VI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Дадени се множествата: $A=\{x|x\in N$ и $x\leq 10\}$, $B=\{x|x\in N$ и $5\leq x<15\}$ и $C=\{x|x\in N$ и x е парен број и $x\leq 12\}$.

Формирај ги, запиши ги на табеларен начин и покажи дека за нив важи равенството:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

2. Четворица велосипедисти се движат по кружна патека со различни брзини: првиот ја обиколува за 10, вториот за 12, третиот за 15 и четвртиот за 16 минути. Ако сите тргнат од иста почетна точка, после колку време ќе бидат сите на почетната точка? По колку пати во меѓувреме секој од нив ја поминал патеката?

3. Колку петцифрени броеви има на кои збирот на цифрите им е 3?

4. Една нива во форма на правоаголник на која должината е два пати поголема од ширината е заградена со три реда жици, за што биле употребени 720 метри жица. Нивата е посеана со пченица. Колку килограми пченица се добиени од нивата ако од еден ар се добиени 50 kg пченица?

V одделение

1. Множествата претставени на табеларен начин:

$A=\{1, 2, 3, ..., 10\}$; $B=\{5, 6, 7, ..., 14\}$; $C=\{2, 4, 6, ..., 12\}$.

Проверка на равенствата:

$A\setminus(B\cup C)=\{1, 2, 3, ..., 10\}\setminus\{2, 4, 5, 6, ..., 12, 13, 14\}=\{1, 3\}$,

$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\{1, 2, 3, 4\}\cap\{1, 3\}=\{1, 3\}$,

т.е. важи даденото равенство.

2. Времето во кое ќе се најдат сите велосипедисти повторно во почетната точка ќе претставува НЗС(10, 12, 15, 16)=240 минути. Првиот велосипедист патеката ќе ја помине 240:10=24 пати, вториот 20, третиот 16 и четвртиот 15 пати.

3. Ако збирот на цифрите на петцифрениот број е 3, тоа значи дека бројот може да е составен од:

- три единици и две нули,
- една двојка, една единица и три нули,
- една тројка и четири нули.

Ако бројот е составен од три едници и две нули, тогаш можат да се запишат шест петцифрени броја: 11100, 11010, 11001, 10101, 10011, 10110.

Ако бројот е составен од една двојка, една единица и три нули, тогаш можат да се запишат осум петцифрени броја: 21000, 20100, 20010, 20001, 12000, 10200, 10020, 10002.

Ако бројот е составен од една тројка и четири нули, тогаш 30000 е единствениот петцифрен број со тие цифри. Според тоа има: 6+8+1=15 такви петцифрени броеви.

4. За оградување на нивата со еден ред употребени се 720:3=240 метри жица. Според тоа периметарот на нивата е 240 метри, т.е.

$$2(a+b)=240$$
$$a+b=120 \text{ m}.$$

Бидејќи $a=2b$ имаме: $2b+b=120$, т.е. $b=40$ m, а $a=80$ m. Плоштината на нивата е: $P=80\cdot40=3200$ m^2=32 ари. Од еден ар се добива 50 kg, следува дека вкупно е добиено $32\cdot50=1600$ kg пченица.

VI одделение

1. Најди дропка еднаква на $\frac{5}{7}$ на која збирот од броителот и именителот ќе биде 60.

2. Квадратна нива со плоштина 6162,25 m^2 треба да се загради со три реда жица. Колку жица е потребно за заградување на нивата?

3. Колку страни има многуаголник ако бројот на страните му е два пати поголем од бројот на дијагоналите повлечени од едно теме ?

4. Во рамнокрак триаголник ABC $\left(\overline{AC} = \overline{BC}\right)$, со периметар 22 cm, повлечена е медијана AA_1. Периметрите на триаголниците ABA_1 и AA_1C соодветно се 17 cm и 19 cm. Да се определат должините на страните на ΔABC.

VI одделение

1. За да ја добиеме бараната дропка, треба дропката $\frac{5}{7}$ да ја прошириме со некој број k (k≠0) т.е. $\frac{5}{7} = \frac{5k}{7k}$. Од 5k+7k=60, следи k=5. Оттука следува дека бараната дропка е $\frac{25}{35}$.

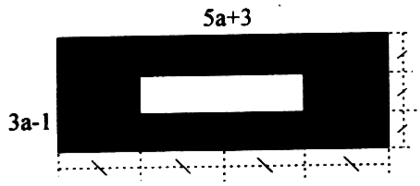
2. Од тоа што плоштината на квадратот е a^2 имаме: $a^2=6162,25$, т.е. $a = \sqrt{6162,25} = 78,5$. Обиколката на нивата е: $L=4\cdot 78,5=314$ m, а за заградување на нивата е употребено $314\cdot 3=942$ m жица.

3. Ако со n го означиме бројот на страните на многуаголникот, тогаш од едно теме можат да се повлечат n-3 дијагонали.
$n=2(n-3)$, т.е. $n=6$.

4. Види: VIII р.н. VI/4.

VII одделение

1. Запиши ја во форма на полином во нормален вид формулата за пресметување на плоштината на шрафираниот дел од цртежот.



2. Во равенката $(k+2)x-ky=(k-1)y+x-15$ одреди го параметарот k така што таа да биде задоволена за $x=2$ и $y=3$.

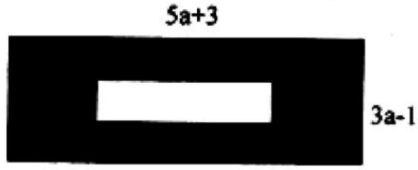
3. Конструирај рамнокрак трапез ако е дадена поголемата основа a, кракот c и дијагоналата R.

4. Дијаметарот AB на кружницата k е продолжен до произволна точка C, а низ C е повлечена секантата CDE на кружницата k, така што $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

Докажи дека: $\angle AOE=3\cdot\angle OCD$.

VII одделение

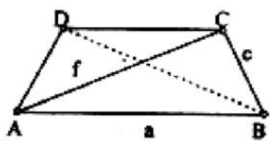
1. Плоштината на шрафираниот дел на фигурата од цртежот е:



$P=(5a+3)\cdot(3a-1)-\frac{1}{2}(5a+3)\cdot\frac{1}{3}(3a-1)=(5a+3)\cdot(3a-1)-\frac{1}{6}(5a+3)\cdot(3a-1)=\frac{5}{6}(5a+3)(3a-1)=\frac{5}{6}(15a^2+4a-3)=\frac{25}{2}a^2+\frac{10}{3}a-\frac{5}{2}$.

2. Ако во дадената равенка ги замениме x и y со дадените вредности ќе добиеме: $(k+2)\cdot2-k\cdot3=(k-1)\cdot3+2-15$; $2k+4-3k=3k-3-13$; $-4k=-12$; $k=3$.

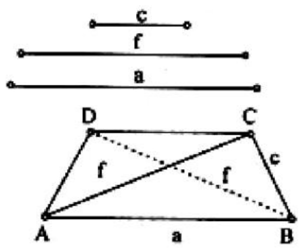
3. Анализа: Нека задачата е решена. Триаголникот ABC може да се конструира со дадените страни a, c и f. Темето D од трапезот ќе го одредиме со конструкција на ΔABD со страни a, c и f .



Конструкција: Ги конструираме триаголниците ABC и ABD со дадените страни a, c и f.

Доказ: Доказот е очигледен од самата конструкција, бидејќи трапезот ги содржи дадените елементи .

Дискусија: Задачата има единствено решение, ако страните a, c и f го задоволуваат условот: Која и да било страна на триаголникот е помала од збирот на другите две, а поголема од нивната разлика, т.е. $|c-f|<a<c+f$.



4. Од $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, следува дека ΔOCD е рамнокрак и ∠OCD=∠COD ... (1)

ΔODE е рамнокрак $\left(\overline{OD}=\overline{OE}\right)$ и ∠ODE=∠OED ... (2)

∠ODE е надворешен агол на ΔOCD и тој е еднаков на збирот од двата внатрешни несоседни агли, т.е. ∠ODE=∠COD+∠OCD ...(3)

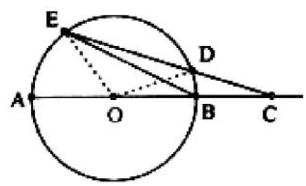
Од (1) следува ∠ODE=2∠OCD и ∠OED=2∠OCD.

∠AOE е надворешен агол на ΔOCE.

∠AOE=∠OCD+∠OED.

Од (2) и (3) следува:

∠AOE=∠OCD+2∠OCD=3∠OCD.



VIII одделение

1. Докажи дека бројот $\overline{xyxy}$ е делив со 101.

2. Страните a, b, c на ΔABC се однесуваат како 4:6:7. Триаголник $A_1B_1C_1$ сличен на дадениот има периметар $L_1=102$ cm. Најди ги страните на $\Delta A_1B_1C_1$.

3. Еден индиски махараџа на своите 6 синови им оставил дијаманти со еднаква вредност и наредил да ги поделат така што најстариот син да добие $\frac{1}{7}$ од дијамантите и уште 1, вториот $\frac{1}{7}$ од останатите и уште 2, третиот $\frac{1}{7}$ од останатите и уште 3 итн. и најмалиот $\frac{1}{7}$ од останатите и уште 6 дијаманти. На крајот сите синови добиле по ист број дијаманти. Колку вкупно дијаманти оставил махараџата и по колку добил секој од синовите?

4. На страната AC од ΔABC е нанесена отсечката $\overline{AM}=\overline{AB}$, а на продолжението на страната CA, преку A, почнувајќи од A, отсечката $\overline{AP}=\overline{AB}$. Докажи дека :

а) BM и BP се нормални на симетралите на аглите CAB, односно BAP;

б) ΔPBM е правоаголен и да се пресмета неѓовиот периметар ако $\overline{AB}=3$ cm и $\angle MPB=30^\circ$.

VIII одделение

1. Ако дадениот број го запишеме во полиномна форма имаме:

$$\overline{xyxy}=10^3x=10^2y+10x+y=1010x+101y=101(10x+y).$$

Оттука следува дека $101|\overline{xyxy}$.

2. Нека a, b и c се страни на ΔABC, а a_1, b_1 и c_1 страни на $\Delta A_1B_1C_1$.
Од $a:b:c=4:6:7$ и $a:b:c=a_1:b_1:c_1$ следува:

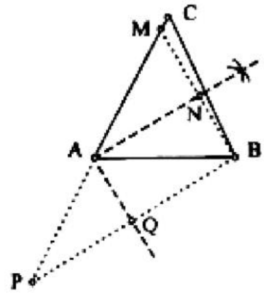
$$a_1:b_1:c_1=4:6:7,\ \text{т.е.}\ a_1=4k,\ b_1=6k,\ c_1=7k,\ \text{а}$$

$$L_1=a_1+b_1+c_1=17k.\ 102=17k;\quad k=6,\ \text{а}\ a_1=4\cdot 6=24\text{ cm},\ b_1=6\cdot 6=36\text{ cm},\ c_1=7\cdot 6=42\text{ cm}.$$

3. Со решавањето на задачата ќе почнеме од бројот на дијамантите на најмалиот (шестиот) син. Нека x е бројот на дијамантите што останале од петтиот син.

Шестиот син добил $\frac{1}{7}$ од x и уште 6 дијаманти, што значи дека $7|x$, т.е. $x=7k$ и $x-k=6$.

Од дадените равенства се добива $k=1$ и $x=7$, т.е. секој од синовите добил по 7, а махараџата оставил вкупно $6\cdot 7=42$ дијаманти.



4. а) Од условот $\overline{AB}=\overline{AM}$ (види цртеж) следува дека ΔABM е рамнокрак со основа BM, а AN е висината повлечена кон основата, т.е. $BM\perp AN$. Висината повлечена кон основата и симетралата на аголот при врвот на рамнокракиот триаголник се совпаѓаат, што значи дека BM е нормала на симетралата на аголот CAB. Триаголникот PAB е рамнокрак со основа PB. Од исти причини и PB е нормална на симетралата на аголот PAB, т.е. $AQ\perp PB$.

б) Отсечките AQ и AN се симетрали на два напоредни агли, што значи дека тие се меѓусебе нормални, т.е. $AQ\perp AN$.

Бидејќи $AQ\perp PB$, $AN\perp BM$ и $AQ\perp AN$ следува дека $PB\perp MB$, т.е. ΔPBM е правоаголен со прав агол во темето B.

Катетата $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{PM}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ cm, бидејќи BM е катета на правоаголен триаголник спроти агол од 30^o.

$$\overline{BP}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{BM}^2};$$

$$\overline{BP}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\text{ cm}.$$

$$L=\overline{BP}+\overline{BM}+\overline{PM};$$

$$L=3\sqrt{3}+6+9=3(\sqrt{3}+3)\text{cm}.$$