Dr M. Ilić-Dajović (Beograd)

O NIZOVIMA BROJEVA

I

1. Svima nam je poznato koje brojeve nazivamo **prirodnim brojevima** — to su brojevi

(1) $\quad 1, 2, 3, \ldots, 10, 11, 12, \ldots, 100, 101, 102, \ldots,$

to jest brojevi koje izgovaramo ili na koje mislimo kad prebrojavamo predmete (na primer listove u knjizi), životinje (na primer golubove koji su sleteli na bačeno zrnevlje), ljude (na primer učenike u učionici) itd. Svi ti brojevi, poređani po veličini tako da je svaki sledeći veći od prethodnog čine **prirodni brojni niz** ili, kratko **prirodni niz**; svaki broj u tom nizu nazivamo *članom niza*.

Kakva su svojstva prirodnog brojnog niza?

1) Pre svega, brojevi u tom nizu (tj. članovi tog niza) imaju svaki svoje utvrđeno mesto: broj 1 je na prvom mestu, broj 2 na drugom, broj 3 na trećem, . . . , broj 10 na desetom mestu, itd.

Ako jedno mnoštvo (skup) brojeva ima to svojstvo da svaki broj u tom mnoštvu ima svoje utvrđeno mesto tj. da tačno znamo koji je broj prvi, drugi, treći, . . . , itd., tada kažemo da je to uređeno mnoštvo brojeva. Prirodni niz je, na osnovu toga, **uređeno mnoštvo brojeva.**

2) Prvi član prirodnog niza je broj 1, a sve ostale članove tog niza dobijamo tako što:

najpre broju 1 dodamo 1 — dobijamo broj 2,
zatim broju 2 dodamo 1 — dobijamo broj 3,
zatim broju 3 dodamo 1 — dobijamo broj 4,

i tako dalje, dokle god želimo i dokle god imamo strpljenja i vremena.

Dakle, u prirodnom nizu brojevi su poređani po veličini; razlika između svaka dva uzastopna prirodna broja je uvek jedan isti broj — to je ovde broj 1.

3) U prirodnom nizu postoji najmanji broj — to je broj 1, tj. prvi član tog niza. Ali, da li postoji najveći prirodni broj?

Šta mislite, da li moramo, da bismo odgovorili na to pitanje, neprekidno brojati ko zna koliko dugo?

Na to pitanje se veoma lako može odgovoriti ako se ima u vidu ono svojstvo koje otkriva kako je taj niz obrazovan, a naime, da se svaki sledeći član tog niza dobija tako što se prethodnom članu doda 1. I zato, ako nam neko kaže ili napiše ma koliko veliki prirodni broj — na primer broj 1 000 000 000 000 (jedan bilion) — mi možemo odmah tome broju dodati 1 pa ćemo dobiti opet prirodni broj koji je veći od datog broja.

Prema tome, ma koliko veliki prirodni broj napisali ili zamislili, uvek dodajući jedinicu tome broju dobijamo još veći prirodni broj. I tako možemo nastaviti neograničeno. Zbog toga je jasno da **ne postoji najveći prirodni broj.**

Pa, koliko ima članova u prirodnom nizu? Broj tih članova veći je od svakog velikog broja koji možemo zamisliti. Zato kažemo da u prirodnom nizu **ima beskonačno mnogo prirodnih brojeva.**

2. Prirodni niz brojeva služi nam za numerisanje, to jest za obeležavanje mesta koje u nizu objekata iste vrste ima svaki pojedini objekat. Na taj način numerišemo, na primer, stranice u knjizi, lozove, spiskove sa imenima lica ili nazivima predmeta, itd.

Međutim, svakako ste zapazili da, obično, kuće u jednoj ulici numerišemo na drugačiji način: na levoj strani kuće su numerisane samo neparnim brojevima, a na desnoj samo parnim. Na taj način dobijamo, na primer,

na levoj brojeve: 1, 3, 5, 7, 9, . . . , 45,
a na desnoj brojeve: 2, 4, 6, 8, . . . , 48,

kojih, u ovom slučaju, za razliku od prirodnog niza ima **konačno mnogo** (jer se obeležavanje kuća u ulici mora završiti nekim brojem).

Međutim, mi možemo, razume se, zamisliti i **sve** neparne brojeve:

(2) $$1, 3, 5, 7, \ldots, 99, 101, \ldots .$$

i **sve** parne brojeve:

(3) $$2, 4, 6, 8, \ldots, 100, 102, \ldots ;$$

i jednih i drugih ima beskonačno mnogo. (Zašto?)

Ako sve brojeve nekog mnoštva (skupa) možemo numerisati redom prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4,.... tako da svakom prirodnom broju odgovara na izvestan način jedan član tog mnoštva, tada kažemo da je to mnoštvo **niz brojeva** (brojni niz ili, kratko, niz). Brojeve sadržane u nizu nazivamo **članovima niza**.

Prema tome, svi prirodni brojevi (1) čine niz; svi neparni brojevi (2) čine niz; svi parni brojevi (3) čine niz. Ovi nizovi su beskonačni; ali ima i konačnih nizova (i oni se najčešće javljaju); to su, na primer, nizovi parnih ili neparnih brojeva kojima su numerisane kuće u ulici.

Zadržimo se sada malo na nizu svih neparnih brojeva (2) i nizu svih parnih brojeva (3). Prvi niz počinje brojem 1, a razlika između bilo kojeg drugog člana i njegovog prethodnog člana je stalna i jednaka 2. Drugi niz počinje brojem 2, a razlika između bilo kojeg drugog člana i njegovog prethodnog člana je takođe stalna i jednaka 2.

Na osnovu toga znamo kako, polazeći od prvog člana niza, dobijamo sve ostale:

prvi član:	$1,$	$2,$
drugi član:	$1+2=3,$	$2+2=4,$
treći član:	$3+2=5,$	$4+2=6,$

i tako dalje. Lako je utvrditi da će, na primer, stoti po redu parni broj biti broj 200, a stoti po redu neparni broj biće 199.

Ako prvi član bilo kojeg niza obeležimo sa a_1, drugi član sa a_2, treći član sa $a_3, \ldots,$ deseti član sa a_{10} i, uopšte, bilo koji član sa a_n (gde je n odgovarajući prirodni broj), tada taj niz pišemo u obliku:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots.$$

U nizu (2) neparnih brojeva je

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7, \ldots\ldots,$$

a u nizu (3) parnih brojeva je

$$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ a_4=8, \ldots$$

Odmah vidimo da između svakog člana niza parnih brojeva i mesta na kojem se on nalazi (a koje je naznačeno odgovarajućim brojem — indeksom uz slovo a) postoji određena veza:

$$a_1=2=2\cdot\mathbf{1},\quad a_2=4=2\cdot\mathbf{2},\quad a_3=6=2\cdot\mathbf{3}, \ldots..$$

(gde je masnim ciframa obeležen broj jednak indeksu) tako da na osnovu toga možemo odmah napisati da je, na primer,

$$a_{28} = 2 \cdot \mathbf{28} = 56$$

i, uopšte, bilo koji član

$$a_n = 2\,\boldsymbol{n} \qquad (n \text{ je prirodan broj}).$$

Takođe, članove niza neparnih brojeva možemo napisati tako da se odmah vidi na koji su način oni u vezi sa mestom na kojem se nalaze (a kojem odgovara određeni indeks):

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 = 2 \cdot \mathbf{2} - 1,\ a_3 = 5 = 2 \cdot \mathbf{3} - 1,\ a_4 = 7 = 2 \cdot \mathbf{4} - 1,$$

pa je, na primer,

$$a_{37} = 2 \cdot \mathbf{37} - 1 = 73$$

i, uopšte, bilo koji član

$$a_n = 2 \cdot \boldsymbol{n} - 1 \qquad (n \text{ je prirodni broj}).$$

3. Napišimo niz od dvadeset brojeva koji počinje brojevima

(4) $$5,\ 10,\ 15, \ldots ;$$

tu je $a_1 = 5$, $a_2 = 10 = 5 \cdot \mathbf{2}$, $a_3 = 15 = 5 \cdot \mathbf{3}, \ldots$. Očigledno je $a_{11} = 5 \cdot \mathbf{11} = 55$, a bilo koji član je

$$a_n = 5 \cdot \boldsymbol{n}.$$

Kao i u prethodnim primerima, ako je poznato na koji način zavisi član niza od mesta na kojem se nalazi, tada se može neposredno odrediti bilo koji član niza.

4. Za sve nizove koje smo dosad posmatrali karakteristično je to što je, počev od drugog člana, razlika između svaka dva uzastopna člana (tj. između jednog člana i njegovog prethodnog člana) uvek jedan isti broj. Takvi nizovi zovu se **aritmetički nizovi (ili aritmetičke progresije).**

Navedeni nizovi (1)—(4) su aritmetički nizovi, jer je u prirodnom nizu ta razlika 1, u nizu parnih i nizu neparnih brojeva ta razlika je 2, a u nizu (4) ta razlika je 5.

Evo nekoliko primera konačnih nizova:

(5) $$1\ \ 4,\ \ 7,\ \ 10, \ldots, 91;$$

(6) $$100,\ 90,\ 80,\ 70, \ldots, 10;$$

(7) $$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2}, \ldots, \frac{101}{2}.$$

U prvom od njih je razlika 3, u drugom je razlika -10, a u trećem je razlika 1.

Ako razliku dva uzastopna člana aritmetičkog niza obeležimo sa d, možemo pisati:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots\ldots=d.$$

Dakle, aritmetički niz

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n,\ldots$$

karakteriše to što je

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=d,\\ a_3-a_2&=d,\\ a_4-a_3&=d,\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

tako da je odatle redom:

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+d,\\ a_3&=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+\mathbf{2}\,d,\\ a_4&=a_3+d=(a_1+2\,d)+d=a_1+\mathbf{3}\,d. \end{aligned}$$

Na osnovu toga je, na primer,

$$a_{11}=a_1+\mathbf{10}\,d,$$

te bilo koji član a_n možemo napisati u obliku

(8) $$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Pomoću ove formule možemo izračunati bilo koji član aritmetičkog niza ako znamo prvi član a_1 i razliku d. Na primer, u nizu (5) je $a_{17}=1+(17-1)\cdot 3=49$.

U nizu neparnih brojeva je $a_1=1$, $d=2$, pa je

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2\,n-1,$$

a u nizu parnih brojeva je $a_1=2$, $d=2$, pa je

$$a_n=2+(n-1)\cdot 2=2\,n.$$

Možemo, sem toga, da odredimo na kojem se mestu u nizu nalazi neki dati član, kao na primer, u nizu (5) broj 91; u tom slučaju je $a_n=91$ (ne znamo mesto tog člana, tj. ne znamo broj n), pa je

$$91=1+(n-\cdot 1)\cdot 3,$$

a odatle je $n=31$, pa je, dakle, $91=a_{31}$.

5. Posle ovoga možemo odgovoriti na sledeća pitanja:

1) Kako glasi niz od 6 članova čiji je prvi član $a_1 = 4$, a razlika je $d = 9$?

2) Koliko članova ima aritmetički niz

$$1,\ 5,\ 9,\ 13, \ldots, 489?$$

3) Kako glasi sedamdeseti član niza

$$16,\ 10,\ 4,\ -2, \ldots ?$$

4) Kako glase prvi i deseti član aritmetičkog niza čiji je treći član $a_3 = 8$, a peti član $a_5 = 14$?

5) Kako glasi niz od 10 članova ako mu je peti član $a_5 = -2$, a razlika je $d = 7$?

Dr M. Ilić-Dajović (Beograd)

O NIZOVIMA BROJEVA

II

1. U prvom delu ovog članka («Matem. list», III. 1) objasnili smo da se, u matematici, **nizom brojeva** ili, kratko, nizom naziva svako *mnoštvo (svaki skup) brojeva koje ima to svojstvo da sve njegove članove* možemo numerisati redom prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4, ... tako da svakom prirodnom broju odgovara na izvestan način po jedan od članova tog mnoštva. Brojeve sadržane u nizu nazivamo č l a n o v i m a n i z a.

Samim tim što članove niza možemo *numerisati*, znači da svaki član ima u nizu svoje određeno mesto. Zato je najprostije sve članove jednog niza obeležiti jednim istim slovom, a brojem pored tog slova (tzv. indeksom) naznačiti mesto na kojem se taj član nalazi; tako ćemo prvi član niza obeležiti sa a_1, drugi član sa a_2, treći sa a_3, ..., deseti sa a_{10}, a bilo koji član sa a_n (n je ovde prirodan broj). Na primer, u nizu

(1) $$1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 137$$

je $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=9$, ..., a poslednji član (zasad još ne znamo koji je on po redu) — to je broj 137 — obeležićemo sa a_n; dakle, $a_n=137$.

Dati niz ima svojstvo da mu je razlika između svaka dva uzastopna člana stalna i jednaka 4; usled toga, taj niz je *aritmetički* (*aritmetička progresija*), sa prvim članom $a_1=1$ i razlikom $d=4$. Bilo koji njegov član a_n dobija se, kao što smo videli u prvom delu ovog članka, tako što se prvom članu $(n-1)$ put doda razlika d; dakle:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

U posmatranom primeru je

$$137 = 1 + (n-1)\cdot 4,$$

a odatle je $n=34$, što znači da je $137=a_{34}$ (trideset četvrti član niza).

2. Postavimo sada zadatak da nađemo zbir svih prirodnih brojeva od 1 do 100, drugim rečima, zbir svih članova niza

(2) $$1, 2, 3, 4, \ldots, 97, 98, 99, 100.$$

Tu je prvi član $a_1=1$, razlika je $d=1$, a poslednji (stoti) član je $a_{100}=100$.

Verovatno je mnogima od vas poznato kako se traženi zbir može brzo izračunati: napiše se najpre zbir od prve polovine članova niza (2), a zatim se ispod tog zbira napiše zbir od druge polovine članova, ali u obrnutom poretku:

$$\begin{array}{r} 1+\ 2+\ 3+\ 4+\ \cdots+47+48+49+50+ \\ +100+99+98+97+\ \cdots+54+53+52+51 \end{array}$$

i sada se sabira vertikalno: $1+100=101$, $2+99=101$, zatim $3+98=101$, $\ldots$, $48+53=101$, $49+52=101$, $50+51=101$. Kad sve te zbirove saberemo, dobićemo traženi zbir:

$$50\cdot101=5050.$$

Zadatak. — Sabrati na isti način kao u prethodnom primeru: a) sve prirodne brojeve od 1 do 1000; b) sve prirodne brojeve od 1 do 9999.

3. Priznajmo da, posle tako brzog i lakog izračunavanja zbira $1+2+3+\ \ldots+99+100$, nismo daleko od pomisli da je taj postupak toliko lak jedino zato što je dati niz (sa razlikom 1) bio neobično prost.

Međutim, može se pokazati da se isti postupak koristi i za izračunavanje zbira uzastopnih članova bilo kojeg aritmetičkog niza. Uzećemo najpre još jedan primer:

Izračunati zbir S svih članova aritmetičkog niza

(3) $$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots\ 95,\ 100,\ 105,\ 110.$$

Nije teško videti da taj niz ima 22 člana (kako ćete to najbrže utvrditi?); pri tom je $a_1=5$, $a_{22}=110$. Postupimo kao maločas:

$$\begin{array}{r} 5+\ 10+\ 15+\ \ldots\ +50\ +55+ \\ +110+105+100+\ \ldots\ +65\ +60 \\ \hline S=115+115+115+\ \ldots\ +115+115; \end{array}$$

pri tome se sabirak 115 ponavlja 11 puta; dakle, traženi zbir je

$$S=11\cdot115=1265.$$

Mogli smo, međutim, najpre napisati

$$\begin{array}{l} S=\ \ 5+\ 10+\ 15+\ \ldots\ +100+105+110, \\ S=110+105+100+\ \ldots\ +\ 15+\ 10+\ \ 5 \end{array}$$

(u drugom redu smo napisali isti zbir, ali obrnutim redom), pa zatim sabrati; dobili bismo:

$$2S=115+115+115+\ \ldots\ +115+115+115.$$

Na desnoj strani svaki sabirak 115 jednak je zbiru prvog i poslednjeg člana u zbiru: $5+110=115$; tih jednakih sabiraka ima onoliko koliko ima članova niza (to jest 22); stoga je:

$$2S=22\cdot(5+115), \qquad S=\frac{22}{2}(5+115).$$

Dakle, *zbir aritmetičkog niza od konačno mnogo članova izračunava se tako što se saberu prvi i poslednji član i dobijeni zbir najpre pomnoži brojem članova, a zatim taj proizvod podeli sa 2.*

Kako bismo, primenjujući prethodni postupak, našli čemu je jednak zbir brojeva

$$a_1+a_2+a_3 \ \ldots \ +a_n,$$

gde brojevi a_1, a_2, a_3, ..., a_n čine aritmetički niz?

Primenjujući navedeni postupak našli bismo da je

$$(*) \qquad S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

(a_1 je prvi član, a_n — poslednji član, n — broj članova).

Dobili smo **formulu** za izračunavanje zbira konačno mnogo uzastopnih članova arimetičkog niza; da bismo taj zbir mogli pomcću formule (*) izračunati, potrebno je da znamo prvi i poslednji član niza i broj članova koje treba sabrati.

P r i m e r. — Izračunati zbir svih neparnih brojeva od 1 do 99999.

R e š e n j e. — Treba najpre da utvrdimo koliko ima članova niza

$$(4) \qquad 1, 3, 5, 7, \ldots, 99999,$$

to jest da odredimo koji je po redu član 99999. — Ranije smo videli da je, za niz neparnih brojeva,

$$a_n=2n-1,$$

tako da kad stavimo $2n-1=99999$, odmah dobijamo da je $n=50000$.

Sada je lako izračunati zbir S svih neparnih prirodnih brojeva od 1 do 99999:

$$S=\frac{50\,000}{2}(1+99999)=2500\,000\,000.$$

Pomislite koliko bi vremena trebalo da se redom saberu svi članovi niza (4)!

5. Polovinu zbira bilo koja dva broja nazivamo **aritmetičkom sredinom** tih brojeva. Na primer,

$$7=\frac{5+9}{2}$$

je aritmetička sredina brojeva 5 i 9; isto tako, broj 50 je aritmetička sredina brojeva 1 i 99, itd.

Aritmetički niz ima to karakteristično svojstvo da je, počev od drugog člana, svaki njegov član aritmetička sredina dva susedna ili dva od njega jednako udaljena člana.

Drugim rečima, ako je

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

aritmetički niz, tada je

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}, \quad a_3=\frac{a_2+a_4}{2}, \quad a_3=\frac{a_1+a_5}{2}, \ldots$$

Evo kako ćemo to dokazati.

Znamo da je $a_2=a_1+d$; odatle je $a_1=a_2-d$. Ako napišemo: $a_3=a_2+d$, imaćemo:

$$a_1+a_3=a_2-d+a_2+d=2a_2,$$

tako da je zaista $a_2=(a_1+a_3)/2$.

Isto tako možemo pisati:

$$a_1=a_3-2d, \ a_5=a_3+2d$$

(objasni zašto), te je

$$a_1+a_5=a_3-2d+a_3+2d=2a_3,$$

a odatle je $a_3=(a_1+a_5)/2$.

6. Sada možemo brzo odgovoriti na sledeća pitanja:

1) Ako je treći član aritmetičkog niza $a_3=10$, koliki je zbir $a_1+a_3+a_5$?

2) Ako je deseti član nekog aritmetičkog niza $a_{10}=60$, koliki koliki je zbir $a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}$?

3) Koliki je zbir svih brojeva deljivih sa 10, počev od broja 10 do broja 10 000?

4) Koliki je zbir svih brojeva deljivih sa 11 počev od broja 11 do broja 3 630?

Статиите прв пат се објавени во списанието Математички лист на ДМ на Србија