Сојузен натпревар 1966

III година

1. Определи четирицифрен број кој е квадрат на природен број и кај кој првите две цифри и последните две цифри се еднакви.

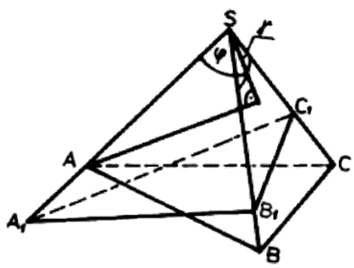
Решение. Од условот на задачата следува

$$\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = k^2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

што значи дека $100a + b = 11l^2$, $l \in \mathbb{Z}$, каде $a, b \in \{1, 2, ..., 9\}$. Со непосредна поверка се добива дека единствена можност е $l = 8, a = 7, b = 4$.

Навистина $88^2 = 7744$.

2. Докажи дека волумените на тетраедрите кои имаат еден заеднички триедар се однесуваат како производите на нивните рабови кои минуваат низ темето на заедничкиот триедар.



Решение. Нека се $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ тетраедрите за кои се исполнети условите на задачата и нека $\gamma = \measuredangle BSC = \measuredangle B_1SC_1$, а φ е аголот меѓу правата SA и рамнината BSC (цртеж десно). Височините на тетраедрите $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ од темињаsa A и A_1 соодветно се еднакви на $SA\sin\varphi$ и $SA_1\sin\varphi$. Волумените на овие тетраедри се

$$V_{SABC} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}SB\cdot SC\sin\gamma SA\sin\varphi,$$
$$V_{SA_1B_1C_1} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}SB_1\cdot SC_1\sin\gamma SA_1\sin\varphi,$$

па оттука следува

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SB\cdot SC\cdot SA}{SB_1\cdot SC_1\cdot SA_1}.$$

3. Определи ги сите вредности x кои припаѓаат на интервалот $[0, 2\pi]$ за кои е точно неравенството

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) > (\sqrt{3} - 1)\sin^2 2x.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$2(\sqrt{3} - 1)\sin^4 x + (1 - 3\sqrt{3})\sin^2 x + 1 > 0.$$

Со y_1, y_2 ($y_1 < y_2$) да ги означиме решенијата на квадратната равенка

$$2(\sqrt{3} - 1)y^2 + (1 - 3\sqrt{3})y + 1 = 0.$$

Лесно се проверува дека за нив важи $0 < y_1 < 1 < y_2$. Ако се земе предвид дека $0 \le \sin^2 x \le 1$, добиваме дека дадената неравенка е задоволена за $0 \le \sin^2 x < y_1$, односно за $|\sin x| < \sqrt{y_1}$. Според тоа, вредностите $x \in [0, 2\pi]$ кои ја задоволуваат неравенката се:

$$0 \le x < \arcsin\sqrt{y_1},\ \pi - \arcsin\sqrt{y_1} < x < \pi + \arcsin\sqrt{y_1},\ 2\pi - \arcsin\sqrt{y_1} < x \le 2\pi .$$

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2 \end{cases}$$

каде a, b, c се реални параметри такви што $a \ne b \ne c \ne a$.

Решение. При дадените услови системот има единствено решение

$$x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)},\ y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},\ z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} .$$

5. Кружниците K' и K'' надворешно се допираат, а нивната надворешна заедничка тангента ги допира во точките A_1 и A_2. Нека C_1 и C_2 се соодветно центрите на K' и K'' и нека E е пресек на заедничката надворешна и заедничката внатрешна тангента на овие кружници.

а) Докажи дека триаголникот C_1EC_2 е правоаголен.

б) Ако кружниците K' и K'' и отсечката A_1A_2 ротираат околу правата C_1C_2, тогаш отсечката A_1A_2 опишува омотач на потсечен конус, а кружниците K' и K'' опишуваат сфери. Определи ја плоштината M на потсечениот конус.

в) Ако радиусите r_1 и r_2 на добиените сфери се променливи, а нивниот збир $r_1 + r_2 = a$ е константен,определи ја максималната можна вредност на плоштината M.

Решение. а) Со B да ја означиме допирната точка на двете кружници и со D средината на отсечката C_1C_2 (види цртеж). Отсечките EA_1, EB, EA_2 се еднакви меѓу себе и нивната должина да ја означиме со x. Отсечката ED е средна отсечка на трапезот $A_1C_1C_2A_2$, па затоа е еднаква на полузбирот на основите

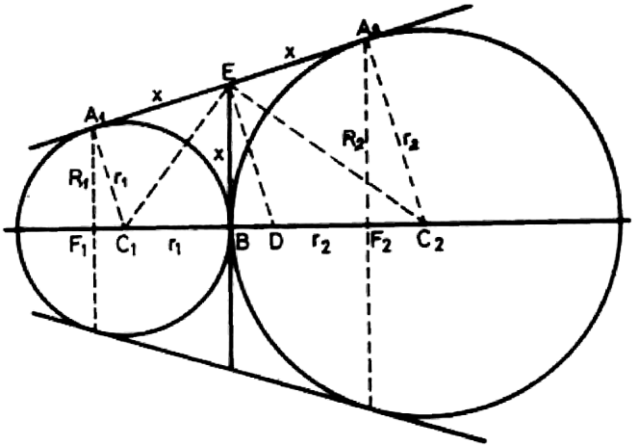
$$ED = \frac{r_1 + r_2}{2} = C_1D = DC_2 .$$

Затоа точката E припаѓа на кружницата над дијаметар C_1C_2, па $\measuredangle C_1EC_2$ е прав.

б) Со F_1 и F_2 да ги означиме центрите на основите на добиениот потсечен конус, а со R_1 и R_2 нивните радиуси. Во трапезот $F_1F_2A_2A_1$ отсечката EB е средна линија, па затоа $R_1 + R_2 = 2x$. Плоштината на омотачот на конусот е

$$M = 2x\pi(R_1 + R_2) = 4\pi x^2 .$$

Од сличноста на триаголниците EBC_1 и C_2BE следува $r_1r_2 = x^2$, па затоа $M = 4\pi r_1r_2$.



в) Бидејќи

$$M = 4\pi r_1 r_2 \le 4\pi(\tfrac{r_1+r_2}{2})^2 = \pi a^2$$

и равенство важи ако и само ако $r_1 = r_2$, па бараната максимална вредност е πa^2 и се добива кога потсечениот конус преминува во цилиндар.

IV година

1. Ако x_1, x_2, x_3 се решенија на равенката $x^3 - 1 = 0$, докажи дека за секој природен број n е исполнето равенството

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_2^n x_3^n + x_3^n x_1^n .$$

Решение. Имаме

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3},$$
$$x_3 = \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3},$$
$$x_1x_2 = x_2,\ \ x_1x_3 = x_3,\ \ x_2x_3 = x_1.$$

Оттука директно следува бараното равенство.

2. Дадени се по три црни топчиња нумерирани со броевите 1 и 2 и по 6 бели топчиња нумерирани со броевите 1, 2 и 3. На колку начини може да наредат во низа девет топчиња, така што меѓу нив има 3 црни и 6 бели топчиња?

Решение. Бараниот број е еднаков на $\binom{9}{3}2^3 3^6 = 489888$, бидејќи еместа на кои ќе се наоѓаат црните топчиња мпоже да се изберат на $\binom{9}{3}$ начини, потоа на секое од тие три места можеме црното топче да го ставиме на два начини, а на секое од преостанатите 6 места бело топше можеме да ставиме на 3 начини.

3. Докажи дека дропката $\frac{3n+1}{2n^2+n}$, каде n е природен број, не може да се скрати.

Решение. Трена да докажеме дека броевите n и $3n+1$ се заемно прости, а исто така и броевите $2n+1$ и $3n+1$. Имаме

$$(n,3n+1)=(n,3n+1-3n)=(n,1)=1,$$
$$(2n+1,3n+1)=(2n+1,3n+1-2n-1)=(2n+1,n)=(2n+1-2n,n)=(1,n)=1.$$

4. Нека x_1 е произволен реален број, а x е таков реален број за кој важи $|x-x_1|\leq\frac{1}{100}$.

а) Докажи дека разликата на вредностите на функцијата $\sin x$ во точките x и x_1 не е поголема од $\frac{1}{100}$.

б) Дали за функцијата $\sin x^2$ може да се определи интервал $\Delta=(x_1-\delta,x_1+\delta)$ така што

$$|\sin x^2-\sin x_1^2|\leq\frac{1}{100}, \text{ за секој } x\in\Delta,$$

каде δ е конечен позитивен број кој не зависи од x_1?

Решение. а) Користејќи го познатото неравенство $|\sin t|\leq|t|, t\in\mathbb{R}$, добиваме

$$|\sin x-\sin x_1|=2|\sin\frac{x-x_1}{2}\cos\frac{x+x_1}{2}|\leq 2|\frac{x-x_1}{2}|=|x-x_1|\leq\frac{1}{100}.$$

б) Одговорот е негативен. Имено, да земеме $x_1=\sqrt{n\pi}, n\in\mathbb{N}$. Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}-\sqrt{n\pi})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}+\sqrt{n\pi}}=0,$$

за доволно големо n ќе важи $\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}-\sqrt{n\pi}<\delta$, за било кој однапред зададен $\delta>0$. Значи, ако избереме $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, ќе важи $x\in\Delta$ и

$$|\sin x^2-\sin x_1^2|=|\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)-\sin n\pi|=1>\frac{1}{100}.$$