b\in\mathbf{N}$. Тогаш $\frac{5}{7}<\frac{a}{b}<\frac{6}{7}$. Оттука, $5b<7a$ и $7a<6b$, па затоа

$$5b<7a<6b. \qquad (1)$$

За $b\in\{1,2,3\}$, не постои $a\in\mathbf{N}$ така да важи (1). За $b=4$ имаме $20<7a<24$, па затоа $a=3$. За $b=5$ имаме $25<7a<30$, па затоа $a=4$. За $b=6$ имаме $30<7a<36$, па затоа $a=5$. За $b=8$ имаме $40<7a<48$, па затоа $a=6$. За $b=9$ имаме $45<7a<54$, па затоа $a=7$.

Бараните дропки се $\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{8},\frac{7}{9}$.

74. Според условот на задачата следува дека треба да најдеме $a,b\in\mathbf{N}$ такви да

$$\frac{93}{91}=\frac{a}{7}+\frac{b}{13}=\frac{13a+7b}{91}.$$

Значи, $13a+7b=93$, односно $7b=93-13a$, $a,b\in\mathbf{N}$. Тоа значи дека ако од бројот 93 одземеме содржател на бројот 13, треба да добиеме содржател на бројот 7. Понатаму,

$$93-13=80, 93-26=67, 93-39=54, 93-52=41,$$

$$93-65=28, 93-78=15, 93-91=2,$$

а за поголеми содржатели на 13 од 91, бараната разлика е негативен број. Според тоа, само бројот 28 ги задоволува условите на задачата, од што добиваме $b=4, a=5$ и бараното претставување е $\frac{93}{91}=\frac{5}{7}+\frac{4}{13}$.

75. Нека бараните дропки се $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$, при што $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{N}$. Од $a:c:e=1:3:5$ следува $c=3a$ и $e=5a$. Бидејќи $b:d=1:2$ добиваме $d=2b$ и како $d:f=4:9$ следува $f=\frac{9}{4}d=\frac{9}{2}b$. Затоа важи $\frac{a}{b}+\frac{3a}{2b}+\frac{5a}{\frac{9}{2}b}=\frac{65}{72}$, односно $\frac{a}{b}+\frac{3a}{2b}+\frac{10a}{9b}=\frac{65}{72}$. Понатаму, $\frac{18a+27a+20a}{18b}=\frac{65}{72}$, т.е. $\frac{65a}{18b}=\frac{65}{72}$ и како дропката $\frac{a}{b}$ е нескратлива добиваме $a=1$ и $b=4$. Конечно, $c=3, e=5, d=8, f=18$ и бараните дропки се $\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{5}{18}$.

76. Нека p,q и $r=\sqrt{p}+\sqrt{q}$ се рационални броеви. Тогаш $\sqrt{p}=r-\sqrt{q}$ или после квадрирање $p=r^2-2r\sqrt{q}+q$. Значи

$$2r\sqrt{q}=r^2+q-p\text{, т.е. }\sqrt{q}=\frac{r^2+q-p}{2r},$$

од што следува дека бројот $\sqrt{q}$ е количник на два рационални броеви, т.е. е рационален број. Аналогно се докажува дека $\sqrt{p}$ е рационален број.

77. Забележуваме дека важи

$$\frac{180}{x}=\frac{x+y+z}{x}=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}.$$

Бидејќи $\frac{x}{y}$ е рационален број тогаш и бројот $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}$ е рационален број. Според тоа, бројот $\frac{180}{x}$ е рационален,како збир на три рационални броеви.

Оттука x е рационален број. На ист начин се докажува дека и y и z се рационални броеви.

78. а) Нека $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ е рационален број, т.е. $\sqrt{7}-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbf{N}$ и НЗД$(p,q)=1$. Тогаш, $10-2\sqrt{21}=\frac{p^2}{q^2}$, што значи $\sqrt{21}$ е рационален број, односно $\sqrt{21}=\frac{r}{s}$, каде $r,s\in\mathbf{N}$ и НЗД$(r,s)=1$. Според тоа, $21s^2=r^2$, што не е можно бидејќи на левата страна простиот број 3 е на непарен степен, а на десната е на парен степен.

б) Од $(\frac{a+b}{a-b})^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{4ab+2ab}{4ab-2ab}=3$, следува $\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{3}$, што и требаше да се докаже.

79. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во вид

$$ac+bc=ab,$$

односно

$$ab-ac-bc=0.$$

Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|,$$

Бидејќи $a,b,c\in\mathbf{Q}^+$, добиваме $|a+b-c|\in\mathbf{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in\mathbf{Q}^+$.

80. Прво да ја упростиме дадената дропка:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Значи, дадениот број е еднаков на количник на рационален број различен од 0 и на ирационален број, од што следува дека тој е ирационален број.

81. Од $x=\frac{a-b\sqrt{2003}}{b-c\sqrt{2003}}$ следува $bx-a=(cx-b)\sqrt{2003}$ и од тоа што $bx-a$ и $cx-b$ се рационални броеви следува $bx-a=0$ и $cx-b=0$, при што $c\neq 0$ (зошто?). Според тоа, $a=bx=b\frac{b}{c}$, т.е. $ac=b^2$.

82. Најпрвин да забележиме дека

(1) $$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\,.$$

Ако го искористиме равенството (1), со трансформација на изразот од левата страна добиваме:

$$\begin{aligned}\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} &= \sqrt{2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

83. а) Ако се искористи дека $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, добиваме:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}\,.$$

б) Аналогно како во решението под а) добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{18}-\sqrt{12}} = \frac{2(\sqrt{18}+\sqrt{12})}{(\sqrt{18}-\sqrt{12})(\sqrt{18}+\sqrt{12})}\\ &= \frac{2(\sqrt{18}+\sqrt{12})}{\sqrt{18}^2-\sqrt{12}^2} = \frac{2(\sqrt{18}+\sqrt{12})}{18-12} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+3+2\sqrt{6}-1}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6}-4)}{(2\sqrt{6}+4)(2\sqrt{6}-4)} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6}-4)}{24-16} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}-2)}{4}.\end{aligned}$$

84. а) Бидејќи за секои реални броеви a и b важи

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\,,$$

за да го рационализираме именителот на дадената дропка треба да помножиме со $\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2$. Добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} &= \frac{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})[(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2]}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2}{3-2} = \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\end{aligned}.$$

б) Бидејќи за секои реални броеви a и b важи

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\,,$$

за да го рационализираме именителот на дадената дропка треба да помножиме со $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$. Навистина,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{((\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2)(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}.$$

85. Со последователни еквивалентни трансформации на изразот од левата страна добиваме:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}+\sqrt{8}+2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{2}(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1.$$

86. Имаме

$$\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}}:\frac{\frac{28}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{33}{5}-\frac{13}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{15}{6}+\frac{20}{6}}{\frac{21}{6}-\frac{14}{6}}:\frac{\frac{84}{15}+\frac{20}{15}}{\frac{99}{15}-\frac{65}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{5}{20}-\frac{4}{20}}{\frac{8}{56}-\frac{7}{56}}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{6}}:\frac{\frac{104}{15}}{\frac{34}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{56}}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{35\cdot6}{6\cdot7}:\frac{104\cdot15}{15\cdot34}\right)\cdot\left(\frac{56}{20}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{35\cdot6}{6\cdot7}\cdot\frac{15\cdot34}{104\cdot15}\right)\cdot\left(\frac{14}{5}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{17}\cdot\frac{35\cdot6}{6\cdot7}\cdot\frac{15\cdot34}{104\cdot15}\cdot\frac{13}{5}=\frac{1}{4}.$$

87. Имаме

$$A=\frac{22{,}5}{100}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{340^2-160^2}+\sqrt{650^2-250^2}}{(1000^2-1000\cdot1940+970^2)(1000^2-1000\cdot1998+999^2)}\right]^{30}$$
$$=\frac{225}{1000}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{(340-160)(340+160)}+\sqrt{(650-250)(650+250)}}{(1000-970)^2(1000-999)^2}\right]^{30}$$
$$=\frac{75}{1000}\cdot\left[\frac{\sqrt{180\cdot500}+\sqrt{400\cdot900}}{30^2\cdot1^2}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{\sqrt{2\cdot250\cdot10\cdot18}+\sqrt{400\cdot900}}{900}\right]^{30}$$
$$=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{\sqrt{2500\cdot36}+\sqrt{400\cdot900}}{900}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{6\cdot50+30\cdot20}{900}\right]^{30}$$
$$=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{300+600}{900}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot1^{30}=\frac{3}{40}.$$

88. Имаме

$$\begin{aligned}2^{10}+5^{12}&=(2^5+5^6)^2-2\cdot 2^5 5^6=(2^5+5^6)^2-2^6 5^6\\&=(2^5+5^6)^2-10^6=(2^5+5^6)^2-(10^3)^2\\&=(2^5+5^6-10^3)(2^5+5^6+10^3).\end{aligned}$$

Бидејќи двата броја во заградата се поголеми од 1 заклучуваме дека дадениот број е сложен.

89. Од $\frac{a+5b}{a-5b}=5$ имаме дека $a+5b=5(a-5b)$, односно $a+5b=5a-25b$ од каде $4a=30b$, па $a=\frac{15}{2}b$. Тогаш,

$$\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{\frac{15}{2}b+2b}{\frac{15}{2}b-2b}=\frac{\frac{19}{2}b}{\frac{11}{2}b}=\frac{19}{11}.$$

90. Со помош на алгебарски идентични трансформации добиваме дека

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...-\frac{1}{198}+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200})\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{100}\\&=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{200},\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

91. Нека $A=101\cdot 10001\cdot 100000001\cdot\ldots\cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{2^n-1}1$. Тогаш, производот можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}A&=(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)\\&=\frac{1}{10^2-1}(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)\\&=\frac{1}{99}(10^4-1)(10^4+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)=\ldots=\frac{1}{99}(10^{2^{n+1}}-1)\\&=\frac{1}{99}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2^{n+1}}=101010\ldots101.\end{aligned}$$

92. Од $\frac{1}{x^2}+x^2+2=(x+\frac{1}{x})^2$ добиваме

$$x\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+2}=x\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}=x(x+\frac{1}{x})=x^2+1.$$

Оттука

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}+\sqrt{2x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2+2}}}=\sqrt{\frac{x^2}{4}++\sqrt{2x+x^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{4}++\sqrt{(x+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{4}+x+1}=\sqrt{\frac{x^2+4x+4}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x+2)^2}{4}}=\frac{x+2}{2}=\frac{x}{2}+1\in \mathbf{Z}.$$

2. ПОЛИНОМИ

2.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. а) Вредноста на полиномот $p(x)=5x-\frac{a-6}{5}x$ во точката $x=-2$ е еднаква на 4. Пресметај $p(-5)$.

б) Полиномот $P(x)=x^3-\frac{k+2}{3}x^2+\frac{9-k}{4}x+20$ прима вредност 4 за $x=-2$. Пресметај $P(2)$.

Задача 2. За кои вредности на параметрите a и b производот на полиномите $p(x)=x^3+ax^2+bx-12$ и $q(x)=x-2$ не ги содржи вториот и третиот степен на x?

Задача 3. Одреди ги реалните броеви a и b така што полиномот $P(x)=x^4-2x^3+ax^2+2x+b$ може да се запише како производ на два полиноми, од кои едниот е полиномот $Q(x)=(x-3)(x+1)$.

Задача 4. Определи го количникот и остатокот добиени при делење на полиномот $p(x)$ со полиномот $q(x)$ ако:

а) $p(x)=x^2+3x+2$ и $q(x)=x+2$.

б) $p(x)=x^4-1$ и $q(x)=x-1$.

в) $p(x)=2x^3-3x^2-x+1$ и $q(x)=x-2$.

Задача 5. Докажи дека полиномот $p(x)=x^4+3x+2$ се дели без остаток со полиномот $q(x)=x+1$.

Задача 6. Докажи дека полиномот

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

се дели со полиномот $(b-c)(c-a)(a-b)$.

Задача 7. Без степенување или разложување да се пресмета вредноста изразот

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3.$$

Задача 8. За кои вредности на параметрите a и b полиномот $Q(x)=x^2-1$ е делител на полиномот $P(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$.

Задача 9. а) Докажи дека не постои полином од трети степен

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

чии коефициенти се цели броеви и $p(7)=11$ и $p(11)=13$.

б) Докажи дека не постои полином $P(x)$, од четврти степен со целобројни коефициенти, таков што $P(7)=5$ и $P(15)=9$.

Задача 10. За кои вредности на a полиномот

$$p(a)=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2$$

се дели без остаток со 10.

Задача 11. Докажи дека полиномот $P(x)=x^2+x+1$ е делител на полиномот $R(x)=x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Задача 12. Пресметај ја вредноста на изразот

$$3x^4+2y^4+5x^2y^2+y^2, \text{ ако } x^2+y^2=1.$$

Задача 13. Даден е полиномот $P(x)=4x^4+x^3+8x^2+x+4$.

а) Разложи го $P(x)$ на производ од два полиноми од втор степен.

б) Докажи дека $2|P(x)$, ако $x\in\mathbf{N}$.

Задача 14. Полиномот $P(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$ разложи го на линеарни множители, а потоа пресметај ја неговата вредност за $x=11$.

Задача 15. Даден е полиномот

$$P(x)=(3-x)^3+(x^2-7x+12).$$

а) Разложи го на множители.

б) Пресметај $P(3)$ и $P(-1)$

в) Докажи дека $P(x)$ е делив со 2 за секој непарен цел број.

Задача 16. Полиномот $P(x)=x^4+4$ претстави го како производ на два полиноми од втор степен.

Задача 17. Даден е полиномот $P(x)=x^3+5x^2+3x-9$.

а) Разложи го на множители.

б) Докажи дека за секој непарен цел број x, $8|P(x)$.

Задача 18. Нека $x=\underbrace{11...1}_{20}$ Докажи дека x^3-x^2-2x е делив со 1188.

Задача 19. а) Даден е полиномот $P(x)=x^{101}(x-1)^{101}$. Пресметај $P(9)-P(3)P(4)$.

б) Даден е полиномот $P(a)=a^5-5a^3+4a$. Докажи дека $120|P(a)$, $a\in\mathbb{Z}$. Пресметај $P(-2)$ и $P(3)$.

Задача 20. Полиномот

а) $P(x)=x^8+x^4+1$ б) $P(x)=x^5+x+1$ в) $P(x)=x^3-7x+6$

разложи го на множители.

Задача 21. Полиномот

а) $P(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5$; б) $P(a)=a^3+2a^2-3$

разложи го на множители.

Задача 22. Полиномот

а) $P(a)=a^3+a^2+4$ б) $P(a)=a^3-6a^2-a+30$

разложи го на множители.

Задача 23. Полиномот

а) $P(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

б) $P(x)=2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$

разложи го на множители.

Задача 24. Упрости го изразот:

$$P(a,b)=[(4a+5b)^2]^2-[(4a-5b)^2]^2-160ab(4a-5b)^2$$

Задача 25. Полиномот

а) $P(a,b,c)=a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

б) $P(a,b,c)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
разложи го на множители.

Задача 26. Полиномот $P(x,y)=x^8+98x^4y^4+y^8$ разложи го на множители.

Задача 27. Разложи го на множители полиномот:

$$P(x,y,z)=xy(x^3-x^2y+xy^2-y^3)+yz(y^3-y^2z+yz^2-z^3)+zx(z^3-z^2x+zx^2-x^3)$$

Задача 28. Полиномот $P(a,b,c)=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$ разложи го на множители.

Задача 29. Пресметај ја бројната вредност на полиномот

$$P(a,c,x,y)=4a^2x^2-4acx^2+c^2x^2-16a^2xy+16acxy-4c^2xy+16a^2y^2-16acy^2+4c^2y^2$$

ако $a=3276, c=5552, x=9463$ и $y=4731$.

Задача 30. Полиномот

а) $P(x)=(x^2+4x+8)^2-3x(x^2+4x+8)+2x^2$

б) $P(a,b)=4b^2(b-2)+4a^2(2-a)+a^2b^2(a-b)$

в) $P(a,b,c)=ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$

г) $P(a,x,y)=(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$

д) $P(a,b,c,d)=bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

ѓ) $P(x)=x^4+1996x^2+1995x+1996$

разложи го на множители.

Задача 31. Нека x, y и z се цели броеви такви што $xy+yz+zx=1$. Докажи дека $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ е полн квадрат.

Задача 32. Докажи дека полиномот

$$P(x,y)=x^5+3x^4y-5y^2x^3-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$$

не прима вредност 33 за произволни цели броеви x и y.

Задача 33. Најди го најмалиот заеднички содржател на мономите

$$-24x^3y^2, 6xyz \text{ и } 18x^2z.$$

Задача 34. Најди го најмалиот заеднички содржател на полиномите

$$2x-2\ ,\ x^2-1,\ 3x^2+6x+3.$$

Задача 35. Најди го најмалиот заеднички содржател на полиномите:

а) $x^3+8, x^2-2x+4, x+2$ б) $2x^3+x^2-4x-12$ и x^2+x-6

Задача 36. Докажи дека полиномот

$$P(x)=(1-x+x^2-x^3+...-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+...+x^{99}+x^{100})$$

не содржи членови со непарен степенов показател.

Задача 37. Најди го остатокот од делењето на полиномот

$$p(x)=x^{2401}+x^{343}+x^{49}+x^7+x$$

со полиномот

а) $q(x)=x-1$ б) $s(x)=x^2-1$

Задача 38. Полиномот $p(x)$ при делење со $x-1$ дава остаток 2, а при делење со $x+1$ дава остаток -2. Определи го остатокот од делењето на $p(x)$ со x^2-1.

Задача 39. Докажи дека полиномот

$$p(x)=x^{99}+x^{88}+x^{77}+x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$$

се дели со полиномот $q(x)=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Задача 40. Одреди го збирот на коефициетите на полиномот

$$p_1(x)=(1-4x+4x^2)^{1995}(1+4x-x^2)^{1996}.$$

Задача 41. Одреди го реалниот број a, така што полиномот

$$p(x)=(x-a)(x-10)+1$$

може да се запише во облик $(x-b)(x-c)$ каде што b и c се цели броеви.

Задача 42. Докажи дека полиномот $p(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ се дели со полиномот $q(x)=(x-1)^2$.

Задача 43. Нека е даден полиномот

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

и нека

$$p(a)=p(b)=p(c)=p(d)=7,$$

каде $a, b, c, d, a_0, a_1, ..., a_n$ се цели броеви и a, b, c и d се по парови различни.

Докажи дека $p(x) \neq 14$, за секој цел број x.

Задача 44. Нека $ax^2 + bx + c$ е трином кој нема реални корени и $a + b + c > 0$. Докажи дека $c > 0$.

Задача 45. Нека

$$P(x) = a_{2000}\, x^{2000} + a_{1999}\, x^{1999} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

е полином со реални коефициенти таков што $P(0) \neq P(-1)$ и нека a, b се реални броеви. Нека

$$Q(x) = b_{2000}\, x^{2000} + b_{1999}\, x^{1999} + \cdots + b_1\, x + b_0$$

е полином за чии коефициенти важи

$$b_i = a\,a_i + b, \text{ за } i = 0, 1, 2, \ldots, 2000.$$

Докажи дека ако $Q(0) = Q(-1) \neq 0,$ тогаш не постои реален број x_0 таков што $Q(x_0) = 0.$

Задача 46. Полиномот $P(a) = a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ разложи го на множители.

Задача 47. Полиномот $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) + 12$ разложи го на множители.

Задача 48. Полиномот

$$P(x, y, z, w) = 2(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + 8xyzw$$

разложи го на множители.

Задача 49. Дали постои полином $p(x)$ со целобројни коефициенти кој ги задоволува условите $p(2) = 4$ и $p(6) = 6$?

Задача 50. Нека $p(x)$ е полином од четврти степен со целобројни коефициенти. Познато е дека за секој цел број x, $p(x)$ се дели со 7. Докажи дека сите коефициенти на $p(x)$ се делат со 7.

Задача 51. Провери дали бројот $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ е корен на полиномот $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

Задача 52. Ако α е корен на полиномот $p(x)$, тогаш за секој природен број m постои полином $q(x)$, таков што бројот $\sqrt[m]{\alpha}$ е корен на полиномот $q(x)$. Докажи!

2.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Имаме:

$$p(-2) = 5\cdot(-2) - \tfrac{a-6}{5}(-2) = -10 + \tfrac{2a-12}{5} = \tfrac{2a-62}{5}$$

и како $p(-2) = 4$ добиваме $\frac{2a-62}{5} = 4$, т.е. $a = 41$.

Значи,

$$p(x) = 5x - \tfrac{41-6}{5}x = 5x - 7x = -2x,$$

па затоа $p(-5) = 10$.

б) Бидејќи

$$P(-2) = (-2)^3 - \tfrac{k+2}{3}(-2)^2 + \tfrac{9-k}{4}(-2) + 20$$
$$= -8 - \tfrac{4k+8}{3} - \tfrac{9-k}{2} + 20 = \tfrac{29-5k}{6}$$

и $P(-2) = 4$ добиваме $\frac{29-5k}{6} = 4$, т.е $k = 1$.

Значи, $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 20$, па затоа

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 2\cdot 2 + 20 = 28.$$

2. Прво ќе го определиме производот на дадените полиноми. Имаме:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (x^3 + ax^2 + bx - 12)(x-2) \\ &= x^4 + ax^3 + bx^2 - 12x - 2x^3 - 2ax^2 - 2bx + 24 \\ &= x^4 + (a-2)x^3 + (b-2a)x^2 - 2(b+6)x + 24. \end{aligned}$$

Производот $p(x)\,q(x)$ не ги содржи вториот и третиот степен на x ако

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases}.$$

Решавајќи го системот добиваме $a = 2$ и $b = 4$. Значи,

$$p(x)q(x) = x^4 - 20x + 24.$$

3. Полиномот $Q(x)=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$ е од втор степен, па затоа во бараниот производ за $P(x)$ и другиот полином мора да е од втор степен. Имаме:

$$\begin{aligned}P(x)&=x^4-2x^3+ax^2+2x+b\\&=Q(x)(x^2+cx+d)\\&=(x-3)(x+1)(x^2+cx+d).\end{aligned}$$

Значи, $P(3)=0$ и $P(-1)=0$ т.е.

$$\begin{cases}3^4-2\cdot 3^3+a\cdot 3^2+2\cdot 3+b=0\\(-1)^4-2\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+b=0\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}9a+b+33=0\\a+b+1=0\end{cases}$$

Ако ги одземеме една од друга равенките во последниот систем добиваме $8a+32=0$ т.е. $a=-4$. Сега $b=-a-1=-(-4)-1=3$.

4. Количникот $r(x)$ на полиномите $p(x)$ и $q(x)$ го наоѓаме вака:

i) Го делиме првиот член на $p(x)$ со првиот член на $q(x)$ и добиениот количник го запишуваме како прв член на $r(x)$.

ii) Го множиме $q(x)$ со првиот член на $r(x)$ и добиениот производ го одземаме од $p(x)$, така што го наоѓаме првиот остаток $R_1(x)$.

iii) Го делиме првиот член на $R_1(x)$ со првиот член на $q(x)$ и добиениот количник го запишуваме како втор член на $r(x)$.

iv) Го множиме $q(x)$ со вториот член на $r(x)$ и добиениот производ го одземаме од $R_1(x)$. Го наоѓаме вториот остаток $R_2\left(x\right)$.

Постапката ја продолжуваме се додека не добиеме остаток нула или таков остаток кој не се дели со $q(x)$, т.е. со полином чиј степен е помал од степенот на $q(x)$.

а) Имаме:

$$\begin{array}{l}(x^2+3x+2):\left(x+2\right)=x+1\\ \underline{\pm x^2\pm 2x}\\ \qquad\quad x+2\\ \qquad\quad \underline{\pm x\pm 2}\\ \qquad\qquad 0\end{array}$$

Значи, $p(x):q(x)=x+1$.

б) Имаме

$$
\begin{array}{l}
(x^4-1) \quad : \quad (x-1)=x^3+x^2+x+1 \\
\underline{\pm x^4 \mp x^3} \\
\qquad x^3-1 \\
\qquad \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\
\qquad\qquad x^2-1 \\
\qquad\qquad \underline{\pm x^2 \mp x} \\
\qquad\qquad\qquad x-1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm x \mp 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Значи, при делење на $p(x)=x^4-1$ со $q(x)=x-1$ се добива количник $r(x)=x^3+x^2+x+1$ и остаток 0.

в) Имаме:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3-3x^2-x+1) \ : \ (x-2)=2x^2+x+1 \\
\underline{\pm 2x^3 \mp 4x^2} \\
\qquad x^2-x+1 \\
\qquad \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\
\qquad\qquad x+1 \\
\qquad\qquad \underline{\pm x \mp 2} \\
\qquad\qquad\quad 3
\end{array}
$$

Добиваме остаток $R_3(x)=3$. Понатамошно делење не е возможно бидејќи $R_3(x)=3$ е константен полином, а делителот $q(x)=x-2$ е полином од прв степен. Резултатот го запишуваме во облик

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-3x^2-x+1}{x-2}=\frac{(x-2)(2x^2+x+1)+3}{x-2}=2x^2+x+1+\frac{3}{x-2}.$$

5. Ќе го искористиме тврдењето: "Полиномот $p(x)$ се дели без остаток со полиномот $q(x)=x-a$ ако и само ако $p(a)=0$."

Според тоа, за да полиномот $p(x)=x^4+3x+2$ се дели без остаток со $q(x)=x+1=x-(-1)$ потребно и доволно е да $p(-1)=0$.

Навистина, $p(-1)=(-1)^4+3\cdot(-1)+2=1-3+2=0$, што значи дека $p(x)$ се дели без остаток со $q(x)$.

6. Доволно е да докажеме дека полиномот

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

се дели со секој од полиномите $b-c, c-a$ и $a-b$.

Дадениот полином

$$P=a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

да го разгледаме како полином од b. За да $P(b)$ се дели со $b-c$, треба $P(c)=0$. Навистина

$$\begin{aligned}P(c)&=a^3(c^2-c^2)+c^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-c^2)\\&=a^3\cdot 0+c^3(c^2-a^2)-c^3(c^2-a^2)=0.\end{aligned}$$

Значи, полиномот P се дели со $b-c$.

Аналогно, разгледувајќи го полиномот P како полином од a се докажува дека $P(b)=0$ и разгледувајќи го полиномот P како полином од c се докажува дека $P(a)=0$, што значи дека полиномот P се дели со $a-b$ и полиномот P се дели со $c-a$.

7. Вредноста на дадениот израз е еднаква на нула за $a=0, b=0$ и $c=0$, па затоа изразот се дели со abc. Бидејќи овој израз е симетричен и хомоген полином од трет степен добиваме дека

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=Mabc\,, \tag{1}$$

за секои a,b и c. Во (1) ставаме $a=b=c=1$ и добиваме $M=24$, што значи дека

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=24abc\,.$$

8. За да полиномот $P(x)$ се дели со полиномот $Q(x)=(x-1)(x+1)$ потребно и доволно е $P(x)$ да се дели со секој од полиномите $x-1$ и $x+1$. Според тоа, $P(x)$ се дели со $Q(x)$ ако и само ако $P(1)=0$ и $P(-1)=0$. Имаме:

$$0=P(1)=1-3+6+a+b=a+b+4\,,$$
$$0=P(-1)=1+3+6-a+b=-a+b+10\,,$$

т.е.

$$\begin{cases}a+b+4=0\\-a+b+10=0,\end{cases}$$

од каде што добиваме $a=3$ и $b=-7$.

9. а) Бидејќи $p(7)=11$ и $p(11)=13$ добиваме

$$11=a\cdot 7^3+b\cdot 7^2+c\cdot 7+d \text{ и } 13=a\cdot 11^3+b\cdot 11^2+c\cdot 11+d$$

т.е.

$$343\cdot a+49\cdot b+7\cdot c+d=11 \qquad (1)$$

$$1331\cdot a+121\cdot b+11\cdot c+d=13 \qquad (2)$$

Ако од (2) го одземеме (1) добиваме $988\cdot a+72\cdot b+4\cdot c=2$, т.е.

$$4\cdot(247\cdot a+18\cdot b+c)=2 \qquad (3)$$

Левата страна на (3) се дели со 4, а десната не се дели со 4, па затоа равенството (3) не е можно во множеството цели броеви. Според тоа, бараниот полином не постои.

б) Полином од четврти степен со целобројни коефициенти има облик

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

каде $P(7)=5$ и $P(15)=9$. Затоа

$$P(15)=a\cdot 15^4+b\cdot 15^3+c\cdot 15^2+d\cdot 15+e$$

$$P(7)=a\cdot 7^4+b\cdot 7^3+c\cdot 7^2+d\cdot 7+e$$

Имаме:

$$4=9-5=P(15)-P(7)=a(15^4-7^4)+b(15^3-7^3)+c(15^2-7^2)+d(15-7)$$

т.е.

$$4=8\cdot[a\cdot 22\cdot 274+b\cdot 379+c\cdot 22+d] \qquad (1)$$

Левата страна на (1) не се дели со 8, а десната страна се дели со 8, што значи дека равенството (1) не е можно во множеството цели броеви. Според тоа, не постои полином од четврти степен со целобројни коефициенти таков што $P(7)=5$ и $P(15)=9$.

10. Дадениот полином го трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} p(a)&=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2\\ &=a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4+a^2+6a+9\\ &=4a^2+12a+14=(2a+3)^2+5. \end{aligned}$$

За да $(2a+3)^2+5$ се дели со 10 потребно и доволно е да се дели со 2 и 5. Но, $(2a+3)^2$ и 5 се непарни броеви и нивниот збир е парен број. Значи, полиномот $p(a)$ се дели со 2, т.е. $2\,|\,p(a)$. Останува де се најдат природните броеви a за кои $p(a)$ се дели со 5. Бидејќи $5\,|\,5$ добиваме дека

$5 \mid p(a)$ ако и само ако $5 \mid (2a+3)^2$, $a \in \mathbf{N}$, што значи дека потребно и доволно е да $5 \mid 2a+3$. Но, $5 \mid 2a+3$ ако и само ако последната цифра на $2a+3$ е 5, затоа што ако последната цифра на $2a+3$ е 0, треба последната цифра на $2a$ да е 7 што не е можно, затоа што $2a$ е парен број, т.е.

$$2a+3=10n+5, \text{ каде } n \in \mathbf{Z}.$$

Значи,

$$a=5n+1,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Конечно, $10 \mid p(a)$ ако и само ако $a=5n+1$, $n \in \mathbf{Z}$.

11. Со разложување на полиномот добиваме:

$$\begin{aligned} R(x) &= (x^8+x^7+x^6)+(x^5+x^4+x^3)+(x^2+x+1) \\ &= x^6(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1) \\ &= (x^6+x^3+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Значи,

$$\frac{R(x)}{P(x)} = x^6+x^3+1 \text{ т.е. } P(x) \mid R(x).$$

12. Имаме

$$\begin{aligned} 3x^4+2y^4+5x^2y^2+y^2 &= 3x^4+3y^4+6x^2y^2+y^2-y^4-x^2y^2 \\ &= 3(x^2+y^2)^2-y^2(-1+y^2+x^2)=3-y^2\cdot 0=3. \end{aligned}$$

13. а) Имаме,

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4+x^3+8x^2+x+4=4x^4+x^3+4x^2+4x^2+x+4 \\ &= x^2(4x^2+x+4)+(4x^2+x+4)=(4x^2+x+4)(x^2+1). \end{aligned}$$

б) Ако $x \in \mathbf{N}$, тогаш $x=2k, k \in \mathbf{N}$ или $x=2k+1, k \in \mathbf{N}$. За $x=2k$ полиномот $P(x)$ е:

$$P(2k)=(16k^2+2k+4)(4k^2+1)=2(8k^2+k+2)(4k^2+1)$$

т.е. $2 \mid P(2k)$. За $x=2k+1$ имаме:

$$\begin{aligned} P(2k+1) &= [4(2k+1)^2+(2k+1)+4]\,[(2k+1)^2+1] \\ &= 2(16k^2+18k+9)(2k^2+2k+1), \end{aligned}$$

т.е. $2 \mid P(2k+1)$.

Значи, $2 \mid P(2k)$ и $2 \mid P(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$, т.е. $2 \mid P(x)$, $x \in \mathbf{N}$.

14. Полиномот $P(x)$ ќе го претставиме како производ на полиноми од видот $ax+b$. Имаме

$$P(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)$$
$$=(x-1)(x^4-2x^2+1)=(x-1)(x^2-1)^2=(x-1)[(x-1)(x+1)]^2$$
$$=(x-1)(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)^3(x+1)^2.$$

За $x=11$ добиваме: $P(11)=(11-1)^3(11+1)^2=10^3\cdot 12^2=144000$.

15. а) Имаме,

$$P(x)=(3-x)^3+x^2-3x-4x+12=(3-x)^3+4(3-x)-x(3-x)$$
$$=(3-x)[(3-x)^2+4-x]=(3-x)(x^2-7x+13).$$

б) Имаме,

$$P(3)=(3-3)(3^2-7\cdot 3+13)=0\cdot 1=0$$
$$P(-1)=(3-(-1))((-1)^2-7\cdot\left(-1\right)+13)=4\cdot 21=84.$$

в) Ако $x=2k+1, k\in\mathbf{Z}$, тогаш

$$P(x)=(3-2k-1)[(2k+1)^2-7(2k+1)+13]=2(1-k)(4k^2-10k+7),$$

т.е. $2\,\big|\,P(x)$.

16. Полином од втор степен има вид $ax^2+bx+c, a\neq 0$, па затоа

$$P(x)=x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

17. а) Имаме,

$$P(x)=x^3+5x^2+3x-9=x^3+6x^2-x^2+9x-6x-9$$
$$=x^3+6x^2+9x-(x^2+6x+9)=x(x^2+6x+9)-(x^2+6x+9)$$
$$=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2.$$

б) За $x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}$ имаме:

$$P(2k+1)=(2k+1-1)(2k+1+3)^2=2k[2(k+2)]^2$$
$$=2k\cdot 2^2(k+2)^2=8k(k+2)^2,$$

што значи $8\,\big|\,P(2k+1)$.

18. Прво да забележиме дека $11\cdot 4\cdot 3\cdot 9=1188$. Понатаму,

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1) = \underset{20}{11...1} \cdot \underset{19}{11...12} \cdot \underset{18}{11...109}\,.$$

Првиот број е делив со 11, вториот со 4 и 3, а третиот со 9, па значи нивниот производ е делив со $11 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 = 1188$.

19. а) Прво да забележиме дека

$$P(9) = 9^{101}(9-1)^{101} = 9^{101}8^{101} = 72^{101},$$

$$P(3) = 3^{101}(3-1)^{101} = 3^{101}2^{101} = 6^{101} \text{ и}$$

$$P(4) = 4^{101}(4-1)^{101} = 4^{101}3^{101} = 12^{101}.$$

Според тоа,

$$P(9) - P(3)P(4) = 72^{101} - 6^{101}12^{101} = 72^{101} - (6 \cdot 12)^{101} = 72^{101} - 72^{101} = 0\,.$$

б) Разложувајќи го $P(a)$ на множители добиваме:

$$\begin{aligned} P(a) &= a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^4 - 5a^2 + 4a) = a(a^2 - 4)(a^2 - 1) \\ &= a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2). \end{aligned}$$

Значи, ако $a \in \mathbf{Z}$, тогаш $P(a)$ е производ од пет последователни цели броеви. Меѓу пет последователни цели броеви еден е делив со 5, најмалку еден е делив со 4, најмалку еден е делив со 3 и најмалку два се деливи со 2, па затоа

$$120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \,\big|\, P(a)\text{, за секој } a \in \mathbf{Z}.$$

Имаме,

$$P(-1) = (-2-2)(-2-1)(-2)(-2+1)(-2+2) = 0$$

$$P(3) = (3-2)(3-1)3(3+1)(3+2) = 120\,.$$

20. а) Последователно наоѓаме:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4+1)^2 - (x^2)^2 \\ &= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) = (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= [(x^2+1)^2 - x^2](x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)((x^2+1)^2 - (\sqrt{3}x)^2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1 - \sqrt{3}x)(x^2 + 1 + \sqrt{3}x). \end{aligned}$$

б) Имаме,

$$P(x)=x^5+x+1=(x^5+x^4+x^3)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$$
$$=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

в) Имаме,

$$P(x)=x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)$$
$$=x(x-1)(x+1)-6(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x^2-2x+3x-6)$$
$$=(x-1)[x(x-2)+3(x-2)]=(x-1)(x-2)(x+3).$$

21. а) Имаме,

$$P(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-1-x^5+1$$
$$=[(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)-1]\,[(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)+1]-(x^5-1)$$
$$=(x^5+x^4+x^3+x^2+x)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+2)-\left(x-1\right)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$=x(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+2)-\left(x-1\right)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+2x-x+1)$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1).$$

б) Имаме,

$$P(a)=a^3+2a^2-3=a^3-1+2a^2-2=(a-1)(a^2+a+1)+2(a^2-1)$$
$$=(a-1)(a^2+a+1)+2(a-1)(a+1)=(a-1)(a^2+a+1+2a+2)$$
$$=(a-1)(a^2+3a+3).$$

22. а) Имаме

$$P(a)=a^3+a^2+4=a^3+8+a^2-4=a^3+2^3+a^2-2^2$$
$$=(a+2)(a^2-2a+4)+(a-2)(a+2)$$
$$=(a+2)(a^2-2a+4+a-2)=(a+2)(a^2-a+2).$$

б) Имаме,

$$P(a)=a^3-6a^2-a+30=a^3-3a^2-3a^2+9a-10a+30$$
$$=a^2(a-3)-3a(a-3)-10(a-3)=(a-3)(a^2-3a-10)$$
$$=(a-3)(a+2)(a-5).$$

23. а) Имаме,

$$P(x)=[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)\left(x+5\right)]+15$$
$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15.$$

Воведуваме смена $x^2+8x=z$ и добиваме:

$$P=(z+7)(z+15)+15=z^2+22z+120$$
$$=z^2+12z+10z+120$$
$$=z(z+12)+10(z+12)=(z+12)(z+10).$$

Значи,

$$P(x)=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$$
$$=(x^2+6x+2x+12)(x^2+8x+16-6)$$
$$=[x(x+6)+2(x+6)][(x+4)^2-(\sqrt{6})^2]$$
$$=(x+6)(x+2)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6}).$$

б) Воведуваме смени $x^2+6x+1=y, x^2+1=z$ и добиваме

$$P=2y^2+5yz+2z^2=2y^2+4yz+yz+2z^2$$
$$=2y(y+2z)+z(y+2z)=(y+2z)(2y+z).$$

Значи

$$P(x)=(x^2+6x+1+2x^2+2)(2x^2+12x+2+x^2+1)$$
$$=(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)=3(x^2+2x+1)\cdot 3(x^2+4x+1)$$
$$=9\left(x+1\right)^2(x^2+4x+1)=9\left(x+1\right)^2(x^2+4x+4-3)$$
$$=9\left(x+1\right)^2(\left(x+2\right)^2-(\sqrt{3})^2)=9\left(x+1\right)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}).$$

24. Полиномот $P(a,b)$ ќе го разложиме на множители

$$P(a,b)=[(4a+5b)^2-(4a-5b)^2][(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$$
$$=(4a+5b+4a-5b)(4a+5b-4a+5b)[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$$
$$=8a\cdot 10b[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$$
$$=80ab\cdot(4a+5b)^2+80ab\cdot(4a-5b)^2-160ab\cdot(4a-5b)^2$$
$$=80ab\cdot[(4a+5b)^2-(4a-5b)^2]$$
$$=80ab(4a+5b+4a-5b)(4a+5b-4a+5b)$$
$$=80ab\cdot 8a\cdot 10b=6400a^2b^2.$$

25. а) Полиномот $P(a,b,c)$ ќе го разложиме на множители

$$P(a,b,c)=a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$
$$=ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc$$

$$=a^2b+ba^2+ac^2+bc^2+a^2c+2abc+b^2c$$
$$=ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a+b)^2=(a+b)(ab+c^2+ac+bc)$$
$$=(a+b)(a(b+c)+c(b+c))=(a+b)(b+c)(a+c).$$

б) Според а) добиваме:

$$P(a,b,c)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2+2abc$$
$$=(a+b)(b+c)(a+c).$$

26. Полиномот $P(x,y)$ ќе го разложиме на множители

$$P(x,y)=x^8+2x^4y^4+y^8+96x^4y^4=(x^4+y^4)^2+96x^4y^4$$
$$=(x^4+y^4)^2+16x^2y^2(x^4+y^4)+64x^4y^4-16x^2y^2(x^4+y^4)+32x^4y^4$$
$$=(x^4+8x^2y^2+y^4)^2-16x^2y^2(x^4-2x^2y^2+y^4)$$
$$=(x^4+8x^2y^2+y^4)^2-(4xy)^2(x^2-y^2)^2$$
$$=(x^4+8x^2y^2+y^4)^2-(4x^3y-4xy^3)^2$$
$$=(x^4+8x^2y^2+y^4+4x^3y-4xy^3)(x^4+8x^2y^2+y^4-4x^3y+4xy^3).$$

27. Полиномот $P(x,y,z)$ ќе го разложиме на множители

$$P(x,y,z)=xy(x-y)(x^2+y^2)+z[z^3\left(x-y\right)-(x^4-y^4)-z^2(x^2-y^2)+z(x^3-y^3)]$$
$$=(x-y)(x^3y+xy^3+z^4-zx^3-zx^2y-zxy^2-zy^3-z^3x-z^3y+z^2x^2+z^2xy+z^2y^2)$$
$$=(x-y)[x^3(y-z)-z^3(y-z)+x(y^3-z^3)-zx^2(y-z)-xyz(y-z)-zy^2(y-z)]$$
$$=(x-y)(y-z)(x^3-z^3+xy^2-y^2z-x^2z+xz^2)$$
$$=(x-y)(y-z)(x-z)(x^2+y^2+z^2).$$

28. Полиномот $P(a,b,c)$ ќе го разложиме на множители

$$P(a,b,c)=bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$$
$$=bc(b+c)+a(c^2-ac-ba-b^2)$$
$$=bc(b+c)+a[(c-b)(c+b)-a(b+c)]$$
$$=(b+c)(bc+ac-ab-a^2)$$
$$=(b+c)[b(c-a)+a(c-a)]$$
$$=(b+c)(c-a)(a+b).$$

29. Полиномот $P(a,c,x,y)$ ќе го разложиме на множители:

$$P(a,c,x,y)=x^2(4a^2-4ac+c^2)-4xy(4a^2-4ac+c^2)+4y^2(4a^2-4ac+c^2)$$
$$=(4a^2-4ac+c^2)(x^2-4xy+4y^2)=(2a-c)^2(x-2y)^2.$$

Значи бараната бројна вредност на полиномот е:

$$P(3276,5552,9463,4731)=(2\cdot 3276-5552)^2(9463-2\cdot 4731)^2$$
$$=(6552-5552)^2(9463-9462)^2=1000^2\cdot 1^2=10^6.$$

30. а) Ставаме $x^2+4x+8=y$ и добиваме

$$P=y^2-3xy+2x^2=y^2-2xy-xy+2x^2=y(y-2x)-x(y-2x)$$
$$=(y-2x)(y-x)=(x^2+4x+8-2x)(x^2+4x+8-x)$$
$$=(x^2+2x+8)(x^2+3x+8).$$

б) Имаме,

$$P(a,b)=4b^3-4a^3-8b^2+8a^2-a^2b^2(b-a)$$
$$=4(b-a)(b^2+ab+a^2)-8(b-a)(b+a)-a^2b^2(b-a)$$
$$=(b-a)(4b^2+4ab+4a^2-8b-8a-a^2b^2)$$
$$=(b-a)(4b^2+4ab+4a^2-8a-8b-a^2b^2+4-4+4ab-4ab)$$
$$=(b-a)[(4a^2+4b^2+4+8ab-8a-8b)-(a^2b^2+4ab+4)]$$
$$=(b-a)[(2a+2b-2)^2-(ab+2)^2]$$
$$=(b-a)(2a+2b-2-ab-2)(2a+2b-2+ab+2)$$
$$=(b-a)(2a+2b+ab)(2a+2b-ab-4).$$

в) Имаме,

$$P(a,b,c)=ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$$
$$=ab(a-b)-ac(a+c)+bc(a+c+a-b)$$
$$=ab(a-b)-ac(a+c)+bc(a+c)+bc(a-b)$$
$$=(a-b)(ab+bc)+(a+c)(bc-ac)$$
$$=(a-b)(a+c)b-(a+c)(a-b)c=(a-b)(a+c)(b-c).$$

г) Имаме,

$$P(a,x,y)=(a-y+y-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$$
$$=(a-y)y^3-(a-y)x^3-(y-x)a^3+(y-x)y^3$$
$$=(a-y)(y^3-x^3)+(y-x)(y^3-a^3)$$

$$
\begin{aligned}
&=(a-y)(y-x)(y^2+xy+x^2)-(a-y)(y-x)(a^2+ay+y^2)\\
&=(a-y)(y-x)(y^2+xy+x^2-a^2-ay-y^2)\\
&=(a-y)(y-x)[y(x-a)+(x-a)(x+a)]\\
&=(a-y)(y-x)(x-a)(x+a+y).
\end{aligned}
$$

д) Имаме,

$$
\begin{aligned}
P(a,b,c,d)&=bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(b-c+a-b)+ab(c+d)(a-b)\\
&=bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(b-c)-ac(b+d)(a-b)+ab(c+d)(a-b)\\
&=(b-c)[bc(a+d)-ac(b+d)]+(a-b)[ab(c+d)-ac(b+d)]\\
&=(b-c)(bcd-acd)-(b-a)(abd-acd)\\
&=(b-c)(b-a)cd-(b-a)(b-c)ad\\
&=d(b-c)(b-a)(c-a).
\end{aligned}
$$

ѓ) Имаме,

$$
\begin{aligned}
P(x)&=x^4+x^3+x^2+1995x^2+1995x+1995-x^3+1\\
&=x^2(x^2+x+1)+1995(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)\\
&=(x^2+x+1)(x^2+1995-x+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1996).
\end{aligned}
$$

31. Користејќи го равенството $xy+yz+zx=1$ добиваме

$$1+x^2=xy+yz+zx+x^2=y(x+z)+x(x+z)=(x+y)(x+z)$$

$$1+y^2=xy+yz+zx+y^2=y(x+y)+z(x+y)=(x+y)(y+z)$$

$$1+z^2=xy+yz+zx+z^2=y(x+z)+z(x+z)=(x+z)(y+z)$$

Значи,

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)&=(x+y)(x+z)(x+y)(y+z)((x+z)(y+z)\\
&=[(x+y)(y+z)(z+x)]^2
\end{aligned}
$$

Бидејќи x, y и z се цели броеви, добиваме дека и бројот $(x+y)(y+z)(z+x)$ е цел, па затоа $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ е полн квадрат.

32. Полиномот разложен на линеарни множители е:

$$P(x,y)=(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y)$$

Ако $y=0$, тогаш $P(x,0)=x^5\neq 33$, за секој цел број x .

Ако $y\neq 0$, тогаш полиномот $P(x,y)$ е запишан како производ на пет различни множители чии вредности се цели броеви. Од друга страна бројот 33 може да се запише како производ на најмногу четири различни цели броеви. Добиената противречност покажува дека $P(x,y)\neq 33$, за секои $x,y\in\mathbf{Z}$.

33. Најмал заеднички содржател на два или повеќе полиноми е полином со најмал степен кој е содржател на разгледуваните полиноми. Коефициентот на првиот моном е негативен и затоа најмалиот заеднички содржател на мономите ќе го најдеме ако најдеме НЗС на апсолутните вредности на коефициентите и го помножиме со различните множители кои се среќаваат во мономите земени на највисокиот степенов показател за секој множител поодделно. Имаме,

$$\text{НЗС}\,(-24x^3y^2, 6xyz, 18x^2z^2)=72x^3y^2z^2\,.$$

34. Ги разложуваме дадените полиноми до неразложливи множители. Тогаш најмалиот заеднички содржател е еднаков на производот на одделните множители при што секој множител го земаме со најголем степенов показател појавен меѓу одделните полиноми. Наоѓаме:

$$P(x)=2x-2=2(x-1)$$

$$Q(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$R(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$$

Сега,

$$\text{НЗС}\,(P(x),Q(x),R(x))=2\cdot 3(x-1)(x+1)^2=6(x-1)(x+1)^2\,.$$

35. а) Имаме:

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)\,.$$

Бидејќи секој од множителите на првиот полином е еднаков на еден од другите два полиноми заклучуваме дека првиот полином е бараниот најмал заеднички содржател, т.е. НЗС $(P(x),Q(x),R(x))=x^3+8$.

б) Имаме:

$$\begin{aligned}P(x)&=2x^3+x^2-4x-12=2(x^3-8)+x^2-4x+4\\&=2(x-2)(x^2+2x+4)+(x-2)^2\\&=(x-2)(2x^2+4x+8+x-2)\\&=(x-2)(2x^2+5x+6)\end{aligned}$$

$$Q(x)=x^2+x-6=x^2-2x+3x-6=x(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x+3)$$

Значи,

$$\text{НЗС}\,(P(x),Q(x))=(x-2)(x+3)(2x^2+5x+6)\,.$$

36. Имаме

$$\begin{aligned}P(x)&=(1-x+x^2-x^3+...-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+...+x^{99}+x^{100})\\&=[(1+x^2+x^4+...+x^{100})-x(1+x^2+...+x^{98})]\cdot\\&\quad\cdot[(1+x^2+x^4+...+x^{100})+x(1+x^2+x^4+...+x^{98})]\\&=(1+x^2+x^4+...+x^{100})^2-x^2(1+x^2+x^4+...+x^{98})^2.\end{aligned}$$

Сега, тврдењето на задачата следува од фактот дека при множење на степени со иста основа степеновите показатели се собираат.

37. а) Делителот $q(x)$ е полином од прв степен, па затоа остатокот од делењето е константа. Ако со $r_1(x)$ го означиме количникот а со r остатокот, тогаш

$$p(x)=(x-1)r_1(x)+r \tag{1}$$

Во (1) ставаме $x=1$ и добиваме $p(1)=(1-1)r_1(1)+r=r$, т.е.

$$r=p(1)=1^{2401}+1^{343}+1^{49}+1^7+1=5$$

б) Деленикот $s(x)=x^2-1$ е полином од втор степен, па затоа остатокот од делењето е полином од најмногу прв степен. Ако со $r_2(x)$ го означиме количникот, а со $r_3(x)=ax+b$ остатокот, тогаш

$$p(x)=(x^2-1)r_1(x)+ax+b \tag{2}$$

Во (2) ставаме $x=1$ и добиваме

$$p(1)=(1^2-1)r_2(1)+a+b\,,$$

т.е.

$$a+b=p(1)=5\,.$$

Во (2) ставаме $x=-1$ и добиваме

$$p(-1)=[(-1)^2-1]r_2(-1)-a+b\,,$$

т.е.

$$b-a=p(-1)=(-1)^{2401}+(-1)^{343}+(-1)^{49}+(-1)^7+(-1)=-5$$

Значи,

$$\begin{cases}a+b=5\\b-a=-5\end{cases},$$

од каде што наоѓаме $b=0$ и $a=5$. Конечно, остатокот е $r_3(x)=5x$.

38. Нека $q(x)$ е количникот од делењето на $p(x)$ со x^2-1, а $r(x)=ax+b$ е бараниот остаток. Имаме,

$$p(x)=(x^2-1)q_1(x)+ax+b \tag{1}$$

Согласно условот на задачата:

$$p(x)=(x-1)q_2(x)+2$$

од што следува $p(1)=2$, односно

$$p(x)=(x+1)q_3(x)-2$$

од што следува $p(-1)=-2$. Сега со замена во (1) за $x=1$ и $x=-1$ добиваме:

$$2=p(1)=a+b$$
$$-2=p(-1)=-a+b$$

од што следува $b=0$ и $a=+2$.

Значи, бараниот остаток е $r(x)=2x+0=2x$.

39. Имаме,

$$\begin{aligned} p(x)-q(x)&=(x^{99}-x^9)+(x^{88}-x^8)+...+(x^{11}-x) \\ &=x^9[(x^{10})^9-1]+x^8[(x^{10})^8-1]+....+x[x^{10}-1] \end{aligned} \tag{1}$$

Од идентитетот

$$a^k-b^k=(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1})$$

заклучуваме дека a^k-b^k се дели со $a-b$, за секој природен број k. Значи,секој од изразите во заградите на идентитетот (1) е делив со

$$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

па значи и со $q(x)$. Значи ,

$$p(x)-q(x)=q(x)r(x)$$

за некој полином $r(x)$. Конечно, $p(x)=(r(x)+1)q(x)$, т.е. $q(x)$ е делител на $p(x)$.

40. За секој полином $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ важи

$$p(1)=a_0+a_1+...+a_n$$

Значи, збирот на коефициентите на полиномот $p_1(x)$ е еднаков на

$$p_1(1)=(1-4\cdot 1+4\cdot 1^2)^{1995}(1+4\cdot 1-4\cdot 1^2)^{1996}=1^{1995}\cdot 1^{1996}=1.$$

41. Имаме,

$$(x-a)(x-10)+1=(x-b)(x-c) \qquad (1)$$

Ако во (1) ставиме $x=10$, добиваме

$$(10-b)(10-c)=1.$$

Но, $10-b$ и $10-c$ се цели броеви, па нивниот производ е еднаков на 1 ако и само ако и двата се еднакви на 1 или и двата се еднакви на -1. Значи,

$$\begin{cases}10-b=1\\10-c=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}10-b=-1\\10-c=-1\end{cases}$$

т.е. $b=c=9$ или $b=c=11$.

Во првиот случај имаме

$$(x-9)^2=(x-a)(x-10)+1,$$

т.е.

$$x^2-18x+81=x^2-(10+a)x+10a+1$$

од што следува $a=8$, а во вториот случај

$$(x-11)^2=(x-a)(x-10)+1,$$

т.е.

$$x^2-22x+121=x^2-(10+a)x+10a+1$$

од што следува $a=12$.

42. Го разложуваме полиномот $p(x)$:

$$\begin{aligned}p(x)&=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=nx^n(x-1)-(x^n-1)\\&=nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x^2+x+1)\\&=(x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-...-x^2-x-1)\\&=(x-1)[(x^n-x^{n-1})+(x^n-x^{n-2})+(x^n-x^{n-3})+...+(x^n-x)+(x^n-1)]\\&=(x-1)[x^{n-1}(x-1)+x^{n-2}(x^2-1)+x^{n-3}(x^3-1)+...+x(x^{n-1}-1)+(x^n-1)]\end{aligned}$$

Секој од членовите во средната заграда на добиениот израз е делив со $x-1$, па значи и

$$q_1(x)=x^{n-1}(x-1)+x^{n-2}(x^2-1)+x^{n-3}(x^3-1)+...+x(x^{n-1}-1)+(x^n-1)$$

е делив со $x-1$ т.е. $q_1(x)=(x-1)r(x)$. Конечно,

$$p(x)=(x-1)q_1(x)=(x-1)^2r(x) \text{ т.е. } (x-1)^2 \mid p(x).$$

43. Нека $p(x)-7$ при делење со $x-a$ дава количник $q(x)$ и остаток r. Значи

$$p(x)-7=(x-a)q(x)+r \qquad (1)$$

Ако во (1) ставиме $x=a$ добиваме $p(a)-7=(a-a)q(a)+r$, т.е. $r=0$. Значи $p(x)-7$ се дели со $x-a$. Аналогно добиваме дека $p(x)-7$ се дели со $x-b, x-c$ и $x-d$ и од тоа што a, b, c и d се различни цели броеви заклучуваме дека $p(x)-7$ се дели со $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, т.е.

$$p(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p_1(x)$$

при што $p_1(x)$ може да биде и константен полином.

Нека претпоставиме дека $p(A)=14$, за некој цел број A. Тогаш, со замена во (1) добиваме

$$7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p_1(A),$$

т.е. бројот 7 е запиша како производ од пет цели броеви, од кои барем четири се различни што е противречност. Добиената противречност покажува дека $p(x)\neq 14$ за секој цел број x.

44. Бидејќи триномот ax^2+bx+c нема реални корени, добиваме дека или $ax^2+bx+c>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ или $ax^2+bx+c<0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Од условот $a+b+c>0$, добиваме дека

$$f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c>0.$$

Значи, $ax^2+bx+c>0$, за секој реален број x. Според тоа, $c=f(0)>0$.

45. Од $b_i=aa_i+b$, за $i=0,1,\dots,2000$ следува

$$Q(x)=aP(x)+b\,(x^{2000}+x^{1999}+...+x+1).$$

Од $Q(0)=Q(-1)\neq 0$ следува $a[P(0)-P(-1)]=0$, па затоа $a=0$, т.е.

$$Q(x)=b(x^{2000}+x^{1999}+...+x+1). \qquad (1)$$

Бидејќи $Q(0)\neq 0$ добиваме дека $b\neq 0$.

Од (1) следува дека за $x_o>0$ важи $Q(x_o)\neq 0$.

Ако $x_o\leq -1$, тогаш $Q(x_o)\neq 0$, бидејќи

$$x_0^{2000}+x_0^{1999}+...+x_0+1=x_0^{1999}(x_0+1)+x_0^{1997}(x_0+1)+x_0(x_0+1)+1\geq 1.$$

Ако $x_0\in(-1,0)$, тогаш $Q(x_0)\neq 0$ бидејќи

$$x_0^{2000}+x_0^{1999}+...+x_0+1=x_0^{2000}+x_0^{1998}(x_0+1)+x_0^{1996}(x_0+1)+x_0+1>0$$

Конечно, не постои $x_0\in\mathbf{R}$ таков што $Q(x_0)=0$.

3. АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

3.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Упрости ја дропката

а) $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$, б) $\frac{a^3+2a^2-3}{a^3-3a^2+3a-1}$.

Задача 2. За кои вредности на x алгебарската дропка $\frac{(x+2)(x-3)}{3x^3-x^4}$

а) прима вредност нула; б) нема смисол;
в) може да се скрати.

Задача 3. Упрости го изразот

а) $\frac{x^2-ax}{a^2-a}\cdot\frac{2a-2}{a-x}$, б) $\frac{ay-y-a+1}{3b-3}:\frac{a^2-a}{1-2b+b^2}$.

Задача 4. Упрости го изразот $\frac{(x+3y)^2-(x-2y)^2}{x^2-(x-y)^2}$, а потоа пресметај ја неговата вредност за $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$.

Задача 5. Упрости го изразот

а) $A(x)=\frac{x^4-3x^2+1}{x^4-x^2-2x-1}$, б) $A(x)=\frac{x^{12}-128x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}$.

Задача 6. Ако x и a се реални броеви и $x\neq a$, упрости го изразот

$$A(x,a)=\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}.$$

Задача 7. Упрости го изразот

а) $A(x,y)=\frac{x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3}{2x^3+x^2y-4xy^2-3y^3}$, б) $Q(x,a,c)=\frac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}$,

в) $A(x,a)=\frac{x^4+4}{a(x^2+2)-2ax-(x-1)^2-1}$,

г) $A(x,y)=\frac{x^4+64}{y(x+2)^2-4(x-y)-x^2-8}$.

Задача 8. Упрости го изразот

$$A(x,y)=\frac{(6a^7-b^8-3ab^5)(25a^4-10a^2b+b^2)-(5a^2-b)^2}{(3a^3-2b)^2-9a^6-4b^2},$$

а потоа пресметај ја неговата вредност за $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{5}{4}$.

Задача 9. Сведи ги на заеднички именител дропките:

$$\frac{x}{2a^3b^2}\;,\;\frac{7}{10abc}\text{ и }\frac{1}{6a^2b}.$$

Задача 10. Сведи ги на заеднички именител дропките:

а) $\frac{3}{a+1}$ и $\frac{2}{a-2}$; б) $\frac{a}{2x-4}$ и $\frac{b}{5x-10}$.

Задача 11. Собери ги дропките:

а) $\frac{1}{2x-2}$ и $\frac{2-x}{(1-x)(1+x)}$ б) $\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)},\frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}$ и $\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$.

Задача 12. Упрости го изразот:

а) $\frac{1}{6a+3}+\frac{2}{2a-1}-\frac{9a+3}{8a^2-2}$,

б) $[\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}]:(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2})$,

в) $[a+2:(1+\frac{a}{2})]:\frac{a^3-8}{a+2}+\frac{1}{2-a}$.

Задача 13. Упрости го изразот:

$$[(1-\frac{2}{1-3a})(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1})]:(2-18a^2).$$

За кои вредности на a упростениот израз:

а) има смисол;

б) прима вредност нула;

в) прима вредност $\frac{1}{4}$.

Задача 14. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A(x)=\frac{x^4-4x^2+4}{x^3-x^2-2x+2}-\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}+\frac{x+2}{x-1} \text{ за } x=1,5014$$

Задача 15. Помножи ги изразите

$$A(a)=\frac{a}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}+\frac{2}{a+2} \text{ и } B(a)=a-1+\frac{1}{a-3}$$

а потоа пресметај $A(-1)B(-1)$.

Задача 16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A(a)=(\frac{1}{a+2}-\frac{a+2}{a^2-4a+4}):\frac{4a}{a^2-4}\text{ , за } a=\frac{3}{2}.$$

Задача 17. Ако

$$y=(x^2+\frac{1}{x^2}):(x^2-\frac{1}{x^2}) \text{ и } z=(x^4+\frac{1}{x^4}):(x^4-\frac{1}{x^4})$$

изрази го z преку y.

Задача 18. Упрости го изразот

а) $A(x,y)=\frac{(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2})(\frac{x-y}{x+y}-1)}{(\frac{x-y}{x+y}+1)(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})}$,

б) $A(a,n)=\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$.

Задача 19. Упрости го изразот:

$$A(m,n)=\frac{(m^2-\frac{1}{n^2})^m(n+\frac{1}{m})^{n-m}}{(n^2-\frac{1}{m^2})^n(m-\frac{1}{n})^{m-n}}.$$

Задача 20. Упрости го изразот

$$A(a)=1-a+a^2-a^3+...+a^{1994}-\frac{a^{1995}}{1+a}$$

и пресметај ја неговата вредност за $a=-\frac{4}{5}$.

Задача 21. Упрости го изразот:

$$\frac{(5c-6d)^2-(3a-4b)^2}{25c^2-(6d+3a-4b)^2}-\frac{25c^2-(6d-3a+4b)^2}{36d^2-(3a-4b+5c)^2}-\frac{36d^2-(3a-4b-5c)^2}{(3a-4b)^2-(5c+6d)^2}.$$

Задача 22. Докажи дека дропката $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ е нескратлива за секој цел број a.

Задача 23. Пресметај ја вредноста на изразот

$$[(\frac{1}{(\frac{1}{x})^n : x^n} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}}) : \frac{4}{x^{2n-1}}]^3,$$

за $x = -2$ и $n = 2$.

Задача 24. Ако за реалните броеви a и b е исполент условот $ab = a - b$, докажи дека вредноста на изразот $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ не зависи ниту од a ниту од b.

Задача 25. Упрости ги изразите:

а) $\frac{x^2+2x}{4x^2-1} \cdot (\frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x} - (\frac{x^2}{x+2} - x - 2))$, и

б) $(\frac{1}{a^3-b^3} - \frac{a+b}{a^4+b^4+a^2b^2}) \cdot \frac{a^3-b^3}{ab}$.

Задача 26. Упрости ги изразите:

а) $(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}) \cdot (a^3 - 2a + \frac{1}{a})$, и

б) $(\frac{a^2+2b^2}{ab} - \frac{1}{a-b}(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a})) : \frac{b-a}{a}$.

Задача 27. Упрости ги изразите:

а) $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}$,

б) $(2a + \frac{a^2+b^2}{b}) : (a + \frac{b^2}{a+2b}) - \frac{a}{b}(b + 1 + \frac{2b}{a})$ и

в) $-\frac{x^2}{x+y} - (\frac{x^2}{x+y} - \frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}) : (\frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{x}{y-x})$.

Задача 28. Упрости го изразот:

$$(1 + \frac{ab+b^2}{a^2}) : (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) : \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}.$$

Задача 29. Изрази го со помош на x изразот

$$\frac{a^3-c^3}{a+c} - \frac{a^3+c^3}{a-c} + \frac{1}{a^2-c^2},$$

ако $a = 1 + x$ и $c = 1 - x$.

Задача 30. Упрости го изразот

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

ако е $x = \sqrt{ab}$ и $a > b, b > 0$.

3.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Прво ќе ги разложиме броителот и именителот на дропката. Имаме,

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}=\frac{a^2(b-c)+b^2c-b^2a+ac^2-bc^2}{a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)}=\frac{a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)}{(b^2-c^2)(a-b)}$$

$$=\frac{(b-c)(a^2+bc-ab-ac)}{(b-c)(b+c)(a-b)}=\frac{(b-c)(a(a-b)-c(a-b))}{(b-c)(b+c)(a-b)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(b-c)(b+c)(a-b)}.$$

Дадената дропка има смисол за $b\neq c, a\neq b$ и $b\neq -c$. Конечно имаме

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(b-c)(b+c)(a-b)}=\frac{a-c}{b+c}.$$

б) Имаме,

$$\frac{a^3+2a^2-3}{a^3-3a^2+3a-1}=\frac{a^3-1+2a^2-2}{a^3-1-3a^2+3a}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)+2(a-1)(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)-3a(a-1)}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1+2a+2)}{(a-1)(a^2+a+1-3a)}=\frac{(a-1)(a^2+3a+3)}{(a-1)(a-1)^2}$$

Дропката има смисол за $a\neq 1$. Значи,

$$\frac{a^3+2a^2-3}{a^3-3a^2+3a-1}=\frac{(a-1)(a^2+3a+3)}{(a-1)(a-1)^2}=\frac{a^2+3a+3}{(a-1)^2}.$$

2. Дропката ја запишуваме во вид

$$\frac{(x+2)(x-3)}{-x^3(x-3)} \tag{1}$$

а) Таа нема смисол за оние вредности на x за кои именителот е еднаков на нула т.е. $-x^3(x-3)=0$. Производ на два изрази е нула ако барем еден од изразите е еднаков на нула т.е. ако $-x^3=0$ или $x-3=0$. Значи дропката нема смисол за $x=0$ или $x=3$.

б) Дропката прима вредност нула ако броителот е еднаков на нула т.е. $(x+2)(x-3)=0$. Значи $x+2=0$ или $x-3=0$ односно $x=-2$ или $x=3$. Но, за $x=3$ таа нема смисол, па затоа прима вредност нула само за $x=-2$.

в) Дадената дропка може да се скрати за $x\neq -2, x\neq 0$, $x\neq 3$ и според (1) таа е $\frac{x+2}{-x^3}$.

3. а) Дадениот израз има смисол за $a^2-a\neq 0$ и $a-x\neq 0$ т.е. $a\neq x$ и $a(a-1)\neq 0$ односно $a\neq x$, $a\neq 0, a\neq 1$. При тоа имаме

$$\frac{x^2-ax}{a^2-a}\cdot\frac{2a-2}{a-x}=\frac{-x(a-x)\cdot 2(a-1)}{a(a-1)(a-x)}=\frac{-2x}{a}.$$

б) Дадениот израз има смисол за $b^2-2b+1\neq 0$, $a^2-a\neq 0$ и $3b-3\neq 0$ т.е. за $(b-1)^2\neq 0$, $a(a-1)\neq 0$ и $3(b-1)\neq 0$ од што добиваме $a\neq 0, a\neq 1$ и $b\neq 1$. Притоа

$$\frac{ay-y-a+1}{3b-3}:\frac{a^2-a}{1-2b+b^2}=\frac{ay-y-a+1}{3b-3}\cdot\frac{b^2-2b+1}{a^2-a}=\frac{y(a-1)-(a-1)}{3(b-1)}\cdot\frac{(b-1)^2}{a(a-1)}.$$

$$=\frac{(a-1)(y-1)(b-1)^2}{3a(a-1)(b-1)}=\frac{(y-1)(b-1)}{3a}.$$

4. Имаме

$$A(x,y)=\frac{(x+3y)^2-(x-2y)^2}{x^2-(x-y)^2}=\frac{(x+3y+x-2y)(x+3y-x+2y)}{(x+x-y)(x-x+y)}=\frac{5y(2x+y)}{y(2x-y)}$$

Дадениот израз има смисол за $y\neq 0$ и $2x-y\neq 0$ и притоа

$$A(x,y)=\frac{5y(2x+y)}{y(2x-y)}=\frac{5(2x+y)}{2x-y}$$

За $x=\frac{1}{4}$ и $y=\frac{1}{3}$ добиваме $A(\frac{1}{4},\frac{1}{3})=\frac{5(2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3})}{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=\frac{5\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=25$.

5. а) Имаме

$$A(x)=\frac{x^4-2x^2+1-x^2}{x^4-(x^2+2x+1)}=\frac{(x^2-1)^2-x^2}{x^4-(x+1)^2}=\frac{(x^2-x-1)(x^2+x-1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}.$$

Јасно,

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\neq 0.$$

Изразот има смисол ако и $x^2-x-1\neq 0$. Според тоа,

$$(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{5}{4}\neq 0,\ (x-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2\neq 0,\ (x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2})\neq 0.$$

Значи, дадениот израз има смисол за $x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\neq 0$ и $x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\neq 0$, т.е. $x\neq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $x\neq\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Притоа имаме

$$A(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}..$$

б) Имаме,

$$A(x)=\frac{x^{12}-128x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}=\frac{(x^6-64)^2}{[(x^3-8)-4x(x-2)]^2}=\frac{[(x^3-8)(x^3+8)]^2}{[(x-2)(x^2-2x+4)]^2}$$
$$=\frac{(x-2)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2(x^2+2x+4)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+4)^2}.$$

Јасно, $(x^2-2x+4)^2=[(x-1)^2+3]^2\geq 9>0$. Значи, зададениот израз има смисол ако $(x-2)^2\neq 0$ т.е. $x\neq 2$. При тоа имаме

$$A(x)=\frac{(x-2)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2(x^2+2x+4)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+4)^2}=(x+2)^2(x^2+2x+4)^2.$$

6. Имаме,

$$A(x,a)=\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}=\frac{x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2}{x^3+a^3}$$
$$=\frac{(x^2+a^2)^2-(ax)^2}{x^3+a^3}=\frac{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}.$$

Бидејќи

$$x^2-ax+a^2=(x-\tfrac{a}{2})^2+\tfrac{3}{4}a^2\neq 0,$$

ако $x+a\neq 0$ добиваме дека дадениот израз има смисол и притоа

$$A(x,a)=\frac{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}=\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}.$$

7. а) Да го разложиме броителот на множители:

$$\begin{aligned}x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3&=x^3+x^2+x^2y+2x^2y+2xy+2xy^2+xy^2+y^2+y^3\\&=x^2(x+y+1)+2xy(x+y+1)+y^2(x+y+1)\\&=(x+y+1)(x^2+2xy+y^2)\\&=(x+y)^2(x+y+1).\end{aligned}$$

Да се обидеме да го разложиме именителот на множители од кои едниот множител е $x+y$:

$$\begin{aligned}2x^3+x^2y-4xy^2-3y^3&=2x^3+2x^2y-x^2y-xy^2-3xy^2-3y^3\\&=2x^2(x+y)-xy(x+y)-3y^2(x+y)=(x+y)(2x^2-xy-3y^2)\\&=(x+y)(2x^2+2xy-3xy-3y^2)=(x+y)[2x(x+y)-3y(x+y)]\\&=(x+y)^2(2x-3y).\end{aligned}$$

Дадениот израз има смисол ако

$$(x+y)^2(2x-3y)\neq 0\text{, т.е. } x+y\neq 0 \text{ и } 2x-3y\neq 0.$$

Притоа:

$$A(x,y)=\frac{(x+y)^2(x+y+1)}{(x+y)^2(2x-3y)}=\frac{x+y+1}{2x-3y}.$$

б) Имаме:

$$Q(x,a,c)=\frac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}=\frac{acx^2+ac+xa^2+xc^2}{acx^2-ac+xa^2-xc^2}$$
$$=\frac{ax(cx+a)+c(cx+a)}{ax(cx+a)-c(cx+a)}=\frac{(cx+a)(ax+c)}{(cx+a)(ax-c)}.$$

Изразот има смисол за $cx+a\neq 0$ и $ax-c\neq 0$, при што $Q(x,a,c)=\frac{ax+c}{ax-c}$.

в) Имаме:

$$A(x,a)=\frac{x^4+4}{a(x^2+2)-2ax-(x-1)^2-1}=\frac{(x^2+2)^2-4x^2}{a(x^2-2x+2)-(x^2-2x+2)}=\frac{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}{(x^2-2x+2)(a-1)}.$$

Јасно, $x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+1\geq 1>0$, па затоа изразот има смисол за $a-1\neq 0$. При тоа $A(x,a)=\frac{x^2+2x+2}{a-1}$

г) Имаме:

$$A\left(x,y\right)=\frac{x^4+16x^2+64-16x^2}{y(x^2+4x+4)-4x+4y-x^2-8}=\frac{(x^2+8)^2-16x^2}{y(x^2+4x+8)-(x^2+4x+8)}=\frac{(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)}{(x^2+4x+8)\left(y-1\right)}$$

Бидејќи $x^2+4x+8=(x+2)^2+4\geq 4>0$ изразот има смисла за $y-1\neq 0$. При тоа $A(x,y)=\frac{x^2-4x+8}{y-1}$.

8. Имаме,

$$A(a,b)=\frac{(6a^7-b^8-3ab^5)(5a^2-b)^2-(5a^2-b)^2}{9a^6-12ba^3+4b^2-9a^6-4b^2}=\frac{(5a^2-b)^2(6a^7-b^8-3ab^5-1)}{-12ba^3}.$$

Дадениот израз има смисол ако $b\neq 0, a\neq 0$. Вредноста на изразот за $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{5}{4}$ е 0 бидејќи

$$5a^2-b=5\cdot(\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{5}{4}=0.$$

9. Именителите на дадените дропки се мономи. За заеднички именител на дропките обично ќе го земаме најмалиот заеднички содржател на именителите. Имаме,

$$\text{НЗС}\,(2a^3b^2, 10abc, 6a^2b)=30a^3b^2c.$$

Ги одредуваме дополнителните множители на секоја од дадените дропки:

$$30a^3b^2c:2a^3b^2=15c\ ,\ 30a^3b^2c:10abc=3a^2b \text{ и } 30a^3b^2c:6a^2b=5abc\,.$$

Секоја од дропките ја множиме со доплнителните множители и наоѓаме

$$\frac{x}{2a^3b^2}\cdot\frac{15c}{15c}=\frac{15cx}{30a^3b^2c}\ ,\ \frac{7}{10abc}\cdot\frac{3a^2b}{3a^2b}=\frac{21a^2b}{30a^3b^2c} \text{ и } \frac{1}{6a^2b}\cdot\frac{5abc}{5abc}=\frac{5abc}{30a^3b^2c}\,.$$

10. а) Именителите на дадените дропки се биноми и немаат заеднички множител. Затоа НЗС $(a+1,a-2)=(a+1)(a-2)$. Дополнителните множители на дропките се $a-2$ и $a+1$. Тогаш

$$\frac{3}{a+1}=\frac{3(a-2)}{(a+1)(a-2)} \text{ и } \frac{2}{a-2}=\frac{2(a+1)}{(a+1)(a-2)}$$

б) Имаме: $2x-4=2(x-2)$ и $5x-10=5(x-2)$ па затоа

$$\text{НЗС}\,(2x-4,5x-10)=10(x-2)$$

Дополнителните множители се $\frac{10(x-2)}{2(x-2)}=5$ и $\frac{10(x-2)}{5(x-2)}=2$. Значи,

$$\frac{a}{2x-4}=\frac{5a}{5(2x-4)}=\frac{5a}{10(x-2)} \text{ и } \frac{b}{5x-10}=\frac{2b}{2(5x-10)}=\frac{2b}{10(x-2)}\,.$$

11. а) Дропките имаат смисол за $x\neq\pm1$. Тие се со различни именители. Затоа, прво ги сведуваме во дропки со заеднички именител, а потоа ги собираме. Имаме:

$$\frac{2-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2-x}{1-x^2}=\frac{(-1)(2-x)}{(-1)(1-x^2)}=\frac{x-2}{x^2-1} \text{ и } \frac{1}{2x-2}=\frac{1}{2(x-1)}\,.$$

Бидејќи НЗС $(2x-2,x^2-1)=2(x-1)(x+1)$ имаме

$$\frac{1}{2x-2}=\frac{1}{2(x-1)}=\frac{x+1}{2(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{2x^2-2} \text{ и } \frac{x-2}{x^2-1}=\frac{2(x-2)}{2(x^2-1)}=\frac{2x-4}{2x^2-2}$$

Потоа собираме дропки со еднакви именители:

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{x+1}{2x^2-2}+\frac{2x-4}{2x^2-2}=\frac{3x-3}{2x^2-2}=\frac{3(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2(x+1)}\,.$$

б) Дропките имаат смисол за $a\neq b\neq c\neq a$. Секоја од дадените дропки ќе ја запишеме како збир од два собироци. Имаме:

$$\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{a-b+a-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{a-b}{(a-b)(a-c)}+\frac{a-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}\,.$$

Аналогно $\frac{2b-a-c}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}$ и $\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}$.

Тогаш

$$\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b-a-c}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}$$

$$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}=0.$$

12. а) Имаме,

$$\frac{1}{6a+3}+\frac{2}{2a-1}-\frac{9a+3}{8a^2-2}=\frac{1}{3(2a+1)}+\frac{2}{2a-1}-\frac{9a+3}{2(2a+1)(2a-1)}$$
$$=\frac{2(2a-1)+2\cdot 3\cdot(2a+1)-3(9a+3)}{6(2a+1)(2a-1)}=\frac{-11a-5}{6(4a^2-1)}.$$

Дадениот израз има смисол за $x\neq-\frac{1}{2}$ и $x\neq\frac{1}{2}$.

б) Имаме,

$$\left[\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right]:\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\left[\frac{x^2-xy}{y(x^2+y^2)}-\frac{2x^2}{(y-x)(x^2+y^2)}\right]:\frac{x^2-x(y-1)-y}{x^2}$$
$$=\frac{(x^2-xy)(y-x)-2x^2y}{y(y-x)(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2}{x^2-xy+x-y}$$
$$=\frac{yx^2-xy^2-x^3+yx^2-2yx^2}{y(y-x)(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2}{x(y-x)+(y-x)}$$
$$=\frac{-x(x^2+y^2)}{y(y-x)(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2}{(x-y)(x+1)}=\frac{x^3}{y(x+1)(x-y)^2}$$

Да забележиме дека дадениот израз има смисол за $y\neq 0$, $x\neq-1$ и $x\neq y$.

в) Дадениот израз има смисол за $a+2\neq 0$ и $a-2\neq 0$. Имаме,

$$\left[a+2:\left(1+\frac{a}{2}\right)\right]:\frac{a^3-8}{a+2}+\frac{1}{2-a}=\left[a+2:\frac{a+2}{2}\right]:\frac{a^3-8}{a+2}-\frac{1}{a-2}$$
$$=\left[a+2\frac{2}{a+2}\right]\frac{a+2}{a^3-8}-\frac{1}{a-2}$$
$$=\frac{a^2+2a+4}{a+2}\cdot\frac{a+2}{(a-2)(a^2+2a+4)}-\frac{1}{a-2}$$
$$=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-2}=0.$$

13. Имаме,

$$\left[\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right]:(2-18a^2)=\frac{1-3a-2}{1-3a}\cdot\frac{3a+1-9a+9a^2}{3a+1}\cdot\frac{1}{2-18a^2}$$
$$=\frac{-(1+3a)\cdot(3a-1)^2}{2(1-3a)^2(1+3a)^2}=-\frac{1}{2(3a+1)}.$$

а) Упростениот израз има смисол за $2(3a+1)\neq 0$ или $3a+1\neq 0$ од каде што следува дека $a\neq-\frac{1}{3}$.

б) Бидејќи броителот е идентички еднаков на 1 упростениот израз не е еднаков на нула за ниеден реален број a.

в) Имаме $\frac{-1}{2(3a+1)}=\frac{1}{4}$ т.е. $3a+1=-2$ или $a=-1$.

14. Дадениот израз го упростуваме и добиваме:

$$A(x)=\frac{(x^2-2)^2}{x(x^2-2)-(x^2-2)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x^2-2)^2}{(x^2-2)(x-1)}-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-2-x-1+x+2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1.$$

Тогаш $A(1,5014)=1,5014+1=2,5014$. Да забележиме дека изразот има смисол за $x\neq 1$ и $x^2\neq 2$ т.е. $x\neq\pm\sqrt{2}$.

15. Дадените изрази ги упростуваме и добиваме

$$A(a)=\frac{2(a-3)}{(a-2)(a+2)} \text{ и } B(a)=\frac{(a-2)^2}{a-3}.$$

Значи,

$$A(a)B(a)=\frac{2(a-3)(a-2)^2}{(a-2)(a+2)(a-3)}=\frac{2(a-2)}{a+2} \text{ и } A(-1)B(-1)=\frac{2(-1-2)}{-1+2}=-6.$$

16. Имаме,

$$A(a)=(\frac{1}{a+2}-\frac{a+2}{a^2-4a+4}):\frac{4a}{a^2-4}=\frac{(a-2)^2-(a+2)^2}{(a+2)(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{4a}=\frac{-8a}{4a(a-2)}=\frac{-2}{a-2}=\frac{2}{2-a}$$

Значи, $A(\frac{3}{2})=\frac{2}{2-\frac{3}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$. Да забележиме дека дадениот израз има смисол за $a\neq\pm 2,\ a\neq 0$.

17. Имаме $y=\frac{x^4+1}{x^4-1}$, $z=\frac{x^8+1}{x^8-1}$. Значи, $x^4=\frac{y+1}{y-1}$ па е

$$z=\frac{(\frac{y+1}{y-1})^2+1}{(\frac{y+1}{y-1})^2-1}=\frac{1+y^2}{2y}.$$

18. а) Имаме,

$$A(x,y)=\frac{(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2})(\frac{x-y}{x+y}-1)}{(\frac{x-y}{x+y}+1)(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})}=\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x-y-x-y}{x+y}}{\frac{x-y+x+y}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{xy}}.$$
$$=\frac{-(x^2-y^2)(-2y)xy(x+y)}{2x(x^2-y^2)(x+y)(xy)^2}=\frac{xy\cdot y}{x(xy)^2}=\frac{1}{x^2}$$

б) Имаме,

$$A(a,n)=\frac{a^2-1}{n(n+a)}\cdot(\frac{n}{n-1}-1)\cdot\frac{-a(n^3-1)-n(n^3-1)}{-(a^2-1)}$$
$$=\frac{1}{n(n+a)}\cdot\frac{n-n+1}{n-1}\cdot\frac{-(n^3-1)(n+a)}{-1}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}(n-1)(n^2+n+1)=\frac{n^2+n+1}{n}=n+1+\frac{1}{n}.$$

19. Имаме,

$$\begin{aligned}A(m,n)&=\frac{(m^2n^2-1)^m(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n}\cdot n^{m-n}}{(m^2n^2-1)^n(mn-1)^{m-n}\cdot n^{2m}\cdot m^{n-m}}\\&=\frac{(m^2n^2-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}}\cdot\frac{(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n-n+m}}{n^{2m-m+n}}\\&=\frac{(mn-1)^{m-n}(mn+1)^{m-n}(mn+1)^{n-m}\cdot m^{m+n}}{(mn-1)^{m-n}\cdot n^{m+n}}\\&=(mn+1)^{m-n+n-m}(\tfrac{m}{n})^{m+n}\\&=(mn+1)^0(\tfrac{m}{n})^{m+n}=(\tfrac{m}{n})^{m+n}.\end{aligned}$$

20. Ако ја искористиме формулата

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-...+y^{2k})$$

при $2k+1=1995$, $x=1$ и $y=a$ добиваме:

$$\begin{aligned}A(a)&=1-a+a^2-a^3+...+a^{1994}-\frac{a^{1995}}{1+a}\\&=\frac{(1+a)(1-a+a^2-a^3+...+a^{1994})}{1+a}-\frac{a^{1995}}{1+a}\\&=\frac{1+a^{1995}-a^{1995}}{1+a}=\frac{1}{1+a}\end{aligned}$$

Значи, за $a=-\frac{4}{5}$ имаме $A(-\frac{4}{5})=\frac{1}{1+(-\frac{4}{5})}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$.

21. Имаме

$$\frac{(5c-6d)^2-(3a-4b)^2}{25c^2-(6d+3a-4b)^2}-\frac{25c^2-(6d-3a+4b)^2}{36d^2-(3a-4b+5c)^2}-\frac{36d^2-(3a-4b-5c)^2}{(3a-4b)^2-(5c+6d)^2}=$$

$$\begin{aligned}&=\frac{(5c-6d-3a+4b)(5c-6d+3a-4b)}{(5c-6d-3a+4b)(5c+6d+3a-4b)}-\frac{(5c-6d+3a-4b)(5c+6d-3a+4b)}{(6d-3a+4b-5c)(6d+3a-4b+5c)}-\\&\quad-\frac{(6d-3a+4b+5c)(6d+3a-4b-5c)}{(3a-4b-5c-6d)(3a-4b+5c+6d)}\\&=\frac{5c-6d+3a-4b}{5c+6d+3a-4b}+\frac{5c+6d-3a+4b}{6d+3a-4b+5c}+\frac{6d+3a-4b-5c}{3a-4b+5c+6d}\\&=\frac{5c+6d+3a-4b}{5c+6d+3a-4b}=1.\end{aligned}$$

22. Прв начин. Имаме

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}=\frac{a^2+3}{a^4+6a^2+9+a^2+2}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-1}.$$

Нека броителот a^2+3 е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)^2$ и (a^2+3) се делат со k, но 1 не се дели со k, односно именителот дава остаток 1 при делењето со k. Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

Втор начин. Ако именителот на дропката го поделиме со a^2+3, добиваме количник a^2+4 и остаток -1. Според тоа, дропката можеме да ја запишеме да ја запишеме во видот

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)(a^2+4)-1}$$

Нека броителот a^2+3 е делив со некој цел број k. Тогаш именителот на дропката не се дели со k, бидејќи $(a^2+3)(a^2+4)$ се дели со k, но -1 не се дели со k, односно именителот дава остаток $k-1$ при делењето со $.k$..
Значи броителот и именителот немаат заеднички делител различен од 1, па дропката е нескратлива.

23. Имаме

$$[(\frac{1}{(\frac{1}{x})^n:x^n}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}}):\frac{4}{x^{2n-1}}]^3=[(\frac{1}{\frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{x^n}}\cdot\frac{1}{x^{2n+1}})\cdot\frac{x^{2n-1}}{4}]^3=(\frac{x^{2n}x^{2n-1}}{4x^{2n+1}})^3=(\frac{x^{2n-2}}{4})^3.$$

За $x=-2, n=2$, вредноста на изразот е $[\frac{(-2)^2}{4}]^3=(\frac{4}{4})^3=1$.

24. Со средување на дадениот израз, ако го искористиме условот $ab=a-b$, добиваме

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab}$$
$$=\frac{a^2+b^2-a^2+2ab-b^2}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2,$$

што значи дека изразот $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$ не зависи ниту од a ниту од b.

4. ИДЕНТИТЕТИ

4.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Докажи дека

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{\cdots}{1996+\frac{1}{1997}}}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{\cdots}{1996+\frac{1}{1997}}}}}}}=1$$

Задача 2. Докажи го идентитетот

$$(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)\ .$$

Задача 3. Докажи дека

а) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

б) $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(abc-a-b-c)^2+(ab+bc+ca-1)^2$, за секои $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Задача 4. Ако $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, тогаш $(a+b+c)^3=27abc$. Докажи!

Задача 5. Нека x и y се реални броеви такви, што $x^2-xy+y^2=1$. Пресметај ја вредноста на изразот $w=x^4+y^4+(x-y)^4$.

Задача 6. Докажи дека за секои реални броеви $a,b,c\neq 0$, важи

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})(a+b+c)=\tfrac{a+b}{c}+\tfrac{a+c}{b}+\tfrac{b+c}{a}+3\ .$$

Задача 7. Докажи дека за секои реални броеви a и b такви што $a\neq\pm b$ важи

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}=2\frac{a+b}{a-b}.$$

Задача 8. Докажи дека за секои реални броеви $x, y \neq 0$ такви што $x \neq -y,\ y \neq 1$ и $x \neq \pm 1$ важи

$$\frac{x^2-1}{y^2+xy}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{y}}-1\right)\cdot\frac{x-xy^3-y^4+y}{1-x^2}=\frac{y^2+y+1}{y}.$$

Задача 9. Ако $a-b \neq 0,\ 2a+b \neq 0,\ 2b+a \neq 0$, тогаш

$$\frac{a^2}{2a^2-b(a+b)}+\frac{b^2}{2b^2-a(a+b)}+\frac{(a+b)^2}{2(a+b)^2+ab}=1. \qquad (1)$$

Докажи!

Задача 10. Докажи дека за секои реални броеви a и b такви што $b \neq 0,\ a \neq \pm 2b$ важи

$$\left(\frac{-2a-4b}{a+2b}-\frac{a-2b}{2b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a-2b}-1+\frac{8b^3}{8b^3-a^3}\right)-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}=\frac{a}{2b-a}. \qquad (1)$$

Задача 11. Докажи дека за секои $a,b,c \in \mathbf{R}$, такви што $a \neq b \neq c \neq a$ важи

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}=1. \qquad (1)$$

Задача 12. Докажи дека:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Задача 13. Нека a,b,c,d,e се пет различни цели броеви за кои е исполнето равенството

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12.$$

Докажи дека $a+b+c+d+e=17$!

Задача 14. Ако x,y,z реални броеви за кои важи

$$x^2+2yz=x,\ y^2+2zx=y,\ z^2+2xy=z,$$

докажи дека

$$||x+y+z|-\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

Задача 15. За броевите a,b,c и d е исполнето равенството

$$a+b+c+d=6.$$

Дали може збирот $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ да биде еднаков на 18?

Задача 16. Нека a, b и c се природни броеви такви што

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}.$$

Докажи дека $a=b=c$!

Задача 17. Ако $a+b+c=0$, тогаш $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$. Докажи!

Задача 18. Ако $x\neq\pm1$, тогаш $(\frac{4x}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}):(1+\frac{2}{x-1})=2$. Докажи!

Задача 19. Докажи дека ако $a\neq 0,\ a\neq 2$, тогаш

$$\frac{a+3}{a}+\frac{a}{a-2}+\frac{5a-6}{2a-a^2}=2. \qquad (1)$$

Задача 20. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}).$$

Задача 21. Докажи дека ако

$$ac-a-c=b^2-2b,\ bd-b-d=c^2-2c \text{ и } b\neq 1,\ c\neq 1,$$

тогаш

$$ad+b+c=bc+a+d.$$

Задача 22. Докажи дека од $a\neq b$ и $a^2-b^2=ac+abc-b^2c-bc$ следува равенството $a+b=(b+1)c$.

Задача 23. Ако $a+b=1$, тогаш

$$a^2b^2+3=(a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

Докажи!

Задача 24. Докажи дека

а) Ако $x+\frac{1}{x}=a$, тогаш $x^3+\frac{1}{x^3}=a(a^2-3)$.

б) Ако $x-\frac{1}{x}=a$, тогаш $x^3-\frac{1}{x^3}=a(a^2+3)$.

Задача 25. Докажи дека

а) Ако $x+y+z=1$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, тогаш $x^2+y^2+z^2=1$.

б) Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.

Задача 26. Ако $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}a^2$ и $x^3+y^3+z^3=a^3$, пресметај $xy+yz+zx$ и $x^4+y^4+z^4$.

Задача 27. Нека за реалните броеви x,y,z и a важат равенствата $x+y+z=a$ и

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

Докажи дека $x=a$ или $y=a$ или $z=a$.

Задача 28. Докажи дека, ако $a^2+a+1=0$, тогаш $a^{1996}+\frac{1}{a^{1996}}=-1$.

Задача 29. Докажи дека од $x=a^2-bc$, $y=b^2-ac$ и $z=c^2-ab$ следува

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

Задача 30. Ако $abc=1$ и $a+b+c=ab+bc+ac$, тогаш барем еден од броевите a,b или c е еднаков на 1. Докажи!

Задача 31. Докажи дека вредноста на изразот

$$R(x,y,z)=7xy+11yz-7xz-2x^2-6y^2-3z^2+5$$

“не зависи” од x,y и z ако $2y-3z-x=0$.

Задача 32. Ако $ay=bx$, тогаш $\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$. Докажи!

Задача 33. Докажи дека ако $xyz=1$, тогаш вредноста на изразот

$$S(x,y,z)=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

“не зависи” од x,y и z.

Задача 34. Докажи

а) Ако $ax+by+cz=0$, тогаш

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2}=\frac{1}{a+b+c}. \tag{1}$$

б) Ако $b(a+c)=2ac$, при што $a\neq b\neq c$, $b\neq 0$, тогаш

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}.$$

в) Ако $b=\frac{2ac}{a+c}, x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{c+a}$ и $z=\frac{c}{a+b}$ тогаш $y=\frac{2xz}{z+x}$.

г) Ако $z=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, каде $a\neq 0, b\neq 0, a+b\neq 0$ и $a-b\neq 0$, тогаш

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Задача 35. Докажи дека, ако за секои x и y важи

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2=A(x-y)^2 \qquad (1)$$

каде A, a, b, c се реални броеви, различни од нула, тогаш

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

Задача 36. Нека за броевите a, b и c важи равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Докажи дека е исполнет барем еден од следните три услови: $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$.

Задача 37. Ако за позитивните реални броеви a, b и c важи равенството

$$ab\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+bc\left(\frac{b+c}{2}-a\right)+ac\left(\frac{c+a}{2}-b\right)=0,$$

тогаш $a=b=c$. Докажи!

Задача 38. Ако $a+b+c=0$, тогаш $a^3+b^3+c^3=3abc$. Докажи!

Задача 39. Ако равенките $ax^2+bx+c=0$ и $Ax^2+Bx+C=0$ имаат барем едно заедничко решение, тогаш $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$. Докажи!

Задача 40. Докажи дека

а) Ако $a=x+y$, $b=x^2+y^2$ и $c=x^3+y^3$, тогаш $c=\frac{3ab-a^3}{2}$.

б) Ако $x^2+4y^2=5xy, 0<x<y$, тогаш $\frac{x+2y}{x-2y}=-3$.

Задача 41. Докажи дека $ad=bc$ ако и само ако

$$(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$$

Задача 42. Ако $x=a+\frac{1}{a}$, тогаш $x^2(x^2-4)+2=a^4+\frac{1}{a^4}$. Докажи!

Задача 43. Ако $8a^3-6a-1=0$, тогаш $\frac{a^2}{a^2-1}+\frac{1}{a^2+a}=-7$. Докажи!

Задача 44. Ако $3a^2+3b^2=10ab$ и $a>b>0$, тогаш $\frac{a+2b}{2a-b}=1$. Докажи!

Задача 45. Ако

$$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a},\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0,$$

тогаш $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи!

Задача 46. Ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, тогаш

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

Докажи!

Задача 47. Ако a,b,c,d се позитивни реални броеви и

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$$

тогаш $a=b=c=d$. Докажи!

Задача 48. Нека x,y,z се реални броеви такви што

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(x+y-2z)^2+(z+x-2y)^2+(z+y-2x)^2 \quad (1)$$

Докажи дека $x=y=z$.

Задача 49. Реалните броеви a,b,c,d го задоволуваат условот

$$a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0$$

Докажи дека $a=b=c=d$.

Задача 50. Ако $b+c=a$, тогаш $3a^2-3b^2-6cb-3c^2=0$. Докажи!

Задача 51. Ако $x=\frac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$, $ab\neq 0, a\neq b$, докажи дека

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}.$$

Задача 52. Докажи дека, ако

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

каде $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$ и $c+a\neq 0$, тогаш

$$a^3+b^3+c^3+abc=0.$$

Задача 53. Докажи дека, ако $xy=\frac{1}{p}$, каде $x\neq 0, y\neq 0, p\neq 0$ и $x+y\neq 0$, тогаш

$$\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{6}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=p^3.$$

Задача 54. Докажи дека, ако $a+b=1$, каде $a\neq 1, b\neq 1$ тогаш

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

Задача 55. Ако $c^2+2(ab-ac-bc)=0$, каде $b\neq c$, тогаш

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Докажи!

Задача 56. Ако $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, тогаш

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Докажи!

Задача 57. Докажи дека, ако $abc=1$ и $ab+a+1\neq 0$ тогаш

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1.$$

Задача 58. Докажи дека, ако

$$x^2+xy+xz=a$$

$$y^2+xy+yz=b$$

$$z^2+xz+yz=c,$$

тогаш $axy+bxz+cxy=\frac{3abc}{a+b+c}$.

Задача 59. Броевите a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 се броевите $1,2,3,4,5$ земени во некој редослед. Исто такви се и броевите b_1,b_2,b_3,b_4,b_5. Ако

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\frac{a_5}{b_5},$$

тогаш $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$, $a_4=b_4$, $a_5=b_5$. Докажи!

Задача 60. Ако $abc=1, a\neq b\neq c\neq a$, тогаш
$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=1.$$
Докажи!

Задача 61. Пресметај ја вредноста на изразот $(x+y)^2$, ако $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ и $y-x=1$.

Задача 62. За позитивните реални броеви x и y исполнето е равенството $x^2+y^2=6xy$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{x-y}$.

Задача 63. Ако $2x+y-1=0$, тогаш вредноста на полиномот
$$P(x,y)\equiv 2x^2+3y^2+7xy+5x-2$$
е еднаква на 1. Докажи!

Задача 64. За броевите a,b,c важи $a|a|+b|b|+c|c|=0$ и $a+b+c=0$. Докажи дека $abc=0$.

Задача 65. Нека се a,b,c,x,y реални броеви, за кои важат следниве равенства
$$a^3+ax+y=0,\ b^3+bx+y=0 \text{ и } c^3+cx+y=0.$$
Ако $a\neq b\neq c\neq a$, докажи дека $a+b+c=0$.

Задача 66. Нека се a,b,c рационални броеви за кои се исполнети условите
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{a}{a+b}=\frac{b}{b+c}=\frac{c}{c+a}.$$
Пресметај $|ab+b|c|+c|a||$.

Задача 67. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d\geq 0$ за кои важи
$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}.$$
Докажи дека $ad=bc$.

Задача 68. Докажи дека ако
$$(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=1,$$
тогаш $x+y=0$.

Задача 69. Дадени се реалните броеви $a,b,c\geq 0$ за кои важи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$ и $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$. Докажи дека

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Задача 70. Докажи го Лагранжовиот идентитет

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

за $a>0,b>0$, $a^2>b$, и примени го во изразот $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}$, за $a>0$.

Задача 71. Ако $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Задача 72. Да се определи вредноста на изразот:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-5}-1}+\sqrt{x-18\sqrt{x-5}+76},$$

ако е познато дека $14\leq x\leq 54$.

Задача 73. Докажи дека

$$\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^3+y^3}+\frac{xy}{x+y}=x+y.$$

Задача 74. Ако $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ и $y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$, докажи дека

$$(x+1)(y+1)=2.$$

Задача 75. Ако $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, тогаш $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Докажи!

Задача 76. Нека a и b се реални броеви такви да $a^3-3ab^2=44$ и $b^3-3a^2b=8$. Пресметај a^2+b^2.

Задача 77. За реалните броеви a,b,c важи

$$a+b+c=26 \text{ и } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=28.$$

Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}.$$

Задача 78. Ако за реалниот број $x, x>1$ важи $x-\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, колку е $x+\frac{1}{x}$.

Задача 79. За реалните броеви a и b важи $\frac{a+b+2}{4}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ и $ab=1$. Пресметај a^2+b^2.

Задача 80. Ако важи $\frac{2x}{3y+4z}=\frac{3y}{2x+4z}=\frac{4z}{2x+3y}$, пресметај ја вредноста на изразот $A=\frac{x+3y+2z}{x+3y-2z}$.

Задача 81. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}$ се броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека:

$$(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4$$

Задача 82. Нека a,b,c се ненулти реални броеви, $a\neq c,$ така што $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2=(a+c-b)(a+c+b).$$

Задача 83. Докажи дека $\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^3+y^3}+\frac{xy}{x+y}=x+y.$

Задача 84. Докажи дека

а) $(x^2-1)(x^2-4)=(x^2+x-2)(x^2-x-2)$,

б) $(2x-y)(3x^2-xy-2y^2)=(6x^2+xy-2y^2)(x-y)$.

Задача 85. Докажи дека, ако $x+\frac{1}{x}=2$, тогаш $x^8+\frac{1}{x^8}=2$.

Задача 86. Ако $a+b+c=0$, докажи дека

$$a^3+a^2c+abc+b^2c+b^3=0.$$

Задача 87. Дали постојат природни броеви p и q, за кои е исполнето равенството $p^2+(p+1)^2=q^4+(q+1)^4$?

Задача 88. Одредете ги сите природни броеви x и y, за кои важи $x>y>0$ и $x^3+7y=y^3+7x$.

Задача 89. Да се докаже дека ако $7a^2 = 7b^2 + 3c^2$, тогаш
$$(5a-2b+3c)(5a-2b-3c)=(2a-5b)^2 .$$

Задача 90. Да се докаже идентитетот
$$(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2+(b-c)(c-a)(a-b)=0 .$$

Задача 91. Докажи дека за произволни реални броеви a, b и c важи идентитетот
$$(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3=(a+b)(b+c)(c+a)[(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3] .$$

Задача 92. Рационалните броеви a, b, c, x, y и z ги задоволуваат равенствата $x=bc+\frac{1}{a}$, $y=ca+\frac{1}{b}$, $z=ab+\frac{1}{c}$ и $ax+by+cz=1$. Изрази ги a, b, c со помош на x, y, z.

Задача 93. Одреди ги сите позитивни броеви a, b, c, $a<b<c$, за кои
$$abc+ab+bc+ca+a+b+c+11=1996 .$$

Задача 94. Докажи дека, ако
$$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca-x^2-y^2-z^2) ,$$
тогаш $a=b=c$ и $x=y=z$.

4.2. РЕШЕНИЈА

1. Ја воведуваме ознаката
$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{1996+\cfrac{1}{1997}}}}}$$
и добиваме
$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1 .$$

2. Имаме:
$$(ax+by)^2-(ay+bx)^2=a^2x^2+2axby+b^2y^2-a^2y^2-2aybx-b^2x^2$$

$$=a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2)=(a^2-b^2)(x^2-y^2).$$

3. а) Имаме:

$$(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2$$
$$=(ab+1)^2+(a-b)^2.$$

б) Постапи аналогно како под а).

4. Од даденото равенство, непосредно добиваме

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c} \;\Leftrightarrow\; (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=(-\sqrt[3]{c})^3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a+b+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{b^2a}=-c \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a+b+c=-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (a+b+c)^3=(3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c})^3 \;\Leftrightarrow\; (a+b+c)^3=27abc\,.$$

5. Од $x^2+y^2=1+xy$ добиваме

$$w=x^4+y^4+(x-y)^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2+((x-y)^2)^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+y^2-2xy)^2$$
$$=(1+xy)^2-2x^2y^2+(1-xy)^2$$
$$=1+2xy+x^2y^2-2x^2y^2+1-2xy+x^2y^2=2.$$

6. Имаме:

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})(a+b+c)=\tfrac{a}{a}+\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{a}+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{b}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{c}$$
$$=1+\tfrac{b+c}{a}+\tfrac{a+c}{b}+1+\tfrac{a+b}{c}+1=\tfrac{a+b}{c}+\tfrac{b+c}{a}+\tfrac{c+a}{b}+3$$

7. Имаме:

$$\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{a+b}{a-b}=2\frac{a+b}{a-b}\,.$$

8. Имаме:

$$\frac{x^2-1}{y^2+xy}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{y}}-1\Big)\cdot\frac{x-xy^3-y^4+y}{1-x^2}=\frac{x^2-1}{y^2+xy}\Big(\frac{1}{\frac{y-1}{y}}-1\Big)\cdot\frac{x(1-y^3)+y(1-y^3)}{1-x^2}$$
$$=\frac{x^2-1}{y^2+xy}\Big(\frac{y}{y-1}-1\Big)\cdot\frac{(x+y)(1-y^3)}{-(x^2-1)}$$
$$=\frac{x^2-1}{y(y+x)}\cdot\frac{y-(y-1)}{y-1}\cdot\frac{(y-1)(y^2+y+1)(x+y)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^2-1}{y(y+x)}\cdot\frac{1}{y-1}\cdot\frac{(y-1)(y^2+y+1)(x+y)}{x^2-1}=\frac{y^2+y+1}{y}.$$

9. Ја трансформираме левата страна на (1) и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2-b(a+b)}+\frac{b^2}{2b^2-a(a+b)}+\frac{(a+b)^2}{2(a+b)^2+ab}=\frac{a^2}{a^2-ab+a^2-b^2}+\frac{b^2}{b^2-a^2+b^2-ab}+\frac{(a+b)^2}{2a^2+4ab+2b^2+ab}$$

$$=\frac{a^2}{a(a-b)+(a-b)(a+b)}+\frac{b^2}{-(a-b)(a+b)-b(a-b)}+\frac{(a+b)^2}{2a(a+2b)+b(a+2b)}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(2a+b)}-\frac{b^2}{(a-b)(a+2b)}+\frac{(a+b)^2}{(a+2b)(2a+b)}=\frac{a^2(a+2b)-b^2(2a+b)+(a+b)^2(a-b)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}$$

$$=\frac{a^3-b^3+2ab(a-b)+(a-b)(a+b)^2}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2+2ab+a^2+2ab+b^2)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}$$

$$=\frac{(a-b)(2a^2+5ab+2b^2)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=\frac{(a-b)(2a+b)(a+2b)}{(a-b)(2a+b)(a+2b)}=1.$$

10. Ја трансформираме левата страна на (1) и добиваме

$$\left(\frac{-2a-4b}{a+2b}-\frac{a-2b}{2b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a-2b}-1+\frac{8b^3}{8b^3-a^3}\right)-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}=$$

$$=\left(\frac{-2(a+2b)}{a+2b}-\frac{a-2b}{2b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{-8b^3+a^3+8b^3}{8b^3-a^3}\right)-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}$$

$$=\left(-2-\frac{a-2b}{2b}\right)\cdot\frac{-a(4b^2+2ab+a^2)+a^3}{(2b-a)(4b^2+2ab+a^2)}-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}$$

$$=\frac{-4b-a+2b}{2b}\cdot\frac{-a(4b^2+2ab)}{8b^3-a^3}-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}=\frac{2ab(2b+a)^2}{2b(8b^3-a^3)}-\frac{2a^2b}{8b^3-a^3}$$

$$=\frac{a(4b^2+4ab+a^2-2ab)}{8b^3-a^3}=\frac{a(4b^2+2ab+a^2)}{8b^3-a^3}=\frac{a}{2b-a}.$$

11. Ја трансформираме левата страна на (1) и добиваме

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{(a^2-2a+1)(c-b)+(b^2-2b+1)(a-c)+(c^2-2c+1)(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

12. Имаме

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=-\frac{1}{x(x-y)(z-x)}-\frac{1}{y(x-y)(y-z)}-\frac{1}{z(z-x)(y-z)}$$

$$=-\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{y^2z-yz^2+xz^2-x^2z+x^2y-xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=-\frac{(x-y)(-zx-zy+z^2+xy)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=-\frac{(x-y)(x(y-z)-z((y-z))}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$$
$$=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{1}{xyz}.$$

13. Бидејќи секој од броевите *a*, *b*, *c*, *d*, *e* е цел, секој од броевите 4-*a*, 4-*b*, 4-*c*, 4-*d*, 4-*e* е цел број и тие се меѓу себе различни. Од условот на задачата тие се различни делители на бројот 12. Броевите 4-*a*, 4-*b*, 4-*c*, 4-*d*, 4-*e* се -1, 1, -2, 2, 3 бидејки се различни и единствени такви што нивниот производ е 12. Значи

$$(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e)=-1+1-2+2+3=3$$

од каде $20-(a+b+c+d+e)=3$, т.е. $a+b+c+d+e=17$.

14. Нека $a=x+y+z$. Ако ги собереме десните и левите страни на дадените услови добиваме

$$a=x+y+z=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2=a^2,$$

од каде следува $a-a^2=0$, т.е. $a(1-a)=0$, односно $a=0$ или $a=1$. Конечно, и во двата случаја точно е равенството (1). Провери!

15. Да претпоставиме дека $ab+ac+ad+bc+bd+cd=18$. Ако го квадрираме равенството $a+b+c+d=6$, добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=36$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot18=36$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2=0$$

Збирот на квадрати на четири броја е нула, ако секој собирок е еднаков на нула. Значи $a=b=c=d=0$. Но тогаш $a+b+c+d=0$ што е спротивно на претпоставката.

16. Прв начин. Ако дадените дропки се еднакви, тогаш и дропката, чиј именител е збирот од именителите, а броител збирот од броителите на трите дропки, е еднаква на нив, т.е.

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{b+c+c+a+a+b}=1.$$

Од $1=\frac{a+b}{b+c}$ следува $a=c$. Од $1=\frac{c+a}{a+b}$ следува дека $b=c$. Значи $a=b=c$.

Втор начин. Нека $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}=k$. Тогаш

$$a+b=k(b+c),\ b+c=k(c+a),\ c+a=k(a+b),$$

од каде $a+b=k(b+c)=k^2(c+a)=k^3(a+b)$, односно $k^3=1$ т.е. $k=1$. Од $1=\frac{a+b}{b+c}$ следува $a=c$. Од $1=\frac{c+a}{a+b}$ следува дека $b=c$.

Трет начин. Од $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}$ имаме

$$ac+a^2+ab=b^2+bc+c^2. \qquad (1)$$

Од $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ имаме

$$ab+b^2+bc=a^2+ac+c^2 \qquad (2)$$

Ако од (2) го одземеме (1) добиваме

$$b^2+bc-a^2-ac=a^2+ac-b^2-bc$$

или

$$2(b^2-a^2+bc-ac)=0$$

односно

$$(b-a)(b+a)+c(b-a)=0,\text{ т.е. }(b-a)(a+b+c)=0.$$

Бидејќи $a+b+c\neq 0$ следува дека $b=a$. Аналогно од $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ имаме $b=c$.

17. Во првиот член од равенството a го заменуваме со $-b-c$ и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2(b+c)^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{2b^2+2c^2+5bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}.$$

Меѓутоа

$$\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{b+2c}=\frac{3(b+c)}{(2b+c)(b+2c)},$$

па затоа

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=(b+c)\frac{b+c}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{2b+c}+\frac{b+c}{b+2c}\right).$$

Во последното равенсто повторно користиме $a+b+c=0$ и добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{(b+c)^2}{(2b+c)(b+2c)}=\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a}\right).$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^2}{2b^2+ac}=\frac{1}{3}(\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b}) \text{ и } \frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{1}{3}(\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c}).$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{1}{3}(\frac{b+c}{b-a}+\frac{b+c}{c-a})+\frac{1}{3}(\frac{a+c}{a-b}+\frac{a+c}{c-b})+\frac{1}{3}(\frac{a+b}{a-c}+\frac{a+b}{b-c})$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{b+c-a-c}{b-a}+\frac{b+c-a-b}{c-a}+\frac{a+c-a-b}{c-b})=\frac{1}{3}(1+1+1)=1.$$

18. Ја трансформираме левата страна на (1) и добиваме

$$(\frac{4x}{x^2-1}+\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}):(1+\frac{2}{x-1})=\frac{4x+2x(x-1)+2(x+1)}{x^2-1}:\frac{x-1+2}{x-1}$$

$$=\frac{4x+2x^2-2x+2x+2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2}=2$$

19. Ја трансформираме левата страна на (1) и добиваме

$$\frac{a+3}{a}+\frac{a}{a-2}+\frac{5a-6}{2a-a^2}=\frac{(a+3)(a-2)+a^2}{a(a-2)}+\frac{5a-6}{a(2-a)}$$

$$=\frac{a^2+3a-2a-6+a^2-5a+6}{a(a-2)}$$

$$=\frac{2a^2-4a}{a(a-2)}=\frac{2a(a-2)}{a(a-2)}=2$$

20. Имаме:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2n}(\frac{2n}{1\cdot(2n-1)}+\frac{2n}{3\cdot(2n-3)}+...+\frac{2n}{1\cdot(2n-1)})$$

$$=\frac{1}{2n}(\frac{2n-1+1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{2n-3+3}{3\cdot(2n-3)}+...+\frac{1+2n-1}{1\cdot(2n-1)})$$

$$=\frac{1}{2n}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1})$$

$$=\frac{1}{n}(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}).$$

21. Ако додадеме 1 на двете страни од првото равенство, добиваме

$$ac-a-c+1=b^2-2b+1,$$

од каде со разложување се добива

$$(a-1)(c-1)=(b-1)^2.$$

Слично, со додавање 1 на двете страни и од второто равенство, а потоа и со разложување се добива

$$(b-1)(d-1)=(c-1)^2.$$

Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=(b-1)^2(c-1)^2,$$

од каде
$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1),$$
па со множење се добива
$$ad-a-d+1=bc-b-c+1,$$
од каде со средување се добива
$$ad+b+c=bc+a+d.$$

22. Од
$$a^2-b^2=ac+abc-b^2c-bc$$
следува
$$(a-b)(a+b)=ac(b+1)-bc(b+1)$$
односно
$$(a-b)(a+b)=c(a-b)(b+1).$$
Бидејќи $a\neq b$, последното равенство можеме да го поделиме со $a-b\neq 0$ и добиваме $a+b=\left(b+1\right)c$.

23. Ако искористиме дека $a+b=1$, тогаш имаме
$$\begin{aligned}(a^2+a+1)(b^2+b+1)-a^2b^2-3= \\ &=a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1-a^2b^2-3 \\ &=b^2(a+1)+ab(a+1)+\left(a-1\right)(a+1)=(a+1)(b^2+ab+a-1) \\ &=(a+1)(b(a+b)+a-1)=(a+1)(b+a-1)=(a+1)\cdot 0=0\end{aligned}$$
т.е.
$$a^2b^2+3=(a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

24. а) Имаме,
$$\begin{aligned}x^3+\tfrac{1}{x^3}&=(x+\tfrac{1}{x})[x^2-x\cdot\tfrac{1}{x}+(\tfrac{1}{x})^2] \\ &=(x+\tfrac{1}{x})[x^2+2x\cdot\tfrac{1}{x}+(\tfrac{1}{x})^2-3] \\ &=(x+\tfrac{1}{x})[(x+\tfrac{1}{x})^2-3]\end{aligned}$$
и бидејќи $x+\frac{1}{x}=a$ добиваме $x^3+\frac{1}{x^3}=a(a^2-3)$.

б) Аналогно добиваме $x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})[(x-\frac{1}{x})^2+3]$ и од $x-\frac{1}{x}=a$ следува $x^3-\frac{1}{x^3}=a(a^2+3)$.

25. а) Од $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ добиваме $xy+yz+zx=0$. Од друга страна

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

па затоа

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1.$$

б) Ако ги искористиме идентитетите

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

тогаш од $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$ добиваме:

$$ab+bc+ca=-\tfrac{1}{2} \text{ и } a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\tfrac{1}{4},$$

па затоа $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.

26. Од

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

добиваме

$$xy+yz+zx=\tfrac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=\tfrac{1}{2}[a^2-\tfrac{3}{2}a^2]=-\tfrac{a^2}{4}.$$

Од

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

добиваме

$$\begin{aligned}xyz&=\tfrac{1}{3}[x^3+y^3+z^3-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)]\\&=\tfrac{1}{3}[a^3-a(\tfrac{3}{2}a^2+\tfrac{a^2}{4})]=-\tfrac{a^3}{4}.\end{aligned}$$

Од

$$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$$

следува

$$\begin{aligned}x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\&=(-\tfrac{a^2}{4})^2-2\tfrac{-a^3}{4}a=\tfrac{9a^4}{16}.\end{aligned}$$

Конечно,

$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^4&=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\&=(\tfrac{3}{2}a^2)^2-2\tfrac{9a^4}{16}=\tfrac{9a^4}{8}.\end{aligned}$$

27. Заради равенството (1), броевите x, y, z и a се ненулти. Според тоа $x+y+z\neq 0$, и заради равенството $x+y+z=a$ добиваме

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{a}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z},$$

Кое последователно е еквивалентно со равенствата

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz,$$

$$x^2y+xy^2+xyz+xyz+y^2z+yz^2+zx^2+xyz+z^2x=xyz,$$

$$x^2(y+z)++yz(y+z)+xy(y+z)+xz(y+z)=0,$$

$$(y+z)(x^2+xy++yz+zx)=0,$$

$$(y+z)[x(x+y)+z(x+y)]=0,$$

т.е. со равенството

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0. \tag{3}$$

Од равенството $x+y+z=a$ добиваме дека $x+y=a-z$, $y+z=a-x$, $z+x=a-y$, и ако замениме во (3) добиваме

$$(a-z)(a-x)(a-y)=0.$$

Од последното равенство следува дека барем еден од броевите $a-x, a-y, a-z$ е еднаков на нула. Значи, $x=a$ или $y=a$ или $z=a$.

28. Од $a^2+a+1=0$, бидејќи $a\neq 1$ добиваме $(a-1)(a^2+a+1)=0$, т.е. $a^3-1=0$. Значи, $a^3=1$. Според тоа,

$$a^{1996}=a^{3\cdot 665}\cdot a=(a^3)^{665}\cdot a=a,$$

па затоа

$$a^{1996}+\frac{1}{a^{1996}}=a+\frac{1}{a}.$$

Меѓутоа, од $a^2+a+1=0$ имаме $a^2+1=-a$ и бидејќи $a\neq 0$, ако поделиме со a добиваме $a+\frac{1}{a}=-1$. Конечно,

$$a^{1996}+\frac{1}{a^{1996}}=a+\frac{1}{a}=-1.$$

29. Ако ги искористиме равествата $x=a^2-bc$, $y=b^2-ac$ и $z=c^2-ab$, добиваме

$$\begin{aligned} ax+by+cz-(a+b+c)(x+y+z) &= -(b+c)x-(a+c)y-(a+b)z \\ &= (bc-a^2)(b+c)+(ac-b^2)(a+c)+(ab-c^2)(a+b) \\ &= b^2c+c^2b-a^2b-a^2c+a^2c+c^2a-b^2a-b^2c+a^2b+b^2a-c^2a-c^2b \\ &= 0 \end{aligned}$$

од што следува

$$ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z).$$

30. Ако ги собереме равенствата $a+b+c=ab+bc+ac$ и $abc=1$ добиваме

$$abc+a+b+c=ab+bc+ac+1,$$

т.е.

$$abc-ab+a-ac+b-bc+c-1=0,$$

или

$$ab(c-1)-a(c-1)-b(c-1)+(c-1)=0,$$
$$(c-1)(ab-a-b+1)=0,$$
$$(c-1)[a(b-1)-(b-1)]=0,$$
$$(c-1)(b-1)(a-1)=0. \qquad (1)$$

Производ на три броеви е еднаков на нула ако барем еден од броевите е еднаков на нула, па затоа од (1) следува $c=1$ или $b=1$ или $a=1$ што и требаше да се докаже.

31. За дадениот израз имаме

$$\begin{aligned} R(x,y,z) &= (4xy-6xz-2x^2)+(2yz-3z^2-xz)+(-6y^2+9yz+3xy)+5 \\ &= 2x(2y-3z-x)+z(2y-3z-x)-3y(2y-3z-x)+5 \\ &= (2y-3z-x)(2x+z-3y)+5 \end{aligned}$$

Ако $2y-3z-x=0$, тогаш $R(x,y,z)=5$, т.е. изразот "не зависи" од *x, y* и *z*.

32. Од $ay=bx$ следува $a^2y^2=b^2x^2$, па затоа

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{x^2a^2+x^2b^2+x^2b^2+b^2y^2}{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}=\frac{x^2a^2+2x^2b^2+b^2y^2}{x^2a^2+x^2b^2+y^2a^2+b^2y^2}$$
$$=\frac{x^2a^2+2x^2b^2+b^2y^2}{x^2a^2+2x^2b^2+b^2y^2}=1.$$

33. За дадениот израз при $xyz=1$ имаме

$$S(x,y,z)=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+xyzx}$$
$$=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+1}+\frac{xy}{xy+1+x}=\frac{1+x+xy}{1+x+xy}=1,$$
т.е. неговата вредност во овој случај “не зависи” од x,y и z.

34. а) Лесно се докажува дека
$$(ax+by+cz)^2=(ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c)-bc(y-z)^2-ac(z-x)^2-ab(x-y)^2$$
Според тоа, користејќи го условот $ax+by+cz=0$ се добива:
$$(ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c)=bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2 \quad (2)$$
Ако равенството (2) го поделиме со
$$(a+b+c)[bc(y-z)^2+ac(z-x)^2+ab(x-y)^2]$$
го добиваме равенството (1).

б) Од $b(a+c)=2ac$ добиваме $2ac=ab+bc$ или
$$2b^2-2ab-2bc+2ac=2b^2-ab-ac$$
т.е.
$$2(b-a)(b-c)=b(2b-a-c) \qquad (1)$$
Ако искористиме $a\neq b\neq c$ и $b\neq 0$, тогаш од (1) добиваме $\frac{2}{b}=\frac{2b-a-c}{(b-a)(b-c)}$

односно
$$\frac{2}{b}=\frac{b-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{b-c}{(b-a)(b-c)},$$
што значи
$$\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}.$$

в) Од $x=\frac{a}{b+c}$ и $z=\frac{c}{a+b}$ добиваме
$$\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{(b+c)(a+b)}:\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{2ac}{a^2+c^2+(a+c)b}.$$
Но, од тоа што $b=\frac{2ac}{a+c}$ и $y=\frac{b}{a+c}$, заклучуваме
$$\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{a^2+c^2+2ac}=\frac{2ac}{(a+c)^2}=\frac{b}{a+c}=y.$$

г) Од $z=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ следува $z=\frac{2ab}{a+b}$. Значи
$$z-a=\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{ab-a^2}{a+b} \text{ и } z-b=\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{ab-b^2}{a+b}.$$
Според тоа,

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{a+b}{ab-b^2}=(a+b)[\frac{1}{a(b-a)}-\frac{1}{b(b-a)}]$$
$$=(a+b)\frac{b-a}{ab(b-a)}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

35. За $x=1, y=0$ од (1) добиваме $a\left(b-c\right)=A$, а за $x=0, y=1$ имаме $c(a-b)=A$. Значи,

$$ab-ac=ac-bc \qquad (2)$$

Ако равенството (2) го поделиме со $abc\neq 0$ добиваме

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\text{, т.е. }\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

36. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ имаме $\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$. Значи,

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$$

односно

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0$$

Конечно, од последното равенство имаме

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0\,. \qquad (1)$$

Бидејќи производ на три броеви е еднаков на нула ако барем еден од броевите е еднаков на нула од (1) добиваме $a+b=0$ или $c+a=0$ или $b+c=0$.

37. Равенството е еквивалентно со

$$\frac{a}{2}(b-c)^2+\frac{b}{2}(a-c)^2+\frac{c}{2}(a-b)^2=0\,.$$

Но, a,b,c се позитивни реални броеви, па од последното равенство добиваме

$$a-b=b-c=c-a=0\text{, т.е. }a=b=c\,.$$

38. Од $a+b+c=0$ имаме

$$0=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \quad (1)$$

Но, $a+b=-c, a+c=-b$ и $b+c=-a$, па од равенството (1) следува

$$0=a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc\text{, т.е. }a^3+b^3+c^3=3abc\,.$$

39. Да го означиме заедничкото решение на двете равенки со y. Тогаш,

$$ay^2+by+c=0 \qquad (1)$$

$$Ay^2 + By + C = 0 \tag{2}$$

Ако (1) го помножиме со A, а (2) со a и добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB - Ab)y = Ac - aC \tag{3}$$

Од друга страна ако (1) го помножиме со B, а (2) го помножиме со b и добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB - Ab)y^2 = bC - Bc \tag{4}$$

Ако $aB - Ab \neq 0$, тогаш y го изразуваме од (3), го заменуваме во (4) и го добиваме бараното равенство.

Нека $aB - Ab = 0$. Тогаш, од (3) и (4) следува $aC - Ac = bC - Bc = 0$, па, значи, и во овој случај важи

$$(aC - Ac)^2 = (aB - Ab)(bC - Bc) .$$

40. а) Од

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

добиваме

$$c = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3xya$$

Но, од $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ следува

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2+y^2)}{2} = \frac{a^2-b}{2} .$$

Конечно,

$$c = a^3 - 3xya = a^3 - 3a\frac{a^2-b}{2} = \frac{3ab-a^3}{2} .$$

б) Имаме

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y}\right)^2 = \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$$

и како $x^2 + 4y^2 = 5xy$ следува

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y}\right)^2 = \frac{9xy}{xy} = 9 .$$

Значи,

$$\frac{x+2y}{x-2y} = -3 \text{ или } \frac{x+2y}{x-2y} = 3 .$$

Но, $0 < x < y$, па затоа $x - 2y < 0$ и $x + 2y > 0$, т.е. $\frac{x+2y}{x-2y} < 0$. Конечно,

$$\frac{x+2y}{x-2y} = -3 .$$

41. Нека $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$. Тогаш

$$a^2b^2+2abcd+c^2d^2=a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2,$$

т.е.

$$2abcd=(ad)^2+(bc)^2$$

Значи, $(ad-bc)^2=0$ односно $ad=bc$.

Обратно, од $ad=bc$ добиваме

$$(ad-bc)^2=0$$
$$2abcd=(ad)^2+(bc)^2$$
$$a^2b^2+2abcd+c^2d^2=a^2b^2+a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2$$
$$(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$$

42. Од $x=a+\frac{1}{a}$ следува

$$\begin{aligned}x^2(x^2-4)+2&=(a+\tfrac{1}{a})^2[(a+\tfrac{1}{a})^2-4]+2\\&=(a^2+2+\tfrac{1}{a^2})(a^2+2+\tfrac{1}{a^2}-4)+2\\&=(a^2+\tfrac{1}{a^2}+2)(a^2+\tfrac{1}{a^2}-2)+2\\&=(a^2+\tfrac{1}{a^2})^2-2^2+2\\&=a^4+2+\tfrac{1}{a^4}-2=a^4+\tfrac{1}{a^4}.\end{aligned}$$

43. Од $8a^3-6a-1=0$ имаме $a^3=\frac{6a+1}{8}$. Значи,

$$\frac{a^2}{a^2-1}+\frac{1}{a^2+a}=\frac{a^2}{(a-1)(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a^3+a-1}{a(a-1)(a+1)}$$
$$=\frac{a^3+a-1}{a^3-a}=\frac{\frac{6a+1}{8}-1+a}{\frac{6a+1}{8}-a}=\frac{14a-7}{1-2a}=\frac{-7(1-2a)}{1-2a}=-7.$$

44. Од $3a^2+3b^2=10ab$ следува $(3a-b)(a-3b)=0$. Значи, $3a-b=0$ или $a-3b=0$, од што добиваме $a=\frac{b}{3}$ или $a=3b$. Но, бидејќи $a>b>0$ добиваме дека $a=\frac{b}{3}$ не е можно, па затоа $a=3b$. Конечно,

$$\frac{a+2b}{2a-b}=\frac{3b+2b}{2\cdot 3b-b}=\frac{5b}{5b}=1.$$

45. Ставаме $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=t$ и добиваме

$$ay-bx=ct, cx-az=bt, bz-cy=at$$

односно $y(b-x)a=\frac{c}{ab}t$, $x(a-z)c=\frac{b}{ac}t$ и $\frac{z}{c}\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}t$. Одовде добиваме

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}t=0$$

и како $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ последното равенство е можно ако $t=0$.

Значи, $ay-bx=cx-az=bz-cy=0$ од што следува

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

46. Означуваме $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=t$, од што добиваме

$$a_1=tb_1,\ a_2=tb_2,\ ....,\ a_n=tb_n$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) &= (t^2b_1^2+t^2b_2^2+...+t^2b_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\\ &= t^2(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)^2\\ &= (tb_1^2+tb_2^2+...+tb_n^2)^2\\ &= (tb_1b_1+tb_2b_2+...+tb_nb_n)^2\\ &= (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2.\end{aligned}$$

47. Имаме, $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$ т.е.

$$(a^4+b^4-2a^2b^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)+2(a^2b^2+c^2d^2-2abcd)=0$$

односно

$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0 .$$

Последното равенство е можно ако $a^2-b^2=0,\ c^2-d^2=0$ и $ab-cd=0$. Бидејќи a,b,c,d се позитивни реални броеви од $a^2-b^2=0,\ c^2-d^2=0$ следува $a=b$, $c=d$. Но, тогаш од $ab-cd=0$ следува $a^2=c^2$, т.е. $a=c$.

Конечно, $a=b=c=d$, што и требаше да се докаже.

48. После квадрирањето во (1) и средување на изразот добиваме

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$$

од што следува

$$\tfrac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=0$$

Од последното равенство следува дека $x-y=0$, $y-z=0$ и $z-x=0$, т.е. $x=y=z$.

49. Дадениот услов можеме да го запишеме во обликот

$$\begin{aligned}0&=a^2+d^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2cd\\&=(a^2-2ab+b^2)+(c^2-2bc+b^2)+(c^2-2cd+d^2)\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2.\end{aligned}$$

Според тоа, збир на три ненегативни реални броеви е еднаков на нула, а тоа е можно само ако секој од броевите е еднаков на нула. Значи

$$a-b=0,\ \ b-c=0 \text{ и } c-d=0$$

од што следува $a=b=c=d$.

50. Од $b+c=a$ добиваме

$$\begin{aligned}3a^2-3b^2-6bc-3c^2&=3a^2-3(b^2+2bc+c^2)\\&=3a^2-3(b+c)^2=3a^2-3a^2=0.\end{aligned}$$

51. Од $x=\frac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$ имаме

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{x(b-a)+xa}{a(b-a)}=\frac{xb}{a(b-a)}=\frac{b}{a(b-a)}\frac{a^2(b-a)}{b(b+a)}=\frac{a}{a+b}.$$

52. Ако $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ го помножиме со $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$ добиваме:

$$a(c+a)(a+b)+b(b+c)(a+b)+c(b+c)(c+a)=(a+b)(b+c)(c+a)$$

или

$$\begin{aligned}&a^3+a^2c+abc+a^2b+b^3+b^2a+abc+b^2c+c^3+c^2b+c^2a+abc=\\&\qquad=a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a\end{aligned}$$

Значи,

$$a^3+b^3+c^3+3abc=0.$$

53. Ако искористиме $\frac{1}{xy}=p$, тогаш

$$\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{6}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x+y)^3}\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}+\frac{3}{(x+y)^4}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}+\frac{6}{(x+y)^5}\frac{x+y}{xy}$$

$$=\frac{1}{x^3y^3(x+y)^4}[(x^3+y^3)(x+y)+3xy(x^2+y^2)+6x^2y^2]$$

$$=\frac{1}{(xy)^3(x+y)^4}[x^4+3yx^3+3x^2y^2+xy^3+(x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4)]$$

$$=\frac{1}{(xy)^3(x+y)^4}[x(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+y(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)]$$

$$=\frac{1}{(xy)^3(x+y)^4}[x(x+y)^3+y(x+y)^3]=\frac{(x+y)^3(x+y)}{(xy)^3(x+y)^4}=\frac{1}{(xy)^3}=p^3.$$

54. Имаме $b=1-a$ и $a=1-b$. Значи,

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{-a}{(1-b)(1+b+b^2)}+\frac{b}{(1-a)(1+a+a^2)}$$

$$=\frac{-a}{a(1+b+b^2)}+\frac{b}{b(1+a+a^2)}=\frac{1}{1+a+a^2}-\frac{1}{1+b+b^2}$$

$$=\frac{b^2+b+1-a^2-a-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}=\frac{(b-a)+(b-a)(b+a)}{a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1}$$

$$=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+ab(a+b)+a(a+b)+(a+b)+b^2+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+ab+a+b^2+2}$$

$$=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+b(a+b)+a+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+a+b+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

55. Имаме,

$$0=c^2+2(ab-ac-bc)=c^2+2ab-2ac-2bc+a^2-a^2$$

$$=(a-c)^2+2b(a-c)-a^2$$

од што следува

$$a^2=(a-c)^2+2b(a-c).$$

Аналогно наоѓаме

$$b^2=(b-c)^2+2a(b-c).$$

Според тоа,

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)^2+2b(a-c)+(a-c)^2}{(b-c)^2+2a(b-c)+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)^2+2b(a-c)}{2(b-c)^2+2a(b-c)}$$

$$=\frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(a-c+b)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

56. Ако го трансформираме равенството $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$ наоѓаме

$$\begin{aligned}0&=a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)\\&=(a-b)(ac-a^2+b^2-bc)+c(b-c)(c-a)\\&=(a-b)[c(a-b)-(a-b)(a+b)]+c(b-c)(c-a)\\&=(a-b)^2(c-a-b)+c(b-c)(c-a),\end{aligned}$$

т.е.

$$(a-b)^2=\frac{c(b-c)(c-a)}{a+b-c} \text{ или } \frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a+b-c}{(b-c)(c-a)}$$

Аналогно наоѓаме,

$$\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{b+c-a}{(c-a)(a-b)} \quad \text{и} \quad \frac{b}{(c-a)^2}=\frac{c+a-b}{(a-b)(b-c)}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}&=\frac{b+c-a}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a-b}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b-c}{(b-c)(c-a)}\\&=\frac{(b+c-a)(b-c)+(c+a-b)(c-a)+(a+b-c)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0.\end{aligned}$$

57. Од $abc=1$ имаме $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ и со замена во $ab+a+1\neq 0$ добиваме $0\neq ab+a+abc=a(1+b+bc)$, т.е. $1+b+bc\neq 0$.

Аналогно докажуваме $1+c+ac\neq 0$.

Имаме $c=\frac{1}{ab}$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{b\frac{1}{ab}+b+1}+\frac{\frac{1}{ab}}{a\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+1}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1.\end{aligned}$$

58. Ако првото од дадените равенства го помножиме со zy, второто со zx и третото со xy и ги собереме добиваме

$$axy+bxz+cxy=3xyz(x+y+z) \qquad (1)$$

Од дадените услови имаме:

$$x=\frac{a}{x+y+z},\ y=\frac{b}{x+y+z},\ z=\frac{c}{x+y+z} \text{ , т.е. } xyz=\frac{abc}{(x+y+z)^3}$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$axy+bxz+cxy=\frac{3abc}{(x+y+z)^2}. \qquad (2)$$

Но, $x+y+z=\frac{a+b+c}{x+y+z}$, т.е. $(x+y+z)^2=a+b+c$ и со замена во (2) добиваме

$$axy+bxz+cxy=\frac{3abc}{a+b+c}.$$

59. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a_1=5$ и $a_2=1$. Бидејќи b_1 и b_2 се некои од броевите 1,2,3,4,5 добиваме $b_1\le 5$ и $b_2\ge 1$. Значи, $\frac{a_1}{b_1}\ge 1\ge \frac{a_2}{b_2}$. Но, од условот на задачата имаме $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, па затоа $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=1$, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\frac{a_5}{b_5}=1$$

од што следува $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4, a_5=b_5$.

60. Имаме

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)+ac(c-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)(b^2-bc-ba+ac)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(c-a)[b(b-c)-a(b-c)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{abc}=1.$$

61. Од $1=\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=2\frac{y-x}{xy}=2\frac{1}{xy}$ следува дека $xy=2$. Сега,

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2-2xy+y^2+4xy=(x-y)^2+4xy=(-1)^2+4\cdot 2=9.$$

62. Ако на двете страни од равенството $x^2+y^2=6xy$ додадеме $2xy$ добиваме $x^2+2xy+y^2=8xy$ т.е. $(x+y)^2=8xy$.

Ако на двете страни на истото равенство додадеме $-2xy$ добиваме $x^2-2xy+y^2=4xy$, т.е. $(x-y)^2=4xy$.

Според тоа, $(\frac{x+y}{x-y})^2=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{8xy}{4xy}=2$. Конечно, $\frac{x-y}{x+y}=\pm\sqrt{2}$.

63. Дадениот полином можеме да го запишеме во видот:

$$\begin{aligned}P(x,y)&=(2x^2+xy-x)+(6xy+3y^2-3y)+(6x+3y-3)+1\\&=x(2x+y-1)+3y(2x+y-1)+3(2x+y-1)+1\\&=(2x+y-1)(x+3y+3)+1\end{aligned}$$

Бидејќи $2x+y-1=0$ имаме $P(x,y)=1$.

64. Нека претпоставиме дека $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Тогаш од равенството $a+b+c=0$ следува дека барем еден од броевите *a,b,c* е позитивен и барем еден од броевите е негативен. Нека на пример $a>0, b<0$. За бројот c имаме две можности кои се разгледуваат на ист начин. Ќе претпоставиме дека $c>0$. Тогаш

$$|a|=a, |b|=-b, |c|=c$$

па е

$$0=a|a|+b|b|+c|c|=a^2-b^2+c^2$$

т.е.

$$a^2+c^2=b^2 \tag{1}$$

Од друга страна, ако го квадрираме равенството $a+c=-b$ добиваме

$$a^2+c^2+2ac=b^2 \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $ac=0$ што не е можно бидејќи по претпоставка $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Добиената противречност докажува дека еден од броевите *a,b* и *c* е еднаков на нула, т.е. $abc=0$.

65. Ако третата равенка ја одземеме од првата и втората добиваме

$$a^3-c^3+(a-c)x=0,\ b^3-c^3+(b-c)x=0,$$

односно

$$(a-c)(a^2+ac+c^2+x)=0 \text{ и } (b-c)(b^2+bc+c^2+x)=0.$$

Но, $a \neq c, b \neq c$, па од последните равенства следува

$$a^2+ac+c^2+x=0 \text{ и } b^2+bc+c^2+x=0.$$

Со одземање на последните две равенства и после нивно разложување добиваме

$$(a-b)(a+b+c)=0,$$

а бидејќи $a \neq b$ добиваме $a+b+c=0$.

66. Нека $\frac{a}{a+b}=\frac{b}{b+c}=\frac{c}{c+a}=k$, т.е.

$$a=k(a+b),\ b=k(b+c) \text{ и } c=k(c+a).$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$a+b+c=2k(a+b+c). \tag{1}$$

Нека $a+b+c \neq 0$, бидејќи тогаш во спротивно $a=-(b+c)$, односно $-ka=k(b+c)=b$ или $b=-ka$. Слично добиваме $a=-kc$ и $c=-kb$, па затоа $a=-kc=-k(-kb)=k^2b=k^2(-ka)=-k^3a$, т.е. $a=-k^3a$, односно $k^3=-1$. Но, тогаш добиваме $a=b=c$, па не е можно да биде $a+b+c=0$, бидејќи од условот $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{3}$ следува $abc\neq 0$. Конечно, $a+b+c\neq 0$, па од (1) следува $k=\frac{1}{2}$. Според тоа,

$$a=\tfrac{1}{2}(a+b), b=\tfrac{1}{2}(b+c), c=\tfrac{1}{2}(a+c),$$

што значи $a=b=c$ и со замена во $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{3}$ наоѓаме $\frac{3}{a^2}=\frac{1}{3}$, т.е. $a^2=9$, па затоа $a=b=c=3$ или $a=b=c=-3$. За $a=3$ имаме $|ab+b|c|+c|a||=27$, а за $a=-3$ имаме $|ab+b|c|+c|a||=9$.

67. Го квадрираме равенството $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}$ и добиваме $2\sqrt{ac}\sqrt{bd}=ad+bc$. Со повторно квадрирање добиваме

$$4acbd=(ad)^2+2adbc+(bc)^2,$$

односно

$$(ad)^2-2adbc+(bc)^2=0.$$

Тогаш, од $(ad-bc)^2=0$ следува $ad=bc$, што требаше да се докаже.

68. Го множиме равенството

$$(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=1$$

со $x-\sqrt{x^2+1}$ и добиваме

$$(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(y+\sqrt{y^2+1})=x-\sqrt{x^2+1},$$

односно

$$-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}. \qquad (1)$$

Слично, ако го помножиме даденото равенство со $y-\sqrt{y^2+1}$ добиваме

$$-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}. \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$$-y-x-\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}+y-\sqrt{y^2+1},$$

а оттука следува дека $2(x+y)=0$, односно $x+y=0$.

69. Ќе направиме две трансформации на равенството

$$a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2.$$

Имаме

$$\begin{aligned}a&=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-\sqrt{b}^2\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}b&=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-\sqrt{a}^2\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}).\end{aligned}$$

Ако ги искористиме овие две трансформации, добиваме:

$$\begin{aligned}a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}).\end{aligned}$$

Од последните две равенства, бидејќи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$, имаме

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

70. Да го означиме со D изразот $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Тогаш

$$D^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=a\pm2\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{2}}$$

Бидејќи $a^2>b$ и $(\sqrt{a^2-b})^2=a^2-b$. Според тоа, $D^2=a\pm\sqrt{b}$. Бидејќи $a>0,b>0$ и $a^2>b$, следува дека $a\geq\sqrt{b}$, па и $a\pm\sqrt{b}>0$. Според тоа, $D=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, со што идентитетот е докажан.

За $a>0$, дадениот израз $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}$, со Лагранжовиот идентитет се трансформира во изразот $\sqrt{2a}+\sqrt{a}$, т.е. $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}=\sqrt{a}(1+\sqrt{2})$.

71. Да ставиме $A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$. Имајќи ги во предвид дадените равенства, добиваме:

$$A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}=x\sqrt[3]{a}\ .$$

Аналогно, $A=y\sqrt[3]{b}$ и $A=z\sqrt[3]{c}$. Понатаму, $\sqrt[3]{a}=\frac{A}{x}$, $\sqrt[3]{b}=\frac{A}{y}$, $\sqrt[3]{c}=\frac{A}{z}$, а оттука следува

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}=A(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}\ .$$

72. Имаме.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-4\sqrt{x-5}-1}+\sqrt{x-18\sqrt{x-5}+76}&=\sqrt{x-5-4\sqrt{x-5}+4}+\sqrt{x-5-18\sqrt{x-5}+81}\\&=\sqrt{(\sqrt{x-5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-5}-9)^2}\\&=|\sqrt{x-5}-2|+|\sqrt{x-5}-9|.\end{aligned}$$

За $14\le x\le 54$ се добива дека $9\le x-5\le 49$, односно $3\le\sqrt{x-5}\le 7$. Тогаш

$$|\sqrt{x-5}-2|=\sqrt{x-5}-2 \text{ и } |\sqrt{x-5}-9|=\sqrt{x-5}-9,$$

па дадениот израз има вредност

$$\sqrt{x-5}-2+9-\sqrt{x-5}=7\ .$$

73. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^3+y^3}+\frac{xy}{x+y}&=\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}+\frac{xy}{x+y}\\&=\frac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}+\frac{xy}{x+y}\\&=\frac{(x+y)^2-xy}{x+y}+\frac{xy}{x+y}\\&=x+y-\frac{xy}{x+y}+\frac{xy}{x+y}=x+y.\end{aligned}$$

74. Важи

$$y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}=\frac{(a-(b-c))(a+(b-c))}{((b+c)+a)((b+c)-a)}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} \text{ и}$$

$$y+1=\frac{a^2-(b-c)^2+(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{-b^2+2bc-c^2+b^2+2bc+c^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}\ .$$

$$x+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

па затоа

$$(x+1)(y+1)=\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=2\,.$$

75. Упатство. Првото равенство помножи го со xyz, а потоа второто степенувај на квадрат и потоа извади пред заграда $\frac{2}{abc}$.

76. Упатство. Квадрирај ги дадените равенства и собери ги. Потоа покажи дека добиеното равенство е еквивалентно на равенството

$$(a^2+b^2)^3=2000\,.$$

77. Ако ги помножиме дадените равенства, го добиваме равенството $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=26\cdot 28$, кое е еквивалентно со равенството

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=728,$$

т.е со равенството

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=725\,.$$

78. Нека $a=\sqrt{x}$. Тогаш $a^2-\frac{1}{a^2}=a+\frac{1}{a}$, односно

$$(a-\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=a+\frac{1}{a}\,.$$

Но, $x>1$, па затоа $a>1$, што значи дека последното равенство може да се скрати со $a+\frac{1}{a}\neq 0$, при што добиваме $a-\frac{1}{a}=1$. Последното равенство го квадрираме и добиваме $a^2-2+\frac{1}{a^2}=1$, односно $a^2+\frac{1}{a^2}=3$ и ако ставиме $x=a^2$ добиваме $x+\frac{1}{x}=3$.

79. Од условот $\frac{a+b+2}{4}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ добиваме $\frac{a+b+2}{4}=\frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}$, односно

$$(a+1)(b+1)=4\,.$$

Но, $ab=1$, па од претходното равенство последователно добиваме

$$a+b+ab+1=4\,,$$

т.е. $a+b=2$. Конечно, ако го квадрираме последното равенство добиваме

$$a^2+2ab+b^2=4$$

и ако повторно го искористиме условот $ab=1$ имаме

$$a^2+b^2=2\,.$$

80. Од својства на пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ имаме

$$\frac{2x}{3y+4z}=\frac{3y}{2x+4z}=\frac{4z}{2x+3y}=\frac{2x+3y+4z}{4x+6y+8z}=\frac{1}{2}.$$

Тогаш $\frac{3y}{2x+4z}=\frac{1}{2}$ од каде следува дека $3y=x+2z$. Со замена во $\frac{2x}{3y+4z}=\frac{1}{2}$ имаме $\frac{2x}{x+2z+4z}=\frac{1}{2}$, т.е. $\frac{2x}{x+6z}=\frac{1}{2}$, па $x=2z$. Сега изразот $A=\frac{x+3y+2z}{x+3y-2z}$ се трансформира во $A=\frac{2z+2z+2z+2z}{2z+2z+2z-2z}=\frac{8z}{4z}=2$.

81. Со непосредно пресметување добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c}) &= abc+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{1}{abc}\\ &=1+\frac{abc}{c^2}+\frac{abc}{b^2}+\frac{abc}{a^2}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}+\frac{a^2}{abc}+1\\ &=2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+b^2+c^2+a^2\\ &=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}+c^2+2+\frac{1}{c^2}-4\\ &=(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4.\end{aligned}$$

82. Идентитетот $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}.$ го запишуваме во облик

$$(a-c)(b^2-ac)=0.$$

Бидејќи $a\neq c$ следува дека $b^2-ac=0.$ Добиваме

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2\\ &=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b).\end{aligned}$$

83. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^3+y^3}+\frac{xy}{x+y}&=\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}+\frac{xy}{x+y}\\ &=\frac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}+\frac{xy}{x+y}\\ &=\frac{(x+y)^2-xy}{x+y}+\frac{xy}{x+y}\\ &=x+y-\frac{xy}{x+y}+\frac{xy}{x+y}=x+y.\end{aligned}$$

5. НЕРАВЕНСТВА

5.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Во една кошница се наоѓаат црвени, бели и жолти цветови. Бројот на жолтите цветови не е помал од бројот на белите цветови и не е поголем од третината на црвените цветови. Вкупниот број на бели и жолти цветови не е помал од 55. Најди го најмалиот број на црвени цветови.

Задача 2. Докажи дека за секој реален број x точно е неравенството:

$$4x(x-1)+(5x-1)(x+1)+16>0\,. \qquad (1)$$

Задача 3. Докажи дека за секој реален број x точно е неравенството:

$$(3x-4)(7x+8)-1{,}5x(24x+4)-5(1-2x)<0\,. \qquad (1)$$

Задача 4. Докажи дека за секој реален број x важи:

$$4(x-3)+x(x+2)+26>0\,.$$

Задача 5. Реалните броеви a,b и c го исполнуваат неравенството

$$|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c\,.$$

Докажи дека $|a|<c$ и $|b|<c$.

Задача 6. а) Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$|\tfrac{a-b}{a+b}+\tfrac{b-c}{b+c}+\tfrac{c-a}{c+a}|<1\,.$$

б) Нека a,b,c се такви да $0<a<1, 0<b<1$ и $0<c<1$. Докажи дека

$$1-(1-a)(1-b)(1-c)>a\,.$$

в) Нека се a,b,c се позитивни реални броеви, такви да апсолутната разлика на секои два е помала од 2. Докажи дека

$$a+b+c \le \sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ca+1}.$$

Задача 7. За реалните броеви a и b точно е неравенството $(\frac{1+ab}{a+b})^2 < 1$. Докажи дека апсолутната вредност на еден од броевите a и b е помала од 1, а на другиот е поголема од 1.

Задача 8. Докажи дека

$$(\frac{4a^2}{2a+1}-\frac{1}{2a+1})-(\frac{8a^3}{2a-1}-\frac{1}{2a-1})<0,$$

за секој реален број a, таков што $a \ne \pm\frac{1}{2}$.

Задача 9. Докажи дека за кои било реални броеви a и b важи:

$$a^2+ab+b^2 \ge 3(a+b-1)$$

Задача 10. Да се докаже дека за произволни реални броеви x, y, z е исполнето следното неравенство:

$$3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$$

Задача 11. Даден е полиномот $P(t)=t^4-t+\frac{1}{2}$. Докажи дека $P(t)>0$ за секој реален број t.

Задача 12. Докажи дека

$$x^{10}-x^5+x^2-x+1>0,$$

за секој реален број x.

Задача 13. Докажи дека

$$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 \ge 0,$$

за секој реален број a.

Задача 14. Докажи дека за секој реален број x изразот

$$A(x)=x^4-\frac{2x^4-8}{x^2+2}$$

е позитивен. Определи ја најмалата вредност на изразот и вредноста на x за која изразот ја достигнува таа најмала вредност.

Задача 15. Докажи дека $3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$, за секој $a \ne 1$.

Задача 16. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи:

$$x^2+2y^2+2xy+6y+10>0. \qquad (1)$$

Задача 17. Докажи дека за секои реални броеви a и b важи:

$$(a^2-b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2.$$

Задача 18. Докажи дека за секои реални броеви a, b, c и d важи:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4(a+b+c+d-4). \qquad (1)$$

Задача 19. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 \geq 1.$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 20. Да се реши равенката

$$4(x-1)y^2z^2+4(y-1)z^2x^2+4(z-1)x^2y^2=3x^2y^2z^2$$

Задача 21. Нека a,b,c се страни на еден ист триаголник. Докажи дека

$$a^3+b^3+3abc>c^3.$$

Задача 22. Да се докаже двојното неравенство:

$$6abc \leq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leq 2(a^3+b^3+c^3),$$

каде $a,b,c \geq 0$.

Задача 23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Да се докаже дека важи неравенството:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Задача 24. Докажи дека

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<0,99.$$

Задача 25. Докажи дека

$$(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{3})^3+(\tfrac{1}{4})^4+...+(\tfrac{1}{2012})^{2012}<1.$$

Задача 26. Докажи дека $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Задача 27. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

Задача 28. Докажи дека полиномот $P(x)=x^{12}-x^9+x^4-x+1$ е позитивен за секој реален број x.

Задача 29. Докажи дека

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0,$$

за секој $x\in\mathbf{R}$.

Задача 30. Докажи дека од $ad-bc=1$ следува

$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2\neq 1.$$

Задача 31. Докажи дека ако $a\geq 0$, тогаш

$$(a^3+a^2-a-1)^2\geq(a^3-a^2-a+1)^2.$$

Задача 32. Докажи дека ако збирот на два позитивни реални броеви е еднаков на 1, тогаш збирот на реципрочните вредности од тие броеви е поголем или еднаков на 4.

Задача 33. Докажи дека, ако $a+b=2$, тогаш $a^2+b^2\geq 2$.

Задача 34. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=2$. Докажи дека важи $x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2$. Кога важи знак за равенство?

Задача 35. Ако $4x+2y=1$, тогаш $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$. Докажи!

Задача 36. Ако $a+b+c=1$, тогаш $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$. Докажи!

Задача 37. Ако $x+y+z=m$, тогаш $x^2+y^2+z^2\geq\frac{m^2}{3}$. Докажи!

Задача 38. Ако за позитивните броеви $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ важат равенствата $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ и $a_2^2+b_2^2=c_2^2$, тогаш $a_1a_2+b_1b_2\leq c_1c_2$. Докажи!

Задача 39. Ако броевите a и b се такви да $a-b\geq 2$, докажи дека $a^4+b^4\geq 2$.

Задача 40. Ако $a+b\geq 1$ тогаш $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$. Докажи!.

Задача 41. За броевите a, b, c, d важи

$$d>c,\ a+b=c+d,\ a+d<b+c.$$

Подреди ги овие броеви по големина.

Задача 42. Нека a, b, c се реални броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc}.$$

Задача 43. Ако барем еден од броевите a, b, c е различен од нула, тогаш барем еден од броевите

$$(a+b+c)^2-8ab;\ (a+b+c)^2-8ac;\ (a+b+c)^2-8bc$$

е позитивен. Докажи!

Задача 44. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што $a+b+c+d=0$. Да означиме

$$P=ab+bc+cd \text{ и } Q=ac+ad+bd.$$

Докажи дека $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$.

Задача 45. За реалните броеви a,b,c и d важи равенството

$$a^2+b^2=c^2+d^2$$

и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$. Докажи дека $ad+bc>0$.

Задача 46. Докажи дека за $a>0$, $a\neq 1$ и за секој природен број n важи неравенството $\frac{a^{n-1}-1}{a^n-1}<\frac{a^n-1}{a^{n+1}-1}$.

Задача 47. Кој од броевите $\frac{10^{1994}+1}{10^{1995}+1}$ и $\frac{10^{1995}+1}{10^{1996}+1}$ е поголем?

Задача 48. Кој од броевите е поголем

$$A=\frac{2{,}00000000004}{1{,}00000000004^2+2{,}00000000004} \text{ или } B=\frac{2{,}00000000002}{1{,}00000000002^2+2{,}00000000002}.$$

Задача 49. Нека a и b се природни броеви и $c=\frac{a^{a+1}+b^{b+1}}{a^a+b^b}$. Да се докаже дека $c^a+c^b\geq a^a+b^b$.

Задача 50. Нека a, b, c, d се позитивни броеви такви што $a \geq b \geq c \geq d$ и $a+b+c+d \leq 1$. Докажи дека $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \leq 1$.

Задача 51. Дадени се природните броеви $a_1, a_2, ..., a_{1999}$. Да се докаже дека ако збирот на нивните реципрочни вредности е поголем од 11, тогаш најмалку два од нив се еднакви меѓу себе.

Задача 52. Нека $a, b > 0$. Броевите

$$A = A(a,b) = \tfrac{a+b}{2},$$

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab},$$

$$H = H(a,b) = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \text{ и}$$

$$K = K(a,b) = \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}},$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина*, соодветно. Докажи дека за средините се точни неравенствата $H \leq G \leq A \leq K$, т.е. неравенствата

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (1)$$

при што знаци за равенство важат ако и само ако $a = b$.

Забелешка. Може да се докаже неравенството меѓу аритметичката средина, геометриската и хармоноската средина на n позитивни броеви. Имено, ако $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви, тогаш броевите

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;,\; (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \;,\; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, соодветно.

За аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;\geq\; (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \;\geq\; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Задача 53. Докажи го неравенството $\frac{4a}{4a^2+1} \leq 1$, за секој $a \in \mathbf{R}$.

Задача 54. Докажи го неравенството $a^2+\frac{1}{4}b^2 \geq ab$, за секои $a,b \in \mathbf{R}$.

Задача 55. Докажи дека за секој реален број a важи неравенството

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

Задача 56. Докажи го неравенството $\frac{1+a^2}{2a} \geq 1$, ако $a>0$,

Задача 57. а) Докажи го неравенството $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, ако $a>0, b>0$,

б) Ако $0<b \leq a$, докажи дека $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$.

Задача 58. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 6, \text{ ако } a>0,\ b>0, c>0,$$

Задача 59. Докажи го неравенството

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})>4, \text{ ако } a>0, b>0 \text{ и } a \neq b.$$

Задача 60. Ако a,b,c се позитивни реални броеви и $abc=3$ да се докаже дека важи неравенството

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 \geq 72.$$

При кои услови неравенството преминува во равенство?

Задача 61. Докажи, дека ако $0<a<1$ и $0<b<1$, тогаш

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}.$$

Задача 62. Нека a, b, c се реални броеви такви што $0<a \leq b \leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc.$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 63. Нека A, G и H се аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви a и b, соодветно. Докажи дека $\frac{2AH}{A+H} \leq G \leq \frac{A+H}{2}$

Задача 64. Нека a, b, c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Задача 65. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b+c}{3}\geq 27\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Задача 66. Ненегативните реални броеви a,b,x и y се такви што $a^5+b^5\leq 1$ и $x^5+y^5\leq 1$. Докажи дека $a^2x^3+b^2y^3\leq 1$.

Задача 67. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои што е исполнето равенството $a+b+c+2=abc$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2.$$

Кога важи равенство?

Задача 68. Нека се x,y,z позитивни броеви, такви да $xyz=1$. Докажи

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2.$$

Задача 69. Ако за позитивните броеви x и y важи $x+y=1$, докажи дека $(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2\geq\frac{25}{2}$.

Задача 70. Докажи дека за полиномот

$$P(x)=(x^2+x-1)(x^3+x^2+1)-1$$

важи $P(x)>0$, за $x>0$ и $P(x)<0$, за $x<0$.

Задача 71. Што е поголемо $\sqrt{1998}+\sqrt{2000}$ или $2\sqrt{1999}$?

Задача 72. Провери дали

$$(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4\geq 0,\ \text{за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Задача 73. а) Провери дали важи неравенството:

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

б) Докажи го неравенството

$$\frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}^{n \text{ корени}}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корени}}}>\frac{1}{4}.$$

Задача 74. Дадени се природни броеви $a_1,a_2,...,a_{2013}$. Ако збирот на реципрочните вредности на овие броеви е поголем од 11, докажи дека најмалку два од овие броеви се еднакви меѓу себе.

Задача 75. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x и y точно е неравенството

$$2x^2y+xy^2+4x+2y\geq 8xy.$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 76. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $xyz=1$. Докажи го неравенството $\frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{z+1}+\frac{z-1}{x+1}\geq 0$.

Задача 77. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y,z такви да $xyz=1$ важи

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\leq 1.$$

Задача 78. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a,b,c важи:

а) $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$, б) $9(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)^3$.

Задача 79. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)\geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Задача 80. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 81. Нека x, y, z се реални броеви за кои важи $x+y+z=2014.$ Докажи дека $x^2+\frac{3}{2}y^2+z^2 \geq 2014y.$

Задача 82. Докажи дека $(a+2b+\frac{2}{a+1})(b+2a+\frac{2}{b+1}) \geq 16$, за било кои позитивни броеви a и b такви што $ab \geq 1$.

Задача 83. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right) \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 84. Броевите 1,2,...,2008 се распоредени на 1004 домина, на секое домино по точно два броја. Ако производите на броевите на домината ги означиме со $p_1, p_2, ..., p_{1004}$, докажи дека

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{2004}} \leq \frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+...+\frac{1}{2008}.$$

Задача 85. Нека a,b,c,d се позитивни броеви такви да $a+b+c+d=8$. Докажи дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq 8.$$

Задача 86. Докажи дека за произволни реални броеви важи

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+4a+b^2+6b+13}+\sqrt{a^2-4a+b^2+6b+13}+\\&+\sqrt{a^2+4a+b^2-6b+13}+\sqrt{a^2-4a+b^2-6b+13} \geq 4\sqrt{13}.\end{aligned} \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 87. а) Докажи дека за секој природен број n, ($n>2$), постојат n различни природни броеви $k_1, k_2, ..., k_n$ такви да важи

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+...+\frac{1}{k_n}=1.$$

б) Докажи дека за ниту еден природен број $n, (n>1)$ не постојат n различни природни броеви $k_1, k_2, ..., k_n$ такви да важи

$$\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+...+\frac{1}{k_n^2}=1. \qquad (1)$$

Задача 88. Докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+...+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1}<1.$$

Задача 89. Нека a,b,c се позитивни реалнио броеви такви што $abc=1$.Докажи дека

$$(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2 \geq 3(a+b+c+1) .$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 90. Да се провери дали вредноста на изразот

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+............+\frac{1}{1999\cdot 2000}+\frac{1}{2000\cdot 2001}+\frac{1}{2001\cdot 2002}$$

е број помал од 1.

Задача 91. Провери дали за позитивни реални броеви a и b важи

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} .$$

Задача 92. Провери дали за позитивни реални броеви a, b, c важи неравенството

$$\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)} ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Дали ова неравенство може да се обопшти на броеви a, b, c, d, т.е. дали и кога важи

$$\frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt{\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)} ?$$

Задача 93. Провери дали за позитивни реални броеви a, b, c важи неравенството

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) \geq 0 .$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 94. Нека a, b, c, x, y, z се реални броеви за кои важи: $b+c \geq a+x$, $a+c \geq b+y$ и $b+a \geq c+z$. Провери дали

$$2(bc+ca+ab)+(xy+yz+zx) \geq a^2+b^2+c^2+2(ax+by+cz) ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако знак за равенство важи и во два од горните три услови.

Задача 95. Провери дализа секои реални броеви $a>0, b>0$ важи неравенството: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

Задача 96. Ако се a, b, c ненегативни реални броеви, Провери дали важи неравенството: $a^3+b^3+c^3 \geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$.

Задача 97. Ако се a, b позитивни броеви такви што $a+b=1$, провери дали: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$.

Задача 98. Ако $a>0, b>0$, провери дали $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 1+a+b$.

Задача 99. Нека a,b,c,x,y,z се позитивни броеви такви да $\frac{a}{x}<\frac{b}{y}<\frac{z}{c}$. Провери дали

$$\frac{a}{x}<\frac{a+b+c}{x+y+z}<\frac{c}{z}.$$

Задача 100. Нека a,b,c се позитивни броеви. Провери дали

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

Кога важи знак за равенство?

5.2. РЕШЕНИЈА

1. Нека во кошницата има a-жолти, b-бели и c-црвени цветови. Од условот на задачата следува дека

$$a \geq b \tag{1}$$

$$a \leq \frac{1}{3}c \tag{2}$$

и

$$a+b \geq 55. \tag{3}$$

Од (1) и (3) добиваме дека $2a \geq 55$, од каде $a \geq 28$, затоа што $a \in \mathbf{N}$. Тогаш, од (2) се добива $c \geq 3a \geq 3 \cdot 28 = 84$. Значи, најмалиот број на црвени цветови е 84.

2. Левата страна на неравенството (1) е еднаква на:

$$4x(x-1)+(5x-1)(x+1)+16=4x^2-4x+5x^2+5x-x-1+16=9x^2+15.$$

Значи, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството:

$$9x^2+15>0 \tag{2}$$

кое е очигледно точно за секој реален број x. Имено од $9x^2 \geq 0$, за секој реален број x и $15>0$ следува точноста на (2) за секој реален број x.

3. Левата страна на (1) е еднаква на:

$$(3x-4)(7x+8)-1{,}5x(24x+4)-5(1-2x)=21x^2+24x-28x-32-36x^2-6x-5+10x$$
$$=-15x^2-37$$

Значи неравенството (1) е еквивалентно на неравенството:

$$-15x^2-37<0 \tag{2}$$

кое е очигледно за секој реален број x. Имено, од $-15x^2\leq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и $-37<0$ следува дека (2) важи за секој $x\in\mathbf{R}$.

4. Имаме:

$$4(x-3)+x(x+2)+26=4x-12+x^2+2x+26=x^2+6x+14$$
$$=(x^2+6x+9)+5=(x+3)^2+5>0,$$

бидејќи $(x+3)^2\geq 0$ и $5>0$.

5. Од својствата на апсолутна вредност имаме

$$|a|=|2\tfrac{a}{2}|=|\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2}|=|(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2})+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b}{2})|\leq|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c.$$

Значи, $|a|<c$. Потполно аналогно се докажува дека $|b|<c$.

6. а) Од равенството $c-a=(c-b)+(b-a)$ добиваме

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}$$
$$=(a-b)(\tfrac{1}{a+b}-\tfrac{1}{c+a})+(b-c)(\tfrac{1}{b+c}-\tfrac{1}{c+a})$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}(\tfrac{1}{b+c}-\tfrac{1}{a+b})$$
$$=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Од неравенствата $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ и $|c-a|<c+a$ се добива бараното неравенство, односно

$$|\tfrac{a-b}{a+b}+\tfrac{b-c}{b+c}+\tfrac{c-a}{c+a}=|\tfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}|=\tfrac{|a-b||b-c||a-c|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\tfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

б) Од условот на задачата следува дека $0<1-b<1$, $0<1-c<1$ и $1-a>0$. Според тоа, $(1-b)(1-c)<1$ и ако последното неравенсво го помножиме со $1-a$ го добиваме неравенството

$$(1-a)(1-b)(1-c)<1-a,$$

кое е квивалентно со бараното неравенство.

в) Според условот на задачата имаме $|a-b|<2$ и ако го квадрираме последното неравенство добиваме $(a-b)^2<4$, т.е. $a^2-2av+b^2<4$, па затоа $a^2+2ab+b^2<4+4ab$, односно $(a+b)^2<4+4ab$. Ако го коренуваме последното неравенство добиваме $a+b<2\sqrt{ab+1}$. На потполно ист начин добиваме $b+c<\sqrt{bc+1}$ и $c+a<\sqrt{ca+1}$. Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и добиеното неравенство го поделиме со 2, го добиваме бараното неравенство.

7. Јасно, $a+b\neq 0$, па даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $(1+ab)^2<(a+b)^2$, кое последователно е еквивалентно на неравенствата

$$1-a^2+a^2b^2-b^2<0$$
$$1-a^2-b^2(1-a^2)<0$$
$$(1-a^2)(1-b^2)<0.$$

Последното неравенство е можно ако и само ако $1-a^2<0$ и $1-b^2>0$, или обратно $1-a^2>0$ и $1-b^2<0$. Конечно, $1<|a|, 1>|b|$ или $1>|a|$, $1<|b|$.

8. Ако $a\neq\pm\frac{1}{2}$, тогаш левата страна на (1) е еднаква на:

$$\left(\frac{4a^2}{2a+1}-\frac{1}{2a+1}\right)-\left(\frac{8a^3}{2a-1}-\frac{1}{2a-1}\right)=\frac{4a^2-1}{2a+1}-\frac{8a^3-1}{2a-1}=\frac{(2a-1)(2a+1)}{2a+1}-\frac{(2a-1)(4a^2+2a+1)}{2a-1}$$
$$=(2a-1)-(4a^2+2a+1)=-4a^2-2$$

Значи, ако $a\neq\pm\frac{1}{2}$ неравенството (1) е еквивалентно на неравенството $-4a^2-2<0$ кое очигледно е исполнето, бидејќи $-4a^2\leq 0$ и $-2<0$.

9. Ќе докажеме дека $a^2+ab+b^2-3(a+b-1)\geq 0$. Навистина со трансформација на левата страна на неравенството добиваме:

$$a^2+ab+b^2-3a-3b+3=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(ab-a-b+1)$$
$$=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)$$
$$=(a-1)^2+(a-1)(b-1)+\tfrac{1}{4}(b-1)^2+\tfrac{3}{4}(b-1)^2$$
$$=(a-1+\tfrac{1}{2}(b-1))^2+\tfrac{3}{4}(b-1)^2\geq 0.$$

10. Имаме:

$$\begin{aligned}3(x^2+y^2+z^2) &= 3x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xy-2yz+2yz-2xz+2xz\\ &= (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2xz+x^2)\\ &\quad +(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\\ &= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(x+y+z)^2 \geq (x+y+z)^2.\end{aligned}$$

11. Имаме:

$$P(t)=t^4-t+\tfrac{1}{2}=t^4-t^2+\tfrac{1}{4}+t^2-t+\tfrac{1}{4}=(t^2-\tfrac{1}{2})^2+(t-\tfrac{1}{2})^2 \geq 0\,.$$

Но, изразите $t-\frac{1}{2}$ и $t^2-\frac{1}{2}$ не можат истовремено да бидат еднакви на нула, па затоа $P(t)>0$.

12. Имаме

$$\begin{aligned}x^{10}-x^5+x^2-x+1 &= x^{10}-x^5+\tfrac{1}{4}+x^2-x+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\\ &= (x^5-\tfrac{1}{2})^2+(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2}>0.\end{aligned}$$

13. Имаме

$$\begin{aligned}(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1 &= [(a-1)(a-4)][(a-2)(a-3)]+1\\ &= (a^2-5a+4)(a^2-5a+6)+1\\ &= (a^2-5a+4)[(a^2-5a+4)+2]+1\\ &= (a^2-5a+4)^2+2(a^2-5a+4)+1\\ &= [(a^2-5a+4)+1]^2 \geq 0\end{aligned}$$

бидејќи квадрат на реален број е секогаш ненегативен.

14. Имаме:

$$\begin{aligned}A(x) &= x^4-\tfrac{2x^4-8}{x^2+2}=x^4-\tfrac{2(x^4-4)}{x^2+2}=x^4-2\tfrac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2+2}\\ &= x^4-2x^2+4=(x^2-1)^2+3.\end{aligned}$$

За секој реален број x важи $(x^2-1)^2 \geq 0$. Значи за секој реален број x важи:

$$A(x)=(x^2-1)^2+3 \geq 3>0\,.$$

Јасно, изразот $A(x)$ прима најмала вредност ако

$$(x^2-1)^2=0\text{, т.е. } x^2-1=0,\ (x-1)(x+1)=0.$$

Бидејќи производ на два броја е еднаков на нула ако еден од броевите е еднаков на нула, од последното равенство добиваме $x-1=0$ или $x+1=0$. Конечно, најмалата вредност на изразот $A(x)$ е 3 и таа се достигнува за $x=\pm1$.

15. Од даденото неравенство последователно ги добиваме еквивалентните неравенства:

$$a^4-a^3-a+1>0,$$
$$a^3(a-1)-(a-1)>0,$$
$$(a-1)(a^3-1)>0,$$
$$(a-1)^2(a^2+a+1)>0.$$

Последното неравенство очигледно е исполнето за секој $a\neq1$, бидејќи

$$(a-1)^2>0 \text{ и } a^2+a+1=(a+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}>0.$$

16. Левата страна на неравенството (1) ќе ја запишеме во видот:

$$\begin{aligned}x^2+2y^2+2xy+6y+10&=x^2+2xy+y^2+y^2+6y+9+1\\&=(x+y)^2+(y+3)^2+1.\end{aligned}$$

Значи, даденото неравенство е еквивалентно на неравенството:

$$(x+y)^2+(y+3)^2+1>0,$$

кое очигледно е исполнето бидејќи $(x+y)^2\geq0, (y+3)^2\geq0$ и $1>0$.

Да забележиме дека за $x+y=0$ и $y+3=0$, т.е. за $y=-3$ и $x=3$ изразот $x^2+2y^2+2xy+6y+10$ прима најмала вредност 1.

17. Од очигледното неравенство $(a-b)^2\geq0$ добиваме

$$a^2-2ab+b^2\geq0\text{, т.е. } a^2+2ab+b^2\geq4ab.$$

Значи за секои реални броеви a и b важи:

$$(a+b)^2\geq4ab. \tag{1}$$

Ако неравенството (1) го помножиме со $\left(a-b\right)^2\geq0$ добиваме:

$$(a+b)^2(a-b)^2\geq4ab(a-b)^2 \text{ т.е. } [(a-b)(a+b)]^2\geq4ab(a-b)^2.$$

Конечно, $(a^2-b^2)^2\geq4ab\left(a-b\right)^2$ за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

18. За секои реални броеви a,b,c и d важи:

$$(a-2)^2 \geq 0, \quad (b-2)^2 \geq 0, \quad (c-2)^2 \geq 0 \text{ и } (d-2)^2 \geq 0 \qquad (2)$$

т.е.

$$a^2 \geq 4a-4, \quad b^2 \geq 4b-4, \quad c^2 \geq 4c-4 \text{ и } d^2 \geq 4d-4.$$

Ако ги собереме последните четири неравенства, после средувањето го добиваме неравенството (1). Очигледно знак за равенство во (1) важи ако во неравенствата (2) важи знак за равенство, т.е. ако $a=b=c=d=2$.

19. Бидејќи,

$$\begin{aligned} x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 &= x^2+2x(y+1)+(y+1)^2-(y+1)^2+3y^2+6y+4 \\ &= (x+y+1)^2+2y^2+4y+3 \\ &= (x+y+1)^2+2(y+1)^2+1 \\ &\geq 0+0+1=1, \end{aligned}$$

следува тврдењето на задачата. Равенство важи акко $x=0, y=-1$.

20. Ако $x=0$, тогаш $-4y^2z^2=0$, од што следува $y=0$ или $z=0$. Така ги добиваме решенијата $(0,0,t)$ и $(0,t,0)$, $t \in \mathbf{R}$. Ако $y=0$ или $z=0$ го добиваме уште решението $(t,0,0)$, $t \in \mathbf{R}$

Нека $xyz \neq 0$. Тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $\frac{x-1}{x^2}+\frac{y-1}{y^2}+\frac{z-1}{z^2}=\frac{3}{4}$. Бидејќи $\frac{a-1}{a^2} \leq \frac{1}{4}$, добиваме $\frac{x-1}{x^2}+\frac{y-1}{y^2}+\frac{z-1}{z^2} \leq \frac{3}{4}$ при што равенство се достигнува ако и само ако $x=y=z=2$, што всушност е и решение на дадената равенка.

21. Од тоа што a,b,c се страни на триаголник, го користиме неравенството $a+b>c$ и добиваме

$$\begin{aligned} a^3+b^3+3abc &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc > c\cdot(a^2-ab+b^2)+3abc = \\ &= c\cdot(a^2-ab+b^2+3ab) = c\cdot(a^2+2ab+b^2) \\ &> c\cdot(a+b)^2 > c\cdot c^2 = c^3, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

22. Прво ќе го докажеме левото неравенство. Од неравенството $(a-b)^2 \geq 0$ добиваме $a^2+b^2 \geq 2ab$. Од тоа што $c>0$, после множење со c добиваме

$$c(a^2+b^2)\geq 2abc\,. \tag{1}$$

Слично од $(a-c)^2\geq 0$ и $(b-c)^2\geq 0$ добиваме:

$$b(a^2+c^2)\geq 2abc \tag{2}$$

и

$$a(b^2+c^2)\geq 2abc\,. \tag{3}$$

Со собирање на неравенствата (1), (2) и (3) се добива

$$6abc\leq c(a^2+b^2)+b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)\,.$$

Десната страна ја трансформираме

$$6abc\leq a^2c+b^2c+a^2b+bc^2+ab^2+ac^2=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

За доказ на десната страна на неравенството тргнуваме повторно од познатото неравенство $(a-b)^2\geq 0$, т.е. $a^2+b^2\geq 2ab$ и со трансформација добиваме дека $a^2-ab+b^2\geq ab$. Последното неравенство го множиме со $a+b>0$ после што добиваме $(a+b)(a^2-ab+b^2)\geq ab(a+b)$, односно

$$a^3+b^3\geq ab(a+b)\,. \tag{4}$$

Слично, тргнувајќи од $(c-a)^2\geq 0$ и $(b-c)^2\geq 0$, добиваме уште дека:

$$b^3+c^3\geq bc(b+c) \tag{5}$$

и

$$c^3+a^3\geq ca(c+a)\,. \tag{6}$$

Со собирање на неравенствата (4), (5) и (6) се добива десното неравенство. И ова неравенство преминува во равенство ако и само кога $a=b=c$.

23. Ако на очигледното неравенство $(a-b)^2\geq 0$, т.е. на неравенството $a^2-2ab+b^2\geq 0$ од двете страни додадеме $3ab$ добиваме:

$$a^2+ab+b^2\geq 3ab\,.$$

Сега имаме

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}&=\frac{a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{a(a^2+ab+b^2)-ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\\&=a-\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geq a-\frac{ab(a+b)}{3ab}=a-\frac{a+b}{3}.\end{aligned}$$

Слична оценка имаме и за другите два члена, па од тука:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq a-\frac{a+b}{3}+b-\frac{b+c}{3}+c-\frac{a+c}{3}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

24. За секој природен број $k\geq 2$ важи $k^2>k(k-1)$, т.е.

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{k-(k-1)}{k(k-1)}=\frac{k}{k(k-1)}-\frac{k-1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Значи,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$
$$=1-\frac{1}{100}=1-0,01=0,99.$$

25. Имаме

$$(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{3})^3+(\tfrac{1}{4})^4+...+(\tfrac{1}{2012})^{2012}<(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{3})^2+(\tfrac{1}{4})^2+...+(\tfrac{1}{2012})^2$$
$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2011\cdot 2012}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}<1.$$

26. Нека $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{99}{100}$ и $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{100}{101}$. Ќе докажеме дека $A<B$. Имено, од $(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2$ следува $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$, за секој природен број n, па затоа $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Од друга страна

$$AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101},$$

па според тоа $A^2<AB=\frac{1}{101}$, од каде се добива $A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.

27. За секој природен број $n>1$ важи:

$$\begin{array}{lcl} 2n>n+1 & & \frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n} \\ 2n>n+2 & \text{па затоа} & \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n} \\ .... & & .... \\ 2n>2n-1 & & \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n} \end{array}$$

и бидејќи

$$\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

добиваме

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

28. Полиномот $P(x)$ можеме да го претставиме во обликот:

$$\begin{aligned}P(x)&=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1\\&=x(x^3-1)(x^8+1)+1\\&=x(x-1)(x^2+x+1)(x^8+1)+1\end{aligned}$$

Множителите x^8+1 и $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ се позитивни за секој реален број x. Множителот $x(x-1)$ е ненегативен за $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$, па затоа $P(x)>0$ ако $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

Нека $x\in(0,1)$. Тогаш $0<x^{12}<x^9<x^4<x<1$, па е $x^4-x^9>0$, $-x>-1$ и $x^{12}>0$ т.е. $x^4-x^9-x+x^{12}>-1$ или

$$P(x)=x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Значи, $P(x)>0$ и за $x\in(0,1)$.

29. Нека е $P(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$. За $x<0$ сите собироци се позитивни па затоа $P(x)>0$. Понатаму $P(0)=1>0$. Бидејќи

$$P(x)=x^5(x^3-1)+x(x-1)+1,$$

добиваме дека за $x\geq1$ важи $x^3-1\geq0$ и $x-1\geq0$, па затоа $P(x)\geq0$. Освен тоа

$$P(x)=x^8+x^2(1-x^3)+(1-x),$$

па за $0<x<1$ важи $1-x^3\geq0$; $1-x\geq0$ и $x^8\geq0$, па и $P(x)\geq0$.

30. Да претпоставиме дека

$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2=1.$$

Од $ad-bc=1$ добиваме

$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2=ad-bc.$$

Последното равенство го множиме со 2 и добиваме

$$a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2cd+d^2+a^2-2ad+d^2=0$$

т.е.

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2=0. \qquad (1)$$

Равенството (1) е можно ако и само ако

$$a+b=0,\ b+c=0,\ c+d=0,\ a-d=0, \text{ т.е. } a=-b=c=-d=-a$$

од што следува $2a=0$, односно $a=0$. Значи,

$$a=b=c=d=0.$$

Но тоа противречи на претпоставката $ad-bc=1$, од што следува

$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2\neq 1.$$

31. Имаме,

$$\begin{aligned}(a^3+a^2-a-1)^2-(a^3-a^2-a+1)^2 &=\\ &=(a^3+a^2-a-1+a^3-a^2-a+1)(a^3+a^2-a-1-a^3+a^2+a-1)\\ &=(2a^3-2a)(2a^2-2)=4a(a^2-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

бидејќи $a\geq 0$ и $(a^2-1)^2\geq 0$.

Значи, за $a\geq 0$ важи $(a^3+a^2-a-1)^2\geq(a^3-a^2-a+1)^2$.

32. Двата реални броеви ги означуваме со x и y. Од условот на задачата имаме $x+y=1$.

Тогаш, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{xy}$. Но, $(x-y)^2\geq 0$ за кои било реални броеви, па затоа $x^2-2xy+y^2\geq 0$, т.е. $x^2+y^2\geq 2xy$. Во последното неравенство на двете страни додаваме $2xy$ и добиваме

$$x^2+2xy+y^2\geq 4xy, \text{ т.е. } (x+y)^2\geq 4xy,$$

односно $1\geq 4xy$, па затоа $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}\geq 4$.

33. Од $(a-1)^2\geq 0$ и $(b-1)^2\geq 0$ следува $a^2\geq 2a-1$ и $b^2\geq 2b-1$. Ако ги собереме последните две неравенства и искористиме дека $a+b=2$ добиваме:

$$a^2+b^2\geq 2a-1+2b-1=2(a+b)-2=2\cdot 2-2=4-2=2.$$

Знакот за равенство важи ако $a=1$ и $b=1$.

34. Нека $x=1+t$, $0\leq t\leq 1$. Тогаш, $y=1-t$, па

$$\begin{aligned}x^2y^2(x^2+y^2)&=(1+t)^2(1-t)^2((1+t)^2+(1-t)^2)\\ &=(1-t^2)^2(2+2t^2)\\ &=2(1-t^4)(1-t^2)\leq 2\end{aligned}$$

затоа што $0\leq 1-t^2\leq 1$ и $0\leq 1-t^4\leq 1$. Знак за равенство важи ако и само ако $1-t^2=1-t^4=1$, односно ако и само ако $t=0$, т.е. ако и само ако $x=y=1$.

35. Од $(5x-1)^2 \geq 0$ следува

$$25x^2 - 10x + 1 \geq 0,$$

т.е.

$$100x^2 - 40x + 4 \geq 0$$

$$20x^2 + 80x^2 - 40x + 4 \geq 0 \qquad (1)$$

$$20x^2 + 5\left(4x-1\right)^2 \geq 1$$

Од $4x + 2y = 1$ имаме $2y = -(4x-1)$ и ако замениме во (1) добиваме $20x^2 + 5(-2y)^2 \geq 1$ т.е. $20x^2 + 20y^2 \geq 1$. Значи,

$$x^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{20}.$$

Знакот за равенство се достигнува ако $(5x-1)^2 = 0$, т.е. $x = \tfrac{1}{5}$. Ако $x = \tfrac{1}{5}$, тогаш $y = \tfrac{1}{10}$.

36. Од $a + b + c = 1$ добиваме $\left(a+b+c\right)^2 = 1$, т.е.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 1$$

Но, $a^2 + b^2 \geq 2ab, a^2 + c^2 \geq 2ac, b^2 + c^2 \geq 2bc$, па затоа

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1$$

односно

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \tfrac{1}{3}.$$

Знакот за равенство се достигнува ако

$$a^2 + b^2 = 2ab, \;\; a^2 + c^2 = 2ac \;\text{ и }\; b^2 + c^2 = 2bc,$$

т.е.

$$(a-b)^2 = 0 \;,\; (a-c)^2 = 0 \;\text{ и }\; (b-c)^2 = 0.$$

Според тоа, $a = b = c$ и од тоа што $a + b + c = 1$ добиваме дека знакот за равенство се достигнува ако $a = b = c = \tfrac{1}{3}$.

37. Од $x + y + z = m$ добиваме $(x + y + z)^2 = m^2$, т.е.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = m^2.$$

Но,

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \;,\; y^2 + z^2 \geq 2yz \;\text{ и }\; x^2 + z^2 \geq 2xz,$$

па затоа

$$3(x^2+y^2+z^2)\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=m^2$$

односно

$$x^2+y^2+z^2\geq \tfrac{m^2}{3}$$

Аналогно, како во претходната задача добиваме дека знакот за раменство се достигнува за $x=y=z=\frac{m}{3}$.

38. Ако ги помножиме дадените равенства добиваме

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=c_1^2c_2^2$$

односно

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=(c_1c_2)^2 \tag{1}$$

Бидејќи

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\geq(a_1a_2+b_1b_2)^2$$

од равенството (1) добиваме

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2\leq(c_1c_2)^2$$

и како a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 се позитивни броеви имаме $a_1a_2+b_1b_2\leq c_1c_2$.

39. Со квадрирање на $a-b\geq 2$ добиваме дека $a^2-2ab+b^2\geq 4$. Ова неравенство го собираме со неравенството $(a+b)^2\geq 0$ и добиваме

$$2a^2+2b^2\geq 4\text{, т.е. } a^2+b^2\geq 2.$$

Последното неравенство го квадрираме и добиваме

$$a^4+2a^2b^2+b^4\geq 4.$$

Ако ова неравенство го собереме со $(a^2-b^2)^2\geq 0$ добиваме

$$2a^4+2b^4\geq 4\text{, т.е. } a^4+b^4\geq 2.$$

40. Од $a+b\geq 1$ добиваме $a^2+2ab+b^2\geq 1$. Но $a^2-2ab+b^2\geq 0$, па ако ги собереме последните две неравенства добиваме

$$a^2+b^2\geq \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

Од (1) добиваме

$$a^4+2a^2b^2+b^4\geq \frac{1}{4}$$

и бидејќи

$$a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0$$

добиваме

$$a^4+b^4\geq \tfrac{1}{8}.$$

41. Ако двете страни на неравенството $a+d<b+c$ го додадеме бројот b добиваме $a+d+b<2b+c$ и користејќи го условот $a+b=c+d$ имаме $c+2d<c+2b$ или $d<b$.

Ако на двете страни на неравенството $a+d<b+c$ го додадеме бројот c добиваме $a+d+c<b+2c$ и користејќи го условот $a+b=c+d$ имаме $2a+b<2c+b$ или $a<c$.

Конечно заклучуваме $a<c<d<b$.

42. Бидејќи $a>1,\ b>1,\ c>1$ добиваме $a>\frac{1}{b},\ b>\frac{1}{c}, c>\frac{1}{a}$, т.е.

$$(a-\tfrac{1}{b})(b-\tfrac{1}{c})(c-\tfrac{1}{a})>0.$$

Значи,

$$abc-a-b-c+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}-\tfrac{1}{abc}>0,$$

т.е.

$$abc+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}>a+b+c+\tfrac{1}{abc}.$$

43. Бидејќи $a\neq 0$ или $b\neq 0$ или $c\neq 0$ добиваме

$$a^2+b^2+c^2>0 \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека

$$(a+b+c)^2-8ab\leq 0;\ (a+b+c)^2-8ac\leq 0;\ (a+b+c)^2-8bc\leq 0. \qquad (2)$$

Ако ги собереме неравенствата (2) добиваме

$$a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\leq 0.$$

Последното неравенство противречи на неравенството (1), што значи барем едно од неравенствата (2) не е исполнето.

44. Бидејќи $a+b+c+d=0$ добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2bd+2ac=(a+b+c+d)^2=0$$

па затоа

$$0\leq a^2+b^2+c^2+d^2=-2(ab+bc+cd+da+bd+ac)=-2(P+Q),$$

т.е. $P+Q\leq 0$. Значи,

$$(19P+93Q)+(19Q+93P)=112(P+Q)\leq 0,$$

од што следува $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$.

45. Заради равенството $a^2+b^2=c^2+d^2>0$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$ добиваме:

$$(ad+bc)(ac+bd)=a^2dc+c^2ab+d^2ab+b^2dc=(a^2+b^2)dc+(c^2+d^2)ab$$

$$=(a^2+b^2)dc+(a^2+b^2)ab=(a^2+b^2)(dc+ab)>0$$

т.е. $(ad+bc)(ac+bd)>0$. Бидејќи $ac+bd>0$, па според тоа $ad+bc>0$, што и требаше да се докаже.

46. Навистина, од

$$\frac{a^n-1}{a^{n+1}-1}-\frac{a^{n-1}-1}{a^n-1}=\frac{(a^n-1)^2-(a^{n+1}-1)(a^{n-1}-1)}{(a^{n+1}-1)(a^n-1)}=\frac{a^{n+1}-2a^n+a^{n-1}}{(a^{n+1}-1)(a^n-1)}$$

$$=\frac{a^{n-1}(a^2-2a+1)}{(a^{n+1}-1)(a^n-1)}=\frac{a^{n-1}(a-1)^2}{(a^{n+1}-1)(a^n-1)}$$

и ако се искористи дека при $a\neq 1$ именителот на последната дропка е позитивен (множителите $a^{n+1}-1$ и a^n-1 се истовремено или позитивни или негативни), а исто и броителот е позитивен ($a^{n-1}>0$ и $(a-1)^2>0$) добиваме дека

$$\frac{a^n-1}{a^{n+1}-1}-\frac{a^{n-1}-1}{a^n-1}>0,\text{ т.е. }\frac{a^n-1}{a^{n+1}-1}>\frac{a^{n-1}-1}{a^n-1}.$$

47. Ќе го искористиме тврдењето: ако на броителот именителот на една правилна позитивна дропка им додадеме еден ист позитивен број, тогаш добиената дропка е поголема од почетната. Навистина, ако $0<p<q$ и $a>0$, тогаш

$$\frac{p+a}{q+a}-\frac{p}{q}=\frac{a(q-p)}{q(q+a)}>0$$

Имаме

$$\frac{10^{1995}+1}{10^{1996}+1}<\frac{10^{1995}+10}{10^{1996}+10}=\frac{10(10^{1994}+1)}{10(10^{1995}+1)}=\frac{10^{1994}+1}{10^{1995}+1}.$$

48. Го воведуваме ознаките

$$a=1{,}00000000004 \text{ и } b=1{,}00000000002.$$

Тогаш $a>b$, $A=\frac{1+a}{1+a+a^2}$ и $B=\frac{1+b}{1+b+b^2}$. Од $a>b$ имаме

$$\frac{1+a}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}<\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}=\frac{1+b}{b^2}\text{, т.е. }\frac{a^2}{1+a}>\frac{b^2}{1+b}\text{,}$$

па затоа

$$1+\frac{a^2}{1+a}>1+\frac{b^2}{1+b}\text{, т.е. }\frac{1+a+a^2}{1+a}>\frac{1+b+b^2}{1+b}.$$

Според тоа,

$$A=\frac{1+a}{1+a+a^2}<\frac{1+b}{1+b+b^2}=B.$$

49. Јасно е дека ако $a=b$, тогаш неравенството преминува во равенство па според тоа е точно. Нека претпоставиме дека $a\neq b$.

Ако $x,y\in\mathbf{N}$ и $x\neq y$, тогаш

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}.$$

а) Ако $x<y$, тогаш

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}<ny^{n-1}\text{, за кој било } n\in\mathbf{N}.$$

б) Ако $x>y$, тогаш

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}>ny^{n-1}\text{, за кој било } n\in\mathbf{N}.$$

Ако избереме $y=n$, тогаш добиваме за $x<n$, $\frac{x^n-n^n}{x-n}<n^n$, и за $x>n$, $\frac{x^n-n^n}{x-n}>n^n$. Според тоа

$$x^n-n^n>(x-n)n^n\text{, за } x,n\in\mathbb{N},\ x\neq n.$$

Ако избереме $x=c,n=a$ добиваме

$$c^a-a^a>(c-a)a^a$$

и аналогно за $x=c,n=b$ добиваме

$$c^b-b^b>(c-b)b^b.$$

Конечно

$$\begin{aligned}c^a+c^b-a^a-b^b&\geq(c-a)a^a+(c-b)b^b\\&=c(a^a+b^b)-(a^{a+1}+b^{b+1})=0\end{aligned},$$

односно

$$c^a+c^b\geq a^a+b^b.$$

50. Од $a\geq b\geq c\geq d$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}a^2+3b^2+5c^2+7d^2 &\le a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+4bc+6cd\\ &\le a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2ac+4bd\\ &\le a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2ac+2bd+2ad\\ &=(a+b+c+d)^2\le 1.\end{aligned}$$

51. Нека претпоставиме дека меѓу броевите $a_1,a_2,...,a_{1999}$ нема еднакви. Тогаш

$$11<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{1999}}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1999}.$$

Меѓутоа

$$\begin{aligned}1+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})+(\tfrac{1}{8}+...+\tfrac{1}{15})+...+(\tfrac{1}{1024}+...+\tfrac{1}{1999})<\\ <1+2\cdot\tfrac{1}{2}+4\cdot\tfrac{1}{4}+...+1024\cdot\tfrac{1}{1024}=11\end{aligned}$$

Сега тврдењето следува од добиената противречност.

52. Навистина, од очигледното неравенство $(a-b)^2\ge 0$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$\begin{aligned}a^2-2ab+b^2\ge 0 &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\ge 4ab\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab \Leftrightarrow \tfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\end{aligned}$$

т.е. точно е средното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Аналогно, од неравенството $(a-b)^2\ge 0$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$\begin{aligned}(a+b)^2\ge 4ab \quad &\Leftrightarrow \quad ab(a+b)^2\ge 4a^2b^2\\ &\Leftrightarrow \quad ab\ge(\tfrac{2ab}{a+b})^2 \qquad ,\\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab}\ge\tfrac{2ab}{a+b}\end{aligned}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Конечно, од очигледното неравенство $0\le(a-b)^2$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}2ab\le a^2+b^2 \quad &\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 2(a^2+b^2)\\ &\Leftrightarrow (\tfrac{a+b}{2})^2\le\tfrac{a^2+b^2}{2}\\ &\Leftrightarrow \tfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}},\end{aligned}$$

т.е. точно е десното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

53. *Прв начин.* За секој реален број a важи

$$(2a-1)^2 \geq 0 \text{, т.е. } 4a^2-4a+1 \geq 0.$$

Значи за секој реален број a важи:

$$4a \leq 4a^2+1. \qquad (1)$$

Но, $1+4a^2>0$, па ако (1) го поделиме со $1+4a^2$ знакот на неравенството не се менува. Конечно $\frac{4a}{4a^2+1} \leq 1$, за секој $a \in \mathbf{R}$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$\frac{4a^2+1}{2} \leq \sqrt{4a^2 \cdot 1} = 2a,$$

Кое е еквивалентно на неравенството (1). Сега, бараното неравенство се покажува како во првиот начин.

54. *Прв начин.* За секои реални броеви a и b важи $(a-\frac{b}{2})^2 \geq 0$. Според тоа,

$$a^2-2a\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2 \geq 0 \text{ т.е. } a^2+\frac{1}{4}b^2 \geq ab \text{, за секои } a,b \in \mathbf{R}.$$

Втор начин. Од својствата на апсолутна вредност и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$ab \leq |ab| = 2\sqrt{a^2\frac{b^2}{4}} \leq a^2+\frac{1}{4}b^2.$$

55. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за секој $a \in \mathbf{R}$ важи

$$\sqrt{a^2+2}+\frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2\sqrt{\sqrt{a^2+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}} = 2, \qquad (1)$$

т.е. важи $\frac{(\sqrt{a^2+2})^2+1}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2$, па затоа

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2. \qquad (2)$$

Знак за равенство важи ако во (1) важи $\sqrt{a^2+2}=1$, односно $a^2+1=0$, што не е можно за $a \in \mathbf{R}$. Значи во (2) важи строго неравенство, т.е

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

56. *Прв начин.* За секој реален број a важи

$$(a-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 1 \geq 2a.$$

Но, $a > 0$, па затоа ако последното неравенство го поделиме со $2a$ знакот на неравенството не се менува. Конечно, $\frac{1+a^2}{2a} \geq 1$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, за $a > 0$, добиваме

$$\frac{1+a^2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a^2} = a, \text{ т.е. } \frac{1+a^2}{2a} \geq 1.$$

57. а) *Прв начин.* За секои реални броеви a и b важи $(a-b)^2 \geq 0$ и бидејќи $a > 0$, $b > 0$, добиваме $ab > 0$. Значи, $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$, т.е. $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab} \geq 0$. Конечно, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$, т.е. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{b}{a}} = 2.$$

б) Од $0 < b \leq a$ следува $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{b}$, па затоа

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{2(2\sqrt{b})^2} = \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

58. Според задача 57 имаме

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 6.$$

59. Според задача 57 имаме

$$(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 2 + 2 = 4.$$

Но, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ ако и само ако $a = b$, па затоа $(a+b)(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}) > 4$.

60. Од $abc = 3$ имаме $ab = \frac{3}{c}, ac = \frac{3}{b}, bc = \frac{3}{a}$. Од овие равенства и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, после низа идентични трансформации добиваме:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 &= 3a^2b+3ab^2+3ac^2+3a^2c+3bc^2+3b^2c+6abc\\ &= 3((a^2b+ab^2)+(a^2c+ac^2)+(b^2c+bc^2))+18\\ &= 3(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))+18\\ &= 3(3\tfrac{a+b}{c}+3\tfrac{a+c}{b}+3\tfrac{b+c}{a})+18\\ &= 9((\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})+(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a}))+18\\ &\geq 9(2+2+2)+18=72.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\tfrac{a}{b}=\tfrac{b}{a},\ \tfrac{b}{c}=\tfrac{c}{b},\ \tfrac{c}{a}=\tfrac{a}{c},$$

од што следува $a=b=c$ и како $abc=3$, добиваме дека знак за равенствои важи ако и само ако $a=b=c=\sqrt[3]{3}$.

61. Да ставиме $u=\sqrt{ab},\ v=a+b$. Бидејќи $v\geq 2u$ добиваме

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2}=\frac{u^2(1+u^2-v)}{(1-u^2)^2}\leq\frac{u^2(1+u^2-2u)}{(1-u^2)^2}=\frac{u^2(1-u)^2}{(1-u)^2(1+u)^2}=(\tfrac{u}{1+u})^2$$

Но, $u=\sqrt{ab}<1$, па затоа $\frac{1+u}{u}=1+\frac{1}{u}\geq 2$, т.е. $\frac{u}{1+u}\leq\frac{1}{2}$, што значи

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2}\leq(\tfrac{u}{1+u})^2\leq\tfrac{1}{4}.$$

62. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}(a+3b)(b+4c)(c+2a) &= (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\\ &\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}.\end{aligned}$$

Бидејќи $a\leq b\leq c$, имаме

$$\begin{aligned}60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}} &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{2}{15}}c\geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}b^{\frac{2}{15}}c=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}c\\ &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{1}{12}}bc\geq 60a^{\frac{11}{12}}a^{\frac{1}{12}}bc=60abc.\end{aligned}$$

Кај првиот знак за неравенство, равенство важи ако и само ако $a=b=c$, кај вториот ако и само ако $b=c$, а кај третиот ако и само ако $a=b$. Значи, равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

63. Од очигледното неравенство $(A^2-G^2)^2\geq 0$ и од равенството

$$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

последователно добиваме

$$2G^2A^2\le A^4+G^4$$
$$2G^2\le A^2+(\tfrac{G^2}{A})^2$$
$$2G^2\le A^2+H^2$$
$$4G^2\le A^2+2G^2+H^2$$
$$4G^2\le A^2+2AH+H^2$$
$$4G^2\le (A+H)^2$$
$$G\le \frac{A+H}{2}. \qquad (1)$$

Понатаму, ако неравенството (1) го помножиме со $G>0$ и го искористиме равенството $AH=G^2$, последователно добиваме

$$G^2\le G\frac{A+H}{2}$$
$$AH\le G\frac{A+H}{2}$$
$$\frac{2AH}{A+H}\le G.$$

64. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)})^3\ge\frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (1)$$

Но, $(\frac{a+b+c}{3})^3\ge abc$ и

$$(\frac{2(a+b+c)}{3})^3=(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3})^3\ge(a+b)(b+c)(c+a),$$

па затоа

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{3^3\cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива бараното неравенство.

65. Имаме

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3+24$$
$$=a^3+b^3+c^3+\underbrace{3+...+3}_{8}\ge 9\sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)3^8}$$

Според тоа,

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq \sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}},$$

т.е.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

66. Ако го искористиме неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме

$$a^2x^3 = \sqrt[5]{a^5a^5x^5x^5x^5} \leq \frac{1}{5}(a^5+a^5+x^5+x^5+x^5) = \frac{2}{5}a^5 + \frac{3}{5}x^5,$$

$$b^2y^3 = \sqrt[5]{b^5b^5y^5y^5y^5} \leq \frac{1}{5}(b^5+b^5+y^5+y^5+y^5) = \frac{2}{5}b^5 + \frac{3}{5}y^5.$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq \frac{2}{5}a^5+\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{5}b^5+\frac{3}{5}y^5 = \frac{2}{5}(a^5+b^5)+\frac{3}{5}(x^5+y^5) \leq \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1.$$

67. *Прв начин.* Најпрво воочуваме дека важи равенството

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1) &= \\ &= a+b+c+(a+b+c+2)+ab+ac+bc+1 \\ &= a+b+c+abc+ab+ac+bc+1 \\ &= (a+1)(b+1)(c+1).\end{aligned}$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} &= \frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(b+1)(c+1)(a+1)}}-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}) \\ &= 3-\frac{(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 3-1=2.\end{aligned}$$

Равенството важи ако и само ако $a=b=c=2$.

Втор начин. Ако неравенството го помножиме со

$$(a+1)(b+1)(c+1)$$

го добиваме еквивалентното неравенство:

$$a(a+1)(c+1)+b(b+1)(a+1)+c(c+1)(b+1) \geq 2(a+1)(b+1)(c+1)$$

кое може да се запише во облик

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2 \geq 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2.$$

Но, од неравенствата

$$a^2c+b^2a+c^2b \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\geq 3abc+ab+bc+ca\,.$$

Конечно, ако го примениме условот од задачата, добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\geq 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2\,.$$

68. Имаме:

$$a^6+a^3b^3+b^6\geq 3\sqrt[3]{a^6a^3b^3b^6}=3\sqrt[3]{a^9b^9}=3a^3b^3\,,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\tfrac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}&=a^3+b^3-\tfrac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{a^6+a^3b^3+b^6}\geq a^3+b^3-\tfrac{2a^3b^3(a^3+b^3)}{3a^3b^3}\\&=a^3+b^3-\tfrac{2}{3}(a^3+b^3)=\tfrac{1}{3}(a^3+b^3).\end{aligned}$$

Од последното неравенство следува

$$\begin{aligned}\tfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\tfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\tfrac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}&\geq \tfrac{1}{3}(x^3+y^3)+\tfrac{1}{3}(y^3+z^3)+\tfrac{1}{3}(z^3+y^3)\\&=\tfrac{2}{3}(x^3+y^3+z^3)\geq\tfrac{2}{3}3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}\\&=2xyz=2.\end{aligned}$$

69. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $(x+y)^2\geq 4xy$ и ако го искористиме условот $x+y=1$ добиваме $1\geq 4xy$, т.е.

$$\tfrac{1}{xy}\geq 4\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од (1), условот $x+y=1$ и од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за $a=x+\frac{1}{x}, b=y+\frac{1}{y}$ добиваме

$$\begin{aligned}(x+\tfrac{1}{x})^2+(y+\tfrac{1}{y})^2&\geq\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{x}+y+\tfrac{1}{y})^2=\tfrac{1}{2}(x+y+\tfrac{x+y}{xy})^2\\&\geq\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{xy})^2\geq\tfrac{1}{2}(1+4)^2=\tfrac{25}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

70. Упатство. $P(x)=x(x+1)^2(x^2+1)$.

71. Нека $a=\sqrt{1998}+\sqrt{2000}$ и $b=2\sqrt{1999}$. Имаме

$$\begin{aligned} a^2 &= 1998 + 2\sqrt{1998}\sqrt{2000} + 2000 = 3998 + 2\sqrt{1999-1}\sqrt{1999+1} \\ &= 2\cdot 1999 + 2\sqrt{1999^2-1} < 2\cdot 1999 + 2\sqrt{1999^2} \\ &= 4\cdot 1999 = (2\sqrt{1992})^2 = b^2 \end{aligned}$$

и бидејќи a и b се позитивни броеви добиваме $a<b$, т.е.

$$\sqrt{1998}+\sqrt{2000} < 2\sqrt{1999}\,.$$

72. Имаме

$$\begin{aligned} (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 &= [(x+y)(x+4y)][(x+2y)(x+3y)]+y^4 \\ &= (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4 \\ &= (x^2+5xy+4y^2)^2+2y^2(x^2+5xy+4y^2)+y^4 \\ &= (x^2+5xy+4y^2+y^2)^2 \\ &= (x^2+5xy+5y^2)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

73. б) Нека $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корени}}$. Имаме

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корени}} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корени}}} = \sqrt{2+a_{n-1}}\,.$$

Јасно е дека

$$a_1=\sqrt{2}<2\,,\ a_2=\sqrt{2+a_1}<\sqrt{2+2}=2\,,\ a_3=\sqrt{2+a_2}<\sqrt{2+2}=2 \ \text{итн.}$$

Според тоа, зголемувајќи го бројот на корените до n заклучуваме дека $a_n<2$, факт кој спрецизно се докажува со таканаречената математичка индукција. Сега имаме:

$$\begin{aligned} \frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}^{n \text{ корени}}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корени}}} &= \frac{2-a_n}{2-a_{n-1}} = \frac{\sqrt{2+a_{n-1}}-2}{a_{n-1}-2} = \frac{\sqrt{2+a_{n-1}}-2}{a_{n-1}+2-4} \\ &= \frac{\sqrt{2+a_{n-1}}-2}{(\sqrt{2+a_{n-1}}-2)(\sqrt{2+a_{n-1}}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2+a_{n-1}}+2} = \frac{1}{a_n+2} > \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

74. Нека претпоставиме дека дадените броеви се различни и дека

$$11<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2013}}. \qquad (1)$$

Збирот на десната страна во неравенството (1) е помал или еднаков од збирот на реципрочните вердности на првите 2013 природни броеви, па затоа

$$\begin{aligned}11&<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2013}}\\ &\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}\\ &=1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+...+(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1025}+...+\frac{1}{2013})\\ &<1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+...+1024\cdot\frac{1}{1024}=11,\end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека најмалку два од дадените броеви се еднакви меѓу себе.

75. Имаме

$$2x^2y+xy^2+4x+2y=xy(2x+y)+2(2x+y)=(2x+y)(xy+2),$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(2x+y)(xy+2)\geq 8xy. \qquad (1)$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2x+y\geq 2\sqrt{2xy} \text{ и } xy+2\geq 2\sqrt{2xy}$$

и ако ги помножиме последните две неравенства добиваме

$$(2x+y)(xy+2)\geq 2\sqrt{2xy}\cdot 2\sqrt{2xy}=8xy,$$

т.е. точно е неравенството (1).

Знак за равенство важи ако и само ако $2x=y$ и $xy=2$, од каде добиваме $x=1, y=2$.

76. Броевите $x+1, y+1, z+1$ се позитивни, па затоа ако помножиме со $(x+1)(y+1)(z+1)$, после средувањето, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$x^2z+y^2x+z^2y+x^2+y^2+z^2\geq x+y+z+3. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyz=1$ следува

$$x^2z+y^2x+z^2y\geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3}=3. \qquad (2)$$

Но, според задача 10 имаме

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 .$$

Сега повторно со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyz=1$ добиваме

$$x^2+y^2+z^2 \geq \tfrac{1}{3}(x+y+z)^2 = \tfrac{x+y+z}{3}(x+y+z) \geq \tfrac{x+y+z}{3} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = x+y+z ,$$

т.е.

$$x^2+y^2+z^2 \geq x+y+z . \qquad (3)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (2) и (3) го добиваме неравенството (1).

77. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува

$$(x+1)^2+y^2+1 = x^2+y^2+2x+2 \geq 2\sqrt{x^2y^2}+2x+2 = 2(xy+x+1)$$

и аналогно

$$(y+1)^2+z^2+1 \geq 2(yz+y+1)$$

и

$$(z+1)^2+x^2+1 \geq 2(xz+z+1) .$$

Од добиените неравенства и од условот $xyz=1$ следува

$$\begin{aligned}\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1} &\leq \frac{2}{2(xy+x+1)}+\frac{2}{2(yz+y+1)}+\frac{2}{2(zx+z+1)}\\ &= \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\\ &= \frac{z}{xyz+xz+z}+\frac{xz}{xyz^2+xyz+xz}+\frac{1}{zx+z+1}\\ &= \frac{z}{1+xz+z}+\frac{xz}{z+1+xz}+\frac{1}{zx+z+1} = \frac{z+xz+1}{zx+z+1} = 1.\end{aligned}$$

78. а) Имаме

$$\begin{aligned}4(a^3+b^3)-(a+b)^3 &= 4a^3+4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3\\ &= 3(a^3+b^3-a^2b-ab^2)\\ &= 3[(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)]\\ &= 3(a+b)(a^2-2ab+b^2) = 3(a+b)(a-b)^2,\end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство.

б) Имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 &= (a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)\\ &= (a+b+c-a)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2]-(b^3+c^3)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b+c)(3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc)-(b+c)(b^2-bc+c^2)\\
&= (b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)\\
&= 3(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]\\
&= 3(a+b)(b+c)(c+a).
\end{aligned}
$$

Сега, ако прво го искористиме неравенството под а), потоа го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и на крајот го искористиме претходно докажаното неравенство добиваме

$$
\begin{aligned}
9(a^3+b^3+c^3) &= a^3+b^3+c^3+4(a^3+b^3)+4(b^3+c^3)+4(a^3+c^3)\\
&\geq a^3+b^3+c^3+(a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3\\
&\geq a^3+b^3+c^3+3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}\\
&= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3.
\end{aligned}
$$

79. Ќе го искористиме равенството

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+x),$$

за $x\in\{a, b, c\}$.

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$
\begin{aligned}
a^3+1 &\geq 2\sqrt{a^3\cdot 1}=2\sqrt{a^3}\\
b^3+1 &\geq 2\sqrt{b^3\cdot 1}=2\sqrt{b^3}\\
c^3+1 &\geq 2\sqrt{c^3\cdot 1}=2\sqrt{c^3}
\end{aligned}
$$

Ако последните три неравенства ги помножиме добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8\sqrt{a^3b^3c^3}=8\sqrt{(abc)^3}=8.$$

Сега е јасно дека

$$
\begin{aligned}
&(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=\\
&\quad =(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)\\
&\quad =(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\\
&\quad \geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)
\end{aligned}
$$

Равенство важи ако и само ако $a^3=b^3=c^3=1$, односно $a=b=c=1$.

80. Од $(1-\sqrt{bc})^2\geq 0$ следува $1+bc\geq 2\sqrt{bc}$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{bc}}\geq\frac{1}{1+bc}$. Според тоа,

$$\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{1+a}\geq\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+a}=1\,.$$

На ист начин се докажува дека

$$\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{1}{1+b}\geq 1 \text{ и } \frac{\sqrt{c}}{2}+\frac{1}{1+c}\geq 1\,.$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако

$$1=\sqrt{bc}\,,\ 1=\sqrt{ac} \text{ и } 1=\sqrt{ab}\,,$$

т.е. ако и само ако $a=1$, $b=1$ и $c=1$.

81. Бидејќи $(x-\frac{y}{2})^2\geq 0$ добиваме дека

$$x^2+\frac{y^2}{4}\geq xy \tag{1}$$

Исто така од $(\frac{y}{2}-z)^2\geq 0$ следува дека

$$\frac{y^2}{4}+z^2\geq yz\,. \tag{2}$$

Со собирање на (1) и (2) имаме:

$$x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=(x^2+\frac{y^2}{4})+(\frac{y^2}{4}+z^2)\geq xy+yz=y(x+z)$$
$$=y(2014-y)=2014y-y^2.$$

Од последното неравенство добиваме дека важи

$$x^2+\frac{3}{2}y^2+z^2\geq 2014y.$$

82. Бидејќи $ab\geq 1$, и од тоа што a и b се позитивни реални броеви, имаме

$$a+b\geq a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}}=2\,.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу четири позитивни реални броја имаме

$$a+2b+\frac{2}{a+1}=b+(a+b)+\frac{2}{a+1}\geq b+2+\frac{2}{a+1}=(b+1)+\frac{2}{a+1}+1$$
$$=\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{2}{a+1}+1=4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.$$

Потполно аналогно, ако a и b си ги сменат местата во претходното неравенство добиваме

$$b+2a+\frac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}\,.$$

Од добиените неравенства и со уште една примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу два реални броја, заедно со неравенството $ab \geq 1$, добиваме

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1}) \geq 16\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}} = 16\sqrt[4]{\tfrac{b+1}{2}\tfrac{a+1}{2}}$$
$$\geq 16\sqrt[4]{\tfrac{2\sqrt{a}}{2}\tfrac{2\sqrt{b}}{2}} = 16\sqrt[8]{ab} \geq 16.$$

83. Во неравенството (1) за $1-a, 1-b, 1-c$ заменуваме $b+c,\ c+a,$ $a+b$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\tfrac{a+c}{b}+\tfrac{b+c}{a}+\tfrac{a+b}{c}+6 \geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\tfrac{b+c}{a}}+\sqrt{\tfrac{c+a}{b}}+\sqrt{\tfrac{a+b}{c}}),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$(\tfrac{a+c}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{c+a}{b}}+2)+(\tfrac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{b+c}{a}}+2)+(\tfrac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{a+b}{c}}+2) \geq 0,$$

т.е. со неравенството

$$(\sqrt{\tfrac{c+a}{b}}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{\tfrac{b+c}{a}}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{\tfrac{a+b}{c}}-\sqrt{2})^2 \geq 0,$$

кое е точно. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\tfrac{c+a}{b}=\tfrac{b+c}{a}=\tfrac{a+b}{c}=2,$$

и ако го искористиме условот $a+b+c=1$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

84. Ќе докажеме дека бараниот збир е најголем ако имаме домина со парови: (1,2), (3,4),... (2007,2008). Да претпоставиме дека на две домина имаме парови (a,b) и (c,d) и дека важи $a>b$ и $c>d$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека a е најголем меѓу броевите a,b,c,d. Ако извршиме замена на броевите ќе добиеме домина со парови (a,c) и (b,d). Ако збирот на сите реципрочни вредности се зголемува тогаш важи неравенството

$$\tfrac{1}{ab}+\tfrac{1}{cd}<\tfrac{1}{ac}+\tfrac{1}{bd},$$

од каде добиваме $ab+cd-ac-bd<0$, односно $(a-d)(b-c)<0$. Но, $a>b$, па од последното неравенство следува $b<c$. Повторувајќи ја постапката добиваме дека збирот $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_{2004}}$ е најголем кога сите броеви на домината се последователни, т.е. кога имаме распоред (1,2), (3,4),... (2007,2008). Значи,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_{2004}} &\le \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2007\cdot 2008}\\ &=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\dots+\frac{2008-2007}{2007\cdot 2008}\\ &=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\dots+(\tfrac{1}{2007}-\tfrac{1}{2008})\\ &=(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots+\tfrac{1}{2007}+\tfrac{1}{2008})-2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\dots+\tfrac{1}{2008})\\ &=(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots+\tfrac{1}{2007}+\tfrac{1}{2008})-(1+\tfrac{1}{2}+\dots+\tfrac{1}{1004})\\ &=\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\dots+\frac{1}{2008}.\end{aligned}$$

85. *Прв начин.* За секои $x,y>0$ важи $(x+y)^2\ge 4xy$, па затоа $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$. Ако трипати го примениме последното неравенство и го искористиме условот $a+b+c+d=8$ добиваме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\ge\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\ge\frac{64}{a+b+c+d}=8\,.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и условот $a+b+c+d=8$ следува

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{\frac{c}{2}}+\frac{1}{\frac{c}{2}}+\frac{1}{\frac{d}{4}}+\frac{1}{\frac{d}{4}}+\frac{1}{\frac{d}{4}}+\frac{1}{\frac{d}{4}}\\ &\ge\frac{64}{a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}}\\ &=\frac{64}{a+b+c+d}=8.\end{aligned}$$

86. Ќе искористиме дека за секои $x,y,z,t\in\mathbf{R}$ важи неравенството

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}\ge\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2}\ ,$$

кое може да се докаже ако го квадрираме двапати и го искоритиме равенството

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2)=(xz+yt)^2+(xt-yz)^2\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $xt=yz$ и $xz+yt\ge 0$. Имаме

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+4a+b^2+6b+13}+\sqrt{a^2-4a+b^2-6b+13}=\\ &\qquad=\sqrt{(2+a)^2+(3+b)^2}+\sqrt{(2-a)^2+(3-b)^2}\\ &\qquad\ge\sqrt{(2+2)^2+(3+3)^2}=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2-4a+b^2+6b+13}+\sqrt{a^2+4a+b^2-6b+13}=$$
$$=\sqrt{(2-a)^2+(3+b)^2}+\sqrt{(2+a)^2+(3-b)^2}$$
$$\geq\sqrt{(2+2)^2+(3+3)^2}=2\sqrt{13},$$

па ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1). За да важи знак за равенство потребно е

$$(2+a)(3-b)=(2-a)(3+b)$$

и

$$(2-a)(3-b)=(2+a)(3+b),$$

т.е. ако и само ако $6a=4b=-6a$, односно $a=b=0$. Јасно, овој услов е и доволен за да во (1) важи знак за равенство.

87. а) Лесно се гледа дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, што значи дека тврдењето важи за $n=3$. Тогаш $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{1}{2}$, т.е. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$, од што следува дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, т.е. тврдењето важи за $n=4$. Повторувајќи ја постапката за $n=5,6,...$ добиваме

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=1,$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Според тоа, тврдењето важи за секој природен број $n>2$.

б) Нека претпоставиме дека постојат $n,(n>1)$ броеви $k_1<k_2<...$ $<k_n$ такви да важи (1). Од $n>1$ следува $k_1\geq 2$, па затоа $k_2\geq 3, k_3\geq 4, ...,$ $k_n\geq n+1$. Според тоа,

$$\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+...+\frac{1}{k_n^2}\leq\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}. \quad (2)$$

Од друга страна

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}. \quad (4)$$

Од (2), (3) и (4) следува

$$\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+...+\frac{1}{k_n^2}<1,$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

88. *Прв начин.* За произволни природни броеви $n \neq 1 \neq m$ е исполнето неравенството $nm \geq n+m$, бидејќи

$$(n-1)(m-1) \geq 1 \Rightarrow nm-n-m+1 \geq 1 \Rightarrow nm-n-m \geq 0 \Rightarrow nm \geq n+m,$$

при што знак за равенство важи само кога $n=m=2$. Тогаш за $n \geq 2$, имаме

$$\frac{1}{n(2014-n)} < \frac{1}{n+2014-n} = \frac{1}{2014},$$

од каде добиваме:

$$\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1} < \frac{2}{2013}+\frac{2011}{2014} < \frac{3}{2014}+\frac{2011}{2014} = 1.$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2013}+\frac{1}{2\cdot 2012}+\frac{1}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2}+\frac{1}{2013\cdot 1} = \\
&\quad = \frac{1}{2014}\left(\frac{1+2013}{1\cdot 2013}+\frac{2+2012}{2\cdot 2012}+\frac{3+2011}{3\cdot 2011}+\ldots+\frac{2012+2}{2012\cdot 2}+\frac{2013+1}{2013\cdot 1}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2014}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2013}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2012}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2012}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2013}+\frac{1}{1}\right)\right) \\
&\quad = \frac{1}{2014}\cdot 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2014}\left(3+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{2012}+\frac{2}{2013}\right) \\
&\quad < \frac{1}{2014}(3+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2011}) = 1.
\end{aligned}$$

89. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката (АС) и геометриската средина (ГС), односно неравенството

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

добиваме

$$\begin{aligned}
(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (a+\tfrac{1}{b})(b+\tfrac{1}{c})+(b+\tfrac{1}{c})(c+\tfrac{1}{a})+(c+\tfrac{1}{a})(a+\tfrac{1}{b}) \\
&= (ab+1+\tfrac{a}{c}+a)+(bc+1+\tfrac{b}{a}+b)+(ca+1+\tfrac{c}{b}+c) \\
&= ab+bc+ca+\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{b}{a}+3+a+b+c.
\end{aligned}$$

Повторно од неравенството меѓу АС и ГС добиваме

$$ab+\frac{b}{a} \geq 2b,\ bc+\frac{c}{b} \geq 2c \text{ и } ca+\frac{a}{c} \geq 2a.$$

Така,

$$\begin{aligned}
(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (ab+\tfrac{b}{a})+(bc+\tfrac{c}{b})+(ca+\tfrac{a}{c})+3+a+b+c \\
&\geq 3(a+b+c+1).
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Од неравенството меѓу АС и ГС следува

$$\sqrt{\frac{(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2}{3}} \geq \frac{a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}}{3} \Leftrightarrow$$

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 \geq \frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}, \qquad (1)$$

и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$, па ако замениме во (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq \frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3} \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{3}\\ &= \frac{(a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9}{3}\\ &\geq \frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{abc}+6(a+b+c)+9}{3}\\ &= \frac{9(a+b+c)+9}{3}=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Трет начин. Користејќи го неравенството

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &= a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\\ &\geq ab+ac+bc+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.\end{aligned}$$

Јасно,

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}+\frac{abc}{ab}=a+b+c$$

$$ab+\frac{a}{b}+bc+\frac{b}{c}+ca+\frac{c}{a} \geq 2a+2b+2c$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3$$

Затоа

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (ab+\tfrac{a}{b})+(bc+\tfrac{b}{c})+(ca+\tfrac{c}{a})+a+b+c+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\\ &\geq 2a+2b+2c+a+b+c+3=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$

Четврт начин. Нека $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Имаме

$$(\tfrac{x}{y}+\tfrac{z}{y})^2+(\tfrac{y}{z}+\tfrac{x}{z})^2+(\tfrac{z}{x}+\tfrac{y}{x})^2 \geq 3(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{x}+1)$$

$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2 \geq 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$

$$x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2 \geq$$
$$\geq 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2$$

Последното неравенство следува од очигледните неравенства:

1) $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2$.

2) $x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3 \geq 3x^3z^2y$

3) $x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3 \geq 3y^3x^2z$

4) $z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3 \geq 3z^3y^2x$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$,т.е. $a=b=c=1$.

Петти начин. Имаме

$$\sum_{cyc}(a+\tfrac{1}{b})^2 \geq 3\sum_{cyc}a+3 \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1) \geq 0$$

$$2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b} \geq 6\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}}=6. \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $a>0$ важи

$$a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a \geq \tfrac{3}{a}-4 \quad \Leftrightarrow \quad a^4-3a^3+4a^2-3a+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a-1)^2(a^2-a+1) \geq 0$$

па затоа

$$\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1) \geq 3\sum_{cyc}\tfrac{1}{a}-15 \geq 9\sqrt[3]{\tfrac{1}{abc}}-15=-6 \qquad (2)$$

Сега од неравенствата (1) и (2) следува

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1) \geq 6-6=0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

6. НАЈГОЛЕМА И НАЈМАЛА ВРЕДНОСТ

6.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Најди ја најмалата вредност на полиномот

а) $4x^2+4x+1$ б) x^2-5x+2

Задача 2. За која вредност на променливата x изразот

$$A(x)=x^4-6x^2+12$$

прима најмала вредност?

Задача 3. Даден е изразот $A\equiv\sqrt{x^2+y^2-z^2+2xy}$. Ако $x=361979$, $z=561980$, одреди ги сите вредности на y за кои дадениот израз прима најмала вредност.

Задача 4. За кои вредности на променливите x,y,z изразот

$$A(x,y,z)=4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3$$

прима најмала вредност?

Задача 5. Одреди ги вредностите на променливите x и y така што полиномот $P(x,y)=x^2+y^2-4x+6y+13$ прима најмала вредност.

Задача 6. За кои вредности на променливите x,y,z изразот

$$x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$$

прима најмала вредност? Определи ја таа вредност.

Задача 7. За кои вредности на променливите a,b,c полиномот

$$P(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-10a-14b+75$$

прима најмала вредност?

Задача 8. Определи ги вредностите на a, b, c, d така да изразот

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$$

прима најмала вредност.

Задача 9. За кои вредности на променливите x, y, z изразот

$$P(x,y,z)=2x^2+4y^2+3z^2-20x-36y-18z+157$$

прима најмала вредност?

Задача 10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$B=a^2+4a-b^2+8b-12,$$

каде a е еднаков на вредноста на изразот

$$p=\frac{-(8x^{2n-1})^4(-32x^{n+2})^2}{(-16x^{2n})^5},$$

а b е вредноста на променливата y за која изразот $\frac{y^2-1}{y^2+1}$ прима најмала вредност.

Задача 11. Ако $a^2+b^2-2a+20b+101=0$, колку е $a^{2014}+2014b$?

Задача 12. а) За кои вредности на a и b изразот

$$A(a,b)=a^2-a\sqrt{2}+b-2\sqrt{b}+\frac{3}{2}$$

прима најмала вредност?

б) За која вредност на променливата x изразот $A(x)=\frac{1}{4x^2+12x+10}$ прима најголема вредност?

в) За која вредност на променливата x изразот

$$A(x)=13-\frac{1}{2+(x+0,3)^4}$$

прима најмала вредност?

г) За кои вредности на променливите x и y изразот

$$A(x,y)=\frac{1-(2x-y)^2}{10+(1-3x+y)^2}$$

прима најголема вредност?

д) Определи ги вредностите на променливите a и b за кои изразот

$$P(a,b)=\frac{3-(4-\frac{a-b}{3})^2}{5+(\frac{b}{3}+\frac{a-b}{4}-5)^2}$$

прима најголема вредност.

Задача 13. Најди ја најголемата вредност на изразот, како и вредноста на x за која таа се достигнува:

а) $\frac{5}{x^2-2x+5}$ б) $\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+3}$

Задача 14. Нека $a>0$. Ако $x+y=a$, тогаш производот xy прима најголема вредност за $x=y=\frac{a}{2}$. Докажи!

Задача 15. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, каде a и b се позитивни броеви такви што $a+b=4$.

Задача 16. Нека $a>0$. Ако $xy=a, x>0, y>0$ тогаш збирот $x+y$ прима најмала вредност за $x=y=\sqrt{a}$. Докажи!

Задача 17. Одреди ја најголемата вредност на изразот

а) $\frac{x}{9x^2+4}$ б) $\frac{x}{2x^2-3x+8}$.

Задача 18. Најди ја најголемата вредност на изразот

$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2$$

ако збирот $a^2+b^2+x^2+y^2$ е константен.

Задача 19. Да се определи збирот $x+y$ кога $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

Задача 20. Броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ ги задоволуваат условите:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0$$
$$a_1 + a_2 = 20$$
$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20.$$

Која е најголемата вредност за изразот:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2.$$

За кои вредности на $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се постигнува најголемата вредност?

Задача 21. Пресметај ја вредноста на полиномот

$$P(x,y) = x^{2013} + 2013y,$$

ако е $x^2+y^2+2x-4y+5=0$.

Задача 22. Нека $x>0, y>1$ се реални броеви такви да $x+y^2=xy$. Најди ја најмалата вредност на x.

Задача 23. Одреди ја најмалата вредност на изразот

$$x^2-8xy+19y^2-6y+3.$$

За кои вредности на x и y таа се достигнува?

Задача 24. Докажи дека за секои реални броеви x, y, z важи

$$P(x,y,z)=x^2+4y^2+25z^2-8x+28y-30z+2076>0.$$

За кои вредности на x, y, z полиномот $P(x,y,z)$ прима најмала вредност?

Задача 25. За кои вредности на реалните броеви x и y изразот

$$P(x,y)=1806+26x+10y-x^2-y^2,$$

прима најголема вредност. Колку изнесува таа вредност?

Задача 26. Ако $x+y\geq 0$, определи ја најмалата вредност на изразот $x^5+y^5-x^4y-xy^4+x^2+4x+7$. За кои вредности на x и y таа се достигнува?

Задача 27. Нека a и b се дадени реални броеви. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$P(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

За која вредност на променливата x таа се достигнува?

6.2. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. а) Имаме $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=(2x+1)^2$. За секоја вредност на аргументот x изразот $(2x+1)^2$ е ненегативен т.е. $(2x+1)^2\geq 0$. Значи најмалата вредност на $(2x+1)^2$ е нула и се достигнува кога $2x+1=0$ или $x=-\frac{1}{2}$.

б) Бидејќи

$$x^2-5x+2=x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+(\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2+2=(x-\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{17}{4}$$

добиваме дека најмалата вредност на полиномот е $-\frac{17}{4}$ и таа се достигнува кога $(x-\frac{5}{2})^2=0$ т.е. $x=\frac{5}{2}$.

2. Бидејќи

$$A(x)=x^4-6x^2+12=x^4-6x^2+9+3=(x^2-3)^2+3$$

добиваме дека најмалата вредност на изразот $A(x)$ е 3 и таа се достигнува ако и само ако $x^2-3=0$ т.е. $x=\pm\sqrt{3}$.

3. Најмалата вредност на дадениот квадратен корен е 0. Значи мора

$$x^2+y^2-z^2+2xy=0\text{, т.е. } (x+y)^2-z^2=0 \text{ или } (x+y-z)(x+y+z)=0.$$

Производот на два броја е нула ако барем едниот од нив е нула. Затоа од

$$(x+y-z)(x+y+z)=0$$

следува

$$x+y-z=0 \text{ или } x+y+x=0.$$

Конечно бараните вредности на y се

$$y=z-x=200001 \text{ и } y=-z-x=-923959.$$

4. Бидејќи

$$\begin{aligned}A(x,y,z)&=(4x^2-4x+1)+(9y^2-6y+1)+(16z^2-8z+1)\\&=(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2\end{aligned}$$

и квадратот на реален број секогаш е ненегативен заклучуваме дека дадениот израз има најмала вредност ако неговите собироци се еднакви на нула, т.е.

$$(2x-1)^2=0,\ (3y-1)^2=0 \text{ и } (4z-1)^2=0,$$

од што следува

$$2x-1=0,\ 3y-1=0 \text{ и } 4z-1=0,$$

односно $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ и $z=\frac{1}{4}$.

5. Дадениот полином можеме да го запишеме во обликот

$$P(x,y)=x^2-4x+4+y^2+6y+9=(x-2)^2+(y+3)^2.$$

Според тоа $P(x,\ y)\geq 0$ за секои x и y, па неговата најмала вредност е 0. Таа се достигнува кога $x-2=0$ и $y+3=0$, односно кога $x=2$ и $y=-3$.

6. За дадениот израз имаме

$$x^2+y^2+z^2-12y-14z+90=x^2+y^2-12y+36+z^2-14z+49+5$$
$$=x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+5\geq 5$$

што следува од фактот дека квадрат на реален број е поголем или еднаков на нула. Значи, за $x=0$, $y=6$ и $z=7$ дадениот израз прима најмала вредност 5.

7. Од

$$P(a,b,c)\equiv a^2+b^2+c^2-10a-14b+75$$
$$=a^2-10a+25+b^2-14b+49+c^2+1$$
$$=(a-5)^2+(b-7)^2+c^2+1$$

добиваме дека за $a=5, b=7$ и $c=0$ дадениот полином прима најмала вредност и таа е 1.

8. Имаме

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+d^2-2dc+c^2$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(d-c)^2.$$

Значи, дадениот израз има најмала вредност за $a=b=c=d$ и таа е еднаква на 0.

9. Имаме

$$P(x,y,z)=2x^2+4y^2+3z^2-20x-36y-18z+157$$
$$=2(x^2-10x+25)+(4y^2-36y+81)+3(z^2-6z+9)-1$$
$$=2(x-5)^2+(2y-9)^2+3(z-3)^2-1\geq -1.$$

Најмалата вредност на дадениот израз е -1 и таа се достигнува за $x=5,$ $y=4{,}5$ и $z=3$.

10. Лесно се гледа дека $a=p=4$. Вредноста на изразот

$$\frac{y^2-1}{y^2+1}=\frac{y^2+1-2}{y^2+1}=1-\frac{2}{y^2+1}$$

всушност ќе зависи од вредноста на членот $\frac{2}{y^2+1}$. Затоа дадениот израз ќе прима најмала вредност кога $\frac{2}{y^2+1}$ ќе прима најголема вредност. Бидејќи броителот е позитивен реален број добиваме дека $\frac{2}{y^2+1}$ ќе прима најголема вредност кога именителот, кој е позитивен за секој $y\in\mathbf{R}$ ќе прима најмала вредност. Но, $y^2+1\geq 1$, за секој $y\in\mathbf{R}$ и бидејќи за $y=0$ имаме $y^2+1=1$ заклучуваме дека $b=0$. Конечно, вредноста на изразот B е

$$B=4^2+4\cdot 4-0^2+8\cdot 0-12=20$$

11. Од

$$0=a^2+b^2+2a-20b+101=(a+1)^2+(b-10)^2$$

добиваме дека $a=-1$, $b=10$. Затоа

$$a^{2014}+2014b=1+20140=20141.$$

12. а) Од

$$\begin{aligned}A(a,b)&=a^2-a\sqrt{2}+b-2\sqrt{b}+\tfrac{3}{2}\\&=a^2-2a\tfrac{\sqrt{2}}{2}+(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+b-2\sqrt{b}+1\\&=(a-\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(\sqrt{b}-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

добиваме дека дадениот израз ќе прима најмала вредност ако $a-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ и $\sqrt{b}-1=0$, т.е. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $b=1$.

б) Бидејќи броителот на $A(x)$ е константа истиот ќе има најголема вредност кога именителот кој е позитивен

$$B(x)=4x^2+12x+10=(2x+3)^2+1\geq 1$$

има најмала вредност. Според тоа, за $2x+3=0$, т.е. $x=-\frac{3}{2}$ изразот $B(x)$ ќе има најмала вредност 1, што значи дека за $x=-\frac{3}{2}$ изразот $A(x)$ ќе има најголема вредност 1.

в) Изразот $A(x)$ ќе прими најмала вредност кога изразот

$$B(x)=\tfrac{5}{2+(x+0,3)^4}$$

ќе прима најголема вредност (зошто?). Изразот $B(x)$ ќе прими најголема вредност кога изразот $C(x)=2+(x+0,3)^2$ ќе прими најмала вредност. Изразот $C(x)$ ќе прими најмала вредност кога $(x+0,3)^4\geq 0$ прима најмала вредност, а тоа е за $x=-0,3$.

г) Бидејќи изразот во именителот е позитивен т.е.

$$C(x,y)=10+(1-3x+y)^2\geq 10 \text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}$$

дадениот израз ќе прима најголема вредност кога изразот во броителот $B(x,y)=1-(2x-y)^2$ прима најголема вредност, а изразот во именителот $C(x,y)$ прима најмала вредност.

Изразот $B(x,y)$ прима најголема вредност, ако $2x-y=0$, а изразот $C(x,y)$ прима најмала вредност, ако $1-3x+y=0$. Решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 1-3x+y=0 \end{cases}$$

наоѓаме $x=1,\ y=2$ и тоа се вредностите за кои $A(x,y)$ прима најголема вредност.

д) Аналогно како во г) заклучуваме дека $P(a,b)$ прима најголема вредност ако

$$Q(a,b)=3-(4-\tfrac{a-b}{3})^2$$

прима најголема вредност, а

$$R(a,b)=5+(\tfrac{b}{3}+\tfrac{a-b}{4}-5)^2$$

прима најмала вредност.

Но, $Q(a,b)$ прима најголема вредност ако $4-\dfrac{a-b}{3}=0$, а $R(a,b)$ прима најмала вредност ако $\tfrac{b}{3}+\tfrac{a-b}{4}-5=0$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} 4-\tfrac{a-b}{3}=0 \\ \tfrac{b}{3}+\tfrac{a-b}{4}-5=0 \end{cases}$$

наоѓаме $a=18$ и $b=6$.

13. а) Имаме

$$\frac{5}{x^2-2x+5}=\frac{5}{(x-1)^2+4}\,.$$

Бидејќи $5>0$ и $(x-1)^2+4>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$, изразот ќе има најголема вредност ако именителот е најмал, т.е. ако $(x-1)^2+4$ прима најмала вредност. Тоа е ако $(x-1)^2=0$, т.е. $x=1$. Значи, бараната најголема вредност е $\frac{5}{4}$ и се достигнува за $x=1$.

б) Дадениот израз ќе го трансформираме во видот

$$\frac{2x^2-4x+7}{x^2-2x+3}=\frac{2x^2-4x+6+1}{x^2-2x+3}=\frac{2(x^2-2x+3)+1}{x^2-2x+3}=2+\frac{1}{(x-1)^2+2}$$

Аналогно, како под а) заклучуваме дека најголемата вредност се достигнува за $x=1$ и таа е $\frac{5}{2}$.

14. Јасно, најголемата вредност за производот xy се постигнува кога $x>0$, $y>0$, бидејќи од неравенството $x+y=a>0$ следува дека не може $x<0$ и $y<0$. Од неравенството $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$, и од условот $x+y=a$ добиваме дека $xy\leq\frac{a^2}{4}$. Според тоа најголемата вредност на производот е $\frac{a^2}{4}$ и таа се достигнува кога $x=y$. Имајќи предвид дека $x+y=a$ добиваме $x=y=\frac{a}{2}$.

15. Нека $F(a,b)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Од $a+b=4$ следува $b=a-4$. Значи

$$F(a,b)=\frac{1}{a}+\frac{1}{4-a}=\frac{4}{a(4-a)}.$$

Најмалата вредност на F се достигнува кога $a(4-a)$ има најголема вредност. Според задача 13 производот $a(4-a)$ е најголем кога $a=4-a$. Според тоа најмалата вредност на F се достигнува кога $a=2$ и таа изнесува $\frac{4}{2(4-2)}=1$.

16. Од неравенството $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$, во кое знак за равенство се достигнува кога $x=y$, и од условот $xy=a$ добиваме дека $2\sqrt{a}\leq x+y$. Значи збирот $x+y$ е поголем или еднаков од $2\sqrt{a}$, па неговата најмала вредност ќе биде $2\sqrt{a}$ и ќе се достигне кога $2\sqrt{a}=x+y$. Но во неравенството $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$ равенство се достигнува кога $x=y$, па од $2\sqrt{a}=x+y$ добиваме $x=y=\sqrt{a}$.

17. а) Најголемата вредност на дадениот израз треба да ја бараме за ненегативните вредности на x. За $x=0$ таа вредност не се достигнува, па да претпоставиме дека $x>0$. Тогаш $\frac{x}{9x^2+4}=\frac{1}{9x+\frac{4}{x}}$, па дадениот израз прима најголема вредност кога неговиот именител е најмал (броителот е константен). Бидејќи $9x\cdot\frac{4}{x}=36$ од претходната задача следува дека изразот $9x+\dfrac{4}{x}$ има најмала вредност кога $9x=\frac{4}{x}$, т.е. $x=\frac{2}{3}$. Конечно, изразот $\frac{x}{9x^2+4}$ прима најголема вредност кога $x=\frac{2}{3}$ и таа изнесува $\frac{1}{12}$.

б) Постапи аналогно како во решението на а).

18. За дадениот израз важи

$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2),$$

па треба да ја најдеме најголемата вредност на производот на два броја чиј збир е константен. Според задача 13 овој производ е најголем кога множителите се еднакви, т.е. $a^2+b^2=x^2+y^2$. Значи, бараната најголема вредност на $(ax-by)^2+(bx+ay)^2$, односно на $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ е $(a^2+b^2)^2$.

19. Најпрво ќе покажеме дека ако броевите a,b и c го исполнуваат условот $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, тогаш $a=b=c$. Јасно, $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Од првото равенство имаме $b^2=ac$. Ако последното равенство го помножиме со b добиваме $b^3=abc$. Аналогно $a^3=abc$ и $c^3=abc$. Според тоа $a^3=b^3=c^3$, па затоа $a=b=c$. Ако броителот и именителот на втората дропка во

$$\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$$

го помножиме со 3, тогаш добиваме

$$\frac{x}{3y}=\frac{3y}{6x-15y}=\frac{6x-15y}{x},$$

од што според претходно докажаното следува $x=3y$. Значи,

$$-4x^2+36y-8=-4x^2+12x-8=-4(x^2-3x+\tfrac{9}{4})+1=-4(x-\tfrac{3}{2})^2+1,$$

што значи дека најголемата вредност разгледуваниот израз ја достигнува за $x=\frac{3}{2}$ и е еднаква на 1. Сега, од $x=3y$ наоѓаме $y=\frac{1}{2}$, па затоа $x+y=2$.

20. Од условот имаме:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{20}\leq 40 \text{ и } a_1=20-a_2$$

Па, добиваме:

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 &= (20 - a_2)^2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 \\
&= 400 - 40a_2 + a_2^2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 \\
&\le 400 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{20})a_2 + a_2^2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 \\
&= 400 - a_1a_2 - a_3a_2 - a_4a_2 - \dots - a_{20}a_2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 \\
&= 400 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + \dots + (a_{20}^2 - a_{20}a_2) \\
&= 400 + a_2(a_2 - a_1) + a_3(a_3 - a_2) + \dots + a_{20}(a_{20} - a_2)
\end{aligned}
$$

Од условот имаме:

$$a_2 - a_1 \le 0,\ \ a_3 - a_2 \le 0,\ \dots,\ a_{20} - a_2 \le 0,$$

па затоа

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{20}^2 \le 400\,,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a_3 + a_4 + \dots + a_{20} = 20$ и

$$a_2(a_2 - a_1) = 0,\ \ a_3(a_3 - a_2) = 0,\ \dots,\ a_{20}(a_{20} - a_2) = 0\,,$$

т.е. ако и само ако

$$a_2 = 0\,,\ a_1 = 20\,,\ a_3 = a_4 = \dots = a_{20} = 0$$

или

$$a_2 = a_1 = 10\,,\ a_3 = a_4 = 10,\ \ a_5 = a_6 = \dots = a_{20} = 0$$

(за еквивалентен го сметаме секој случај на пермутација на индексите 3,4,..., 20).

21. Дадениот услов ќе го запишеме во облик

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0\,,$$

од каде добиваме $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$, односно $x = -1,\ y = 2$. Според тоа,

$$P(x,y) = P(-1,2) = (-1)^{2013} + 2013 \cdot 2 = 4025\,.$$

22. Да за бележиме дека за секој $a > 0$ важи $a + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a = 1$. Од последното неравенство при $a = y - 1 > 0$ и од условот $x + y^2 = xy$ добиваме $x(y-1) = y^2$, односно

$$x = \frac{y^2}{y-1} = \frac{y^2-1+1}{y-1} = \frac{(y-1)(y+1)+1}{y-1} = y + 1 + \frac{1}{y-1} = 2 + (y-1) + \frac{1}{y-1} \ge 2 + 2 = 4\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $y - 1 = 1$, т.е. $y = 2$. Значи, најмалата вредност е $x = 4$.

7. ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

7.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $f(x)=x^3+3x^2-4$. Пресметај ја вредноста на функцијата за $x=99998$.

Задача 2. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $f(x)=x$. Пресметај $f(f(f(f(1995))))$.

Задача 3. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{3x+1}{3-2x^3}$. Пресметај $f(1-a)$ и $f(\sqrt[3]{\frac{3}{2}})$.

Задача 4. Полиномот $P:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададен со $P(x)=x^2-2$.

а) Одреди го полиномот $P(P(x))$.

б) Разложи го полиномот $Q(x)=P(P(x))-x$ на множители.

Задача 5. Функциите $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ се зададени со $f(x)=ax$ и $g(x)=x+a$. За кои вредности на a важи

$$f(g(x))=g(f(x)), \text{ за секој } x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Задача 6. Одреди ја функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ако $f(x+3)=2x-5$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Задача 7. Функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $g(2x)=3-4x$. Пресметај $g(1995)$.

Задача 8. Дадена е функцијата $f(x)=x+2$. Најди функција $g(x)$, таква што $f(g(x))=3x$.

Задача 9. Дадена е функцијата $f(x)=x+2$. Најди функција $g(x)$, таква што $f(g(f(x)))=5x-1$.

Задача 10. За функциите $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

$$f(x)+g(x)=3x+1 \qquad (1)$$

$$f(x)-g(x)=x-1 \qquad (2)$$

за секој $x\in\mathbb{R}$. Пресметај $f(2)+g(3)$.

Задача 11. Пресметај $f(0)$ ако $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со

$$3f(x)+f(3x)=x+4, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Задача 12. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со

$$f(x)+5f(-x)=6x+12, \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Пресметај $f(1994)$ и $f(1996)$.

Задача 13. Ако за секој реален број $x\neq 0$ важи

$$f(x)+2f(\tfrac{1}{x})=3x \qquad (1)$$

пресметај $f(1)$ и $f(2)$.

Задача 14. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $f(x)=2x-1$. Определи реални броеви x и y такви што $f(f(x))=0$ и $f(f(y))=y$.

Задача 15. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $f(x)=x+2$. Определи ја функцијата $g(x)$ ако $f(2+g(x))=3x-1$.

Задача 16. Функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е зададена со $g(x)=3x+2$. Најди ја функцијата $f(x)$ ако

$$g(x^2+xf(x))=3x^2+6x+5,\ x\neq 0.$$

Задача 17. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

$$f(x+\tfrac{1}{x})=x^2+\tfrac{1}{x^2}+1995,$$

за секој $x\neq 0$. Пресметај $f(1), f(2)$ и $f(x)$.

Задача 18. Определи ги функциите $f(x)$ и $g(x)$ ако:

$$\begin{cases} f(\frac{x}{x-1})+g(2x+1)=2x \\ f(\frac{x}{x-1})-g(2x+1)=x \end{cases}, \text{ за } x\neq 1 \qquad (1)$$

Задача 19. Функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ за секој цел број x прима вредности во множеството на целите броеви. Докажи дека $2a,\ a+b$ и c се цели броеви.

Задача 20. Дадена е функцијата

$$f(x)=x^2+\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{x-1}{x+1},\ \text{за}\ x\neq 0\ \text{и}\ x\neq -1.$$

Пресметај $f(2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(a^2-1), f(\frac{1}{a}), f(\sqrt{a})$.

Задача 21. Дадени се функциите $f(x)=\frac{x^2-x}{2}+a$ и $\varphi(x)=\frac{x-x^2}{2}-a$, каде $a\in\mathbf{R}$. Докажи ги равенствата:

$$f(1+x)+\varphi(1-x)=x\ \text{ и }\ f(-x)+\varphi(1+x)=0.$$

Задача 22. Најди ја функцијата $f(x)$ ако:

а) $f(x-1)=x^2-5x+6$; б) $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$, $x\neq 0$;

в) $f(x^2)=\frac{1}{x}$, $x>0$.

Задача 23. Функцијата $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ е зададена со

$$f(x,y)=(x+3,y-2)$$

Пресметај $f(7,5)$, $f(a-3,b+2)$ и $f(f(x,y))$.

Задача 24. Функцијата $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ е зададена со

$$f(x,y)=(2x+3y,4x-y)$$

Пресметај $f(1,2), f(6,0), f(f(1,1))$ и $f(f(x,y))$.

Задача 25. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(xy)=xf(y)+f(x),\ \text{за секои}\ x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

Задача 26. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и нека $f(x+y)=f(xy)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Ако $f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, пресметај $f(2014)$.

Задача 27. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$(f(x))^2+f(x)f(y)=x^2+xy,\ \text{за секои}\ x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

Задача 28. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y,\ \text{за секои}\ x,y\in\mathbf{R}. \qquad (1)$$

Задача 29. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$. (3)

Задача 30. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$ такви што $x+y\neq 0$.

Задача 31. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи

1) $f(x)\leq x$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и

2) $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

Докажи дека $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Задача 32. Дадена е функцијата $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ таква што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи:

(1) $f(x,x)=x+2$;

(2) $f(x,y)=f(y,x)$;

(3) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$.

Пресметај $f(9,7)$.

Задача 33. Дадена е функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ таква што за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи $f(x+y)=f(xy)$. Ако $f(-0,5)=-0,5$, тогаш пресметај го $f(2003)$.

Задача 34. Одреди ја функцијата $f(x)$ ако важи:

$$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y.$$

Задача 35. Одреди ја функцијата $f(x)$ ако важи:

$$f(x+y)+f(x-y)-x^3-6xy\sqrt[3]{f(y)}=0.$$

Задача 36. Докажи дека за реалната функција $f\left(x\right)=x^{-2}$, за $x\neq 0$ важи релацијата

$f(x+1)+f(x-1)=\frac{2[1+f(x)]f(x-1)f(x+1)}{f(x)}$, за $x\notin\left\{-1,0,1\right\}$.

Задача 37. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$f(x+y)+f(x-y)-f(x)-x^3-6xy\sqrt[3]{f(y)}=0$, за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

Задача 38. Најди ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви да важи

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y) \text{, за секои } x,y\in\mathbf{R}.$$

Задача 39. Дадена е функцијата $f(x)=-x^2+2x+5$. За секоја точка $M(x,y)$ од нејзиниот график со M_x и M_y ги означуваме пресечните точки на нормалите спуштени од точката M соодветно кон апсцисата и ординатата.

а) Да се најдат сите точки $M(x,y)$ од графикот на дадената функција, кои се од првиот квадрант и за кои плоштината на четириаголникот OM_xMM_y е еднаква на 6.

б) Нека $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),...,M_n(x_n,y_n)$, се сите точки најдени под а) и нумерирани така што $x_1\le x_2\le...\le x_n$ и да означиме $M_n^{'}(x_n,-y_n)$. Да се најде плоштината на триаголникот $OM_n^{'}M_1$.

Задача 40. Нека точката C има апсциса 60 и нека лежи на графикот на функцијата $\frac{1}{2}x^2$. Познато е дека графикот на функцијата $y=ax-600$ минува низ точката C и ја сече апсцисната оска во точката A. Одреди ја плоштината на триаголникот AOC, каде со O е означен координатниот почеток.

Задача 41. Точките A, B, C лежат на графикот на функцијата $y=x^2$.

а) Ако апсцисите на овие точки се соодветно еднакви на 1, 2 и 3, да се пресмета плоштината на триаголникот ABC.

б) Да се докаже дека ако апсцисите на овие точки се соодветно еднакви на $x,\ x+1,\ x+2$, тогаш плоштината на триаголникот ABC не зависи од x.

Задача 42. Нека A е точка во првиот квадрант од графикот на функцијата $f(x)=x^{-1}$, конструиран во координатен систем со почеток O. Со B и C да ги означиме подножјата на нормалите спуштени од A кон апцисата и ординатата, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $OBAC$.

7.2. РЕШЕНИЈА

1. Имаме,

$$f(x)=x^3+3x^2-4=x^3-x^2+4x^2-4=x^2(x-1)+4(x-1)(x+1)$$
$$=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2$$

Значи, $f(99998)=(99998-1)(99998+2)^2=99997\cdot 10^{10}$.

2. Од $f(x)=x$ имаме $f(1995)=1995$. Сега, очигледно

$$f(f(f(f(1995))))=f(f(f(1995)))=f(f(1995))=f(1995)=1995.$$

3. Функцијата $f(x)$ е дефинирана за $3-2x^3\neq 0$, т.е. $x^3\neq\frac{3}{2}$, односно $x\neq\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Значи, $f(\sqrt[3]{\frac{3}{2}})$ не постои бидејќи во $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ функцијата не е дефинирана.

За $1-a\neq\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, т.е. $a\neq 1-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ имаме

$$f(1-a)=\frac{3(1-a)+1}{3-2(1-a)^3}=\frac{4-3a}{1+6a-6a^2+2a^3}.$$

4. а) Имаме, $P(P(x))=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2$

б) За полиномот $Q(x)$ добиваме

$$Q(x)=x^4-4x^2-x+2=x^2(x^2-4)-(x-2)=(x-2)(x^2(x+2)-1)$$
$$=(x-2)(x^3+2x^2-1)=(x-2)(x^2(x+1)+(x-1)(x+1))$$
$$=(x-2)(x+1)(x^2+x-1)=(x-2)(x+1)((x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{5}{4})$$
$$=(x-2)(x+1)((x+\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2).$$
$$=(x-2)(x+1)(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}).$$

5. Од релацијата (1) добиваме $f(x+a)=g(ax)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, т.е.

$$a(x+a)=ax+a\text{, за секој } x\in\mathbf{R}.$$

За $x=0$ се добива $a^2-a=0$ или $a(a-1)=0$. Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од нив е еднаков на нула, па затоа $a=0$ или $a=1$.

6. Воведуваме смена $x+3=t$, т.е. $x=t-3$ и добиваме

$$f(t)=2(t-3)-5=2t-11.$$

7. Нека $2x=t$. Тогаш $g(t)=3-2t$, па затоа

$$g(1995)=3-2\cdot 1995=-3987.$$

8. Имаме, $f(g(x))=g(x)+2$. Со замена во дадената релација добиваме $g(x)+2=3x$, т.е. бараната функција е $g(x)=3x-2$.

9. Имаме,

$$f(g(f(x)))=g(f(x))+2=g(x+2)+2.$$

Со замена во дадената релација добиваме

$$g(x+2)+2=5x-1,\text{ т.е. } g(x+2)=5x-3.$$

Ставаме $x+2=t$, т.е. $x=t-2$ и добиваме $g(t)=5(t-2)-3=5t-13$. Значи бараната функција е $g(x)=5x-13$.

10. Ако ги собереме (1) и (2) добиваме $2f(x)=3x+1+x-1=4x$, т.е. $f(x)=2x$. Ако ги одземеме (1) и (2) добиваме

$$2g(x)=3x+1-(x-1)=2x+2 \text{ т.е. } g(x)=x+1.$$

Сега , $f(2)=2\cdot 2=4$ и $g(3)=3+1=4$, па $f(2)+g(3)=8$.

11. Имаме $3f(0)+f(3\cdot 0)=0+4$, т.е. $4f(0)=4$. Значи, $f(0)=1$.

12. За $x=t$ добиваме

$$f(t)+5f(-t)=6t+12. \qquad (1)$$

За $x=-t$ добиваме

$$f(-t)+5f(t)=-6t+12 \qquad (2)$$

Решавајќи го системот составен од равенките (1) и (2) по непознатите $f(t)$ и $f(-t)$ добиваме $f(t)=-\frac{3}{2}t+2$.

Конечно,

$$f(1994)=-\frac{3}{2}\cdot 1994+2=-2989,\ f(1996)=-\frac{3}{2}\cdot 1996+2=-2992.$$

13. *Прв начин.* За $x=1$ добиваме $f(1)+2f(\frac{1}{1})=3\cdot 1=3$

т.е. $3f(1)=3$, па значи $f(1)=1$. Ако во (1) ставиме $x=2$ добиваме

$$f(2)+2f(\tfrac{1}{2})=6, \qquad (2)$$

а за $x=\frac{1}{2}$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{2})+2f(2)=\tfrac{3}{2}. \qquad (3)$$

Решавајќи го системот составен од равенките (2) и (3) по непознати $f(2)$ и $f(\frac{1}{2})$ наоѓаме $f(2)=-1$.

Втор начин. Ако во (1) последователно ставиме $x=t$ и $x=\frac{1}{t}$ го добиваме системот:

$$\begin{cases} f(t)+2f(\frac{1}{t})=3t \\ f(\frac{1}{t})+2f(t)=\dfrac{3}{t} \end{cases} \qquad (4)$$

Решавајќи го системот (4) по непознати $f(t)$ и $f(\frac{1}{t})$ наоѓаме $f(t)=\frac{2}{t}-t$.

Значи, $f(1)=\frac{2}{1}-1=1$ и $f(2)=\frac{2}{2}-2=-1$.

14. Ако е $f(x)=2x-1$, тогаш

$$f(f(x))=f(2x-1)=2(2x-1)-1=4x-3.$$

Од $f(f(x))=0$ добиваме $4x-3=0$, т.е. $x=\frac{3}{4}$. Ако $f(f(y))=y$, тогаш $4y-3=y$, т.е. $y=1$.

15. Ако $f(2+g(x))=3x-1$, тогаш

$$g(x)+2+2=3x-1, \text{ т.е. } g(x)=3x-5.$$

16. Од $g(x)=3x+2$, добиваме

$$3x^2+6x+5=g(x^2+xf(x))=3(x^2+xf(x))+2, \ x\neq 0.$$

Значи,

$$3x^2+3xf(x)+2=3x^2+6x+5, \ x\neq 0, \text{ т.е. } 3xf(x)=6x+3, \ x\neq 0.$$

Конечно, $f(x)=2+\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

17. Имаме,

$$f(x+\tfrac{1}{x})=x^2+\tfrac{1}{x^2}+1995=(x+\tfrac{1}{x})^2-2+1995=(x+\tfrac{1}{x})^2+1993.$$

Значи, $f(t)=t^2+1993$. Јасно,

$$f(1)=1^2+1993=1994, \ f(2)=2^2+1993=1997 \text{ и } f(x)=x^2+1993.$$

18. Решавајќи го системот (1) по непознати $f(\frac{x}{x-1})$ и $g(2x+1)$ наоѓаме $f(\frac{x}{x-1})=\frac{3}{2}x$, $x\neq 1$ и $g(2x+1)=\frac{1}{2}x$. Ако во $f(\frac{x}{x-1})=\frac{3}{2}x$, $x\neq 1$ замениме $t=\frac{x}{x-1}$, т.е. $x=\frac{t}{t-1}$ наоѓаме $f(t)=\frac{3t}{2(t-1)}$, $t\neq 1$. Ако во $g(2x+1)=\frac{1}{2}x$ замениме $z=2x+1$ т.е. $x=\frac{z-1}{2}$ наоѓаме $g(z)=\frac{z-1}{2}$. Значи, $f(x)=\frac{3x}{2(x-1)}$, $x\neq 1$ и $g(x)=\frac{x-1}{4}$.

19. Бидејќи функцијата $f(x)$ за секој цел број x прима целобројни вредности, добиваме дека $f(0)=c$ е цел број. Но,

$$f(1)=a+b+c \text{ и } f(-1)=a-b+c$$

се исто така цели броеви. Значи $f(1)-f(0)=a+b$ е цел број и

$$f(1)+f(-1)=2a+2c$$

е цел број. Бидејќи $2c$ е цел број добиваме дека и $2a$ е цел број.

20. Функцијата $f(x)$ е дефинирана за $x\neq 0$ и $x\neq -1$. Имаме,

$$f(2)=2^2+\frac{1}{2^2}+\frac{2-1}{2+1}=\frac{55}{12},\quad f(\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{47}{12},$$

$$f(a)=a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{a-1}{a+1}, \text{ за } a\neq 0 \text{ и } a\neq -1,$$

$$f(a^2-1)=(a^2-1)^2+\frac{1}{(a^2-1)^2}+\frac{a^2-1-1}{a^2-1+1}=(a^2-1)^2+\frac{1}{(a^2-1)^2}+\frac{a^2-2}{a^2},$$

за $a^2-1\neq 0$ и $a^2-1\neq -1$, т.е. $a\neq 0$ и $a\neq \pm 1$.

За $a\neq 0$ и $\frac{1}{a}\neq -1$, т.е. за $a\neq 0$ и $a\neq -1$ добиваме

$$f(\tfrac{1}{a})=(\tfrac{1}{a})^2+\frac{1}{(\frac{1}{a})^2}+\frac{\frac{1}{a}-1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{1}{a^2}+a^2+\frac{1-a}{1+a}.$$

За $a>0$ добиваме:

$$f(\sqrt{a})=(\sqrt{a})^2+\frac{1}{(\sqrt{a})^2}+\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}.$$

21. Имаме,

$$\begin{aligned} f(1+x)+\varphi(1-x)&=\frac{(1+x)^2-(1+x)}{2}+a+\frac{1-x-(1-x)^2}{2}-a\\ &=\frac{1+x}{2}[1+x-1]+\frac{1-x}{2}[1-(1-x)]\\ &=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x(1-x)}{2}=x. \end{aligned}$$

$$f(-x)+\varphi(1+x)=\frac{(-x)^2-(-x)}{2}+a+\frac{1+x-(1+x)^2}{2}-a$$
$$=\frac{x^2+x}{2}+\frac{1+x}{2}[1-(1+x)]$$
$$=\frac{x^2+x}{2}-\frac{x^2+x}{2}=0.$$

22. а) Ставаме $x-1=t$, т.е. $x=t+1$ и добиваме

$$f(t)=(t+1)^2-5(t+1)+6=t^2-3t+2,$$

т.е. бараната функција е $f(x)=x^2-3x+2$.

б) Ја воведуваме смената $\frac{1}{x}=t$ и добиваме

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}},\ t\neq 0.$$

Значи бараната функција е $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0$.

в) Од $x>0$ и $x^2=t,\ \ t>0$ добиваме $x=\sqrt{t},\ \ t>0$. Според тоа $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}},\ t>0$, односно бараната функција е $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ \ x>0$.

23. Имаме,

$$f(7,5)=(7+3,5-2)=(10,3)$$
$$f(a-3,b+2)=(a-3+3,b+2-2)=(a,b)$$

$$f(f(x,y))=f(x+3,y-2)=(x+3+3,y-2-2)=(x+6,y-4).$$

24. Имаме,

$$f(1,2)=(2\cdot 1+3\cdot 2,4\cdot 1-2)=(8,2);$$
$$f(6,0)=(2\cdot 6+3\cdot 0,4\cdot 6-0)=(12,24)$$
$$f(f(1,1))=f(2\cdot 1+3\cdot 1,4\cdot 1-1)=f(5,3)=(2\cdot 5+3\cdot 3,5\cdot 4-3)=(19,17)$$
$$f(f(x,y))=f(2x+3y,4x-y)$$
$$=(2(2x+3y)+3(4x-y),4(2x+3y)-(4x-y))$$
$$=(16x+3y,4x+13y).$$

25. Ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=f(0)-xf(0)$. Нека $a=f(0)$. Тогаш $f(x)=a-ax$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на функционалната равнка (1) за секој $a\in\mathbf{R}$.

26. Од условот на задачата следува
$$f(x)=f(x+0)=f(x\cdot 0)=f(0).$$
Ако во последната равенка ставиме $x=-\frac{1}{2}$ добиваме $f(0)=f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, па затоа $f(x)=f(0)=-\frac{1}{2}$. Конечно, за $x=2014$ имаме $f(2014)=-\frac{1}{2}$.

27. За $x=y=1$ од (1) добиваме $2(f(1))^2=2$, па затоа $f(1)=1$ или $f(1)=-1$. Ако сега во (1) ставиме $x=1$ наоѓаме $f(y)=y$ или $f(y)=-y$, за секој $y\in\mathbf{R}$. Непосредно се проверува дека функциите $f(x)=x$ и $f(x)=-x$ се решенија на равенката (1).

28. Нека $y=0$. Со замена во (1) добиваме
$$f(0)(f(x)-1)=x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \qquad (2)$$
Од последната равенка следува дека $f(0)\neq 0$, бидејќи во спротивно левата страна на (2) би била еднаква на 0, а десната страна е произволен реален број, што не е можно. Сега, од (2) добиваме $f(x)=\frac{x}{f(0)}+1$. Ако во последната равенка ставиме $x=0$ добиваме $f(0)=1$, што значи дека единствено решение на дадената равенка е $f(x)=x+1$.

29. Ако во (3) ставиме $y=0$ добиваме $4f(x)+2f(0)=4x$. Земаме $f(0)=a$ и добиваме $f(x)=x-\frac{a}{2}$. Понатаму, со замена во равенката (3) добиваме
$$x+y-\tfrac{a}{2}+2(x-y-\tfrac{a}{2})+x-\tfrac{a}{2}+2(y-\tfrac{a}{2})=4x+y,$$
од каде наоѓаме $a=0$. Според тоа, единствено решение на равенката (3) е функцијата $f(x)=x$.

30. За $y=1, x\neq -1$ имаме
$$f(x)=\frac{f(x)+f(1)}{x+1}, \text{ т.е. } xf(x)=f(1).$$
Ако во последната равенка ставиме $x=0$ добиваме $f(1)=0$. Значи, за $x\neq 0, x\neq -1$ имаме $f(x)=0$. Сега, бидејќи $f(2)=0$, ако во дадената равенка ставиме $y=0, x=2$ добиваме
$$f(0)=\frac{f(2)+f(0)}{2}, \text{ т.е. } f(0)=f(2)=0.$$
Конечно, ако во дадената равенка ставиме $y=0, x=-1$, добиваме

$f(0)=\frac{f(-1)+f(0)}{-1}$, т.е. $f(-1)=-2f(0)=0$.
Значи, $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

31. Од $f(0+0)\le f(0)+f(0)$ следува $2f(0)\ge f(0)$, т.е. $f(0)\ge 0$. Понатаму, од $f(x+(-x))\le f(x)+f(-x)$ добиваме

$$f(x)\ge f(0)-f(-x)\ge 0-f(-x)\ge -(-x)=x,$$

што заедно со условот 1) дава $f(x)=x$.

8. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

8.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Дадени се правите p,q и r чии равенки се:

$$p:3x-7y+5=0,\ q:12x+5y-46=0 \text{ и } r:3x+4y+16=0.$$

Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот што го формираат правите p, q и r.

Задача 2. Дадени се правите

$$a:y=-3x+15,\ b:y=x-5,\ c:y=-5x+37 \text{ и } d:y=2x-5.$$

Правите a и b се сечат во точката B, правите b и c во точката C, правите c и d во точката D и правите d и a во точката A. Одреди ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Задача 3. Два моторни чамци се наоѓаат на различни места во Охридското езеро: првиот во местото со координати $x=1, y=2$, а вториот во местото со координати $x=14, y=8$. Чамците тргнуваат истовремено со еднакви брзини. Првиот чамец се движи по правата $y=\frac{12}{5}x-\frac{2}{5}$, а вториот по правата $y=-\frac{3}{4}x+\frac{37}{2}$. Дали чамците ќе се судрат?

Задача 4. Правите $x-y=-1$, $x+y=8$ и $x-2y=2$ и двете координатни оски формираат петаголник. Одреди го волуменот на ротационото тело кое се добива со ротација на овој петаголник околу $x-$оската?

Задача 5. Во правоголен координатен систем нацртај ги правите p_1 и p_2 чии равенки се $p_1:y=x-4$ и $p_2:y=2x-2$. Пресметај ги плоштината на фигурата која ја образуваат правите p_1 и p_2 со координатните оски и волуменот на ротационото тело кое се добива кога триаголникот ограничен со правите p_1 и p_2 и $y-$оската ротира околу $y-$оската.

Задача 6. Дадени се линеарните функции

$$y=-1,\ y=\tfrac{3}{2}x-4,\ y=\tfrac{1}{4}x+\tfrac{7}{2} \text{ и } y=2x+7.$$

Одреди ги координатите на темињата и плоштината на четириаголникот кој го ограничуваат графиците на дадените функции.

Задача 7. Триаголникот ABC е определен со апсцисната оска и со правите p и q чии равенки се $3x-4y=-24$ и $2x-1{,}5y=-9$, соодветно. Пресметај ја плоштината на телото кое се добива со ротација на триаголникот ABC околу апцисната оска.

Задача 8. Дадени се правите $p:3x-4y=-9$ и $s:3x+4y=15$, кои со $x-$оската формираат триаголник ABC. Одреди го растојанието меѓу тежиштето на триаголникот ABC и центарот на впишаната кружница во него.

Задача 9. Во рамнински координатен систем претстави го множеството точки (x,y) чии координати го задоволуваат условот

$$7^{x+y}=7^{x+2}\cdot 7^{2x+1},$$

а потоа одреди ги координатите на точката од тоа множество која е најблиска до координатниот почеток.

Задача 10. Правата $y=ax+b$ минува низ точката $T(0,6)$, со координатните оски формира триаголник со плоштина 24 и не минува низ третиот квадрант.

а) одреди ги a и b,

б) одреди ги волуменот и плоштината на телото кое се добива со ротација на споменатиот триаголник околу најголемата страна.

Задача 11. Правите p и q се дадени со равенките

$$p: mx+(2m+3)y+m+6=0,\ q:(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0,$$

каде $m\neq 1$ и $m\neq -\frac{3}{2}$. За кои вредности на m овие прави се сечат на ординатната оска?

Задача 12. Дадена е функцијата $y=mx-(3m+4)$, каде m е решение на равенката

$$\frac{m+1}{5}+\frac{2m-3}{15}+1=m-\frac{m-2}{6}. \qquad (1)$$

а) Нацртај го графикот на дадената функција,

б) Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата која ја формираат оските на координатниот систем и графикот на функцијата.

Задача 13. Правата $y=-\frac{3}{4}x+n$, која минува низ точката $M(-3,6)$ со правата $y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$ и $x-$оската формираат триаголник ABC. Пресметај ги плоштината и периметарот на триаголникот ABC.

Задача 14. Правата p минува низ точките $K(2,-4)$ и $S(-1,4)$.

а) Состави ја равенката на таа права.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот формиран од правата p и координатните оски.

Задача 15. Дадена е функцијата $y=(2m+1)x+6$.

а) Пресметај го параметарот m така што нејзиниот график да поминува низ точката $M\left(4,3\right)$.

б) Одреди ја оддалеченоста на точката $M_1(-1,-1)$ од дадената права.

Задача 16. Дадена е функцијата $y=(m+\frac{1}{4})x+(1-2m)$.

а) Одреди ја вредноста на параметарот m,така што графикот на функцијата да ја содржи точката $A(-4,6)$.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот кој графикот на функцијата го формира со координатните оски.

в) Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на овој триаголник околу y-оската.

Задача 17. Одреди ја равенката на правата p која е симетрична на правата $p_1: 84x+35y+245=0$ во однос на правата $y=-x$. Потоа одреди ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на ΔAOB околу AB, при што A е пресекот на y-оската и p_1, а B е пресекот на p_1 и $y=-x$ и O е координатниот почеток.

Задача 18. Дадена е функцијата $y=mx-2n$. Најдете ги m и n така што производот $m\cdot n$ е најмал и точката $A(1,-8)$ лежи на графикот на функцијата.

Задача 19. а) Одреди го параметарот m така што точката $A(4,-3)$ припаѓа на графикот на функцијата

$$y=\frac{(m-2)x}{m-1}+\frac{2m-34}{m-1}\,. \tag{1}$$

б) Напиши ја равенката на правата симетрична на добиената права во однос на y-оската.

в) Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација околу x-оската на триаголникот одреден со овие две прави и x-оската.

Задача 20. За кои вредности на параметарот a графиците на функциите $2x+3ay=0$ и $7x-5y=2$ се паралелни?

Задача 21. Определи ја вредноста на параметарот n, така што за секоја точка (x,y) од графикот на функцијата $y=-x+n$ важат следните равенства $y=\frac{5}{x}$ и $y^2=6-x^2$. Потоа, пресметај ја плоштината на делот од рамнината што го образуваат координатните оски и графикот на функцијата.

Задача 22. Графиците на две линеарни функции ги сечат координатните оски во точките $A(0,-3)$ и $B(0,5)$. Пресечната точка на двата графици е $C(5,1)$. Пресметај ги плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот ABC околу

а) апсцисата, б) ординатата.

Задача 23. Во рамнината на координатниот систем xOy се дадени точките $A(-1,-1)$ и $B(0,2)$. Точката C е пресечната точка на графиците на функциите $f(x)=x$ и $g(x)=2x-2$. Определи ги

а) координатите на точката C,

б) плоштината на триаголникот ABC.

Задача 24. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $f(x)=2$, $g(x)=x+3$, $h(x)=-2$ и $t(x)=3-x$.

а) Определи ги координатите на нивните пресечни точки.

б) Пресметај ги плоштината и периметарот на фигурата ограничена со овие четири функции.

Задача 25. Дадена е функцијата $y=2x+4$. Одреди ги:

а) координатите на пресечните точки A и B на графикот на функцијата со апцисната и ординатната оска, соодветно; и

б) плоштината и волуменот на телото добиено со ротација на триаголникот ABO околу страната BO, каде O е координатниот почеток.

Задача 26. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y=3-x$, $y=2$, $y=x+2$, $y=-1$ и $2y=x$. Пресметај ја плоштината на многуаголникот ограничен со графиците на дадените функции.

Задача 27. Дадена е функцијата $y=(m^2-2)x+4m^2-8$.

а) Определи ја вредноста m така да точката $A(-3,7)$ припаѓа на графикот на функцијата.

б) За $m=\sqrt{3}$ пресметај го растојанието од координатниот почеток до соодветната права.

Задача 28. Дадена е функцијата $y=(2a-3b-\frac{4}{3})x+4a-6b+4$. Нацртај го графикот на функцијата за оние вредности на a и b за кои изразот $A=\frac{2}{4a^2-12ab+9b^2+4}$ прима најголема вредност.

Задача 29. Дадени се функциите
$$f(x)=(2m-0,5)x-3 \text{ и } g(x)=(7m+2)x-4.$$
Да се определи вредноста на реалниот број m така да:

а) Графиците на функциите се паралелни

б) $f(x)$ е опаѓачка, а $g(x)$ е растечка функција

Задача 30. Дадена е права p со равенка: $y=kx+n$, каде подредениот пар (k,n) е решение на равенката $9x^2+y^2+24x-8y+32=0$. Пресметај ги:

а) плоштината на триаголникот кој правата p го формира со координатните оски,

б) растојанието од координатниот почеток до правата p.

Задача 31. Дадена е функцијата $f(x)=3x-2$.

а) Најди ја функција $g(x)$ таква да $f(2x-g(x))=-3(1+2m)x+34$.

б) Реши ја равенката $g(x)=(4m-1)x-4(1+m), m\in\mathbf{R}$.

в) Ако графикот на функцијата $y=g(x)$ минува низ точката

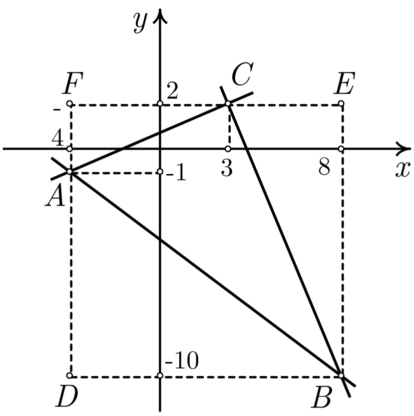
$A(6,-4)$ најди го растојанирто од координатниот почеток до тој график.

Задача 32. За линеарната функција $f(x) = ax + b$ важи

$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(10) = 10$ и $f(1) - f(2) + f(3) - ... - f(10) = -10$.

Колку е $f(100)$?

8.2. РЕШЕНИЈА



цртеж 1

1. Темињата A, B и C на триаголникот ги одредуваме решавајќи ги системите

$$(1) \quad \begin{cases} 3x - 7y + 5 = 0 \\ 3x + 4y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x + 4y + 16 = 0 \\ 12x + 5y - 46 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 3x - 7y + 5 = 0 \\ 12x + 5y - 46 = 0 \end{cases}$$

и соодветно добиваме

$A(-4,-1)$, $B(8,-10)$ и $C(3,2)$.

Користејќи ја Питагоровата теорема за ΔABD (цртеж 1) имаме

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = 15.$$

Аналогно, од ΔBCE и ΔACF имаме

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{58} \text{ и } \overline{BC} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2} = 13.$$

Периметарот на ΔABC е

$$L = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 28 + \sqrt{58}.$$

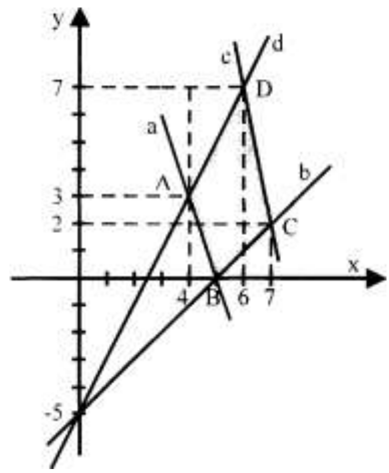
За плоштината на ΔABC имаме:

$$P_{ABC} = P_{DBEF} - P_{ABD} - P_{BCE} - P_{ACF}$$
$$= 12^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 9 - \tfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 - \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7 = 49,5$$

2. Координатите на темињата A,B, C и D ги наоѓаме како решенија на системите:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3x + 15 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5x + 37 \\ y = x - 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -5x + 37 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$



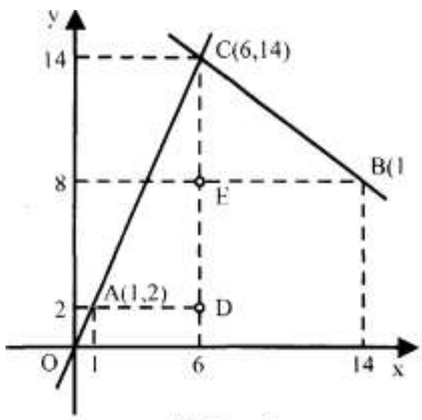
и добиваме $A(4,3)$, $B(5,0)$, $C(7,2)$ и $D(6,7)$. Околу четириаголникот $ABCD$ ќе "опишеме" правоаголник чија плоштина лесно ја наоѓаме, а потоа од оваа плоштина ги одземаме плоштините на "надворешните" триаголници (цртеж десно). Плоштината на "опишаниот" правоаголник е

$$P_1 = 3 \cdot 7 = 21,$$

а збирот на плоштините на четирите "надворешни" триаголници е

$$P_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 10.$$

Конечно, плоштината на четириаголникот $ABCD$ е: $P = P_1 - P_2 = 11$.



Цртеж 3

3. Со $A(1,2)$ и $B(14,8)$ да ги означиме почетните положби на чамците и тоа да го прикажеме на координатен систем xOy (цртеж 3). Правите по кои се движат овие чамци се AC и BC каде C е пресек на правите

$$y = \tfrac{12}{5} x - \tfrac{2}{5} \text{ и } y = -\tfrac{3}{4} x + \tfrac{37}{2}.$$

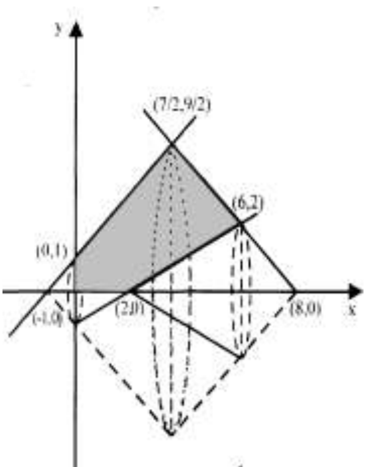
Имаме, $C(6,14)$. Бидејќи чамците се движат со еднакви брзини тие ќе се судрат ако $\overline{AC} = \overline{BC}$. Но

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (14-2)^2} = 13 \text{ и}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EC}^2} = \sqrt{(14-6)^2 + (14-8)^2} = 10.$$

Значи, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, па затоа чамците нема да се судрат.

4. Добиениот петаголник е шрафиран на цртеж 4. Координатите на темињата се добиваат во пресеците на соодветните прави. На пример, точката $(0,1)$ е пресек на y -оската ($x = 0$) и правата $x - y = -1$. Координа-



цртеж 4

тите на точката $(\frac{7}{2},\ \frac{9}{2})$ ги добиваме решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=8 \end{cases}.$$

Бараниот волумен е:

$$V=\tfrac{1}{3}(\tfrac{9}{2})^2\pi\cdot\tfrac{9}{2}+\tfrac{1}{3}(\tfrac{9}{2})^2\pi\cdot\tfrac{9}{2}$$
$$-\tfrac{1}{3}2^2\pi\cdot 2-\tfrac{1}{3}2^2\pi\cdot 4-\tfrac{1}{3}\cdot 1^2\pi\cdot 1\,.$$
$$=\tfrac{629\pi}{12}$$

5. а) Правата p_1 ги сече координатните оски во точки $A(4,0)$ и $B(0,-4)$, (цртеж 5) а правата p_2 во точки $C(1,0)$ и $D(0,-2)$. Значи:

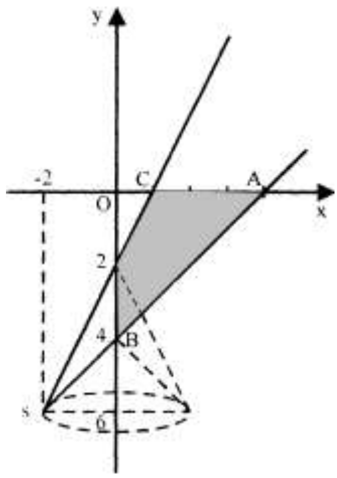
$$P_{ABCD}=P_{OAB}-P_{ODC}=\tfrac{4\cdot 4}{2}-\tfrac{2\cdot 1}{2}=7\,.$$

б) Бараниот волумен е еднаков на разликата на волумените на два конуси со врвови D и B. Притоа, точката S е пресек на правите p_1 и p_2, т.е. нејзините координати се решение на системот

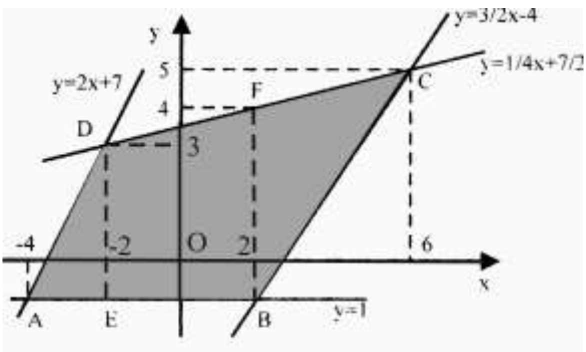
$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=2x-2 \end{cases},$$

па $S(-2\ ,\ -6)$. Значи,

$$V=V_1-V_2=\tfrac{2^2\pi\cdot 4}{3}-\tfrac{2^2\pi\cdot 2}{3}=\tfrac{8\pi}{3}\,.$$



цртеж 5



цртеж 6

6. Со A,B,C,D да ги означиме темињата (цртеж 6). Нивните координати се: $A(-4,-1)$, $B(2,-1)$, $C(6,5)$ и $D(-2,3)$. Координатите на точката E се $E(-2\ ,\ -1)$, а за координатите на F имаме

$$x = 2 \text{ и } y = \tfrac{1}{4} \cdot 2 + \tfrac{7}{2} = 4 .$$

За плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме

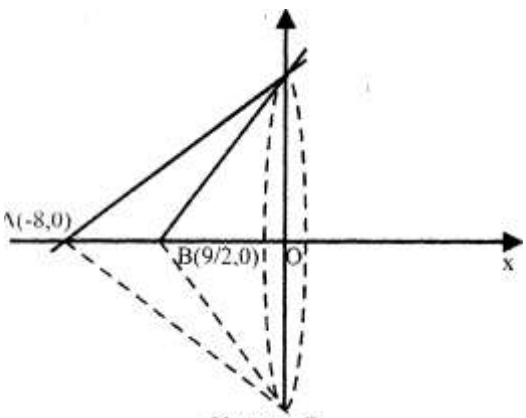
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{AED} + P_{EBFD} + P_{BCF} \\ &= \frac{\overline{AE} \cdot \overline{ED}}{2} + \frac{\overline{ED} + \overline{BF}}{2} \cdot \overline{EB} + \frac{\overline{BF} \cdot h_{BF}}{2} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4+5}{2} \cdot 4 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 32. \end{aligned}$$

7. Координатите на темињата на триаголникот ABC ги добиваме решавајќи ги системите

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 1,5y = -9 \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 2x - 1,5y = -9 \end{cases}.$$

Оттука

$$A(-8,\ 0),\ B(-\tfrac{9}{2},\ 0) \text{ и } C(0,\ 6).$$



Цртеж 7

При ротација на триаголникот ABC околу x-оската (цртеж 7) се добива конус, од кој е изваден друг конус, со заеднички радиус и со помала висина. Плоштината на телото се состои од двете обвивки на тие конуси. Да ги пресметаме изводниците $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ на овие конуси. Имаме:

$$s_1 = \overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} = 10 \text{ и}$$

$$s_2 = \overline{BC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2} = 7,5 .$$

Бидејќи $r = \overline{OC} = 6$ добиваме

$$P = \pi r s_1 + \pi r s_2 = 6\pi(10 + 7,5) = 105\pi .$$

8. Темето A на триаголникот е пресек на $x-$оската и правата p. Имаме

$$\begin{cases} 3x - 4y = -9 \\ y = 0 \end{cases},$$

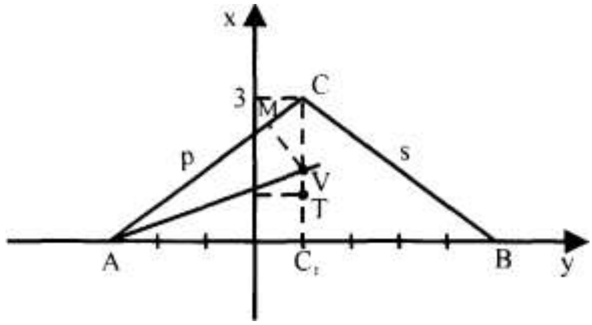
т.е. $A(-3\ ,\ 0)$. Слично, темето B е пресек на x-оската и правата s. Имаме

$$\begin{cases} 3x+4y=15 \\ y=0 \end{cases},$$

т.е. $B(5,0)$.Темето С е во пресекот на правите p и s , т.е.

$$\begin{cases} 3x-4y=-9 \\ 3x+4y=15 \end{cases}.$$

Значи, $C(1,3)$. Сега CC_1 е тежишна линија во триаголникот ABC (цртеж 8) и бидејќи $\overline{CT}:\overline{TC_1}=2:1$ и $\overline{CC_1}=3$ добиваме дека координатите на тежиштето T се $T(1\ ,\ 1)$. Центарот V на впишаната кружница е на правата CC_1, која е симетрала на аголот ACB. Од



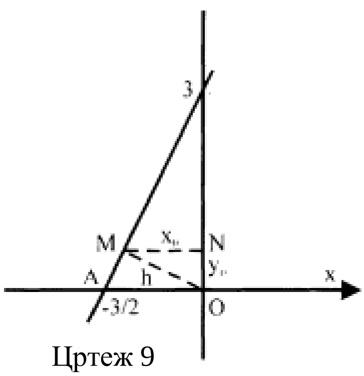
Цртеж 8

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AC_1}^2+\overline{CC_1}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

и од сличноста на ΔACC_1 и ΔVMC, следува дека

$$\overline{CC_1}:\overline{AC_1}=\overline{CM}:\overline{VM} \qquad (1)$$

Бидејќи ΔAMV и ΔAC_1V се складни заклучуваме дека $\overline{AM}=\overline{AC_1}=4$, па затоа $\overline{CM}=\overline{AC}-\overline{AM}=5-4=1$. Сега од (1) добиваме $3:4=1:\overline{VM}$, т.е. $\overline{VM}=\frac{4}{3}$. Значи, $\overline{VC_1}=\overline{VM}=\frac{4}{3}$. Конечно $\overline{VT}=\overline{VC_1}-\overline{TC_1}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.



Цртеж 9

9. Даденото равенство можеме да го запишеме во видот $7^{x+y}=7^{3x+3}$, од што добиваме $x+y=3x+3$, односно $y=2x+3$. Значи, бараното множество е права чија равенка е $y=2x+3$ (цртеж 9).

Треба да се определат координатите на точката *M*, подножјето на нормалата од *O* на *AB*. Од ΔOMN можеме да го изразиме најмалото растојание од координатниот почеток до правата *AB* (тоа е висината $\overline{OM}=h$ во триаголникот *AOB)* како зависност од координатите x_0 и y_0 на точката

M, т.е. $h^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2$. Бидејќи точката M лежи на правата $y=2x+3$, добиваме дека $y_0 = 2x_0 + 3$, па е

$$h^2 = {x_0}^2 + (2x_0+3)^2, \text{ т.е. } h^2 = 5{x_0}^2 + 12x_0 + 9.$$

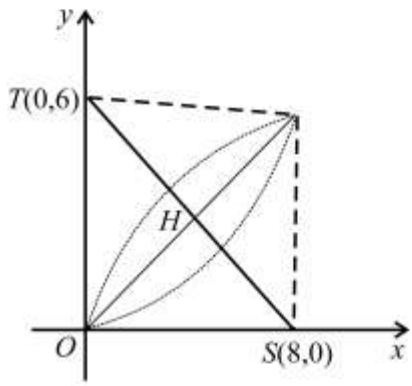
Значи,

$$h^2 = 5({x_0}^2 + 2\cdot\tfrac{6}{5}x_0 + (\tfrac{6}{5})^2 - (\tfrac{6}{5})^2) + 9 = 5(x_0 + \tfrac{6}{5})^2 + \tfrac{9}{5}. \qquad (1)$$

Бидејќи висината h е најмалото растојание од координатниот почеток до правата AB треба да најдеме x_0 така што h^2 да е најмал. Изразот од десната страна во (1) е минимален ако $x_0 + \frac{6}{5} = 0$, т.е. $x_0 = -\frac{6}{5}$.

Сега за y_0 добиваме $y_0 = -2\cdot\frac{6}{5} + 3 = \dfrac{3}{5}$ и координатите на точката M се: $x_0 = -\frac{6}{5},\ y_0 = \frac{3}{5}$.

10. а) Триаголникот OST (цртеж 10) е правоаголен, па затоа неговата плоштина е $P = \frac{1}{2}\overline{OT}\cdot\overline{OS}$. Со замена $P=24$ и $\overline{OT} = 6$ добиваме $24 = 3\cdot\overline{OS}$, т.е. $\overline{OS} = 8$. Значи, точките $T(0,6)$ и $S(8,0)$ лежат на правата $y = ax + b$. Заменувајќи ги променливите x и y со координатите на точката T, а потоа со координатите на точката S добиваме $b = 6$ и $0 = 8a + b$, т.е. $b = 6$ и $a = -\frac{3}{4}$.



цртеж 10

б) Со ротација околу најдолгата страна на триаголникот се добиваат два конуси со радиус $\overline{OH}$ и висини $\overline{TH}$ и $\overline{HS}$. Да ја одредиме $\overline{ST}$. Имаме

$$\overline{ST} = \sqrt{\overline{OT}^2 + \overline{OS}^2} = 10.$$

Од друга страна $P = \frac{\overline{ST}\cdot\overline{OH}}{2}$, па

$$\overline{OH} = \frac{2P}{\overline{ST}} = \frac{2\cdot 24}{10} = 4{,}8.$$

Плоштината на телото е

$$P = \pi\overline{OH}\cdot\overline{OT} + \pi\overline{OH}\cdot\overline{OS} = 67{,}2\pi$$

а волуменот е

$$V=\frac{\pi}{3}\overline{OH}^2\cdot\overline{SH}+\frac{\pi}{3}\overline{OH}^2\cdot\overline{TH}$$
$$=\frac{\pi}{3}\overline{OH}^2\cdot\overline{ST}$$
$$=\frac{\pi}{3}\cdot 4,8^2\cdot 10=76,8\pi.$$

11. Нека $P(0,\ y_1)$ е пресекот на правите. Од равенката на правата p добиваме $(2m+3)y_1+m+6=0$, т.е. $y_1=\frac{-m-6}{2m+3}$. Од равенката на правата q добиваме $(m-1)y_1+m-2=0$, т.е. $y_1=\frac{-m+2}{m-1}$. Според тоа $\frac{-m+2}{m-1}=\frac{-m-6}{2m+3}$, па затоа

$$(-m-6)(m-1)=(-m+2)(2m+3) \text{ или } m^2-6m=0\,.$$

Бидејќи $m(m-6)=0$ ако и само ако m = 0 или m = 6 добиваме дека за $m_1=0$ правите се сечат во точката $P_1(0,-2)$, а за $m_2=6$ тие се сечат во точка $P_2(0,-\frac{4}{5})$.

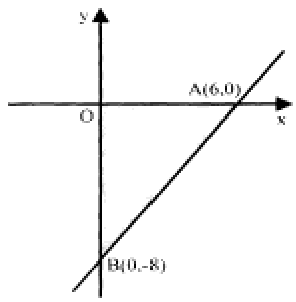
12. а) Да го одредиме параметарот *m*. Од (1) имаме

$$\frac{3(m+1)+2m-3+15}{15}=\frac{6m-m+2}{6}$$

и оттука $m=\frac{4}{3}$. Значи, функцијата е

$$y=\frac{4}{3}x-8\,.$$

Графикот на функцијата е прикажан на цртеж 11. Истиот минува низ точките $A(6,0)$ и $B(0,-8)$.



Цртеж 11

б) За плоштината на триаголникот AOB имаме $P_{AOB}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$. За обиколката имаме:

$$L=\overline{OB}+\overline{OA}+\overline{AB}=6+8+\sqrt{8^2+6^2}=24\,.$$

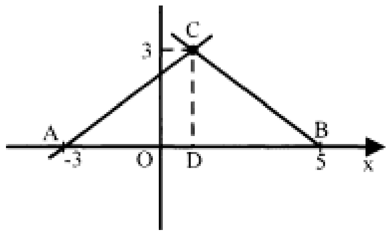
13. Прво од условот дека правата $y=-\frac{3}{4}x+n$ минува низ точката $M(-\ 3,6)$ ќе го определиме параметарот *n*. Имаме, $6=-\frac{3}{4}(-3)+n$, т.е. $n=\frac{15}{4}$. Сега ги одредуваме нулите на функциите:

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$, т.е. $\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4} \\ y=0 \end{cases}$

и го добиваме темето $B(5,0)$ и

$y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$, т.е. $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \\ y=0 \end{cases}$

и го добиваме темето A(-3,0) (цртеж 12). Темето C го наоѓаме како пресек на двете прави, т.е.



Цртеж 12

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4} \\ y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \end{cases}$$

од што наоѓаме $2y=\frac{24}{4}$ или $y=3$. Сега, $x=1$ и $C(1,3)$. За периметарот на триаголникот ABC имаме:

$$\overline{AB}=8\ ,\quad \overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5\ ,\quad \overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5\ ,$$

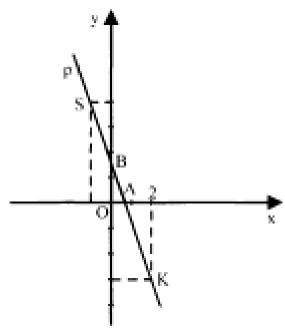
па затоа

$$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=8+5+5=18\ .$$

Плоштината на ΔABC е $P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{8\cdot 3}{2}=12$.

14. а) Општ облик на равенката на правата е $y=ax+b$. Правата минува низ точката $K(2,-4)$, па затоа нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е. $-4=2a+b$. Аналогно, за точката S(-1,4) имаме $4=-a+b$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} -4=2a+b \\ 4=-a+b \end{cases}$$



Цртеж 13

наоѓаме $a=-\frac{8}{3},\ b=\frac{4}{3}$. Равенката на правата гласи $y=-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$ (цртеж 13).

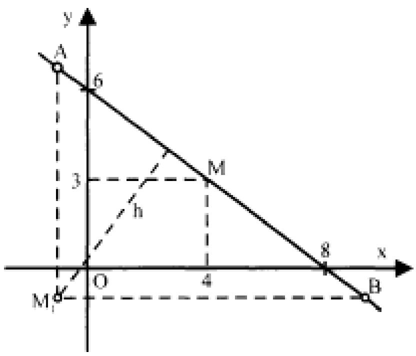
б) Пресеците на правата со координатните оски се $A(\frac{1}{2},0)$ и $B(0,\frac{4}{3})$. Истите се добиваат како решенија на системите

$$\begin{cases} y=-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\ y=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\ x=0 \end{cases},$$

соодветно. Плоштината на ΔOAB е

$$P=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}.$$

15. а) Во $y=(2m+1)x+6$ ги заменуваме координатите на дадената точка $x=4,\ y=3$ и добиваме $3=(2m+1)\cdot 4+6$, т.е. $m=-\frac{7}{8}$. Значи, функцијата е $y=-\frac{3}{4}x+6$



Цртеж 14

б) Низ $M_1(-1\ ,\ -1)$ (цртеж 14) повлекуваме прави паралелни на координатните оски и ги наоѓаме точките $A(-1,\frac{27}{4})$ и $B(\frac{28}{3},-1)$ кои се пресеци на повлечените прави и правата $y=-\frac{3}{4}x+6$. Триаголникот AM_1B е правоаголен со катети

$$\overline{AM_1}=\frac{27}{4}-(-1)=\frac{31}{4} \text{ и}$$

$$\overline{BM_1}=\frac{28}{3}-(-1)=\frac{31}{3}$$

и хипотенуза

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AM_1}^2+\overline{BM_1}^2}=\sqrt{(\frac{31}{3})^2+(\frac{31}{4})^2}=\frac{31\cdot 5}{12}.$$

За плоштината на триаголникот AM_1B имаме

$$P=\frac{1}{2}\overline{AM_1}\cdot\overline{BM_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h, \text{ т.е. } h=\frac{\overline{AM_1}\cdot\overline{BM_1}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{31}{4}\cdot\frac{31}{3}}{\frac{31\cdot 5}{12}}=\frac{31}{5}.$$

Конечно, бараното растојание од M_1 до правата е $\frac{31}{5}$.

16. а) Ставаме $x=-4$, $y=6$ и добиваме $m=-1$.

б) За $m=-1$ ја добиваме функцијата $y=-\frac{3}{4}x+3$, која ги сече координатните оски во точките $B(4,0)$ и $C(0,3)$ (цртеж 15). Триаголникот COB е правоаголен со плоштина

$$P=\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6.$$

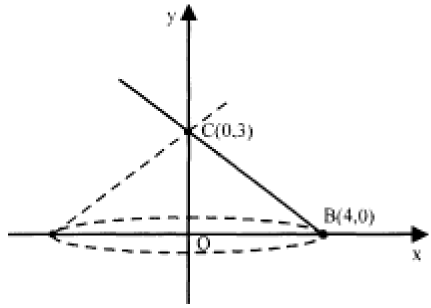
в) Телото кое се добива со ротација на триаголникот OBC околу y-оската е конус со радиус $r=\overline{OB}=4$ и висина $h=\overline{OC}=3$. Изводницата е

$$s=\sqrt{r^2+h^2}=5.$$

Значи,

$$P=\pi r(r+s)=36\pi \text{ и}$$

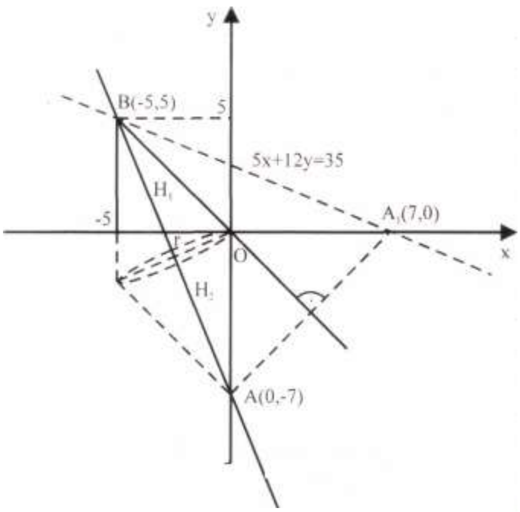
$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^2 h=16\pi.$$



Цртеж 15

17. Равенката на правата можеме да ја запишеме во обликот $12x+5y+35=0$ или $y=-\frac{12}{5}x-7$ (цртеж 16). Во правоаголен координатен систем Oxy ги конструираме правите

$$y=-x \text{ и } y=-\tfrac{12}{5}x-7.$$



Цртеж 16

Пресечната точка на овие прави е B(-5,5). Правата p е одредена со точката B и точката која е симетрична на A(0,-7) во однос на правата $y=-x$, т.е со точката $A_1(7,0)$. Равенката на правата p е од вид $y=kx+n$. Ако ги замениме координатите на A_1 и B добиваме

$$\begin{cases} 0=7k+n \\ 5=-5k+n \end{cases}$$

т.е. $n=\frac{35}{12}$ и $k=-\frac{5}{12}$.

Значи, равенката на правата p е $y=-\frac{5}{12}x+\frac{35}{12}$ или $5x+12y=35$. Со ротација на триаголникот AOB околу страната AB се добива тело кое се состои од два конуси со заедничка основа. При тоа имаме

$$\overline{AB}=H_1+H_2=\sqrt{12^2+5^2}=13,\ s_1=\overline{OB}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2},\ s_2=\overline{OA}=7.$$

Бидејќи $P_{\Delta AOB}=\frac{12\cdot 5}{2}-\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{35}{2}$ и $P_{\Delta AOB}=\frac{13r}{2}$ добиваме $r=\frac{35}{13}$. Значи,

$$H_1=\sqrt{\overline{OB}^2-r^2}=\tfrac{85}{13} \text{ и } H_2=13-H_1=\tfrac{84}{13}.$$

Конечно,

$$P=\pi r(s_1+s_2)=\tfrac{35}{13}\pi(5\sqrt{2}+7),$$

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^2(H_1+H_2)=\tfrac{1}{3}(\tfrac{35}{13})^2\pi\cdot 13=\tfrac{1225\pi}{39}.$$

18. Бидејќи точката $A(1,-8)$ лежи на графикот на функцијата добиваме $-8=m-2n$, т.е. $m=2n-8$. Тогаш,

$$mn=n(2n-8)=2(n^2-4n)=2((n-2)^2-4).$$

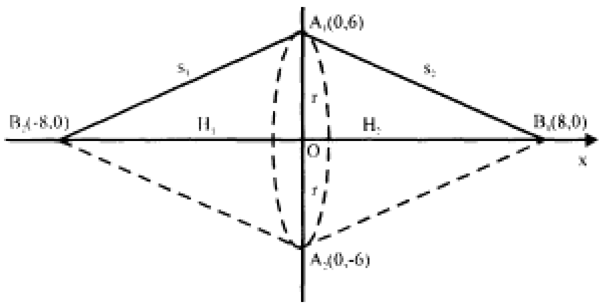
Според тоа, производот mn е минимален ако $n-2=0$, т.е. $n=2$. Сега за m наоѓаме $m=2\cdot 2-8=-4$ и дадената функција го добива видот $y=-4x-4$

19. а) Заменуваме во (1) $x=4,\ \ y=-3$ и добиваме

$$\tfrac{m-2}{m-1}\cdot 4+\tfrac{2m-34}{m-1}=-3,$$

т.е. $m=5$. Со замена во (1) за $m=5$ ја добиваме равенката на правата

$$y=\tfrac{3}{4}x-6. \qquad (2)$$



Цртеж 17

б) Правата симетрична на $y=\tfrac{3}{4}x-6$ во однос на $y-$оската е одредена со точките $A_2(0,-6)$ и $B_2(-8,0)$ каде A_2 е пресекот на y-оската и правата

$$y=\tfrac{3}{4}x-6,$$

а B_2 е точка симетрична во однос на $y-$оската на точката $B_1(8,\ 0)$ која е пресек на $x-$оската и правата $y=\tfrac{3}{4}x-6$ (цртеж 17). Со замена во $y=kx+n$ за $A_2(0,-6)$ и $B_2(-8,0)$ добиваме

$$\begin{cases}-6=n\\ 0=-8k+n,\end{cases}$$

т.е. $n=-6$ и $k=-\tfrac{3}{4}$. Значи, бараната симетрична права има равенка

$$y=-\tfrac{3}{4}x-6. \qquad (3)$$

в) Со ротација на триаголникот добиен со правите (2) и (3) и x-оската се добива тело составено од два конуси со заедничка основа чиј радиус е $r=\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=6$, висини $H_1=H_2=8$ и изводници

$$s_1=s_2=\sqrt{H_1^2+r^2}=10.$$

Сега

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^2(H_1+H_2)=\tfrac{1}{3}\pi 6^2(8+8)=\tfrac{1}{3}\pi\cdot 36\cdot 16=192\pi \text{ и}$$

$$P=\pi r\ \ (s_1+s_2)=\pi\cdot 6\cdot(10+10)=120\pi.$$

20. Графиците на дадените функции се паралелни ако и само ако системот равенки

$$\begin{cases} 2x+3ay=0 \\ 7x-5y=2 \end{cases} \qquad (1)$$

има бесконечно многу решенија или нема решенија. Бидејќи графикот на функцијата $2x+3ay=0$ го содржи координатниот почеток, а графикот на функцијата $7x-5y=2$ не го содржи координатниот почеток заклучуваме дека системот (1) нема решение. Системот (1) е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 14x+21ay=0 \\ -14x+10y=-4 \end{cases} \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките од системот (2) добиваме $21ay+10y=-4$, т.е.

$$(21a+10)y=-4 \qquad (3)$$

За да системот (2) нема решение потребно е и доволно е равенката (3) да нема решенија, а тоа е можно ако $21a+10=0$, т.е. $a=-\tfrac{10}{21}$. Значи, за $a=-\tfrac{10}{21}$ графиците на функциите $2x+3ay=0$ и $7x-5y=2$ се паралелни.

21. Од условот $y^2=6-x^2$ имаме $x^2+y^2=6$, а од $y=\tfrac{5}{x}$ се добива $xy=5,\ x\neq 0$. Со квадрирање на $y=-x+n$ добиваме

$$x^2+y^2+2xy=n^2.$$

Според тоа $n^2=6+10$, а оттука $n=\pm 4$. Значи, се добиваат две функции $y=-x+4$ и $y=-x-4$. За секоја од нив важи дека делот од рамнината што го образуваат со координатните оски е правоаголен триаголник со должина на катетите еднаква на 4, па плоштината што ја зафаќа секоја од правите со координатните оски е $P=\frac{4\cdot 4}{2}=8$.

27. Одговор. а) $m=3$ или $m=-3$. б) $d=2\sqrt{2}$.

28. Имаме

$$A=\frac{2}{4a^2-12ab+9b^2+4}=\frac{2}{(2a-3b)^2+4},$$

па затоа изразот прима најголема вредност ако $2a-3b=0$. Според тоа, за бараните вредности на a и b линеарната функција е

$$y=(2a-3b-\tfrac{4}{3})x+2(2a-3b)+4=-\tfrac{4}{3}x+4,$$

и нејзиниот график е правата која минува низ точките $A(3,0)$ и $B(0,4)$.

29. а) Правите се паралелни ако $2m-0,5=7m+2$, од каде што $m=-0,5$

б) Мора $2m-0,5<0$ и истовремено $7m+2>0$, односно

$$m<\tfrac{1}{4} \text{ и } m>-\tfrac{2}{7} \text{ или } m\in(-\tfrac{2}{7},\tfrac{1}{4}).$$

30. Равенката

$$9x^2+y^2+24x-8y+32=0$$

е еквивалентна со равенката

$$9x^2+24x+16+y^2-8y+16=0,$$

односно

$$(3x+4)^2+(y-4)^2=0,$$

од каде наоѓаме $3x+4=0$ и $y-4=0$, па затоа $k=-\frac{4}{3}, n=4$. Равенката на правата p е $y=-\frac{4}{3}x+4$ и таа ја сече $x-$оската во точка $A(3,0)$ и ја сече $y-$оската во точка $B(0,4)$. Хипутонеузта на правоаголниот триаголник OAB е: $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

а) Плоштината на триаголникот OAB е $P_{OAB}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=6$.

б) Од $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h=P_{OAB}$ добиваме $\frac{5}{2}h=6$, т.е. $h=\frac{12}{5}$ и тоа е бараното растојание од координатниот почеток до правата p, (направи цртеж).

31. а) Од $f(2x-g(x))=3(2x-g(x))-2=-3(1+2m)x+34$ со решавање на последната равенка по непозната $g(x)$ добиваме

$$g(x)=(3+2m)x-12.$$

б) Од а) заменуваме за $g(x)$ и ја добиваме равенката

$$(3+2m)x-12=(4m-1)x-4(1+m),$$

која е еквивалентна со равенката $(m-2)x=2(m-2)$. За $m\neq 2$ последната равенка има единствено решение $x=2$, а за $m=2$ таа прима облик $0\cdot x=0$ и нејзино решение е секој реален број x.

в) Од $g(x)=(3+2m)x-12$ и $g(6)=-4$ ја добиваме равенката $-4=6(3+2m)-12$ чие решение е $m=-\frac{5}{6}$, па функцијата го прима видот $y=\frac{4}{3}x-12$. Нејзиниот график ги сече координатните оски Ox и Oy во точките $A(9,0)$ и $B(0,-12)$. За триаголникот OAB имаме $\overline{OA}=9$, $\overline{OB}=12$ и $\overline{AB}=\sqrt{9^2+12^2}=15$. Сега од

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot h=P_{OAB}=\tfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$$

наоѓаме $h=\frac{12\cdot 9}{15}=\frac{36}{5}$.

32. За дадената функција имаме

$$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b,\ f(3)=3a+b,...,\ f(10)=10a+b,$$

па од условот на задачата следува

$$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+...+(10a+b)=10$$
$$(a+b)-(2a+b)+(3a+b)-...-(10a+b)=-10$$

односно $55a+10b=10$ и $-5a=-10$. Според тоа, $a=2$ и $b=-10$. Значи, $f(x)=2x-10$, па затоа $f(100)=2\cdot 100-10=190$.

9. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

9.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Реши ги равенките:

а) $\frac{1}{3}[x-\frac{2}{7}(4x-\frac{1-x}{4})+7]=2$,

б) $2\frac{2}{3}:\{[(3,72-0,02x)\cdot\frac{10}{37}]:\frac{5}{6}+2,8\}-\frac{7}{15}=0,2$.

Задача 2. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A(a)=[9(a-1)-5(3a-1)+2(3a+2)](a^2-3)-(a-3)(a-1)$$

каде a е еднаков на решението на равенката

$$\frac{x-2}{3}+\frac{5x-3}{2}-\frac{1-x}{1\frac{1}{2}}=2\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Задача 3. Реши ја равенката:

а) $(\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30})\cdot 150+10,8:[0,54(x-1)]=11,\ x\neq 1.$

б) $(\frac{2}{11\cdot 13}+\frac{2}{13\cdot 15}+\frac{2}{15\cdot 17}+\frac{2}{17\cdot 19}+\frac{2}{19\cdot 21})\cdot 462-[2,04:(x+1,05)]:0,12=19,\quad x\neq 1,05$.

в) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$.

г) $\frac{2}{3x-3}-\frac{2x-5}{x^2-2x+1}=\frac{x+1}{3x^2-6x+3}+\frac{1}{2-2x}$.

Задача 4. Реши ја равенката

$$\frac{x-10}{1998}+\frac{x-11}{1997}+...+\frac{x-15}{1993}=\frac{x-1998}{10}+\frac{x-1997}{11}+...+\frac{x-1993}{15},\ x\in\mathbf{R}.$$

Задача 5. Реши ја равенката:

$$\frac{x+1}{2x-1}-\frac{11x+5}{12(2x-1)}=\frac{x-3}{4-8x}+\frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Задача 6. Реши ја равенката:

а) $2+\frac{2x-5}{2-x}=\frac{2}{x(x-2)}$,

б) $\frac{x-1}{2x^2-18}+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{6-2x}=\frac{4x+1}{4(x-3)(x+3)}$.

Задача 7. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A(x,y)=[(2x+3y)^3+(x^{n+\frac{1}{n}}\cdot y^3)^n:(\tfrac{1}{8}x^{n^2-2}\cdot y^{3n})]:9y+(y-3x)^2-4x^2$$

за $x=-\frac{1}{3}$ и y еднаков на решението на равенката

$$\frac{y+6}{2}-(\frac{3y+1}{5}-\frac{2y-7}{2})+y-5=0\,. \qquad (1)$$

Задача 8. Реши ја равенката:

$$(0,8x-0,5)^2+(0,6x-1,3)^2=4(0,5x-0,7)(0,5x+0,7)-6(0,15x+0,08)\,.$$

Задача 9. Дадени се полиномите

$$A(x)=5x^2-3x+4,\ B(x)=x^2-4x-5 \text{ и } C(x)=3x^2-6x+7\,.$$

За кои вредности на променливата x важи:

$$A(x)-2B(x)-C(x)=14\,. \qquad (1)$$

Задача 10. Дадени се изразите со променлива

$$A(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{6},\ B(x)=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}x \text{ и } C(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\,.$$

Определи го x, така што

$$3A(x)-2B(x)-4C(x)=\frac{14}{3}\,.$$

Задача 11. Реши ја равенката:

$$(6x+1)^2-(3x-4)(3x+4)-1,5(18x^2+4)+25=72\,.$$

Задача 12. Реши ја равенката:

$$(\frac{x}{2}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3})(2-\frac{3-x}{4})-[-x-\frac{2}{3}(x+3)]=\frac{(2x-3)^2}{12}(\frac{8\cdot 2^6\cdot 3^5}{6^5\cdot 16}-\frac{7}{8})\,.$$

Задача 13. За кои цели броеви a, равенката

$$a+5+\frac{2}{x-1}=0$$

има негативни цели решенија? Најди ги тие решенија.

Задача 14. За кои вредности на параметрите a и b равенката

$$(a+1,5)x=2b-7$$

има бесконечно многу решенија?

Задача 15. За кои вредности на параметарот a равенката

$$(a-1)x=a$$

а) има само едно решение

б) нема решение

в) бројот 0 е решение на равенката.

Задача 16. За кои вредности на параметарот a равенката

$$\frac{a-2x}{a}-\frac{2-ax}{2}=a-2$$

има само едно решение и тоа е еднакво на нула?

Задача 17. За кои вредности на параметарот a равенката

$$5(ax-3)=4ax-7$$

а) нема решение

б) има решение еднакво на $-\frac{4}{5}$

в) има решение природен број.

Задача 18. Реши ги равенките:

а) $ax-3x=a^2-9$ б) $a^3x-a=ax+1$

каде a е параметар.

Задача 19. Реши ја равенката $a|x-1|=1998x-1$, каде a е параметар.

Задача 20. Реши ја равенката $ax+1=b+2x$, каде a и b се параметри.

Задача 21. За која вредности на параметарот a равенката

$$(2x+a)(1-x)-a(2x-a)(a+2x)=0$$

е линеарна? Реши ја добиената линеарна равенка.

Задача 22. Реши ја равенката

$$(x-a)^2-(x-b)^2=3(a-b)(a+b),$$

каде a и b се параметри.

Задача 23. За која вредности на параметарот a равенката

$$2(3x+a)(4x-3)-6(2x-1)^2=26$$

има решение $x=2$?

Задача 24. Реши ја равенката

$$\frac{3ax-5}{ax-3-x+3a}+\frac{3a-1}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3} \qquad (1)$$

каде a е параметар.

Задача 25. Реши ја равенката

$$\frac{a-x}{a-b}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}, \qquad (1)$$

каде a и b се параметри.

Задача 26. Равенката

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{c+a-x}{b}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

реши ја по непознатата x.

Задача 27. Реши ја по непознатата x равенката

$$3(1+a^2+a^4)x=(1+a+a^2)^2x+a^5+a^4+a^3-a^2-a-1.$$

Задача 28. Реши ја равенката $\frac{a}{x}+6=\frac{3}{x}+2$, каде a е параметар.

Задача 29. Реши ја равенката

а) $\frac{2}{a(x-3)}+\frac{3}{(a-1)(x+1)}=\frac{x-5}{a(x-3)(x+1)}$, каде a е параметар.

б) $\frac{a}{x+1}-\frac{a-1}{x}=\frac{1}{x-a}$, каде a е параметар.

в) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}$, каде a и b се параметри.

Задача 30. а) Реши ја равенката $\frac{1}{x+a-1}-\frac{2a}{x^2+2a-a^2-1}=\frac{5}{x-a+1}$, каде a е параметар.

б) Одреди ги вредностите на параметарот a за кои решенијата на равенката се помали од 2.

Задача 31. Реши ја равенката

а) $\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}$, каде a и b се параметри.

б) $\frac{2(a-b)}{a^4c-4cx^2}-\frac{1}{2x-a^2}=\frac{1}{2x+a^2}$, каде a, b и c се параметри.

в) $\frac{x-a}{x-b}-\frac{x-b}{x-a}=\frac{x-a-b+b^2-a^2}{x^2-ax-bx+ab}$, каде a и b се параметри.

Задача 32. Реши ја равенката $|x-\frac{1}{2}|=2\frac{1}{5}$.

Задача 33. Реши ја равенката

$$|x-2|+2x-|x|=x+1. \qquad (1)$$

Задача 34. Дадена е равенката

$$|x-ab|+|x-\tfrac{(a-b)^2}{4}|=x-\tfrac{a^2+b^2}{2},$$

каде a и b се параметри. За кои a и b оваа равенка има решение?

Задача 35. Реши ја равенката

$$|x|+|x+1|+9-x=0. \qquad (1)$$

Задача 36. Реши ја равенката

$$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9. \qquad (1)$$

Задача 37. За кои целобројни вредности на параметарот a равенката

$$|2x+1|+|x-2|=a$$

има единствено целобројно решение?

Задача 38. Дадена е равенката $|x-a|+15=6|x+2|$, каде a е параметар.

а) Докажи дека за секоја вредност на параметарот a равенката има точно два различни корени x_1 и x_2.

б) Докажи дека $|x_1-x_2|\geq 6$ и определи ги вредностите за a, за кои што $|x_1-x_2|=6$.

Задача 39. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенките

$$|ax-1|+|x+1|=a+1 \text{ и } |a+x|+|a-x|=2a$$

се еквивалентни.

Задача 40. Реши ја равенката $|(\sqrt{x-2})^2+1|=7$

Задача 41. Реши ја равенката

$$(0,8x-0,5)^2+(0,6x-1,3)^2=4(0,5x-0,7)(0,5x+0,7)-6(0,15x+0,08).$$

Задача 42. Реши ги равенките:

а) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}$, б) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$,

в) $(\frac{x}{x+1}+1):(1-\frac{3x^2}{1-x^2})=\frac{1-x}{1-2x}$, г) $\frac{5x+1}{x+2}=\frac{x^2-1}{x-1}$, д) $(x+2)(\frac{x^2+2x-3}{2x+1}-1)=1$.

Задача 43. Реши ги по x параметарските равенки:

а) $\frac{x}{a-1}=\frac{3}{5}$,

б) $\frac{x-a}{a}=\frac{1}{b}$,

в) $\frac{a}{x}-1=\frac{2}{x}-9$,

г) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$,

д) $\frac{x+a}{a}+\frac{x}{x-a}=\frac{x-a}{a}$,

ѓ) $\frac{1}{x+2a}=\frac{2}{2x+a}$,

е) $x+\frac{x}{a}=1$,

ж) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=2$.

Задача 44. а) Реши ги равенките:

$$|x-1|+1=4-x \text{ и } \frac{y}{4}+\frac{2y+3}{5}=\frac{y}{3}+\frac{11}{12}.$$

б) Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}+\frac{8x^7}{x^8+y^8},$$

каде x и y се соодветно решенијата на првата и втората равенка под а).

Задача 45. Да се провери дали за секој реален број $a\in(1,2)$ плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y=1-|x-1|$ и $y=|2x-a|$ е помала од $\frac{1}{3}$.

Задача 46. Реши ја равенката $(x-m)(x-n)=x^2$, каде m и n се параметри.

Задача 47. Реши ја равенката

$$(0,8x-0,5)^2+(0,6x-1,3)^2=4(0,5x-0,7)(0,5x+0,7)-6(0,15x+0,08).$$

Задача 48. Најди го множеството од сите вредности на реалниот параметар a така да равенките

$$2(x-2a)+a=4-\frac{2-x}{2} \text{ и } 2(x-2a)=-2x+2(a-1)$$

имаат решенија помали од 10, а поголеми или еднакви на 2.

Задача 49. Реши ја равенката

$$|x|+|2x+3|-1998=0.$$

Задача 50. Реши ја равенката $||x-1|-6|=2$.

Задача 51. Реши ја равенката $|2x+a|-ax=2$.

Задача 52. За кои вредности на параметарот a равенката
$$|x-1|+|x+1|=a$$
а) има точно две решенија,
б) нема решение.

9.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Дадената равенка ја запишуваме во нормален облик и добиваме:
$$\tfrac{1}{3}(x-\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{17x-1}{4}+7)=2$$
$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{-3x+99}{14}=2$$
$$-3x+99=84$$
$$3x=15.$$
Од последната равенка која е еквивалентна со дадената наоѓаме $x=5$.

Значи, $x=5$ е решение и на дадената равенка.

б) Имаме:
$$2\tfrac{2}{3}:\left\{\left[\left(3,72-0,02x\right)\cdot\tfrac{10}{37}\right]:\tfrac{5}{6}+2,8\right\}=0,2+\tfrac{7}{15}$$
$$\left[\left(3,72-0,02x\right)\cdot\tfrac{10}{37}\right]:\tfrac{5}{6}+2,8=2\tfrac{2}{3}:\tfrac{2}{3}$$
$$\left[\left(3,72-0,02x\right)\cdot\tfrac{10}{37}\right]:\tfrac{5}{6}=4-2,8$$
$$\left(3,72-0,02x\right)\cdot\tfrac{10}{37}=1,2\cdot\tfrac{5}{6}$$
$$3,72-0,02x=1:\tfrac{10}{37}$$
$$-0,02x=3,7-3,72$$
$$x=\tfrac{0,02}{0,02}=1.$$

2. Решавајќи ја равенката (1) наоѓаме $x=\frac{31}{21}$, па значи $a=\frac{31}{21}$. За изразот $A(a)$ имаме:
$$A(a)=\left[9a-9-15a+5+6a+4\right](a^2-3)-(a^2-a-3a+3)=-a^2+4a-3.$$
Конечно,

$$A(\tfrac{31}{21}) = -(\tfrac{31}{21})^2 + 4\cdot\tfrac{31}{21} - 3 = \tfrac{320}{441}.$$

3. а) Имаме:

$$(\tfrac{26-25}{25\cdot26} + \tfrac{27-26}{26\cdot27} + \tfrac{28-27}{27\cdot28} + \tfrac{29-28}{28\cdot29} + \tfrac{30-29}{29\cdot30})\cdot150 + 10,8:[0,54(x-1)] = 11$$

$$(\tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{26} + \tfrac{1}{26} - \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{27} - \tfrac{1}{28} + \tfrac{1}{28} - \tfrac{1}{29} + \tfrac{1}{29} - \tfrac{1}{30})\cdot150 + 10,8:[0,54(x-1)] = 11$$

$$(\tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{30})\cdot150 + 10,8:[0,54(x-1)] = 11$$

$$1 + \tfrac{10,8}{0,54(x-1)} = 11.$$

Според тоа, $\frac{20}{x-1} = 10$, па значи $x-1 = \frac{20}{10}$, односно $x = 3$.

б) Имаме:

$$(\tfrac{13-11}{11\cdot13} + \tfrac{15-13}{13\cdot15} + \tfrac{17-15}{15\cdot17} + \tfrac{19-17}{17\cdot19} + \tfrac{21-19}{19\cdot21})\cdot462 - [2,04:(x+1,05)]:0,12 = 19$$

$$(\tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{21})\cdot462 - [2,04:(x+1,05)]:0,12 = 19.$$

Значи,

$$\tfrac{10}{11\cdot21}\cdot462 - [2,04:(x+1,05)]:0,12 = 19$$

од каде што наоѓаме

$$1 = [2,04:(x+1,05)]:0,12,$$

односно

$$2,04:(x+1,05) = 0,12.$$

Конечно, добиваме

$$x + 1,05 = \tfrac{2,04}{0,12}$$

т.е. $x = 17 - 1,05$ односно $x = 15,95$.

в) Дадената равенка има смисол за оние вредности на непознатата x, за кои заедничкиот именител на членовите на равенката е различен од нула, т.е. за вредности на x за кои $(2x-1)(2x+1) \neq 0$. Оттука наоѓаме $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq -\frac{1}{2}$. Ако помножиме со $4x^2 - 1 \neq 0$ добиваме

$$(2x-1)^2 = (2x+1)^2 - 8,$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 8,$$

$$8x = 8,$$

$$x = 1.$$

Решението $x = 1$ го задоволува условот $x \neq \pm\frac{1}{2}$ за кој дадената равенка има смисол.

г) Равенката ја запишуваме во обликот

$$\frac{2}{3(x-1)}-\frac{2x-5}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{3(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}.$$

Заедничкиот именител на члeновите на оваа равенка е $6(x-1)^2$. Овој член е различен од нула за $x\neq 1$, па значи дадената равенка има смисол за $x\neq 1$. Ако помножиме со $6(x-1)^2$ ја добиваме равенката:

$$4(x-1)-6(2x-5)=2(x+1)-3(x-1)$$

т.е.

$$7x=21$$

чие решение е $x=3$. Решението $x=3$ го задоволува условот $x\neq 1$ за кој дадената равенка има смисол.

4. Забележуваме дека

$$\frac{x-10}{1998}=\frac{x-2008+1998}{1998}=\frac{x-2008}{1998}+1,\ \frac{x-11}{1997}=\frac{x-2008}{1997}+1,\ \frac{x-12}{1996}=\frac{x-2008}{1996}+1 \text{ итн.}$$

Со замена во дадената равенка добиваме

$$\frac{x-2008}{1998}+1+\frac{x-2008}{1997}+1+...+\frac{x-2008}{1993}+1=\frac{x-2008}{10}+1+\frac{x-2008}{11}+1+...+\frac{x-2008}{15}+1,$$

т.е.

$$(x-2008)[\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+...+\frac{1}{1993}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-...-\frac{1}{15}]=0,$$

од каде добиваме $x-2008=0$, т.е. $x=2008$.

5. Дадената равенка ја запишуваме во обликот:

$$\frac{x+1}{2x-1}-\frac{11x+5}{12(2x-1)}=\frac{1}{6}-\frac{x-3}{4(2x-1)}.$$

Јасно, равенката има смисол за $x\neq\frac{1}{2}$. Ако помножиме со $12(2x-1)$ равенката го добива обликот:

$$0\cdot x=0 \qquad (2)$$

Решенијата на (2) се сите реални броеви, па затоа решенијата на (1) се сите реални броеви различни од $\frac{1}{2}$.

6. а) Дадената равенка ја запишуваме во обликот:

$$2-\frac{2x-5}{x-2}=\frac{2}{x(x-2)}. \qquad (2)$$

Последната равенка има смисол за $x(x-2)\neq 0$ т.е. $x\neq 0$ и $x\neq 2$. Ако (2) ја помножиме со $x(x-2)$ ја добиваме равенката

$$2x(x-2)-x(2x-5)=2 \qquad (3)$$

чие решение е $x=2$. Равенката (1) нема смисол за $x=2$, па затоа $x=2$ е решение на равенката (3), но не е решение на (1). Значи, дадената равенка нема решение.

б) Равенката ја запишуваме во обликот:

$$\frac{x-1}{2(x-3)(x+3)}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{2(x-3)}=\frac{4x+1}{4(x-3)(x+3)}$$

од кој лесно заклучуваме дека истата нема смисол за $x=\pm 3$.
Ако помножиме со $4(x+3)(x-3)$ добиваме:

$$2(x-1)+8(x-3)-6(x+3)=4x+1$$

т.е.

$$0\cdot x=45.$$

Последната равенка нема решение, па затоа и дадената равенка нема решение.

7. Прво ќе ја решиме равенката (1). Множиме со 10 и добиваме:

$$5y+30-6y-2+10y-35+10y-50=0,$$

т.е. $19y=57$ од каде $y=3$. За дадениот израз имаме:

$$A(x,y)=[8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3-\frac{x^{\frac{n^2+1}{n}\cdot n}y^{3n}}{\frac{1}{8}x^{n^2-2}\cdot y^{3n}}]:9y+y^2-6xy+9x^2-4x^2$$

$$=[8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3-8x^3]:9y+y^2-6xy+5x^2$$

$$=4x^2+6xy+3y^2+y^2-6xy+5x^2=9x^2+4y^2.$$

Значи за $x=-\frac{1}{3}$ и $y=3$ имаме $A\equiv 9(-\frac{1}{3})^2+4\cdot 3^2=37$.

8. Имаме:

$$0,64x^2-0,8x+0,25+0,36x^2-1,56x+1,69=4(0,25x^2-0,49)-0,9x-0,48$$

$$x^2-2,36x+1,94=x^2-1,96-0,9x-0,48$$

$$x=3.$$

9. Од

$$A(x)-2B(x)-C(x)=5x^2-3x+4-2(x^2-4x-5)-(3x^2-6x+7)=11x+7$$

со замена во (1) ја добиваме равенката $11x+7=14$ чие решение е $x=\frac{7}{11}$.

10. Имаме

$$3A(x)-2B(x)-4C(x)=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}+5x-7-2x+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

од каде следува дека $27x = 81$ т.е. $x = 3$.

11. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$36x^2 + 12x + 1 - (9x^2 - 16) - 27x^2 - 6 + 25 = 72,$$

т.е. на равенката $12x = 36$. Значи, $x = \frac{36}{12} = 3$.

12. Бидејќи

$$\frac{8 \cdot 2^6 \cdot 3^5}{6^5 \cdot 16} - \frac{7}{8} = \frac{2^9 \cdot 3^5}{2^9 \cdot 3^5} - \frac{7}{8} = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

добиваме

$$\frac{3x-2x+1}{6} \cdot \frac{8-3+x}{4} + x + \frac{6+2x}{3} = \frac{(2x-3)^2}{12} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\frac{(x+1)(x+5)}{24} + x + \frac{6+2x}{3} = \frac{(2x-3)^2}{96}.$$

Значи,

$$4(x+1)(x+5) + 96x + 32(6+2x) = (2x-3)^2,$$

$$4x^2 + 24x + 20 + 96x + 192 + 64x = 4x^2 - 12x + 9.$$

Конечно, $x = -\frac{203}{196}$.

13. Од $(x-1)\,|\,2$ следува $x - 1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$, т.е. $x \in \{0, -1, 2, 3\}$. Бидејќи x е негативен број имаме $x = -1$, па тогаш $a = -4$.

14. За да линеарна равенка со една непозната има бесконечно многу решенија таа треба да има облик $0 \cdot x = 0$. Според тоа, треба $a + 1{,}5 = 0$ и $2b - 7 = 0$, односно $a = -1{,}5$ и $b = 3{,}5$.

15. а) За $a - 1 \neq 0$ т.е. $a \neq 1$ дадената равенка има само едно решение $x = \frac{a}{a-1}$.

б) За $a - 1 = 0$ т.е. $a = 1$ равенката има облик $0 \cdot x = 1$ што не е можно за $x \in \mathbf{R}$.

в) За $a = 0 \neq 1$ равенката има решение $x = \frac{0}{0-1} = 0$.

16. Бидејќи a е множител во најмалиот заеднички содржател треба $a \neq 0$. Дадената равенка ја запишуваме во вид:

$$(a^2 - 4)x = 2a(a-2). \qquad (1)$$

За $x=0$ од (1) имаме $(a^2-4)\cdot 0=2a(a-2)$, т.е. $2a(a-2)=0$. Но, $a\neq 0$, па затоа $a-2=0$, т.е. $a=2$. За $a=2$ изразите $2a(a-2)$ и a^2-4 се еднакви на нула. Тогаш равенката (1) го прима обликот

$$0\cdot x=0$$

и таа има бесконечно многу решенија (секој реален број x).

Значи, не постои таков a, за кој единствено решение на почетната равенка е бројот 0.

17. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $ax=8$.

а) За $a=0$ равенката има вид $0\cdot x=8$ и оваа равенка нема решение.

б) За $a\neq 0$ равенката има решение $x=\frac{8}{a}$. Треба $\frac{8}{a}=-\frac{4}{5}$ од каде добиваме $a=-10$. Значи, за $a=-10$ почетната равенка има решение $-\frac{4}{5}$.

в) За да биде $x=\frac{8}{a}$, $a\neq 0$ природен број треба:

i) $a>0$ и $a|8$ т.е. $a=1,\ 2,\ 4,\ 8$. Во овој случај соодветните решенија се $x=8,\ 4,\ 2,\ 1$.

ii) $a>0$ и a е дропка чиј броител е делител на 8, т.е. a да припаѓа на едно од множествата

$$\{\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},...\};\ \{\tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{4},\ \tfrac{2}{5},...\};\ \{\tfrac{4}{3},\ \tfrac{4}{5},...\};\ \{\tfrac{8}{3},\ \tfrac{8}{5},\ \tfrac{8}{6},...\}.$$

18. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a-3)x=(a-3)(a+3). \qquad (1)$$

Ако $a-3=0$ т.е. $a=3$, тогаш (1) го прима обликот $0\cdot x=0$. Решение на последната равенка е секој реален број, па значи и на почетната равенка решение е секој реален број.

Ако $a-3\neq 0$, тогаш

$$x=\frac{(a-3)(a+3)}{a-3}=a+3$$

и тоа е единственото решение на почетната равенка.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$a(a+1)(a-1)x=a+1. \qquad (1)$$

i) За $a=0$ имаме $0\cdot x=1$, од што следува дека дадената равенка нема решение.

ii) За $a=1$ имаме $0\cdot x=2$, од што следува дека дадената равенка нема решение.

iii) За $a=-1$ имаме $0\cdot x=0$, од што следува дека дадената равенка има бесконечно многу решенија.

iv) За $a\neq 0, \pm 1$ единствено решение на дадената равенка е $x=\frac{1}{a(a-1)}$.

19. Ако $x-1<0$, тогаш $|x-1|=1-x$ и равенката го добива видот $a(1-x)=1998x-1$, па решението е $x=\frac{a+1}{1998+a}$. Бидејќи $\frac{a+1}{1998+a}<1$ за $a>-1998$, следува дека за секој $a>-1998$ решение на дадената равенка е $x=\frac{a+1}{1998+a}$. Слично, ако $x-1\geq 0$, тогаш $|x-1|=x-1$,па решението на равенката е $x=\frac{a-1}{a-1998}$ за $a>1998$. Конечно, за $-1998<a\leq 1998$ равенката има едно решение $x=\frac{a+1}{1998+a}$, а за $a>1998$ таа има две решенија $x=\frac{a+1}{1998+a}$ или $x=\frac{a-1}{a-1998}$.

20. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(a-2)x=b-1$.

Ако $a-2\neq 0$ т.е. $a\neq 2$, тогаш равенката има единствено решение $x=\frac{b-1}{a-2}$.

Ако $a-2=0$ т.е. $a=2$, тогаш равенката го добива обликот $0\cdot x=b-1$. Така

i) За $b\neq 1$ добиваме $0\cdot x=b-1\neq 0$ т.е. дадената равенка нема решение и

ii) За $b=1$ добиваме $0\cdot x=0$ т.е. дадената равенка има бесконечно многу решенија.

21. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(-2-4a)x^2+(2-a)x+a^3+a=0. \qquad (1)$$

За да равенката (1) е линеарна потребно и доволно е коефициентот пред x^2 да е еднаков на нула. Значи,

$$-2-4a=0\text{, т.е. } a=-\tfrac{1}{2}.$$

За $a=-\frac{1}{2}$ равенката (1) го прима обликот

$$(2+\tfrac{1}{2})x-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}=0. \qquad (2)$$

Решение на (2) е $x=-\frac{3}{20}$.

22. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(b-a)x=(a-b)(a+b)\,. \tag{1}$$
Разгледуваме два случаи:

i) Ако $b-a\neq 0$, тогаш (1) има единствено решение
$$x=\frac{(a-b)(a+b)}{b-a}=-(a+b)$$
и тоа е решение и на почетната равенка.

ii) Ако $b-a=0$, тогаш (1) го добива обликот $0\cdot x=0$ па значи има бесконечно многу решенија, што значи, при $b-a=0$ и почетната равенка има бесконечно многу решенија.

23. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(3+4a)x=3a+16\,. \tag{1}$$
Равенката (1) има единствено решение ако $3+4a\neq 0$, т.е. $a\neq -\frac{3}{4}$ и притоа $x=\frac{3a+16}{3+4a}$ е решение на (1), па значи и на почетната равенка.

Треба $x=2$. Значи, $2=\frac{3a+16}{3+4a}$, од каде $a=2$.

24. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-1}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}\,.$$
Последната равенка има смисол ако $a-1\neq 0$ и $x+3\neq 0$, т.е $a\neq 1$ и $x\neq -3$. Оваа равенка ја множиме со $(a-1)(x+3)$ и добиваме:
$$(4a+1)x=-2a+1\,. \tag{2}$$
Ако $4a+1\neq 0$, тогаш $x=\frac{-2a+1}{4a+1}$ е решение на равенката (2). За да биде решение и на почетната равенка потребно е да $x\neq -3$, т.е. $\frac{-2a+1}{4a+1}\neq -3$ од каде добиваме $a\neq -\frac{2}{5}$. Значи, при $a\neq -\frac{1}{4}$, $a\neq -\frac{2}{5}$ и $a\neq 1$ дадената равенка има решение $x=\frac{-2a+1}{4a+1}$.

Ако $4a+1=0$, тогаш равенката (2) нема решение, па затоа и равенката (1) нема решение.

25. Равенката (1) има смисол ако $a-b\neq 0$ и $a+b\neq 0$ т.е. $a\neq \pm b$. Ако (1) ја помножиме со a^2-b^2 ја добиваме равенката:
$$2ax=a^2-b^2\,. \tag{2}$$

Ако $a \neq 0$, тогаш $x = \frac{a^2-b^2}{2a}$ е решение на (2), па затоа при $a \neq \pm b$ е решение и на дадената равенка.

Ако $a = 0$, тогаш (2) го добива обликот $0 \cdot x = -b^2$ и како $b \neq 0 = a$ заклучуваме дека равенката (2), а тоа значи и равенката (1) нема решение.

26. Дадената равенка еквивалентно ја трансформираме на следниот начин:

$$\frac{a+b-x}{c} + 1 + \frac{b+c-x}{a} + 1 + \frac{c+a-x}{b} + 1 = 4 - \frac{4x}{a+b+c}$$

$$\frac{a+b+c-x}{c} + \frac{a+b+c-x}{a} + \frac{a+b+c-x}{b} = 4\frac{a+b+c-x}{a+b+c} \qquad (1)$$

Равенката (1) има смисол за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $a+b+c \neq 0$. Имаме:

$$(a+b+c-x)(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c} - \tfrac{4}{a+b+c}) = 0. \qquad (2)$$

Можни се следните случаи:

i) Ако е $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} = 0$, тогаш равенката (2) е еквивалентна на равенката $(a+b+c-x) \cdot 0 = 0$, па затоа секој реален број е решение на (2), што значи и на почетната равенка.

ii) Ако $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \neq 0$, тогаш единственото решение на (2) што значи и на почетната равенка е $x = a+b+c$.

27. Имаме:

$$[3(1+a^2+a^4)-(a^2+a+1)^2]x = a^3(a^2+a+1)-(a^2+a+1)$$

$$(2a^4-2a^3-2a+2)x = (a^2+a+1)(a^3-1)$$

$$[2a^3(a-1)-2(a-1)]x = (a^2+a+1)^2(a-1)$$

$$2(a-1)(a^3-1)x = (a^2+a+1)^2(a-1)$$

$$2(a-1)^2(a^2+a+1)x = (a^2+a+1)^2(a-1).$$

Бидејќи $a^2+a+1 = (a+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0$, за секој реален број a, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2(a-1)^2 x = (a-1)(a^2+a+1). \qquad (1)$$

Конечно

i) Ако $a-1 \neq 0$, тогаш решение на (1) е $x = \frac{a^2+a+1}{2(a-1)}$, кое е решение и на почетната равенка.

ii) Ако $a-1=0$, тогаш (1) го прима обликот $0\cdot x=0$ т.е. секој реален број е нејзино решение. Значи, секој реален број е решение на почетната равенка.

28. Дадената равенка има смисол за $x\neq 0$. Ако помножиме со x ја добиваме равенката

$$4x=3-a$$

чие решение е $x=\frac{3-a}{4}$. Бидејќи за $a=3$ имаме $x=0$, а за $x=0$ почетната равенка нема смисол заклучуваме дека $x=\frac{3-a}{4}$ е решение на почетната равенка ако $a\neq 3$.

29. а) Равенката има смисол ако $a\neq 0$, $a\neq 1$, $x\neq 3$ и $x\neq -1$. Ако помножиме со $a(a-1)(x-3)(x+1)$ ја добиваме равенката

$$(4a-1)x=2a+7. \qquad (1)$$

Ќе разгледаме два случаи:

i) За $4a-1=0$, т.е. $a=\frac{1}{4}$ равенката (1) го добива обликот $0\cdot x=\frac{15}{2}$, што не е можно. Значи во овој случај равенката (1) па затоа и дадената равенка немаат решение.

ii) За $4a-1\neq 0$, т.е. $a\neq\frac{1}{4}$ равенката (1) има решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$. За да најденото решение е решение и на дадената равенка потребно е $x\neq 3$ и $x\neq -1$, бидејќи во овие случаи дадената равенка нема смисол.

За $x\neq 3$ добиваме $\frac{2a+7}{4a-1}\neq 3$, т.е. $a\neq 1$. Од $x\neq -1$ следува $\frac{2a+7}{4a-1}\neq -1$ па е $a\neq -1$. Значи, за $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{4}$, $a\neq 1$ и $a\neq -1$ дадената равенка има решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$.

Конечно

- за $a=0$ или $a=1$ равенката нема смисол,
- за $a\neq 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{4}$ равенката има единствено решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$ и
- за $a=\frac{1}{4}$ и $a=-1$ равенката нема решение.

б) Равенката има смисол за $x\neq -1$, $x\neq 0$ и $x\neq a$. Множиме со $x(x+1)(x-a)$ и добиваме:

$$2ax=a(a-1). \qquad (1)$$

Ако $a \neq 0$, тогаш решение на (1) е $x = \frac{a-1}{2}$. Но, за да $x = \frac{a-1}{2}$ е решение и на дадената равенка треба да е:

$i)$ $x = \frac{a-1}{2} \neq -1$, од што следува $a \neq -1$,

$ii)$ $x = \frac{a-1}{2} \neq 0$, од што следува $a \neq 1$,

$iii)$ $x = \frac{a-1}{2} \neq a$, од што следува $a \neq -1$.

Значи, за $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$ дадената равенка има решение $x = \frac{a-1}{2}$.

Ако $a = 0$, тогаш (1) го прима обликот $0 \cdot x = 0$ т.е. секој реален број е решение на (1), па затоа при $a = 0$ решенија на дадената равенка се сите реални броеви различни од 0 и -1.

в) Равенката има смисол ако $a \neq 0$, $a \neq b$ и $a \neq -b$. Ако помножиме со $a(b-a)(a+b)$ добиваме

$$b(b+a)x = a^2(b-a)\,. \tag{1}$$

Видовме дека треба $b + a \neq 0$. Затоа за коефициентот пред x ги разгледуваме случаите $b = 0$ и $b \neq 0$.

Ако $b \neq 0$, тогаш $x = \frac{a^2(b-a)}{b+a}$, за $a \neq 0$, $a \neq b$ и $a \neq -b$ е решение на дадената равенка.

Ако $b = 0$, тогаш равенката (1) го добива обликот $0 \cdot x = -a^3$ и од тоа што $a \neq 0$ добиваме $0 \cdot x = -a^3 \neq 0$ што не е можно. Значи дадената равенка за $b = 0$ нема решение.

30. а) Дадената равенка ќе ја запишеме во обликот:

$$\frac{1}{x+a-1} - \frac{2a}{(x-a+1)(x+a-1)} = \frac{5}{x-a+1}\,.$$

Допуштените вредности на x за оваа равенка се $x \neq a-1$ и $x \neq 1-a$. Ако помножиме со $(x-a+1)(x+a-1)$ ја добиваме равенката

$$2x = 3 - 4a$$

чие решение е

$$x = \frac{3-4a}{2}\,. \tag{1}$$

За да (1) биде решение на дадената равенка треба да е $\frac{3-4a}{2} \neq 1-a$, од каде следува $a \neq \frac{1}{2}$ и $\frac{3-4a}{2} \neq a-1$, од каде следува $a \neq \frac{5}{6}$. Според тоа, при $a \neq \frac{1}{2}$ и $a \neq \frac{5}{6}$ решение на дадената равенка е $x = \frac{3-4a}{2}$.

б) Од условот $x<2$ добиваме $\frac{3-4a}{2}<2$ т.е. $a>-\frac{1}{4}$. Според тоа, коренот $x=\frac{3-4a}{2}$ на дадената равенка е помал од 2 ако

$$a\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\frac{5}{6})\cup(\frac{5}{6},+\infty).$$

31. а) Равенката има смисол за $x\neq 0$ и $x\neq a$. Ако помножиме со $x(a-x)$ добиваме $a-x=bx$, т.е.

$$(1+b)x=a. \qquad (1)$$

Ако $b+1\neq 0$ т.е. $b\neq -1$, тогаш решение на (1) е $x=\frac{a}{1+b}$. За да биде решение и на дадената равенка треба истовремено да се исполнети условите:

$$\frac{a}{1+b}\neq 0 \text{ т.е. } a\neq 0 \text{ и } \frac{a}{1+b}\neq a \text{ т.е. } b\neq 0.$$

Значи ако $b\neq -1$, $b\neq 0$ и $a\neq 0$, тогаш $x=\frac{a}{1+b}$ е решение на дадената равенка.

Ако $b+1=0$ т.е. $b=-1$ равенката добива облик $0\cdot x=a$. Од овде следува:

- ако $a\neq 0$, тогаш $0\cdot x=a\neq 0$ што не е можно т.е. равенката (1), а со тоа и почетната равенка нема решение.
- ако $a=0$, тогаш $0\cdot x=0$ т.е. секој реален број x е решение на (1). За да x биде решение и на дадената равенка треба да е $x\neq 0$ и $x\neq a$. Значи секој $x\neq 0$ е решение на дадената равенка.

Конечно

- ако $b\neq -1$, $b\neq 0$ и $a\neq 0$, тогаш равенката има едно решение $x=\frac{a}{1+b}$,
- ако $b=-1$ и $a\neq 0$, тогаш равенката нема решение,
- ако $b=-1$ и $a=0$, тогаш решение на равенката е секој $x\neq 0$.

б) Лесно се гледа дека дадената равенка има смисол за $c\neq 0$, $x\neq\frac{a^2}{2}$ и $x\neq -\frac{a^2}{2}$. Ако помножиме со $c(2x-a^2)(2x+a^2)$ добиваме:

$$2cx=b-a. \qquad (1)$$

Бидејќи $c\neq 0$, добиваме $x=\frac{b-a}{2c}$ е решение на (1). За да $x=\frac{b-a}{2c}$ е решение на дадената равенка треба $\frac{b-a}{2c}\neq\frac{a^2}{2}$, т.е. $\frac{b-a}{a^2}\neq c$ и $\frac{b-a}{2c}\neq -\frac{a^2}{2}$, т.е. $\frac{a-b}{a^2}\neq c$.

в) Имаме:

$$\frac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}=\frac{x-(a+b)+b^2-a^2}{(x-a)(x-b)}.$$

Равенката има смисол ако $x\neq a$ и $x\neq b$, па добиваме:

$$(x-a)^2-(x-b)^2=x-(a+b)+b^2-a^2$$

$$x(2a-2b+1)=(a+b)(2a-2b+1).$$

За $2a-2b+1\neq 0$ равенката има единствено решение $x=a+b$.

За $2a-2b+1=0$ добиваме $0\cdot x=0$ т.е. равенката има бесконечно многу решенија за кои треба да важи $x\neq a$ и $x\neq b$.

32. Од дефиницијата на апсолутна вредност ги добиваме равенките $x-\frac{1}{2}=\frac{11}{5}$ и $x-\frac{1}{2}=-\frac{11}{5}$ од каде наоѓаме $x=\frac{27}{10}$ или $x=-\frac{17}{10}$.

33. Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases} \qquad \text{и} \qquad |x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2\\ -(x-2), & x<2\end{cases}$$

па затоа треба да ги разгледане следните четири случаи:

i) $x\geq 2$, $x\geq 0$ и тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$x-2+2x-x=x+1, \text{ при услов } x\geq 2$$

чие решение е $x=3$.

ii) $x\geq 2$, $x<0$ што не е можно, бидејќи не постои реален број кој истовремено е поголем или еднаков на 2 и е помал од 0.

iii) $x<2$, $x\geq 0$ и тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2-x+2x-x=x+1, \text{ при услов } 0\leq x<2$$

чие решение е $x=1$.

Добиеното решение $x=1$ ги задоволува условите $x<2$, $x\geq 0$, па затоа е решение и на равенката (1).

iv) $x<2$, $x<0$ и тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$2-x+2x-(-x)=x+1, \text{ при услов } x<0$$

чие решение е $x=-1$.

Добиеното решение $x=-1$ го задоволува условот $x<0$, па затоа е решение и на равенката (1).

Значи равенката има три решенија $x=3$, $x=1$ и $x=-1$.

34. Да означиме

$$ab=A,\ (\tfrac{a+b}{2})^2=B \text{ и } \tfrac{a^2+b^2}{2}=C.$$

Јасно, $A \leq B \leq C$. Освен тоа јасно е дека меѓу броевите A, B и C има еднакви ако и само ако $a = b$.

Од друга страна, ако x е решение на дадената равенка, тогаш $x - C \geq 0$, бидејќи збирот на апсолутните вредности на левата страна од (1) е ненегативен број.

Значи $x \geq C \geq A \geq B$, па затоа $|x - A| = x - A$, $|x - B| = x - B$ и дадената равенка го добива обликот

$$x - A + x - B = x - C$$

чие решение е

$$x = A + B - C.$$

За добиеното решение треба да важи $x \geq C$ т.е. $A + B - C \geq C$. Значи $A + B \geq 2C$, но од $A \leq C$ и $B \leq C$ имаме $A = B = C$, што е можно ако и само ако $a = b$.

Конечно, равенката (1) има решение ако и само ако $a = b$ и тогаш решението $x = A + B - C = ab = a^2$ е единствено.

35. Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

па затоа треба да ги разгледаме следните четири случаи:

i) $x \geq 0$, $x \geq -1$ и тогаш равенката (1) го прима обликот

$$x + x + 1 + 9 - x = 0, \text{ при услов } x \geq 0$$

односно

$$x + 10 = 0$$

чие решение $x = -10$ не го задоволува условот $x \geq 0$.

ii) $x \geq 0$, $x < -1$ што не е можно, бидејќи не постои реален број кој истовремено е ненегативен и е помал од -1.

iii) $x < 0$, $x \geq -1$ и тогаш равенката (1) го добива обликот

$$-x + x + 1 + 9 - x = 0, \text{ при услов } -1 \leq x < 0$$

чие решение $x = 10$ не го задоволува условот $-1 \leq x < 0$, па затоа не е решение на равенката (1).

iv) $x < 0$, $x < -1$ и тогаш равенката (1) го добива обликот

$$-x - x - 1 + 9 - x = 0, \text{ при услов } x < -1$$

чие решение $x = \frac{8}{3}$ не го задоволува условот $x < -1$, па затоа не е решение на равенката (1).

Значи равенката нема решение во множеството на реалните броеви.

36. Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases},$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ -(x-3), & x<-3 \end{cases} \text{ и}$$

$$|2x-8|=\begin{cases} 2x-8, & x\geq 4 \\ -(2x-8), & x<4 \end{cases}$$

па затоа ќе ги разгледаме случаите:

i) $x\geq 2$, $x\geq 3$, $x\geq 4$ и притоа (1) го добива следниот облик

$$x-2+x-3+2x-8=9, \text{ при услов } x\geq 4$$

чие решение $x=\frac{11}{2}$ ги задоволува условите $x\geq 2$, $x\geq 3$, $x\geq 4$, па затоа $x=\frac{11}{2}$ е решение на (1).

ii) $x\geq 2$, $x\geq 3$, $x<4$ и при тоа (1) го добива обликот

$$x-2+x-3-2x+8=9, \text{ при услов } 3\leq x<4$$

т.е. $0\cdot x=6$ и оваа равенка нема решение, па затоа и равенката (1) нема решение.

iii) $x\geq 2$, $x<3$, $x\geq 4$, кој не е можен.

iv) $x\geq 2$, $x<3$, $x<4$ и при тоа (1) го добива обликот

$$x-2-x+3-2x+8=9, \text{ при услов } 2\leq x<3$$

чие решение $x=0$ не го задоволува условот $x\geq 2$ па затоа $x=0$ не е решение на (1).

v) $x<2$, $x\geq 3$, $x\geq 4$, кој не е можен.

vi), $x<2$ $x\geq 3$, $x<4$, кој не е можен.

vii) $x<2$, $x<3$, $x\geq 4$, кој не е можен.

viii) $x<2$, $x<3$, $x<4$ и во овој случај равенката (1) го добива обликот

$$-x+2-x+3-2x+8=9, \text{ при услов } x<2$$

чие решение $x=1$ ги задоволува условите $x<2$, $x<3$, $x<4$, па затоа $x=1$ е решение на (1).

Значи равенката (1) има две решенија $x=1$ и $x=\frac{11}{2}$.

37. Изразите под апсолутните вредности се анулираат за $x=-\frac{1}{2}$ и $x=2$. Затоа ќе ги разгледаме случаите:

i) $x>2$. Тогаш $2x+1>0$, $x-2>0$ и дадената равенка го добива обликот

$$2x+1+x-2=a,$$

од каде наоѓаме $x=\frac{a+1}{3}$. Ова е решение кога $\frac{a+1}{3}>2$ т.е. кога $a>5$.

ii) $-\frac{1}{2}\le x\le 2$. Тогаш $2x+1\ge 0$, $x-2\le 0$ и дадената равенка преминува во обликот

$$2x+1-(x-2)=a,$$

од каде наоѓаме $x=a-3$. Ова е решение кога $-\frac{1}{2}\le a-3\le 2$ т.е. $\frac{5}{2}\le a\le 5$. Во овој интервал цели броеви се $a=3,4,5$ и за целобројни решенија се $x=0,1,2$.

iii) $x<-\frac{1}{2}$. Тогаш $2x+1<0$, $x-2<0$ и равенката го добива обликот $-(2x+1)-(x-2)=a$, од каде наоѓаме $x=\frac{1-a}{3}$. Ова е решение кога $\frac{1-a}{3}<-\frac{1}{2}$ т.е. $\frac{5}{2}<a$.

Од досега изнесеното е јасно дека дадената равенка има решение за $a>\frac{5}{2}$, така за $a=3$ целобројно решение е само $x=0$, за $a=4$ имаме две целобројни решенија $x=1$ и $x=-1$, за $a=5$ целобројно решение е само $x=2$, кога $a>5$ равенката има две решенија $x_1=\frac{1+a}{3}$ и $x_2=\frac{1-a}{3}$. За нив имаме: ако $a=3k-1$, тогаш само x_1 е целобројно решение, ако $a=3k+1$, тогаш само x_2 е целобројно решение, ако $a=3k$, тогаш немаме целобројно решение.

Според тоа равенката има единствено целобројно решение за следниве целобројни вредности на параметарот a: $a=3$ и $a=3k\pm 1$, каде k е природен број поголем од 1.

38. а) За $x<-2$ дадената равенка е еквивалентна на равенката $|x-a|=-6x-27$, која има решение само ако $-6x-27\ge 0$, т.е. $x\le -\frac{9}{2}$. Ги разгледуваме случаите кога $x\ge a$ и $x<a$ и добиваме дека кога $x<-2$ дадената равенка има единствен корен

$$x_1=\begin{cases}\frac{a-27}{7}, & a<-\frac{9}{2}\\ -\frac{a+27}{5}, & a\ge -\frac{9}{2}\end{cases}$$

Аналогно кога $x\ge -2$ равенката има единствен корен

$$x_2=\begin{cases}\frac{3-a}{5}, & a\le\frac{1}{2}\\ \frac{a+3}{7}, & a>\frac{1}{2}\end{cases}$$

б) Од а) следува дека

$$|x_1-x_2|=\begin{cases}\frac{156-12a}{35}, & a<-\frac{9}{2}\\ 6, & -\frac{9}{2}\le a\le\frac{1}{2}\\ \frac{204+12a}{35}, & a>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Останува да забележиме дека

$$\frac{156-12a}{35}>6, \text{ за } a<-\frac{9}{2}$$

и

$$\frac{204+12a}{35}>6, \text{ за } a>\frac{1}{2}.$$

Значи $|x_1-x_2|\ge 6$ и равенството $|x_1-x_2|=6$ е исполнето кога $a\in[-\frac{9}{2},\frac{1}{2}]$.

39. Првата равенка нема решение ако $a<-1$, а втората ако $a<0$. Значи ако $a<-1$, тогаш равенките се еквивалентни бидејќи и двете немаат решение.

Ако $-1\le a<0$, тогаш равенките не се еквивалентни бидејќи втората равенка нема решение, а $x=-1$ е решение на првата равенка.

Ако $a\ge 0$, тогаш бројот 0 е решение на втората равенка. Со замена за $x=0$ во првата равенка добиваме $1+1=a+1$ т.е. $a=1$. Значи кога $a\ge 0$ и $a\ne 1$ равенките не се еквивалентни. Ако $a=1$, тогаш равенките го добиваат обликот

$$|x-1|+|x+1|=2 \text{ и } |1+x|+|1-x|=2$$

и тие очигледно се еквивалентни.

Конечно решение на задачата е $a<-1$ и $a=1$.

40. За да е дефиниран квадратниот корен треба да е $x-2\ge 0$, $x\ge 2$, па затоа $(\sqrt{x-2})^2=x-2$ и равенката го добива обликот

$$|x-2+1|=|x-1|=7$$

Од последната равенка следува $x-1=7$ или $x-1=-7$. Решенијата на последните равенки се $x=8$ и $x=-6<2$. Значи единствено решение на почетната равенка е $x=8$.

10. ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

10.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Реши ја неравенката

а) $2x+5\geq 15-3x$ б) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-4}{3}<-\frac{x-3}{4}$.

Задача 2. Најди ги сите цели позитивни решенија на неравенката

$$\frac{9x+7}{2}-(x-\frac{x-2}{7})<36. \qquad (1)$$

Задача 3. Запиши го множеството цели броеви x, кои ги задоволуваат неравенствата $\frac{1}{3}<\frac{1-x}{5}<\frac{11}{12}$.

Задача 4. Реши ја неравенката

а) $-|3y+2|>3$, б) $|3-x|>1$,

в) $|x-2|<x+3$, г) $|x+2|-2|x-1|<4$,

д) $|x+1|>2|x+2|$.

Задача 5. Реши ја неравенката

$$|x+3|+|x-1|+|x-3|>16+x. \qquad (1)$$

Задача 6. Определи ги сите вредности на параметарот m за кои линеарната равенка $\frac{m}{2}x-3=2(x-m)$ има негативно решение.

Задача 7. Реши ја неравенката $\frac{2-x}{x-1}>\frac{2}{3}$.

Задача 8. Реши ја неравенката $\frac{3a-2}{a+1}<0$.

Задача 9. Реши ја параметарската неравенка по непознатата x

а) $x-m+5m(x-1)<0$,

б) $(m-1)x>(m-1)(x-1)$,

в) $3xm+1>4x+3m$.

Задача 10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{b^2+b}{b^2+ab+a^2}:\frac{b^2-1}{b^3-a^3}+\frac{b^3+a^3}{b^2-1}:\frac{b^2-ab+a^2}{ab-a},$$

каде a е најмалото позитивно решение на неравенката $|a-3|+3\leq 2|a-3|$, вредноста на b е еднаква на вредноста на изразот $\frac{2^{1997}}{(\frac{1}{2})^{-1996}}$.

Задача 11. Реши ги неравенките

а) $|3x-|3x-1||\leq 3$ б) $\sqrt{4x^2+12x+9}>5x-3$,

в) $|2x-1|+|3x-7|\leq 2x$, г) $|x-1|+|x-3|+|2x-8|<10$,

д) $|x-|2x-3||>2$, ѓ) $\sqrt{9x^2+12x+4}\geq 2x-1$,

е) $\sqrt{0,25x^2+0,1x+0,01}>\frac{1}{4}x-0,2$,

ж) $\sqrt{\frac{x^2}{16}-\frac{x}{6}+\frac{1}{9}}\leq -\frac{x}{8}-\frac{3}{4}$.

Задача 12. Реши ја неравенката

$$x<4|x-2|-4,\ x\in\mathbf{R}.$$

Задача 13. Дадена е равенката $\frac{9x+4}{6}:\frac{3}{4}=p:3$. За кои вредности на параметарот p равенката има решение x_0 такво што $0\leq x_0\leq 1$.

10.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$2x+3x\geq 15-5,$$

т.е. на неравенката $5x\geq 10$. Според тоа, $x\geq\frac{10}{5}=2$ и решение на почетната неравенка се сите реални броеви $x\geq 2$, т.е. $x\in[2,\infty)$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}<\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{4}{3},$$

т.е. на неравенката

$$\frac{6x-4x+3x}{12} < \frac{9-6-16}{12},$$

од што добиваме $5x < -13$, т.е. $x < -\frac{13}{5} = -2{,}6$. Значи решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $(-\infty, -\frac{13}{5})$.

2. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $51x < 459$ од каде наоѓаме $x < \frac{459}{51} = 9$. Според тоа, решение на (1) е секој реален број од интервалот $(-\infty,\ 9)$. Значи цели позитивни решенија на (1) се : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

3. Имаме

$$\frac{1\cdot 20}{3\cdot 20} < \frac{(1-x)\cdot 12}{5\cdot 12} < \frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}, \text{ т.е. } \frac{20}{60} < \frac{12-12x}{60} < \frac{55}{60}$$

од што следува

$$20 < 12 - 12x < 55,$$

и бидејќи x е цел број со непосредна проверка добиваме $x \in \{-1, -2, -3\}$.

4. а) Левата страна на дадената неравенка секогаш е помала или еднаква на нула. Навистина, $|3y+2| \geq 0$, за секој $y \in \mathbf{R}$, па затоа $-|3y+2| \leq 0$ за секој $y \in \mathbf{R}$. Од друга страна 3>0, па затоа $-|3y+2| < 3$, т.е. почетната неравенка нема решение.

б) Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x\ , & 3 \geq x \\ -(3-x)\ , & 3 < x. \end{cases}$$

Ако $3-x \geq 0$, т.е. $x \leq 3$, тогаш дадената неравенка преминува во обликот $3-x > 1$, од каде $-x > -2$, т.е. $x < 2$. Бидејќи за $x < 2$ важи $x \leq 3$ заклучуваме дека секој реален број од интервалот $(-\infty,\ 2)$ е решение на почетната неравенка.

Ако $3-x < 0$, т.е. $x > 3$, тогаш дадената неравенка го добива обликот $x-3 > 1$, од каде $x > 4$. Бидејќи за $x > 4$ важи $x > 3$ заклучуваме дека секој реален број од интервалот $(4,\ \infty)$ е решение на почетната неравенка. Значи, множеството решенија на почетната равенка е $(-\infty,\ 2) \cup (4,\ \infty)$.

в) Бидејќи $|x-2| \geq 0$, дадената неравенка ќе има решение ако $x+3>0$ т.е. ако $x > -3$.

Ако $x-2\geq 0$, т.е. ако $x\geq 2$, тогаш $|x-2|=x-2$ и дадената неравенка го добива обликот

$$x-2<x+3,$$

т.е. $0\cdot x<5$. Последното неравенство е задоволено за секој $x\in\mathbf{R}$. Но, претходно заклучивме дека $x>-3$ и $x\geq 2$, па затоа решение на дадената неравенка е интервалот $[2,\infty)$.

Ако $x-2<0$, т.е. ако $x<2$, тогаш $|x-2|=-(x-2)$ и дадената неравенка го прима обликот

$$2-x<x+3,$$

т.е. $2x>-1$, од каде $x>-\frac{1}{2}$. Но, претходно заклучивме дека $x>-3$ и $x<2$, па затоа решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $(-\frac{1}{2},2)$.

Конечно решение на дадената неравенка е секој реален број од интервалот $(-\frac{1}{2},2)\cup[2,\infty)=(-\frac{1}{2},\infty)$.

г) Ги определуваме вредностите на x за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутната вредност. Имаме, $x+2=0$, од што следува $x=-2$ и $x-1=0$ од што следува $x=1$. Добиените вредности -2 и 1 ја делат бројната оска на интервалите $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$ и $[1,\infty)$. Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од овие интервали.

i) Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш $x+2<0$ и $x-1<0$, па $|x+2|=-(x+2)$ и $|x-1|=-(x-1)=1-x$. Дадената неравенка го добива обликот

$$-(x+2)-2(1-x)<4,$$

односно $x<8$. Но, во случајот $x<-2$, па решение на почетната неравенка е е секој реален број од интервалот $(-\infty,-2)$.

ii) Ако $x\in[-2,1)$, тогаш $x+2\geq 0$ и $x-1<0$, па затоа $|x+2|=x+2$ и $|x-1|=1-x$. Дадената неравенка го добива обликот

$$x+2-2(1-x)<4,$$

т.е. $x<1\frac{1}{3}$. Но, во случајот $x\in[-2,1)$, па затоа решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $[-2,1)$.

iii) Ако $x\in[1,\infty)$, тогаш $x+2\geq 0$ и $x-1\geq 0$, па затоа $|x+2|=x+2$ и $|x-1|=x-1$. Дадената неравенка преоѓа во видот

$$x+2-2(x-1)<4,$$

т.е. $x>0$. Но, во тој случај $x\in[1,\infty)$, па затоа решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $[1,\infty)$. Според тоа, множеството решенија на почетната неравенка е

$$(-\infty,-2)\cup[-2,1)\cup[1,\infty)=(-\infty,\infty).$$

д) Ги одредуваме вредностите на x за кои се анулираат изразите под апсолутната вредност. Имаме $x=-1$ и $x=-2$. Добиените вредности -2 и -1 ја делат бројната оска на интервалите $(-\infty,-2)$, $[-2,-1)$ и $[-1,\infty)$. Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од овие интервали.

i) Ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш $x+2<0$ и $x+1<0$, па $|x+2|=-(x+2)$ и $|x+1|=-(x+1)$. Дадената неравенка го добива обликот

$$-(x+1)>-2(x+2),$$

односно $x>-3$. Но, во овој случај $x<-2$, па решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $(-3,-2)$.

ii) Ако $x\in[-2,-1)$, тогаш $x+2\geq 0$ и $x+1<0$, па е $|x+2|=x+2$ и $|x+1|=-(x+1)$. Дадената неравенка го добива обликот

$$-(x+1)>2(x+2)\ ,$$

т.е. $x<-\frac{5}{3}$. Бидејќи $[-2,-1)\cap(-\infty,-\frac{5}{3})=[-2,-\frac{5}{3})$ следува дека во овој случај решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот $[-2,-\frac{5}{3})$.

iii) Ако $x\in[-1,\infty)$, тогаш $x+2\geq 0$ и $x+1\geq 0$, па затоа $|x+2|=x+2$ и $|x+1|=x+1$ и дадената неравенка го добива обликот

$$x+1>2(x+2)$$

чие решение е $x<-3$. Но, $x\in[-1,\infty)$ добиваме дека во овој случај дадената неравенка нема решение.

Конечно решение на дадената неравенка е секој реален број од интервалот

$$(-3,-2)\cup[-2,-\tfrac{5}{3})=(-3,-\tfrac{5}{3}).$$

5. Ги одредуваме вредностите за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутна вредност. Имаме $x=-3$, $x=1$ и $x=3$ и овие вредности ја делат бројната оска на интервалите $(-\infty,-3)$, $[-3,1)$, $[1,3)$ и $[3,\infty)$. Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од интервалите.

i) Ако $x\in(-\infty,-3)$, тогаш (1) преминува во следната неравенка

$$-x-3-x+1-x+3>16+x$$

чие решение е $x<-\frac{15}{4}$. Но $x\in(-\infty,-3)$, па затоа

$$x \in (-\infty, -3) \cap (-\infty, -\tfrac{15}{4}) = (-\infty, -\tfrac{15}{4}) .$$

ii) Ако $x \in [-3,1)$, тогаш (1) го добива обликот

$$x+3-x+1-x+3>16+x$$

чие решение е $x<-\frac{9}{2}$. Но, $x \in [-3,1)$, па $x \in [-3,1) \cap (-\infty, -\frac{9}{2}) = \varnothing$, т.е. во овој случај дадената неравенка нема решение.

iii) Ако $x \in [1,3)$, тогаш (1) го прима обликот $0 \cdot x > 11$ која нема решение во множеството реални броеви, па и во интервалот [1,3).

iv) Ако $x \in [3,\infty)$ тогаш (1) го добива обликот

$$x+3+x-1+x-3>16+x$$

чие решение е $x>\frac{17}{2}$. Значи во овој случај решение на дадената неравенка е

$$x \in [3,\infty) \cap (\tfrac{17}{2},\infty) = (\tfrac{17}{2},\infty) .$$

Конечно, решение на дадената неравенка е е секој реален број од множеството

$$(-\infty, -\tfrac{15}{4}) \cup (\tfrac{17}{2},\infty) .$$

6. Дадената равенка има решение $x=\frac{2(3-2m)}{m-4}$ и тоа е негативно ако важи $\frac{3-2m}{m-4}<0$, од каде добиваме $m<\frac{3}{2}$ или $m>4$.

7. Имаме

$$\frac{2-x}{x-1}-\frac{2}{3}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6-3x-2x+2}{3(x-1)}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8\text{-}5x}{x\text{-}1}>0$$

Количник на два броја е позитивен ако и двата се со ист знак, па затоа од последната неравенка добиваме

$$\begin{cases} 8-5x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8-5x<0 \\ x-1<0 \end{cases}$$

т.е.

$$\frac{8}{5}>x>1 \text{ или } \begin{cases} x<1 \\ x>\frac{8}{5} \end{cases}$$

Но, бидејќи не постои x кој е помал од 1 и поголем од $\frac{8}{5}$ добиваме дека решение на дадената неравенка е интервалот $(1, \frac{8}{5})$.

11. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

11.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Реши го системот равенки

а) $\begin{cases} \frac{\frac{4}{5}}{0,4}x-\frac{5^5}{25^2}y-\frac{54^2-52^2}{53}=0 \\ \frac{x-2y+1}{2}-\frac{x-2y}{3}-\frac{1,3+y}{6}=1-\frac{1,3-2y}{6} \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+4y=12 \\ x+7y=19 \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+2)^2-(x-3)(x+3)-3(y+5)=0 \\ (2y-3)^2-y(4y-3)+4(3x-3\frac{3}{4})=0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} (2x-3)^2-(2x+3)(2x-3)=1-y \\ \frac{2x+y}{3}-\frac{3x+y}{2}=0 \end{cases}$

Задача 2. За кои вредности на променливите x и y разликата на изразите $\frac{2x+15}{8}$ и $1\frac{1}{8}(y-1)$ е трипати помала од изразот $2(5-2y)$, а изразот $\frac{x+5\frac{3}{4}}{2}$ е за 0,125 поголем од $3y$.

Задача 3. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} ax+y=2 \\ 2x+y=a \end{cases}$, каде a е параметар

б) $\begin{cases} ax+by=2 \\ x+y=1 \end{cases}$, каде a и b се параметри.

Задача 4. Одреди го параметарот a така што системот:

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$$

а) има бесконечно многу решенија, б) нема решенија.

Задача 5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax+(2a+1)y=a \\ -x+ay=2a \end{cases}.$$

За кои вредности на параметарот a важи $x\geq 0$ и $y\geq 0$.

Задача 6. Определи ги целобројните вредности на параметарот a, за кои системот

$$\begin{cases} a(x-y-3)=5-x-2y \\ a(x+y-3)=2y+3-x \end{cases}$$

има целобројни решенија.

Задача 7. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} (2x-3)^2-(4x+3)(x-1)=2y \\ \frac{3x+5}{2y-1}=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{2x}+\frac{4}{3y}=1\frac{1}{6} \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Задача 8. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} \frac{a-b}{ab}-\frac{x-y}{p}=\frac{2b}{p} \\ \frac{b(x+2b)}{ay}=1 \end{cases}$ каде a,b,p се параметри.

б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b \end{cases}$ каде a и b се параметри.

Задача 9. Реши го системот:

а) $\begin{cases} x-2y+5z=19 \\ 3y-4z=-15 \\ 2z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x-y-z=3 \\ x+y+2z=-3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 3x+3y+3z=6 \end{cases}$

Задача 10. Реши го системот

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ ax+4y+z=5 \\ 6x+(a+2)y+2z=13 \end{cases}$$, каде $a\neq 0$ е параметар.

Задача 11. Реши го системот:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{z}=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{7}{10} \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{13}{40} \\ \frac{z+x}{zx}=\frac{8}{5} \end{cases}$.

Задача 12. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ x+z=cxz \\ \frac{y+z}{yz}=b \end{cases},$$

каде a,b и c се параметри.

Задача 13. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 1+x^2=2y \\ 1+y^2=2z \\ 1+z^2=2t \\ 1+t^2=2x \end{cases}$$

Задача 14. Реши го системот

$$\begin{cases} x(y+z)=35 \\ y(z+x)=32 \\ z(x+y)=27 \end{cases}.$$

Задача 15. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(x+z)=10 \\ z(x+y)=13 \end{cases}.$$

Задача 16. Реши го системот:

а) $\begin{cases} |x|-2y=5 \\ |x|+3|y+2|=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=2 \\ |x|+|y|=2 \end{cases}$

Задача 17. Реши го системот

$$\begin{cases} |x+2|+|y-1|=5 \\ |x+2|=4y-4 \end{cases} \qquad (1)$$

Задача 18. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=1 \\ |x|+|y|=5 \end{cases} \qquad (1)$$

Задача 19. Најди ги сите вредности на параметарот a, за кои што системот

$$\begin{cases} x+4|y|=|x| \\ |y|+|x-a|=1 \end{cases}$$

има точно две решенија.

Задача 20. Реши го системот равенки $\begin{cases} |x|+|y-1|=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$

Задача 21. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y+1}=\frac{3}{x(y+1)} \\ \frac{x}{y-3}=\frac{1}{2} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2 \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{11}{4} \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x+2y}+\frac{3y}{8(y-x)}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x+2y}+\frac{y}{y-x}=\frac{3}{2} \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x-2}{2}-\frac{y+1}{8}=\frac{7}{8} \\ \frac{x}{6}-\frac{y+7}{8}=\frac{13}{24} \\ \frac{2y-x}{15}-\frac{y+z}{6}=-\frac{7}{10} \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{5}{z}=-3 \\ \frac{2}{y}+\frac{1}{x}=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$

Задача 22. Реши ги системите, сметајќи дека x и y се непознати, а a,b,c,m и n се параметри.

а) $\begin{cases} x+y=a+b \\ bx+ay=2ab \end{cases}$

б) $\begin{cases} (m-1)x-(m+1)y=0 \\ 3x+y=2m+1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} y+(3m+1)x=0 \\ y+2x=m^2-1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \\ x+y=a+b \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ bx-y=0 \end{cases}$

ѓ) $\begin{cases} x+y=\frac{a^2+b^2}{ab} \\ ax+by=2a \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=1 \\ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=c \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=a \\ \frac{xz}{x+z}=b\,,\ a,b,c\neq 0 \\ \frac{zy}{y+z}=c \end{cases}$

з) $\begin{cases} |x-2|+|y-1|=1 \\ |x-2|-y=-4 \end{cases}$

11.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 2x-5y=4 \\ x-5y=3 \end{cases}.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме

$$(2x-5y)-(x-5y)=4-3,\text{ т.е. } x=1\ .$$

Со замена во втората равенка добиваме $1-5y=3$, т.е. $y=-\frac{2}{5}$. Значи, решение на дадениот систем е $x=1$, $y=-\frac{2}{5}$.

б) Од втората равенка на системот го изразуваме x преку y и добиваме $x=19-7y$. Сега со замена во првата равенка наоѓаме

$$5(19-7y)+4y=2$$

и добиваме нов систем

$$\begin{cases} 5(19-7y)+4y=2 \\ x=19-7y \end{cases} \tag{1}$$

кој е еквивалентен на дадениот. Ја решаваме првата равенка во (1) и определуваме $y=3$. Со замена во втората равенка за $y=3$ наоѓаме $x=-2$.

Конечно, решение на системот (1), што значи и на дадениот систем е $x=-2$, $y=3$.

в) Дадениот систем го сведуваме во систем во нормален облик и го добиваме системот

$$\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 12x-9y=6 \end{cases} \qquad (1)$$

кој е еквивалентен на дадениот. Втората равенка на (1) ја делиме со 3 и добиваме еквивалентен систем

$$\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4x-3y=2 \end{cases} \qquad (2)$$

во кој двете равенки се исти. Решението на системот (2) е решението на равенката $4x-3y=2$. Оваа равенка има бесконечно многу решенија, па значи и системот (2), а со тоа и дадениот систем, има бесконечно многу решенија кои се определени со $x=t$, $y=\frac{4t-2}{3}$, $t\in\mathbf{R}$.

г) Дадениот систем го сведуваме на нормален облик и го добиваме системот кој е еквивалентен на дадениот:

$$\begin{cases} -12x+y=-17 \\ -5x-y=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ако ги собереме двете равенки на системот (1) добиваме

$$-12x+y+(-5x-y)=-17 \text{, т.е. } 17x=17.$$

Со последната равенка и една од равенките на системот (1) на пример втората, формираме нов систем

$$\begin{cases} 17x=17 \\ -5x-y=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Од првата равенка на (2) имаме $x=1$ и со замена во втората имаме $y=-5$.

2. Од условите на задачата го имаме системот

$$\begin{cases} \frac{2x+15}{8}-1\frac{1}{8}(y-1)=\frac{2(5-2y)}{3} \\ \frac{x+5\frac{3}{4}}{2}-3y=0{,}125 \end{cases}.$$

Решение на овој систем е: $x=\frac{1}{2}$, $y=1$.

3. а) Од втората равенка го изразуваме y преку x и со замена во првата равенка го добиваме системот

$$\begin{cases}(a-2)x=2-a\\ y=a-2x\end{cases} \qquad (1)$$

кој е еквивалентен на дадениот. Имаме два случаи:

i) Ако $a-2\neq 0$, т.е. $a\neq 2$, тогаш од првата равенка го определуваме

$$x=\tfrac{2-a}{a-2}=-1.$$

Ако замениме во втората равенка добиваме $y=a+2$. Значи, за $a\neq 2$ решение на системот (1), а со тоа и на дадениот систем е $x=1, y=a+2$.

ii) Ако $a-2=0$, т.е. $a=2$ тогаш првата равенка на (1) го добива обликот $0\cdot x=0$ и таа има бесконечно многу решенија. За $a=2$ втората равенка на (1) ќе биде $y=2-2x$.Така решенијата на системот во овој случај се: $x=t$, $y=2-2t$, $t\in\mathbf{R}$.

б) Од втората равенка го изразуваме *y* преку *x* и заменуваме во првата равенка. Го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases}(a-b)x=2-b\\ y=1-x\end{cases} \qquad (1)$$

кој е еквивалентен на дадениот. Ги разгледуваме следниве два случаја:

i) Ако $a-b=0$, т.е. $a=b$ првата равенка на (1) се трансформира во обликот $0\cdot x=2-b$. Можни се следниве два потслучаи:

1) Ако $2-b\neq 0$, т.е. $b\neq 2$, тогаш системот (1) нема решение, па затоа и дадениот систем нема решение.

2) Ако $2-b=0$, т.е. $b=2$, тогаш првата равенка на (1) го добива обликот $0\cdot x=0$ и е задоволена за секоја вредност на *x*. Системот (1) при $a=b=2$ има бесконечно многу решенија кои се од облик: $x=t,\quad y=1-t$ каде $t\in\mathbb{R}$.

ii) Ако $a-b\neq 0$, т.е. $a\neq b$ решение на системот (1) , па следствено и на дадениот систем е: $x=\frac{2-b}{a-b},\ \ y=\frac{a-2}{a-b}$.

4. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}ax+y=1\\ (1-a^2)x=1-a\end{cases} \qquad (1)$$

а) За да (1) има бесконечно многу решенија потребно е и доволно втората равенка да е од облик $0x=0$, т.е. да е $1-a^2=0$ и $1-a=0$. Од

$1-a^2=0$ имаме $(1-a)(1+a)=0$, т.е. $a=\pm 1$, а од $1-a=0$ имаме $a=1$. Значи, за да $(1-a^2)x=1-a$ е од облик $0x=0$ треба $a=1$.

Според тоа, за $a=1$ дадениот систем има бесконечно многу решенија кои се добиваат со $x=t, \quad y=1-t$ каде $t\in\mathbf{R}$.

б) За да системот (1) нема решение потребно е $1-a\neq 0$ и $1-a^2=0$. Но, тоа е можно за $a=-1$. Така системот (1) се трансформира во системот

$$\begin{cases}-x+y=1\\ 0x=2.\end{cases}$$

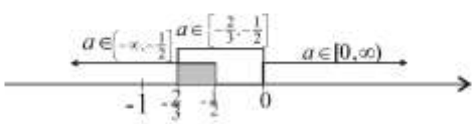
Овој систем нема решение, па значи и системот (1), т.е. дадениот систем при $a=-1$ нема решение.

5. Лесно се гледа дека при $a\neq -1$ системот има едно решение

$$x=\frac{-a(3a+2)}{(a+1)^2},\ y=\frac{a(2a+1)}{(a+1)^2},$$

а за $a=-1$ системот нема решение. Сега да одредиме за кои $a\neq -1$ важи $x\geq 0$ и $y\geq 0$. Знакот на x и y зависи само од нивните броители, бидејќи именителите им се позитивни.

1) $x\geq 0 \Leftrightarrow -a(3a+2)\geq 0$, односно $a(3a+2)\leq 0$. Производот на два броја е непозитивен ако двата броја имаат различни знаци. Според тоа $a\geq 0,\ 3a+2\leq 0$ или $a\leq 0,\ \ 3a+2\geq 0$, односно $a\geq 0$ и $a\leq -\frac{2}{3}$ или $a\leq 0$ и $a\geq -\frac{2}{3}$. Не е можно $a\geq 0$ и $a\leq -\frac{2}{3}$, па останува $a\leq 0$ и $a\geq -\frac{2}{3}$, односно $a\in[-\frac{2}{3},0]$. Според тоа $x\geq 0$ ако $a\in[-\frac{2}{3},0]$.



цртеж 1

2) $y\geq 0 \Leftrightarrow a(2a+1)\geq 0$. Слично размислуваме како а) и добиваме дека мора да важи $a\geq 0$ и $2a+1\geq 0$ или $a\leq 0$ и $2a+1\leq 0$, односно $a\geq 0$ и $a\geq -\frac{1}{2}$ или $a\leq 0$ и $a\leq -\frac{1}{2}$. Значи

$$a\in[0,\infty)\cup(-\infty,-\tfrac{1}{2}].$$

Значи $x\geq 0$ и $y\geq 0$ ако $a\in[-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}]\cup\{0\}$ (цртеж 1).

6. За $a \neq -1$ и $a \neq 2$ решение на системот е

$$x = \frac{3a+4}{a+1} \text{ и } y = \frac{1}{2-a}.$$

За $a = -1$ или $a = 2$ системот нема решение. Бидејќи решенијата на системот се

$$x = \frac{3a+4}{a+1} = 3 + \frac{1}{a+1} \text{ и } y = \frac{1}{2-a},$$

па за x да е цел број треба $\frac{1}{a+1}$ да е цел број, а тоа е можно ако $a+1=1$ или $a+1=-1$, односно $a=0$ или $a=-2$. Слично, за да y е цел број треба $2-a=1$ или $2-a=-1$, т.е. $a=1$ или $a=3$. Конечно $a \in \{0,-2\} \cap \{1,3\} = \emptyset$ па не постои цел број a за кој истовремено x и y се цели броеви.

7. а) Дадениот систем е дефиниран за $2y-1 \neq 0$, т.е. за $y \neq \frac{1}{2}$. Системот го трансформираме во нормален облик и добиваме

$$\begin{cases} -11x - 2y = -12 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \tag{1}$$

кој при $y \neq \frac{1}{2}$ е еквивалентен со дадениот. Го решаваме системот (1) и наоѓаме $x = 2,\ y = -5$. Бидејќи $y = -5$ го задоволува условот $y \neq \frac{1}{2}$, заклучуваме дека решението на системот (1) е решение и на дадениот систем.

б) Дадениот систем е дефиниран за $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Имаме

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{7}{6} \\ 3\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Воведуваме нови непознати

$$u = \frac{1}{x} \text{ и } v = \frac{1}{y} \tag{2}$$

и системот (1) го добива видот

$$\begin{cases} \frac{3}{2}u + \frac{4}{3}v = \frac{7}{6} \\ 3u - v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9u + 8v = 7 \\ 6u - 2v = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Решение на системот (3) е $u = \frac{1}{3}, v = \frac{1}{2}$. Од (2) ги определуваме x и y, т.е.

$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}, \frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, т.е. $x=3,\ \ y=2$. Определените вредности на x и y ги задоволуваат условите $x\neq 0$ и $y\neq 0$, па затоа се решение на дадениот систем.

8. а) Системот е дефиниран за $a\neq 0$,$b\neq 0$,$p\neq 0$ и $y\neq 0$. При тие услови го добиваме системот

$$\begin{cases} -abx+aby=2ab^2-p(a-b) \\ bx-ay=-2b^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Од системот (1) наоѓаме

$$a(b-a)y=p(b-a) \qquad (2)$$

Од претходно, $a\neq 0$. Ако $b\neq a$, тогаш од (2) наоѓаме $y=\frac{p}{a}$. Бидејќи $b\neq 0$ од втората равенка на системот (1) наоѓаме $x=\frac{p-2b^2}{b}$. Значи, при $a\neq 0, b\neq 0,\ \ p\neq 0$ и $a\neq b$ дадениот систем има едно решение $x=\frac{p-2b^2}{b}$ и $y=\frac{p}{a}$.

Ако $b-a=0$, тогаш равенката (2) прима вид $0\cdot y=0$, т.е. таа е задоволена за секој *y*. Во овој случај системот има бесконечно многу решенија

$$y=t,\ \ x=\frac{at-2b^2}{b},\ \ t\neq 0\,.$$

б) Системот е дефиниран за $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Воведуваме нови непознати

$$u=\frac{1}{x} \text{ и } v=\frac{1}{y} \qquad (1)$$

и го добиваме системот

$$\begin{cases} u+v=a \\ u-v=b \end{cases}$$

чие решение е $u=\frac{a+b}{2},\ \ v=\frac{a-b}{2}$. Од (1) наоѓаме $\frac{1}{x}=\frac{a+b}{2}$, односно $(a+b)x=2$. Ако $a+b\neq 0$, тогаш $x=\frac{2}{a+b}$. Слично, од (1) $(a-b)y=2$, па ако $a-b\neq 0$, тогаш $y=\frac{2}{a-b}$. Бидејќи вака најдените вредност за x и y се различни од 0 за $a\neq \pm b$, добиваме дека за $a\neq \pm b$ дадениот систем има едно единствено решение $x=\frac{2}{a+b}$ и $y=\frac{2}{a-b}$.

Ако $a=b$ или $a=-b$ од равенките $(a+b)x=2$ или $(a-b)y=2$ добиваме $0x=2$ или $0y=2$ што не е можно. Значи, во овој случај дадениот систем нема решение.

9. а) Од третата равенка на дадениот систем наоѓаме $z=3$. Со замена во втората равенка на $z=3$ и решавајќи ја по y наоѓаме $y=-1$. Заменувајќи ги во првата равенка овие вредности на y и z добиваме $x=2$. Конечно, решение на системот е $x=2,\ \ y=-1,\ \ z=3$.

б) Од првата равенка на системот го изразуваме z:

$$z=x+2y-8 \tag{1}$$

Сега за z заменуваме во втората и третата равенка на дадениот систем и добиваме систем од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} x-3y=-5 \\ 3x+5y=13 \end{cases} \tag{2}$$

Решение на системот (2) е $x=1$, $y=2$. Заменувајќи ги овие вредности на x и y во (1) добиваме $z=-3$.

в) Ако втората равенка ја поделиме со 2, а третата со 3 го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \tag{1}$$

кој е еквивалентен на дадениот и во кој сите три равенки се еднакви. Системот (1) има бесконечно многу решенија, па значи и дадениот систем има бесконечно многу решенија, кои се дадени со: $x=t, y=p,\ z=1-t-p$ каде $t,p\in \mathbf{R}$.

г) Ако третата равенка ја поделиме со 3 добиваме нов систем, кој е еквивалентен со дадениот:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=2\,. \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Првата и третата равенка на системот (1) се противречни една на друга (не може збир на три броја истовремено да е 1 и 2) па затоа дадениот систем нема решение.

10. Од првата равенка на системот го изразуваме z и наоѓаме

$$z=6-x-y \tag{1}$$

Заменуваме за z во останатите две равенки и го добиваме системот

$$\begin{cases}(a-1)x+3y=-1\\ 4x+ay=1\end{cases} \tag{2}$$

Го решаваме системот (2). Од втората равенка го изразуваме y:

$$y=\frac{1-4x}{a} \tag{3}$$

и заменуваме во првата равенка. Оттука $(a^2-a-12)x=-(a+3)$, т.е.

$$(a+3)(a-4)x=-(a+3) \tag{4}$$

i) Ако $a\neq-3$ и $a\neq4$, тогаш $x=-\frac{1}{a-4}$, т.е. $x=\frac{1}{4-a}$. Со замена во (3) имаме $y=\frac{1}{a-4}$. Тогаш од (1) наоѓаме $z=6+\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a-4}=6$. Значи, за $a\neq-3$ и $a\neq-4$ системот има единствено решение $x=\frac{1}{4-a}$, $y=\frac{1}{a-4}$ и $z=6$

ii) Ако $a\neq-3,\ a=4$ равенката (4) се трансформира во обликот $0\cdot x=-7$, па во овој случај системот нема решение.

iii) Ако $a=-3,\ a\neq4$, равенката (4) го добива обликот $0x=0$, што е исполнето за секој реален број *x*. За фиксирана вредност на *x* вредностите на y и z ги одредуваме, на пример, од првите две равенки кога ќе замениме $a=-3$. Имаме,

$$\begin{cases}x+y+z=6\\ -3x+4y+z=5\end{cases}$$

од каде $y=\frac{4x-1}{3}$ и $z=\frac{19-7x}{3}$, па значи при $a=-3$ решенијата на системот се $(x,\ \frac{4x-1}{3},\ \frac{19-7x}{3})$, каде $x\in\mathbf{R}$

11. а) Дадениот систем е дефиниран ако $x\neq0, y\neq0$ и $z\neq0$. Воведуваме нови непознати $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$ и $w=\frac{1}{z}$ и го добиваме системот

$$\begin{cases}u+v+w=1\\ 2u-v+w=\frac{5}{6},\\ u-3w=0\end{cases}$$

чие решение е $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{3}$ и $w=\frac{1}{6}$. Сега од (1) наоѓаме $x=2$, $y=3$ и $z=6$. Бидејќи за x,y и z важи условот $x\neq0, y\neq0$ и $z\neq0$ заклучуваме дека решение на дадениот систем е $x=2$, $y=3$ и $z=6$.

б) Системот е дефиниран ако $x\neq 0, y\neq 0$ и $z\neq 0$. Дадениот систем го запишуваме во видот

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{13}{40}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{8}{5}\end{cases} \tag{1}$$

Ако ги собереме равенките на (1) добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{21}{16} \tag{2}$$

Од (2) и од втората равенка на (1) наоѓаме

$$\frac{1}{x}+\frac{13}{40}=\frac{21}{16}\text{, т.е. } x=\frac{80}{79}.$$

Аналогно од (2) и од третата равенка на (1) наоѓаме $y=-\frac{80}{23}$, а од (2) и од првата равенка на (1) наоѓаме $z=\frac{80}{49}$.

12. Системот е дефиниран за $x\neq 0$, $y\neq 0$ и $z\neq 0$. Истиот ќе го запишеме во облик

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=b\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=c\end{cases} \tag{1}$$

Од (1) наоѓаме

$$\frac{1}{x}=\frac{a-b+c}{2},\ \frac{1}{y}=\frac{a+b-c}{2}\ \text{ и }\ \frac{1}{z}=\frac{-a+b+c}{2}.$$

Ако

$$a-b+c\neq 0,\ a+b-c\neq 0\ \text{ и }\ -a+b+c\neq 0$$

решенија на системот се:

$$x=\frac{2}{a-b+c},\ y=\frac{2}{a+b-c}\ \text{ и }\ z=\frac{2}{-a+b+c}.$$

13. Ако ги собереме равенките од системот ја добиваме равенката

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(t-1)^2=0$$

чие единствено решение е

$$x=y=z=t=1.$$

14. Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} xy + xz = 35, \\ yz + yx = 32, \\ zx + zy = 27. \end{cases}$$

Ги воведуваме смените $a = xy, b = xz, c = yz$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} a + b = 35 & (1) \\ c + a = 32 & (2) \\ b + c = 27 & (3) \end{cases}$$

Со собирање и одземање на равенките добиваме:

$(1) + (2) - (3):$ $\qquad 2a = 40$,

$(2) + (3) - (1):$ $\qquad 2c = 24$

$(1) + (3) - (2):$ $\qquad 2b = 30$.

Според тоа, последниот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} a = 20 \\ b = 15 \\ c = 12. \end{cases}$$

Значи, почетниот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} xy = 20 \\ xz = 15 \\ yz = 12, \end{cases}$$

и притоа $x, y, z \neq 0$. Ако ги помножиме равенките на последниот систем добиваме $(xyz)^2 = 3600$, од каде наоѓаме $xyz = \pm 60$. Конечно, од

$$x = \frac{xyz}{yz}, \; y = \frac{xyz}{xz}, \; z = \frac{xyz}{xy}$$

добиваме дека решенијата на дадениот систем се

$$(x, y, z) \in \{(5,4,3), (-5,-4,-3)\}.$$

15. *Прв начин.* Ја воведуваме смената

$$x_1 = xy, x_2 = xz, x_3 = yz.$$

Тогаш системот се трансформира во видот:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 13 \end{cases}.$$

Го изразуваме x_2 од првата равенка и го заменуваме во третата, со што го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_1 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ 5 - x_1 + x_3 = 13 \end{cases}$$

Ако ги собереме вторатат и третата равенка го определуваме $x_3 = 9$ и со замена во втората равенка добиваме $x_1 = 1$, па конечно од првата равенка имаме $x_2 = 4$. Се враќаме на старите непознати и добиваме

$$\begin{cases} xy = 1 \\ xz = 4 \\ yz = 9 \end{cases}.$$

Ако ги поделиме првите две равенки добиваме $\frac{z}{y} = 4$ или $z = 4y$, па со замена во третата равенка имаме $4y^2 = 9$, т.е. $y = \pm\frac{3}{2}$. Конечно, $z = \pm 6$ и $x = \pm\frac{2}{3}$.

Втор начин. Ако во секоја равенка од системот се ослободиме од заградите добиваме

$$\begin{cases} xy + xz = 5 \\ yx + yz = 10 \\ zx + zy = 13 \end{cases}.$$

Ако трите равенки ги собереме, добиваме

$$2(xy + yz + zx) = 28, \text{ т.е. } xy + yz + zx = 14.$$

Ако од последната равенка ги одземеме првата равенка, па втората равенка, па третата равенка, добиваме $yz = 9$, $xz = 4$ и $xy = 1$. Ако ги поделиме првите две равенки се добива $y = \frac{9}{4}x$, па со замена во третата равенка се добива $\frac{9}{4}x^2 = 1$, т.е. $x^2 = \frac{4}{9}$, па затоа $x = \pm\frac{2}{3}$. Конечно, $y = \pm\frac{3}{2}$ и $z = \pm 6$.

16. а) Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ и } |y+2| = \begin{cases} y+2, & y+2 \ge 0 \\ -(y+2), & y+2 < 0 \end{cases},$$

па затоа треба да ги разгледаме случаите:

$i)$ $x \ge 0,\ y+2 \ge 0$ $\quad$ $ii)$ $x \ge 0,\ y+2 < 0$

$iii)$ $x < 0,\ y+2 \ge 0$ и $\quad$ $iv)$ $x < 0,\ y+2 < 0$.

Имаме:

i) Ако $x \geq 0, \;\; y+2 \geq 0$, тогаш системот преминува во обликот

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

чие решение е $x=3, \;\; y=-1$. Овие вредности за x и y ги задоволуваат условите $x \geq 0, \;\; y+2 \geq 0$. Значи, $x=3, \;\; y=-1$ е решение на дадениот систем.

ii) Ако $x \geq 0, \;\; y+2<0$, тогаш дадениот систем го добива обликот

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ x-3y=12 \end{cases}$$

чие решение е $x=-9, y=-7$. Но, определената вредност за x не го задоволува условот $x \geq 0$, па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

iii) Ако $x<0, \;\; y+2 \geq 0$, тогаш дадениот систем го се трансформира во обликот

$$\begin{cases} -x-2y=5 \\ -x+3y=0 \end{cases}$$

чие решение е $y=-1, x=-3$. Овие вредности за x и y ги задоволуваат условите $x<0, \;\; y+2 \geq 0$. Значи, $y=-1, \;\; x=-3$ е решение на дадениот систем.

iv) Ако $x<0, \;\; y+2<0$, тогаш дадениот систем го прима обликот

$$\begin{cases} -x-2y=5 \\ -x-3y=12 \end{cases}$$

чие решение $y=-7, \;\; x=9$. Но, најдената вредност за x не го задоволува условот $x<0$, па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

б) Ќе ги разгледаме случаите:

i) $x \geq 0, \;\; y \geq 0$ $\;\; ii$) $x \geq 0, \;\; y<0$ $\;\; iii$) $x<0, \;\; y \geq 0$ и iv) $x<0, \;\; y<0$.

Имаме:

i) Ако $x \geq 0, \;\; y \geq 0$, тогаш системот се трансформира во обликот

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}.$$

Системот има бесконечно многу решенија и тие се определени со $x=t$, $y=2-t$. Но, мора да важи и $x \geq 0, \;\; y \geq 0$, па добиваме $t \geq 0$ и $2-t \geq 0$, односно $0 \le t \le 2$. Значи решенија на дадениот систем се: $x = t,\ \ y = 2 - t$ каде $t \in [0, 2]$.

ii) Ако $x \ge 0,\ \ y < 0$, тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2, \end{cases}$$

чие решение е $x = 2,\ \ y = 0$. Но, пресметаната вредност за y не го задоволува условот $y < 0$, па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

iii) Ако $x < 0,\ \ y \ge 0$, тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

чие решение е $x = 0,\ \ y = 2$. Но, пресметаната вредност за x не го задоволува условот $x < 0$, па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

iv) Ако $x < 0,\ \ y < 0$ системот е од облик:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 2 \end{cases}.$$

Последниот систем нема решение, па значи и дадениот систем нема решение.

17. Ако за $|x + 2|$ од втората равенка замениме во првата равенка на (1) го добиваме системот

$$\begin{cases} |y - 1| = 9 - 4y \\ |x + 2| = 4y - 4 \end{cases}.$$

Од $|y - 1| = 9 - 4y$ добиваме $y = 2$, па од $|x + 2| = 4y - 4$ имаме $|x + 2| = 4$, од што наоѓаме $x_1 = -6,\ \ x_2 = 2$. Значи, системот има две решенија

$$x_1 = -6,\ \ y = 2 \text{ и } x_2 = 2,\ \ y = 2.$$

18. Од првата равенка имаме: $y = 1 - x$. Ако замениме во втората равенка добиваме $|1 - x| + |x| = 5$.

Решенија на последната равенка се $x_1 = -2,\ \ x_2 = 3$. Од смената наоѓаме $y_1 = 3$ и $y_2 = -2$.

Конечно решенија на системот (1) се

$$x_1 = -2,\ \ \ y_1 = 3 \text{ и } x_2 = 3,\ \ y_2 = -2.$$

19. Нека $(x,\ y)$ е решение на системот за кое $x \ge 0$. Тогаш $y = 0$ и

$|x-a|=1$, т.е. $x=a\pm1$. Јасно, ако $a\geq1$, тогаш системот има две решенија за кои $x\geq0$. Тоа се $(a-1,\ 0)$ и $(a+1,\ 0)$. Ако $-1\leq a<1$ тогаш системот има едно решение за кое $x\geq0$ и тоа (a + 1,0). Ако $a<-1$, тогаш системот нема решение за секое $x\geq0$.

Нека $x<0$. Тогаш $|y|=-\frac{x}{2}$ и затоа $|x-a|=1+\frac{x}{2}$. Од $|x-a|\geq0$ следува $1+\frac{x}{2}\geq0$, т.е. $x\geq-2$. Значи за $x\geq a$, $x-a=1+\frac{x}{2}$ од што добиваме $x=2(a+1)$ и за $x<a$, $x-a=-1-\frac{x}{2}$ од што добиваме $x=\frac{2}{3}(a-1)$. Од $-2\leq2(a+1)<0$ добиваме $-2\leq a<-1$, а од $-2\leq\frac{2}{3}(a-1)<0$, соодветно $-2\leq a<1$. Очигледно ако $(x\ ,\ y)$ е едно решение на системот за кое $x<0$, тогаш $y\neq0$ и затоа $(x,\ -y)$ исто така е решение на системот. Од претходно изнесеното следува дека за $a<-2$ системот нема решение. Ако $a=-2$, тогаш системот има точно две решенија и тоа $(-2,\ \pm1)$. Ако $-2<a<-1$, тогаш $2(a+1)\neq\frac{2}{3}(a-1)$, а бидејќи и двете вредности за x даваат решенија ќе имаме четири решенија на системот за кои $x<0$**.**

Според тоа, системот има две решенија само ако $a\geq1$ и тие се $(a-1,\ 0)$ и $(a+1,\ 0)$ и ако $a=-2$ тие се $(-2,\ \pm1)$.

20. Ако $x\geq0,\ y\geq1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y-1=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

чие решение е (1,1). Ако $x\geq0,\ y<1$, го добиваме системот

$$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases},$$

а овој систем нема решение во оваа област. Ако $x<0,\ y\geq1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x+y-1=1 \\ \ \ x+2y=3 \end{cases},$$

чие решение е $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Ако $x<0,\ y<1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x-y+1=1 \\ \ \ x+2y=3 \end{cases},$$

а овој систем нема решение во оваа област.

12. КВАДРАТНИ РАВЕНКИ И КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

12.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Реши ја равенката

а) $x^2+3x-28=0$, б) $(x-0{,}1)^2-(0{,}2x+1)^2=0$.

Задача 2. Реши ја равенката

а) $(2y-3)^2=4$, б) $9x^2+6x+4=0$.

Задача 3. Реши ја равенката

а) $(x-1)(2-\frac{3}{x-2})=0$,

б) $(\frac{x}{x-1})^2+(\frac{x}{x+1})^2=4\frac{4}{9}$,

в) $\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=1$

Задача 4. Да се реши равенката $\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x+|x|}=0$

Задача 5. Да се определат сите реални решенија на равенката

$$\sqrt{4-(x+1)^2(x-2)^2}=x^2+2x+3$$

Задача 6. Реши ја равенката

$$x^2-4x-m^2-2m+3=0,$$

каде m е параметар. За кои вредности на параметарот m решенијата на равенката се еднакви?

Задача 7. Одреди го параметарот m така што равенката

$$x^2-2(m+1)x+m^2+3m-3=0$$

да нема решение во множеството реални броеви.

Задача 8. Одреди го параметарот m така што решенијата на равенката $x^2-2(3m-1)x+9m^2-6m=0$ се еднакви.

Задача 9. Одреди го параметарот m така што равенката

$$x^2-2mx+2m^2-5m+6=0$$

нема решенија во множеството реални броеви.

Задача 10. Реши ја неравенката: $x^2+2x-3>0$.

Задача 11. Реши ја неравенката: $6x^2-29x+30<0$.

Задача 12. За кои вредности на параметарот a равенките

$$|x-a|=a+1 \text{ и } x^2-2ax-2a-1=0$$

се еквивалентни?

Задача 13. Одреди го реалниот параметар a така што двата корени на равенката $x^2-2ax+a^2-1=0$ припаѓаат на интервалот $(-2,4)$.

Задача 14. Ако a, b и c се непарни цели броеви, докажи дека корените на квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

не се рационални броеви.

Задача 15. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{13}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3} \\ xyz=1. \end{cases}$$

Задача 16. Реши го системот равенки

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y-1, \\ y^2+z^2=2y+2z+3, \\ z^2+x^2=2z+2x+2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{2} \\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{xyz}=\frac{2}{3} \end{cases}, x>0, y>0, z>0$.

Задача 17. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x-12y=4 \\ 2x-24y=8xy \end{cases}$$

Задача 18. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2=4x+4y-3, \\ y^2+z^2=4y+4z+5, \\ z^2+x^2=4z+4x+2. \end{cases}$$

Задача 19. Реши ја неравенката

$$x^2-|5x-3|-x<2\,. \tag{1}$$

Задача 20. Реши ја неравенката $x^2-2ax+a^2-9\geq 0$ каде a е параметар.

Задача 21. Одреди го реалниот број a така што равенката

$$x^2-|x|+a=0 \tag{1}$$

има единствено решение.

Задача 22. Реши ја неравенката

$$\frac{5}{x^2-6x+5}\geq 0\,. \tag{1}$$

Задача 23. Реши ја неравенката

$$\frac{x-2}{2x+3}\leq 0\,. \tag{1}$$

Задача 24. Реши ја неравенката

$$\frac{2x-5}{3-2x}\geq 2\,. \tag{1}$$

Задача 25. Реши ја неравенката

$$\frac{x-2}{x-3}-\frac{5}{x-1}\leq 1\,.$$

Задача 26. Реши ја неравенката

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}\geq 2\,. \tag{1}$$

Задача 27. Реши ја неравенката

$$|4(x^2+2x)|<3\,. \tag{1}$$

Задача 28. Реши ја неравенката

$$|x^2-3x|<2. \qquad (1)$$

Задача 29. Реши ја неравенката

$$|6x^2-5x|<6. \qquad (1)$$

Задача 30. Реши ја неравенката

$$\frac{3x^2-7x+2}{x^2-x+2}<0. \qquad (1)$$

Задача 31. Реши ја неравенката

$$\frac{2}{3}\leq\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leq 2. \qquad (1)$$

Задача 32. Реши ја неравенката

$$(x^2-2x+5)(x^2-4)<0.$$

Задача 33. Реши ја неравенката

$$(x^2-8x+16)(x^2+x-6)>0.$$

Задача 34. Реши ја неравенката

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\geq 1. \qquad (1)$$

Задача 35. Реши ја неравенката

$$\frac{(\sqrt{18}-\sqrt{8}+x)(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}<0.$$

Задача 36. За реалните броеви a,b,c важи равенството

$$3a(3a+3b+2c)+(2b+c)^2-bc=3a+2b+c.$$

Најди ги најмалата и најголемата вредност на изразот $3a+2b+c$.

Задача 37. Дадена е равенката $6x^2+3x+2kx+k=0$, каде k е параметар.

а) За која вредност на параметарот k корените на равенката се еднакви.

б) Ако a е вредноста на параметарот k, за која корените на равенката се еднакви да се пресмета вредноста на изразот

$$4a^4-12a^3+13a^2-12a+9.$$

Задача 38. Реши ги по x параметарските равенки:

а) $\frac{x}{x-m}-\frac{2m}{x+m}=\frac{8m^2}{x^2-m^2}$, б) $\frac{a}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=2$,

в) $\frac{1}{2x+a}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}$ г) $\frac{1}{x}+\frac{ax}{2}=1$,

д) $\frac{a+b}{x}+\frac{a}{x+1}=1,\ x>0,\ a>0,\ b>0$.

Задача 39. Реши ги неравенките:

а) $\frac{1}{6}+y\le\frac{y(y+2)}{2}$, б) $\frac{(a+2)^2}{5}-\frac{(a-1)^2}{3}>\frac{a(a+1)}{5}+\frac{7}{15}$,

в) $\frac{x^3+x^2}{x^2+x+1}<x$, г) $\frac{u(u+2)}{4}+\frac{1}{5}\ge\frac{u^2+u}{2}$,

д) $\frac{x+2}{(x-3)(x+4)}<0$, ѓ) $\frac{6x-1}{x+2}<1$.

Задача 40. Реши ги равенките:

а) $|x^2+2x-1|=x-1$, б) $x^2-3x+2=|x+2|$.

12.2. РЕШЕНИЈА

1. а) Бидејќи

$$x^2+3x-28=x^2-4x+7x-28=x(x-4)+7(x-4)=(x-4)(x+7)$$

дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-4)(x+7)=0. \qquad (1)$$

Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула, па затоа од (1) добиваме $x-4=0$ или $x+7=0$ т.е. $x=4$ или $x=-7$.

Значи решенијата на дадената равенка се $x_1=4$ и $x_2=-7$.

б) Имаме:

$$(x-0{,}1)^2-(0{,}2x+1)^2=(x-0{,}1+0{,}2x+1)(x-0{,}1-0{,}2x-1)$$
$$=(1{,}2x+0{,}9)(0{,}8x-1{,}1).$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$(1{,}2x+0{,}9)(0{,}8x-1{,}1)=0.$$

Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула. Значи $1{,}2x+0{,}9=0$ или $0{,}8x-1{,}1=0$, т.е. $x=-\frac{3}{4}$ или $x=\frac{11}{8}$.

2. а) Имаме:

$$(2y-3)^2-4=0$$
$$(2y-3)^2-2^2=0$$
$$(2y-3-2)(2y-3+2)=0$$
$$(2y-5)(2y-1)=0\,.$$

Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула, па затоа $2y-5=0$ или $2y-1=0$ т.е. $y=\frac{5}{2}$ или $y=\frac{1}{2}$.

б) Бидејќи

$$9x^2+6x+4=(3x)^2+2\cdot 3x+1+3=(3x+1)^2+3\geq 3>0\,,$$ за секој $x\in\mathbb{R}$

заклучуваме дека дадената равенка нема решение во множеството реални броеви.

3. а) Равенката има смисол за $x\neq 2$. Бидејќи производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула, добиваме: $x-1=0$ или $2-\frac{3}{x-2}=0$, односно $x=1$ или $\frac{2x-4-3}{x-2}=0$, од каде што следува $x=1$ или $2x-7=0$. Значи $x=1$ или $x=\frac{7}{2}$. Определените решенија 1 и $\frac{7}{2}$ се различни од 2, па затоа тие се решенија и на дадената равенка.

б) Јасно, за $x\neq\pm 1$ дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$$
$$\frac{x^2(x-1)^2+x^2(x+1)^2}{(x^2-1)^2}=\frac{40}{9}$$
$$9(x^4+x^2)=20(x^2-1)^2$$
$$11x^4-49x^2+20=0$$
$$(x^2-4)(11x^2-5)=0$$

од каде добиваме $x^2-4=0$ или $11x^2-5=0$, т.е. $x=\pm 2$, $x=\pm\sqrt{\frac{5}{11}}$.

в) Ако искористиме дека $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, добиваме дека дадената равенка е еквивалентна со равенката $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=1$, односно со равенката $x^2+2x-7=0$. Според тоа, $(x+1)^2-8=0$, односно

$$(x+1-2\sqrt{2})(x+1+2\sqrt{2})=0\,,$$

од каде добиваме $x_1=-1-2\sqrt{2}$ и $x_2=-1+2\sqrt{2}$.

4. Равенката има смисла за $x+|x|\neq 0$. За $x\leq 0$ се добива дека $|x|=-x$, па тогаш $x+|x|=x-x=0$. Значи, сите решенија на равенката мора да бидат позитивни, а тоа се $x=1$ и $x=2$.

5. Левата страна на равенката е помала или еднаква на два, бидејќи поткореновата величина е најмногу 4, и тоа во случај кога

$$(x+1)^2(x-2)^2=0\,.$$

Од $(x+1)^2\geq 0$ следува

$$x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2\geq 2\,,$$

Значи, равенство важи само ако левата и десната страна се еднакви на 2, а тоа е исполнето само за $x=-1$.

6. Имаме:

$$x^2-4x+4-m^2-2m-1=0$$

$$(x-2)^2-(m^2+2m+1)=0$$

$$(x-2)^2-(m+1)^2=0$$

$$(x-2-m-1)(x-2+m+1)=0\,.$$

Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула, па затоа $x-m-3=0$ или $x+m-1=0$ т.е. $x=m+3$ или $x=1-m$.

Ако решенијата на равенката се еднакви, тогаш $m+3=1-m$, т.е. $m=-1$. Притоа имаме:

$$x^2-4x-(-1)^2-2(-1)+3=0$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2\,.$$

7. Од

$$\begin{aligned}x^2-2(m+1)x+m^2+3m-3&=x^2-2(m+1)x+(m+1)^2+m-4\\&=(x-m-1)^2+m-4\geq m-4,\end{aligned}$$

заклучуваме дека дадената равенка нема решение ако и само ако $m-4>0$, т.е. ако и само ако $m>4$.

8. Имаме:

$$x^2-2(3m-1)x+9m^2-6m+1-1=0$$
$$x^2-2(3m-1)x+(3m-1)^2-1=0$$
$$(x-3m+1)^2-1^2=0$$
$$(x-3m+1-1)(x-3m+1+1)=0.$$

Според тоа $x-3m=0$ или $x-3m+2=0$ т.е. $x_1=3m-2$ или $x_2=3m$.

Бидејќи $x_2-x_1=3m-(3m-2)=2$ добиваме дека не постои реален број m таков што решенијата на равенката (1) се еднакви.

9. Бидејќи

$$x^2-2mx+2m^2-5m+6=(x-m)^2+m^2-5m+6\geq m^2-5m+6$$

заклучуваме дека дадената равенка нема реални решенија ако

$$m^2-5m+6>0,$$

Понатаму од $m^2-5m+6=(m-2)(m-3)>0$ добиваме

$$(m-2)(m-3)>0, \tag{2}$$

Бидејќи производ на два реални броја е позитивен ако и само ако и двата броја се позитивни или и двата броја се негативни, од (2) добиваме:

$$\left[\begin{array}{l} m-2>0 \\ m-3>0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} m-2<0 \\ m-3<0 \end{array}\right.$$

т.е.

$$\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m>3 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m<3 \end{array}\right.$$

т.е. $m>3$ или $m<2$.

Значи, равенката (1) нема решенија во множеството реални броеви ако $m>3$ или $m<2$ т.е. ако $m\in(-\infty,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$.

10. Бидејќи

$$x^2+2x-3=x^2+2x+1-4=(x+1)^2-2^2$$
$$=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$$

дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$(x+3)(x-1)>0, \tag{1}$$

Производ на два броја е позитивен ако и само ако и двата множители се со ист знак. Значи, за да ја решиме неравенката (1) треба да најдеме такви вредности на непознатата x за кои

$$i)\ \left[\begin{array}{l} x-1>0 \\ x+3>0 \end{array}\right. \text{ или } \qquad ii)\ \left[\begin{array}{l} x-1<0 \\ x+3<0 \end{array}\right..$$

За $i)$ имаме $x-1>0$ од каде $x>1$, т.е. секој $x\in(1, +\infty)$ е решение на оваа неравенка. Од $x+3>0$ имаме $x>-3$ т.е. секој $x\in(-3,+\infty)$ е решение на оваа неравенка. Значи, решение на почетната неравенка е $x\in(-3,+\infty)$ и $x\in(1,+\infty)$, т.е. $x\in(-3,+\infty)\cap(1,+\infty)=(1,+\infty)$.

За $ii)$ со аналогни размислувања добиваме $x\in(-\infty,1)$ и $x\in(-\infty,-3)$ т.е. $x\in(-\infty,-3)\cap(-\infty,1)=(-\infty,-3)$.

Конечно решение на почетната неравенка е $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$.

11. Ја разложуваме левата страна на неравенката

$$\begin{aligned} 6x^2-29x+30 &= 6x^2-20x-9x+30=2x(3x-10)-3(3x-10) \\ &= (3x-10)(2x-3). \end{aligned}$$

Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$(3x-10)(2x-3)<0$$

Производ на два броја е негативен ако и само ако множителите се со различен знак. Значи, треба да најдеме такви вредности на непознатата x, за кои истовремено

$$i)\ \left[\begin{array}{l} 2x-3>0 \\ 3x-10<0 \end{array}\right. \text{ или } \qquad ii)\ \left[\begin{array}{l} 2x-3<0 \\ 3x-10>0 \end{array}\right..$$

Ако $2x-3>0$ и $3x-10<0$, тогаш $x>\frac{3}{2}$ и $x<\frac{10}{3}$ т.е. $x\in(\frac{3}{2},\ \frac{10}{3})$.

Ако $2x-3<0$ и $3x-10>0$, тогаш $x<\frac{3}{2}$ и $x>\frac{10}{3}$ што не е можно.

Конечно, решение на почетната неравенка е интервалот $(\frac{3}{2},\ \frac{10}{3})$.

12. За $x\le a$ првата равенка добива облик $a-x=a+1$, од што следува $x=-1$. Бројот -1 е решение само кога $a+1\ge 0$ т.е. $a\ge -1$. За $x\ge a$ ја добиваме равенката $x-a=a+1$ чие решение е $x=2a+1$. Тоа е решение и на $|x-a|=a+1$ ако $2a+1\ge a$ т.е. $a\ge -1$. Значи, првата од двете равенки нема решение ако $a<-1$ и има две решенија $x_1=-1$ и $x_2=2a+1$ ако $a\ge -1$, (x_1 и x_2 се совпаѓаат ако $a=-1$).

Втората равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-2a-1)(x+1)=0,$$

Производ на два броја е нула ако барем еден од нив е нула, па затоа

$$x-2a-1=0 \text{ или } x=-1$$

односно $x=2a+1$ или $x=-1$.

Значи, дадените равенки се еквивалентни ако $a \geq -1$.

13. Имаме,

$$x^2-2ax+a^2-1=0 \qquad (1)$$

т.е. $(x-a)^2-1^2=0$ од што следува $(x-a-1)(x-a+1)=0$. Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од броевите е еднаков на нула. Значи, $x-a-1=0$ или $x-a+1=0$. Според тоа, решенија на (1) се: $x_1=a+1$ и $x_2=a-1$.

Ако решенијата припаѓаат на интервалот $(-2,\ 4)$, тогаш

$$-2<a+1<4 \text{ и } -2<a-1<4,$$

т.е.

$$-3<a<3 \text{ и } -1<a<5.$$

Конечно, $a \in (-1,\ 3)$.

14. Да претпоставиме дека нескратливата дропка $\frac{p}{q}$ е корен на равенката (1), т.е. дека $a(\frac{p}{q})^2+b\frac{p}{q}+c=0$ односно

$$ap^2+bpq+cq^2=0. \qquad (2)$$

Бидејќи p и q се заемно прости броеви (дропката $\frac{p}{q}$ е нескратлива) можни се следните три случаи:

i) p е непарен, q е непарен

ii) p е непарен, q е парен

iii) p е парен, q е непарен.

Бидејќи a, b и c се непарни броеви, не е тешко да се докаже дека бројот $ap^2+bpq+cq^2$ во сите три случаи е непарен број, што значи равенството (2) не е можно.

Последната противречност ја докажува точноста на тврдењето.

15. Имаме:

$$y+z=\frac{13}{3}-x\,,\ x(y+z)=\frac{13}{3}-yz\,,\ zy=\frac{1}{x}\,.$$

Ако од првата и третата равенка замениме во втората ја добиваме равенката

$$x(\frac{13}{3}-x)=\frac{13}{3}-\frac{1}{x}\,,$$

која е еквивалентна на равенката

$$13x^2-3x^3-13x+3=0\,,$$

т.е. на равенката

$$(x-1)(3x^2-10x+3)=0\,.$$

Решенија на последната равенка се $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$.

Бидејќи равенките во системот се симетрични заклучуваме дека решенија на системот се следните шест подредени тројки

$$(1,3,\tfrac{1}{3})\,,\ (1,\tfrac{1}{3},3)\,,\ (\tfrac{1}{3},1,3)\,,\ (\tfrac{1}{3},3,1)\,,\ (3,1,\tfrac{1}{3})\ \text{и}\ (3,\tfrac{1}{3},1)\,.$$

16. а) Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1,\\ (y-1)^2+(z-1)^2=5,\\ (z-1)^2+(x-1)^2=4.\end{cases} \tag{1}$$

Ако ги собереме трите равенки ја добиваме равенката

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5\,, \tag{2}$$

од која после одземањето на секоја од равенките на системот (1) го добиваме еквивалентниот систем равенки

$$\begin{cases}(z-1)^2=4,\\ (x-1)^2=0,\\ (y-1)^2=1,\end{cases}\,,$$

чии решенија се $(1,0,-1), (1,0,3), (1,2,-1), (1,2,3)$.

б) Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases}\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{2}{3}\end{cases}\,. \tag{3}$$

Ако ги собереме равенките во горниот систем, после средувањето добиваме $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$. Од последната равенка последователно ги одземаме равенките на системот и го добиваме еквивалентниот систем

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{yz}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{zx}=\frac{1}{3},$$

т.е. системот

$$xy=2,\ yz=6,\ zx=3.$$

Ако ги помножиме последните три равенки добиваме $(xyz)^2=36$ и ако земеме предвид дека $x>0,\ y>0,\ z>0$ добиваме $xyz=6$. Конечно,

$$x=\frac{xyz}{yz}=\frac{6}{6}=1,\ y=\frac{xyz}{xz}=\frac{6}{3}=2 \text{ и } z=\frac{xyz}{xy}=\frac{6}{2}=3.$$

17. Од првата равенка имаме $y=\frac{x-4}{12}$ и со замена во втората добиваме

$$2x-24\frac{x-4}{12}=8x\frac{x-4}{12},\text{ т.е. } 2x-2x+8=\frac{8}{12}(x^2-4x).$$

Оттука $8=\frac{8}{12}(x^2-4x)$, т.е. $x^2-4x=12$ или $x^2-4x+4-16=0$. Понатаму $(x-2)^2-4^2=0$, односно $(x-2-4)(x-2+4)=0$, од каде решенијата се $x_1=6$ или $x_2=-2$. Со замена на овие вредности во $y=\frac{x-4}{12}$ се добива дека $y_1=\frac{1}{6}$, $y_2=-\frac{1}{2}$ па решенија на системот се подредените парови: $(6,\frac{1}{6})$ и $(-2,-\frac{1}{2})$.

18. Одговор.
$(1,0,-1), (1,0,5), (1,4,-1), (1,4,5), (3,0,-1), (3,0,5), (3,4,-1), (3,4,5)$.

19. Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

$$|5x-3|=\begin{cases}5x-3, & \text{ако } x\geq\frac{3}{5}\\ 3-5x, & \text{ако } x<\frac{3}{5}\end{cases}$$

i) Ако е $x\geq\frac{3}{5}$, тогаш неравенката (1) го добива обликот

$$x^2-6x+1<0. \qquad (2)$$

Имаме,

$$\begin{aligned}x^2-6x+1&=(x-3)^2-8=(x-3)^2-(2\sqrt{2})^2\\&=(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2})\end{aligned}$$

и од (2) добиваме

$$(x-3-2\sqrt{2})(x-3+2\sqrt{2})<0\,.$$

Производ на два броја е негативен ако множителите се со различни знаци, па затоа последната неравенка е еквивалентна на

$$\left[\begin{array}{l} x-3-2\sqrt{2}<0 \\ x-3+2\sqrt{2}>0 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x-3-2\sqrt{2}>0 \\ x-3+2\sqrt{2}<0 \end{array}\right.$$

т.е.

$$\left[\begin{array}{l} x<3+2\sqrt{2} \\ x>3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x>3+2\sqrt{2} \\ x<3-2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Од $x<3+2\sqrt{2}$ и $x>3-2\sqrt{2}$ добиваме $x\in(3-2\sqrt{2},\;\; 3+2\sqrt{2})$, но од тоа што $x\geq\frac{3}{5}$ добиваме $x\in[\frac{3}{5},\;\; 3+2\sqrt{2})$.

Јасно, неравенствата $x>3+2\sqrt{2}$ и $x<3-2\sqrt{2}$ се противречни.

ii) Ако $x<\frac{3}{5}$, тогаш неравенката (1) преминува во неравенката

$$x^2+4x-5<0\,. \tag{3}$$

Имаме,

$$x^2+4x-5=(x+2)^2-3^2=(x+2-3)(x+2+3)=(x-1)(x+5)$$

и од (3) следува

$$(x-1)(x+5)<0\,.$$

Решението на последната неравенка е $x\in(-5,1)$ што заедно со $x<\frac{3}{5}$ дава $x\in(-5,\frac{3}{5})$.

Конечно, според i) и ii) имаме $x\in(-5,\frac{3}{5})$ или $x\in[\frac{3}{5},3+2\sqrt{2})$, па затоа

$$x\in(-5,\tfrac{3}{5})\cup[\tfrac{3}{5},3+2\sqrt{2})=(-5,3+2\sqrt{2})\,.$$

20. Имаме,

$$x^2-2ax+a^2-9=(x-a)^2-3^2=(x-a-3)(x-a+3)$$

па затоа дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$(x-a-3)(x-a+3)\geq 0\,. \tag{1}$$

Производ на два броја е ненегативен број, ако и двата броја се со исти знаци, па од (1) следува

$$\left[\begin{array}{l} x-a-3\geq 0 \\ x-a+3\geq 0 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x-a-3\leq 0 \\ x-a+3\leq 0 \end{array}\right.$$

т.е.

$$\left[\begin{array}{l} x\geq a+3 \\ x\geq a-3 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x\leq a+3 \\ x\leq a-3 \end{array}\right..$$

Од $x\geq a+3$ и $x\geq a-3$ следува $x\geq a+3$, а од $x\leq a+3$ и $x\leq a-3$ следува $x\leq a-3$. Според тоа, $x\in(-\infty, a-3]\cup[a+3, +\infty)$.

21. Да претпоставиме дека равенката (1) има единствено решение $x=x_0$. Но, тогаш

$$(-x_0)^2-|-x_0|+a=x_0^2-|x_0|+a=0,$$

т.е. и $x=-x_0$ е решение на (1). Бидејќи решението е единствено добиваме $x_0=-x_0$ т.е. $x_0=0$. Значи,

$$0^2-|0|+a=0$$

т.е. $a=0$, па равенката (1) се трансформира во равенка од видот

$$x^2-|x|=0. \tag{2}$$

Сега да ја решиме (2). Од

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

имаме:

i) Ако $x\geq 0$, (2) го добива обликот

$$x^2-x=0. \tag{3}$$

Решенијата на (3) се $x_0=0$ и $x_0=1$ и тие го задоволуваат условот $x\geq 0$.

ii) При $x<0$ равенката (2) е следната

$$x^2+x=0. \tag{4}$$

Решенија на (4) се $x_0=0$ и $x_0=-1$ и само $x_0=-1$ го задоволува условот $x<0$.

Конечно решенија на (2) се -1,0,1. Бидејќи за определеното $a=0$ равенката (1) т.е. добиената равенка (2) треба да има единствено решение, заклучуваме дека не постои реален број a таков што равенката (1) има единствено решение.

22. Изразот на левата страна на неравенката има смисол ако

$$x^2-6x+5\neq 0, \text{ т.е. } (x-1)(x-5)\neq 0.$$

Значи, $x-1\neq 0$, $x-5\neq 0$, т.е. $x\neq 1$, $x\neq 5$.

Количник на два броја е ненегативен ако броителот е ненегативен, а именителот е позитивен или ако броителот е непозитивен, а именителот негативен. Бидејќи $5>0$ од неравенката (1) добиваме $x^2-6x+5>0$, т.е.

$$(x-1)(x-5)>0. \tag{2}$$

Производ на два броја е позитивен ако и двата броја се со ист знак. Според тоа од (2) следува:

$$\left[\begin{array}{l} x-5>0 \\ x-1>0 \end{array}\right. \tag{3}$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x-5<0 \\ x-1<0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Од (3) имаме $x>5$, а од (4) $x<1$. Конечно, решение на (2), т.е. на (1) е множеството $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

23. Изразот на левата страна на неравенката има смисол ако $2x+3\neq 0$ т.е. $x\neq -\frac{3}{2}$. Имаме,

$$\left[\begin{array}{l} x-2\leq 0 \\ 2x+3>0 \end{array}\right. \tag{2}$$

или

$$\left[\begin{array}{l} x-2\geq 0 \\ 2x+3<0 \end{array}\right.. \tag{3}$$

Од (2) добиваме $x\leq 2$ и $x>-\frac{3}{2}$, т.е. решение на (2) е множеството $(-\frac{3}{2},2]$. Од (3) добиваме $x\geq 2$ и $x<-\frac{3}{2}$ што е противречност.

Конечно, решение на неравенката (1) е интервалот $(-\frac{3}{2},2]$.

24. Изразот на левата страна на неравенката има смисол ако $3-2x\neq 0$ т.е. $x\neq \frac{3}{2}$. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$\frac{2x-5}{3-2x}-2\geq 0,$$

т.е. на неравенката

$$\frac{6x-11}{3-2x}\geq 0. \tag{2}$$

Од неравенката (2) имаме:

$$\left[\begin{array}{l}6x-11\geq 0\\ 3-2x>0\end{array}\right. \qquad (3)$$

или

$$\left[\begin{array}{l}6x-11\leq 0\\ 3-2x<0\end{array}\right. \qquad (4)$$

Од (3) добиваме $x\geq\frac{11}{6}$ и $x<\frac{3}{2}$, што не е можно. Од (4) следува $x\leq\frac{11}{6}$ и $x>\frac{3}{2}$ т.е. $x\in(\frac{3}{2},\frac{11}{6}]$.

25. Изразот на левата страна на неравенката има смисол за $x\neq 3$ и $x\neq 1$. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $1+\frac{5}{x-1}-\frac{x-2}{x-3}\geq 0$, т.е. на неравенката

$$\frac{2x-7}{(x-1)(x-3)}\geq 0\,. \qquad (1)$$

Количник на два броја е ненегативен ако броителот е ненегативен, а именителот е позитивен или броителот е непозитивен, а именителот е негативен, па затоа од (1) имаме:

$$\left[\begin{array}{l}2x-7\geq 0\\ (x-1)(x-3)>0\end{array}\right. \qquad (2)$$

или

$$\left[\begin{array}{l}2x-7\leq 0\\ (x-1)(x-3)<0\end{array}\right.. \qquad (3)$$

Од (2) имаме

$$\left[\begin{array}{l}2x-7\geq 0\\ x-1>0\\ x-3>0\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}2x-7\geq 0,\\ x-1<0,\\ x-3<0,\end{array}\right.$$

Од $2x-7\geq 0$, $x>1$ и $x>3$ следува $x\geq\frac{7}{2}$, а вториот случај не е можен (зошто?). Значи, $x\in[\frac{7}{2},+\infty)$. Од (3) имаме

$$\left[\begin{array}{l}2x-7\leq 0\\ x-1<0\\ x-3>0\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}2x-7\leq 0\\ x-1>0\\ x-3<0\end{array}\right.$$

Првиот случај не е можен, а од вториот добиваме $x\leq\frac{7}{2}$, $x>1$ и $x<3$. Конечно, решение на дадената равенка е множеството $(1,3)\cup[\frac{7}{2},+\infty)$.

26. Изразот на левата страна на неравенката има смисол ако $x \neq 3$ и $x \neq 4$. Таа е еквивалентна на неравенката

$$\tfrac{x+3}{x-3} + \tfrac{x+4}{x-4} - 2 \geq 0$$

т.е. на неравенката

$$\tfrac{7x-24}{(x-3)(x-4)} \geq 0. \qquad (2)$$

Количник на два броја е ненегативен ако броителот е ненегативен, а именителот е позитивен или броителот е непозитивен, а именителот е негативен, па затоа од (2) имаме:

$$\begin{cases} 7x-24 \geq 0 \\ (x-3)(x-4) > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

или

$$\begin{cases} 7x-24 \leq 0 \\ (x-3)(x-4) < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Од (3) следува

$$\begin{cases} 7x-24 \geq 0 \\ \;\; x-3 > 0 \\ \;\; x-4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7x-24 \geq 0 \\ \;\; x-3 < 0 \\ \;\; x-4 < 0 \end{cases}.$$

Од $7x-24 \geq 0$, $x-3>0$ и $x-4>0$ следува $x>4$ т.е. $x \in \left(4,+\infty\right)$, а вториот случај не е можен. Од (4) имаме:

$$\begin{cases} 7x-24 \leq 0 \\ \;\; x-3 < 0 \\ \;\; x-4 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 7x-24 \leq 0 \\ \;\; x-3 > 0 \\ \;\; x-4 < 0 \end{cases}.$$

Прviот случај не е можен, а од вториот наоѓаме $x \in (3, \tfrac{24}{7}]$.

Конечно, решение на дадената неравенка е множеството

$$x \in (3, \tfrac{24}{7}] \cup (4, +\infty).$$

27. При решавањето на неравенката (1) ќе го користиме тврдењето: Нека $a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогаш $|a| < \varepsilon$ ако и само ако $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

Според наведеното тврдење имаме: $-3 < 4(x^2 + 2x) < 3$ т.е.

i) $4x^2 + 8x + 3 > 0$ и *ii*) $4x^2 + 8x - 3 < 0$.

Значи, треба да ги најдеме сите реални броеви x за кои истовремено се исполнети неравенствата *i*) и *ii*). Од

$$4x^2+8x+3=4x^2+2\cdot 2x\cdot 2+2^2-1=(2x+2)^2-1^2$$
$$=(2x+2+1)(2x+2-1)=(2x+3)(2x+1).$$

За неравенката *i*) имаме $(2x+1)(2x+3)>0$. Решение на последната неравенка, т.е. на *i*) е множеството $(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$.

Од

$$4x^2+8x-3=4x^2+8x+4-7=(2x+2)^2-\sqrt{7}^2$$
$$=(2x+2+\sqrt{7})(2x+2-\sqrt{7}).$$

За неравенката *ii*) имаме

$$(2x+2+\sqrt{7})(2x+2-\sqrt{7})<0.$$

Решение на последната неравенка т.е. на *ii*) е множеството $(-1-\frac{\sqrt{7}}{2},-1+\frac{\sqrt{7}}{2})$.

Конечно, решение на дадената неравенка е множеството

$$(-1-\tfrac{\sqrt{7}}{2},-1+\tfrac{\sqrt{7}}{2})\cap[(-\infty,-\tfrac{3}{2})\cup(-\tfrac{1}{2},+\infty)]=(-1-\tfrac{\sqrt{7}}{2},-\tfrac{3}{2})\cup(-\tfrac{1}{2},-1+\tfrac{\sqrt{7}}{2}).$$

28. Како и во претходната задача од (1) имаме $-2<x^2-3x<2$, т.е.

i) $x^2-3x+2>0$ и *ii*) $x^2-3x-2<0$

Значи, треба да ги најдеме сите реални броеви x за кои истовремено се исполнети неравенствата *i*) и *ii*). Од

$$x^2-3x+2=x^2-2x-x+2=x(x-2)-(x-2)=(x-2)(x-1)$$

за *i*) добиваме $(x-2)(x-1)>0$. Решение на последната неравенка е множеството $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. Од

$$x^2-3x-2=x^2-2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot x+\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4}-2=(x-\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{\sqrt{17}}{2})^2$$
$$=(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{17}}{2})(x-\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{17}}{2})$$

за *ii*) добиваме

$$(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{17}}{2})(x-\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{17}}{2})<0.$$

Решение на последната неравенка е множеството $(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2},\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2})$.

Конечно, решение на неравенката (1) е множеството

$$(\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{17}}{2},\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{17}}{2})\cap[(-\infty,1)\cup(2,+\infty)]=(\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{17}}{2},1)\cup(2,\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{17}}{2}).$$

29. Од (1) добиваме $-6<6x^2-5x<6$ т.е.

i) $6x^2-5x+6>0$ и ii) $6x^2-5x-6<0$.

Бидејќи,

$$6x^2-5x+6=(x\sqrt{6})^2-2\cdot x\sqrt{6}\cdot\tfrac{5}{2\sqrt{6}}+(\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2+6-(\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2$$

$$=(x\sqrt{6}-\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2+6-\tfrac{25}{24}\geq 6-\tfrac{25}{24}>0$$

заклучуваме дека решение на i) е секој реален број x.

Од

$$6x^2-5x-6=(x\sqrt{6})^2-2\cdot x\sqrt{6}\cdot\tfrac{5}{2\sqrt{6}}+(\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2-6-(\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2$$

$$=(x\sqrt{6}-\tfrac{5}{2\sqrt{6}})^2-(\tfrac{13}{2\sqrt{6}})^2=(x\sqrt{6}-\tfrac{18}{2\sqrt{6}})(x\sqrt{6}+\tfrac{8}{2\sqrt{6}})$$

$$=(x\sqrt{6}-\tfrac{9}{\sqrt{6}})(x\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{6}})$$

за ii) добиваме

$$(x\sqrt{6}-\tfrac{9}{\sqrt{6}})(x\sqrt{6}+\tfrac{4}{\sqrt{6}})<0.$$

Решение на последната неравенка е множеството $(-\frac{2}{3},\frac{3}{2})$.

Конечно, решение на (1) е множеството $\mathbb{R}\cap(-\frac{2}{3},\frac{3}{2})$.

30. Количник на два броја е негативен ако броевите се со различен знак. Бидејќи

$$x^2-x+2=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{7}{4}>0$$

од (1) добиваме: $3x^2-7x+2<0$.

Од

$$3x^2-7x+2=(3x-1)(x-2)$$

добиваме

$$(3x-1)(x-2)<0.$$

Решение на последната неравенка, а со тоа и на неравенката (1) е множеството $(\frac{1}{3},2)$.

31. Бидејки $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$ дадената неравенка е еквивалентна на $2(x^2+x+1)\leq 3(x^2+1)\leq 6(x^2+x+1)$, т.е. на

$$x^2-2x+1\geq 0 \text{ и } 3x^2+6x+3\geq 0,$$

односно на

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ и } 3(x+1)^2 \geq 0 .$$

Последните неравенства важат за секој $x \in \mathbf{R}$, па затоа решение на неравенката (1) е секој реален број.

32. Производ на два броја е негативен број ако броевите се со различен знак. Бидејќи $x^2-2x+5=(x-1)^2+4 \geq 4>0$ дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $x^2-4<0$. Имаме, $(x-2)(x+2)<0$ т.е.

i) $\left[\begin{array}{l} x-2<0 \\ x+2>0 \end{array}\right.$ или ii) $\left[\begin{array}{l} x-2>0 \\ x+2<0 \end{array}\right.$.

Од i) имаме $x \in(-2,2)$, а случајот ii) не е можен.

Конечно, решение на дадената неравенка е интервалот $(-2,2)$.

33. Производ на два броја е позитивен ако броевите се со ист знак. Значи

$i)$ $\left[\begin{array}{l} x^2-8x+16>0 \\ x^2+x-6>0 \end{array}\right.$ или $ii)$ $\left[\begin{array}{l} x^2-8x+16<0 \\ x^2+x-6<0 \end{array}\right.$.

Случајот ii) не е можен бидејќи $x^2-8x+16=(x-4)^2 \geq 0$.

Од i) добиваме

$$\left[\begin{array}{c} (x-4)^2>0 \\ (x+3)(x-2)>0 \end{array}\right.$$

и како $(x-4)^2>0$ за $x \neq 4$ имаме $(x+3)(x-2)>0$ и $x \neq 4$. Понатаму,

$iii)$ $\left[\begin{array}{l} x+3>0 \\ x-2>0 \end{array}\right.$ и $x \neq 4$ или $iv)$ $\left[\begin{array}{l} x+3<0 \\ x-2<0 \end{array}\right.$ и $x \neq 4$.

Од $iii)$ имаме $x>2$ и $x \neq 4$ т.е. $x \in(2,4) \cup(4,+\infty)$

Од $iv)$ имаме $x<-3$ и $x \neq 4$ т.е. $x \in(-\infty,-3)$.

Конечно, решение на дадената неравенка е множеството

$$(-\infty,-3) \cup(2,4) \cup(4,+\infty) .$$

34. При решавањето на неравенката (1) ќе го користиме тврдењето: Ако $a \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon>0$, тогаш $|a| \geq \varepsilon$ ако и само ако $a \leq-\varepsilon$ или $a \geq \varepsilon$.

Неравенката (1) има смисол за $x+1 \neq 0$ т.е. $x \neq-1$. Имаме, $\frac{x-1}{x+1} \leq-1$ или $\frac{x-1}{x+1} \geq 1$, т.е. $i)$ $\frac{2x}{x+1} \leq 0$ или $ii)$ $\frac{-2}{x+1} \geq 0$.

Од i) имаме

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x \leq 0 \\ x+1>0 \end{cases}$$

од што добиваме $x \in (-1,0]$.

Од ii) добиваме $x+1<0$ т.е. $x \in (-\infty,-1)$.

Значи, решение на дадената неравенка е множеството

$$x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0].$$

35. Имаме, $\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2})}{\sqrt{2}^2-1^2}<0$, т.е. $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$. Бидејќи производ на два броја е негативен ако едниот е негативен, а другиот е позитивен, од $x+\sqrt{2}>x-\sqrt{2}$ следува дека дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}>0 \\ x-\sqrt{2}<0 \end{cases},$$

од каде добиваме $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

36. Нека $3a+2b+c=x$. Даденото равенство можеме да го запишеме во видот $(x-2b-c)(x+b+c)+(2b+c)^2-bc-x=0$ и после средувањето добиваме $2b^2-bx+x^2-x=0$, т.е. $b^2-\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}(x^2-x)=0$. Последното равенство можеме да го запишеме во видот

$$(b-\tfrac{x}{4})^2=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{16}x^2.$$

Оттука следува $\frac{1}{2}x-\frac{7}{16}x^2 \geq 0$, односно $0 \leq x \leq \frac{8}{7}$. Од друга страна, со непосредна проверка се покажува дека, на пример, за $a=b=c=0$ и $a=c=\frac{1}{7}, b=\frac{2}{7}$ даденото равенство е исполнето и изразот $3a+2b+c$ прима вредности 0 и $\frac{8}{7}$, што значи дека тоа се бараните најмала и најголема вредност на $3a+2b+c$.

13. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

13.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Определи го најголемиот од броевите кои се добиваат со бришење на 100 цифри од бројот $12345678910111213...99100$, чии што цифри се природните броеви од 1 до 100 наредени од лево кон десно.

Задача 2. Нека $x_0, x_1, x_2, ..., x_{2002}$ се последователни цели броеви, за кои важи

$$-x_0 + x_1 - x_2 + ... - x_{2000} + x_{2001} - x_{2002} = 2003. \qquad (1).$$

Пресметај го бројот x_{2002}.

Задача 3. Определи ги сите петорки реални броеви за кои важи: квадратот на секој од нив е еднаков на збирот од останатите четири.

Задача 4. Во низа се запишани 1988 броја. Збирот на секој број во низата и реципрочната вредност на следниот број е еднаков на 1. Производот на сите броеви е 2. Кои броеви се напишани на првото и последното место?

Задача 5. Во низа се запишани 30 ненегативни броеви. Првиот од броевите не е помал од останатите, а секој од броевите е еднаков на апсолутната вредност од разликата на броевите запишани веднаш зад него. Збирот на сите броеви е еднаков на 100. Определи ги овие броеви.

Задача 6. Најди го најголемиот природен број со следните својства: постои низа од n рационални броеви, такви што збирот на секои три последователни броеви во низата е позитивен, а збирот на секои пет последователни членови на низата е негативен број.

Задача 7. Определи ги сите природни броеви n со следното својство: постојат броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ од интервалот $(-1,1)$ за кои важи равенството

$$|x_1|+|x_2|+....+|x_n|=1989+|x_1+x_2+...+x_n| \qquad (1)$$

Задача 8. Нека $M=\{a_1,a_2,...,a_k\}\subseteq \mathbf{R}$ и $a_1<a_2<...<a_k$. Алтернативен збир од M го нарекуваме бројот

$$S_M=a_k-a_{k-1}+a_{k-2}-a_{k-3}+...+(-1)^{k-1}a_1$$

На пример, за $M=\{2,3,8\}$ имаме $S_M=8-3+2=7$, а за $M=\{1,2,5,7\}$ важи $S_M=7-5+2-1=3$ итн.

Нека $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и да го разгледаме збирот S од сите алтернативни збирови S_M, каде M е произволно непразно подмножество на A. Најди ја последната цифра на бројот S.

Задача 9. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+t^2=x(y+z+t).$$

Задача 10. Определи ги сите двојки цели броеви x,y што ги задоволуваат равенките

$$2x^4+3y^4-16x^2-54y^2+275=0 \text{ и } 3x+2y=0.$$

Задача 11. Докажи дека не постојат 2000 броеви чиј збир е 700, а збирот на нивните квадрати е еднаков на 200.

Задача 12. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се цели броеви такви што $x_1^2+...+x_n^2+n^3\le(2n-1)(x_1+...+x_n)+n^2$. Докажи дека

а) $x_1,...,x_n$ се позитиви цели броеви,

б) бројот $x_1+...+x_n+n+1$ не е полн квадрат.

Задача 13. Нека $n\ge 2$ е природен број и $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n\ge x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n. \qquad (1)$$

Докажи дека

$$x_1+x_2+...+x_n\le\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+...+\frac{x_n}{y_n}. \qquad (2)$$

Задача 14. Нека за природните броеви a,b,c и d важи

$$(a+b)^2+a=(c+d)^2+c.$$

Докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Задача 15. Природните броеви a, b и c се такви, што броевите $a+c$ и $b+c$ се квадрати на два последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ исто така се квадрати на два последователни природни броеви.

Задача 16. Нека a, b, c се три цели броеви поголеми или еднакви на 1, и такви што $3(a+b+c)=ab+bc+ca$.

а) Дали е можно $a=b=c$.

б) Да се најдат сите такви тројки броеви за кои $a \leq b \leq c$.

Задача 17. Да се најдат сите рационални броеви a, за кои $|4a-2| \leq 1$ и бројот $A=\frac{4a-1}{27a^4}$ е цел број.

Задача 18. Секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ е еднаков на $+1$ или -1. Дали е можно да важи равенството $a_1a_2+a_2a_3+...+a_9a_{10}+a_{10}a_1=0$?

Задача 19. Најди ги сите реални броеви a, b, c, d такви да

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

Задача 20. Трговец со недвижности настојува да продаде стан по цена од 4821000 денари, со што просечната цена на становите кои ги продал во таа зграда би изнесувала 5195000 денари. Но, заради заситеност на пазарот, тој станот го продал за само 4515000 денари, па просечната цена на становите кои ги продал во таа зграда изнесува 5177000 денари. Колку станови во таа зграда продал трговецот?

21. Во табела 10×10 се впишани броевите од 0 до 99, како што е прикажано во табела 1. Пред секој број е запишан знакот + или –, така да во секоја редица и во секоја колона има по 5 плусови и по 5 минуси, да кажеме како што тоа е прикажано во табела 1, при што плусовите не се означени. Докажи дека збирот на сите броеви во така добиената табела е еднаков на 0.

0	-1	-2	3	-4	5	6	7	-8	-9
-10	11	12	-13	14	-15	16	17	-18	-19
-20	21	22	-23	24	-25	-26	-27	28	29
30	-31	-32	-33	-34	35	-36	37	38	39
-40	41	42	43	44	45	-46	-47	-48	-49
50	-51	-52	53	-54	-55	56	-57	58	59
60	61	-62	-63	-64	65	66	-67	68	-69
-70	71	72	-73	74	-75	-76	-77	78	79
80	-81	82	83	84	-85	-86	87	-88	-89
-90	-91	-92	93	-94	95	96	97	-98	99

Табела 1

13.2. РЕШЕНИЈА

1. Постојат 0 едноцифрени броеви. Од 10 до 99 има 90 двоцифрени броеви. Значи дадениот број има $9+2\cdot 90+3=192$ цифри. После бришењето на 100 цифри треба да добиеме 92- цифрен број. За било кои два броеви со ист број на цифри, бројот со поголема прва цифра е поголем. Јасно е дека бројот што го бараме треба да почнува со што е можно повеќе 9-ки. Затоа, најпрво ги бришеме првите 8 цифри. Потоа ја бришеме низата од цифри 101112...181, која се состои од $9\cdot 2+1=19$ цифри. Слично, ги бришеме низите $202122...282$, $303132...383$, $404142...484$. Значи, избришани се $8+19\cdot 4=84$ цифри, а бројот кој што се добива е $999950515253...99100$. Потребно е да избришеме уште 16 цифри. Ако ја избришеме низата $505152...57$, која се состои од 16 цифри го добиваме бројот $9999958596061...99100$. Меѓутоа, најголемиот број го добиваме со бришење на низата $505152...565$, која се состои од 15 цифри, со тоа што следната цифра што ја бришеме не е 7 туку 5 од 58. Значи, бараниот број е $9999978596061...99100$.

2. Равенството (1) го запишуваме во следниот облик:

$$(-x_0+x_1)+(-x_2+x_3)+...+(-x_{2000}+x_{2001})-x_{2002}=2003.$$

Бидејќи x_i, $i=0,1,...2002$ се последователни цели броеви следува дека $x_{i+1}-x_i=1$ од каде се добива дека $1001-x_{2002}=2003$ т.е. $x_{2002}=-1002$.

3. Нека се дадени броевите x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 и нека

$$S=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$$

Од условот на задачата имаме

$$x_i^2=S-x_i\ ,\ i=1,2,3,4,5 \qquad (1)$$

Да го разгледаме x_1 и било кој од останатите броеви $x_i, i=2,3,4,5$. Од (1) наоѓаме $x_i^2-x_1^2=(S-x_i)-(S-x_1)=x_1-x_i$ или $(x_i^2-x_1^2)+(x_i-x_1)=0$, т.е.

$$(x_i-x_1)(x_i+x_1+1)=0.$$

Барем еден од множителите x_i-x_1 и x_i+x_1+1 е еднаков на нула. Значи, за секој од броевите x_2,x_3,x_4,x_5 имаме само две можности: тој е еднаков на x_1 или на $-x_1-1$. Во случајот, најмногу два од броевите се различни. Ќе ги разгледаме можните случаи:

а) Ако петте броеви се еднакви, тогаш $x^2 = 4x$ т.е. $x(x-4)=0$. Значи, $x=0$ или $x=4$. Добиваме две решенија на задачата:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \text{ и } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 4 .$$

б) Четири од броевите се еднакви на x, а петтиот на $-x-1$. Тогаш, $S = 3x-1$ и од (1) следува $x^2 = (3x-1)-x$ т.е. $(x-1)^2 = 0$ па $x=1$. Тогаш $-1-x=-2$. Значи решение на задачата е четири броја еднакви на 1, а еден на -2.

в) Три од броевите се еднакви на x, а другите два на $-1-x$. Тогаш, $S = 3x-2(x+1) = x-2$ и од (1) следува $x^2 = -2$ што не е можно.

Не е тешко да се докаже дека со тоа се разгледани сите случаи. Значи, ги добиваме следните решенија:

- сите пет броеви се еднакви на 0
- сите пет броеви се еднакви на 4
- четири од броевите се еднакви на 1, а петтиот на -2.

4. Нека дадената низа е $a_1, a_2, ..., a_{1988}$. Според условот на задачата $a_1 + \frac{1}{a_2} = 1$, од што следува $\frac{1}{a_2} = 1 - a_1$ или $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$. Аналогно, $a_3 = \frac{1}{1-a_2}$ и воопшто $a_{k+1} = \frac{1}{1-a_k}$, $k = 1,2,...,1987$. Тогаш

$$a_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_1}} = 1 - \frac{1}{a_1},\ a_4 = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a_1})} = a_1,\ a_5 = \frac{1}{1-a_1} = a_2,\ a_6 = \frac{1}{1-a_5} = a_3, ...$$

Според тоа низата го има обликот

$$a_1, \frac{1}{1-a_1}, 1-\frac{1}{a_1}, a_1, \frac{1}{1-a_1}, 1-\frac{1}{a_1}, a_1, \frac{1}{1-a_1}, 1-\frac{1}{a_1}, ...$$

Имаме,

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-a_1}(1-\frac{1}{a_1}) = a_1 \cdot \frac{1}{1-a_1} \cdot \frac{-(1-a_1)}{a_1} = -1,$$

што значи, производот на секои три последователни броеви е еднаков на -1, а производот на секои шест последователни броеви е еднаков на 1. Бидејќи $1988 = 6 \cdot 331 + 2$ и производот на сите членови на низата е еднаков на 2 добиваме дека производот на последните два члена на низата е еднаков на 2 т.е. $a_{1987} \cdot a_{1988} = 2$. Но, $a_{1987} = a_1$, $a_{1988} = \frac{1}{1-a_1}$ па затоа $\frac{a_1}{1-a_1} = 2$. Според тоа $a_1 = 2(1-a_1)$, т.е.

$$a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = \frac{1}{1-a_1} = 3,\ a_3 = 1 - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{2}.$$

Низата има облик

$$\tfrac{2}{3},3,-\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},3,-\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},3,-\tfrac{1}{2},...$$

Јасно, $a_1=\frac{2}{3}$, $a_{1988}=a_2=3$.

5. Нека броевите се a_1, a_2, ..., a_{30}. Познато е дека $a_1 \geq a_i$, за секој $i=2,3,...,30$. Прво ќе докажеме дека барем еден од броевите a_2 и a_3 е еднаков на нула. Навистина, нека претпоставиме дека $a_2 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$. Тогаш a_2 и a_3 се позитивни броеви. Според условот е исполнето равенството $a_1=|a_2-a_3|$. Ако $a_2 \geq a_3$, и бидејќи $a_3>0$, добиваме $a_1=a_2-a_3<a_2$ што противречи на $a_1 \geq a_2$. Аналогно се разгледува случајот $a_2 \leq a_3$.

Ќе ги разгледаме случаите кога $a_2=0$ и кога $a_3=0$

а) Нека $a_2=0$. Тогаш

$$a_1=|a_2-a_3|=|0-a_3|=|-a_3|=|a_3|$$

и од тоа што $a_3 \geq 0$ добиваме $a_1=|a_3|=a_3$ т.е. броевите a_1 и a_3 се еднакви. Нека $a_1=a_3=a$. Од равенството $a_2=|a_3-a_4|$ и $a_2=0$ добиваме дека $a_3=a_4=a$. Сега од условот $a_3=|a_4-a_5|$ непосредно следува $a_5=0$, па затоа

$$a_4=|a_5-a_6|=|0-a_6|=|-a_6|=|a_6|.$$

Значи $a_4=a_6=a$. Докажавме дека првите шест члена на низата се

$$a,0,a,a,0,a.$$

Понатаму со истите размислувања наоѓаме дека низата е

$$a,0,a,a,0,a,....,a,0,a$$

и збирот на нејзините членови е $20a$. Од условот на задачата $20a=100$, т.е. $a=5$. Во овој случај низата е

$$5,0,5,5,0,5,...,5,0,5 \qquad (1)$$

б) Нека сега $a_3=0$. Тогаш од $a_1=|a_2-a_3|$ следува $a_1=|a_2|=a_2$. Означуваме $a_1=a_2=a$. Аналогно размислувајќи како и во случајот под а) наоѓаме $a_4=a_5=a$, $a_6=0$ па сега низата има облик

$$a,a,0,a,a,0,.....,a,a,0$$

и збирот на нејзините членови е $20a$. Значи, $20a=100$ т.е. $a=5$ и низата гласи

$$5,5,0,5,5,0,.....,5,5,0 \qquad (2)$$

Конечно само низите (1) и (2) се решение на задачата.

6. Ќе докажеме дека $n=6$.

Нека претпоставиме дека постои низа $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ од 7 рационални броеви во која збирот на секои три последователни броеви е позитивен, а збирот на секои пет последователни броеви е негативен. Тогаш

$$a_1+a_2+a_3>0,\ \ a_4+a_5+a_6>0,$$

па затоа $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6>0$. Освен тоа $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<0$ па затоа $a_6>0$. Слично, од неравенствата

$$a_2+a_3+a_4>0,\ \ a_5+a_6+a_7>0,\ a_3+a_4+a_5+a_6+a_7<0$$

следува $a_2>0$. Но, $a_3+a_4+a_5>0$, па затоа $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6>0$, што противречи на условот на задачата.

Значи, во низата не може да има 7 или повеќе членови. Од друга страна, не е тешко да се најде пример на низа од 6 броеви со бараното својство. Постојат бесконечно многу такви низи, од кои една е: 1; -1,9; 1; 1; -1,9; 1.

Конечно, бараниот број е $n=6$.

7. Нека n е број со бараното својство, т. е. постојат броеви $x_1,x_2,...,x_n$ од интервалот $(-1,1)$ за кои важи (1). Бидејќи $|x_i|\geq 0$, за секој $i=1,2,3,...,n$ и $|x_i|<1$, за секој $i=1,2,3,...,n$ од (1) добиваме

$$1989\leq 1989+|x_1+x_2+...+x_n|=|x_1|+|x_2|+...+|x_n|<n\cdot 1=n$$

Значи, $n\geq 1990$.

Обратно, ќе докажеме дека секој природен број $n\geq 1990$ го има споменатото својство. Ако $n\geq 1990$ е парен број, тогаш го разгледуваме бројот $a=\frac{1989}{n}$ и ставаме

$$x_1=x_3=....=x_{n-1}=a\ ,\ x_2=x_4=x_6=...=x_n=-a\ .$$

Јасно $x_1,x_2,...,x_n$ се броеви од интервалот $(-1,1)$ и за нив важи (1).

Ако $n\geq 1990$ е непарен, тогаш $n\geq 1991$ и бројот $a=\frac{1989}{n-1}$ е позитивен и помал од 1. Во овој случај како и погоре

$$x_1=x_3=...=x_n=a\ ,\ x_2=x_4=....=x_{n-1}=-a$$

се од интервалот $(-1,1)$ и важи (1).

Според тоа секој природен број $n\geq 1990$ го има бараното својство.

8. Нека $M=\{a_1,a_2,...,a_k\}\subseteq A$, $10\notin A$ и $a_1<a_2<...<a_k$. Тогаш

$$S_M=a_k-a_{k-1}+a_{k-2}+...+(-1)^{k-1}a_1 \qquad (1)$$

Да го разгледаме множество $M^{'}$, кое се добива кога на M ќе се додаде 10, т.е. $M^{'}=\{a_1,a_2,...,a_k,10\}$. Имаме

$$S_{M^{'}}=10-a_k+a_{k-1}-a_{k-2}+...-(-1)^{k-1}a_1 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) непосредно се добива $S_M+S_{M^{'}}=10$. Имено, секој од броевите $a_1,a_2,...,a_k$ учествува со знак „+“ во збирот S_M ако и само ако учествува со знак „-“ во збирот $S_{M^{'}}$.

Сега задачата лесно се решава. Непразното подмножество на A го делиме на парови според опишаниот начин. Јасно, на секое подмножество M на A кое не го содржи бројот 10 во соодветствие можеме да му ставиме такво подмножество $M^{'}$ кое го содржи бројот 10 и $S_M+S_{M^{'}}=10$.

При тоа ако множествата M и N се различни тогаш и $M^{'}$ и $N^{'}$ се различни. Така, во парови се вклучени сите подмножества на A со исклучок на $M_0=\{10\}$. Збирот на алтернативните збирови во секој пар е 10 и $S_{M_0}=10$, па затоа збирот на сите алтернативни збирови се дели со 10, т.е. последната цифра на S е 0.

9. Имаме,

$$x^2+y^2+z^2+t^2-xy-xz-xt=0$$

$$\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{4}x^2-xy+y^2+\tfrac{1}{4}x^2-xz+z^2+\tfrac{1}{4}x^2-xt+t^2=0$$

$$(\tfrac{x}{2})^2+(\tfrac{x}{2}-y)^2+(\tfrac{x}{2}-z)^2+(\tfrac{x}{2}-t)^2=0\,. \qquad (1)$$

Во равенката (1) имаме збир на четири ненегативни броеви да е еднаков на нула што е можно ако и само ако сите четири броеви се еднакви на нула, т.е. $\frac{x}{2}=0$, $\frac{x}{2}-y=0$, $\frac{x}{2}-z=0$ и $\frac{x}{2}-t=0$, односно $x=y=z=t=0$.

10. Првата равенка ќе ја запишеме во обликот

$$2(x^2-4)^2+3(y^2-9)^2=0\,,$$

откаде ги добиваме двојките $(2,3),(2,-3),(-2,3),(-2,-3)$. Од нив втората равенка ја задоволуваат само $(2,-3),(-2,3)$.

11. Да претпоставиме дека постојат броеви x_1, x_2, ..., x_{2000} такви што

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2000} = 700$$
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2000}^2 = 200 .$$

Тогаш,

$$(x_1^2 - x_1) + (x_2^2 - x_2) + ... + (x_{2000}^2 - x_{2000}) + 500 = 0$$

односно

$$(x_1^2 - x_1 + \tfrac{1}{4}) + (x_2^2 - x_2 + \tfrac{1}{4}) + ... + (x_{2000}^2 - x_{2000} + \tfrac{1}{4}) = 0$$
$$(x_1 - \tfrac{1}{2})^2 + (x_2 - \tfrac{1}{2})^2 + ... + (x_{2000} - \tfrac{1}{2})^2 = 0 .$$

Збир на ненегативни броеви е еднаков на нула ако и само ако сите собироци се еднакви на нула, па затоа

$$x_1 - \tfrac{1}{2} = x_2 - \tfrac{1}{2} = ... = x_{2000} - \tfrac{1}{2} = 0$$

т.е.

$$x_1 = x_2 = ... = x_{2000} = \tfrac{1}{2} .$$

Според тоа,

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2000} = 2000 \cdot \tfrac{1}{2} = 1000$$

што противречи на претпоставката дека

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2000} = 700 .$$

12. Лесно се гледа дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) + (x_2 - n)(x_2 - n + 1) + ... + (x_n - n)(x_n - n + 1) \le 0 .$$

Бидејќи производ на два последователни цели броеви е ненегативен цел број добиваме

$$(x_1 - n)(x_1 - n + 1) = (x_2 - n)(x_2 - n + 1) = ... = (x_n - n)(x_n - n + 1) = 0 .$$

Според тоа, $x_i - n = 0$ или $x_i - n + 1 = 0$, за $i = 1, 2, ..., n$, т.е. $x_i \in \{n, n+1\}$ за $i = 1, 2, \dots, n$, со што е докажано тврдењето под а). За да го докажеме тврдењето под б) доволно е да забележиме дека

$$n(n-1) \le x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \le n^2$$

од што следува

$$n^2 < n^2 + 1 \le 1 + n + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \le 1 + n + n^2 < (n+1)^2 ,$$

т.е. $1 + n + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ не е полн квадрат.

13. Нека претпоставиме дека

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}. \qquad (3)$$

Ако ги собереме неравенствата (1) и (3) и искористиме дека за секој позитивен реален број a важи $a + \frac{1}{a} \geq 2$ добиваме

$$\begin{aligned} 2(x_1 + x_2 + ... + x_n) &> x_1(y_1 + \frac{1}{y_1}) + x_2(y_2 + \frac{1}{y_2}) + ... + x_n(y_n + \frac{1}{y_n}) \\ &\geq 2x_1 + 2x_2 + ... + 2x_n = 2(x_1 + x_2 + ... + x_n), \end{aligned}$$

што е противречност. Од добиената противречност следува точноста на неравенството (2).

14. Ако $a = c$, тогаш од даденото равенство веднаш следува $b = d$. Нека $a \neq c$. Можеме да претпоставиме дека $a < c$. Од равенството

$$(a+b)^2 + a = (c+d)^2 + c$$

добиваме

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d) = c - a. \qquad (1)$$

Од $c - a > 0$, следува $a+b-c-d < 0$. Но $a+b-c-d > 0$ е природен број, па $a+b-c-d \geq 1$.Тогаш од (1) добиваме

$$c - a = (a+b+c+d)(a+b-c-d) \geq a+b+c+d$$

а од тука $2a + b + d \leq 0$ што не е можно бидејќи a, b, c и d се природни броеви. Значи, $a = c$.

15. Нека $a + c = k^2$ и $b + c = (k+1)^2$, $k \in \mathbf{N}$. Тогаш $a = k^2 - c$ и $b = (k+1)^2 - c$, па затоа

$$\begin{aligned} ab + c &= (k^2 - c)[(k+1)^2 - c] + c = c^2 - [k^2 + (k+1)^2 - 1]c + [k(k+1)]^2 \\ &= c^2 - 2k(k+1)c + [k(k+1)]^2 = [k(k+1) - c]^2 = (k^2 + k - c)^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} ab + a + b + c &= (k^2 - c)[(k+1)^2 - c] + k^2 - c + (k+1)^2 - c + c \\ &= c^2 - [k^2 + (k+1)^2 + 1]c + [k(k+1)]^2 + k^2 + (k+1)^2 \\ &= c^2 - 2(k^2 + k + 1)c + [k(k+1)]^2 + 2k(k+1) + 1 \\ &= c^2 - 2(k^2 + k + 1)c + [k(k+1) + 1]^2 \\ &= c^2 - 2(k^2 + k + 1)c + (k^2 + k + 1)^2 = (k^2 + k + 1 - c)^2 \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

16. а) Ако $a=b=c=x$, тогаш $3x^2-9x=0$ и бидејќи $x\ge 1$ добиваме $x=3$. Навистина, броевите $a=b=c=3$ го задоволуваат равенството.

б) Нека $a=1$. Тогаш равенството го добива видот $bc=2b+2c+3$, од што следува $(b-2)(c-2)=7$. Јасно, единствена можност е $b-2=1$ и $c-2=7$, па затоа $b=3, c=9$.

Нека $a=2$. Тогаш равенството го добива видот $bc=b+c+6$ од што добиваме $(b-1)(c-1)=7$, па затоа $b=2$ и $c=8$.

Нека $a=3$. Тогаш $b\cdot c=9$ и бидејќи b и c не се помали од 3, добиваме $b=c=3$.

Нека $a>3$. Даденото равенство ќе го запишеме во обликот

$$(2a-3)(2b-3)+(2b-3)(2c-3)+(2c-3)(2a-3)=27$$

Бидејќи a,b,c не се помали од 4 броевите $2a-3, 2b-3, 2c-3$ не се помали од 5, па затоа $27\ge 5\cdot 5+5\cdot 5+5\cdot 5=75$ што е противречност. Конечно $(1,2,9),(2,2,8)$ и $(3,3,3)$ се бараните решенија.

17. Од неравенството $|4a-2|\le 1$ следува дека $\frac{1}{4}\le a\le\frac{3}{4}$. Јасно е дека $A\ge 0$ при $a\ge\frac{1}{4}$ и $A=0$ за $a=\frac{1}{4}$. Нека A е цел број. Ставаме $a=\frac{p}{q}$, каде $p,q\in\mathbf{N}$ и НЗД$(p,q)=1$. Тогаш $A=\frac{q^3(4p-q)}{27p^4}$, па затоа $p\,|\,q$. Според тоа $p=1$ и $A=\frac{q^3(4-q)}{27}$. Бидејќи $A\ge 0$, следува $q=1,2,3,4$ и со директна проверка се наоѓа дека A е цел број само за $q=3$ и $q=4$. Бараните вредности на a се $a=\frac{1}{3}$ и $a=\frac{1}{4}$.

18. Нека претпоставиме дека даденото равенство е можно. За да збирот биде еднаков на нула потребо е пет собирци да се еднакви на $+1$ и пет собирци да се еднакви на -1. Според тоа, бројот на негативните собирци е непарен, па затоа производот на сите десе собирци ќе биде еднаков на -1. Имаме

$$-1=(a_1a_2)(a_2a_3)...(a_9a_{10})(a_{10}a_1)=a_1^2a_2^2a_3^2...a_9^2a_{10}^2=(a_1a_2a_3...a_9a_{10})^2,$$

што е противречност. Конечно од бараната противречност следува дека даденото равенство не е можно.

19. Со квадрирање на првиот услов добиваме

$$(a+b+c+d)^2=400,$$

т.е.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=400,$$

па затоа

$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 &=\\ &=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ &=3\cdot 100-2\cdot 150=0.\end{aligned}$$

Според тоа, $a-b=a-c=a-d=b-c=b-d=c-d=0$, па затоа $a=b=c=d$ и како $a+b+c+d=20$ добиваме $a=b=c=d=5$.

20. Нека n е бројот на становите во таа зграда кои ги продал трговецот, а $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ се цените на претходно продадените станови. Тогаш важи

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+4821000}{n}=5195000$$

и

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}+4515000}{n}=5177000,$$

па затоа

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+4821000=5195000n \text{ и}$$

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+4515000=5177000n,$$

од каде наоѓаме $306000=18000n$, односно $n=17$. Според тоа, трговецот со недвижности во таа зграда продал 17 станови.

0	-0	-0	0	-0	0	0	0	-0	-0
-10	10	10	-10	10	-10	10	10	-10	-10
-20	20	20	-20	20	-20	-20	-20	20	20
30	-30	-30	-30	-30	30	-30	30	30	30
-40	40	40	40	40	40	-40	-40	-40	-40
50	-50	-50	50	-50	-50	50	-50	50	50
60	60	-60	-60	-60	60	60	-60	60	-60
-70	70	70	-70	70	-70	-70	-70	70	70
80	-80	80	80	80	-80	-80	80	-80	-80
-90	-90	-90	90	-90	90	90	90	-90	90

Табела 2

21. Секој од броевите може да се претстави како збир од десетки и единици. На пример, 6=0+6, 32=30+2 итн. Од табела 1 ќе ги составиме табелите 2 и 3, при што десетките ќе ги запишеме во табела 2, а единиците на соодветните места во табела 3. Тогаш збирот на броевите во табела 1 ќе биде еднаков со збирот на броевите во табелите 2 и 3.

Во секоја редица од табела 2 сите броеви се еднакви по апсолутна вредност, па затоа согласно дадено правило при било каков распоред на знаците + и – во секоја редица од оваа табела 5 броеви се со знак + и 5 броеви се со знак –. Според тоа, збирот на броевите во секоја редица од табела 2 е еднаков на 0, па затоа збирот на сите броеви во табела 3 е еднаков на 0.

Во секоја колона од табела 3 сите броеви се еднакви па затоа согласно дадено правило при било каков распоред на знаците + и – во секоја колона од оваа табела 5 броеви се со знак + и 5 броеви се со знак –. Според тоа, збирот на броевите во секоја колона од табела 4 е еднаков на 0, па затоа збирот на сите броеви во табела 3 е еднаков на 0.

0	-1	-2	3	-4	5	6	7	-8	-9
-0	1	2	-3	4	-5	6	7	-8	-9
-0	1	2	-3	4	-5	-6	-7	8	9
0	-1	-2	-3	-4	5	-6	7	8	9
-0	1	2	3	4	5	-6	-7	-8	-9
0	-1	-2	3	-4	-5	6	-7	8	9
0	1	-2	-3	-4	5	6	-7	8	-9
-0	1	2	-3	4	-5	-6	-7	8	9
0	-1	2	3	4	-5	-6	7	-8	-9
-0	-1	-2	3	-4	5	6	7	-8	9

Табела 3

Конечно, бидејќи збирот на броевите од табела 1 е еднаков на збирот на броевите од табелите 2 и 3, добиваме дека збирот на броевите од табела 2 е еднаков на $0+0=0$, што и требаше да се докаже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: *Pripremni zadaci za matematička takmičenja*, DMS, Beograd, 1991
2. Arslanagić, Š.; Zejnulahi, F.; Govedarica, V.: *Zbirka zadataka sa rešenjima sa republičkih takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u BiH* 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
3. Đurković, R.: *Matermatička takmičenja srednjočkolaca u Jugoslaviji* 1990, DMS, Beograd, 1991
4. Govedarica, V.: *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
5. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: *Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola*, DMS, Beograd, 1991
6. Stojanović, V.: *Matematiskop* 2, Naučna knjiga, Beograd, 1985
7. Stojanović, V.; Zolić, A.: *Savezna takmičenja iz matematike* (*osnovne škole*), DMS, Beograd, 1991
8. Zolić, A.: Zbirka *rešenih konkursnih zadataka*, Matematički list, Beograd, 1990
9. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И.: *Сборник задач по елементарной математике*, Наука, Москва, 1961
10. Будуров, С.; Серафимов, Д.: *Математически олимпиади* 2, Народна просвета, София, 1980
11. Зубелевич, Г. И.: *Сборник задач московских математических олимпиад*, Просвещение, Москва, 1967
12. Јанев, К.; Мишовски, К.: *Десет години републички натпревари по математика* (*основни училишта*), Нумерус, Скопје, 1985
13. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: *Сигмина ризница* (*конкурсни задачи* 1 – 144), СММ, Скопје, 2011
14. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.: *Сигмина ризница* (*рубрика задачи* 1006 – 1200), СММ, Скопје, 2011
15. Малчески, А.; Манова – Ераковиќ, В.; Малчески, Р.; Маркоски, Ѓ.: *Сигмина ризница* (*рубрика задачи* 506 – 1005), СММ, Скопје, 2011

16. Малчески, Р.: *Елементарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 2002
17. Малчески, Р.; Малчески, А.: *Избрани содржини од елементарна математика*, СММ, Скопје, 1994
18. Малчески, Р.; Малчески, А.; Маркоски, Ѓ.; Манова – Ераковиќ, В.: *Сигмина ризница* (*рубрика задачи* 1 – 505), СММ, Скопје, 2008
19. *Математичка такмичења средњошколаца* 2002/03, ДМС, Београд-Шабац, 2003
20. Сивашински, И. Х.: *Задачи по математика за изванкласна работа*, Просвета, Москва, 1968
21. Школяский, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яглом, И. М.: *Избраны задачи и теоремы элементарноы математики*, Наука, Москва, 1976