Задаци о скуповима

верзија 1.5.1: 21.10.2015.

Душан Ђукић

1. Дати су скупови A и B. Колико има скупова X за које важи $A \cap X = B \cap X = A \cap B$ и $A \cup B \cup X = A \cup B$?

   Решење. Из услова задатка добијамо $(A \cup B) \cap X = (A \cap X) \cup (B \cap X) = A \cap B$. С друге стране, $(A \cup B) \cap X = (A \cup B \cup X) \cap X = X$. Дакле, $X = A \cap B$.

2. Дато је n скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$. Доказати да међу скуповима $A_i \triangle A_j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ има бар n различитих.

   Решење. Означимо $f(X) = X \triangle A_1$. Довољно је доказати да из $X \neq Y$ следи $f(X) \neq f(Y)$. У ствари, важи $f(f(X)) = (X \triangle A_1) \triangle A_1 = ((X \triangle A_1) \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus (X \triangle A_1)) = (X \setminus A_1) \cup (X \cap A_1) = X$, па је пресликавање f заиста 1-1.

3. Колико највише различитих подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ се може изабрати тако да свака два имају непразан пресек?

   Решење. Ако има више од 2^{n-1} подскупова, онда постоји скуп $A \in \{1, \dots, n\}$ такав да су и A и $\overline{A}$ међу одабраним подскуповима, што је немогуће.

   С друге стране, могуће је одабрати тачно 2^{n-1} подскупова - нпр. сви подскупови који садрже број 1.

4. Да ли за сваки природан број n постоји 2^{n-1} подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ од којих свака два имају непразан пресек, али је пресек свих подскупова празан?

   Решење. Да. За непарно n довољно је узети све подскупове који имају више од $\frac{n}{2}$ елемената. За парно n можемо узети подскупове са више од $\frac{n}{2}$ и оне подскупове са тачно $\frac{n}{2}$ који садрже елемент 1.

5. Ако је дато 2^{n-1} подскупова скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$ са особином да је пресек свака три непразан, доказати да сви дати подскупови имају заједнички елемент.

   Решење. Нека су $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2^{n-1}}\}$ фамилија датих подскупова. За сваки скуп $B \subseteq S$, тачно један од скупова B и $S \setminus B$ је у $\mathcal{F}$. Како по услову задатка за произвољне индексе i, j подскуп $S \setminus (A_i \cap A_j)$ не може бити у $\mathcal{F}$, следи да је $A_i \cap A_j \in \mathcal{F}$. Дакле, фамилија $\mathcal{F}$ је затворена за пресеке, па једноставном индукцијом добијамо да је пресек свих подскупова из $\mathcal{F}$ непразан.

6. Нека је S скуп од n елемената. Наћи највећи број m за који постоје непразни подскупови $S_1, S_2, \dots, S_m \subset S$ такви да је пресек свака три празан.

   Решење. Сваки елемент скупа S се налази у највише два скупа S_i, дакле $\sum_i |S_i| \leqslant 2n$. Ако међу подскуповима S_i има k једночланих, онда је $2n \geqslant k + 2(m-k)$, дакле $2m \leqslant 2n + k \leqslant 3n$, тј. $m \leqslant [\frac{3n}{2}]$. Једнакост се достиже нпр. за скупове $\{1\}, \dots, \{n\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots$.

7. Дато је 2^{51} подскупова скупа S који има 101 елемената. Доказати да међу овим подскуповима постоје три подскупа A, B и C такви да је $C \subseteq A \cup B$.

   Решење. Посматрајмо дате подскупове и њихове уније по паровима. Њих укупно има $\frac{2^{51}(2^{51}+1)}{2} > 2^{101}$, па су нека два од њих иста. У сваком од случајева $A \cup B = C$ и $A \cup B = C \cup D$ следи $C \subseteq A \cup B$.

8. Подскуп A скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$ зовемо *интервалом* ако је $A = \{k, k+1, \dots, l\}$ за неке $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$. Ако су $A_1, A_2, \dots, A_m$ подскупови скупа S такви да је $A_i \cap A_j$ интервал за све $i \neq j$, колико највише може бити m?

   Решење. Ако сваки скуп A_i заменимо најмањим интервалом који је надскуп A_i, услов задатка остаје на снази. Зато можемо да сматрамо без смањења општости да су сви A_i интервали. Тада мора да постоји елемент x који припада свим скуповима A_i. Интервала који садрже x има укупно $x(n+1-x) \leqslant [\frac{(n+1)^2}{4}]$, одакле је $m \leqslant [\frac{(n+1)^2}{4}]$. Ова вредност за m се достиже нпр. ако су A_i сви интервали који садрже елемент $[\frac{n}{2}]$.

9. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија n-точланих скупова. Ако сваких $n+1$ скупова из фамилије $\mathcal{F}$ имају непразан пресек, доказати да сви скупови из $\mathcal{F}$ имају непразан пресек.

   Решење. Претпоставимо супротно и посматрајмо произвољан скуп $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ из $\mathcal{F}$. За свако i постоји скуп $A_i \in \mathcal{F}$ који не садржи елемент x_i. Тада је пресек $n+1$ скупова $A, A_1, \dots, A_n$ празан, контрадикција.

10. Изабрано је $n+1$ трочланих подскупова скупа S од n елемената. Доказати да међу њима постоје два чији је пресек једночлан.

    Решење. Нека су $S_1, \dots, S_{n+1}$ изабрани подскупови. Пишемо $S_i \sim S_j$ ако је $|S_i \cap S_j| = 2$. Тада ако је $S_i \sim S_j$ и $S_j \sim S_k$, скупови S_i и S_k имају бар један заједнички елемент, дакле $S_i \sim S_k$. Овако се подскупови S_i разбијају на класе, тако да свака два скупа у истој класи имају двочлани пресек, а свака два из различитих класа су дисјунктна.

    Довољно је показати да у класи која обухвата r елемената има највише r подскупова. Ово је јасно за $r \leqslant 4$. Нека је $r \geqslant 5$ и посматрајмо подскупове $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{a, b, d\}$ из те класе. Нека је e елемент у тој класи различит од a, b, c, d. Подскуп који садржи e мора да садржи још по два елемента из сваког од A и B, дакле то мора бити подскуп $\{a, b, e\}$. Овако добијамо да у овој класи има највише $r-2$ елемента, чиме је доказ завршен.

11. Дат је скуп S са n елемената. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ различити подскупови скупа S. Доказати да постоји $x \in S$ такав да су скупови $A_1 \setminus \{x\}, \dots, A_n \setminus \{x\}$ међусобно различити.

    Решење. Посматрајмо граф чија су темена скупови $A_1, \dots, A_n$. Претпоставимо да, ма који елемент x уклонили, нека два скупа постају иста - повежимо та два скупа граном. Добијени граф има n темена и n грана, па мора да садржи цикл: нека је то $A_1 A_2 \dots A_k A_1$, и нека су x_i елементи такви да је $A_i \setminus x_i = A_{i+1} \setminus x_i$ (где је $A_{k+1} = A_1$). Тада се x_1 налази у тачно једном од скупова A_1, A_2, рецимо у A_2. С друге стране, пошто је $x_i \neq x_1$ за $i > 1$, скупови $A_2, A_3, \dots, A_n, A_1$ сви садрже x_1, контрадикција.

12. Нека је S непразан скуп и $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ пресликавање са својством да, кад год је $A \subset B$, важи $f(A) \subset f(B)$. Доказати да постоји скуп $X \subseteq S$ такав да је $f(X) = X$.

    Решење. Посматрајмо фамилију $\mathcal{F}$ свих подскупова $Y \subseteq S$ за које је $f(Y) \subseteq Y$. Означимо са X пресек свих скупова из $\mathcal{F}$. Доказаћемо да је $f(X) = X$.

    Како за све $Y \in \mathcal{F}$ важи $f(X) \subseteq f(Y) = Y$, следи да је $f(X) \subseteq X$. С друге стране, одатле је и $f(f(X)) \subseteq f(X)$ по услову задатка, па $f(X) \in \mathcal{F}$, дакле $f(X) \supseteq X$, и тврђење одмах следи.

13. Дат је природан број $r \geqslant 2$. Нека је $\mathcal{F}$ бесконачна фамилија r-елементних скупова таквих да никоја два нису дисјунктна. Доказати да постоји скуп од $r-1$ елемената чији је пресек са сваким скупом у $\mathcal{F}$ непразан.

    Решење. Претпоставимо супротно. Посматрајмо било који скуп A са мање од r елемената који је садржан у бесконачно много скупова у $\mathcal{F}$. По претпоставци, постоји скуп $B \in \mathcal{F}$ чији је пресек са A празан. Како сваки од бесконачно много скупова који садрже A сече B, неки елемент $b \in B$ је садржан у бесконачно много њих. Али тада је и $A \cup \{b\}$ садржан у бесконачно много скупова у $\mathcal{F}$.

    Такав скуп A постоји: нпр. празан скуп. Сада узимањем максималног таквог скупа добијамо контрадикцију.

14. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_k$ подскупови скупа S који има $n \geqslant 2$ елемената. Ако за свака два елемента $x, y \in S$ постоји подскуп A_i који садржи тачно један од елемената x, y, доказати да је $n \leqslant 2^k$.

Решење. Сваком елементу a скупа S придружимо низ нула и јединица $[a] = (x_1, \dots, x_k)$, где је $x_i = 1$ ако $a \in A_i$, и $x_i = 0$ у супротном. По услову задатка, сви низови $[a]$ су различити, а низова нула и јединица дужине k има укупно 2^n, одакле следи тврђење.

15. Дати су подскупови $S_1, \dots, S_{2000}$ коначног скупа S, при чему је $|S_i| > \frac{1}{2}|S|$ за све i. Доказати да постоји 10 елемената $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ таквих да сваки подскуп S_i садржи бар један од њих.

   Решење. Доказујемо индукцијом да, за свако $n \in \mathbb{N}$ и ма којих $2^{n+1} - 2$ подскупова који сви садрже више од половине елемената скупа S, постоји n елемената $x_1, \dots, x_n$ таквих да сваки од одабраних подскупова садржи неки од њих. Ово је тривијално за $n = 0$. Претпоставимо да важи за $n = m - 1$. Ако сада имамо $k = 2^{m+1} - 2$ таквих подскупова, нпр. $S_1, \dots, S_k$, онда је $|S_1| + \cdots + |S_k| > \frac{1}{2}k|S| = (2^m - 1)|S|$, дакле постоји елемент x_m који лежи у бар 2^m подскупова. Остаје $k - 2^m = 2^m - 2$ подскупова, и по индукцијској претпоставци постоје елементи $x_1, \dots, x_{m-1}$ такви да сваки од ових подскупова садржи неки од њих. Индукција је готова.

16. Дато је 6 трочланих подскупова скупа X. Доказати да се елементи X могу обојити у две боје тако да ниједан од датих подскупова не буде једнобојан.

   Решење. Можемо да сматрамо да је X коначан са $|X| = n \geqslant 6$ и да применимо индукцију по броју n. За $n = 6$ има $20 > 2 \cdot 12$ трочланих подскупова, па постоји један од њих који није једнак ниједном датом подскупу или његовом комплементу; обојимо његове елементе једном бојом, а остале другом.

   Нека је сада $n > 6$. Парова елемената скупа X има бар $\binom{7}{2} = 21 > 6\binom{3}{2}$, па постоји пар $\{u, v\}$ који није садржан ни у једном датом подскупу. Заменимо сва појављивања u, v неким новим елементом w и применимо бојење по индуктивној претпоставци.

17. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_m$ трочлани подскупови скупа A од n елемената такви да за све различите i и j важи $|A_i \cap A_j| \leqslant 1$. Доказати да постоји скуп $X \subset A$ са бар $[\sqrt{2n}]$ елемената који не садржи ниједан од скупова A_i.

   Решење. Посматрајмо највећи такав подскуп X и означимо $|X| = k$. Додавањем скупу X ма ког елемента $a \in A \setminus X$ тражено својство се нарушава, што значи да постоје елементи $b, c \in X$ и неко i за које је $A_i = \{a, b, c\}$. Овако сваки пар $\{b.c\}$ елемената из X спречава додавање највише једног елемента a скупу X. Парова $\{b, c\}$ има $\frac{k(k-1)}{2}$, док елемената $a \in A \setminus X$ има $n - k$, па зато важи $n - k \leqslant \frac{k(k-1)}{2}$. Одавде је $k \geqslant \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, одакле следи $k \geqslant [\sqrt{2n}]$.

18. Нека је $\mathcal{F}_k$ фамилија k-елементних подскупова скупа $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geqslant k \geqslant 3$, таква да свака два подскупа у $\mathcal{F}_k$ у пресеку имају највише $k - 2$ елемената. Доказати да постоји скуп $M_k \subset X$ са бар $[\log_2 n]+1$ елемената који не садржи ниједан од подскупова из $\mathcal{F}_k$.

   Решење. Нека је $k < \log_2 n$ (у супротном је тривијално). Означимо $m = [\log_2 n] + 1$. Пошто сваки $(k-1)$-елементни подскуп X лежи у највише једном подскупу у $\mathcal{F}_k$, а сваки подскуп $\mathcal{F}_k$ садржи k $(k-1)$-елементних подскупова, имамо $|\mathcal{F}_k| \leqslant \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$. Следи да је укупан број парова (M, N), где су $N \subset M \subset X$, $|M| = m$ и $N \in \mathcal{F}_k$, једнак $\binom{n-k}{m-k}|\mathcal{F}_k| \leqslant \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n-k}{m-k} = \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ што је мање од броја $\binom{n}{m}$ m-елементних подскупова M, дакле, за бар једно M не постоји скуп $N \in \mathbb{F}_k$ садржан у њему.

19. Скуп $S = \{1, 2, \dots, n\}$ је први пут разбијен на m, а други пут на $m + k$ непразних подскупова $(k > 0)$. Доказати да се бар $k + 1$ елемент скупа S први пут налазио у бројнијем подскупу него други пут.

   Решење. Нека су $S = A_1 \cup \cdots \cup A_m = B_1 \cup \cdots \cup B_{m+k}$ дата разбијања. За $t \in S$ означимо са x_t и y_t број елемената оног од скупова A_i (односно B_i) који садржи t. Како за све $t \in A_i$ важи $x_t = |A_i|$, следи $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} = m$. Аналогно је $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{y_t} = m + k$. То значи да је $\sum_{t=1}^{n} (\frac{1}{y_t} - \frac{1}{x_t}) = k$, па како су сви сабирци у овој суми мањи од 1, мора бити бар $k + 1$ позитивних, тј. за бар $k + 1$ вредности t је $y_t < x_t$.

20. Посматрајмо све фамилије $\mathcal{F}$ трочланих подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ међу којима никоја два немају више од једног заједничког елемента. Ако са $f(n)$ означимо највећу могућу кардиналност $\mathcal{F}$, доказати да је $\frac{n^2-4n}{6} \leqslant f(n) \leqslant \frac{n^2-n}{6}$.

   Решење. Парова (x, y) елемената скупа $\{1, \dots, n\}$ има $\frac{n^2-n}{2}$; сваки подскуп у $\mathcal{F}$ садржи три пара, и ниједан пар није садржан у два подскупа, одакле следи $3f(n) \leqslant \frac{n^2-n}{2}$.

   С друге стране, фамилија $\mathcal{F} = \{\{a, b, c\} \mid n \mid a + b + c, a \neq b \neq c \neq a\}$ задовољава услов задатка и има $[\frac{n^2-3n+6}{6}]$ елемената.

21. Дати су скупови $A_1, A_2, \dots, A_n$ чији је пресек празан, такви да је $|A_i| = 30$ за све i и $|A_i \cap A_j| = 1$ за све различите i, j. Колико највише може бити n?

   Решење. Претпоставимо да је $n \geqslant 29 \cdot 30 + 2 = 872$. Међу елементима $A_1 \cap A_i$, $i = 2, 3, \dots, 872$ има највише 30 различитих, па по Дирихлеовом принципу постоји елемент $a \in A_1$ који лежи у још бар 30 скупова A_i. Нека, без смањења општости, $a \in A_1, A_2, \dots, A_{31}$. Посматрајмо неки скуп A_k који не садржи a. Сви елементи $A_k \cap A_i$ $(i = 1, \dots, 31)$ су међусобно различити јер је $A_i \cap A_j = \{a\}$ за све $1 \leqslant i < j \leqslant 31$. То је немогуће јер A_k има само 30 елемената.

   Сада ћемо конструисати пример 871 скупа са траженим својствима. За целе бројеве a, b, c означимо $L_{a,b,c} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y < 29,\ ax + by \equiv c \pmod{29}\}$. Ако нису оба броја a, b дељива са 29, скуп $L_{a,b,c}$ се састоји од 29 парова. Нека су $a_0, a_1, \dots, a_{28}$ додатни елементи. Дефинишимо

$$A_{i,j} = L_{1,i,j} \cup \{a_i\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 28,\ 0 \leqslant j \leqslant 28;$$
$$A_{29,j} = L_{0,1,j} \cup \{a_{29}\}, \quad A_{30,j} = L_{1,0,j} \cup \{a_{30}\}, \quad A_{0,0} = \{a_1, a_2, \dots, a_{30}\}.$$

   Скупови $A_{0,0}$ и $A_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant 30,\ 0 \leqslant j \leqslant 28)$ задовољавају услове.

   Напомена. Конструисани пример је познат као *коначна пројективна раван*.

22. Колико највише подскупова $A_1, \dots, A_m$ n-елементног скупа A се може одабрати тако да је $A_i \not\subset A_j$ за све $i \neq j$?

   Решење. Посматрајмо ланце $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = A$, где је $|B_k| = k$ за све k. Оваквих ланаца има укупно $n!$. За свако i, број оваквих ланаца који садрже скуп A_i једнак је $|A_i|!(n - |A_i|!)$. При том, никоја два од скупова A_i не могу припадати истом ланцу. Одавде је $\sum_i |A_i|!(n - |A_i|!) \leqslant n!$, тј. након дељења са $n!$,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leqslant 1.$$

   Како је сваки од разломака бар $1/\binom{n}{[n/2]}$, следи $m \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. Ова вредност за m се достиже нпр. ако се за A_i узму сви $[n/2]$-елементни подскупови скупа A.

   Напомена. Ово се зове *Шпернерова теорема*,

23. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_r$ подскупови скупа $S = \{1, 2, \dots, n\}$ такви да за све $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant r$ важи $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leqslant n - 2$. Доказати да је $r \leqslant 2^{n-2}$.

   Решење. Скуп $T \subset S$ зовемо *лаким* ако је $T \subset A_i \cup A_j$ за неке i, j. Нека је A скуп минималне кардиналности који није лак и нека је $B = S \setminus A$.

   Посматрајмо фамилију $\mathcal{A} = \{A \cap A_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Пошто A није лак, следи да скупови X и $A \setminus X$ не могу истовремено да буду у $\mathcal{A}$, дакле $|\mathcal{A}| \leqslant 2^{|A|-1}$.

   Сада посматрајмо фамилију $\mathcal{B} = \{B \cap A_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ и покажимо да ни овде не могу да X и $B \setminus X$ истовремено буду у $\mathcal{B}$. Претпоставимо супротно, да је $X = B \cap A_p$ и $B \setminus X = B \cap A_q$. Како по дефиницији A постоје A_i, A_j такви да је $A \setminus \{m\} \subset A_i \cup A_j$ за неке i, j и $m \in S$, следи $|A_i \cup A_j \cup A_p \cup A_q| \geqslant n - 1$, што је немогуће. Према томе, $|\mathcal{B}| \leqslant 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}$.

   Најзад, $k \leqslant |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| = 2^{|A|-1} \cdot 2^{n-|A|-1} = 2^{n-2}$.

24. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_m$ подскупови n-елементног скупа A такви да је $|A_i \cap A_j| = 1$ за све $i \neq j$. Доказати да је $m \leqslant n$.

Решење. Нека је $A = \{1, \ldots, n\}$. Придружимо сваком скупу A_i вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ у векторском простору $\mathbb{Z}_2^n$, где је $a_{ij} = 1$ ако $j \in S_i$ и $a_{ij} = 0$ у супротном. Услов $|A_i \cap A_j| = 1$ се може написати као $a_i \cdot a_j = 1$. Надаље радимо по модулу 2.

Претпоставимо да је $m > n$. Тада су вектори $a_1, \ldots, a_m$ линеарно зависни над $\mathbb{Z}_2$, тј. постоје коефицијенти $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ који нису сви једнаки 0, такви да је $a = \sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i = (0, 0, \ldots, 0)$. Тада за k такво да је $a_k = 1$ имамо $0 = a \cdot a_k = \sum_{i=1}^m \epsilon_i a_i \cdot a_k = \sum_i \epsilon_i - 1$, дакле $\sum_i \epsilon_i$ је непарно. С друге стране, $0 = a \cdot a = \sum_i \epsilon_i$, што је контрадикција.

25. Скуп зовемо *парним* ако му је број елемената паран. Нека је n паран природан број и $S_1, \ldots, S_n$ парни подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да постоје i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ такви да је $S_i \cap S_j$ паран.

Решење. Претпоставимо супротно. Придружимо сваком скупу S_i вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \{0, 1\}^n$, где је $a_{ij} = 1$ ако $j \in S_i$ и $a_{ij} = 0$ у супротном. Услов да је S_i паран еквивалентан је са $a_i \cdot a_i \equiv 0 \pmod 2$. Такође, скуп $|S_i \cap S_j|$ је непаран ако и само ако је $a_i \cdot a_j \equiv 1 \pmod 2$.

Како је збир координата у сваком s_i паран, збир координата у вектору $\sum_{i \in Y} a_i$ је такође паран за сваки подскуп $Y \in \{1, \ldots, n\}$. То значи да за $\sum_{i \in Y} a_i$ има највише 2^{n-1} могућности, а скупова Y има 2^n, одакле следи да је $\sum_{i \in X} a_i \equiv (0, 0, \ldots, 0) \pmod 2$ за неки подскуп $X \subset \{1, \ldots, n\}$. Сада за $j \in X$ имамо $0 = a_j \cdot \sum_{i \in X} a_i = a_j \cdot a_j + \sum_{i \in X \setminus \{j\}} a_j \cdot a_i \equiv |X| - 1 \pmod 2$, одакле је X непарно; с друге стране, за $j \neq X$, $0 = a_j \cdot \sum_{i \in X} a_i$ даје $2 \mid |X|$, контрадикција.

Београд, 2012-2015