Сава Гроздев, Софија
Христо Лесов, Софија

КВАДРАТНИ ПАРАМЕТАРСКИ НЕРАВЕНКИ

Млади пријатели, во редоната настава ги изучувате квадратните равенки и неравенки. Притоа решавате како обични квадратни равенки, така и квадратни равенки со параметри. Што се однесува до квадратните неравенки, се среќавате само со обичните квадратни неравенки. Токму затоа, во нашите следни разгледувања ќе се задржиме на задачи за квадратни неравенки со параметар.

Задача 1. Реши ја неравенката:

а) $ax^2-2x+1>0$, каде a е реален параметар;

б) $by^2+y+1<0$, каде b е реален параметар.

Решение. а) Во зависност од вредностите на параметарот a можни се три случаи.

Прв случај. $a=0$. Дадената неравенка го добива видот $-2x+1>0$ и нејзино решение е $x<\frac{1}{2}$.

Втор случај. $a>0$. Решенијата на неравенката зависат од дискриминантата $D_1=1-a$, при што:

1) ако $D_1=0$, т.е. ако $a=1$, тогаш неравенката има вид $x^2-2x+1>0$, т.е. $(x-1)^2>0$, што е исполнето за секој $x\neq 1$;
2) ако $D_1>0$, т.е. ако $0<a<1$, тогаш решенијата се $x\in(-\infty;x_2)\cup(x_1;\infty)$, каде $x_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-a})$, $x_1>x_2$;
3) ако $D_1<0$, т.е. ако $a>1$, тогаш решенијата се $x\in(x_2;x_1)$.

Трет случај. $a<0$. Тогаш $D_1>0$ и решенијата се $x\in(x_2;x_1)$.

б) Во зависност од вредностите на параметарот a можни се три случаи.

Прв случај. $b=0$. Дадената неравенка го добива видот $y+1<0$ и решенијата се $y<-1$.

Втор случај. $b>0$. Дискриминантата е $D_2=1-4b$, за која:

1) $D_2=0$, т.е. $b=\frac{1}{4}$ и неравенката го прима видот $\frac{1}{4}y^2+y+1<0$, т.е. $(\frac{y}{2}+1)^2<0$, која нема решение;
2) $D_2>0$, т.е. $0<b<\frac{1}{4}$ и решенијата са $y\in(-\infty;y_2)\cup(y_1;\infty)$, каде $y_{1,2}=\frac{1}{2b}(-1\pm\sqrt{1-4b})$, $y_1>y_2$;

3) $D_2 < 0$, т.е. $b > \frac{1}{4}$ и во овој случај нема решение, бидејќи $by^2 + y + 1 > 0$ за секој y.

<u>Трет случај</u>. $b < 0$. Тогаш $D_2 > 0$ и решенијата се $y \in (-\infty; y_2) \cup (y_1; \infty)$. ■

Задача 2. Реши ја неравенката $(c^2 - 1)z^2 - (c^2 + 4c - 1)z + 2(c+1) \geq 0$, каде c е реален параметар.

Решение. *<u>Прв случај</u>.* $c^2 - 1 = 0$, т.е. $(c+1)(c-1) = 0$.

1) $c + 1 = 0$, т.е. $c = -1$. Неравенката е $4z \geq 0$ со решенија $z \geq 0$.

2) $c - 1 = 0$, т.е. $c = 1$. Неравенката е $-4z + 4 \geq 0$ со решенија $z \leq 1$.

<u>Втор случај</u>. $c^2 - 1 \neq 0$, т.е. $c \neq \pm 1$ и ја разгледуваме дискриминантата

$$D = (c^2 + 4c - 1)^2 - 4(c^2 - 1)(2c + 2) = c^4 + 6c^2 + 9 = (c^2 + 3)^2 > 0.$$

Имаме $z_1 = \frac{c^2+4c-1+c^2+3}{2(c^2-1)} = \frac{(c+1)^2}{(c-1)(c+1)} = \frac{c+1}{c-1}$ и $z_2 = \frac{4(c-1)}{2(c-1)(c+1)} = \frac{2}{c+1}$. За споредување на корените ја формираме разликата $z_1 - z_2 = \frac{c+1}{c-1} - \frac{2}{c+1} = \frac{c^2+3}{(c+1)(c-1)}$. Бидејќи $z_1 > z_2$ кога $c > 1$ или $c < -1$ и $z_1 < z_2$ кога $-1 < c < 1$, имаме две можности:

1) ако $c > 1$ или $c < -1$ решенијата се $z < \frac{2}{c+1}$ или $z > \frac{c+1}{c-1}$;

2) ако $-1 < c < 1$ решенијата се $\frac{c+1}{c-1} < z < \frac{2}{c+1}$. ■

Задача 3. Определи ги ведностите на реалниот параметър m, за кои неравенството:

а) $(m+5)x^2 - 2(m+1)x + 2(m-2) > 0$;

б) $(m-3)x^2 - 2mx + 3(m-2) < 0$

е исполнето за секој реален број x.

Решение. а) Ако $m + 5 = 0$, т.е. ако $m = -5$ даденото неравенство има вид $8x - 14 > 0$, од каде $x > \frac{7}{4}$ и следствено неравенството не е исполнето за секој x.

Ако $m + 5 \neq 0$ квадратното неравенство е исполнето за секој реален x, ако $m + 5 > 0$ и дискриминантата

$$D_1 = (m+1)^2 - 2(m+5)(m-2) = -m^2 - 4m + 21 = -(m-3)(m+7) < 0,$$

т.е. $m > 3$ или $m < -7$. Отговор: $m > 3$.

б) Ако $m - 3 = 0$, т.е. ако $m = 3$ даденото неравенство има вид $-6x + 3 < 0$, од каде $x > \frac{1}{2}$ и следствено неравенството не е исполнето за секој x.

Ако $m - 3 \neq 0$ квадратното неравенство е исполнето за секој реален x, ако $m - 3 < 0$ и дискриминантата

$$D_2 = m^2 - 3(m-3)(m-2) = -2m^2 + 15m - 18 = -(m-6)(2m-3) < 0,$$

т.е. $m>6$ или $m<\frac{3}{2}$. Одговор: $m<\frac{3}{2}$. ■

Задача 4. Определи ги вредностите на реалниот параметар *d*, за кој изразот $\sqrt{(d^2+d-2)t^2-(d-1)t+1}$ е определен за секој реален број *t*.

Решение. Дадениот ирационален израз е определен за секој реален број *t* за вредностите на параметарот *d*, за кои неравенството $(d^2+d-2)t^2-(d-1)t+1\geq 0$ е исполнето за секој реален број *t*. Можните случаи се:

<u>*Прв случај*</u>. $d^2+d-2=0$, т.е. $(d-1)(d+2)=0$.

1) $d-1=0$, т.е. $d=1$ и неравенството го добива видот $1\geq 0$, т.е. тоа важи за секој реален број *t*.
2) $d+2=0$, т.е. $d=-2$ и неравенството го добива видот $3t+1\geq 0$, од каде $t\geq -\frac{1}{3}$ и ова не е решение.

<u>*Втор случај*</u>. $d^2+d-2\neq 0$, т.е. $d\neq 1$, $d\neq -2$. Тогаш треба да се исполнети неравенствата $d^2+d-2=(d-1)(d+2)>0$ и

$$D=(d-1)^2-4(d^2+d-2)=-3d^2-6d+9=-3(d-1)(d+3)\leq 0.$$

Решенијата на овие две неравенства се $d\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ и $d\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$.

Конечно, наоѓаме $d\in(-\infty;-3)\cup[1;\infty)$. ■

Задача 5. Определи го реалниот параметар *k* така што неравенството

$$ku^2+(2-k)u+3-2k\leq 0$$

да е точно за една реална вредност на *u*.

Решение. Во зависност од параметарот *k* можни се следниве случаи:

<u>*Прв случа*</u>. $k=0$ и даденото неравенство го прима видот $2u+3<0$, кое е точно за секој $u<-\frac{3}{2}$.

<u>*Втор случај*</u>. $k>0$. Сега ја разгледуваме дискриминантата

$$D=(2-k)^2-4k(3-2k)=9k^2-16k+4.$$

Имаме три можности:

1) $D=0$, од каде наоѓаме $k_{1,2}=\frac{1}{9}(8\pm 2\sqrt{7})$ и $u_1=u_2=\frac{k-2}{2k}$. Даденото неравенство го добива видот $k(u-\frac{k-2}{2k})^2\leq 0$ и е исполнето само за $u=\frac{k-2}{2k}$;
2) $D>0$ и решенија на даденото неравенство са бесконечно многу реални броеви од интервалот $[u_2;u_1]$, каде $u_{1,2}=\frac{k-2\pm\sqrt{D}}{2k}$;
3) $D<0$. Сега неравенството нема решение.

<u>*Трета случа*</u>. $k<0$.

1) $D\geq 0$. Решенијата на даденото неравенство се броевите од интервалите $(-\infty;u_2]$ и $[u_1;\infty)$;

2) $D<0$. Сега секој реален број го задоволува неравенството.

Одговор на задачата: $k_{1,2}=\frac{1}{9}(8\pm 2\sqrt{7})$. ■

Задача 6. Определи ги вредностите на реалниот параметар *d*, за кои броевите од интервалот:

а) $[0;1]$ се решенија на неравенката $x^2-x+d\leq 0$;

б) $(0;1)$ се решенија на неравенката $x^2-dx+1<0$.

Решение. а) Ќе го користиме тврдењето: Броевите од интервалот $[p;q]$ се решенија на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c\leq 0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)\leq 0$ и $f(q)\leq 0$. За $p=0$, $q=1$ и $f(x)=x^2-x+d$ имаме $f(0)=f(1)=d\leq 0$.

б) Ќе го користиме тврдењето: Броевите од интервалот $(p;q)$ се решенија на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c<0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)\leq 0$ и $f(q)\leq 0$. За $p=1$, $q=2$ и $f(x)=x^2-dx+1$ имаме $f(1)=2-d\leq 0$ и $f(2)=5-2d\leq 0$, па затоа $d\geq 2$ и $d\geq 2{,}5$. Следствено бараните вредности се $d\geq 2{,}5$. ■

Задача 7. Определи ги целобројните вредности на параметарот *k*, за кои неравенството $2x^2+(2k+9)x+2k^2+3k<0$ важи за секој број од интервалот $[-2;-1]$.

Решение. Како во задача 6, точно е тврдењето: Секој број од интервалот $[p;q]$ е решение на неравенката $f(x)=ax^2+bx+c<0$, за $a>0$ ако и само ако $f(p)<0$ и $f(q)<0$. За $p=-2$, $q=-1$ имаме

$$f(-2)=8-2(2k+9)+2k^2+3k=2k^2-k-10<0 \quad \text{и}$$

$$f(-1)=2-(2k+9)+2k^2+3k=2k^2+k-7<0.$$

Соодветните решенија се $-2<k<2{,}5$ и $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{57})<k<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})$. Бидејќи $7<\sqrt{57}<8$, важи $-2{,}25<\frac{1}{4}(-1-\sqrt{57})<-2$ и $1{,}5<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})<2$. Оттука го добиваме општото решение $-2<k<\frac{1}{4}(-1+\sqrt{57})$ и затоа бараните вредности на *k* са -1, 0 и 1. ■

Задача 8. Определи ги целобројните врености на параметарот *n*, за кои абсолутната вредност на секое решение на неравенството $nx^2+(1-n^2)x-n\geq 0$ е помала или еднаква на 2.

Решение. За $n=0$ даденото неравенство го добива видот $x\geq 0$ и не е исполнет условот на задачата.

За $n\neq 0$ неравенството го добива видот $n(x-n)(x+\frac{1}{n})\geq 0$. Ако $n>0$, тогаш решение на последното неравенство е унија на два бесконечни интервали и не е исполнет условот $|x| \leq 2$. За $n < 0$ даденото неравенство е еквивалентно на $(x-n)(x+\frac{1}{n}) \leq 0$, и бидејќи $n < -\frac{1}{n}$ тоа има решение $n \leq x \leq -\frac{1}{n}$. Следствено $n \geq -2$ и $-\frac{1}{n} \leq 2$, од каде добиваме $-2 \leq n \leq -\frac{1}{2}$, а бараните целобројни вредности се -2 и -1. ■

Задача 9. Определи ги вредностите на реалниот параметар *m*, за кои секое решение на неравенката $x^2 - 3x + 2 < 0$ е решение и на неравенката

$$mx^2 - (3m+1)x + 3 > 0 .$$

Решение. Решенијата на неравенката $x^2 - 3x + 2 < 0$ се $1 < x < 2$.

За $m = 0$ втората неравенка има вида $x < 3$ и го содржи интервалот $(1;2)$ што значи дека е исполнет условот на задачата.

За $m \neq 0$ втората неравенка има вид $m(x-3)(x-\frac{1}{m}) > 0$. За $m < 0$ таа е $(x-3)(x-\frac{1}{m}) < 0$, па затоа $\frac{1}{m} < 0 < 3$. Решенијата се $\frac{1}{m} < x < 3$ и го содржат интервалот $(1;2)$. За $m > 0$ имаме $(x-3)(x-\frac{1}{m}) > 0$ и за нејзините решенија можни се следниве случаи:

1) $\frac{1}{m} = 3$, т.е. $m = \frac{1}{3}$. Тогаш $(x-3)^2 > 0$ важи за секој $x \neq 3$, па и за $1 < x < 2$;
2) $\frac{1}{m} > 3$, т.е. $m < \frac{1}{3}$. Тогаш решенијата се $x < 3$ или $x > \frac{1}{m}$ и ги содржат броевите од интервалот $(1;2)$;
3) $\frac{1}{m} < 3$, т.е. $m > \frac{1}{3}$. Тогаш решенијата се $x < \frac{1}{m}$ или $x > 3$ и го содржат $(1;2)$ само ако $\frac{1}{m} \geq 2$, т.е. $m \leq \frac{1}{2}$.

Одговорот на задачата е $m \leq \frac{1}{2}$. ■

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар *m*, за кои секое решение на неравенката $2x^2 + (m+7)x + 5m + 1 < 0$ е решение и на неравенката

$$x^2 + 4x + 3 < 0 .$$

Решение. Решенија на неравенката $x^2 + 4x + 3 < 0$ се $-3 < x < -1$. Решенијата на првата неравенка зависат од дискриминантата *D* на квадратниот тричлен $f(x) = 2x^2 + (m+7)x + 5m + 1$. Ако $D \leq 0$, тогаш $f(x) \geq 0$ за секој *x*, а за да има решенија $f(x) < 0$, потребно е $D = (m+7)^2 - 8(5m+1) > 0$, т.е. $m^2 - 26m + 41 > 0$, од каде $m < 13 - \sqrt{128}$ или $m > 13 + \sqrt{128}$. Тогаш решенијата на $f(x) < 0$ се $x_2 < x < x_1$, каде $x_{1,2} = \frac{-(m+7) \pm \sqrt{D}}{4}$ и следува, декае условот на задачата е исполнет кога $x_1 \le -1$ и $x_2 \ge -3$, т.е. $\frac{-(m+7)+\sqrt{D}}{4} \le -1$ и $\frac{-(m+7)-\sqrt{D}}{4} \ge -3$. Овие две неравенки се еквивалентни на $\sqrt{D} \le m+3$ и $\sqrt{D} \le 5-m$, соодветно. Бидејќи $\sqrt{D} > 0$, треба $m+3>0$ и $5-m>0$, т.е. $-3<m<5$ и ги добиваме неравенките $D \le (m+3)^2$ и $D \le (5-m)^2$, односно

$$m^2-26m+41 \le m^2+6m+9 \text{ и } m^2-26m+41 \le 25-10m+m^2,$$

кои имаат заедничко решение $m \ge 1$. Според тоа, $1 \le m < 13-8\sqrt{2}$. ■

11. Определи ги целобројните вредности на параметарот *k*, за кои секое решение на неравенката $x-4k-1>0$ е решение и на неравенката $x^2-4kx-15k+4>0$

Решение. Дадените неравенки се еквивалентни на неравенските $x-2k > 2k+1$ и $(x-2k)^2 > (k+4)(4k-1)$. Ставаме $x-2k=y$ и добиваме $y>2k+1$ и $y^2 > (k+4)(4k-1)$. За $(k+4)(4k-1)<0$, т.е. $k \le -4$ или $k \ge \frac{1}{4}$ решенијата на втората неравенка се $y < -\sqrt{(k+4)(4k-1)}$ или $y > \sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За да се содржат во решенијата на $y > 2k+1$, треба $2k+1 \ge \sqrt{(k+4)(4k-1)}$. За $k \le -4$ тоа не е можно, бидејќи $2k+1<0$. При $k \ge \frac{1}{4}$ имаме $2k+1>0$ и после квадрирањето добиваме $(2k+1)^2 \ge 4k^2+15k-4$ или $11k \le 5$, т.е. $k \le \frac{5}{11}$.

Од претходните разгледувања наоѓаме $-4 < k \le \frac{5}{11}$ и бараните целобројни вредности за *k* се: -3, -2, -1 и 0.

12. Определи ги вредностите на реалниот параметар *a*, за кои множеството решенија на неравенката:

а) $x^2+ax-2<0$ е интервал со должина 3;

б) $4x(a-x)-5(2a-5)>0$ е интервал со должина 2.

Решение. а) Дискриминантата на квадратниот трином x^2+ax-2 е $D=a^2+8>0$ за секој реален *a* и равенката $x^2+ax-2=0$ има два различни корена $x_1 > x_2$. Множеството решенија на дадената неравенка е интервалот $(x_2; x_1)$, чија должина според условот е $x_1-x_2=3$. Бидејќи $x_1-x_2=\sqrt{D}$, имаме $\sqrt{D}=3$ или $a^2+8=9$, од каде наоѓаме $a=\pm 1$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $(2x-5)(2x+5-2a)<0$. Множеството решенита е отворениот интервал со крајни точки $\frac{5}{2}$ и $a-\frac{5}{2}$, чија должина според условот е $|a-5|=2$.

Оттука $a-5=2$ или $a-5=-2$ и следствено $a=7$ и $a=3$.

13. Определи ги вредностите на реалниот параметар *b*, за кој неравенката $bx^2-3x+2<0$ има решенија и множеството решенија е интервал со должина помала от 1.

Решение. За $b=0$ неравенката е $-3x+2<0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$ и условот на задачата не е исполнет. За $b\neq 0$ дискриминантата на квадратниот тринов bx^2-3x+2 е $D=9-8b$. Ако $D\leq 0$, т.е. $b\geq\frac{9}{8}$, дадената неравенка нема решение. За $b<\frac{9}{8}$ имаме $D>0$ и равенката $bx^2-3x+2=0$ има два различни корена $x_1>x_2$. За $b<0$ множеството решенија на неравенката е унија на два бесконечни интервала и пак не е исполнет условот на задачата. За $0<b<\frac{9}{8}$ решенијата формираат интервал $(x_2;x_1)$ и по услов $x_1-x_2<1$ или $\sqrt{D}<1$, т.е. $D=9-8b<1$, од каде $b>1$. Одговорот на задачата е $1<b<\frac{9}{8}$.

14. Определи ги сите врдности на реалниот параметар *c*, за кои множеството решенија на неравенката $cz^2-(2c+1)z-1\leq 0$ содржи точно три цели броеви.

Решение. За $c\leq 0$ дадената неравенка има бесконечно многу целобројни решенија. Разгледуваме $g(z)=cz^2-(2c+1)z-1$ за $c>0$ и дискриминантата $D=(2c+1)^2+4c>0$. Тогаш равенката $g(z)=0$ има два различни корена $z_1>z_2$ и множеството решенија на неравенката $g(z)\leq 0$ е интервалот $[z_2;z_1]$. Бидејќи $g(0)=-1<0$, добиваме дека нулата е решение на $g(z)<0$, а од $g(-1)=3c>0$, следува, дека -1 не е решение на дадената неравенка. Тоа покажува, дека множеството решенија не содржи негативни цели броеви. Но $g(1)=-c-2<0$ и $g(2)=-3<0$, од каде следува, дека целите броеви 0, 1 и 2 го задоволуваат условот на задачата. За да нема други целобројни решенија, треба да важи $z_1<3$ или $g(3)=3c-4>0$, т.е $c>\frac{4}{3}$ и тоа е одговорот на задачата.

15. Определи ги сите вредности на реалниот параметар *m*, за кои неравенката $mx^2+8(m-1)x+7m-16\leq 0$ има најмногу шест решенија, кои се цели броеви и едното од нив е 2.

Решение. За $m=0$ дадената неравенка е $-8x-16\leq 0$, т.е. $x\geq -2$ и има бесконечно многу целобројни решенија.

За $m\neq 0$ го разгледуваме квадратниот трином $f(x)=mx^2+8(m-1)x+7m-16$ и неговата дискриминанта $D=16(m-1)^2-m(7m-16)=9m^2-16m+16>0$. Равенката $f(x)=0$ има два различни корена $x_1>x_2$ и при $m<0$ множеството решенија на неравенката $f(x)\leq 0$ е унија на бесконечните интервали $(-\infty;x_2]$ и

$[x_1;\infty)$, кои содржат бесконечно многу цели броеви. За $m>0$ решенијата на $f(x)\le 0$ формираат интервал $[x_2;x_1]$, кој по услов го содржи бројот 2. Значи, $f(2)\le 0$, т.е. $4m+16(m-1)+7m-16=27m-32\le 0$ и оттука $m\le\frac{32}{27}$. Но

$$f(-1)=m-8(m-1)+7m-16=-8<0,$$

што значи, дека бројот -1 е решение на $f(x)<0$. Од

$$f(-2)=4m-16(m-1)+7m-16=-5m<0$$

за $m>0$ следува, дека и бројот -2 е решение на $f(x)<0$. Освен тоа, за $0<m\le\frac{32}{27}$ имаме

$$f(0)=7m-16\le 7\cdot\frac{32}{27}-16=-\frac{208}{27}<0 \text{ и}$$

$$f(1)=m+8(m-1)+7m-16=16m-24\le 16\cdot\frac{32}{27}-24=-\frac{136}{27}<0.$$

Следователно броевите 0 и 1 се решения на $f(x)<0$. Заклучуваме, дека за $0<m\le\frac{32}{27}$ неравенката $f(x)\le 0$ има барем пет целобројни решенија. Тоа се броевите 2, 1, 0, -1 и -2. Бидејќи $f(3)=9m+24(m-1)+7m-16=40(m-1)$ и $f(-3)=9m-24(m-1)+7m-16=-8(m-1)$, ги разгледуваме следните случаи:

Прв случај. $m=1$. Имаме $f(3)=f(-3)=0$ и неравенката $f(x)\le 0$ има седум целоброни решенија.

Втор случај. $0<m<1$. Имаме $f(3)<0$, $f(-3)>0$ и

$$f(-4)=16m-32(m-1)+7m-16=16-9m>0.$$

За да нема повеќе од шест целобројни решенија треба

$$f(4)=16m+32(m-1)+7m-16=55m-48>0.$$

Оттука следува, дека за $\frac{48}{55}<m<1$ дадената неравенка има шест целобројни решенија: 3, 2, 1, 0, -1 и -2 .

Трет случај. $1<m\le\frac{32}{27}$. Имаме $f(3)>0$, $f(-3)<0$, $f(-4)>0$ и $f(4)>0$. Целобројните решенија на дадената неравенка се шесте броеви: 2, 1, 0, -1, -2 и -3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Becheanu, M., B. Enescu (2002). *Inegalitati elementare*. Bucurest: Gil. (973-9238-53-X), 156 pages.
2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија