Самоил Малчески
Скопје

# ИГРИ И СТРАТЕГИИ – ВТОР ДЕЛ

Во [4] се разгледани поголем број задачи за неконкурентски и конкурентски математички игри, без притоа да се разработува теоријата на игри. Во продолжение повторно ќе се задржиме на задачи од овој и кои без исклучок се задавани на математички натпревари. Притоа, дел од задачите дадени во продолжение можат да ги решаваат и учениците од основното образование, односно учениците до 15,5 годишна возраст. Последното значи дека овој сет на задачи може да послужи како за подготовка за националните олимпијади за учениците од основното образование, така и за подготовка за Јуниорската Балканска Математичка Олимпијада.

На почетокот ќе разгледаме неколку задачи за неконкурентски задачи.

1. На масата се нареди 102 карти со ликот надолу. Познато е дека секоја карта на масата е иста со точно една од преостанатите карти. Горјан ја игра следнава игра. Во секој чекор избира две карти и ги превртува. Ако двете карти се исти играта завршува. Ако картите не се исти, Горјан ги превртува со ликот надолу и го прави следниот чекор. Да претпоставиме дека Горјан има совршена меморија. Определи го најмалиот број чекори по кои играта сигурно ќе заврши.
   **Решение.** На масата има 51 пар еднакви карти. Според принципот на Дирихле добиваме дека со 26 потези ќе се отворат барем две исти карти. Бидејќи Горјан има совршена меморија, тој ја памти позицијата на секоја отворена карта, па затоа играта сигурно ќе заврши со 27 чекори.
   Нема гаранција дека играта ќе заврши со помал број чекори, бидејќи може да се случи во првите 25 чекори сите карти да се различни, па во 26-тиот чекор да биде отворена 51-та рзлична карта заедно со една од веќе отворените карти.

2. Дадено е купче со $n$ златници. Земаме еден златник и преостанатите златници ги делиме на произволен начин на две купчиња. Во секој чекор избираме купче со најмалку 3 златници, од него земаме еден златник и преостанатите златници од ова купче произволно ги делиме

на две купчиња. Определи за кои вредности на $n$ по конечен број чекори може да добиеме купчиња такви што секое купче содржи точно по 3 златници.

**Решение.** На почетокот збирот на бројот на златниците и бројот на купчињата е $n+1$. Во секој чекор бројот на златниците се намалува за 1, а бројот на купчињата се зголемува за 1, што значи дека збирот на бројот на купчињата и бројот на златниците повторно е $n+1$. Последното значи, дека ако на крајот имаме $k \geq 2$ купчиња со по 3 златници во секое купче, тогаш $n+1=k+3k=4k$. Според тоа, $n+1 \geq 8$ треба да е делив со 4. Ако $n+1=4k \geq 8$, во секој чекор одделуваме купче со 3 златници и на крајот добиваме купчиња $k$ секое од кои содржи по 3 златници. Значи, $n=4k-1, k \geq 2$.

3. На табла со димензии $2022 \times 1$ во секое квадратче е поставен по еден жетон. Секој жетон е црн на едната страна и е бел на другата страна. Имаме право да избереме жетон, свртен со црната страна нагоре, да го отстраниме од таблата и да ги свртиме двата жетони кое се наоѓаат во соседните по страна квадратчиња (ако во соседните квадратчиња нема жетони, не вртиме ниту еден жетон, а ако има само еден соседен жетон, него го вртиме). Определи ги сите почетни распореди на жетоните при кои од таблата можеме да ги земеме сите жетони.

**Решение.** Нека на таблата има $n$ жетони. Со индукција по $n \geq 1$ ќе докажеме дека можеме да ги земеме сите жетони ако и само ако на таблата има непарен број жетони свртени со црната страна нагоре (црни жетони). За $n=1$ тврдењето е очигледно. Нека тврдењето е точно за секој $k \leq n$ и да разгледаме табла со $n=k+1$ жетони. Нека на таблата има $t$ црни жетони.

Ако $t$ е непарен број, да го избереме најлевиот црн жетон, да го земеме и да ги завртиме двата нему соседни жетони (ако црниот жетон е во првото квадратче на таблата, завртуваме само еден соседен жетон). Така таблата е поделена на два дела со должина помала или еднаква на $k$ (ако земениот црн жетон бил во првото квадратче, првиот дел може и да не содржи жетони). Ако во левиот дел има жетони, тогаш тој има само еден црн жетон, т.е. непарен број црни жетони, па затоа можеме да ги земеме сите жетони. Во десниот дел има или $t-2$ (ако соседниот на земениот жетон бил црн) или $t$ (ако соседниот на земениот жетон бил бел), па според индуктивната претпоставка можеме да ги земеме сите жетони.

Ако $t$ е парен број, да го разгледаме квадратчето со црн жетон во кое ќе го направиме првиот потез. Ова квадратче ја дели таблата на два дела, така што во едниот дел има непарен број црни жетони, а во другиот дел има парен број црни жетон. Кога ќе ги завртиме двата соседни жетони во делот со непарен број жетони едниот жетон ќе ја промени бојата и затоа таму ќе има парен број црни жетони. Сега, од индуктивната претпоставка следува дека не можеме да ги земеме сите жетони од тој дел од таблата.

4. Дадени се $n$ монети наредени на кружница, ($n \geq 5$). За монетата ќе велиме дека е *писмо* ако писмото се наоѓа од нејзината горна страна, а во спротивно ќе велиме дека е *грб*. На почетокот сите монети се писмо. Имаме право да ги реализираме следниве операции:
   1) Избираме монета и ако таа е писмо, тогаш ги вртиме нејзините два соседи.
   2) Избираме монета и ако таа е грб, тогаш ги вртиме нејзините два соседи преку една монета, т.е. ги вртиме оние две монети кои се соседи на соседите на избраната монета (избраната монета не ја вртиме).

   За кои природни броеви $n$ е можно по конечен број чекори сите монети да бидат грб?

   **Решение.** Монетите да ги означиме со $a_1, a_2, ..., a_n$.

   - Нека $n = 4k + 2$. Тогаш парноста на бројот на писмата во $a_1, a_3, ..., a_{4k+1}$ е инваријанта, а во почетокот имаме непарен број писма, што значи дека не може да добиеме 0 писма, па затоа не може да ја достигнеме саканата конфигурација.
   - Нека $n = 4k + 1$. Тогаш парноста на бројот на писмата во $a_1, a_2, ..., a_n$ е инваријанта, а во почетокотимаме непарен број писма, што значи дека не може да добиеме 0 писма, па затоа не може да ја достигнеме саканата конфигурација.
   - Нека $n = 4k$. Земаме 8 последователни монети, кои се писма, да ги означиме со броевите од 1 до 8. Ги применуваме операциите последователно на монетите со броевите: 2, 4, 3, 7, 5. На овој начин можеме да превртиме 8 последователни монети од писмо во грб. Земаме 7 последователни монети, кои се писма, да ги означиме со броевите од 1 до 7. Ги применуваме операциите последователно на монетите: 2, 4, 3, 5, 6. На овој начин од писмо во грб преминуваат

првите четири монети, а по примената на операциите последните три монети повторно се писма. Сега, ако $k = 2m$, монетите ги делиме на $m$ групи од по 8 последователни монети и на секоја група ја применуваме првата низа операции, со што ја добиваме саканата конфигурација. Ако $k = 2m+1$, тогаш земаме било кои седум последователни монети и ја применуваме втората серија операции, по која на кружницата ќе имаме 4 последователни монети грб и $4k = 8m$ последователни монети писмо. Овие $8m$ монети ги делиме на $m$ групи од по 8 последователни монети монети и на секоја група ја применуваме првата низа операции, со што ја добиваме саканата конфигурација.

5. Десет жетони се наредени во круг. Секој жетон од едната страна е бел, а од другата е црн. На почетокот сите жетони се завртени на белата страна. Дозволени потези се:
   - да се превртат било кои последователни жетони,
   - во низа од пет последователни црни жетони да се завртат сите освен средниот жетон.

   Дали може со низа дозволени потези да се постигне:

   а) точно еден жетон да биде завртен на црната страна?

   б) точно два жетони да бидат завртени на црната страна и меѓу тие два жетони да се наоѓа точно еден жетон?

   в) точно два жетони да бидат завртени на црната страна и тие два жетони да се соседни (последователни)?

   **Решение.** а) Ако во некој потез завртиме $k$ жетони од црната на белата страна, тогаш ќе завртиме $4-k$ жетони од белата на црната страна, па затоа бројот на жетоните завртени на црната страна ќе се промени за $4-k-k = 4-2k$, т.е. за парен број. На почетокот имаме нула жетони завртени на црната страна, па затоа секогаш ќе имаме парен број такви жетони. Според тоа, не е можно точно еден жетон да биде завртен на црната страна.

   б) Жетоните редоследно да ги означиме со броевите од 1 до 10. Во првиот потез ќе ги завртиме жетоните со ознаки 1, 2, 3, 4, а во вториот потез жетоните со ознаки 1, 2, 4, 5. Така жетоните со ознаки 3 и 5 ќе бидат свртени на црната страна, а сите преостанати на белата страна.

   в) При ознаки како под б), по секој потез бројот на жетоните означени со непарни броеви завртени на црната страна е парен. Затоа не е можно да се постигне точно два поседователни жетони да бидат црни,

бидејќи тогаш точно еден жетон со непарна ознака ќе биде завртен на црната страна.

Во следниве неколку задачи ќе разгледаме конкурентски игри на два играча.

6. Дадена е табла $2023\times 1$ и во средното квадратче е поставен жетон. Двајца играчи ја играат следнава игра: Првиот го преместува жетонот за едно квадратче во произволна насока. Вториот го преместува жетонот за 2 квадратчиња во произволна насока, првиот го преместува жетонот за 4 квадратчиња во произволна насока итн. во $k-$тиот чекор играчот кој е на потез го преместува жетонот за $2^{k-1}$ квадратчиња во произвола насока. Играта ја губи тој што не може да направи потез. Кој од двајцата играчи има победничка стратегија?
**Решение.** Нека по 8 одиграни потези жетонот се наоѓа во некое квадратче. На потез е првиот играч и тој треба да направи потез со должина $2^{9-1}=2^8=256$. Бидејќи $1+2+2^2+...+2^7=255<256$, ако првиот играч направи чекор кон центарот на таблата, растојанието од жетонот до центарот на таблата ќе биде помало од 256. По чекорот на вториот играч од 512 квадратчиња, жетонот ќе биде на повеќе од 100 квадратчиња од центарот. Бидејќи $100+1012>1024$ првиот играч ќе може да го направи следниот потез со должина 1024 и тогаш вториот играч не може да направи потез со должина 2048, затоа што $2048>2023$. Според тоа, првиот играч има победничка стратегија и таа се состои во тоа што во деветтиот потез жетонот треба да го премести кон центарот на таблата.

7. Во низа се запишани 2024 природни броеви. Андреј и Пабло, наизменично земаат по еден број од крај на низата, или најлевиот или најдесниот, при што прв зема Андреј, а втор зема Пабло. Дали може Андреј да игра така што збирот на броевите кои што ги зел да не е помал од збирот на броевите кои што ги зел Пабло?
**Решение.** Да ги обоиме броевите наизменично во бела и црна боја така што првиот број е бел, а последниот е црн. Андреј може да се осигура да ги земе или сите бели броеви (во секој чекор го зема единствениот бел број кој е на еден од краевите на низата, па Пабло мора да земе црн број) или сите црни броеви (во секој чекор го зема единствениот црн број кој е на еден од краевите на низата, па Пабло

мора да земе бел број). Сега, ако збирот на белите броеви е поголем од збирот на црните броеви, тогаш Андреј ги зема сите бели броеви, а во спротивно ги зема сите црни броеви. Ако двата збира се еднакви, тогаш Андреј со оваа стратегија обезбедува збирот на неговите броеви да е еднаков на збирот на броевите кои ги зел Пабло.

8. На масата има две купчиња со по 2010 златници. Ангел и Бојан ја играат следната игра: прв почнува Ангел и оној кој е на потез зема еден или повеќе златници од едно од купчињата или пак точно по еден златник од секое купче. Играчот кој ќе го земе последниот златник е победник. Кој играч има победничка стратегија?

**Решение.** Бојан има победничка стратегија. Уште повеќе, ќе докажеме дека Ангел ја губи играта ако вкупниот број на златници е делив со 3 и броевите на златниците во двете купчиња се разликуваат за најмногу еден златник (таквата позиција ќе ја наречеме лоша). Прво да се увериме дека не е можно со еден чекор да се премине од една лоша позиција во друга. Ќе докажеме дека во случај на лоша позиција на секој потез од Ангел, Бојан може да одговори така што ќе победи или ќе го остави Ангел повторно во лоша позиција.

Ако во двете купчиња има еднаков ненулти број златници, делив со 3, тогаш:

- ако Ангел земе $3n$ златници од едното купче, тогаш Бојан зема $3n$ златници од другото купче,
- ако Ангел земе $3n+1$ златници од едното купче, тогаш Бојан зема $3n+2$ златници од другото купче,
- ако Ангел земе $3n+2$ златници од едното купче, тогаш Бојан зема $3n+1$ златници од другото купче,
- ако Ангел земе по еден златник од секое купче, тогаш Бојан зема еден златник од некое од купчињата.

Ако при лоша позиција бројот на златниците во некое купче не е делив со 3, тогаш без ограничување на општоста има $3m+1$ златници во првото купе и $3m+2$ златници во второто купче. Тогаш:

- ако Ангел земе $3n$ златници од едното купче, тогаш Бојан зема $3n$ златници од другото купче,
- ако Ангел земе $3n+1$ златници од првото купче ($n \le m$), тогаш Бојан зема $3n+2$ златници од второто купче,
- ако Ангел земе $3n+2$ златници од второто купче ($n \le m$), тогаш Бојан зема $3n+2$ златници од првото купче,

- ако Ангел земе $3n+2$ златници од првото купче ($n \le m-1$), тогаш Бојан зема $3n+4$ златници од второто купче,
- ако Ангел земе $3n+1$ златници од второто купче ($n \le m$), тогаш Бојан зема $3n-1$ златници од првото купче. Тоа не е можно, ако Ангел зел само еден златник, па во тој случај Бојан зема по еден златник од секое купче,
- ако Ангел земе по 1 златник од секое купче, тогаш Бојан зема 1 златник од второто купче.

На овој начин секогаш по потегот на Бојан позицијата е лоша. Бидејќи бројот на златниците се намалува и позицијата 0:0 е лоша, заклучуваме дека по конечен број потези и двете купчиња ќе се испразнат по потег на Бојан и затоа Бојан победува.

9. Природните броеви од 1 до 2024 на таблата се запишани во растечки редослед. Горјан и Андреј играат игра, во која прв почнува Андреј и двајцата наизменично влечат потези. Играчот, кој е на потез, избира два соседни броја, ги брише и на нивно место го запишува или нивниот збир или нивниот производ. Ако последно запишаниот број на таблата е непарен, тогаш победува Андреј, а ако е парен победува Горјан. Кој играч има победничка стратегја и која е таа стратегија?

**Решение.** Броевите да ги замениме со нивните остатоци при делење со 2. На почетокот на таблата имаме низа 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0. Андреј ги заменува крајните десно 1 и 0 со нивниот збир и добива 1. Така на таблата останува низа од видот 1, 0, 1, 0, ..., 0, 1. Ќе покажеме дека при секој чекор на Горјан, Андреј може да го запази овој вид на низа.

Горјан треба да избере 0 и 1. Ако го запише нивниот збир 1, тогаш Андреј ги избира добиените на тој начин две соседни 1 и ги заменува со нивниот производ. Ако Горјан го запише нивниот производ, т.е. 0, тогаш Андреј ја избира новата 0 и соседната на неа 1, па го запишува нивниот збир. Така по секој чекор на Андреј на таблата ќе е запишана низа од видот 1, 0, 1, 0, ..., 0, 1, што значи дека последниот број ќе биде 1, па затоа Андреј победува.

10. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично во темињата на $n$ – аголник ги запишуваат броевите 0 или 1. Првиот играч ја почнува играта и победува ако по некој негов потез постои триаголник чии темиња се три последователни темиња на $n$ – аголникот, таков што збирот на броевите запишани во неговите темиња е делив со 3. Вто-

риот играч победува ако тоа успее да го спречи. Определи кој играч има победничка стратегија ако:

а) $n=2019$, б) $n=2020$, в) $n=2021$.

**Решение.** Првиот играч победува ако $n>3$ е непарен број, додека во спротивно победува вториот играч.

Јасно ако $n=3$ победува вториот играч. Понатаму, ако $n=2k$, да ги поделиме темињата на многуаголникот $A_1A_2A_3...A_{2k-1}A_{2k}$ на последователни $\{A_1,A_2\},\{A_3,A_4\},...,\{A_{2k-1}A_{2k}\}$. Вториот играч игра така што во преостанатото теме во парот кој првиот играч само што го одбрал, го запишува спротивниот број од бројот кој го запишал првиот играч. Попрецизно, ако првиот играч во темето $A_{2j-1}$ го запише бројот $i$, тогаш вториот играч во темето $A_{2j}$ го запишува бројот $1-i$, а ако првиот играч во темето $A_{2j}$ го запише бројот $i$, тогаш вториот играч во темето $A_{2j-1}$ го запишува бројот $1-i$. Така збирот на броевите во секои три последователни темиња ќе биде 1 или 2, бидејќи секои три темиња содржат пар последователни темиња чиј збир е еднаков на 1. Значи, ако $n=3$ или $n=2k$, победува вториот играч

Во преостанатите случаи победува певиот играч. Без ограничување на општоста да претпоставиме дека првиот играч во првиот потез го запишал бројот 0 во темето $A_1$. Ако вториот играч не запише 1 во темето $A_2$ или $A_n$, тогаш брзо победува првиот играч. Навистина, барем до едно од темињата $A_3$ и $A_{n-1}$ не е запишан број по првиот потез на вториот играч. Нека тоа е темето $A_3$. Првиот играч запишува 0 во темето $A_2$ (ако тоа веќе го направил вториот играч, тогаш победува првиот играч со запишување 0 во темето $A_3$). Ако вториот играч запишал 0 во темето $A_n$, тогаш тоа е веќе победа за првиот играч, а во спротивно темето $A_n$ е празно, како и темето $A_3$. Сега, при било каков потез на вториот играч, првиот играч победува така што запишува 0 во едно од темињата $A_3$ или $A_n$, во кое до тој момент не е запишан број.

Понатаму, нека претпоставиме дека вториот играч запишал 1 во полето $A_2$ (симетрично се игра за $A_n$).

Ако $n=4k+1\geq 5$, тогаш првиот играч победува на следниов начин. Првиот играч во темето $A_{4i-1}$ го запишува бројот 1, а во темето $A_{4i+1}$

го запишува бројот 0, за секој $1 \le i \le k$. Гледаме дека вториот играч мора форсирано да игра така што запишува 0 во темињата $A_{4i}$, за $1 \le i \le k$ и 1 во темињата $A_{4i+2}$, за $1 \le i \le k$. Ако тоа не го направи губи, бидејќи тогаш првиот играч запишува во три последователни теми-ња ист број, што значи збир делив со 3. Меѓутоа, на крајот на играта, во темињата $A_1, A_{4k+1}$ и $A_{4k}$ е бројот 0, што значи дека првиот играч победува.

Ако $n = 4k + 3 \ge 7$, тогаш првиот играч победува на следниов начин. Играта се одвива на ист начин како во преходниот случај, се до претпоследниот циклус потези. Нека претпоставиме дека до сега се запишани броеви во темињата $A_1A_2...A_{4k-1}A_{4k}$ како и во претходниот случај, бидејќи во спротивно првиот играч веќе победил. Во темињата $A_1$ и $A_{4k}$ е запишан бројот 0, додека во темињата $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}$ не се запишани броеви. Сега првиот играч во темето $A_{4k+2}$ го запишува бројот 0 и победува во следниот потез, запишувајќи го бројот 0 во преостанатото теме кое не го одбрал вториот играч.

11. Пабло фрла коцка за играње три пати, при што го запомнува најголемиот од трите паднати броја. Филип фрла коцка за играње два пати, при што го запомнува поголемиот од двата паднати броја. Ако бројот на Пабло е поголем од бројот на Филип, тој победува. Во спротивен случај победува Филип. Кој има поголема веројатност да победи?

**Решение.** Веројатноста најголемиот број на Пабло да е $a$, $1 \le a \le 6$ е еднаква на $\frac{a^3-(a-1)^3}{6^3}$, ($a^3$ се сите можности при кои најголемиот број е помал или еднаков на $a$, а $(a-1)^3$ се сите можности при кои најголемиот број е помал или еднаков на $(a-1)^3$). Аналогно, веројатноста најголемиот број на Филип да е $b$ е еднаква на $\frac{b^2-(b-1)^2}{6^2}$.

Според тоа, веројатноста дека Пабло ќе победи, кога неговиот број е $a$, а бројот на Филип е $b$, каде $a > b$ е еднаква на

$$\frac{a^3-(a-1)^3}{6^3}\frac{b^2-(b-1)^2}{6^2}.$$

Останува да го најдеме збирот на овие веројатности кога $a, b \in \{1, 2, ..., 6\}$, $a > b$. Имаме

$$\sum_{a>b} \frac{a^3-(a-1)^3}{6^3}\frac{b^2-(b-1)^2}{6^2} = \frac{3459}{7776} < \frac{1}{2}.$$

Според тоа, Филип има поголема веројатност да победи.

Задачи за самостојна работа

12. Нека $n$ е природен број. Иван и Петар ја играат следнава игра: почнувајќи од $x=2$, во секој потег играчот го заменува $x$ со $x+1$ или со $2x$. Играчот кој ќе запише број строго поголем од $n$ ја губи играта. Ако Иван е прв на потег, кој од двајцата играчи има победничка стратегија за:
    а) $n=2015$, б) $n=2016$.

13. Дадени се 2014 купчиња со по 3, 4, 5, ..., 2016 монети соодветно. Павел и Велимир ја играат следнава игра, во кој потезите ги влечат наизменично, а прв почнува Павел. Играчот кој е на потег може да реализира една од следнви операции:
    1) да отстрани една монета од купчињата со барем три монети,
    2) да отстрани купче со 2 или 3 монети, ако има такво.
    Победува играчот кој ќе го отстрани последното купќе. Кој играч има победничка стратегија?

Литература


1. Maldenović, P., Petrović, V.: Stereometrija – izabrani problem, Matematiskop, Beograd, 2002
2. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
3. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
4. Малчески, С.: Игри и стратегии, Математички талент, Скопје