МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 5 (2019), 91 – 104
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-5.html

ОБОПШТУВАЊЕ НА ПОИМОТ ФУНКЦИЈА: ВОВЕД ВО ДИСТРИБУЦИИ

Катерина Хаџи-Велкова Санева [1]

Сања Атанасова [1]

1. КАКО ПОИМОТ ФУНКЦИЈА СЕ МЕНУВАЛ НИЗ ГОДИНИТЕ?

Поимот функција е еден од најфундаменталните математички поими кој интензивно се менувал и развивал низ годините. Ако се вратиме многу години наназад, можеме да кажеме дека броењето претставува коресподенција помеѓу множество од дадени предмети и множеството природни броеви, или дека четирите основни аритметички операции со броеви се функции од две променливи. Ако пак погледнеме во вавилонската математика, ќе ги најдеме таблиците на квадратите, третите степени и реципрочните вредности на природните броеви. Овие таблици од денешен аспект дефинираат функции од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$, но сепак не постои индикација дека Вавилонците барале каква било врска помеѓу броевите и нивните квадрати или трети степени, туку едноставно ги запишувале своите наоди. Исто така, познато е дека Птоломеј ги пресметувал должините на тетивите во круг, што од денешен аспект би значело дека тој пресметувал тригонометриски функции. Но, како што заклучува и шкотскиот математичар Бел, препознавањето на функции во броењето, во таблиците на Вавилонците или во пресметките на Птоломеј е резултат на тоа што денешните математичари ги гледаат нивните резултати со „современи очи“.

Појавата на функцијата како посебен поим и објект за проучување и истражување датира од крајот на XVII век како резултат на развојот на аналитичката геометрија и математичката анализа. Првите навестувања можат да се најдат во истражувањата на движењата на италијанскиот научник Галилеј (1564 – 1642) кој почнал да ја разбира зависноста на една величина од друга, на пример, заклучувајќи дека „Времињата на движење по коси рамнини со иста висина, но со различен наклон, се однесуваат како нивните наклони“. Во речиси исто време, францускиот математичар, физичар и филозоф Декарт (1596 – 1650) воведувајќи ја алгебрата во геометријата во неговата прочуена книга „Геометрија“ (1637 година), јасно посочил дека равенка со две променливи, која геометриски е претставена со крива, укажува на зависност помеѓу променливите величини.

1.1. ПРВАТА УПОТРЕБА И ДЕФИНИЦИЈА НА ТЕРМИНОТ „ФУНКЦИЈА“

Раната употреба на терминот „функција“ инкорпорира некои од идеите на современото разбирање за функција, но на многу порестриктивен начин.

Терминот „функција“, што на латински значи „извршување“, почнал да се користи во меѓусебните интеракции помеѓу Лајбниц и Јохан Бернули кон крајот на XVII век. Во 1673 година, Лајбниц го вовел овој поим за да означи величина која варира (се менува) од точка во точка од крива дадена со равенка, како што е должината на субтангента или субнормала, а веќе во 1714 година тој го користи терминот „функција“ за да означи величина што зависи од променлива. Но, сепак овој нов термин не се појавил во математичкиот лексикон објавен во 1716 година. Две години подоцна, во 1718 година, Бернули објавил труд во кој е дадена првата дефиниција за функција од променлива: „*величина* што на некој начин е составена од таа променлива и константи“.

Ојлер (1707 – 1793), поранешен студент на Јохан Бернули, подоцна ја изменил дефиницијата на Бернули употребувајќи го терминот „аналитички израз“ наместо „величина“, односно „функција од променливи величини е *аналитички израз* составен на кој било начин од променливи величини и броеви или константни величини“. Иако Ојлер не дал дефиниција за аналитички израз, се претпоставува дека тој мислел на изрази формирани со вообичаените операции: собирање, множење, степенување, коренување, итн. Во 1734 година Ојлер го вовел и записот за функција, $y = f(x)$ кој се користи и денес.

Но, дефинирањето и сфаќањето на функцијата како аналитички израз довело до многу неконзистентности. На пример, иста функција може да се претстави со различни аналитички изрази. Исто така, ваквото сфаќање на функцијата ги ограничува класите на функции што можат да се разгледуваат. Свесен за овој проблем, во 1755 година Ојлер дал подобра дефиниција: „Ако некоја величина толку зависи од други величини така што нивните промени предизвикуваат промена и на првата величина, тогаш првата величина се нарекува функција од вторите“. Иако оваа поширока дефиниција претставувала огромен напредок, сепак не предизвикала големо влијание во тоа време и идентификацијата на функциите со аналитички изрази ќе остане непроменета до крајот на XVIII век. Но, во текот на XIX век, дефиницијата за функција била подложена на последователни проширувања и појаснувања кои длабоко ја промениле природата и значењето на функциите.

1.2. ДОБЛИЖУВАЊЕ ДО СОВРЕМЕНОТО РАЗБИРАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Важен придонес во еволуцијата на поимот за функција имал Фурје кој во 1807 година решавајќи ја равенката за ширење на топлина покажал дека некои функции можат да се развијат во тригонометриски ред, кој денес го нарекуваме Фурјеов ред. Работата на Фурје не била веднаш прифатена од водечките математичари во тоа време сè до 1829 година кога Дирихле ги формулира доволните услови за да една функција може да се развие во Фурјеов ред при што прави разлика помеѓу функцијата и нејзината аналитичка репрезентација. Дирихле во 1837 година дал и дефиниција со која функциите ги оддалечил од аналитичките изрази, сметајќи ја функцијата како произволна кореспонденција помеѓу две променливи која на секоја вредност на независната променлива ѝ придружува единствена вредност на зависната променлива.

Но, поради барањата кои произлегле од ригорозниот развој на анализата и на геометријата, како и пронаоѓањето на Канторовото множество, поимот за функција продолжил да се усовршува сè до денешниот поопшт поим за функција како еднозначно пресликување од едно множество во друго. Повеќе детали за историјата на менување на поимот функција можат да се најдат во [4, 7].

2. ДИРАКОВА ДЕЛТА „ФУНКЦИЈА“

Во првата половина на минатиот век се појавиле нови проблеми и предизвици во физиката и инженерството преку кои математичарите согледале дека функциите не се доволни за да се опишат и моделираат сите физички процеси и појави.

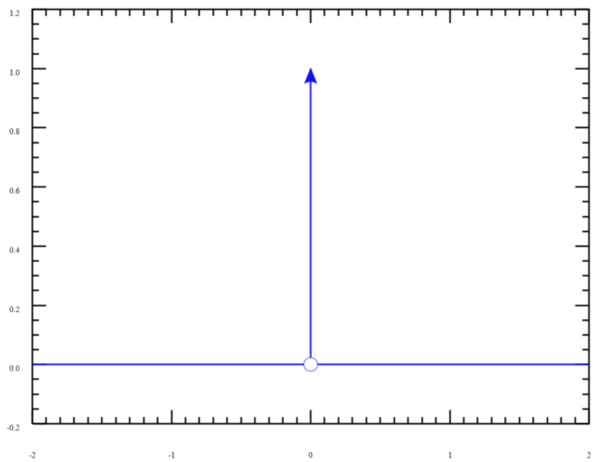
Англискиот физичар Дирак (1902 – 1984) работејќи во областа квантна механика бил соочен со потребата да ја моделира густината на идеален точкаст полнеж. Притоа, тој дефинирал „функција“ која секаде е нула освен во нулата и чиј интеграл над целата реална оска е 1. Како непрекината верзија на дискретната Кронекерова делта функција,

$$\delta(i,j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \qquad i,j \in \mathbb{Z},$$

ја нарекол δ „функција“ (Слика 1), т.е.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Подоцна во негова чест оваа „функција“ е наречена Диракова, [2]. Теоретските физичари и инженерите почнале интензивно да ја користат Дираковата „функција“ и нејзините изводи во своите пресметки.

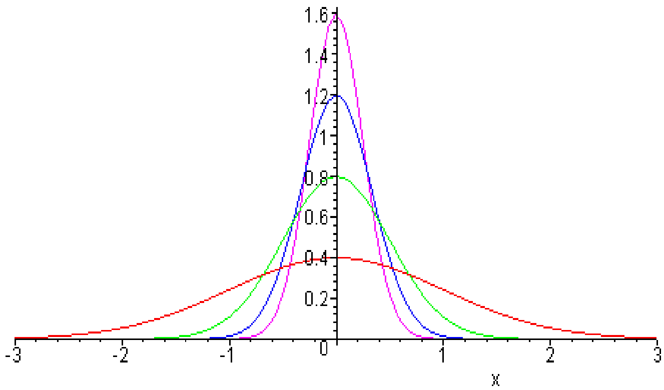


Слика 1. Диракова делта „функција“

И покрај нејзиното име, $\delta(x)$ не е функција во класична смисла бидејќи од првото равенство следува дека интегралот е нула (согласно Лебеговата интегрална теорија), што пак противречи на второто равенство. Математичарите биле соочени пред предизвикот да најдат начин правилно да ја дефинираат делта „функцијата“ со цел да ги формализираат и потврдат пресметките на теоретските физичари.

Свесен за овој проблем, Дирак предложил оваа „функција“ да се дефинира како граница на низа чии членови се функции со „висок скок“ околу нулата, таканаречена *делта низа*. На пример, низата од Гаусови функции $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, претставени на Слика 2 е делта низа. За овие функции важи:

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} = \delta(x) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$



Слика 2. Гаусови функции

Притоа, се покажува дека за произволна „добра“ функција φ важи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Значи за да правилно математички се дефинира делта „функција-та“, се разгледува како таа делува на друга доволно „добра“ функција кога ќе се интегрира нивниот производ. За доволно „добра“ функција, се зема глатка функција (бесконечно диференцијабилна функција на која сите изводи ѝ се непрекинати) со компактен носач. Понатаму оваа функција ќе ја викаме *тест функција*. Множеството од сите вакви функции $C_0^\infty(\mathbb{R})$, со стандардните операции собирање на функции и множење со скалар, претставува векторски простор кој се означува со $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и се нарекува *простор од тест функции*.

Сега, Дираковата делта „функција“ ја разгледуваме како линеарно непрекинато пресликување од $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ во множеството реални броеви $\mathbb{R}$ или множеството комплексни броеви $\mathbb{C}$, т.е. како линеарен непрекинат функционал дефиниран со $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, за секој $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Оваа идеја е основа за дефинирање на *обопштените функции*, т.е. *дистрибуциите*.

3. ДЕФИНИРАЊЕ НА ДИСТРИБУЦИИ

Како што веќе спомнавме при дефинирањето на Дираковата делта „функција" како дистрибуција, дистрибуциите претставуваат функционали над просторот од тест функции $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ кои поседуваат две клучни својства. Првото својство е линеарност, функционалот f велиме дека е *линеарен*, ако за кои било тест функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ важи:

$$f(a\varphi_1 + b\varphi_2) = af(\varphi_1) + bf(\varphi_2), \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

Второто својство е непрекинатост. Функционалот f велиме дека е *непрекинат*, ако $f(\varphi_n) \to 0,\ n \to \infty$, за секоја низа од тест функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ за која $\varphi_n \to 0$ во $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ кога $n \to \infty$.

Просторот од сите линеарни и непрекинати функционали над просторот од тест функции $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ се вика *простор од дистрибуции* и се означува со $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Најчесто делувањето на дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на тест функцијата $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, наместо со $f(\varphi)$, се означува со $\langle f, \varphi \rangle$.

Ако f е локално интеграбилна функција, тогаш се покажува дека со интегралот $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, каде што $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, се дефинира линеарен и непрекинат функционал над $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т.е. дистрибуција која се означува со T_f или само со f, т.е.

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1}$$

Дистрибуциите дефинирани со (1) се нарекуваат *регуларни дистрибуции*. Значи секоја локално интеграбилна функција е регуларна дистрибуција. Дистрибуциите во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ кои не се регуларни се викаат *сингуларни*, [1]. Една таква дистрибуција е делта дистрибуцијата, иако често пати неформално се пишува

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Пример 1. Ќе покажеме дека Дираковата δ дистрибуција дефинирана со $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, за секој $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ не е регуларна дистрибуција. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. претпоставуваме дека постои локално интеграбилна функција која ја означуваме со $\delta(x)$ така што важи:

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Нека за φ ја земаме функцијата φ_ε дефинирана на следниов начин:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \varepsilon \\ \exp\dfrac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}, & |x| < \varepsilon \end{cases}, \varepsilon > 0.$$

Бидејќи $\varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{e}$ и $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$, добиваме:

$$\frac{1}{e} = \int_{|x|<\varepsilon} \delta(x)\exp\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2} dx \leq \int_{|x|<\varepsilon} \delta(x)dx.$$

Поради апсолутната непрекинатост на последниот интеграл, следува дека тој тежи кон 0 кога $\varepsilon \to 0$. Со тоа се добива контрадикција, па следува дека δ не е регуларна дистрибуција.

Повеќе примери за регуларни и сингуларни дистрибуции можат да се најдат во [1, 6].

4. ПОЧЕТОЦИ И РАЗВОЈ НА ТЕОРИЈАТА НА ДИСТРИБУЦИИ

Пред да дадеме краток осврт на некои операции со дистрибуции, интересно е да се спомене дека оваа област е релативно млада и нејзината експанзија започнува кон крајот на XIX и почетокот на XX век кога во електрониката и инженерството интензивно биле проучувани интегралните трансформации и конволуциите, [3, 5, 8]. Голем придонес во развојот на оваа теорија дал британскиот инженер и математичар Хевисајд кој во 1893 година нашол решенија на многу проблеми во интегралното сметање преку користење симболи. Тој прв го воведува и делта импулсот (единечен импулс), многу години пред Дирак да ја воведе делта „функцијата“ во 1926 година.

Голем удел во развојот на теоријата на дистрибуции има и Собољев. Тој го вовел просторот $H^m, m \in \mathbb{N}$, кој денес се нарекува простор на Собољев и има голема примена во проучувањето на хиперболичните парцијални диференцијални равенки од втор ред. Овој простор ги содржи оние L^2 функции чии изводи, во слаба смисла на дистрибуции, припаѓаат во L^2. Тие не мора да се непрекинати и се диференцијабилни во смисла на дистрибуции.

Ќе ја спомeнеме и работата на Бошер кој во последното поглавје од својата книга за Фурјеови интеграли (1932 год.) воведува таканаречени „формални“ функции кои денес се познати како темперирани дистрибуции.

Познатата теорија за дистрибуции на Шварц е развиена во средината на минатиот век и е базирана на теоријата на дуалност кај тополошките векторски простори. И самиот Шварц тврди дека развојот на оваа теорија бил овозможен од претходните резултати и концепти кои биле развиени од Адамар, Андре Веил, Фредерик Рис и други математичари. Во 1950 година Шварц добил Филдсов медал за неговата работа во теоријата на дистрибуции.

4.1. ПРИОДИ КОН ТЕОРИЈАТА НА ДИСТРИБУЦИИ

Пристапот на Шварц или функционалниот пристап е оној кој е опишан во поглавјето 3 од овој труд и кој е базиран на резултати од функционална анализа. Тој е еден од најпопуларните и директни методи за проучување на обопштените функции. Операциите со функции како што се диференцирање и Фурјеова трансформација може да се прошират на дистрибуции прво со нивно запишување преку „јазикот“ на функционали, а потоа истите да се искористат за дефинирање на соодветните операции за дистрибуции.

Постојат и други приоди кон оваа теорија, [3], меѓу кои е и пристапот преку низи. Овој пристап се заснова на оригиналната идеја на Дирак за дефинирање на делта „функцијата“ како гранична вредност на низа од обични функции. Проширувањето на оваа теорија на повеќедимензионален случај преку овој пристап е потежок отколку при функционалниот пристап.

Познат е и пристапот на Бремерман при кој обопштените функции од реални променливи се разгледуваат како гранични вредности од аналитички функции на реалната оска. Идејата за овој пристап датира од проучувањето на Фурјеовата трансформација на комплексна рамнина со цел дефинирање на Фурјеова трансформација од полиноми.

Пристапот на Микусински се базира на идеи од апстрактна алгебра: се формира комутативен прстен од функции кои имаат носач на полубесконечна оска преку дефинирање на операциите собирање и множење како обично собирање и конволуција на функции, соодветно.

Овој прстен може да се прошири до поле со помош на Дираковата делта „функција“.

5. ЗА НЕКОИ ОПЕРАЦИИ СО ДИСТРИБУЦИИ

Операциите во просторот $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ги делиме на *регуларни* (операции дефинирани над целиот простор $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) и *нерегуларни* (операции дефинирани само над одредено подмножество од $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Нека f е локално интеграбилна функција и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ако во интегралот $\int_{-\infty}^{\infty} f(ay+b)\varphi(y)dy,\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ направиме смена на променливата, $x = ay + b,$ се добива равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ay+b)\varphi(y)dy = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx.$$

Бидејќи пресликувањето $\varphi(y) \mapsto \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ е непрекинато пресликување од $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, следува дека $f(ay+b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Поради тоа, дистрибуцијата $f(ay+b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, се дефинира со

$$\langle f(ay+b), \varphi(y)\rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|}\,\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\rangle,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Ако во (2) земеме $a = 1$ и $b = -h$, $h \in \mathbb{R}$, тогаш се добива дефиницијата на *транслација*:

$$\langle f(y-h), \varphi(y)\rangle := \langle f(x), \varphi(x+h)\rangle.$$

Ако пак, $a = -1$ и $b = 0$ во (2), се дефинира *транспозиција*:

$$\langle f(-y), \varphi(y)\rangle := \langle f(x), \varphi(-x)\rangle.$$

Ако $a \neq 0$ и $b = 0$, тогаш со изразот (2) е дефинирана операцијата множење на независната променливата со ненулта константа (*хомотетија*):

$$\langle f(ay), \varphi(y)\rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|}\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\rangle.$$

Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и x_0 е фиксна точка од $\mathbb{R}$. Тогаш $y = \varepsilon x + x_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, е трансформација на просторот $\mathbb{R}$. Ако постои константа C таква што за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ важи:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\langle f(x_0 + \varepsilon x), \varphi(x)\rangle = \langle C, \varphi\rangle,$$

тогаш велиме дека *дистрибуцијата* $f(x)$ *има вредност во точката* $x = x_0$ која изнесува C. Одредувањето на вредност на дистрибуција во точка не е регуларна операција, бидејќи не може да се примени на секоја дистрибуција. Така на пример, не постои вредност на дистрибуцијата $\delta(x)$ во точката $x_0 = 0$, што следува од равенството

$$\frac{1}{\varepsilon}\langle\delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\ \varphi(0)\,.$$

Исто така, регуларната дистрибуција дефинирана со Хевисајдовата функција

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

нема вредност во точката $x_0 = 0$ (Слика 3).

6. ИЗВОД НА ДИСТРИБУЦИЈА

Постојат локално интеграбилни функции за кои не постои извод во одредени точки, дури постојат и функции кои се непрекинати секаде, а кои никаде немаат извод. Од друга страна, како што ќе биде покажано, за дистрибуциите постојат сите изводи и тие изводи се повторно дистрибуции.

Нека f е локално интеграбилна функција со непрекинат прв извод f'. Тогаш таа и нејзиниот извод дефинираат дистрибуции, т.е. $f, f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Од тоа што $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ има компактен носач следува дека $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$ и $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0$. Ако ги искористиме овие равенства и парцијална интеграција добиваме:

$$\langle f'(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx\ = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f(x), \varphi'(x)\rangle.$$

Бидејќи $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ следува $\varphi' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Аналогно се покажува дека со

$$\langle f^{(i)}(x), \varphi(x)\rangle := (-1)^i\langle f(x), \varphi^{(i)}(x)\rangle, \quad i \in \mathbb{N}_0$$

е дефинирано пресликување од $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, односно секоја дистрибуција од $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ги има сите изводи (секоја дистрибуција е бесконечно диференцијабилна). Оваа операција се нарекува *диференцирање* на дистрибуции. Се покажува дека диференцирањето е непрекинато пресликување од $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ во однос на слабата (соодветно јаката) топологија во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, [6]. Ова својство на дистрибуциите има огромна примена при решавање парцијални диференцијални равенки (ПДР), бидејќи, под одредени услови, ако постои граница на низа од решенија во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на дадена ПДР, таа граница е исто така решение на ПДР. Ако ова својство на дистрибуциите се примени на редови, може да се заклучи дека редот кој е извод член по член на некој конвергентен ред и самиот конвергира. Во случај на класичен извод, членовите на редот треба да исполнуваат многу построги услови за да може редот да се диференцира член по член. Повеќе детали за оваа примена на дистрибуциите можат да се најдат во [1, 6].

Пример 2. Едноставно се покажува дека

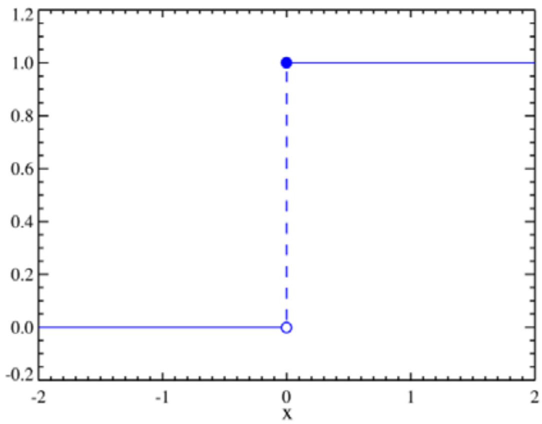
$$\langle \delta^{(i)}(x - x_0), \varphi(x) \rangle = (-1)^i \, \varphi^{(i)}(x_0), \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

каде што $x_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и нека $H(x)$ е Хевисајдовата функција дефинирана со (3). Нејзиниот график е даден на Слика 3. Од

$$\langle H'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle H(x), \varphi'(x) \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

следува дека изводот на дистрибуцијата дефинирана со Хевисајдовата функција H е δ дистрибуцијата, т.е. важи $H'_{\text{дис.}} = \delta$, каде што $H'_{\text{дис.}}$ е ознака за изводот на H во смисла на дистрибуции (дистрибутивен извод).



Слика 3. Хевисајдова функција.

Заклучуваме дека функциите кои немаат класичен извод, како што е Хевисајдовата функција, имаат дистрибутивен извод. Според тоа, множеството дистрибуции е најмалото множество кое го проширува множеството локално интеграбилни функции, и во кое секој елемент има извод, а дистрибутивниот извод за регуларни дистрибуции се совпаѓа со класичниот извод.

Пример 4. Нека локално интеграбилната функција $f(x)$ има непрекинат извод над отвореното множество $\mathbb{R}\backslash\cup_{j=1}^{k}\{x_j\}$, каде што $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$. *Скок на функцијата* f во точката x_j е вредноста

$$\Delta f_i = f(x_i^+) - f(x_i^-),$$

каде што $f(x_i^+) = \lim_{x\to x_i^+} f(x)$ и $f(x_i^-) = \lim_{x\to x_i^-} f(x)$ се соодветно десната и левата граница на $f(x)$ во точката x_i. Лесно се покажува дека дистрибутивниот извод на функцијата $f(x)$ со прекини од прв ред (скокови) во точките $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, k$, е даден со

$$f'_{\text{дис.}}(x) = f'(x) + \sum_{i=1}^{k} \Delta f_i \delta(x - x_i).$$

7. ФУРЈЕОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ДИСТРИБУЦИИ

Слично како и кај изводот, се добива дека Фурјеовата трансформација $\hat{f}$ на дистрибуцијата f може да се дефинира со

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \hat{\varphi} \rangle,$$

каде што $\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega x} \varphi(x) dx$, $\omega \in \mathbb{R}$, е Фурјеова трансформација на тест функцијата φ.

Просторот од тест функции кој е инваријантен во однос на Фурјеовата трансформација се нарекува *Шварцов простор* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (простор од бесконечно диференцијабилни функции кои во бесконечност опаѓаат побрзо од $|x|^{-n}$ за секое $n > 0$). Неговиот дуален простор е просторот од *темперирани дистрибуции* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и тој претставува соодветен простор за проучување на дистрибутивната Фурјеова трансформација. Се покажува дека $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $\hat{\delta} = 1$, [1, 6].

8. НЕДОСТАТОК НА ТЕОРИЈАТА НА ДИСТРИБУЦИИ

Во поглавјето 5 од овој труд видовме дека операцијата одредување вредност на дистрибуција во точка не е регуларна операција, бидејќи не може да се примени на секоја дистрибуција. Друг недостаток на дистрибуциите е поврзан со операцијата множење на дистрибуции. За глатка функција $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, пресликувањето $\varphi \mapsto g\varphi$ е непрекинато пресликување од $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и со него е одредено следново придружено пресликување од $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\langle g(x)f(x), \varphi(x)\rangle := \langle f(x), g(x)\varphi(x)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

кое е непрекинато во однос на слабата (соодветно јаката) топологија во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Пример 5. Ќе го пресметаме производот $g(x)\delta(x)$ за произволна глатка функција $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Од тоа што

$$\langle g(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), g(x)\varphi(x)\rangle = g(0)\varphi(0)$$

следува дека $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$. Ако $g(x) = x$, добиваме $x\delta(x) = 0$.

Но, ако функцијата g има прекин во некоја точка, тогаш производот $g(x)f(x)$ не е дефиниран. Не е дефиниран и производот $\delta^2(x)$, [1, 6]. Денес постојат многу теории кои го решаваат овој недостаток околу неможноста за множење на две произволни дистрибуции.

9. ЗАКЛУЧОК

Поради големиот број корисни својства, дистрибуциите денес имаат огромна примена, пред сè во решавањето на парцијални диференцијални равенки за кои не постојат класични решенија, или, пак, за кои е полесно да се утврди постоење на дистрибутивни решенија, како и во физиката и инженерството каде многу проблеми природно доведуваат до диференцијални равенки чии решенија или почетни услови се дистрибуции, како што е Дираковата дистрибуција и нејзините изводи. Теоријата на дистрибуции брзо се развива во последните децении, и поради големиот број отворени проблеми претставува предизвик за многу истражувачи и научници.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. A. Al-Gwaiz, *Theory of Distributions*, New York: Marcel Dekker, 1992.

[2] V. Balakrishnan, *All about the Dirac Delta Function (?)*, Resonance - Journal of Science Education, 8(8) (2003) 48 – 58.

[3] F. Farassat, *Introduction to Generalized Functions With Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics*, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1996.

[4] I. Kleiner, *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*, The College Mathematics Journal, 20(4) (1989) 282 – 300.

[5] J. Lützen, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer - Verlag New York, 1982.

[6] S. Pilipović, B. Stanković, *Prostori Distribucija*, Novi Sad: Srpska akademija nauka i umetnosti, 2000.

[7] J. P. Ponte, *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications*, The Mathematics Educator, 3(2) (1992) 3 – 8.

[8] L. Schwartz, *Historical roots and basic notions in the theory of distributions*, Proceedings of the General Mathematics Seminar of the University of Patras, University of Patras, 1982.

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
Руѓер Бошковиќ 18, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: saneva@feit.ukim.edu.mk, ksanja@feit.ukim.edu.mk

Примен: 31.01.2019
Поправен: 6.03.2019
Одобрен: 16.03.2019
Објавен на интернет: 26.03.2019