Републички натпревар 2002

I година

1. Целите броеви a и b се такви што производот $(16a+17b)(17a+16b)$ е делив со 11. Покажи дека истиот производ е делив со 121.

Решение. Нека $m=16a+17b$ и $n=17a+16b$. Според условот на задачата $11|m\cdot n$. Бидејќи 11 е прост број $11|m$ или $11|n$. Од друга страна $m+n=33(a+b)$, т.е. $11|(m+n)$. Според тоа можни се следните два случаи:

а) $11|m$ и $11|(m+n)$ па според тоа $11|(m+n)-m$, т.е. $11|n$

б) $11|n$ и $11|(m+n)$ па според тоа $11|(m+n)-n$, т.е. $11|m$

Од последниот услов и од претходните два имаме $11^2|m\cdot n$.

2. Дадени се два купа од по 2002 топчиња. Двајца играчи наизменично играат потези на следниот начин: во секој потег играчот го отстранува едниот куп, а другиот куп по свој избор го дели на два непразни купа. Правилен потег е отстранување на едниот од двата купа топчиња кои ги оставил претходниот играч и делење на преостанатиот куп на два непразни купа топчиња. Играта ја губи оној играч кој не може да одигра правилен потег. Одреди кој играч со сигурност може да победи и на кој начин.

Решение. Играта ја губи оној играч кој пред својот потег ќе затекне два купа со по едно топче. Играта ја добива оној играч кој е во состојба после својот потег да остави два купа со непарен број топчиња. Нека е тоа играчот A. Тогаш играчот B било како да игра ќе остави еден куп со непарен број топчиња и еден куп со парен број на топчиња. Играчот A повторно го отстранува купот со непарен број топчиња, а купот со парен број топчиња го дели на два купа со непарен број на топчиња. Играјќи со оваа стратегија играчот A по конечен број на чекори ќе го остави играчот B така што пред него да има два купа со по едно топче, и тој не може да одигра правилен чекор.

Имајќи ја во предвид горната стратегија, добиваме дека играчот што прв ќе ја почне играта ја добива играта.

3. Нека x,y,z се реални броеви за кои важи равенството $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Докажи дека за истите броеви x,y,z важи и равенството $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

Решение. Равенството кое го исполнуваат реалните броеви x,y,z ќе го помножиме со x,y,z ги добиваме равенствата

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}=x,\ \frac{xy}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{yz}{x+y}=y,\ \frac{zx}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=z$$

Ако ги собериме левите и десните страни на трите добиени равенства добиваме

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}+\frac{xy}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{yz}{x+y}+\frac{zx}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=x+y+z$$

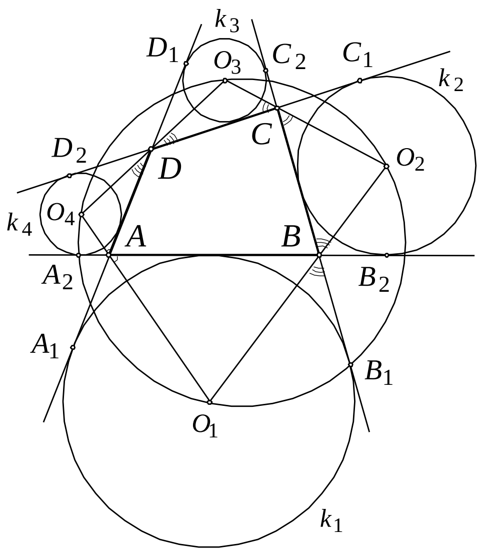
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{zy+xy}{z+x}+\frac{xz+zy}{x+y}+\frac{xy+zx}{y+z}=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{y(z+x)}{z+x}+\frac{x(x+y)}{x+y}+\frac{x(y+z)}{y+z}=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+x+y+z=x+y+z$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$$

4. Страните на произволен конвексен четириаголник се продолжени и повлечени се четири кружници. Секоја кружница, од надвор, допира една страна на четириаголникот и продолженијата на двете нејзини соседни страни. Докажи дека центрите на четирите кружници лежат на иста кружница.



Решение. Нека центрите на кружниците ги означиме со O_1, O_2, O_3 и O_4 на кружниците k_1, k_2, k_3 и k_4 кои ги допираат страните AB, BC, CD и DA. Според ознаките на цртежот кружницата k_1 ги допира полуправите AA_1 и AB. Според тоа, нејзиниот центар лежи на симетралата на аголот $\measuredangle A_1AB$, т.е. O_1A е симетрала на аголот $\measuredangle A_1AB$. Слично, кружницата k_4 ги допира полуправите AA_2 и AD. Значи, нејзиниот центар O_4 лежи на симетралата на аголот $\measuredangle A_2AD$, т.е. AO_4 е симетрала на аголот $\measuredangle A_2AD$. Бидејќи $\measuredangle A_1AB = \measuredangle A_2AD$, правата O_4O_1 е симетрала и на аголот $\measuredangle A_1AB$ и на аголот $\measuredangle A_2AD$. Сега е јасно дека $\measuredangle O_1AB = \frac{180^\circ - \measuredangle A}{2} = \measuredangle O_4AD$.

Од исти причини исполнети се равенствата:

$$\measuredangle O_1BA = \frac{180^\circ - \measuredangle B}{2} = \measuredangle O_2BC,$$

$$\measuredangle O_2CB = \frac{180^\circ - \measuredangle C}{2} = \measuredangle O_3CD,$$

$$\measuredangle O_3DC = \frac{180^\circ - \measuredangle D}{2} = \measuredangle O_4DA$$

Ако ги искористиме овие равенства добиваме:\

$$\measuredangle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \measuredangle O_1AB - \measuredangle O_1BA = 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle A}{2} - \frac{180^\circ - \measuredangle B}{2} = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B}{2}$$

и

$$\measuredangle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \measuredangle O_3DC - \measuredangle O_3CD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle D}{2} - \frac{180^\circ - \measuredangle C}{2} = \frac{\measuredangle C + \measuredangle D}{2}.$$

Конечно,

$$\measuredangle O_4O_1O_2 + \measuredangle O_4O_3O_2 = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B}{2} + \frac{\measuredangle C + \measuredangle D}{2} = 180^\circ.$$

Според тоа, четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ е тетивен и околу него може да се опише кружница.

II година

1. Нека $p(t) = at^2 + bt + c$ е полином со ненегативни коефициенти. Покажи дека

$$(p(xy))^2 \le p(x^2)p(y^2).$$

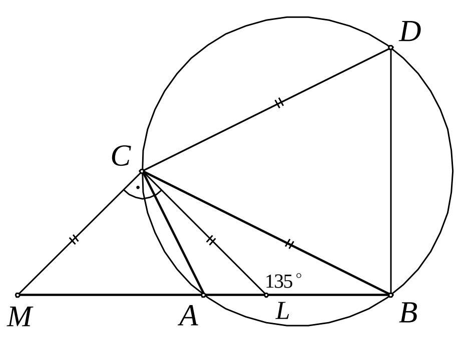
Решение. Непосредно:

$$\begin{aligned}
(p(xy))^2 - p(x^2)p(y^2) &= (a(xy)^2 + bxy + c)^2 - (ax^4 + bx^2 + c)(ay^4 + by^2 + c) \\
&= a^2x^4y^4 + b^2x^2y^2 + c^2 + 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - a^2x^4y^4 - \\
&\quad - abx^4y^2 - acx^4 - abx^2y^4 - b^2x^2y^2 - bcx^2 - acy^4 - bcy^2 - c^2 \\
&= 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - abx^4y^2 - acx^4 - abx^2y^4 - bcx^2 - acy^4 - bcy^2 \\
&= abx^2y^2(2xy - x^2 - y^2) + ac(2x^2y^2 - x^4 - {}^4) + bc(2xy - x^2 - y^2) \\
&= -ab(x-y)^2 - ac(x^2 - y^2)^2 - bc(x-y)^2 \le 0
\end{aligned}$$

2. Нека L и M се точките во кои симетралата на внатрешниот и симетралата на надворешниот агол во темето C на триаголникот ABC ја сечат правата $\overline{AB}$ соодветно. Ако $\overline{CL} = \overline{CM}$, тогаш $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4R^2$, каде што R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!

Решение. Отсечките CM и CL се симетрали на надворешниот и внатрешниот агол кај темето C соодветно и $\overline{CL} = \overline{CM}$. Затоа $\triangle MLC$ е правоаголен рамнокрак триаголник. Според тоа $\angle BLC = 135^\circ$, па од триаголникот CLB добиваме

$\frac{\gamma}{2} + 135^\circ + \beta = 180^\circ$ т.е. $\gamma + 2\beta = 180^\circ$.



Од последното равенство добиваме $\alpha-\beta=90^\circ$.

Нека точката D е на кружницата опишана околу $\triangle ABC$, таква што $\overline{CD}=\overline{CB}$. Четириаголникот $ABDC$ е тетивен па според тоа $\measuredangle CDB=180-\alpha$. Бидејќи $\triangle BDC$ е рамнокрак, добиваме $\measuredangle DCB=2\alpha-180^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle ACD=\gamma+2\alpha-180^\circ=90^\circ-2\beta+180^\circ+2\beta-180^\circ=90^\circ$$

Значи, $R=\frac{\overline{AD}}{2}$ и од триаголникот ACD добиваме

$$4R^2=\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

3. Ако збирот на 2002 цели броеви е делив со 6, тогаш и збирот на нивните кубови е делив со 6. Докажи!

Решение. За било кој цел број a, бројот a^3-a е делив со 6. Тоа е очигледно од записот

$$a^3-a=a(a^2-1)=a(a-1)(a+1)=(a-1)a(a+1)$$

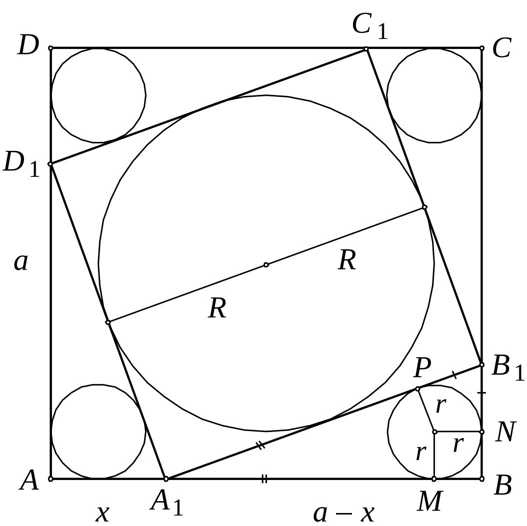
(барем еден од нив е парен и барем еден од нив е делив со 3).

Нека $a_1,a_2,...,a_{2002}$ се цели броеви чиј збир $a_1+a_2+...+a_{2002}$ е делив со 6. Тогаш, од записот

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_{2002}^3=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+(a_3^3-a_3)+...+$$
$$+(a_{2002}^3-a_{2002})+(a_1+a_2+a_3+...+a_{2002})$$

е очигледно дека бројот од левата страна е делив со 6. Секој од броевите во заградите од десната страна на последното равенство е делив со 6.

4. Даден е квадрат Q со страна a во кој е вписан квадрат Q_1, така што темињата на квадратот Q_1 припаѓаат на страните на квадратот Q. Во квадратот Q_1 и во четирите добиени триаголници се вписани кружници.Најди ја страната на квадратот Q_1 така што збирот од плоштините на вписаните кругови биде најмал.



Решение. Нека

$$x=\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=\overline{DD_1},$$

R-радиус на вписаната кружница во квадратот Q_1, а r-радиус на вписаните кружници во ΔA_1BB_1, ΔB_1CC_1, ΔC_1DD_1 и ΔD_1AA_1. Тогаш $\overline{A_1B_1}=2R$ и $\overline{A_1B_1}=\sqrt{\overline{A_1B}^2+\overline{BB_1}^2}=\sqrt{(a-x)^2+x^2}$, т.е.

$$R=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2}\,. \qquad (1)$$

Непосредно според ознаките на цртежот имаме

$$\begin{aligned}2r+2R&=(\overline{MB}+\overline{BN})+\overline{A_1B_1}=(\overline{MB}+\overline{BN})+(\overline{A_1P}+\overline{PB_1})\\&=(\overline{MB}+\overline{BN})+(\overline{A_1M}+\overline{B_1N})\\&=(\overline{A_1M}+\overline{MB})+(\overline{BN}+\overline{B_1N})\\&=\overline{A_1B}+\overline{B_1B}=a\end{aligned}$$

Според тоа $r=\frac{a}{2}-R$ или $R=\frac{a}{2}-r$.

Збирот на плоштините на сите пет впишани кругови е

$$\begin{aligned}R^2\pi+4r^2\pi&=\pi[R^2+(a-2R)^2]=\pi(5R^2-4aR+a^2)\\&=\pi[5(R-\tfrac{2}{5}a)^2+a^2-\tfrac{4}{25}a^2]=\pi[5(R-\tfrac{2}{5}a)^2+\tfrac{21}{25}a^2]\end{aligned}$$

Збирот ќе биде минимален за $R=\frac{2a}{5}$. Од (1) добиваме $\frac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2}=\frac{2a}{5}$ од каде $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{10}a$.

И двете добиени вредности се помали од a и уште нивниот збир е еднаков на a. Според тоа за секоја вредност на x која ја добивме имаме по едно решение, при што добиените квадрати се складни.

Непосредно се наоѓа страната на впишаниот квадрат.

III година

1. Во триаголникот ABC, $\measuredangle A=\frac{\pi}{7}$, $\measuredangle B=\frac{2\pi}{7}$ и $\measuredangle C=\frac{4\pi}{7}$. Докажи дека $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ каде $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$.

Решение. Според синусна теорема за ΔABC имаме

$$\frac{a}{\sin\measuredangle A}=\frac{b}{\sin\measuredangle B}=\frac{c}{\sin\measuredangle C}=2R \iff a=2R\sin\measuredangle A,\, b=2R\sin\measuredangle B,\; c=2R\sin\measuredangle C$$

Равенството $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ кое треба да го докажеме е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} \qquad (*)$$

Од друга страна

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin(\pi-\frac{4\pi}{7})}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Според тоа и почетното равенство е исполнето.

2. Определи го збирот $\frac{2}{\log n}\sum\limits_{d\in A}\log d$ каде $n>1$ и $A=\{d:d\in\mathbb{N},d\,|\,n\}$.

Решение. Нека $d_0,d_1,d_2,...,d_m$ се сите различни делители на бројот n, при што

$$1=d_0<d_1<d_2<...<d_m=n$$

Ако бројот $m=2l$, т.е. бројот на делители на бројот n е непарен број, тогаш исполнети се равенствата

$$d_{\circ}d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_l^2=n$$

Според тоа

$$\begin{aligned}\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d&=\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l}\log d_k\\&=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_1+\log d_2+...+\log d_{2l-2}+\log d_{2l-1}+\log d_l)\\&=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_{2l}+\log d_1+\log d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}+\log d_{l+1}+\log d_l)\\&=\frac{2}{\log n}(\log d_0d_{2l}+\log d_1d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}d_{l+1}+\log d_l)\\&=\frac{2}{\log n}(\underbrace{\log n+\log n+...+\log n}_{l}+\log d_l)=\frac{2l\log n}{\log n}+\frac{2\log d_l}{\log n}=2l+1\end{aligned}$$

Ако $m=2l+1$, т.е. бројот на делители на бројот n е парен број тогаш исполнети се равенствата $d_{\circ}d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_ld_{l+3}=d_{l+1}d_{l+2}=n$. Според тоа

$$\begin{aligned}\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d&=\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l+1}\log d_k\\&=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_{2l+1}+...+\log d_l+\log d_{l+3}+\log d_{l+1}+\log d_{l+2})\\&=\frac{2}{\log n}(\log d_0d_{2l+1}+\log d_1d_{2l}+...+\log d_ld_{l+3}+\log d_{l+1}d_{l+2})\\&=\frac{2}{\log n}(\log n+\log n+...+\log n)=2(l+2)\end{aligned}$$

3. Аголот $\gamma=\measuredangle C$ во $\triangle ABC$ со правите p и q е поделен на три еднакви дела. Правите p и q ја сечат правата AB во точките D и E. Пресметај ги должините $\overline{CE}$ и $\overline{CD}$ ако $\overline{CE}:\overline{CD}=m:n$ $(m<n)$ и $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $(a<b)$.

Решение. Нека пресечните точки на дадените прави со страната AB се D и E, при што $\overline{CD}=y$ и $\overline{CE}=x$ и $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, $(m<n)$. Ако $\gamma=3\phi$, тогаш

$$\phi=\measuredangle ACD=\measuredangle DCE=\measuredangle ECB.$$

Според тоа јасни се равенствата

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}+P_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}by\sin\phi+\frac{1}{2}ay\sin 2\phi$$

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AEC}+P_{\triangle EBC}=\tfrac{1}{2}bx\sin 2\phi+\tfrac{1}{2}ax\sin\phi$$

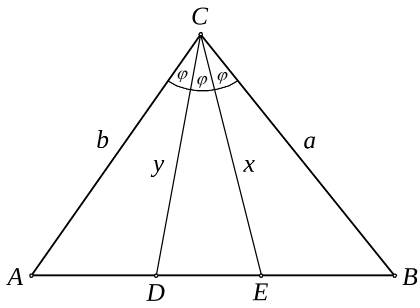
$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ADC}+P_{\triangle DEC}+P_{\triangle EBC}=\tfrac{1}{2}by\sin\phi+\tfrac{1}{2}yx\sin\phi+\tfrac{1}{2}ax\sin\phi$$

Од првото и третото равенство имаме

$$2ay\cos\phi=x(a+y)\,,$$

а од второто и третото равенство

$$2bx\cos\phi=y(b+x)\,.$$



Од првото од последните две добиени равенства имаме

$$\cos\phi=\frac{x(a+y)}{2ay}$$

и ако замениме во второто равенство добиваме

$$bx^2(a+y)=ay^2(b+x)\,.$$

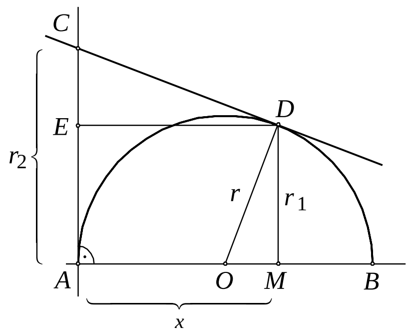
Ако го решиме системот

$$\begin{cases} bx^2(a+y)=ay^2(b+x) \\ \frac{x}{y}=\frac{m}{n} \end{cases}$$

во кој непознати се само x и y добиваме $x=\frac{ab(n^2-m^2)}{n(mb-an)}$, $y=\frac{ab(n^2-m^2)}{m(mb-an)}$.

4. На полукруг со дијаметар $\overline{AB}=2r$ е избрана точка D, различна од A и B. Точката M е подножје на нормалата повлечена од точката D кон дијаметарот AB, а точката C е пресечната точка на тангентите на полукругот повлечени во точките A и D. Одреди го $\overline{AM}=x$ така што односот на волумените на телата настанати со ротација на трапезот $AMDC$ и делот од полукругот AMD да биде еднаков на k. За кои вредности на k задачата има решение.

Решение. Од сличноста на $\triangle EDC$ и $\triangle MDO$ добиваме $\overline{CD}:\overline{ED}=r:r_1$, т.е. $\overline{CD}:x=r:r_1$. Значи, $\overline{CD}=\frac{rx}{r_1}=\overline{AC}=r_2$. Со ротација на трапезот $AMDC$ се добива пресечен конус и неговиот волумен е



$$V_{AMDC}=V_1=\tfrac{1}{3}x\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\tfrac{1}{3}x^2\pi\frac{7r^2-5rx+x^2}{2r-x}$$

При ротација на делот AMD се добива топкин отсечок со висина $\overline{AM}=x$ и волумен

$$V_{AMD}=V_2=\tfrac{1}{3}x^2(3r-x)\pi$$

Од количникот $\frac{V_1}{V_2}=k$ добиваме квадратна равенка

$$(1-k)x^2+(-5r+5rk)x+7r^2-6kr^2=0$$

која има решенија $x_{1|2}=\frac{r}{2}(5\pm\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})$. Решението $x_1=\frac{r}{2}(5+\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})>\frac{r}{2}(5+1)=3r$ нема смисла. Второто решение $x_2=\frac{r}{2}(5-\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})$, и допуштени вредности за k се $k>\frac{7}{6}$, кое се добива од неравенствата $1<\sqrt{\frac{k+3}{k-1}}<5$.

IV година

1. Три ненулти реални броеви образуваат аритметичка прогресија, а нивните квадрати земени во истиот редослед образуваат геометриска прогресија. Да се најдат сите можни количници на геометриската прогресија.

Решение. Нека реалните броеви a,b,c образуваат аритметичка прогресија при што броевите a^2,b^2,c^2 образуваат геометриска прогресија. Според тоа $2b=c+a$ и $b^4=c^2a^2$. Ако равенството $2b=c+a$ го квадрираме добиваме

$$4b^2=a^2+2ac+c^2.$$

Од равенството $b^4=c^2a^2$ добиваме $b^2=|ac|$, и ако замениме во претходната равенка имаме

$$a^2+2ac+c^2=4|ac|.$$

Ќе ги разгледаме двата можни случаи, т.е.

a) a и c имаат ист знак

b) a и c имаат различен знак

Ако a и c имаат ист знак, тогаш последната равенка го добива обликот $a^2-2ac+c^2=0$, т.е. $a=c$. Во тој случај, количникот на геометриската прогресија е $q=1$.

Ако a и c имаат спротивни знаци, тогаш последната равенка го добива обликот $a^2+6ac+c^2=0$ и бидејќи $a\neq 0$ истата можеме да ја запишеме во облик $(\frac{c}{a})^2+6\frac{c}{a}+1=0$. Решение на последната квадратна равенка по $\frac{c}{a}$ се $\frac{c}{a}=-3\pm\sqrt{8}$. Ако количникот на геометриската прогресија е q, тогаш $\frac{c^2}{a^2}=q^2$, т.е. $q^2=(-3\pm\sqrt{8})^2$. Броевите a^2,b^2,c^2 кои ја образуваат геометриската прогресија се позитивни, па според тоа $q>0$. Позитивни решенија на равенката $q^2=(-3\pm\sqrt{8})^2$ се $3-\sqrt{8}$ и $3+\sqrt{8}$.

Значи, бараните количници се $1, 3-\sqrt{8}$ и $3+\sqrt{8}$.

2. Нека n е природен број. Докажи дека кружницата $x^2+y^2=4^n$ не минува низ точка со целобројни координати која не е на $x-$оската или на $y-$оската.

Решение. За фиксен прирдоен број n кружницата $x^2+y^2=(2^n)^2$ минува низ точките $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$.

Нека претпоставиме дека постои целоброен пар (x,y) за кој важи $x^2+y^2=(2^n)^2$ и кој е различен од паровите $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$. Тогаш $|x|<2^n$ и $|y|<2^n$. Целите броеви од парот (x,y) не може да се со различна парност. Ако x и y се со различна парност, тогаш левата страна на $x^2+y^2=(2^n)^2$ е непарен број а левата страна е парен број.

Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се непарни броеви т.е. $x=2p+1$, $y=2q+1$ за некои цели броеви p и q, тогаш $x^2+y^2=2[2(p^2+q^2+p+q)+1]$. Од последното равенство добиваме $2(p^2+q^2+p+q)+1=2^{2n-1}$ што не е можно.

Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се парни броеви, тогаш постојат непарни цели броеви a и b и природен број k ($k<n$) така што $x=2^k a$ и $y=2^k b$. Ако замениме во равенството добиваме $a^2+b^2=2^{2(n-k)}$, кое не е можно според претходниот дел.

3. Низата $\{a_n\}$ е одредена со $a_1=1$ и $a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2+1}$, за $n\geq 1$. Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

Решение. Дадената низа е строго растечка низа. Од рекурентната зависност со која е зададена низата добиваме

$$(a_{n+1}-3a_n)^2=8a_n^2+1 \Rightarrow a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+a_n^2=1 \qquad (1)$$

Аналогно,

$$a_{n+2}^2-6a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2=1 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$a_{n+2}^2-a_n^2-6a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=0 \Rightarrow (a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n)=0.$$

Бидејќи низата е строго монотоно растечка, $a_{n+2}-a_n\neq 0$, па според тоа

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0,$$

т.е.

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n \qquad (3)$$

Бидејќи $a_1=1$, $a_2=6$ од (3) добиваме дека $a_n\in\mathbb{N}$ за било кој $n\in\mathbb{N}$.

4. За позитивните реални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ важи равенството $x_1x_2...x_n=a$.

Докажи дека

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\geq(1+\sqrt[n]{a})^n .$$

Решение. Левата страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+...+x_n+x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_n+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+$$
$$+x_1x_2x_3+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n+....+x_1x_2...x_n=(*)$$

Јасно е дека, според неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина имаме дека

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}=C_n^1\sqrt[n]{a} .$$

Бројот на собироци од облик x_ix_j, $i<j$, $i,j=1,2,...,n$ е C_n^2, а во тие собироци бројот x_i, $i=1,2,...,n$ се појавува $n-1$ пати, па според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}x_ix_j\geq C_n^2\sqrt[C_n^2]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^1}}=C_n^2\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^2}=C_n^2\sqrt[n]{a^2} .$$

Бројот на собироци од облик $x_ix_jx_k$, $i<j<k$, $i,j,k=1,2,...,n$ е C_n^3, а секој број x_i, $i=1,2,...,n$ се појавува во C_{n-1}^2 собироци од збирот $\sum\limits_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}x_ix_jx_k$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}x_ix_jx_k\geq C_n^3\sqrt[C_n^3]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^2}}=C_n^3\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^3}=C_n^3\sqrt[n]{a^3} .$$

Општо, бројот на собироци од облик $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$, $i_1<i_2<...<i_k$; $i_1,i_2,...,i_k=1,2,...,n$ е C_n^k а секој број x_i, $i=1,2,...,n$ се појавува во C_{n-1}^{k-1} собироци од збирот $\sum\limits_{\substack{i_1,...,i_k=1\\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i_1,...,i_k=1\\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}\geq C_n^k\sqrt[C_n^k]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^{k-1}}}=C_n^k\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^k}=C_n^k\sqrt[n]{a^k} .$$

за било кој $k=4,...,n$.

Според тоа

$$(*)\geq 1+C_n^1\sqrt[n]{a}+C_n^2\sqrt[n]{a^2}+...+C_n^k\sqrt[n]{a^k}+...+C_n^n\sqrt[n]{a^n}=(1+\sqrt[n]{a})^n .$$