

# Broj elemenata skupa

Enes Duvnjaković<sup>1</sup>

<sup>a</sup>Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika

**Sažetak:** Određivanje broja elemenata konačnih skupova svodi se na njihovo prebrojavanje. Međutim, kada se radi o beskonačnim skupovima, problem je mnogo složeniji. Tada se susrećemo sa dosta neočekivanih i iznenađujućih situacija. U ovom radu dat je osnovni pregled načina prebrojavanja skupova sa beskonačno mnogo elemenata.

## 1. Uvod

Ljudi su oduvijek imali potrebu da odrede koliko elemenata ima u nekom skupu, odnosno da spoznaju da li u nekom skupu ima više elemenata ili ima jednako elemenata u odnosu na neki drugi skup. Primjećivali su da svi imaju jednak broj ruku, jednak broj očiju, da na lijevoj i desnoj ruci imaju jednak broj prstiju. Na primjer, ako spojimo dlanove, primijetimo da svaki prst sa lijevog dlana naliže na tačno jedan prst sa desnog dlana (mali na mali, palac na palac itd.). Iz toga se može zaključiti da na lijevoj ruci ima jednako prstiju kao i na desnoj ruci.

## 2. Ekvipotentni skupovi

Da bi nam ovo razmišljanje bilo jasnije, razmotrićemo još jedan primjer. Neka je u učionici sljedeće stanje: "Svi učenici sjede na stolicama, svaki učenik sjedi samo na jednoj stolici i na svakoj stolici sjedi samo jedan učenik". Iz ove situacije se može zaključiti da imamo učenika jednako koliko i stolica. Očigledno ovdje se radi o bijektivnom preslikavanju skupa učenika na skup stolica (svakom učeniku odgovara tačno jedna stolica i svakoj stolici odgovara tačno jedan učenik). Spoznaju iz ovog primjera daćemo u obliku definicije za opšti slučaj:

**Definicija 2.1.** Za skupove  $A$  i  $B$  kažemo da su ekvipotentni i pišemo  $A \sim B$ , ako i samo ako postoji bijekcija  $f : A \rightarrow B$ .

Nije teško uočiti da za bilo koje skupove  $A$ ,  $B$  i  $C$  vrijedi:

- a)  $A \sim A$
- b)  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- c)  $(A \sim B \text{ i } B \sim C) \Rightarrow A \sim C$

Navedene tri osobine ustvari znače da je relacija "biti ekvipotentan" relacija ekvivalencije. Za skupove  $A$  i  $B$  kažemo da pripadaju istoj klasi ako je  $A \sim B$ .

---

*Ciljna skupina:* srednja škola  
*Prezentovano na:* Seminar Fojnica 2015 (UMTK)  
*Rad preuzet:* 12.12.2017.

**Definicija 2.2.** Svakoj klasi ekvivalencije relacije  $\sim$  pridružujemo broj koga nazivamo kardinalni broj. Svaki skup iz iste klase ima isti kardinalni broj, što ćemo zapisivati sa  $\text{card}(A)$  ili  $k(A)$ .

Dakle, za skupove  $A$  i  $B$  vrijedi  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$  ako i samo ako je  $A \sim B$ . Tada za skupove  $A$  i  $B$  kažemo da imaju istu moć.

Vidjeli smo kada dva skupa imaju jednak broj elemenata. U sljedećoj definiciji daćemo odgovor na pitanje: kada neki skup ima manje ili jednako elemenata od nekog drugog skupa?

**Definicija 2.3.** Skup  $A$  ima kardinalni broj manji ili jednak od kardinalnog broja skupa  $B$  ako i samo ako postoji  $B' \subseteq B$  takav da je  $\text{card}(A) = \text{card}(B')$ .

Sada direktno slijedi tvrdjenje:

$$\text{Ako je } X \subseteq Y \text{ onda je } \text{card}(X) \leq \text{card}(Y) . \quad (1)$$

Neka je  $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ . početni komad skupa prirodnih brojeva dužine  $k$ . Jasno je da je  $\text{card}(\mathbb{N}_k) = k$ . Za čitaoca koji ima određena predznanja o bijektivnim funkcijama bilo bi interesantno pokazati da je:

- a)  $[a, b] \sim [c, d]$ , gdje su ovo proizvoljni zatvoreni intervali (segmenti) u skupu realnih brojeva.
- b)  $[0, 1] \sim (0, 1)$
- c)  $A \sim B$  i  $C \sim D$  tada je  $A \times C \sim B \times D$ .

### 3. Konačni i beskonačni skupovi

Iz svega do sada rečenog vidimo da prebrojavanje elemenata skupa nije neki veliki problem u slučaju konačnih skupova. Da se prvo dogovorimo kada neki skup smatramo konačnim skupom.

**Definicija 3.1.** Za skup  $A$  kažemo da je konačan skup ako i samo ako postoji prirodni broj  $k$  tako da je  $\mathbb{N}_k \sim A$ .

Jasno da je tada  $\text{card}(A) = k$ . Pogledajmo jedan primjer, u literaturi poznat kao Dirichletov princip golubnjaka, koji se sastoji u sljedećem: ako imamo  $n$  kaveza u golubnjaku i ako u golubnjak doleti  $n + 1$  golub, onda će u bar jednom kavezu morati biti bar dva goluba. Ovo znači da se skup golubova koji ima  $n + 1$  elemenata ne može bijektivno preslikati na skup kaveza koji ima  $n$  elemenata. Poopštavanjem ovog primjera dolazimo do jedne važne karakterizacije konačnih skupova.

**Teorem 3.2.** Skup  $A$  je konačan ako i samo ako ne postoji skup  $B \subset A$  takav da je  $A \sim B$ .

Dakle, konačan skup se ne može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup. Naravno, u slučaju skupova sa beskonačno mnogo elemenata stvari će se zakomplikovati. Jedan od poznatih skupova sa beskonačno mnogo elemenata je skup prirodnih brojeva  $\mathbb{N}$ . Broj elemenata skupa prirodnih brojeva označavamo sa  $\aleph_0$  (alef - prvo slovo hebrejske azbuke). Neke od osobina beskonačnih skupova najbolje ćemo vidjeti kroz sljedeći primjer, poznat kao Hilbertov paradoks.

Zamislimo hotel sa beskonačno mnogo soba, numerisanih redom po prirodnim brojevima. Sobe su jednokrevetne i hotel je u cijelosti popunjen. Jednog dana dođe gost koji traži slobodnu sobu. Recepcioner hotela je brzo reagovao i javio svim gostima da se presele u susjednu sobu sa brojem većim za jedan od broja njihove sobe (1 u 2, 2 u 3, 3 u 4, ...). Tako je recepcioner uspio osloboditi sobu broj 1. Malo veći problem se pojavio kada se pojavio autobus sa beskonačno mnogo putnika (numerisani redom po prirodnim brojevima) koji su tražili smještaj u hotelu. Taj problem recepcioner je riješio tako što je javio svakom gostu da iz svoje sobe preseli u sobu sa duplo većim brojem (1 u 2, 2 u 4, 3 u 6, ...). Na taj način je oslobodio sve sobe sa neparnim brojevima i u njih smjestio novopridošle goste (prvi gost u sobu 1, drugi gost u sobu 3, treći gost u sobu 5, ...). Iz ovog primjera jasno možemo prepoznati jednu karakterizaciju beskonačnih skupova.

**Definicija 3.3.** Skup  $A$  je beskonačan ako i samo ako postoji skup  $B \subset A$  takav da je  $A \sim B$ .

Sada se možemo i na matematički način uvjeriti da je skup prirodnih brojeva beskonačan. Naime, sa  $\mathbb{N}_{2n}$  i  $\mathbb{N}_{2n-1}$  označimo skupove parnih, odnosno neparnih prirodnih brojeva. Jasno je da vrijedi  $\mathbb{N}_{2n} \subset \mathbb{N}$  i  $\mathbb{N}_{2n-1} \subset \mathbb{N}$ .

Lako se provjerava da su sa funkcijama  $f(2n) = n$  i  $g(2n-1) = n$  zadane bijekcije sa skupova  $\mathbb{N}_{2n}$  i  $\mathbb{N}_{2n-1}$  u skup  $\mathbb{N}$ , pa vrijedi  $\mathbb{N}_{2n} \sim \mathbb{N}$  i  $\mathbb{N}_{2n-1} \sim \mathbb{N}$ .

**Definicija 3.4.** Za skup  $A$  kažemo da je prebrojiv ili izbrojiv ako i samo ako je  $A \sim \mathbb{N}$ .

Za dokazivanje da dva skupa imaju istu moć veoma je korisno poznavati sljedeću tvrdnju (Cantor-Bernstein teorem):

**Teorem 3.5.** Neka za proizvoljne skupove  $A, B, C$  i  $D$  vrijedi  $C \subset A$  i  $D \subset B$ . Ako je  $A \sim D$  i  $B \sim C$ , tada je  $A \sim B$ .

**Primjer 1.** Skupovi  $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$  su prebrojivi skupovi.

1. Pokažimo da je  $\mathbb{Z}$  prebrojiv skup. Posmatrajmo funkciju  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  zadanu na sljedeći način:  $f(0) = 1$ ,  $f(k) = 2k + 1$  i  $f(-k) = 2k$ . Lako je provjeriti da je ovako zadana funkcija  $f$  bijekcija, odnosno da je  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ .
2. Posmatrajmo funkciju  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zadanu na sljedeći način:  $f(m, n) = 2^m 3^n$ . Uočimo da se pomoću funkcije  $f$  skup  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  bijektivno preslikava u pravi podskup od  $\mathbb{N}$ . Na sličan način funkcija  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , data sa  $g(n) = (n, 1)$  preslikava bijektivno skup  $\mathbb{N}$  u pravi podskup od  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Sada na osnovu Teorema ?? vrijedi da je  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ .
3. Kako je  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$  i  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ , to je  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Kako je pored toga  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ , to koristeći osobinu tranzitivnosti relacije ekvipotencije (navedena osobina c)), zaključujemo da je  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ , odnosno pokazali smo da je skup  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  prebrojiv.
4. Pokažimo da je skup  $\mathbb{Q}$  prebrojiv. Skup racionalnih brojeva možemo prikazati u obliku:  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ . Preslikavanje  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  zadano sa  $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$  je očito bijekcija, pa je zbog toga  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ . Kako je skup  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  prebrojiv, to je i skup  $\mathbb{Q}$  prebrojiv.

Napišimo neke osobine prebrojivih skupova:

1. Unija prebrojivog i konačnog skupa je prebrojiv skup.
2. Unija konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
3. Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
4. Dekartov proizvod konačno mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.
5. Dekartov proizvod prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

#### 4. Nепrebrojivi skupovi

Imajući u vidu gornje osobine prebrojivih skupova sasvim je prirodno da se zapitamo: da li su svi beskonačni skupovi prebrojivi?

Odgovor na to pitanje daje sljedeća tvrdnja:

Interval  $(0, 1)$  nije prebrojiv skup.

Uz malo napora možemo se uvjeriti u to. Svaki  $x \in (0, 1)$  može se zapisati u obliku decimalnog broja  $x = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$  gdje su decimale  $a_i$  iz skupa cifara  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Pretpostavimo da je interval  $(0, 1)$  prebrojiv skup. Tada njegove elemente možemo zamisliti kao niz tojest, on se može napisati u obliku  $(0, 1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , tako da je

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}\dots x_{1n}\dots$$

$$x_2 = 0, x_{21}x_{22}\dots x_{2n}\dots$$

$$x_3 = 0, x_{31}x_{32}\dots, x_{3n}\dots$$

.....

$$x_n = 0, x_{n1}x_{n2}\dots x_{nn}\dots$$

.....

pri čemu su  $x_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Konstruišimo sada broj  $y \in (0, 1)$  na sljedeći način:

$$y = 0, y_1y_2\dots y_n\dots,$$

gdje je  $y_i = 1$  u slučaju kada je  $x_{ii} \neq 1$ , a  $y_i = 2$  u slučaju kada je  $x_{ii} = 1$ . Sada je jasno da se broj  $y$  razlikuje od bilo kojeg  $x_i$  u  $i$ -toj decimali, što dovodi do zaključka da  $y \notin \{x_1, x_2, x_3, \dots\} = (0, 1)$ . Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je  $y \in (0, 1)$ . Dakle, pretpostavka da je  $(0, 1)$  prebrojiv skup je neodrživa, pa zaključujemo da  $(0, 1)$  nije prebrojiv skup.

**Primjer 2.** Proizvoljni interval  $(a, b)$  i skup  $\mathbb{R}$  su neprebrojivi (nisu prebrojivi) skupovi.

1) Funkcija  $g(x) = (b - a)x + a$  preslikava interval  $(0, 1)$  u interval  $(a, b)$ . Kako je  $g(x)$  linearna funkcija, onda je ona bijektivna, što znači da je  $(0, 1) \sim (a, b)$ . Dakle, skupovi  $(0, 1)$  i  $(a, b)$  imaju istu moć, odnosno  $(a, b)$  je neprebrojiv skup.

2) Funkcija  $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , data sa  $f(x) = \tan x$  je bijektivna, pa je onda jasno da je skup  $\mathbb{R}$  neprebrojiv.

Iz gornjeg primjera je jasno da je  $\text{card}(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$ . Kako je  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ , to na osnovu reakcije (1) zaključujemo da je  $\text{card}(\mathbb{R}) > \aleph_0$ .

Neka je  $\text{card}(\mathbb{R}) = c$ . Za sve skupove koji imaju kardinalni broj  $c$  kažemo da imaju moć kontinuum. Neki od tih skupova su intervali i segmenti u  $\mathbb{R}$ , sam skup  $\mathbb{R}$ , skup kompleksni brojeva  $\mathbb{C}$ , skup tačaka u prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Jednostavno rečeno, skupovi koji su ekvipotentni sa  $\mathbb{R}$  imaju moć kontinuum.

Do sada smo od beskonačnih skupova upoznali prebrojive skupove i skupove koji imaju moć kontinuum. Logično, postavlja se pitanje: da li ima beskonačnih skupova, a da nisu iz ove dvije navedene klase?

**Primjer 3.** Neka je zadan skup  $A = \{1, 2, 3\}$  i neka je

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ , partitivni skup skupa  $A$  (skup svih podskupova skupa  $A$ ).

Lako vidimo da je  $\text{card}(A) = 3$ , a da je  $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 8$ , odnosno da je  $\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A))$ .

Može se pokazati da ovakva relacija vrijedi i u slučaju proizvoljnog skupa  $A$ , odnosno da za bilo koji skup  $A$  vrijedi:  $\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A))$ . Osim toga vrijediće  $\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{card}(A)}$ . Na primjer  $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ . Šta više, može se dokazati da je  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$ , odnosno da je  $c = 2^{\aleph_0}$ . Nastavljajući ovo razmišljanje dalje, možemo zaključiti da je  $c < \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ .

Nakon svega možemo ponuditi prilično neočekivan i interesantan zaključak: Skup kardinalnih brojeva nije ograničen odozgo ili slobodnim riječima rečeno: *različitih vrsta beskonačnosti ima beskonačno mnogo.*

## Literatura

- [1] N. Okčić: "Teorija skupova", autorizirana predavanja za predmet Teorija skupova, PMF Tuzla, 2014.
- [2] [www.unizd.hr/Portals/51/pdf/matematika1.pdf](http://www.unizd.hr/Portals/51/pdf/matematika1.pdf)
- [3] <https://element.hr/artikli/file/1195>
- [4] <https://web.math.pmf.unizg.hr/mdoko/nastava/>