САВРШЕНИ БРОЈЕВИ

Ратко Тошић, Нови Сад

Бог је створио свет за 6 дана, јер је 6 савршен број,
али би он био савршен и да стварање није трајало толико.
Свети Августин

ДЕФИНИЦИЈА

За природан број n кажемо да је *савршен* ако је збир свих његових правих делилаца једнак n. Прави делиоци природног броја n су сви делиоци од n који су мањи од n. На пример, број 6 је савршен, јер су сви његови прави делиоци 1, 2 и 3, а њихов збир је 6. Чешће се савршен број дефинише као природан број n такав да је збир свих његових делилаца (укључујући и сам број n) једнак $2n$.

Лако се проверава, на пример, да су 28, 496, 8128 и 33550336 савршени бројеви.

ФУНКЦИЈА $\sigma(x)$

Видимо да у дефиницији савршених бројева фигурише појам *збир делилаца*. Збир делилаца је једна од функција са којом се често срећемо у теорији бројева. Уобичајена ознака за функцију „збир делилаца“ је $\sigma(n)$.

Дакле, за сваки природан број n дефинишемо $\sigma(n)$ као збир свих позитивних делилаца броја n.

Збир делилаца је једна од важних аритметичких функција теорије бројева.

Аритметичка функција је функција целобројних променљивих која узима само целобројне вредности за све вредности својих променљивих за које је дефинисана. На пример, полином са целобројним коефицијентима је аритметичка функција.

Аритметичка функција од једне променљиве $f(x)$ је *мултипликативна* ако су задовољена следећа два услова:

(1) $f(n)$ није идентички једнака нули;

(2) $f(mn) = f(m)f(n)$, ако је $NZD(m,n) = 1$.

На пример, функција $f(n) = n^k$ је мултипликативна.

Лако се види да је, за мултипликативну функцију $f(n)$, $f(1) = 1$. Наиме, ако је за неко n_0, $f(n_0) \neq 0$, онда је $f(n_0) = f(n_0 \cdot 1) = f(n_0)f(1)$, одакле следи да је $f(1) = 1$.

Јасно је да је $\sigma(p) = p + 1$, ако је p прост број. Даље, ако је p прост број, онда је

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Теорема 1. Ако је $= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, онда је

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Доказ. Следи на основу чињенице да се после множења заграда

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \ldots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}),$$

сваки делитељ броја n појављује тачно једанпут као сабирак.

□

Теорема 2. Функција $\sigma(n)$ је мултипликативна.

Доказ. Нека су x и y узајамно прости бројеви и нека су њихове факторизације на просте чиниоце (канонска представљања) дате са

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \text{ и } y = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_r^{\beta_r}.$$

Како бројеви x и y немају заједничких простих делилаца, канонски облик њиховог производа је

$$xy = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_r^{\beta_r},$$

па је према теореми 1

$$\sigma(xy) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \cdot \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \cdot \frac{q_2^{\beta_2+1} - 1}{q_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{q_r^{\beta_r+1} - 1}{q_r - 1}$$

$$= \sigma(x)\sigma(y).$$

□

ТЕОРЕМЕ ЕУКЛИДА И ОЈЛЕРА

Није познато да ли постоје непарни савршени бројеви.

Еуклидова и Ојлерова теорема, узете заједно, дају потребан и довољан услов да би неки паран природан број био савршен.

Теорема 3. (Еуклид) Ако је $2^n - 1$ прост број, онда је $2^{n-1}(2^n - 1)$ савршен број.

Доказ. Користећи чињеницу да је $\sigma(p) = p + 1$, ако је p прост број и мултипликативност функције $\sigma(x)$, имамо да је за $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ и $2^n - 1 = p$

$$\sigma(m) = \sigma(2^{n-1} \cdot p) = (2^n - 1)(p + 1) = (2^n - 1) \cdot 2^n = 2m.$$

□

Теорема 4. (Ојлер) Ако је паран природан број савршен, онда он има облик $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број.

Доказ. Нека је $m = 2^{n-1} \cdot q$, где је q непаран број, $n > 1$ и $\sigma(m) = 2m$. Следи да је

$$\sigma(m) = \sigma(2^{n-1})\sigma(q) = (2^n - 1)\sigma(q) = 2m = 2^n q.$$

Одатле је $\sigma(q) = 2^n \frac{q}{2^n-1}$. Како је $\sigma(q)$ природан и q непаран број, следи да је $q = (2^n - 1)k$, где је k непаран број и да је $\sigma(q) = 2^n \cdot k$. Како су k и $(2^n - 1)k$ делиоци броја q и како је њихов збир једнак $2^n \cdot k = \sigma(q)$, следи да q нема других делилаца. Дакле, $q = (2^n - 1)k$ је прост број, па је $k = 1$, тј. $2^n - 1$ је прост број.

□

ОБИЛНИ И ОСКУДНИ БРОЈЕВИ

Старогрчки математичари су сматрали важним да уз сваки број изучавају и све његове делиоце. Зато су поред савршених бројева посматрали *обилне* и *оскудне* бројеве. Број n је обилан, ако је $\sigma(n) > 2n$, а оскудан ако је $\sigma(n) < 2n$. У том смислу, „најоскуднији“ су прости бројеви, за које је $\sigma(n) = n + 1$. Оскудни су, такође, и степени двојке, али је код њих „оскудација“ најслабије изражена: $\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1$. С друге стране, обилност може бити веома изражена.

Теорема 5. Ако је n савршен или обилан број, онда је mn обилан број, за сваки природан број $m > 1$.

Доказ. Нека су $d_1 = 1$, d_2, ... , $d_k = n$ сви делиоци броја n. Тада су md_1, md_2, ... , md_k делиоци броја mn. Како је $m > 1$, делилац 1 није укључен у ову листу делилаца од mn. И без осталих делилаца броја mn, то је довољно да закључимо да је

$$\sigma(mn) \geq 1 + md_1 + \cdots + md_k > md_1 + \cdots + md_k = m\sigma(n).$$

Како је n савршен или обилан, то је $\sigma(n) \geq 2n$, па је

$$\sigma(mn) > m\sigma(n) \geq m \cdot 2n = 2mn,$$

што значи да је број mn обилан.

$\square$

Обилни бројеви мањи од 50 су 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42 и 48. Обилност бројева 20 и 40 може се директно проверити, а за остале наведене бројеве следи на основу претходне теореме или се, такође, може директно проверити.

Теорема 6. Сваки паран број већи од 46 може се представити као збир два обилна броја.

Доказ. Остатак при дељењу парног броја са 6 је 0, 2 или 4, тј. сваки паран цео број је облика $6k$, $6k+2$ или $6k+4$.

Ако је $n = 6k$ и $k \geq 4$, важи $n = 6k = 6 \cdot 2 + 6(k-2)$, а према теореми 5, оба броја на десној страни су обилна.

Ако је $n = 6k+2$ и $k \geq 5$, важи

$$n = 6k + 2 = 6 \cdot 3 + 6(k-3) + 2 = 20 + 6(k-3);$$

20 је обилан број, као и други сабирак (теорема 5).

Ако је $n = 6k+4$ и $k \geq 8$, важи

$$n = 6k + 4 = 6 \cdot 6 + 6(k-6) + 4 = 40 + 6(k-6);$$

а 40 и $6(k-6)$ су обилни бројеви, за $k \geq 8$.

$\square$

Теорема 7. Сваки цео број већи од 83160 може се представити као збир два
обилна броја.

Доказ. За парне бројеве тврђење следи на основу претходног задатка. Зато ћемо се ограничити на посматрање непарних бројева већих од 83160, мада доказ који ћемо дати обухвата и парне бројеве.

Као и у претходним тврђењима, обилност сабирака произилази из чињенице да су они дељиви познатим обилним бројевима.

Јасно је да из непарности збира $a+b$ призилази да су a и b различите парности. Зато нам је за доказ потребно да пронађемо неки непаран обилан број. Испоставља се да су непарни обилни бројеви ретки; најмањи је 945 (следећи је 1575).

Сада ћемо се позвати на један добро познати резултат из теорије линеарних диофантских једначина који гласи:

Ако су a и b узајамно прости природни бројеви, онда једначина

$$ax + by = c$$

има решење у скупу природних бројева, за сваки природан број $c > ab$.

Најмањи паран обилан број узајамно прост са $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ је $88 = 2^3 \cdot 11$. Зато једначина

$$88x + 945y = c$$

има решење (x, y) у скупу природних бројева, за сваки природан број $c > 88 \cdot 945 = 83160$. Како су 88 и 945 обилни бројеви, $88x$ и $945y$ су обилни бројеви за произвољне природне бројеве x и y. Тиме је тврђење доказано.

□

КОЛИКО ИМА САВРШЕНИХ БРОЈЕВА?

Савршени бројеви, као и савршени људи, врло су ретки.
Рене Декарт

Није познато да ли има бесконачно много савршених бројева. Није познато, такође, да ли уопште постоје непарни савршени бројеви. Зато би било коректније поставити питање: „Колико има природних бројева за које знамо (тј. за које је доказано) да су савршени?“ Сви до сада познати савршени бројеви су облика $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број.

Међутим, ми не знамо колико има простих бројева облика $2^n - 1$, нити да ли је њихов број коначан или бесконачан. Природни бројеви облика $2^n - 1$ називају се *Мерсенови бројеви* и за њих користимо посебну ознаку: $M_n = 2^n - 1$.

Следећа теорема даје један потребан али не и довољан услов да би Мерсенов број M_n био прост.

Теорема 8. Ако је n природан број и $2^n - 1$ прост, онда је и n прост број.

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење, тј. да је $2^n - 1$ сложен број, ако је n сложен број. Нека је $n = rs, r > 1, s > 1$. Тада је

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{rs} - 1 \\ &= (2^r)^s - 1 \\ &= (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

□

Према претходној теореми, број облика$2^n - 1$ не може бити прост ако n није прост. Зато се користи следећа нотација. Пишемо $M_p = 2^p - 1$, где се подразумева да је p прост број. Бројеви M_p називају се *Мерсенови прости бројеви* по француском математичару из 17. века који их је изучавао у вези са савршеним бројевима. Мерсенови прости бројеви су од посебног значаја. Разлози за то су делом историјски, а делом се заснивају на чињеници да такви прости бројеви налазе примену у другим областима математике.

M_p је прост број за прва четири проста броја: $p = 2, 3, 5, 7$ ($M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, $M_7 = 127$). Међутим, следећи Мерсенов број је сложен: $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Мерсен је тврдио да су $2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број $2^p - 12$ прост. Међутим, ова листа садржи грешке, које су откривене много времена после смрти М. Мерсена. Наиме, два броја за које је Мерсен тврдио да су прости, уствари су сложени, а испуштена су три проста броја. Первушин $(1827 - 1900)$ је, 1883. године, доказао да је M_{61} прост. За бројеве M_{89} и M_{107} је, такође, утврђено да су прости. С друге стране, за бројеве M_{67} и M_{257}показано је да су сложени.

Утврдити да ли је неки велики број (рецимо од неколико стотина цифара у декадном запису) прост, није нимало лак посао, чак ни данас кад располажемо моћним суперрачунарима. Мерсенови бројеви, међутим, спадају у класу природних бројева за које су развијене ефикасније методе тестирања.

До данас је за 50 Мерсенових бројева утврђено да су прости, али то нису првих 50 Мерсенових бројева. Тренутни рекордер је број $M_{77232917} = 2^{77232917} - 1$, који је откривен (доказано да је прост) 26. децембра 2017. године. То је и највећи досад познат прост број уопште. Декадни запис тога броја садржи 23249425 цифара. Људска машта није довољна да се стекне представа о величини тако великих бројева. Упоредимо га са бројем елементарних честица у целој видљивој васиони. Физичари су дошли до закључка да запис тога броја садржи око 80 цифара, дакле, могао би се записати у једном реду.

Толстојев "Рат и мир", прилично дебела књига, садржи приближно 3,1 милиона графичких знакова (слова и знакова интерпункције). Дакле, књига у којој би био наштампан само декадни запис досад највећег познатог простог броја била би скоро осам пута дебља од Толстојевог најпознатијег романа.

Из Еуклидове теореме следи да на основу сваког простог Мерсеновог броја добијамо један паран савршен број.

Како нам нису познати други бројеви, осим оних које добијамо на основу Еуклидове теореме, следи да нам је данас познато свега 50 савршених бројева. Највећи од њих је онај који добијамо на основу највећег до сада познатог простог Мерсеновог броја, тј. број

$$M_{77232917} = 2^{77232916}(2^{77232917} - 1).$$

ЗАДАЦИ

1. Доказати да степен простог броја не може бити савршен број.

Решење. Ако је

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = 2p^k,$$

тада је $(p - 1) \cdot 2p^k = p^{k+1} - 1$, одакле је $2p^k = p^{k+1} + 1$, тј. $2 > p$, што је контрадикција.

2. Ако је n савршен број, онда је збир реципрочних вредности његових делилаца једнак 2. Доказати.

Решење. Нека су $d_1 = 1$, d_2, ... , $d_k = n$ сви делиоци савршеног броја n. Тада је

$$\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_k} = 2n,$$

одакле после дељења са n следи тврђење.

3. Доказати да се декадни запис сваког парног савршеног броја завршава цифром 6 или 8.

Решење. Паран савршен број m је облика $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број. Према теореми 8, тада је и n прост број. Дакле, $n = 2$ или је n облика $4k + 1$ или $4k + 3$.
Ако је $n = 2$, тада је $m = 6$ и тврђење важи.

Ако је $n = 4k + 1$, тада је

$$m = 2^{4k}\left(2^{4k+1} - 1\right) = 16^k\left(2 \cdot 16^k - 1\right).$$

Како се 16^k завршава цифром 6, $2 \cdot 16^k - 1$ се завршава цифром 1, па се m завршава цифром 6.

Ако је $n = 4k + 3$, тада је

$$m = 2^{4k+2}\left(2^{4k+3} - 1\right) = 4 \cdot 16^k\left(8 \cdot 16^k - 1\right).$$

Како се 16^k завршава цифром 6, $4 \cdot 16^k$ се завршава цифром 4, $8 \cdot 16^k - 1$ се завршава цифром 7, па се m завршава цифром 8.

4. Наћи све савршене бројеве n такве да су $n - 1$ и $n + 1$ оба прости бројеви.

Решење. Очигледно је да се најмањи савршен број 6 налази између два проста броја 5 и 7. Доказаћемо да нема других савршених бројева са том особином.

Нека су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви за неки природан број $n>6$. Тада је за неки цео број $k>1$, $n-1=6k-1$ и $n+1=6k+1$. (Сваки прост број већи од 3 даје при дељењу са 6 остатак 1 или 5.) Тада је $n=6k$, па су бројеви $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ различити делиоци броја n, већи од 1. Како је

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}+1=2n+1>2n,$$

следи да број n не може бити савршен.

5. Наћи све савршене бројеве n за које је и број $\sigma(\sigma(n))$ савршен.

Решење. Претпоставимо да је n паран савршен број. Тада је, према Ојлеровој теореми, $n=2^{p-1}(2^p-1)$, где је 2^p-1 прост број. Како су 2 и 2^p-1 различити прости бројеви, то је

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma(n))&=\sigma(2n)=\sigma\big(2^p(2^p-1)\big)=\sigma(2^p)\cdot\sigma(2^p-1)\\&=(2^{p+1}-1)\big((2^p-1)+1\big)=2^p(2^{p+1}-1).\end{aligned}$$

Јасно је да је овај број паран, па ако је и савршен, он је већ написан у Ојлеровом облику за савршене парне бројеве. У том случају је $2^{p+1}-1$ прост број, па је и $p+1$ прост број. Следи да су и p и $p+1$ прости бројеви, па како су то узастопни природни бројеви, то је $p=2$. Тада је $n=2(2^2-1)=6$ и

$$\sigma(\sigma(n))=\sigma(\sigma(6))=\sigma(12)=28.$$

Дакле, $n=6$ је једино решење.

Није познато да ли постоје непарни савршени бројеви, али није доказано ни да не постоје. Зато морамо размотрити и тај случај. Ако је n непаран савршен број, тада је $\sigma(n)=2n$, при чему су 2 и n узајамно прости бројеви, па је

$$\sigma(\sigma(n))=\sigma(2n)=\sigma(2)\cdot\sigma(n)=3\cdot 2n=6n.$$

Јасно је да је $6n$ паран број, па ако је и савршен, онда је

$$6n=2^{p-1}(2^p-1),$$

где је p прост број. Међутим, како је p непаран број, број $6n$ садржи прост чинилац 2, али не и било који степен 2^k, за $k>1$. То значи да је $2^{p-1}=2^1$, одакле је $p=2$. Следи да је $6n=2(2^2-1)=6$, одакле је $n=1$. Како 1 није савршен број, дошли смо до контрадикције. Дакле не постоји непаран савршен број n за који је $\sigma(\sigma(n))$ савршен број.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2019/20 година