

**Ристо Малчески
Алекса Малчески
Сања Костадинова
Зоран Мисајлески
Томи Димовски**

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 23
(збирка задачи за учениците од VI до VII
одделение)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Даниел Велинов

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
доц. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАТЕМАТИЧКИ талент 23 : (збирка задачи за учениците од VI до VII
одделение) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. -
177 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Сања Костадинова, Зоран Мисајлески,
Томи Димовски. - Библиографија: стр. 171-177

ISBN 978-608-4904-45-8

1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Костадинова,
Сања [автор] 4. Мисајлески, Зоран [автор] 5. Димовски, Томи [автор]

COBISS.MK-ID 51665413

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Алгебра	
I.1. Природни и цели броеви	7
I.2. Рационални броеви. Дропки	8
I.3. Равенки и неравенки	11
II Теорија на броеви	
II.1. Деливост	13
II.2. Прости броеви	15
II.3. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател	16
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	18
III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	19
III.3. Задачи со мерни броеви	22
III.4. Времето е важно	25
III.5. Дополнителни задачи	26
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Логички задачи	30
IV.2. Распоредувања	33
IV.3. Пребројувања	35
V Геометрија	
V.1. Отсечки и агли	37
V.2. Триаголник	38
V.3. Четириаголник	41
V.4. Плоштина на триаголник, четириаголник и круг	42
V.5. Стереометрија	47
Решенија на задачите	
I Алгебра	
I.1. Природни и цели броеви	50
I.2. Рационални броеви. Дропки	54
I.3. Равенки и неравенки	62

II	Теорија на броеви	
	II.1. Деливост	67
	II.2. Прости броеви	73
	II.3. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател	77
III	Текстуални задачи	
	III.1. Броеви и цифри	82
	III.2. Пазаруваме и пресметуваме пари	86
	III.3. Задачи со мерни броеви	92
	III.4. Времето е важно	100
	III.5. Дополнителни задачи	101
IV	Логика и комбинаторика	
	IV.1. Логички задачи	111
	IV.2. Распоредувања	120
	IV.3. Пребројувања	125
V	Геометрија	
	V.1. Отсечки и агли	130
	V.2. Триаголник	134
	V.3. Четириаголник	147
	V.4. Плоштина на триаголник, четириаголник и круг	151
	V.5. Стереометрија	164
	Литература	171

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 23* е наменета за талентираниите ученици по математика од шесто и седмо одделение и е комплементарна со книгите *Математички талент 3, 4, 15, 16 и 20*, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Меѓутоа, сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 305 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од дванаесет до четиринаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
јули, 2020 г.

Авторите

I АЛГЕБРА

1.1. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Збирот на 21 различни природни броеви е 231. Определи го средниот по големина број.
2. Колку броеви има на левата страна во равенството
$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots = 2013.$$
3. На која цифра завршува разликата
$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99.$$
4. Бројот 1 000 000 претстави го како производ на два броја, во чиј запис не се појавува ниту една нула.
5. Збирот на пет различни природни броеви е 2015. Определи ја најголемата можна вредност на најмалиот од овие броеви.
6. Бројот 2015 е запишан како збир на различни природни броеви. Колку најмногу собирајци може да има во тој збир?
7. Пресметај го збирот
$$11 + 13 + 15 + \dots + 2009 + 2011.$$
8. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$25^{2009} + 36^{2009} + 49^{2009}.$$
9. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$2020^0 + 2018^{2021}.$$
10. Ако меѓу цифрите на било кој двоцифрен број со еднакви цифри, се вметнат две нули, добиениот број е 91 пат поголем од дадениот. Докажи!
11. Дешифрирај го множењето:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad * \quad * \\
 * \quad 8 \\
 \hline
 + \quad * \quad * \\
 * \quad * \quad * \\
 \hline
 * \quad * \quad * \quad *
 \end{array}$$

а)

$$\begin{array}{r}
 \times \quad * \quad * \quad * \\
 * \quad * \quad 8 \\
 \hline
 + \quad * \quad * \quad * \\
 * \quad 1 \quad * \quad 7 \\
 \hline
 * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *
 \end{array}$$

б)

1.2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ. ДРОПКИ

12. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $3,24 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,36$,
 б) $(2,16 + 3,24) \cdot 0,5 - (1,5 + 1,2)$,
 в) $7,86 \cdot (3,1 - 2,1) - 4,86$,
 г) $(0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,9) \cdot (0,2 + 0,3)$,
 д) $(4,38 - 0,15 - 0,13) \cdot (2,22 + 0,28)$.

13. Ако $M = 1,12 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,88$, $N = (2,03 - 0,17 + 0,14) \cdot (0,12 + 0,18)$ и $P = 3 - 1,79$, определи го најголемиот децимален број кој се запишува со четири цифри (во целиот и децималниот дел) и кој е поголем од $M + N$, но е помал од P .

14. Колку е $\frac{31}{71}$ од бројот

$$\frac{1 - \frac{1}{3} \cdot (2 + \frac{1}{6})}{3\frac{2}{5} + \frac{10 - \frac{1}{3}}{4} \cdot \frac{5}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5 \cdot \frac{15}{4} \cdot 2,5 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{6}{11 \cdot (\frac{8}{3} - \frac{7}{4})}} ?$$

15. Определи ја 2008-та цифра по децималната запирка во децималниот запис на бројот $\frac{1}{41}$.

16. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а) $\frac{1}{2} \cdot 17 + 13 \cdot \frac{1}{2}$,
 б) $(\frac{2}{3} + \frac{4}{9})(\frac{13}{8} - \frac{5}{4})$,
 в) $3\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{7}{20}$,

г) $\frac{1}{3} \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,07 - \frac{23}{100}$,

д) $(0,76 - 0,25 + 3 \cdot 0,19)(2,1 - 3 \cdot \frac{7}{10}) + 2,14 - 2,1$.

17. Аритметичката средина на броевите a, b, c е 23, а на броевите a, b, c, d е 25. Определи го бројот d .

18. Определи ја најмалата можна вредност на изразот: $A(x) = \frac{|x-2|+10}{5}$.

19. Нека $\frac{78}{77} + \frac{7878}{7777} + \frac{787878}{777777} = \frac{m}{n}$, $\text{NZD}(m, n) = 1$. Определи ја разликата $m - n$.

20. Дали е можно секоја од дробките да се земе со знак $+$ или $-$ така така што збирот на добиените броеви ќе биде еднаков на нула?

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$,

б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$.

21. Ако $A = (3,6 + 2,1) - (2,4 - 1,8) \cdot 0,9$ и $B = 2 \cdot (5,3 - 0,8) - 0,9 \cdot (2,4 - 1,8)$, определи ја разликата $B - A$?

22. Определи го најмалиот децимален број кој се наоѓа меѓу 0,2 и 0,3 и има три цифри по децималната запирка. Подели го овој број со 3 и од добиениот број одземи го количникот 0,07.

23. Ако $\frac{2a+5}{b-5} = 2 + \frac{5}{a}$, тогаш за колку е b поголем од a ?

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$222,21 - (201,1 - 20,11) : 0,9 - (2,011 - 0,2011) : 0,09.$$

25. Определи ја цифрата која е на 2011-тото место по децималната запирка на бројот $\frac{2}{7}$.

26. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $21 - 3,75 : (1,8 + 3,2) + 20,21$,

б) $5,5 \cdot 55,5 : 2\frac{1}{2}$,

в) $9,4 : 4,7 - (-9,9 - 2,7 : (-3)) \cdot 0,4$.

27. Иван составил четири броја така што првиот број е 20,13, а останатите три ги добил со поместување на децималната запирка преку една цифра на десно и потоа го пресметал нивниот збир. Потоа составил втора група од 4 броја, спазувајќи го истото правило, но овој пат децималната запирка ја поместувал во лево. Колку пати првиот збир е поголем од вториот?

28. Пресметај ја дробката $\frac{b}{a}$ каде

$$a = 0,1 + \frac{1}{5} + 0,3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 0,7 + \frac{4}{5} + 0,9 + 1 + 1,1 + \frac{6}{5} + 1,3 \text{ и}$$

$$b = 324,19 + 80,9 \cdot 324,19 - 81,9 \cdot 323,19.$$

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4,44 - \frac{9}{20} \cdot (4,37 - \frac{9}{20} \cdot (4,4 - 4,5 \cdot 0,4))$,

б) $-12 : (6 \cdot 5) + (15 : (-3)) \cdot (-2)$,

30. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) + 2) + 2) + 2).$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $-3 \cdot |-4| - 12 : 3^{-1} + 1$,

б) $(9 - 6) : 6 + 8 \cdot 4^{-1} : 5 \cdot (\frac{2}{5})^2 - 2,4 : (6 \cdot 4 - 23)$.

32. Определи го бројот на цифрите по децималната запирка во децималниот запис на дробката $\frac{1}{1024000}$.

33. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{12^3 + (-4^2)^3}{2^9} \cdot 2^{(-1)(-2)}$,

б) $\frac{64^{-2} \cdot (-125)^3}{-10^2 \cdot (-25)^4 \cdot (-4)^{-8}}$,

в) $6 - 2^2 \cdot (36 - 36 : 3^2)$.

34. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{14 \cdot 2^{-7} + 2^{-6}}{5 \cdot 2^{-3} - 8 \cdot 2^{-4}} + \frac{9^3 \cdot 63^{-3} \cdot 14}{-56^{-2} \cdot 2^5}$,

$$\text{б)} \frac{6^6 + 2 \cdot 6^7}{6^5} + \frac{-3^2 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-1)^0}{(-2)^{-5} \cdot 9^1 \cdot (-1)^2},$$

$$\text{в)} \frac{(-3)^{2013} - 3(-3)^{2010}}{(-3)^{2012} + 2(-3)^{2011}},$$

$$\text{г)} \frac{125^3 \cdot 64^{-2}}{-25^4 \cdot 10^2 \cdot (-4)^{-8}} + \frac{125^2 \cdot 64^{-1}}{-25^3 \cdot 10 \cdot (-4)^{-6}}.$$

35. На местата на секоја ѕвездичка во равенствата $43,*.*8=***$ стави по една цифра така што ќе добиеш точно равенство.

1.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

36. Реши ја равенката:

а) $5,975 - (x - 89,6) = 4,095,$

б) $13 - 3 \cdot (2x - 5) - 4 - 6 : 2 = 3.$

37. Пресметај ја вредноста на изразот $3x + x : 3 + 3,3$, каде x е решено на равенката

$$3,8x - 20,5 = 2,3.$$

38. Реши ја равенката:

а) $-x : (-0,2)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \frac{125}{49} + ((-2)^{-1} + \frac{1}{8})^0,$

б) $(-5 - 3^2 : x) \cdot 2^{-1} = 10 - 7 \cdot 2,$

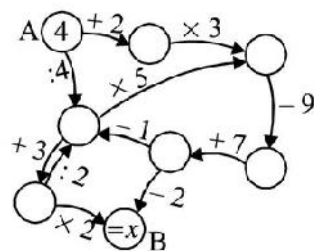
в) $3(6x - 5) - 5(5x - 2) - 36 - 6 : 2 = 6$

39. Реши ја равенката:

$$\left(\frac{25x}{4} + 378 : 9\right) : 3 + 69 = 100.$$

40. Ако $x + 2 = -3^2 + 9\frac{2}{3}$ и $(3y - 1) : (-4)^{-1} = |-16|$, пресметај ја вредноста на изразот $P = -x^y$.

41. Тргувајќи од А треба да се стигне во В, движејќи се во насоката на стрелките така што крајниот резултат x при извршување



на наведените операции ќе биде најмалиот можен број. Кој е тој број?

42. Дропките $a = \frac{1212}{2828}$, $b = \frac{33}{110}$, $c = \frac{9009}{24024}$ подреди ги по големина.
43. Определи ги сите природни броеви a такви што $\frac{2}{3} < \frac{a}{5} < \frac{5}{6}$.
44. Определи барем една дробка која е поголема од $\frac{2}{3}$ и е помала од $\frac{3}{4}$.
45. Определи ги целите броеви x за кои бројот $3x + 4$ не е помал од 1 и не е поголем од 13.
46. Определи ги најмалите природни броеви a и b за се исполнети неравенствата $\frac{4,5}{11} < \frac{a}{b} < \frac{5}{11}$.
47. Определи го бројот на нескратливите дробки со именител 3 кои се поголеми од $\frac{3}{2}$, а се помали од $\frac{7}{2}$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го збирот на сите трицифрени броеви такви што кога ќе се избрише цифрата на стотките се добива точен квадрат на природен број и кога ќе се избрише цифрата на единиците се добива точен квадрат на природен број.
2. Определи ги сите четирицифрени броеви за кои при бришење на цифрата на илјадитите се добива точен куб на природен број и при бришење на цифрата на единиците се добива точен куб на природен број.
3. Определи ги вредностите на цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 18.
4. На местата на a и b , во четирицифрените броеви, стави цифри така да збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ е делив со 9. Определи ги сите можни решенија.
5. Пред и зад бројот 10 напиши по една цифра, така што добиениот број е делив со 36 и количникот на тој број со 36 е број запишан со различни цифри од дадениот број.
6. Лево и десно на бројот 10 допиши му по една цифра така што добиениот четирицифрен број ќе биде делив со 36 и количникот од делењето на добиениот број со 36 ќе биде број запишан со различни цифри.
7. Најди го количникот и остатокот при делењето на изразот
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$$
со бројот 35.
8. Определи го бројот на сите трицифрени броеви кои се деливи со 15 и чиј збир на цифри е помал или еднаков на 9.

9. Најди го петцифрениот број, делив со 3, чии што први три цифри формираат број кој е квадрат на некој природен број, а последните три цифри формираат трицифрен број кој е куб на некој природен број.
10. Да се најде најголемиот природен број кај кој било кои две соседни цифри, во дадениот редослед, формираат број делив со 23.
11. На еден тренинг имало 225 деца и 105 топки. Децата се поделени на групи од по еднаков број деца и на секоја група тренерите им поделиле топки, така што секоја група добила еднаков број топки. Колку групи се формирани и по колку топки добила секоја група? Колку решенија има задачата?
12. Определи го збирот на сите непарни трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 140.
13. Дадени се цифрите 0, 1, 3, 4, 5. Со помош на овие цифри запиши ги сите петцифрени броеви со различни цифри, кои се деливи со 4, а не се деливи со 5.
14. Определи ги сите можни вредности на цифрите a и b , така што производот на броевите $\overline{54a}$ и $\overline{63b1}$ да биде делив со 12.
15. Да се најде природниот број $\overline{abc}$ кој го исполнува условот
$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$$
16. Определи го природниот број n така што бројот $\frac{2015}{n^2+1}$ е најголемиот можен природен број.
17. Определи ги четирицифрените точни четврти степени кои стануваат точни квадрати при прецртување на една од цифрите .
18. Определи ги трицифрените броеви, кои се запишуваат со различни цифри и кои намалени за збирот на нивните цифри даваат точен куб.
19. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{a2008a}$ ќе биде делив со 12.
20. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{5237a}$ е делив со 3, но не е делив со 2.

21. Збирот на три различни двоцифрени природни броја е 87. Определи ги овие броеви, ако еден од нив е делив со 11, еден е делив со 7, а два се деливи со 5.
22. Даден е природен број a . Ако бројот 17748 го поделиме со a добиваме остаток 3, а ако бројот 7655 го поделиме со a добиваме остаток 4. Определи го бројот a .

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

23. Определи ги сите петцифрени броеви од облик $\overline{abcda}$ деливи со 45, при што цифрата на местото на стотките е најголемиот едноцифрен прост број. (На различните букви соодветствуваат различни цифри.)
24. Множеството M се состои од сите прости делители на бројот 2310. Колку броеви се производ на точно два елементи од множеството M ?
25. Определи ги простите броеви кои за секој избор на цифрите a и b се делители на шестцифрениот број $\overline{ababab}$.
26. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?
27. Дропката $\frac{59}{143}$ претстави ја како збир на две прави нескратливи дроп-ки.
28. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.
29. Производот на четири последователни природни броеви е 17160. Кои се тие броеви?
30. Нека производот на цифрите на петцифрениот број $\overline{abcde}$ е еднаков на 2160. Ако $a > b > c > d > e$, определи ја најголемата можна вредност на збирот $a + b + c + d + e$.

31. Во едно семејство има шест деца. Бројот на годините на секое дете е прост број. Првите пет деца се 2, 6, 8, 12 и 18 години постари од најмалото дете. Најмалото дете има помалку од 11 години. Колку години има секое дете во ова семејство?
32. Колку делители има бројот 2016?

II.3. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

33. Определи го природниот број a кој при делење со 4, 6, 8 и 12 дава остаток 3 и ги задоволува неравенствата $220 \leq a \leq 260$.
34. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга 1600 метри било 80 метри. Заради одредена потреба, тие биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е 50 метри. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?
35. Жабата има скок долг 50 cm, зајакот 75 cm, а кенгурот 90 cm. Кое е најмалото растојание на кое сите ќе направат цел број на скокови. Колку скока тогаш направило секое од животните?
36. Определи ги простите броеви p за кои важи $\frac{1}{5} < \frac{p}{14} < \frac{4}{7}$.
37. Во одделението на Марко на писмената работа по математика биле зададени 4 задачи. Една третина од присутните ученици неточно решиле една задача, една четвртина неточно решиле две задачи, една шестина неточно решиле три задачи и една осмина неточно ги решиле сите четири задачи. Колку ученици точно ги решиле сите четири задачи, ако во одделението учат не повеќе од 30 ученици?
38. Колку броеви е можно најмногу да се постават на местото на n така што ќе важи $NZS(3, 18, n) = 90$?
39. На парадата на кралските мускетари, гледајќи дека не можат да се наредат во редови од по 11 мускетари, началникот Д'Артањан решил да ги нареди мускетарите во редови од по 10 мускетари, но се

покажало дека во последниот ред останало едно слободно место. Потоа тој се обидел да ги нареди во редови од по 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 мускетари, но секој пат во последниот ред останувало по едно слободно место. На крај мускетарите поминале во колона по еден, што предизвикало бурна смеа кај посетителите. Определи колку мускетари учествувале на парадата, ако се знае дека не биле повеќе од 7000.

40. Седум рибари ловеле риба на едно иста место на реката Пчиња. Првиот ловел секој ден, вториот преку еден ден, третиот преку два дена, итн. седмиот преку шест дена. На 16.11.2020 година седумте рибари заедно ловеле риба. На кој датум најрано тие повторно заедно ќе ловат риба?
41. На постојка истовремено пристигнале трамвај, автобус и тролејбус. По колку време трите превози средства најрано повторно ќе се сретнат на истата постојка, ако според возниот ред трамвајот прави цел круг за 1 час и 30 минути, автобусот за 2 часа и тролејбусот за 1 час? (Се претпоставува дека возниот ред строго се почитува.)
42. Определи го најмалиот природен број кој при делење со броевите 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1, а е делив со 7.
43. Чекорот на Марко е долг $0,9\text{ m}$, а на неговиот син Станко е долг 500 mm . Ако тргнат од едно исто место, по колку сантиметри повторно за првпат ќе стапнат на едно исто место?
44. Колку броеви е можно најмногу да се постават на местото на n така што ќе важи $\text{NZS}(16,50,n) = 1200$?
45. За секој природен број n со A да го означиме најмалиот заеднички содржател на броевите $n, n+1$ и $n+2$, а со B најмалиот заеднички содржаел на броевите $n+3, n+4$ и $n+5$. Бројот C е најголемиот заеднички делител на броевите A и B .
 - а) Определи ги A , B и C за $n=15$.
 - б) Докажи дека за секој природен број n бројот C е помал или еднаков на 60.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 15. Определи го намаленикот.
2. Броевите $x = a - 2b + 2010$, $y = 2b - 3c + 2010$ и $z = 3c - a + 2010$ се последователни цели броеви. Определи ги x , y и z .
3. За нумерирање на страниците на еден учебник потребни се 411 цифри. Колку страници има учебникот?
4. При множење на два броја, на едниот број ученикот му ја заменил цифрата на единиците 4 со 1, а другиот го запишал точно. Така, множејќи сточно, ученикот добил 525 наместо 600. Кои броеви ги множел?
5. Никола замислил три различни ненулти цифри. Мартин ги запишал сите двоцифрени броеви користејќи ги тие цифри. Збирот на сите броеви кои ги запишал Мартин е еднаков на 231. Кои цифри ги замислил Никола?
6. Андреј замислил број на кој откако му го додал бројот 3, добиениот збир го поделил со 3 и од количникот одзел 3, го добил бројот 3. Кој број го замислил Андреј?
7. Ана замислила број. Од него го одзела збирот на бројот 6 и најголемиот трицифрен број кој е делив со 5, по што го добила најмалиот четирицифрен број кој е делив со 3. Кој број го замислила Ана?
8. Ако на еден двоцифрен број му се допише цифрата 5 еднаш на почетокот, а другпат на крајот, се добиваат два различни броја чија разлика е 252. Кој е тој двоцифрен број?
9. Дадени се педесет природни броеви, од кои половината од нив не надминуваат 50, а другата половина се поголеми од 50, но помали од

100. Разликата на било кои два од дадените броеви не е 0 или 50. Да се најде збирот на тие броеви.
10. Дадена е дропката $\frac{57}{71}$. Кој број треба да се одземе од броителот и истиот да се додаде на именителот па вредноста на дропката после скратувањето да е $\frac{1}{3}$?
11. За колку проценти ќе се промени една дропка ако броителот и се зголеми 57,5%, а именителот и се зголеми 12,5%?
12. Збирот на три броја е 300. Првиот е два пати поголем од вториот, а третиот е еднаков на збирот од првиот и вториот. Кои се тие броеви?
13. Матеј го собрал најголемиот трицифрен природен број со најмалиот цел двоцифрен број и добиениот збир го помножил со разликата на спротивниот број на бројот $\frac{-2}{3}$ реципрочната вредност на бројот 3. Кој број го добил Матеј?
14. Бројот 54 запиши го како збир на четири броја такви што ако на првиот собирук додадеш 2, од вториот одземеш 2, третиот го помножиш со 2 и четвртиот го поделиш со 2, секогаш ќе добиеш ист резултат. Кои се тие броеви?
15. При собирање на два броја Иван згрешил, така што допишал 1 на крајот на едниот собирук и добил 6546, наместо точниот збир 2000. Определи ја разликата на почетните броеви?
16. Кабините на една жичара се нумерирани. Во еден момент се покажало дека кабината No47 е наспроти кабината No113, а кабината No113 е наспроти кабината No210.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

17. Цената на некој материјал е намалена за 52%. После тоа намалување, за 240 денари може да се купи 1 метар материјал повеќе отколку што би можело да се купи пред намалувањето за 270 денари. Одреди ја цената на тој материјал пред намалувањето.

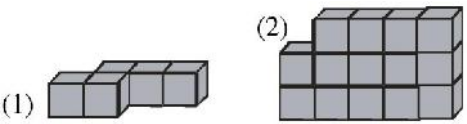
18. Никола купил 4 различни моливи. Сите моливи, без првиот, заедно чинат 42 денари, сите моливи, без вториот, заедно чинат 40 денари, сите моливи, без третиот, заедно чинат 38 денари и сите моливи, без четвртиот заедно чинат 36 денари. Колку чини секој од моливите посебно?
19. Михаела си купила збирка по математика за 720 денари и констати-рала дека потрошените пари се 40% од парите кои и останале. Колку пари имала Михаела на почетокот и колку пари и останале?
20. Во продавница за чевли пар машки и пар женски чевли имале една иста цена. Потоа машките чевли биле намалени за 5%, а женските биле зголемени за 15%. Колку пари во моментот чинат машките, а колку женските чевли ако разликата на цената на двата пара чевли е еднаква на 600 денари?
21. Ако цената на дадена стока се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми купувната моќ на населението за таа стока?
22. Пабло купил 550 грама пршута по цена од 10,60 евра за килограм и 650 грама кашкавал по цена од 8,80 евра за килограм. Тој на продавачот му дал банкнота од 20 евра. Колку пари му вратил продавачот?
23. Елена купила 4 нотези и 6 пенкала и платила 8,40 евра, а Иван купил 1 нотез и 1 пенкало и платил 1,50 евра. Колку пари чинат 2 нотеза и 1 пенкало.
24. Цената на една математичка книга во книжарницата А на почетокот од месец јануари 2012 година била повисока од цената на истата книга во книжарницата Б. На 15 февруари 2012 година цената на книгата во книжарницата А се намалила за 30%, а цената на истата книга во книжарницата Б се зголемила за 30%. Потоа на 15 март 2012 година, цената на книгата во книжарницата А се зголемила за 30%, а цената на книгата во книжарницата Б се намалила за 30%. Разликата во цените на книгата после промените на 15 март 2012 година била 273 денари. За колку била цената на математичката книга во книжарни-цата А повисока од цената на истата книга во книжарницата Б на почетокот од месец јануари 2012 година?

25. Дедо Стамен од својот овоштарник набрал 258 килограми круши и заминал на пазар. Тој ден еден дел од нив продал. Ако продадел уште 15 kg би му останале уште шестина од вкупното количество круши. Притоа, $\frac{3}{8}$ од продадените круши и уште 5 kg ги продал претпладне по цена 30 ден/kg. Попладне ја зголемил цената, и добил $1\frac{5}{8}$ пати повеќе пари одколку од крушите што ги продал претпладне. По која цена дедо Стамен ги продал крушите попладне?
26. Маја отишла во книжара да купи две книги. Цената на едната книга била 65%, а цената на другата книга била 57,5% од парите што ги имала. За да ги купи двете книги и недостигале 45 денари. Колку пари имала со себе Маја?
27. Стефан, Филип и Никола понеле на екскурзија вкупно 222 денари. Стефан потрошил $\frac{1}{3}$ од својата сума, Филип $\frac{1}{5}$ од својата сума, а Никола $\frac{7}{15}$ од својата сума. После тоа им останале еднакви суми на пари. По колку пари понел секој од нив на екскурзијата?
28. Ана, Николина и Симон биле на излет. За ручек Ана понела 4 кифли, Николина понела 3 кифли, а Симон не понел ништоза јадење. Тројцата кифлите ги поделиле подеднакво, за што Симон им дал на девојчињата 140 денари. По колку пари треба да земе секое девојче за парите се распределат праведно?
29. Ленче решил определена сума пари да стави во касите на нејзините три внуци Горјан, Андреј и Пабло. Во касата на Горјан таа ставила 0,25 од вкупната сума пари и уште 2 евра, во касата на Андреј ставила 0,5 од преостанатите пари без едно евро и во касата на Пабло ставила $\frac{2}{3}$ од преостанатите пари и последните 6 евра. Колку пари Ленче ставила во касата на секој внук?
30. Ана и Симон вкупно имале 48 евра. За $\frac{2}{7}$ од своите пари Ана купила книга, а Симон со $\frac{4}{9}$ од своите пари купил топка. По купувањето има останале еднакви суми пари. Колку пари чинела топката, а колку книгата?

31. Ана купила 4 нотези и 6 пенкала и платила 9,60 евра, а Иво купил 2 нотеза и 1 пенкало и платил 2,20 евра. Колку евра е поскапо 1 пенкало од 1 нотез?

III.3. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

32. Масата на јајцето на кокошката е 30% од масата на јајцето на пајката, а масата на гускиното јајце е 25% поголема од масата на пајкиното јајце. Познато е дека гускиното јајце има маса 255 грама. Определи ги масите на јајцето на пајката и кокошката.
33. Едно буре е наполнето со вода до $\frac{5}{6}$ од својот волумен. Ако во бурето се налеат уште 10 литри вода, бурето ќе се дополни до $\frac{7}{8}$ од својот волумен. Колку литри вода собира бурето?
34. Во 1000 килограми свежи печурки има 77% вода. По испарување на одредено количество вода, масата на печурките била преполовена. Колку проценти вода содржат сега печурките?
35. Три кокошки и 1 пајка имаат маса колку 2 гуски, а 1 кокошка, 2 пајки и 3 гуски имаат маса 25 kg . Колку килограми е масата на 1 пајка и 1 гуска, ако масата на секоја птица е цел број килограми.
36. Ана, Бојан и Гроздан заедно имаат 114,5 kg . Ана и Бојан заедно имаат 70,5 kg , а Бојан и Гроздан заедно имаат 72,9 kg . Колку килограми има секое дете?
37. Во една продавница има 45 kg шеќер, кој е во пакувања од 1 kg и 0,5 kg . Во продавницата има 12 пакувања од 1 kg . Колку има пакувања од 0,5 kg ?
38. Еден молер бои 10 m^2 за 35 минути, а друг молер бои 10 m^2 за 42 минути. Молерите почнуваат заедно да бојат две исти згради (со еднакви плоштини). Откако завршил првиот, на вториотму останале уште 520 m^2 за боење. Колкава е плоштината на секоја зград.

39. Дадени се 5 коцки со еднакви маси и 4 цилиндри со еднакви маси. Вкупната маса на дадените тела е 420 g . Колкава е масата една коцка и на еден цилиндар, ако масата на 3 коцки и 1 цилиндар е еднаква на масата на 2 коцки и 3 цилиндри?
40. Единичните коцки од кои се формирани двете фигури имаат иста маса. Масата на фигурата (1) е $12,5\text{ g}$, а масата на фигурата (2) е поголема од 43 g и е помала од $47,3\text{ g}$. Определи ја масата на фигурата (2), ако сите коцки на фигурата (1) се видливи на цртежот.
- 
41. Растојанието меѓу два велосипедисти е 35 km . Тие почнуваат да се движат едновременно по права линија со постојани брзини: едниот со брзина од 12 km/h , а другиот со брзина од 15 km/h . Определи го збирот на можните растојанија меѓу велосипедистите по 2 часа, ако за време на тие два часа тие не ги менуваат насоките на движење.
42. Од едно речно пристаниште едновременно тргнуваат сплав и моротен чамец. Брзината на чамецот по течението на реката е 46 km/h и по еден час чамецот се наоѓа на 40 km од пристаништето. Определи ја растојанието меѓу чамецот и сплавот во тој момент.
43. Во 6:30 часот од градот A кон градот B тргнал автомобил кој се движел со брзина од $62,25\text{ km/h}$. Во 9:30 часот од градот A во истата насока тргнал втор автомобил со брзина $67,5\text{ km/h}$. На колкаво растојание во 11:30 часот ќе се наоѓаат еден од друг двата автомобили?
44. На секои 12 минути автобус тргнува од постојката, која е пред домот на Андреј, кон училиштето и се движи со просечна брзина од 25 km/h . Едно утро Андреј излеголод дома точно кога автобусот тргнал од постојката и по истиот пат тргнал пешки кон училиштето. Тој се движел со брзина од 5 km/h и на постојката пред училиштето пристигнал едновременно со следниот автобус. Определи го растојанието од домот на Андреј до училиштето.

45. Растојанието меѓу речните пристаништа A и B е 90 km . Моторен чамец од растојанието A до B го минува за 3 часа, а во обратна насока за 5 часа. За колку часа сплав ќе стигне од A до B ?
46. Моторциклист се движи со константна брзина и минува покрај километарска табла на која со двоцифрен број е означено во километри растојанието од градот од кој тргнал. Точно по еден час тој поминал покрај километарска табла на кој е запишан број со истите цифри но во обратен редослед. По уште еден час моторциклистот поминал покрај километарска табла која покажува број запишан со ситите цифри и една нула менеѓу нив. Определи ја брзината на моторциклистот.
47. Мартин претрчува права патека долга 100 m за 10,2 секунди, а Никола истата патека ја трча за 12 секунди. На колку метри на патеката треба да се наоѓа Никола за да при истовремено стартување двајцата заедно да стигнат на целта?
48. Растојанието меѓу населените места A и B е 3 km . Во A живеат 300 ученици, а во B живеат 200 ученици. На кое растојание од A треба да се направи училиште така што збирот на растојанијата кои сите ученици треба да ги поминат еднаш дневно до училиштето е најмало?
49. Орелот решил да набљудува како волкот и лисицата, ќе се сретнат, движејќи се по права линија еден кон друг, оддалечени 40 km . Брзината на волкот е 45 km/h , а на лисицата е 35 km/h . Орелот бил одма над волкот и сите тргнале истовремено, при што орелот летал со брзина од 60 km/h . Орелот летал до лисицата, па се вратил до волкот и тоа се повторувало се додека волкот и лисицата не се сретнале. Колку километри прелетал орелот?
50. Иван живее на 1260 m од училиштето и на училиште тргнал во 7:30 часот.Првата половина од патот тој одел 3 m во 2 секунди. Потоа 4 минути ја чекал Мријана и другата половина од патот се движел со брзина од $4,2\text{ km/h}$. Во колку часот Иван притигнал во училиштето?
51. Бабата на братучедите Ангел и Васил живее во градот X кој се оддалечен 240 km од градот A , во кој живее Ангел и два пати повеќе

од градот B , во кој живее Васил. За Нова година семејствата на двете момчиња ја посетиле бабата. Семејството на Ангел тргнало во 8:00 часот од градот A и пристигнало во 12:00 часот во градот X . Во колку часот пристигнало семејството на Васил во градот X , ако тие тргнале во 6:45 часот и се движеле со 20 km/h побрзо од семејството на Ангел?

52. Патот меѓу градовите A и B е долг 37 km . Добре и Билјана тргнале од двата града еден кон друг, при што Билјана тргнала 1 час покасно од Добре. Добре поминува 7 km за 2 часа, а Билјана поминува 8 km за 2,5 часа. Колку километри ќе помине Добре до средбата?

III.4. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

53. Сивата чапља издржува под вода 2,5 минути, малиот корморан издржува под вода 2 пати подолго време, а галебот издржува под вода 37,5 пати помалку време од малиот корморан. Колку секунди издржува под вода галебот?
54. Горјан погледнал во часовникот и забележал дека остатокот од деноноќието е 3 пати поголем од до тогаш изминатото време. По 3,5 часа започнал натпреварот по математика на кој учествувал. Натпреварот траел $2\frac{3}{5}$ часа. Во колку часот завршил натпреварот?
55. Машина за мелење месо мели по 7 kg месо во минута. Ако машината се вклучи во 9:45 часот кога ќе се стават 701 kg месо, а потоа на секои десет минути се додаваат за мелење по 2 kg месо, во колку часот машината ќе го сомели месото?
56. Четири работници кои работат со еднаква ефективност една работа ја завршуваат за 4 часа и 40 минути. За кое време истата работа ќе ја завршат 7 работници кои работата со истата ефективност?
57. Горјан ја прекопува градината за 3 часа, а Андреј за 4 пати подолго време. За колку минути двајцата заедно ќе ја прекопаат градината?

58. Илија и неговиот син слават роденден на ист ден. Ако на роденденот во 2013 година Илија ги помножи своите години со годините на неговиот син ќе го добие бројот 2013. Која година е роден Илија?

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

59. Бојан, Мирко и Здравко имале кеса со џамлии. Бојан во кесата додал онолку џамлии колку што имало во кесата и уште една џамлија. Потоа, Мирко додал во кесата двојно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус три џамлии. На крај Здравко додал тројно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус пет џамлии. На крај во кесата имало 149 џамлии. Колку џамлии имало во кесата на почетокот?
60. Во слаткарницата „Кокос“ има масички и столови групирани во комплекти на следниов начин: неколку комплекти од една маса со четири ногалки и четири стола со три ногалки, неколку комплекти од една маса со три ногарки и четири стола со четири ногалки. Вкупниот број на ногалки е 264. Колку деца можат да седнат во слаткарницата.
61. Во едно училиште има 300 ученици и сите се занимаваат со по еден зимски и еден летен спорт. Преку летото 60% од нив се занимаваат со фудбал, а останатите 40% пливаат. Во текот на зимата учениците или скијаат или играат хокеј, но не и двата спорта истовремено. Со скијање се занимаваат 56% од оние ученици кои во лето играат фудбал, а 30% од фудбалерите преку зима играат хокеј. Одреди колку ученици се занимаваат со пливање и хокеј.
62. Во едно училиште од вкупниот број ученици 58% се момчиња. Колку биле момчиња, а колку девојчиња ако бројот на момчиња и девојчиња се разликува за 72? Колку вкупно ученици имало тоа училиште?
63. Учениците од едно училиште требало да одат на екскурзија. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе ученици од планираниот број. Пред тргнување поради настинка се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на

екскурзија отишле 5 ученици помалку од планираниот број. Колку ученици заминале на екскурзија?

64. Една слаткарница добила нарачка да направи извесен број на слатки за три дена. Првиот ден направила $\frac{2}{5}$ од нарачаните слатки, вториот ден направила $\frac{5}{9}$ од остатокот од нарачката, а третиот ден ги направила преостанатите 40 слатки од нарачката. Колку слатки биле нарачани во слаткарницата?
65. Дедо Илија на пазар понел извесен број пилиња. Првиот купувач побарал да купи половина од сите пилиња и уште половина пиле и дедо Илија го услужил. Следниот купувач побарал да купи половина од преостанатите пилиња и уште половина пиле, па и тој бил услужен. Третиот купувач исто така добил половина од преостанатите пилиња и уште половина пиле. Откако го услужил третиот купувач, дедо Илија ги продал сите пилиња. Колку пилиња понел дедо Илија на пазар? По колку пилиња купил секој купувач?
66. Кожна фудбалска топка е шиена од делови од кожа во форма на правилни петаголници и правилни шестаголници. На топката има вкупно 32 парчиња кожа. Секое парче кожа во форма на петаголник споено е по страните само со парчиња кожа во форма на шестаголник. Секое парче кожа во форма на шестаголник споено е по страните со 3 петаголници и со 3 шестаголници. Колку делови кожа има во форма на петаголник, а колку во форма на шестаголник?
67. Човек и пол, за два и пол дена јаде три и пол леба. Колку леба ќе изедат 100 луѓе за 45 дена?
68. Илина од новоотворена ќеса со бомбони изела $\frac{1}{5}$ од вкупниот број на бомбони и уште 3 бомбони. Од преостанатиот број на бомбони, вториот ден изела $\frac{1}{5}$ од бомбоните и уште 5 бомбони. Третиот ден ги изела преостанатите 15 бомбони. Колку бомбони имало во ќесата на почетокот?
69. Учениците од две одделенија се договориле да играат фудбал. Во едно од одделенијата немало доволен број на играчи да состават екипа од

11 ученици, па тие се договориле учениците од двете одделенија да се „измешаат“ меѓу себе и потоа да состават две екипи. Наставникот забележал дека од првото одделение машки се $\frac{4}{13}$ од учениците, додека од второто одделение машки се $\frac{5}{17}$ од учениците. Секое од одделенијата има не повеќе од 50 ученици. Кое од одделенијата има повеќе девојчиња?

70. Во едно училиште учат помалку од 400 ученици во шесто одделение поделени во неколку паралелки. Шест од паралелките имаат по еднаков број на ученици и тие шест паралелки имаат вкупно повеќе од 150 ученици. Во останатите паралелки во шесто одделение има вкупно за 15% повеќе ученици отколку во овие шест паралелки заедно. Колку вкупно ученици во шесто одделение има во ова училиште?
71. Во едно училиште се запишани 180 момчиња и 192 девојчиња. Од нив се формирани паралелки со еднаков број на ученици, така што бројот на момчиња во секоја од паралелките е еднаков. Во училниците каде ја посетуваат наставата има најмногу по 40 столчиња. По колку момчиња и девојчиња има во секоја од паралелките?
72. Две полиња се засадени со рози и лаванди. 65% од плоштината на првото поле се рози, 45% од плоштината на второто поле се рози и 53% од плоштината на двете полиња заедно се рози. Колку проценти од вкупната плоштина (на двете полиња заедно) е плоштината на првото поле?
73. На еден натпревар биле зададени пет задачи. По проверката се покажало дека точно 120 ученици решиле барем една задача, а вкупниот број решени задачи од сите ученици е 277. Понатаму, $\frac{1}{3}$ од учениците кои решиле барем една задача решиле точно една задача, а $\frac{1}{4}$ решиле точно по две задачи и $\frac{1}{5}$ решиле точно по три задачи. Колку ученици решиле пет задачи.
74. Четири верверици изеле 2008 ореви, при што секоја изела најмалку 109 ореви. Првата верверица изела повеќе од секоја од останатите три.

Втората и третат вкупно изеле 1265 ореви. Колку ореви изела секоја верверичка?

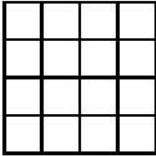
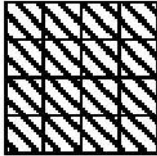
75. Во кутија има моливи и пенкала. Бројот на моливите е еднаков на 40% од бројот на пенкалата. Ана од кутијата зела 2 молива и тогаш бројот на моливите бил еднаков на 30% од бројот на пенкалата. Колку моливи и колку пенкала имало на почетокот во кутијата?
76. За Великден Ана бојадисала жолти, црвени и зелени јајца. Жолтите јајца се два пати помалку од црвените. Ако црвените јајца беа за 6 повеќе од зелените јајца, тогаш сите јајца ќе беа 38. Но, црвените јајца се за 6 помалку од зелените. Колку црвени јајца бојадисала Ана?

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На секој од 25 листа хартија е запишан еден од броевите 1 или -1 . Бројот -1 е запишан 13 пати. Дозволено е два листа да се отстранат и да се заменат со лист на кој е запишан производот на отстранетите броеви. Постапката се повторува 24 пати. Кој број е запишан на последниот лист хартија?
2. Анета и Виктор играат игра. Играта ја започнува Анета кажувајќи број од 1 до 7. Потоа Виктор го собира тој број со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот. Анета, бројот што го кажал Виктор го собира со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот и оваа постапка наизменично ја повторуваат, се додека некој од нив не го каже бројот 100. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Анета, како играч што ја почнува играта, може да си обезбеди сигурна победа и како?
3. Пабло располага со три разнобојни кутии и во едната од нив го скрил камиончето на Андреј. На кутиите Пабло напишал: на белата - „Тука не е камиончето.“, на зелената - „Камиончето е тука.“ и на црвената - „Камиончето е во зелената кутија.“ Натписот само на една од кутиите е точен. Каде е камиончето?
4. Располагаме со два песочни часовници кои мерат 7 минути и 11 минути. Едно јајце се вари 15 минути. Како да се измери тоа време со двата песочни часовници?
5. За Великден тренерот на една фудбалска екипа решил на секој првотимец даму подари по едно бојадисано јаце, но имал сад во кој истовремено може да се варат најмногу 5 јајца. Ако се знае дека едно јаце се сварува во вода која врие за 4 минути, кое е најкраткото време за кое тренерот може да свари 11 јајца.

6. Дадено е множеството $A = \{1, 17, 5, 7, 2, 13, 23\}$. Ѓорѓи за секое двоелементно подмножество од A на табла го запишува помалиот број од избраните два кои се во тоа подмножество. Да се определи збирот на броевите кои Ѓорѓи ги запишал на таблата.
7. Нека е дадена 5×5 квадратна табла. Во секое поле од таблата е запишан по точно еден од броевите 1 и -1 на тој начин што производот на елементите од секоја редица е негативен. Докажи дека постои колона таква што производот на елементите од нејзините полиња е негативен.
8. Никола има 11 кутии со бонбони, при што во секоја кутија има 17 бонбони. Никола знае дека бонбоните во само една кутија се тешки 12 грама, додека во останатите кутии бонбоните се тешки 13 грама. Како со помош на само едно мерење на избаждарена вага ќе утврди која е кутијата со бонбони со маса 12 грама ?
9. Правоаголна метална плочка има маса 10 грама. Таа треба да се раздели (расече) на три дела кои имаат целобројни маси. Со добиените три дела може да се измери во грамови секоја маса од 1 до 10 грама која е природен број, освен маса од 9 грама. Колкава треба да биде масата на секој од делбените делови?
10. Имаме два сада од кои едниот собира точно 3 литри, а другиот собира точно 5 литри. Дали од чешма со помош на двата сада можеме да наполниме точно 4 литри вода?
11. Книжен квадрат 4×4 е поделен на 16 единечни квадратчиња, кои од едната страна се бели, а од другата се штрафирани (цртежи десно). Само со превиткување, без да сечиш добиј:

 - а) правоаголник 4×3 со 4 штрафиани и 8 бели квадратчиња,
 - б) квадрат 3×3 со 3 штрафиани и 6 бели квадратчиња,
 - в) квадрат 3×3 со 5 штрафиани и 4 бели квадратчиња,
 - г) правоаголник 3×2 со 4 штрафиани и 3 бели квадратчиња,
 - д) квадрат 3×3 со 1 штрафиано и 8 бели квадратчиња.
12. Пред кујната на кампот во редот за појадок застанала група ученици од петто одделение. По две минути пристигнала група ученици од шесто одделение и меѓу секои двајца ученици од петто одделение

застанал ученик од шесто одделение. По две минути доѓле ученици од седмо одделение и меѓу секои двајца ученици во редот застанал по еден ученик од седмо одделение, со што бројот на учениците во редот бил 85. Колку ученици од секое одделение има во редот?

13. Еден патник пристигнал на остров на кој живеат само витези и штитоношци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а штитоношците секогаш лажат. Патникот од жителите на островот најмил водич и го замолил да го праша жителот кој минувал дали е витез или е штитоносец. Водичот ја исполнил задачата и соопштил: „Овој човек кажа дека е штитоносец.“ Колку со сигурност се витези меѓу водичот и жителот кој минувал?
14. На еден остров живеат само витези кои секогаш ја говорат вистината и штитоношци кои сегогаш лажат. Еден посетител на островот сретнал тројца жители на островот и секој од нив го прашал: „Колку витези има меѓу твоите двајца сопатници?“ Првиот одговорил: „Ниту еден.“, вториот одговорил: „Еден.“, а третиот молчел. Колку витези има меѓу тројцата жители на островот?
15. На еден волшебен остров живеат два вида жители – витези, кои секогаш ја говорат вистината и лажливци, кои секогаш лажат. Патник сретнал група од седум жители на островот и секој од нив го прашал колку од останатите членови на групата се витези. Добил еден одговор 0, два одговори 1, а преостанатите четири одговори биле 2. Колку од членовите на групата биле витези?
16. Ана, Бети, Васка и Галина учествувале на натпревар по математика и ги освоиле првите четири места. На прашањето: „Ти кое место го освои?“ , девојчињата ги дале следниве одговори:
Ана: „Јас не сум ниту прва, ниту четврта.“
Бети: „Јас не сум четврта.“
Васка: „Јас сум прва.“
Галина: „Јас сум четврта.“
Три од овие одговори се вистинити, а еден не е вистинит. Кое девојче не говорело вистина?
17. Ана, Бојана, Ивана и Гордана се натпреварувале во трчање и никои две не стигнале на целта истовремено. По натпреварот секое девојче го прашале кое место го освоило, на што биле добиени следниве одговори:

Ана: „Јас не бев ниту прва, ниту последна.“

Бојана: „Јас не бев последна.“

Ивана: „Јас бев прва.“

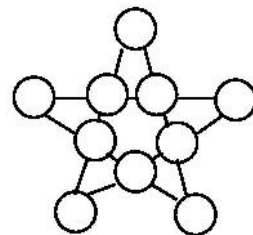
Гордана: „Јас бев последна.“

Се покажало дека само едно од девојчињата не ја кажало вистината, Кое девојче го освоило првото место?

18. На Великден другарките Ана, Весна, Емилија и Ивана на училиште понеле секоја по едно јајце. Четирите јајца биле црвено, плаво, зелено и жолто. Познато е дека Ана не понела ниту плаво, ниту жолто јајце. Емилија понела или плаво или жолто јајце. Ивана ниту црвено, ниту жолто јајце. Плаво јајце понела или Емилија или Ана. Определи кое девојче какво јајце понело на училиште.
19. Четири фудбалски екипи A, B, C и D одиграле турнир на кој секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. На турнирот за победа се добиваат 3 бода, за нерешен резултат секоја екипа добива по еден бод и за пораз не се добиваат бодови. Екипите освоиле 5, 3, 3 и 2 бода. Колку натпревари завршиле нерешено?
20. Докажи дека меѓу било кои 5 природни броеви кои не се деливи со 3, може да се најдат 3 броеви чиј збир е делив со 3.
21. Во квадратна шема со димензии 3×3 Димитар може да ги запишува броевите $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. Дали може Димитар во секое квадратче да запише по еден од овие броеви така што збиравите на броевите во трите редици, трите колони и двете дијагонали да се различни меѓу себе.

IV.2. РАСПОРЕДУВАЊА

22. Во секое од десетте кругчиња на цртежот десно е запишан по еден едноцифрен број. За осум кругчиња се искористени броевите 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 и 4. Во преостанатите две кругчиња се запишани два исти ненулни броја така што збиравите на четирите броеви запишани во кругчињата кои се на иста права се еднакви. Кои се тие броеви?



23. Природните броеви од 1 до 8 се ставаат во табела со 2 реда и 4 колони, така што збирот на броевите во секоја колона и во секој ред треба да биде ист (види цртеж).

8	2	3	5
1	7	6	4

(Збирот во секоја колона е 9, а збирот во секој ред е 18.)

а) Дали може првите 10 природни броеви да се постават во табела со 2 реда и 5 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секој ред да биде ист?

б) Дали може првите 12 природни броеви да се постават во табела со 2 реда и 6 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секој ред да биде ист?

24. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знацитеза помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

		<	
?			

25. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знацитеза помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

	?		
		<	2
2		<	

26. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знацитеза помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

			?
	3	>	
1			

27. За Великден баба Павлина бојадисала 36 јајца по 6 јајца во 6 различни бои: плава (п), црвена (ц), зелена (з), жолта (ж), лилјакова (л) и розева (р). Бојадисаните јајца Матеа ги наредила во табла, така што во секој ред и во секоја колона имало

п	ц	з	ж	л	р
				ц	
ж					
ц	з	п	р		
		р			12
з	р	л			

по едно јајце од секоја боја. По неколку дена во таблата останале неколку јајца, како што е прикажано на цртежот десно. Како Матеа ги распоредила јајцата во таблата?

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

28. Со помош на 10 еднакви коцки се формирани сите можни правоаголни паралелопипеди. При формирањето на паралелопипедот не е неопходно да се искористат сите коцки. Определи го бројот на различни паралелопипеди.
29. Определи го бројот на сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што $b|a$ и $c|b$.
30. Определи го бројот на петцифрените броеви кои може да се запишат само со цифрите 5 и 0. (Не мора да бидат искористени и двете цифри.)
31. Циркуска арена е осветлена од множество рефлектори распоредени на кружница. Наум и Димитар решиле да ги пребројат рефлекторите. Тие броеле во една иста насока, но започнале да бројат од различни места. Се покажало дека 17-тиот рефлектор за Наум е 7-ми за Димитар, а 7-миот за Наум е 27-ми за Димитар. Колку рефлектори имало?
32. Дванаесетте витези на кружната маса треба да изберат двочлена делегација за посета на кралот Артур. На колку начини може тоа да се направи, така што во двочлената делегација да не бидат витези кои седат еден до друг на кружната маса.
33. Шаховската табла е поделена на 64 единечни квадрати. Најди го бројот на сите квадрати на шаховската табла, кои се формирани од единечните квадрати.
34. Табла 100×100 е поделена на единечни квадратчиња. Ќе сметаме дека две единечни квадратчиња се соседни ако имаат заедничка точка. Определи го најмалиот број бои со кои може да се обои таблата така што да не постојат истобојни соседни квадратчиња.

35. Некои од единечните квадратчиња на квадратна 2020×2020 мрежа се обоени така што или во редот, или во колоната, или истовремено во редот и колоната на секое обоено квадратче нема други обоени квадратчиња. Определи го најголемиот можен број обоени квадратчиња.

36. Да ја разгледаме следната табела

4				
8	12			
16	20	24		
28	32	36	40	
...	...	...	...	...

Во која редица (хоризонтала) се наоѓа бројот 2012.

37. Колку цели броеви x , $-1000 < x < 1000$ се деливи со 3, а колку цели броеви y , $-444 < y < 444$ не се деливи со 4. Кои се повеќе?

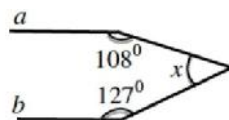
38. На таблата во низа се запишани 200 природни броеви еден по друг така што до секој парен број се наоѓа непарен број. Определи го најголемиот можен број парни броеви во низата?

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. На отсечката AB се распоредени точките: C, D, E, F по дадениот редослед, така што $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. Растојанието меѓу средните точки на отсечките CD и EF е 12 cm , а растојанието меѓу средините точки на отсечките AC и FB е 23 cm . Најди ја должината на отсечката AB .
2. Две отсечки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ со еднакви должини лежат на иста права, така што $\frac{1}{4}$ од нивните должини им е заедничка. Определи ја должината на тие отсечки ако растојанието меѓу нивните средни точки е 6 cm .
3. Дадена отсечка е поделена со три точки на четири нееднакви дела. Растојанието меѓу средините на внатрешните делови е 6 cm , а растојанието меѓу средините на крајните делови е 16 cm . Колку изнесува должината на дадената отсечка?
4. Аголот a е поголем од својот комплементен агол за толку пати колку што пати е помал од својот суплементен агол. Пресметај го аголот a .
5. Нека a и b се два соседни агли такви што нивните симетрали се заемно нормални. Ако се знае дека a е за 30° поголем од b , пресметај колку степени изнесува секој од нив.
6. Разликата на аголот a и неговиот напореден агол b е 56° . Пресметај го комплементниот агол g на аголот b .
7. Две прави се сечат во една точка и образуваат четири агли (два остри и два тапи агли). Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половината од едниот накрсен тап агол. Определи ги големините на аглите?
8. При пресекот на правите a и b едниот од добиените агли е седум пати поголем од другиот. Во пресечната точка повлечена е нормала c на правата a . Пресметај го аголот меѓу правите b и c .

9. На цртежот десно правите a и b се паралелни. Користејќи ги дадените податоци определи го аголот x .



10. Две прави p и q се сечат во точката C . Точката C ја дели правата p на две полуправи, кои со една иста полуправа од правата q со почетна точка C градат два агли: $\angle pCq$ и $\angle qCp$. На симетралата на $\angle pCq$ избрана е точка M , а на симетралата на аголот $\angle qCp$ избрана е точка N така што $MN \parallel p$. Отсечката MN ја сече правата q во точка D . Докажи дека D е средина на отсечката MN .

V.2. ТРИАГОЛНИК

11. Во еден триаголник разликата на двата внатрешни агли a и b е еднаква на трикратната вредност на третиот агол g . Докажи дека $a - g = 90^\circ$.
12. Да се определат внатрешните агли на триаголникот, ако е познато дека големината на еден агол е $\frac{8}{15}$ од големината на другиот агол и $\frac{4}{11}$ од големината на третиот агол.
13. Нека D е точка на страната BC од триаголникот $\triangle ABC$, таква што $\overline{DC} = 2\overline{BD}$. Да се одредат аглите на триаголникот ако $\angle ABC = 45^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$.
14. Даден е остроаголен триаголник ABC . Неговите висини AE и CD се сечат во точката H , при што $\overline{AB} = \overline{CH}$. Пресметај го аголот $\angle ACB$.
15. Даден е остроаголниот $\triangle ABC$. Симетралата на аголот $\angle BAC$, симетралата на страната AC и висината од точката C се сечат во една точка. Одреди го аголот $\angle BAC$?
16. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Точката M е на страната BC и важи $\overline{AC} = \overline{AM}$, а точката N е на страната AB и важи

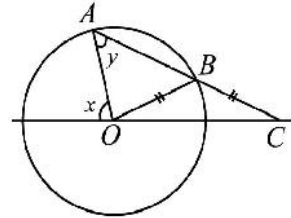
$\overline{CN} = \overline{BN}$. Нека AM и CN се сечат во точката K . Определи го $\angle CKM$.

17. Даден е триаголник ABC во кој $\angle ABC = 20^\circ$ и $\angle ACB = 40^\circ$. Нека AL ($L \in BC$) е симетралата на аголот во темето A и важи $\overline{AL} = 3\text{ cm}$. Определи ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.

18. Определи го аголот во триаголникот кој е за 20% помал од аголот меѓу симетралите на другите два агли на триаголникот.

19. Точката B е внатрешна за отсечката AC . Во една иста полурамнина во однос на правата AC се конструирани рамностраните триаголници ABM и BCN . Правите AN и CM се сечат во точката L . Определи го $\angle CLN$.

20. Нека O е центар на кружницата прикажана на цртежот десно. Определи ја релацијата меѓу аглите x и y .



21. Во $\triangle ABC$, $\overline{AC} = 5\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 9\text{ cm}$. Од средината на страната AB е издигната нормала која што страната BC ја сече во точка E . Точката E е поврзана со темето A . Пресметај го периметарот на $\triangle AEC$.

22. Нека е даден рамнокракиот триаголник ABC , каде $\overline{AB} = \overline{CB}$, со основа $\overline{AC} = 10\text{ cm}$. Низ средината D на кракот AB повлечена е нормала n на кракот AB која го сече кракот BC во точката E . Ако периметарот на триаголникот ABC е 40 cm , пресметај го периметарот на триаголникот AEC .

23. Нека O и S се центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC соодветно ($b < c$, каде $b = \overline{AC}$ и $c = \overline{AB}$). Докажи дека $\angle SAO = \frac{1}{2}(g - b)$, каде $b = \angle ABC$ и $g = \angle ACB$.

24. Рамнокракиот триаголник ABC има крак што е 3 пати подолг од основата. Ако точката D е средина на основата, а точката E средина на кракот AB , тогаш периметарот на четириаголникот $AEDC$ е за 42 cm поголем од периметарот на триаголникот EBD . Пресметај го периметарот на триаголникот ABC .

25. Нека во триаголникот ABC , разликата на аглите a и b е 90° . Симетралата на внатрешниот агол g при темето C ја сече спротивната страна AB во точката D , а симетралата на надворешниот агол при темето C го сече продолжението на страната AB , во точката E . Докажи дека триаголникот EDC е рамнокрак.
26. Во триаголникот ABC , $\angle ACB = 40^\circ$. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C ја сечат правата AB во точките D и E , така што $\triangle CDE$ е рамнокрак. Определи ги аглите на триаголникот ABC .
27. Пресметај ги аглите во триаголникот ABC , ако аголот меѓу висината повлечена од темето C и симетралата на $\angle ACB$ изнесува 9° , а аголот меѓу симетралите на надворешните агли кај темињата A и B изнесува 61° .
28. Од точката M која страната AB на рамностраниот триаголник ABC ја дели на делови со должина 6 cm и 2 cm повлечени се нормали на останатите страни. Одреди го растојанието од точката C до повлечените нормали.
29. Даден е триаголник ABC со $\angle CBA = 20^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$ и $\overline{AD} = 2\text{ cm}$, каде D е пресечната точка на симетралата на аголот кај темето A и страната BC . Одреди ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.
30. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза AB таков што $\angle BAC = 60^\circ$. Нека M е пресекот на симетралата на аголот $\angle BAC$ со катетата BC . Точката N е средина на AB . Докажи дека $\overline{CM} = \overline{MN}$.
31. На страните AB и BC на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точки K и M така да $KM \parallel AC$. Отсечките AM и KC се сечат во точка O . Ако $\overline{AK} = \overline{AO}$, $\overline{KM} = \overline{MC}$, докажи дека $\overline{AM} = \overline{KB}$.
32. Во рамнокрак триаголник аголот кај врвот е 108° . Докажи дека висината спуштена кон основата е два пати помала од симетралата на аголот на основата.

33. Докажи дека тежишната линија спуштена од темето C кон основата е помала од полупериметарот на триаголникот.
34. Точките A, B, C, D припаѓаат на иста права во зададениот редослед, при што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Од истата страна на правата се избрани точките E и F , такви што $\triangle ACF$ и $\triangle CDE$ се рамнострани. Докажи дека триаголникот BEF е рамностран.
35. Даден е $\triangle ABC$ во кој должините на страните се последователни природни броеви. Тежишната линија од темето A е нормална на симетралата на аголот кај темето B . Да се пресмета периметарот на триаголникот $\triangle ABC$.
36. Во рамнокракиот триаголник ABC , точката M е средина на основата $\overline{AB}$. Нека N е точка од кракот BC , така што $MN \perp BC$ и нека S е средина на отсечката $\overline{MN}$. Докажи дека правата AN е нормална на правата CS .

V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

37. Периметарот на еден четириаголник е еднаков на 22 cm . Едната дијагонала на четириаголникот го разделува на два триаголника со периметри 13 cm и 19 cm . Определи ја должината на оваа дијагонала.
38. Нека $ABCD$ е паралелограм таков што $AB > BC$. Правата p која го содржи пресекот на дијагоналите O и е нормална на дијагоналата BD , ја сече страната AB во точка M и страната CD во точка N . Докажи дека четириаголникот $MBND$ е ромб.
39. Отсечките AC и BD се сечат во точката O . Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на периметарот на триаголникот ABD , а периметарот на триаголникот ACD е еднаков на периметарот на триаголникот BCD . Најди ја должината на отсечката $\overline{AO}$, ако $\overline{BO} = 10\text{ cm}$.
40. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 3\overline{BC}$. На страната AB дадена е точка P таква што $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Докажи дека

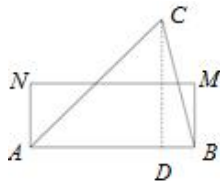
$$\angle CAB + \angle CPB = 45^\circ.$$

41. Даден е паралелограмот $ABCD$. Нека E лежи на правата BC така што $\overline{AE} = \overline{AB}$ и нека F лежи на правата AB така што $\overline{CF} = \overline{CB}$. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{AC}$.
42. Покажи како триаголник, четириаголник, петаголник и шестаголник може да се добијат како пресек на два триаголника. Дали седумаголник може да се добие како пресек на два триаголника?
43. Дадени се пет кружници. Ако избереме било кои четири кружници од дадените пет, тие имаат заедничка точка. Докажи дека постои точка која е заедничка за сите пет кружници.
44. Во рамнина се дадени 4 различни точки така што за секоја од нив постојат барем две од останатите три точки кои во однос на разгледуваната точка се на растојание не поголемо од 1. Докажи дека четирите точки можат да се покријат со круг со радиус 1.

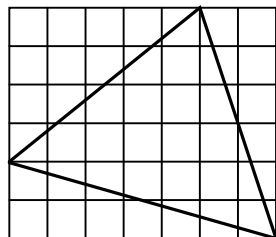
V.4. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК, ЧЕТИРИАГОЛНИК И КРУГ

45. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle C = 90^\circ$) со катети $a = 12\text{ cm}$ и $b = 16\text{ cm}$. Висината повлечена кон хипотенузата е $h_c = 9,6\text{ cm}$. Определи ја хипотенузата.

46. Правоаголникот $ABMN$ и триаголникот ABC имаат заедничка страна (цртеж десно). Плотините на двете фигури се еднакви. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот ако $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{CD} = 4\text{ cm}$.

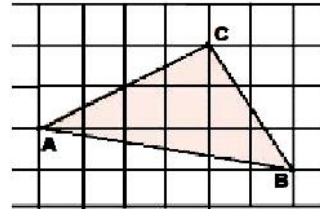


47. Определи ја плоштината на триаголникот на цртежот (без да се мерат потребните должини), ако секое од квадратчињата има плоштина 1 cm^2 .



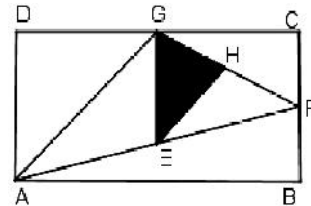
48. На страната AB на триаголникот е земена точка M , таква што $P_{AMC} = 2,7 \text{ cm}^2$ и $P_{BMC} = 3,6 \text{ cm}^2$. Ако $\overline{AM} = 3 \text{ cm}$, определи ја должината на отсечката BM .

49. На цртежот десно во квадратна мрежа е прикажан триаголникот ABC . Должината на страната на квадратчињата во мрежата е еднаква на 2 cm . Определи ја плоштината на триаголникот ABC .



50. Дадени се точките $A(-2, -2)$, $B(1, 5)$ и $C(-2, 3)$ во координатен систем со единечна отсчка 1 cm . Определи ја плоштината на триаголникот ABC .

51. Колкав дел од правоаголникот претставува црната површина ако точките F, G, E и H се средини на BC, CD, AF и FG , соодветно.



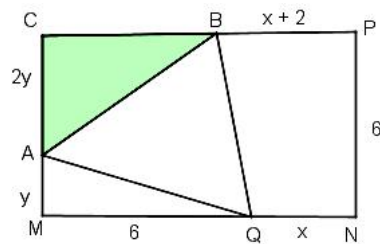
52. На страните MN, MC и PC на правоаголникот $MNPC$ земени се точки Q, A и B , соодветно (цртеж десно).

Ако

$$\overline{NP} = \overline{MQ} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{QN} = x, \quad \overline{AM} = y,$$

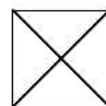
$$\overline{BP} = x + 2 \text{ и } \overline{AC} = 2y,$$

определи ја плоштината на триаголникот ABC .

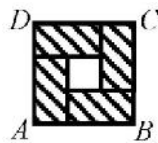


53. Триаголник и квадрат имаат еднакви плоштини. Ако висината на триаголникот е $1,25 \text{ cm}$, а периметарот на квадратот е 1 dm , определи ја должината на страната на триаголникот соодветна на дадената висина.

54. На цртежот десно е прикажан квадрат кој со дијагоналите е поделен на четири еднакви триаголници. Плоштината на еден од делбените триаголници е еднаква на најголемиот прост едноцифрен број. Определи го збирот на плоштините на сите триаголници прикажани на цртежот.

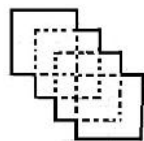


55. Четири еднакви штрафирани правоаголници, секој со периметар 10 cm , се поставени така што формираат квадрат $ABCD$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на овој квадрат.

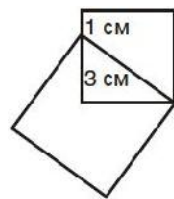


56. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за 2 cm , а нејзината соседна страна за 5 cm , тогаш добиваме правоаголник чија што плоштина е за 45 cm^2 поголема од плоштината на квадратот. Колкава е плоштината на квадратот?
57. Должината на правоаголникот е 2 mm помала од страната на квадратот со периметар $34,8\text{ cm}$, а неговата ширина е за 2 mm поголема од страната на рамностран триаголник со периметар $18,6\text{ cm}$. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот.
58. Должината на еден правоаголник е намалена за 10% , а неговата ширина е зголемена за 10% . Колку проценти е плоштината на новиот правоаголник во однос на плоштината на дадениот правоаголник?

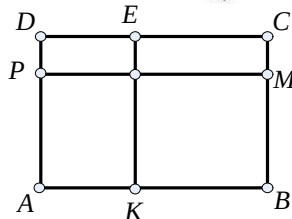
59. Четири квадратни салфетки се поставени како што е прикажано на цртежот десно, при што $\frac{2}{3}$ од страните им се преклопуваат. Периметарот на добиената фигура е еднаков на 48 cm . Определи ја нејзината плоштина.



60. Од два квадрати е составена фигурата прикажана на цртежот десно. Периметарот на дадената фигура е еднаков на 24 cm . Определи ја плоштината на оваа фигура.



61. Низ точката O во правоаголникот $ABCD$ повлечени се прави паралелни со страните на правоаголникот што го разбиваат на четири правоаголници $POED$, $OMCE$, $AKOP$, $KBMO$ (види цртеж).



- а) Ако плоштините на правоаголниците $POED$, $OMCE$, $AKOP$ се соодветно 2, 4, 6, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

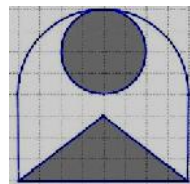
- б) Ако периметрите на правоаголниците $POED$, $OMCE$, $AKOP$ се соодветно 6, 10, 10, пресметај го периметарот на правоаголникот $ABCD$.
62. Определи ја плоштината на правоаголник чија должина е еднаква на периметарот на квадрат со страна 3 cm , а ширина е еднаква на должината страната на квадрат со плоштина 4 cm^2 .
63. Дадени се два еднакви квадрати со плоштина од 100 cm^2 . Страната на едниот квадрат се зголемила за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат за 16 cm . Кој од добиените квадрати ќе има поголема плоштина и за колку?
64. Во правоаголникот $ABCD$, должината на AB е двапати поголема од должината на BC . На страната AB е избрана точка P така што P е средина на отсечката AB . Со отсечката PC правоаголникот е поделен на еден четириаголник и еден триаголник чии периметри се разликуваат за 20 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.
65. Два квадрати имаат еднакви плоштини од 81 cm^2 . Страната на едниот квадрат е зголемена за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат е зголемен за 16 cm . Определи ја разликата на плоштините на добиените квадрати.
66. Правоаголник со плоштина 99 cm^2 има ширина 9 cm . Пресметај ја плоштината на квадратот чиј периметар е еднаков на периметарот на дадениот правоаголник.
67. Даден е правоаголник со страни $a\text{ cm}$ и $b\text{ cm}$. Ако страната со должина $a\text{ cm}$ се продолжи за $b\text{ cm}$ и страната со должина $b\text{ cm}$ се продолжи за $a\text{ cm}$ се добива квадрат со плоштина 100 cm^2 . Ако должините на страните на дадениот правоаголник се природни броеви, определи го правоаголникот со најмала плоштина.
68. Даден е правоаголен координатен систем Oxy со кој точките $A(-3, -2)$, $B(4, -2)$, $C(4, 5)$ и $D(-2, 2)$ се темиња на четириаголник.

Опреди ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

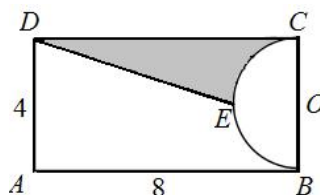
69. Должините на основите на правоаголен трапез се 11 cm и 6 cm , а должините на неговите краци се 12 cm и $1,3\text{ dm}$. Опреди ја плоштината на трапезот.
70. Во паралелограмот $ABCD$ точките K и P е средини на BD и AB , соодветно. Ако плоштината на триаголникот KPB е еднаква на 12 cm^2 , опреди ја плоштината на четириаголникот $CKPB$.
71. Дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O , која е средина на BD . Ако $\overline{AO} = 7,25\text{ cm}$, $\overline{CO} = 2,5\text{ cm}$ и плоштината на триаголникот OCD е $7,5\text{ cm}^2$, опреди ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.
72. Даден е трапез со плошина 182 cm^2 , чии мерни броеви на основите и висината, изразени во сантиметри се природни броеви. Нека помалата основа е b , поглемата основа е a и важи $0,6b = \frac{3}{8}a$, а висината е помала од големата основа и поголема од малата основа. Опреди ја висината на трапезот.
73. Плоштината на трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е 14 cm^2 . Низ темето C е повлечена права $CM \parallel AD$ ($M \in AB$). Ако $\overline{AB} = 1\text{ dm}$ и $\overline{DC} = 40\text{ mm}$, опреди ја плоштината на триаголникот MBC .
74. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(-4, -2)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$ и D која е симетрична на точката C во однос на ординатната оска. Опреди ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.
75. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се сечат во точката O . Низ точката повлекуваме права паралелна на основите на трапезот, која го сече кракот BC во точката M . Плоштината на триаголникот AMD е еднаква на $3,6\text{ cm}^2$.
Опреди ја плоштината на триаголникот BCD .

76. Дадени се правилен петаголник, седумаголник и деветаголник, кои имаат еднакви плоштини и еднакви апотеми. Кој од многуаголниците има најголема страна?

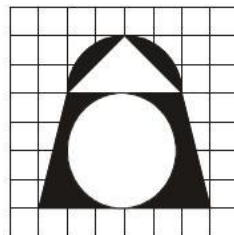
77. Должината на страната на едно квадратче во мрежата дадена на цртежт десно е 1 cm . Определи ја плоштината на белиот дел на фигурата прикажана на овој цртеж.



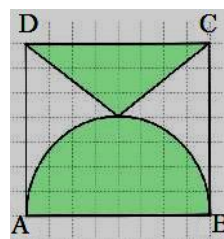
78. Даден е правоаголник $ABCD$ и полу-кружница со центар во средината O на страната BC (цртеж десно). Определи ја плоштината на сивиот дел од правоаголникот $ABCD$.



79. Должината на страната на едно квадратче во мрежата прикажана на цртежот десно е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на црниот дел од фигурата.

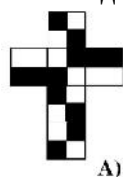
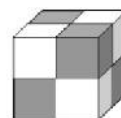


80. Должината на страната на едно квадратче во мрежата прикажана на цртежот десно е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на необоениот дел од правоаголникот.

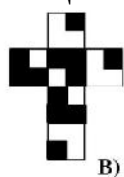


V.5. СТЕРЕОМЕТРИЈА

81. Коцката прикажана на цртежот десно е составена од четири бели и четири црни единечни коцки. На долниот цртеж се прикажани пет мрежи на коцка. Која е мрежата на дадената коцка?



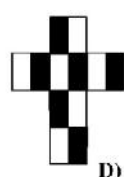
A)



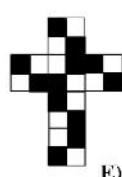
B)



C)

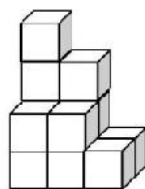


D)

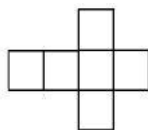


E)

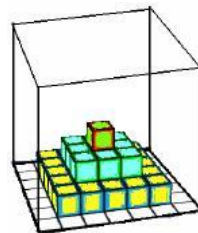
82. Телото на цртежот десно е составено од 13 еднакви коцки со раб долг 1 cm . Определи ја плоштината на ова тело.



83. Периметарот на обвивката на коцката прикажана на цртежот десно е еднаков на $4,2\text{ dm}$. Определи ги волуменот и плоштината на коцката.



84. На дното на аквариум во форма на коцка се поставени мали коцки како што е прикажано на цртежот десно и аквариумот е наполнет со вода. Плоштината на телото формирано од малите коцки (без основата) е 549 cm^2 . Определи го волуменот на водата.



85. Основата на права призма е правоаголен триаголник со страни 3 cm , 4 cm и 5 cm . Околниот раб на призмата е 20% подолг од хипотенузата. Определи ги плоштината и волуменот на призмата.
86. Една призма има 201 рабови. Определи го збирот на бројот на темињата и бројот на сидовите.
87. Дадено е тело со 24 рабови и 13 темиња. Колку сидови има ова тело?
88. Дадена е пирамида со 17 сидови, кај која сите рабови се со еднаква должина. Збирот на должините на рабовите е 288 cm . Определи ја должината на еден раб на пирамидата.
89. Мајстор и чирак треба да направат од бетон една плоча со димензии 4 m , 3 m и 20 cm , како и 4 оградни сидови со димензии 20 cm , 3 m и 25 cm . Мајсторот му рекол на чиракот да пресмета и да го нарача точното количество потребен бетон. Чиракот пресметал дека треба да нарача 30 m^3 бетон. Дали чиракот згрешил во пресметката?
90. Плоштините на трите различни сидови на квадар се 8 cm^2 , 24 cm^2 и 3 cm^2 . Определи го волуменот на овој квадар.
91. Три полни метални коцки со рабови 3 cm , 4 cm и 5 cm се стопени и од растопениот метал е направена нова коцка. Определи ја плоштината на новата коцка.

92. Дрвен квадар со должини на рабовите природни броеви има волумен 250 cm^2 . Се пила тој е расечен на два дела кои се две еднакви коцки. Колкава е плоштината на квадарот?
93. Сад со форма на коцка со раб 7 cm е до горе полн со вода. Во него се става полна бронзена коцка, при што дел од водата во поголемиот сад претекува. Определи ја плоштината на бронзената коцка, ако волуменот на водата која останала во големата коцка е 335 cm^3 .
94. Во фискултурна сала со должина 15 m и ширина 120 dm има 90 спортисти. Определи ја висината на салата, ако се знае дека за секој спортист има по 8 m^3 воздух.
95. Должината на заедничкиот раб на два од сидовите на еден квадар е еднаква на 4 cm , а нивните плоштини се еднакви на 6 cm^2 и 24 cm^2 . Определи го волуменот на овој квадар.
96. Пливачки базен во форма на правоаголен паралелопипед има должина 60 m , ширина 200 dm и длабочина 2 m . Колку литри вода е потребно за да се наполни базенот така што нивото на водата да 200 mm под горниот раб?
97. Кога водата замрзнува, таа го зголемува својот волумен за $\frac{1}{11}$. Во цилиндрична чаша со дијаметар 6 cm е ставено парче мраз во форма на паралелопипед со димензии $0,45 \text{ dm}$, $2,4 \text{ cm}$ и 33 mm . Колку сантиметри ќе биде нивото на водата во чашата по топењето на разот?
98. Плоштината на прав кружен цилиндар е 4 пати поголема од плоштината на основата. Изрази ја висината на конусот преку радиусот на основата.
99. Правилна четириаголна призма со збир на должините на рабовите 84 cm е поделена на една голема коцка и 4 мали коцки. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДААЧИТЕ

I АЛГЕБРА

I.1. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

1. Збирот на 21 различни природни броеви е 231. Определи го средниот по големина број.

Решение. Имаме:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 + 21 = (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \dots + (10 + 11) + 21 \\ = 11 \cdot 21 = 231.$$

Според тоа, броевите од условот на задачата се 1, 2, 3, ..., 18, 19, 20, 21. Во спротивно, бидејќи броевите се различни при замена на било кој од овие броеви со друг различен број се добива збир поголем од 231. Значи, средниот по големина број е 11.

2. Колку броеви има на левата страна во равенството

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots = 2013.$$

Решение. Од двете страни на равенството одземаме 1 и го добиаме равенството

$$-3 + 5 - 7 + 9 - \dots = 2012.$$

Броевите на левата страна ги групираме последователно по парови, при што разликата на броевите во секој пар е еднаква на 2. Според тоа, во последното равенство има $2012 : 2 = 1006$ парови. Конечно, бројот на сите броеви во почетното тавенство е $2 \cdot 1006 + 1 = 2013$.

3. На која цифра завршува разликата

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99.$$

Решение. Бидејќи $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99$ има една десетка во множењето, овој производ завршува на цифрата 0. Понатаму, $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99$ е непарен број бидејќи сите се непарни и има петка во производот, па затоа завршува на цифрата 5. Конечно, разликата $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99$ завршува на цифрата 5.

4. Бројот 1 000 000 претстави го како производ на два броја, во чиј запис не се појавува ниту една нула.

Решение. Бројот 1 000 000 можеме да го претставиме како

$$1000000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5).$$

Ако x и y се природни броеви такви што $xy = 1000000$ и во записот на бројот x не се појавува цифрата 0, тогаш 2 е делител на x , но 5 не е делител на x или 2 не е делител на x , а 5 е делител на x . Ако 2 е делител на x и 5 е делител на x , тогаш 10 е делител на x и цифрата на единиците на x е нула. Иста е дискусијата и за бројот y . Според тоа единствени можности се:

$$x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \text{ и } y = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$$

или

$$y = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \text{ и } x = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625.$$

Во секој случај бараното претставување е

$$1000000 = 64 \cdot 15625.$$

5. Збирот на пет различни природни броеви е 2015. Определи ја најголемата можна вредност на најмалиот од овие броеви.

Решение. Не е можно бараната вредност да е поголема или еднаква на 402. Имено, најмалиот можен збир на пет различни броја кои се поголеми или еднакви на 402 е

$$402 + 403 + 404 + 405 + 406 = 2020 > 2015.$$

Најголемата можна вредност на најмалиот собирок е 401 бидејќи

$$401 + 402 + 403 + 404 + 405 = 2015.$$

6. Бројот 2015 е запишан како збир на различни природни броеви. Колку најмногу собирци може да има во тој збир?

Решение. Ако во збирот има 63 или повеќе собирци, тогаш збирот не е помал од збирот на природните броеви од 1 до 63, односно од збирот

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 61 + 62 + 63 &= 63 + (1 + 62) + (2 + 61) + \dots + (31 + 32) \\ &= 32 \cdot 63 = 2016 > 2015. \end{aligned}$$

Според тоа, бројот на собирците не може да биде поголем од 62. Најголемиот број собирци е 62. На пример, доволно е да ги собереме природните броеви од 1 до 61 и бројот 124. Добиваме

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 59 + 60 + 61 + 124 &= 61 + (1 + 60) + (2 + 59) + \dots + (30 + 31) + 124 \\ &= 31 \cdot 61 + 124 = 2015. \end{aligned}$$

7. Пресметај го збирот

$$11 + 13 + 15 + \dots + 2009 + 2011.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 11+13+15+\dots+2009+2011 &= 1+3+5+\dots+2011-(1+3+5+7+9) \\ &= (1+2011)+(3+2009)+\dots+(1005+1007)-25 \\ &= 2012 \cdot 503 - 25 = 1012011, \end{aligned}$$

бидејќи од од 1 до 2011 има 1006 непарни броеви, а од 1 до 1005 има 503 непарни броеви.

8. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$25^{2009} + 36^{2009} + 49^{2009}.$$

Решение. Бидејќи $5 \cdot 5 = 25$, сите степени на бројот 5 имаат цифра на единици 5. Слично, бидејќи $6 \cdot 6 = 36$, сите степени на бројот 6 имаат цифра на единици 6. Понатаму, од $9 \cdot 9 = 81$, $1 \cdot 1 = 1$ и $9 \cdot 1 = 9$ следува дека непарните степени на бројот 9 имаат цифра на единици 9.

Сега, цифрата на единиците на збирот $25^{2009} + 36^{2009} + 49^{2009}$ е еднаква на цифрата на единиците на збирот $5^{2009} + 6^{2009} + 9^{2009}$ (Зошто?), па затоа таа е еднаква на цифрата на единиците на збирот $5 + 6 + 9 = 20$, т.е. е еднаква на 0.

9. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$2020^0 + 2018^{2021}.$$

Решение. Имаме, $2020^0 = 1$ и

$$2018^1 = 2018, \quad 2018^2 = \dots 4, \quad 2018^3 = \dots 2, \quad 2018^4 = \dots 6, \quad 2018^5 = \dots 8, \dots$$

Тоа значи дека

$$2018^{2020} = (2018^4)^{505} = (\dots 6)^{505} = \dots 6,$$

па затоа

$$2018^{2021} = \dots 6 \cdot 2018 = \dots 8.$$

Конечно, цифрата на единиците на бројот $2020^0 + 2018^{2021}$ е $1 + 8 = 9$.

10. Ако меѓу цифрите на било кој двоцифрен број со еднакви цифри, се вметнат две нули, добиениот број е 91 пат поголем од дадениот. Докажи!

Решение. Нека $\overline{aa} = 10a + a = 11a$ е дадениот двоцифрен број. Новодобиениот четирицифрен број е

$$\overline{a00a} = 1000a + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + a = 1001a.$$

Јасно

$$\overline{a00a} : \overline{aa} = 1001a : 11a = 91,$$

што требаше и да се покаже.

11. Дешифрирај го множењето:

$$\begin{array}{r} \times \quad * \quad * \\ * \quad 8 \\ \hline + \quad * \quad * \\ * \quad * \quad * \end{array}$$

а) $* \quad * \quad * \quad *$

$$\begin{array}{r} \times \quad * \quad * \quad * \\ * \quad * \quad 8 \\ \hline + \quad * \quad * \quad * \\ * \quad 1 \quad * \quad 7 \end{array}$$

б) $* \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *$

Решение. а) Првиот множител помножен со 8 дава двоцифрен број. Тоа е можно само ако тој множител не е поголем од 12 ($13 \cdot 8 = 104$ е трицифрен број). Од друга страна производот на првиот множител и цифрата на десетките на вториот множител е трицифрен број, што е можно само ако цифрата на десетките на вториот множител е 9 (кога е 8 производот е двоцифрен број). Освен тоа, првиот множител е поголем или еднаков на 12 ($9 \cdot 11 = 99$ е двоцифрен број). Значи, првиот множител е 12, а вториот множител е 98 и имаме

$$12 \cdot 98 = 1176.$$

б) Од записот на множењето следува дека цифрата на десетките на вториот множител е 0. Како и во а) заклучуваме дека цифрата на стотките на вториот множител е 9 (производот на првиот множител со 8 е трицифрен број, а производот на првиот множител со цифрата на стотките на вториот множител е четирицифрен број). Според тоа, вториот множител е 908. Цифрата на единиците на првиот множител мора да е 3 (само 3 помножен со 9 има цифра на единици 7). Забележавме дека производот на првиот множител со 8 е трицифрен број, па затоа првиот множител е помал од 125. Но, производот на првиот множител со 9 е четирицифрен број, па затоа првиот множител мора да е поголем од 111. Бидејќи првиот множител завршува на 3, тој може да биде 113 или 123. Со проверка добиваме дека само 123 ги задоволува условите на задачата и тогаш

$$123 \cdot 908 = 111684.$$

1.2. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ. ДРОПКИ

12. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3,24 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,36$,

б) $(2,16 + 3,24) \cdot 0,5 - (1,5 + 1,2)$,

в) $7,86 \cdot (3,1 - 2,1) - 4,86$,

г) $(0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,9) \cdot (0,2 + 0,3)$,

д) $(4,38 - 0,15 - 0,13) \cdot (2,22 + 0,28)$.

Решение. а) Имаме:

$$3,24 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,36 = 0,5 \cdot (3,24 + 0,36) = 0,5 \cdot 3,6 = 1,8.$$

б) Имаме:

$$(2,16 + 3,24) \cdot 0,5 - (1,5 + 1,2) = 5,4 \cdot 0,5 - 2,7 = 2,7 - 2,7 = 0.$$

в) Имаме:

$$7,86 \cdot (3,1 - 2,1) - 4,86 = 7,86 \cdot 1 - 4,86 = 3.$$

г) Имаме:

$$(0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,9) \cdot (0,2 + 0,3) = (0,24 + 0,72) \cdot 0,5 = 0,96 \cdot 0,5 = 0,48.$$

д) Имаме:

$$(4,38 - 0,15 - 0,13) \cdot (2,22 + 0,28) = 4,1 \cdot 2,5 = 10,25.$$

13. Ако $M = 1,12 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,88$, $N = (2,03 - 0,17 + 0,14) \cdot (0,12 + 0,18)$ и $P = 3 - 1,79$, определи го најголемиот децимален број кој се запишува со четири цифри (во целиот и децималниот дел) и кој е поголем од $M + N$, но е помал од P .

Решение. Имаме

$$M = 1,12 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,88 = 0,3 \cdot (1,12 + 0,88) = 0,3 \cdot 2 = 0,6;$$

$$N = (2,03 - 0,17 + 0,14) \cdot (0,12 + 0,18) = (2,03 - 0,3) \cdot 0,3 = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ и}$$

$$P = 3 - 1,79 = 1,21.$$

Затоа $M + N = 1,2 < 1,21 = P$, од што следува дека бараниот број е 1,209.

14. Колку е $\frac{31}{71}$ од бројот

$$\frac{1 - \frac{1}{3} \cdot (2 + \frac{1}{6})}{3\frac{2}{5} + \frac{10}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5 \cdot \frac{15}{4} \cdot 2,5 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{6}{11} \cdot (\frac{8}{3} - \frac{7}{4}) \cdot 7} ?$$

Решение. Да ја пресметаме прво вредноста на дадениот израз. Имаме:

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\frac{1}{3}(2+\frac{1}{6})}{3\frac{2}{5}+\frac{10-1}{3}\cdot\frac{4}{8}} \cdot 8\frac{3}{5} - \frac{1,5\cdot\frac{15}{4}\cdot 2,5+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{7}+\frac{12}{11}(\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{4})\cdot 7} = \frac{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{6}}{\frac{17}{5}+\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{13}}{\frac{8}{7}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{7}{7}} \\
& = \frac{1-\frac{2}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{13}{4}\cdot\frac{8}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{1+\frac{9}{13}}{\frac{8}{7}+\frac{6}{7}} \\
& = \frac{\frac{11}{13}}{\frac{17}{5}+\frac{26}{5}} \cdot \frac{43}{5} - \frac{\frac{22}{13}}{\frac{14}{7}} \\
& = \frac{5\cdot 11}{13\cdot 43} \cdot \frac{43}{5} - \frac{11}{13} = 0.
\end{aligned}$$

Конечно, $\frac{31}{71}$ од 0 е 0.

15. Определи ја 2008-та цифра по децималната записка во децималниот запис на бројот $\frac{1}{41}$.

Решение. Децималниот запис на бројот $\frac{1}{41}$ е $\frac{1}{41} = 0,(02439)$. Значи групата од пет цифри 02439 по децималната записка периодично се повторува бесконечно многу пати. Бројот 2008 можеме да го запишеме во облик $2008 = 5 \cdot 401 + 3$. Според тоа, 2008-та цифра по децималната записка е третата цифра од периодата, т.е. тоа е цифрата 4.

16. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{1}{2} \cdot 17 + 13 \cdot \frac{1}{2}$,

б) $(\frac{2}{3} + \frac{4}{9})(\frac{13}{8} - \frac{5}{4})$,

в) $3\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{7}{20}$,

г) $\frac{1}{3} \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,07 - \frac{23}{100}$,

д) $(0,76 - 0,25 + 3 \cdot 0,19)(2,1 - 3 \cdot \frac{7}{10}) + 2,14 - 2,1$.

Решение. а) Имаме:

$$\frac{1}{2} \cdot 17 + 13 \cdot \frac{1}{2} = (17 + 13) \cdot \frac{1}{2} = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

б) Имаме:

$$(\frac{2}{3} + \frac{4}{9})(\frac{13}{8} - \frac{5}{4}) = \frac{6+4}{9} \cdot \frac{13-10}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{12}.$$

в) Имаме:

$$3\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{7}{20} = \frac{16}{5} \cdot \frac{57}{8} - \frac{56}{20} = \frac{114}{5} - \frac{14}{5} = 20.$$

г) Имаме:

соодветно кратење не може да се појави бројот 5 како множител, а овој број фигурира како множител и во именителот на $\frac{1}{10}$ и во именителот на $-\frac{1}{10}$.

21. Ако $A = (3,6 + 2,1) - (2,4 - 1,8) \cdot 0,9$ и $B = 2 \cdot (5,3 - 0,8) - 0,9 \cdot (2,4 - 1,8)$, определи ја разликата $B - A$?

Решение. Имаме

$$A = (3,6 + 2,1) - (2,4 - 1,8) \cdot 0,9 = 5,7 - 0,6 \cdot 0,9 = 5,7 - 0,54 = 5,16 \text{ и}$$

$$B = 2 \cdot (5,3 - 0,8) - 0,9 \cdot (2,4 - 1,8) = 2 \cdot 4,5 - 0,9 \cdot 0,6 = 9 - 0,54 = 8,46,$$

па затоа

$$B - A = 8,46 - 5,16 = 3,3.$$

22. Определи го најмалиот децимален број кој се наоѓа меѓу 0,2 и 0,3 и има три цифри по децималната запирка. Подели го овој број со 3 и од добиениот број одземи го количникот 0,07.

Решение. Најмалиот децимален број кој се наоѓа меѓу 0,2 и 0,3 и има три цифри по децималната запирка е 0,201. Имаме

$$0,201 : 3 - 0,07 : 10 = 0,067 - 0,007 = 0,06.$$

23. Ако $\frac{2a+5}{b-5} = 2 + \frac{5}{a}$, тогаш за колку е b поголем од a ?

Решение. Од $\frac{2a+5}{b-5} = 2 + \frac{5}{a}$ добиваме $\frac{2a+5}{b-5} = \frac{2a+5}{a}$, па затоа $b-5 = a$, од каде наоѓаме $b = a + 5$. Според тоа, b е за 5 поголем од a .

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$222,21 - (201,1 - 20,11) : 0,9 - (2,011 - 0,2011) : 0,09.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 222,21 - (201,1 - 20,11) : 0,9 - (2,011 - 0,2011) : 0,09 &= \\ &= 222,21 - 180,99 : 0,9 - 1,8099 : 0,09 \\ &= 222,21 - 201,1 - 20,11 \\ &= 21,11 - 20,11 = 1. \end{aligned}$$

25. Определи ја цифрата која е на 2011-тото место по децималната запирка на бројот $\frac{2}{7}$.

Решение. Имаме,

$$\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,(285714),$$

што значи дека шест цифри по децималната запирка периодично се повторуваат. Сега, бидејќи $2011 = 6 \cdot 335 + 1$ заклучуваме дека на 2011-тото место по децималната запирка на бројот $\frac{2}{7}$ е првата цифра од периодата, т.е. цифрата 2.

26. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $21 - 3,75 : (1,8 + 3,2) + 20,21$,

б) $5,5 \cdot 55,5 : 2\frac{1}{2}$,

в) $9,4 : 4,7 - (-9,9 - 2,7 : (-3)) \cdot 0,4$.

Решение. а) Имаме:

$$21 - 3,75 : (1,8 + 3,2) + 20,21 = 21 - 3,75 : 5 + 20,21 = 21 - 0,75 + 20,21 \\ = 41,21 - 0,75 = 40,46.$$

б) Имаме:

$$5,5 \cdot 55,5 : 2\frac{1}{2} = 5,5 \cdot 55,5 : \frac{5}{2} = 5,5 \cdot 55,5 \cdot \frac{2}{5} \\ = 1,1 \cdot 55,5 \cdot 2 = 1,1 \cdot 111 = 122,1.$$

в) Имаме:

$$9,4 : 4,7 - (-9,9 - 2,7 : (-3)) \cdot 0,4 = 2 - (-9,9 + 0,9) \cdot 0,4 \\ = 2 - (-9) \cdot 0,4 \\ = 2 + 3,6 = 5,6.$$

27. Иван составил четири броја така што првиот број е 20,13, а останатите три ги добил со поместување на децималната запирка преку една цифра на десно и потоа го пресметал нивниот збир. Потоа составил втора група од 4 броја, спазувајќи го истото правило, но овој пат децималната запирка ја поместувал во лево. Колку пати првиот збир е поголем од вториот?

Решение. Првиот збир е:

$$20,13 + 201,3 + 2013 + 20130 = 22364,43,$$

а вториот збир е:

$$20,13 + 2,013 + 0,2013 + 0,02013 = 22,36443.$$

Имаме,

$$22364,43 : 22,36443 = 1000,$$

што значи дека првиот збир е 1000 пати поголем од вториот.

28. Пресметај ја дробката $\frac{b}{a}$ каде

$$a = 0,1 + \frac{1}{5} + 0,3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 0,7 + \frac{4}{5} + 0,9 + 1 + 1,1 + \frac{6}{5} + 1,3 \text{ и}$$

$$b = 324,19 + 80,9 \cdot 324,19 - 81,9 \cdot 323,19.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a &= 0,1 + \frac{1}{5} + 0,3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 0,7 + \frac{4}{5} + 0,9 + 1 + 1,1 + \frac{6}{5} + 1,3 \\ &= (0,1 + 1,3) + (0,2 + 1,2) + (0,3 + 1,1) + (0,4 + 1) + \\ &\quad + (0,5 + 0,9) + (0,6 + 0,8) + 0,7 \\ &= 6 \cdot 1,4 + 0,7 = 9,1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b &= 324,19 + 80,9 \cdot 324,19 - 81,9 \cdot 323,19 \\ &= 324,19 \cdot (1 + 80,9) - 81,9 \cdot 323,19 \\ &= 81,9 \cdot (324,19 - 323,19) \\ &= 81,9 \cdot 1 = 81,9. \end{aligned}$$

Според тоа, $\frac{b}{a} = \frac{81,9}{9,1} = 9$.

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $4,44 - \frac{9}{20} \cdot (4,37 - \frac{9}{20} \cdot (4,4 - 4,5 \cdot 0,4))$,

б) $-12 : (6 \cdot 5) + (15 : (-3)) \cdot (-2)$,

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned} A &= 4,44 - \frac{9}{20} \cdot (4,37 - \frac{9}{20} \cdot (4,4 - 4,5 \cdot 0,4)) \\ &= 4,44 - 0,45 \cdot (4,37 - 0,45 \cdot (4,4 - 1,8)) \\ &= 4,44 - 0,45 \cdot (4,37 - 0,45 \cdot 2,6) \\ &= 4,44 - 0,45 \cdot (4,37 - 1,17) \\ &= 4,44 - 0,45 \cdot 3,2 = 4,44 - 1,44 = 3. \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} -12 : (6 \cdot 5) + (15 : (-3)) \cdot (-2) &= -12 : 30 + (-5) \cdot (-2) = -\frac{2}{5} + 10 \\ &= -0,4 + 10 = 9,6. \end{aligned}$$

30. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 2) + 2) + 2) + 2) \cdot$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 2) + 2) + 2) + 2) &= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 2) + 2) + 2) \\ &= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{1}{2} (\frac{5}{4} + 2) + 2) + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{4} + 2 \right) + 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{13}{8} + 2 \right) + 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{29}{8} + 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{29}{16} + 2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{61}{16} = \frac{61}{32}.
 \end{aligned}$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $-3 \cdot |-4| - 12 : 3^{-1} + 1$,

б) $(9 - 6) : 6 + 8 \cdot 4^{-1} : 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 2,4 : (6 \cdot 4 - 23)$.

Решение. а) Имаме:

$$-3 \cdot |-4| - 12 : 3^{-1} + 1 = -3 \cdot 4 - 12 \cdot 3 + 1 = -12 - 36 + 1 = -47.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}
 (9 - 6) : 6 + 8 \cdot 4^{-1} : 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 2,4 : (6 \cdot 4 - 23) &= \\
 &= 3 : 6 + 2 : 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 2,4 : (24 - 23) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 2,4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{8}{125} - \frac{24}{10} = \frac{125 + 16 - 600}{250} = \frac{459}{250}.
 \end{aligned}$$

32. Определи го бројот на цифрите по децималната запирка во децималниот запис на дропката $\frac{1}{1024000}$.

Решение. Од $1024 = 2^{10}$ следува $1024000 = 2^{10} \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{13} \cdot 5^5$, па

затоа $\frac{1}{1024000} = \frac{1}{2^{13} \cdot 5^3} = \frac{5^{10}}{2^{13} \cdot 5^{13}} = \frac{5^{10}}{10^{13}}$. Според тоа, децималниот запис на

дадена дробка се добива кога децималната запирка на бројот 5^{10} се помести за бројот на нулите во бројот 10^{13} , односно за 13 места. Значи, во дадената дробка по децималната запирка има 13 цифри.

33. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{12^3 + (-4^2)^3}{2^9} \cdot 2^{(-1)(-2)}$,

б) $\frac{64^{-2} \cdot (-125)^3}{-10^2 \cdot (-25)^4 \cdot (-4)^{-8}}$,

в) $6 - 2^2 \cdot (36 - 36 : 3^2)$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{12^3+(-4^2)^3}{2^9} \cdot 2^{(-1)(-2)} &= \frac{(3 \cdot 4)^3+(-(2^2)^2)^3}{2^9} \cdot 2^2 = \frac{3^3 \cdot (2^2)^3+(-2^4)^3}{2^9} \cdot 2^2 \\ &= \frac{3^3 \cdot 2^6 - 2^{12}}{2^9} \cdot 2^2 = \frac{2^6(3^3-2^6)}{2^7} = \frac{3^3-2^6}{2} \\ &= \frac{27-64}{2} = -\frac{37}{2}.\end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{64^{-2} \cdot (-125)^3}{-10^2 \cdot (-25)^4 \cdot (-4)^{-8}} &= \frac{-4^8 \cdot 125^3}{-10^2 \cdot 25^4 \cdot 64^2} = \frac{(5^3)^3 \cdot (2^2)^8}{(2 \cdot 5)^2 \cdot (5^2)^4 \cdot (2^6)^2} \\ &= \frac{5^9 \cdot 2^{16}}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^8 \cdot 2^{12}} = \frac{5^9 \cdot 2^{16}}{2^{14} \cdot 5^{10}} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}6 - 2^2 \cdot (36 - 36 : 3^2) &= 6 - 4 \cdot (36 - 36 : 9) = 6 - 4 \cdot (36 - 4) \\ &= 6 - 4 \cdot 32 = 6 - 128 = -122.\end{aligned}$$

34. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{14 \cdot 2^{-7} + 2^{-6}}{5 \cdot 2^{-3} - 8 \cdot 2^{-4}} + \frac{9^3 \cdot 63^{-3} \cdot 14}{-56^{-2} \cdot 2^5},$

б) $\frac{6^6 + 2 \cdot 6^7}{6^5} + \frac{-3^2 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-1)^0}{(-2)^{-5} \cdot 9^1 \cdot (-1)^2},$

в) $\frac{(-3)^{2013} - 3(-3)^{2010}}{(-3)^{2012} + 2(-3)^{2011}},$

г) $\frac{125^3 \cdot 64^{-2}}{-25^4 \cdot 10^2 \cdot (-4)^{-8}} + \frac{125^2 \cdot 64^{-1}}{-25^3 \cdot 10 \cdot (-4)^{-6}}.$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{14 \cdot 2^{-7} + 2^{-6}}{5 \cdot 2^{-3} - 8 \cdot 2^{-4}} + \frac{9^3 \cdot 63^{-3} \cdot 14}{-56^{-2} \cdot 2^5} &= \frac{2^{-7}(14+2)}{2^{-7}(5 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3)} - \frac{9^3 \cdot 56^2 \cdot 14}{63^3 2^5} = \frac{16}{2^3(5 \cdot 2 - 8)} - \frac{9^3 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 2 \cdot 7}{7^3 \cdot 9^3 \cdot 2^5} \\ &= \frac{16}{8 \cdot 2} - \frac{8^2 \cdot 2}{2^5} = \frac{16}{16} - \frac{128}{32} = 1 - 4 = -3.\end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{6^6 + 2 \cdot 6^7}{6^5} + \frac{-3^2 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-1)^0}{(-2)^{-5} \cdot 9^1 \cdot (-1)^2} &= \frac{6^5(6+2 \cdot 6^2)}{6^5} + \frac{-3^2 \cdot (-2)^5 \cdot (-1)^0}{(-2)^3 \cdot 9^1 \cdot (-1)^2} \\ &= 6 + 2 \cdot 6^2 + \frac{-9 \cdot (-2)^2}{9} = 78 - 4 = 74.\end{aligned}$$

в) Имаме:

$$\frac{(-3)^{2013} - 3(-3)^{2010}}{(-3)^{2012} + 2(-3)^{2011}} = \frac{(-3)^{2013} + (-3)^{2011}}{(-3)^{2012} + 2(-3)^{2011}} = \frac{(-3)^{2011}((-3)^2 + 1)}{(-3)^{2011}(-3+2)} = \frac{9+1}{-1} = -10.$$

г) Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{125^3 \cdot 64^{-2}}{-25^4 \cdot 10^2 \cdot (-4)^{-8}} + \frac{125^2 \cdot 64^{-1}}{-25^3 \cdot 10 \cdot (-4)^{-6}} &= -\frac{5^9 \cdot (-4)^8}{5^8 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 64^2} - \frac{5^6 \cdot (-4)^6}{5^6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 64} \\ &= -\frac{5^9 \cdot 2^{16}}{5^{10} \cdot 2^{14}} - \frac{4^6}{2 \cdot 5 \cdot 4^3} = -\frac{4}{5} - \frac{4^3}{2 \cdot 5} \\ &= -\frac{4}{5} - \frac{32}{5} = -\frac{36}{5}.\end{aligned}$$

35. На местата на секоја свездичка во равенствата $43,*.8=***$ стави по една цифра така што ќе добиеш точно равенство.

Решение. Бидејќи производот не е децимален број заклучуваме дека единствена можност за најлевата свездичка е цифрата 5, т.е. равенството има облик $43,5 \cdot 8=***$. Понатаму, ако на местото на свездичката во вториот множител е бројот 2 или поголем број, тогаш производот ќе биде четирицифрен број, што не е можно. Значи, равенството има облик $43,5 \cdot 18=***$, односно $43,5 \cdot 18=783$.

I.3. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

36. Реши ја равенката:

а) $5,975 - (x - 89,6) = 4,095$,

б) $13 - 3 \cdot (2x - 5) - 4 - 6 : 2 = 3$.

Решение. а) Имаме:

$$5,975 - (x - 89,6) = 4,095$$

$$5,975 - x + 89,6 = 4,095$$

$$x = 5,975 + 89,6 - 4,095$$

$$x = 91,48.$$

б) Имаме:

$$13 - 3 \cdot (2x - 5) - 4 - 6 : 2 = 3,$$

$$13 - 6x + 15 - 4 - 3 = 3,$$

$$6x = 18,$$

$$x = 3.$$

37. Пресметај ја вредноста на изразот $3x + x : 3 + 3,3$, каде x е решено на равенката

$$3,8x - 20,5 = 2,3.$$

Решение. Имаме:

$$3,8x - 20,5 = 2,3$$

$$3,8x = 22,8$$

$$x = 6,$$

па затоа

$$3x + x : 3 + 3,3 = 3 \cdot 6 + 6 : 3 + 3,3 = 18 + 2 + 3,3 = 23,3.$$

38. Реши ја равенката:

$$\text{а) } -x : (-0,2)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \frac{125}{49} + ((-2)^{-1} + \frac{1}{8})^0,$$

$$\text{б) } (-5 - 3^2 : x) \cdot 2^{-1} = 10 - 7 \cdot 2,$$

$$\text{в) } 3(6x - 5) - 5(5x - 2) - 36 - 6 : 2 = 6$$

Решение. а) Имаме:

$$-x : (-0,2)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \frac{125}{49} + ((-2)^{-1} + \frac{1}{8})^0,$$

$$-x : \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot \frac{125}{49} + 1,$$

$$-x : \left(-\frac{5}{1}\right)^2 = \frac{49}{25} \cdot \frac{125}{49} + 1,$$

$$-x : 25 = 5 + 1,$$

$$x = -150.$$

б) Имаме:

$$(-5 - 3^2 : x) \cdot 2^{-1} = 10 - 7 \cdot 2$$

$$(-5 - 9 : x) \cdot \frac{1}{2} = -4$$

$$-5 - 9 : x = -8$$

$$-9 : x = -3$$

$$x = 3.$$

в) Имаме:

$$3(6x - 5) - 5(5x - 2) - 36 - 6 : 2 = 6,$$

$$18x - 15 - 25x + 10 - 36 - 3 = 6,$$

$$-7x = 50,$$

$$x = -\frac{50}{7}.$$

39. Реши ја равенката:

$$\left(\frac{25x}{4} + 378 : 9\right) : 3 + 69 = 100.$$

Решение. Имаме:

$$\left(\frac{25x}{4} + 378 : 9\right) : 3 + 69 = 100,$$

$$(\frac{25x}{4} + 42) : 3 = 100 - 69,$$

$$\frac{25x}{4} + 42 = 93,$$

$$\frac{25x}{4} = 51,$$

$$25x = 204,$$

$$x = 8,16.$$

40. Ако $x + 2 = -3^2 + 9\frac{2}{3}$ и $(3y - 1) : (-4)^{-1} = |-16|$, пресметај ја вредноста на изразот $P = -x^y$.

Решение. Имаме

$$x + 2 = -3^2 + 9\frac{2}{3}$$

$$x = -9 + 9\frac{2}{3} - 2$$

$$x = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$(3y - 1) : (-4)^{-1} = |-16|,$$

$$3y - 1 = 16 \cdot (-4)^{-1},$$

$$3y = 1 - 4,$$

$$y = -1,$$

па затоа

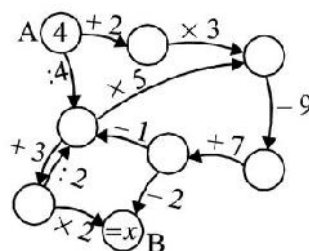
$$P = -(-\frac{4}{3})^{-1} = -\frac{3}{4}.$$

41. Тргувајќи од А треба да се стигне во В, движејќи се во насоката на стрелките така што крајниот резултат x при извршување на наведените операции ќе биде најмалиот можен број. Кој е тој број?

Решение. Последователно имаме:

$$4 : 4 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow 5 - 9 = -4$$

$$\Rightarrow -4 + 7 = 3 \quad 3 - 2 = 1.$$



Лесно се проверува дека тоа е најмалиот можен број.

42. Дропките $a = \frac{1212}{2828}$, $b = \frac{33}{110}$, $c = \frac{9009}{24024}$ подреди ги по големина.

Решение. Имаме:

$$a = \frac{1212}{2828} = \frac{12 \cdot 101}{28 \cdot 101} = \frac{4}{7},$$

$$b = \frac{33}{110} = \frac{3 \cdot 11}{10 \cdot 11} = \frac{3}{10},$$

$$c = \frac{9009}{24024} = \frac{9 \cdot 1001}{24 \cdot 1001} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Сега, лесно се гледа дека $a > c > b$.

43. Определи ги сите природни броеви a такви што $\frac{2}{3} < \frac{a}{5} < \frac{5}{6}$.

Решение. Бидејќи $\text{NZS}(2,5,6) = 30$ дадените дробки ќе ги прошириме за 10, 6 и 5. Според тоа, неравенствата се $\frac{20}{30} < \frac{6a}{30} < \frac{25}{30}$. Оттука следува $20 < 6a < 30$. Единствен природен број кој ги задоволува дадените неравенства е бројот 4, т.е. $a = 4$.

44. Определи барем една дробка која е поголема од $\frac{2}{3}$ и е помала од $\frac{3}{4}$.

Решение. Нека $\frac{p}{q}$ е дробка таква што $\frac{2}{3} < \frac{p}{q} < \frac{3}{4}$. Од $\text{NZS}(3,4) = 12$, добиваме $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} < \frac{p}{q} < \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ и како 8 и 9 се два последователни природни броја потребно е да направиме уште едно проширување на дадените дробки. Ако дадените дробки ги прошириме со најмал множител, а тоа е 2 добиваме $\frac{16}{24} = \frac{8}{12} < \frac{p}{q} < \frac{9}{12} = \frac{18}{24}$, што значи дека една дробка која ги задоволува условите на задачата е $\frac{p}{q} = \frac{17}{24}$.

Забелешка. Ако последното проширување го направиме со 3, тогаш добиваме $\frac{24}{36} < \frac{p}{q} < \frac{27}{36}$, па добиваме дека дробките $\frac{25}{36}$ и $\frac{26}{36}$ ги задоволуваат условите на задачата. Обиди се да направиш и други проширувања со што ќе добиеш нови дробки кои го задоволуваат условот на задачата.

45. Определи ги целите броеви x за кои бројот $3x + 4$ не е помал од 1 и не е поголем од 13.

Решение. Бидејќи $3 \cdot (-2) + 4 = -2$ и $3 \cdot (-1) + 1 = 1$, заклучуваме дека $x \geq -1$. Понатаму, од $3 \cdot 4 + 4 = 16$ и $3 \cdot 3 + 4 = 13$ заклучуваме дека $x \leq 3$. Според тоа, решение на задачата се броевите $-1, 0, 1, 2, 3$.

46. Определи ги најмалите природни броеви a и b за се исполнети неравенствата $\frac{4,5}{11} < \frac{a}{b} < \frac{5}{11}$.

Решение. За да ги определиме најмалите природни броеви за кои се исполнети дадените неравенства потребно е дробките да ги прошириме така што во броителите и именителите нема да имаме децимален број. Најмалиот број за кој тоа е можно е 2 и притоа добиваме $\frac{9}{22} < \frac{a}{b} < \frac{10}{22}$. Меѓутоа, во случајов броителите на двете дробки се по-

следователните броеви 9 и 10, па затоа ќе направиме уште едно проширување, кое мора да биде со најмалиот можен број, т.е. со бројот 2. Сега добиваме $\frac{18}{44} < \frac{a}{b} < \frac{20}{44}$, па затоа бараните најмали броеви се $a = 19$ и $b = 44$.

47. Определи го бројот на нескратливите дробки со именител 3 кои се поголеми од $\frac{3}{2}$, а се помали од $\frac{7}{2}$.

Решение. Ако x е броителот на дробката, тогаш треба да важи $\frac{3}{2} < \frac{x}{3}$ и $\frac{x}{3} < \frac{7}{2}$, односно $\frac{9}{6} < \frac{2x}{6}$ и $\frac{2x}{6} < \frac{21}{6}$. Оттука се добива $9 < 2x$ и $2x < 21$, односно $4,5 < x < 10,5$. Според тоа, x може да биде 5, 6, 7, 8, 9 и 10 и притоа нескратливи се дробките за $x = 5, 7, 8$ и 10, што значи дека постојат 4 дробки кои ги задоволуваат условите на задачата.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го збирот на сите трицифрени броеви такви што кога ќе се избрише цифрата на стотките се добива точен квадрат на природен број и кога ќе се избрише цифрата на единиците се добива точен квадрат на природен број.

Решение. Двоцифрени броеви кои се точни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Сега доволно е да провериме дали последната цифра на некој од овие броеви е прва цифра на некој друг од овие броеви. Така ги добиваме броевите 164, 364, 649 и 816. Нивниот збир е

$$164 + 364 + 649 + 816 = 1993.$$

2. Определи ги сите четирицифрени броеви за кои при бришење на цифрата на илјадитите се добива точен куб на природен број и при бришење на цифрата на единиците се добива точен куб на природен број.

Решение. Трицифрени броеви кои се точни кубови се:

$$5^3 = 125, \quad 6^3 = 216, \quad 7^3 = 363, \quad 8^3 = 512, \quad 9^3 = 729.$$

Сега доволно е да провериме дали последните две цифри на некој од овие броеви се први две цифри на некој друг од овие броеви. Единствен таков случај е за броевите $5^3 = 125$ и $8^3 = 512$, па затоа постои единствен четирицифрен број со саканото својство и тоа е бројот 5125.

3. Определи ги вредностите на цифрите a и b така што бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 18.

Решение. Бројот $\overline{78a9b}$ е делив со 2 и 9, па затоа $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. За $b=0$ добиваме $7+8+9+a+b=24+a$, па според тоа $a=3$. Аналогно, за $b=2$ добиваме $a=1$, за $b=4$ добиваме $a=8$, за $b=6$ добиваме $a=6$ и за $b=8$ добиваме $a=4$.

4. На местата на a и b , во четирицифрените броеви, стави цифри така да збирот $\overline{323a} + \overline{b410}$ е делив со 9. Определи ги сите можни решенија.

Решение. Збирот на цифрите во дадениот израз е $13 + a + b$. За да бројот биде делив со 9, треба и збирот на неговите цифри да е делив со 9, а имајќи во предвид дека $a + b \leq 18$, имаме можности $a + b = 5$ или $a + b = 14$, каде $b \neq 0$. Тогаш секој од подредените парови: $(0, 5), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 9), (9, 5), (6, 8), (8, 6)$ и $(7, 7)$ е решение.

5. Пред и зад бројот 10 напиши по една цифра, така што добиениот број е делив со 36 и количникот на тој број со 36 е број запишан со различни цифри од дадениот број.

Решение. Да го означиме бараниот број со $\overline{a10b}$. Тој број треба да е делив со 36, односно со 4 и со 9. Од условот бројот да е делив со 4 следува дека последната цифра може да биде 0, 4 или 8. Од условот бројот да е делив со 9 следува дека $9 \mid (a + 1 + b)$, односно $a \in \{4, 8, 9\}$. Значи, можни се броевите 4104, 8100 и 9108. Бидејќи $4104 : 36 = 114$, $8100 : 36 = 225$ и $9108 : 36 = 253$ следува дека бараните броеви се 8100 и 9108.

6. Лево и десно на бројот 10 допиши му по една цифра така што добиениот четирицифрен број ќе биде делив со 36 и количникот од делењето на добиениот број со 36 ќе биде број запишан со различни цифри.

Решение. Нека $\overline{a10b}$ е добиениот број. Еден број е делив со 36 ако и само ако е делив со 4 и со 9. Од признакот за деливост со 4 следува дека $b \in \{0, 4, 8\}$. Од признакот за деливост со 9 следува дека $9 \mid a + b + 1$. Сега лесно се добиваат следниве решенија: $b = 0, a = 8$; $b = 4, a = 4$ и $b = 8, a = 9$. Бидејќи

$$8100 : 36 = 225, 4104 : 36 = 114 \text{ и } 9108 : 36 = 253$$

заклучуваме дека решение на задачата е бројот 253.

7. Најди го количникот и остатокот при делењето на изразот

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$$

со бројот 35.

Решение. Изразот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$ можеме да го запишеме во следниот облик:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 35 \cdot 2 + 5 &= \\ &= 35 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 35 \cdot 2 + 5 \\ &= 35 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2) + 5. \end{aligned}$$

Според тоа, бараниот количник е

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2 = 13685762,$$

а остатокот е 5.

8. Определи го бројот на сите трицифрени броеви кои се деливи со 15 и чиј збир на цифри е помал или еднаков на 9.

Решение. Од условот во задачата, следува дека 3 е делител на $\overline{abc}$ и 5 е делител на $\overline{abc}$, односно 3 е делител на $a + b + c$ и $c \in \{0, 5\}$. Од вториот услов $a + b + c \leq 9$, добиваме дека ги бараме трицифрените броеви кои завршуваат на 0 или 5, а збирот на нивните цифри е 3, 6 или 9. Ако $c = 0$ ги добиваме следниве броеви: 120, 210, 300, 150, 510, 240, 420, 330, 600, 180, 810, 270, 720, 360, 630, 450, 540 и 900. Ако $c = 5$ ги добиваме броевите: 105, 135, 225, 315 и 405. Значи, вкупно 23 броеви ги исполнуваат условите во задачата.

9. Најди го петцифрениот број, делив со 3, чии што први три цифри формираат број кој е квадрат на некој природен број, а последните три цифри формираат трицифрен број кој е куб на некој природен број.

Решение. Ако бараниот петцифрен број е $\overline{abcde}$ тогаш $\overline{abc}$ е квадрат на некој број и $\overline{cde}$ е куб на некој природен број. Тогаш $\overline{cde} \in \{125, 216, 343, 512, 729\}$. Бидејќи $\overline{abc}$ е квадрат на некој број имаме $c \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, па $\overline{cde} \in \{125, 512\}$. Трицифрени броеви кои се квадрат на природен број со цифра на единици 1 или 5 се: 121, 225, 361, 441, 625, 841 и 961. Бидејќи $a + b + c + d + e = 3k$, бараниот петцифрен број е 22512.

10. Да се најде најголемиот природен број кај кој било кои две соседни цифри, во дадениот редослед, формираат број делив со 23.

Решение. Двоцифрени броеви кои се деливи со 23 се 23, 46, 69 и 92. Ако бројот започнува со 92, тогаш бројот е 923. Ако започнува со 69 имаме дека бројот е 6923, ако започнува со 46 добиваме дека бројот е 46923. Останува можноста кога бараниот број започнува на 23 и добиваме дека е 23. Конечно, бараниот број е 46923.

11. На еден тренинг имало 225 деца и 105 топки. Децата се поделени на групи од по еднаков број деца и на секоја група тренерите им поделиле топки, така што секоја група добила еднаков број топки. Колку

групи се формирани и по колку топки добила секоја група? Колку решенија има задачата?

Решение. Најнапред ги наоѓаме заедничките делители на броевите 225 и 105. Тоа се броевите 1, 3, 5 и 15. Тие го означуваат бројот на групи кои се формирани. Значи, задачата има 4 решенија: 1 група од 225 ученици која добила 105 топки, 3 групи од по $225:3=75$ ученици и секоја група добила по $105:3=35$ топки, 5 групи од по $225:5=45$ ученика и секоја група добила по $105:5=21$ топка, 15 групи од по $225:15=15$ ученика и секоја група добила по $105:15=7$ топки.

12. Определи го збирот на сите непарни трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 140.

Решение. Од разложувањето $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 7$, следува дека трицифрените броеви се составени од цифрите 4, 5 и 7. Непарните трицифрени броеви составени од тие цифри се 457, 475, 547 и 745. Конечно, нивниот збир е еднаков на $457 + 475 + 547 + 745 = 2224$.

13. Дадени се цифрите 0, 1, 3, 4, 5. Со помош на овие цифри запиши ги сите петцифрени броеви со различни цифри, кои се деливи со 4, а не се деливи со 5.

Решение. Нека обликот на бараните броеви е $\overline{abcde}$, при што $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 3, 4, 5\}$ и овие цифри се меѓу себе различни. Бројот $\overline{abcde}$ треба да е петцифрен број, па значи $a \neq 0$. Од $4 \mid \overline{abcde}$, следува $4 \mid \overline{de}$, односно $\overline{de} \in \{04, 40\}$. од $5 \nmid \overline{abcde}$, следува $e \notin \{0, 5\}$. Значи, мора $\overline{de} = 04$, т.е. $d = 0$ и $e = 4$. Остануваат цифрите 1, 3, 5 од кои треба да се формира трицифрениот почеток. Сите можни начини да се направи тоа се $\overline{abc} \in \{135, 153, 315, 351, 513, 531\}$. Значи, бараните петцифрени броеви се 13504, 15304, 31504, 35104, 51304, 53104.

14. Определи ги сите можни вредности на цифрите a и b , така што производот на броевите $\overline{54a}$ и $\overline{63b1}$ да биде делив со 12.

Решение. За да производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ биде делив со 12, треба да биде делив и со 3 и со 4. Бројот $\overline{63b1}$ е непарен број за секој избор на цифрата b , па не може да биде делив со 4, значи треба бројот $\overline{54a}$ да биде делив со 4. Според признакот за деливост со 4, бројот $\overline{54a}$ е

делив со 4 кога двоцифрениот завршеток $\overline{4a}$ е делив со 4, односно само кога $a = 0$, $a = 4$ или $a = 8$.

Ако $a = 0$, тогаш $\overline{54a} = 540$ е број делив и со 3, па цифрата b може да биде било која цифра.

Ако $a = 4$ или $a = 8$, тогаш бројот $\overline{54a} = 544$, односно бројот $\overline{54a} = 548$ не е делив со 3, па производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ е делив со 12 ако бројот $\overline{63b1}$ е делив со 3. Значи, треба збирот на неговите цифри $6 + 3 + b + 1 = 10 + b$ да биде делив со 3, што е исполнето ако $b = 2$, $b = 5$ или $b = 8$.

Според тоа, производот $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ е делив со 12 ако $a = 0$ и $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ или ако $a \in \{4, 8\}$ и $b \in \{2, 5, 8\}$.

15. Да се најде природниот број $\overline{abc}$ кој го исполнува условот

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$$

Решение. Цифрата на единиците на бројот $\overline{abc} + \overline{bc} + c$ е цифрата на единиците на $c + c + c$, односно $c + c + c$ завршува на 7. Единствена можност е $c = 9$. Оттука добиваме дека

$$100a + 20b + 27 = 687$$

односно

$$5a + b = 33.$$

Последната равенка е исполнета ако $a = 5$ и $b = 8$ или $a = 6$ и $b = 3$. Значи бараните броеви се 589 и 639.

16. Определи го природниот број n така што бројот $\frac{2015}{n^2+1}$ е најголемиот можен природен број.

Решение. Бројот $\frac{2015}{n^2+1}$ е природен ако и само ако $n^2 + 1 \mid 2015$. Од друга страна вредноста на една дробка се зголемува кога нејзиниот именител се намалува. За $n = 1$ бројот $\frac{2015}{1^2+1} = \frac{2015}{2}$ не е природен број.

За $n = 2$ добиваме $\frac{2015}{2^2+1} = \frac{2015}{5} = 403$, што значи дека $n = 2$ е решение на задачата.

17. Определи ги четирицифрените точни четврти степени кои стануваат точни квадрати при прецртување на една од цифрите.

Решение. Четирицифрените точни четврти степени се

$$6^4 = 1296, 7^4 = 2401, 8^4 = 4096 \text{ и } 9^4 = 6561.$$

Лесно се проверува дека од овие броеви само 1296 го задоволува условот на задачата, при што при прецртување на цифрата 2 се добива $196 = 14^2$.

18. Определи ги трицифрените броеви, кои се запишуваат со различни цифри и кои намалени за збирот на нивните цифри даваат точен куб.

Решение. Јасно, точните кубови од условот на задачата се најмногу трицифрени броеви кои се деливи со 9, бидејќи секој број намален за збирот на неговите цифри е делив со 9. Значи, задачата се сведува на испитување на броевите: $3^3 = 27$, $6^3 = 216$ и $9^3 = 729$.

Прв случај. Нека $\overline{abc} - (a + b + c) = 27$. Тогаш

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 27, \text{ т.е. } 11a + b = 3,$$

што не е можно, бидејќи a е ненулта цифра.

Втор случај. Нека $\overline{abc} - (a + b + c) = 216$. Тогаш

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 216, \text{ т.е. } 11a + b = 24.$$

Единствена можност е $a = 2$, од каде следува $b = 2$. Последното противречи на условот дека цифрите се различни.

Трет случај. Нека $\overline{abc} - (a + b + c) = 729$. Тогаш

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 729, \text{ т.е. } 11a + b = 81.$$

Единствена можност е $a = 7$, од каде следува $b = 4$. Според тоа, сите трицифрени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се 740, 741, 742, 743, 745, 746, 748 и 749.

19. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{a2008a}$ ќе биде делив со 12.

Решение. Еден број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Од деливоста со 4 следува дека можни вредности за a се 0, 4 и 8. Но, $a \neq 0$, па затоа можни вредности за a се 4 или 8. Збирот на цифрите на бројот 420084 е 18 и тој е делив со 3, што значи дека овој број е делив со 3, т.е. едно решение на задачата е $a = 4$. Понатаму, збирот на цифрите на бројот 820088 е 26 и како не е делив со 3, заклучуваме дека овој број не е делив со 3.

Конечно, единствено решение на задачата е $a = 4$.

20. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{5237a}$ е делив со 3, но не е делив со 2.

Решение. Збирот на цифрите на број $\overline{5237a}$ е

$$5 + 2 + 3 + 7 + a = 17 + a.$$

За да бројот $\overline{5237a}$ е делив со 3, потребно и доволно е $17 + a$ да биде делив со 3. Според тоа, $a \in \{1, 4, 7\}$. Но, за $a = 4$ бројот $\overline{5237a}$ е парен, па затоа тој е делив со 2. Конечно, бараните вредности за a се 1 и 7.

21. Збирот на три различни двоцифрени природни броја е 87. Определи ги овие броеви, ако еден од нив е делив со 11, еден е делив со 7, а два се деливи со 5.

Решение. Нека a, b, c е бараните броеви. Ако a е делив со 11, тогаш $a = 11k$. Ако претпоставиме дека a е делив и со 5, тогаш $a = 55$. Затоа $b + c = 32$. Ако b е делив со 7, тогаш бидејќи броевите се двоцифрени важи $b = 14$ или $b = 21$, па затоа $c = 18$ или $c = 11$, соодветно. Но, тогаш b и c не се деливи со 5, што е противречност. Според тоа, бројот a не е делив со 5. Ако претпоставиме дека a е делив со 7, тогаш $a = 77$, па затоа $b, c < 10$, што повторно е противречност. Значи, b и c се деливи со 5. Сега, ако b е делив со 5 и со 7, тогаш $b = 35$ или $b = 70$. Јасно, вториот случај не е возможен, бидејќи притоа $c < 10$. Значи, $b = 35$ и притоа $a = 11, 22$ или 33 . Единствена можност c да е делив со 5 е за $a = 22, c = 30$.

Конечно, бараните броеви се $a = 22, b = 35$ и $c = 30$.

22. Даден е природен број a . Ако бројот 17748 го поделиме со a добиваме остаток 3, а ако бројот 7655 го поделиме со a добиваме остаток 4. Определи го бројот a .

Решение. Јасно, броевите $17748 - 3 = 17745$ и $7655 - 4 = 7651$ се деливи со a . Но, $17745 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 13$ и $7651 = 7 \cdot 1093$, па како единствен заеднички делител на двата броја е 7 заклучуваме дека $a = 7$.

II.2. ПРОСТИ БРОЕВИ

23. Определи ги сите петцифрени броеви од облик $\overline{abcda}$ деливи со 45, при што цифрата на местото на стотките е најголемиот едноцифрен прост број. (На различните букви соодветствуваат различни цифри.)

Решение. Еден број е делив со 45, ако тој е делив со 9 и 5. Еден број е делив со 5 ако тој завршува на 0 или 5. Бидејќи бројот почнува на a , цифрата a мора да биде 5. Од условот на задачата цифрата c е еднаква на 7. Еден број е делив со 9 ако збирот на неговите цифри е делив со 9. Па затоа збирот $5+b+7+d+5=17+b+d$ мора да биде делив со 9, збирот $b+d$ мора да биде еднаков на 1 или 10.

Ако $b+d=1$, тогаш броевите се 50715 и 51705.

Ако $b+d=10$, тогаш броевите се 51795, 52785, 54765, 56745, 58725, 59715.

24. Множеството M се состои од сите прости делители на бројот 2310. Колку броеви се производ на точно два елементи од множеството M ?

Решение. Прости делители на бројот 2310 се 2, 3, 5, 7 и 11, и нивниот производ е точно 2310. Значи, $M = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, а множеството од попарни производи на елементите од M е множеството

$$A = \{6, 10, 14, 22, 15, 21, 33, 35, 55, 77\},$$

и тоа има 10 елементи. Значи, бараниот број е 10.

25. Определи ги простите броеви кои за секој избор на цифрите a и b се делители на шестцифрениот број $\overline{ababab}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{ababab} &= \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} \\ &= \overline{ab} \cdot (10000 + 100 + 1) \\ &= \overline{ab} \cdot 10101 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}.\end{aligned}$$

Според тоа, бараните прости броеви се 3, 7, 13 и 37.

26. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата имаме дека $n \cdot p = 2010$, односно $n \cdot p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Од овде вредноста на бројот p може да биде 2, 3, 5, 67. Па, конечно за $p=2$, $n=1005$, за $p=3$, $n=670$, за $p=5$, $n=402$, за $p=67$, $n=30$.

Втор начин. Бројот 2010 можеме да го запишеме во облик $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, па според тоа p може да биде 2, 3, 5, 67.

а) за $p = 2$ имаме $\frac{1}{2} = \frac{n}{2010}$, односно $n = 1005$,

б) за $p = 3$ имаме $\frac{1}{3} = \frac{n}{2010}$, односно $n = 670$,

в) за $p = 5$ имаме $\frac{1}{5} = \frac{n}{2010}$, односно $n = 402$,

г) за $p = 67$ имаме $\frac{1}{67} = \frac{n}{2010}$, односно $n = 30$.

27. Дропката $\frac{59}{143}$ претстави ја како збир на две прави нескратливи дропки.

Решение. Бројот 143 можеме да го запишеме како $143 = 11 \cdot 13$. Според тоа, дропката $\frac{59}{143}$ може да се претстави во облик

$$\frac{59}{143} = \frac{59}{11 \cdot 13} = \frac{x}{11} + \frac{y}{13}.$$

Ако десната страна на последното равенство го сведеме на најмал заеднички именител, добиваме $\frac{13x+11y}{143} = \frac{59}{143}$. Две дропки кои имаат еднаков именител се еднакви ако и само ако имаат еднаков броител. Бидејќи именителите на двете дропки во последното равенство се еднакви, тие ќе бидат еднакви ако им се еднакви броителите. Ако ги изедначиме броителите ја добиваме равенката $13x + 11y = 59$.

Со директно пребарување се добива дека единствено решение на последната равенка е $x = 2$, $y = 3$. Значи, $\frac{59}{143} = \frac{2}{11} + \frac{3}{13}$.

28. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

Решение. Бидејќи a и b се прости броеви поголеми од 3, значи дека тие се непарни, и тогаш нивниот збир и нивната разлика се броеви деливи со 2, од каде следува дека $4 \mid (a+b)(a-b)$. Бидејќи a и b се прости броеви, тие се од облик $3k \pm 1$. Ги имаме следните случаи, ако $a = 3k + 1$ и $b = 3m + 1$, тогаш $a - b = 3(k - m)$, ако $a = 3k + 1$ и $b = 3m - 1$, тогаш $a + b = 3(k + m)$, ако $a = 3k - 1$ и $b = 3m + 1$, тогаш $a + b = 3(k + m)$, и ако $a = 3k - 1$ и $b = 3m - 1$, тогаш $a - b = 3(k - m)$. Значи, $3 \mid (a+b)(a-b)$. Конечно, од $4 \mid (a+b)(a-b)$ и $3 \mid (a+b)(a-b)$ добиваме дека $12 \mid (a+b)(a-b)$, што значи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

29. Производот на четири последователни природни броеви е 17160. Кои се тие броеви?

Решение. Бројот 17160 ќе го разложиме на прости множители. Имаме:

$$17160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13.$$

Броевите 11 и 13 се прости, па затоа еден од преостанатите два множители мора да е 12, а како 5 е делител на производот, другиот множител мора да е 10. Навистина,

$$17160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 13 = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13.$$

30. Нека производот на цифрите на петцифрениот број $\overline{abcde}$ е еднаков на 2160. Ако $a > b > c > d > e$, определи ја најголемата можна вредност на збирот $a + b + c + d + e$.

Решение. Бројот 2160 го разложуваме на прости множители и добиваме $2160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Лесно се гледа дека производот на петте броја a, b, c, d, e такви што $a > b > c > d > e$ е 2160, а вредноста на збирот $a + b + c + d + e$ е најголема во случај кога

$$2160 = 1 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 5 = 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1.$$

Притоа имаме

$$a + b + c + d + e = 9 + 8 + 6 + 5 + 1 = 29.$$

31. Во едно семејство има шест деца. Бројот на годините на секое дете е прост број. Првите пет деца се 2, 6, 8, 12 и 18 години постари од најмалото дете. Најмалото дете има помалку од 11 години. Колку години има секое дете во ова семејство?

Решение. Јасно најмалото дете е постаро од 2 години. Ако најмалото дете е 3 години, тогаш третото по возраст дете треба да има $3 + 6 = 9$, што не е можно бидејќи 9 не е прост број. Ако најмалото дете е 7 години, тогаш четвртото по возраст дете треба да има $7 + 8 = 15$ години, што не е можно бидејќи 15 не е прост број. Останува уште да провериме дали најмалото дете може да има 5 години, бидејќи само уште 5 е прост број кој е помал од 11. Тогаш другите пет деца треба да имаат $2 + 5 = 7, 6 + 5 = 11, 8 + 5 = 13, 12 + 5 = 17$ и $18 + 5 = 23$ и тоа се прости броеви.

Конечно, децата во ова семејство имаат 5, 7, 11, 13, 17 и 23 години.

32. Колку делители има бројот 2016?

Решение. Бројот 2016 го разложуваме на прости множителители и добиваме:

$$2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Според тоа, сите делители на бројот 2016 се:

1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 12; 14; 16; 18; 21; 24; 28; 32; 36; 42; 48; 56; 63; 72; 84; 96; 112; 126; 144; 168; 224; 252; 288; 336; 514; 672; 1008 и 2016.

Значи, бројот 2016 има 36 делители.

II.3. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

33. Определи го природниот број a кој при делење со 4, 6, 8 и 12 дава остаток 3 и ги задоволува неравенствата $220 \leq a \leq 260$.

Решение. Бараниот број е од видот $a = kb + 3$, каде бројот b е делив со броевите 4, 6, 8 и 12, т.е.

$$b = \text{NZS}(4, 6, 8, 12) = 24.$$

Значи, $a = 24k + 3$ и бидејќи $220 \leq a \leq 260$, добиваме дека $k = 10$. Според тоа, $a = 24 \cdot 10 + 3 = 243$.

34. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга 1600 метри било 80 метри. Заради одредена потреба, тие биле разместени така што новото растојание помеѓу столбовите е 50 метри. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

Решение. Бидејќи $\text{NZS}(80, 50) = 400$, добиваме дека неразместени столбови ќе бидат оние кои се на првото место и на секои 400 метри. Значи, вкупно неразместени столбови ќе има $1 + 1600 : 400 = 5$.

35. Жабата има скок долг 50 cm, зајакот 75 cm, а кенгурот 90 cm. Кое е најмалото растојание на кое сите ќе направат цел број на скокови. Колку скока тогаш направило секое од животните?

Решение. Доволно е да се најде најмалиот заеднички содржател на броевите 50, 75 и 90. Бидејќи

$$\text{NZS}(50, 75, 90) = 450$$

најмалото растојание на кое тие ќе направат цел број на скокови е 450 cm. Притоа, жабата ќе направи 9 скока, зајакот 6, а кенгурот 5 скока.

36. Определи ги простите броеви p за кои важи

$$\frac{1}{5} < \frac{p}{14} < \frac{4}{7}.$$

Решение. Бидејќи $\text{NZS}(5,14,7) = 70$, неравенството може да го запишеме во видот

$$\frac{14}{70} < \frac{5p}{70} < \frac{40}{70},$$

од каде добиваме $14 < 5p < 70$. Од последното неравенство следува $2,8 < p < 8$, па затоа бараните прости броеви се 3, 5 и 7.

37. Во одделението на Марко на писмената работа по математика биле зададени 4 задачи. Една третина од присутните ученици неточно решиле една задача, една четвртина неточно решиле две задачи, една шестина неточно решиле три задачи и една осмина неточно ги решиле сите четири задачи. Колку ученици точно ги решиле сите четири задачи, ако во одделението учат не повеќе од 30 ученици?

Решение. Од условот на задачата следува дека бројот на учениците во одделението на Марко треба да е делив со 3, 4, 6 и 8, односно со $\text{NZS}(3,4,6,8) = 24$. Бидејќи бројот на учениците е помал или еднаков на 30 заклучуваме дека во одделението на Марко учат 24 ученици. Тоа значи, дека $24:3=8$ ученици згрешиле една задача, $24:4=6$ ученици згрешиле две задачи, $24:6=4$ ученици згрешиле три задачи и $24:8=3$ ученици ги згрешиле сите четири задачи. Според тоа, $24 - (8 + 6 + 4 + 3) = 3$ ученици точно ги решиле сите четири задачи.

38. Колку броеви е можно најмногу да се постават на местото на n така што ќе важи $\text{NZS}(3,18,n) = 90$?

Решение. Имаме:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad \text{и} \quad 3 = 3.$$

Сега, третиот број n мора да биде делив со 5 и може да се комбинира со останатите делители на бројот 90 кои се различни од 5. Можни вредности на n се:

$$5, 10, 15, 30, 45 \text{ и } 90.$$

Според тоа, на местото на бројот n може да се постават 6 броја.

39. На парадата на кралските мускетари, гледајќи дека не можат да се наредат во редови од по 11 мускетари, началникот Д'Артањан решил да ги нареди мускетарите во редови од по 10 мускетари, но се

покажало дека во последниот ред останало едно слободно место. Потоа тој се обидел да ги нареди во редови од по 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 мускетари, но секој пат во последниот ред останувало по едно слободно место. На крај мускетарите поминале во колона по еден, што предизвикало бурна смеа кај посетителите. Определи колку мускетари учествувале на парадата, ако се знае дека не биле повеќе од 7000.

Решение. Нека x е бројот на мускетари кои учествувале на парадата. Од условот на задачата имаме дека $x + 1$ се дели со 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, од каде следува дека

$$x + 1 = \text{NZS}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot k = 2520 \cdot k,$$

т.е. $x = 2520k - 1$. За $k \geq 3$ се добива дека $x \geq 2520 \cdot 3 - 1 = 7559 > 7000$, од каде следува дека $k = 1$ или $k = 2$. За $k = 1$, се добива дека $x = 2519$ и овој број е делив со 11, па единствената можност е $k = 2$, односно $x = 2520 \cdot 2 - 1 = 5039$ бидејќи овој број не е делив со 11.

Значи, на парадата учествувале 5039 мускетари.

40. Седум рибари ловеле риба на едно исто место на реката Пчиња. Првиот ловел секој ден, вториот преку еден ден, третиот преку два дена, итн. седмиот преку шест дена. На 16.11.2020 година седумте рибари заедно ловеле риба. На кој датум најрано тие повторно заедно ќе ловат риба?

Решение. За да определиме по колку дена седумте рибари за прв пат повторно заедно ќе ловат риба, треба да најдеме најмал заеднички содржател на броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Имаме:

$$\text{NZS}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420,$$

што значи дека точно по 420 дена рибарите повторно заедно ќе ловат риба. Ако земеме предвид дека од 17.11.2020 година до 16.11.2021 година има точно 365 дена, а од 17.11.2021 година до 16.12.2021 година има точно 30 дена, лесно се добива дека рибарите првпат повторно заедно ќе ловат риба на 10.01.2022 година.

41. На постојка истовремено пристигнале трамвај, автобус и тролејбус. По колку време трите превози средства најрано повторно ќе се сретнат на истата постојка, ако според возниот ред трамвајот прави цел круг за 1 час и 30 минути, автобусот за 2 часа и тролејбусот за 1 час? (Се претпоставува дека возниот ред строго се почитува.)

Решение. Времето на трамвајот е 90 минути, на автобусот 120 минути и на тролејбусот е 60 минути. Трите превозни средства повторно најрано ќе се сретнат на истата постојка кога за прв пат сите заедно ќе направат цели обиколувања на нивните патеки на движења. Според тоа, треба да најдеме најмал заеднички содржател на броевите 90, 120 и 60. Значи, бидејќи $60 | 120$, бараното време е

$NZS(90,120) = 10 \cdot NZS(9,12) = 10 \cdot 3 \cdot NZS(3,4) = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 360$ минути, односно по $360 : 60 = 6$ часа. За тоа време трамвајот 4 пати ќе ја помине својата патека на движење, автобусот 3 пати и тролејбусот 6 пати ќе ја помине својата патека на движење.

42. Определи го најмалиот природен број кој при делење со броевите 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1, а е делив со 7.

Решение. Имаме: $NZS(2,3,4,5,6) = 60$. Според тоа, броевите кои при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 даваат остаток 1 последователно се $60 + 1 = 61$, $120 + 1 = 121$, $180 + 1 = 181$, $240 + 1 = 241$, $300 + 1 = 301$, $360 + 1 = 361$, ... Првиот од овие броеви кој е делив со 7 е бараниот најмал број, а тоа е бројот $301 = 7 \cdot 43$.

43. Чекорот на Марко е долг $0,9\text{ m}$, а на неговиот син Станко е долг 500 mm . Ако тргнат од едно исто место, по колку сантиметри повторно за првпат ќе стапнат на едно исто место?

Решение. Имаме, $0,9\text{ m} = 90\text{ cm}$ и $500\text{ mm} = 50\text{ cm}$. За да Марко и Станко повторно за првпат стапнат на едно исто место, тие треба за прв пат да направат цел број чекори. Јасно, тоа ќе биде кога ќе изодат пат еднаков на најмалиот заеднички содржател на должините на нивните чекори, изразени во исти мерни единици. Според тоа, тие за првпат повторно ќе стапнат на едно исто место по

$$NZS(90,50) = 10 \cdot NZS(9,5) = 10 \cdot 9 \cdot 5 = 450\text{ cm}.$$

Притоа Марко ќе направи $450 : 90 = 5$ чекори, а Станко ќе направи $450 : 50 = 9$ чекори.

44. Колку броеви е можно најмногу да се постават на местото на n така што ќе важи $NZS(16,50,n) = 1200$?

Решение. Имаме:

$$1200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5, \quad 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \text{и} \quad 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Сега, третиот број n мора да биде делив со 3 и може да се комбинира со останатите делители на бројот 1200. Можни вредности на n се:

3, 6, 12, 15, 24, 30, 48, 60, 75, 120, 150, 300, 600 и 1200.

Според тоа, на местото на бројот n може да се постават 14 броја.

45. За секој природен број n со A да го означиме најмалиот заеднички содржател на броевите $n, n+1$ и $n+2$, а со B најмалиот заеднички содржаел на броевите $n+3, n+4$ и $n+5$. Бројот C е најголемиот заеднички делител на броевите A и B .

а) Определи ги A , B и C за $n=15$.

б) Докажи дека за секој природен број n бројот C е помал или еднаков на 60.

Решение. а) За $n=15$ добиваме $A=4080$, $B=3420$ и $C=60$.

б) Нека p е прост делител на C . Тогаш p е делител на A , што значи дека p е делител на некој од броевите $n, n+1$ и $n+2$. Аналогно, p е делител на B , па затоа p е делител на некој од броевите $n+3, n+4$ и $n+5$. Но, тогаш p мора да е делител на разликата на еден од броевите $n+3, n+4$ и $n+5$ и еден од броевите $n, n+1$ и $n+2$, па затоа тој не може да биде поголем од 5. Оттука следува дека простите делители на бројот C се 2, 3 и 5. Останува да провериме колку најмногу пати тие може да учествуваат во разложувањето прости множители на бројот C . Во ова разложувањето не може да има повеќе од една петка, бидејќи во спротивен случај и двата броја A и B трба да се деливи со 25. Но, производот на три последователни броја (а со тоа и нивниот NZS) е делив со 25 само ако некој од броевите е делив со 25. Меѓутоа меѓу шест последователни броја $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ најмногу еден е делив со 25. Според тоа, во разложувањето на C може да има најмногу една петка. На потполно аналоген начин, разгедувајќи ги 3 и 9, се добива дека во разложувањето на C може да има најмногу една тројка. Останува да го преброиме најголемиот можен број двојки. Ако искоритиме дека меѓу шест последователни броја точно три се парни и дека меѓу нив најмногу еден е делив со 8, заклучуваме дека C не може да е делив со 8. Затоа во разложувањето на C на прости множители има најмногу две двојки, една тројка и една петка, т.е. $C \leq 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 15. Определи го намаленикот.

Решение. Нека намаленикот е a , а намалителот е b . Тогаш разликата е $a - b$, па затоа важи $a + b + a - b = 17$, т.е. $2a = 17$, од каде добиваме $a = 8,5$.

2. Броевите $x = a - 2b + 2010$, $y = 2b - 3c + 2010$ и $z = 3c - a + 2010$ се последователни цели броеви. Определи ги x , y и z .

Решение. Нека

$$a - 2b + 2010 = k - 1 \quad 2b - 3c + 2010 = k \quad \text{и} \quad 3c - a + 2010 = k + 1$$

каде $k \in \mathbb{Z}$. Ако ги собереме овие идентитети добиваме $3k = 3 \cdot 2010$ од каде следува дека $k = 2010$, од каде лесно се добива дека $x = 2009$, $y = 2010$ и $z = 2011$.

3. За нумерирање на страниците на еден учебник потребни се 411 цифри. Колку страници има учебникот?

Решение. Книгата има 173 страници. За едноцифрените страници се потрошени 9 цифри, за двоцифрените страници потрошени се $90 \cdot 2 = 180$ цифри. Значи остануваат $411 - 189 = 222$ цифри, а тоа се $222 : 3 = 74$ страници, кои можат да се нумерираат со преостанатите цифри.

Значи книгата има $9 + 90 + 74 = 173$ страници.

4. При множење на два броја, на едниот број ученикот му ја заменил цифрата на единиците 4 со 1, а другиот го запишал точно. Така, множејќи точно, ученикот добил 525 наместо 600. Кои броеви ги множел?

Решение. Од условот на задачата имаме дека кога првиот број ќе се намали за $4 - 1 = 3$, тогаш производот се намалува за $600 - 525 = 75$. Значи, тој број е $75 : 3 = 25$. За вториот број добиваме $600 : 25 = 24$. Значи, ученикот ги множел броевите 25 и 24.

5. Никола замислил три различни ненулни цифри. Мартин ги запишал сите двоцифрени броеви користејќи ги тие цифри. Збирот на сите бро-

еви кои ги запишал Мартин е еднаков на 231. Кои цифри ги замислил Никола?

Решение. Нека a , b и c се трите цифри кои ги замислил Никола. Од тие три цифри можат да се запишат девет двоцифрени броеви:

$$\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{cc}, \overline{ab}, \overline{ba}, \overline{bc}, \overline{cb}, \overline{ac}, \overline{ca}.$$

Нивниот збир е:

$$\begin{aligned} (10a + a) + (10b + b) + (10c + c) + (10a + b) + (10b + a) + (10b + c) + \\ + (10c + b) + (10a + c) + (10c + a) = 33a + 33b + 33c \\ = 33(a + b + c) = 231 \end{aligned}$$

Оттука, $a + b + c = 7$. Имајќи во предвид дека цифрите a , b и c се различни, цифрите кои ги замислил Никола се 1, 2, 4 бидејќи други можности нема.

6. Андреј замислил број на кој откако му го додал бројот 3, добиениот збир го поделил со 3 и од количникот одзел 3, го добил бројот 3. Кој број го замислил Андреј?

Решение. *Прв начин.* Нека замислениот број е x . Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{x+3}{3} - 3 = 3,$$

чие решение е $x = 15$.

Втор начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Пред да го одземе бројот 3, Андреј го добил бројот $3 + 3 = 6$. Потоа, пред да подели со 3, тој го добил бројот $3 \cdot 6 = 18$, а пред да додаде 3, тој го замислил бројот $18 - 3 = 15$.

7. Ана замислила број. Од него го одзела збирот на бројот 6 и најголемиот трицифрен број кој е делив со 5, по што го добила најмалиот четирицифрен број кој е делив со 3. Кој број го замислила Ана?

Решение. Најголемиот трицифрен број кој е делив со 5 е бројот 995. Најмалиот четирицифрен број кој е делив со 3 е 1002. Така ја добиваме равенката

$$x - (6 + 995) = 1002,$$

чие решение е $x = 2003$. Значи, Ана го замислила бројот 2003.

8. Ако на еден двоцифрен број му се допише цифрата 5 еднаш на почетокот, а другпат на крајот, се добиваат два различни броја чија разлика е 252. Кој е тој двоцифрен број?

Решение. Нека бараниот двоцифрен број го означиме со $\overline{xy} = 10x + y$.

Тогаш од условот на задачата имаме две можности.

Првата можност е:

$$\overline{5xy} - \overline{xy5} = 252,$$

од каде што добиваме:

$$5 \cdot 100 + x \cdot 10 + y - (x \cdot 100 + y \cdot 10 + 5) = 252$$

$$500 + 10x + y - 100x - 10y - 5 = 252 \Leftrightarrow 243 = 90x + 9y$$

$$27 \cdot 9 = 9(10x + y)$$

$$27 = 10x + y$$

Значи, во овој случај бројот е 27.

Втората можност е $\overline{xy5} - \overline{5xy} = 252$, од каде со постапка аналогна со претходниот случај добиваме дека $10x + y = 83$.

Конечно, бараните двоцифрени броеви се 27 и 83.

9. Дадени се педесет природни броеви, од кои половината од нив не надминуваат 50, а другата половина се поголеми од 50, но помали од 100. Разликата на било кои два од дадените броеви не е 0 или 50. Да се најде збирот на тие броеви.

Решение. Ако од дадените природни броеви, поголеми од 50, одземеме 50, ниту една од добиените разлики нема да е еднаква на некој од останатите броеви, кое следува од тоа дека разликата на било кои два од дадените броеви не е 50. Тогаш 25-те разлики и 25-те дадени броеви, помали од 50 се различни природни броеви од 1 до 50, т.е. тоа се сите природни броеви од 1 до 50. Нивниот збир е

$$1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51 = 1275,$$

па збирот на сите дадени броеви е $1275 + 25 \cdot 50 = 1275 + 1250 = 2525$.

10. Дадена е дробката $\frac{57}{71}$. Кој број треба да се одземе од броителот и истиот да се додаде на именителот па вредноста на дробката после скратувањето да е $\frac{1}{3}$?

Решение. Треба да се реши следнава равенка: $\frac{57-x}{71+x} = \frac{1}{3}$. Значи,

$$3(57 - x) = 71 + x,$$

$$171 - 3x = 71 + x,$$

$$171 - 71 = x + 3x,$$

$$100 = 4x,$$

$$x = 25.$$

11. За колку проценти ќе се промени една дробка ако броителот и се зголеми 57,5%, а именителот и се зголеми 12,5%?

Решение. Ако почетната дробка е $\frac{a}{b}$, тогаш новата дробка е $\frac{1,575a}{1,125b}$.

Бараниот процент е еднаков на

$$\frac{\frac{1,575a}{1,125b} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} \cdot 100 = \frac{1,575 - 1,125}{1,125} \cdot 100 = \frac{450}{1125} \cdot 100 = 40\%.$$

12. Збирот на три броја е 300. Првиот е два пати поголем од вториот, а третиот е еднаков на збирот од првиот и вториот. Кои се тие броеви?

Решение. Од условот на задачата имаме $a + b + c = 300$, $a = 2b$, $c = a + b$. Од првата и третата равенка следува дека $c = 300 : 2 = 150$, а со тоа и $a + b = 150$. Потоа, од последнава и втората равенка се добива $3b = 150$, од каде $b = 150 : 3 = 50$. Конечно, од втората равенка имаме $a = 2b = 2 \cdot 50 = 100$. Значи, бараните броеви се 100, 50 и 150.

13. Матеј го собрал најголемиот трицифрен природен број со најмалиот цел двоцифрен број и добиениот збир го помножил со разликата на спротивниот број на бројот $\frac{-2}{3}$ и реципрочната вредност на бројот 3.

Кој број го добил Матеј?

Решение. Најголемиот трицифрен природен број е 999, а најмалиот цел двоцифрен број е -99. Според тоа, Матеј го добил бројот

$$(999 + (-99)) \cdot \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 900 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 900 \cdot \frac{1}{3} = 300.$$

14. Бројот 54 запиши го како збир на четири броја такви што ако на првиот собирук додадеш 2, од вториот одземеш 2, третиот го помножиш со 2 и четвртиот го поделиш со 2, секогаш ќе добиеш ист резултат. Кои се тие броеви?

Решение. Нека броевите се a, b, c, d . Според условот на задачата имаме $a + 2 = b - 2 = 2c = d : 2$, па затоа $a = 2c - 2$, $b = 2c + 2$ и $d = 4c$. Ако замениме во $a + b + c + d = 54$ добиваме

$$2c - 2 + 2c + 2 + c + 4c = 54, \text{ т.е. } c = 6.$$

Според тоа, бараните броеви се $a = 10, b = 14, c = 6$ и $d = 24$.

15. При собирање на два броја Иван згрешил, така што допишал 1 на крајот на едниот собирук и добил 6546, наместо точниот збир 2000. Определи ја разликата на почетните броеви?

Решение. Нека a b се бараните броеви. Тогаш

$$\begin{cases} a + b = 2000 \\ \overline{a1} + b = 6546. \end{cases}$$

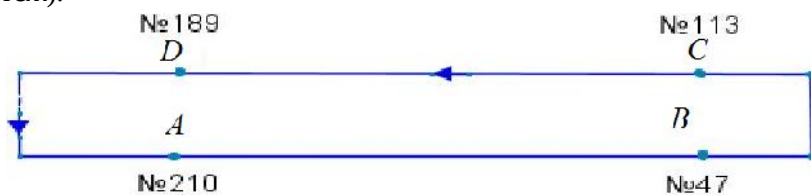
Според тоа,

$$\begin{cases} a + b = 2000 \\ 10a + 1 + b = 6546, \end{cases}$$

од каде ако од втората равенка ја одземеме првата ја добиваме равенката $9a = 4545$, чие решение е $a = 505$. Сега, $b = 2000 - 505 = 1495$, па затоа бараната разлика е $1495 - 505 = 900$.

16. Кабините на една жичара се нумерирани. Во еден момент се покажало дека кабината No47 е наспроти кабината No113, а кабината No113 е наспроти кабината No210.

Решение. Бројот на кабините меѓу No210 и No189 (без овие броеви) е 75, колку што е бројот на кабините меѓу No210 и No47 (види цртеж).



Но, од кабината No1 до кабината No46 има 46 кабин, па затоа од кабината No210 до крајот остануваат уште $75 - 46 = 29$ кабин. Според тоа, бројот на сите кабин е еднаков на $210 + 29 = 239$.

III.2. ПАЗАРУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

17. Цената на некој материјал е намалена за 52%. После тоа намалување, за 240 денари може да се купи 1 метар материјал повеќе отколку што би можело да се купи пред намалувањето за 270 денари. Одреди ја цената на тој материјал пред намалувањето.

Решение. Нека ја означиме со x цената на материјалот, а со y количеството на материјалот во метри. После намалувањето имаме:

$$x - 52\%x = x - 0,52x = 0,48x.$$

Тогаш

$$240 = 0,48x \cdot y + 0,48x.$$

Пред намалувањето имаме: $270 = xy$, па затоа

$$240 = 0,48 \cdot 270 + 0,48x$$

$$240 = 129,6 + 0,48x$$

$$x = 230$$

Цената на материјалот пред намалувањето била 230 денари.

18. Никола купил 4 различни моливи. Сите моливи, без првиот, заедно чинат 42 денари, сите моливи, без вториот, заедно чинат 40 денари, сите моливи, без третиот, заедно чинат 38 денари и сите моливи, без четвртиот заедно чинат 36 денари. Колку чини секој од моливите посебно?

Решение. Нека со a , b , c , d ги означиме цените на првиот, вториот, третиот и четвртиот молив, соодветно. Ако ги собереме сите суми, од условот на задачата ќе добиеме дека Никола би платил 156 денари доколку сака да купи по три од секој од моливите. Тоа значи дека Никола, всушност платил вкупно 52 денари за моливите. Оттука, јасно е дека $a = 10$ денари, $b = 12$ денари, $c = 14$ денари и $d = 16$ денари.

19. Михаела си купила збирка по математика за 720 денари и констати-рала дека потрошените пари се 40% од парите кои и останале. Колку пари имала Михаела на почетокот и колку пари и останале?

Решение. Нека на Михаела и останале x денари. Тогаш $\frac{40}{100}x = 720$, од каде добиваме $x = 1800$ денари. Според тоа, Михаела на почетокот имала $720 + 1800 = 2520$ денари.

20. Во продавница за чевли пар машки и пар женски чевли имале една иста цена. Потоа машките чевли биле намалени за 5%, а женските биле зголемени за 15%. Колку пари во моментот чинат машките, а колку женските чевли ако разликата на цената на двата пара чевли е еднаква на 600 денари?

Решение. Нека x е почетната цена на чевлите. По промената на цените, машките чевли чинат $\frac{95}{100}x$, а женските чинат $\frac{115}{100}x$ денари. Затоа $\frac{115}{100}x - \frac{95}{100}x = 600$, од каде добиваме $x = 3000$ денари. Според тоа, по промената на цените машките чевли чинат $\frac{95}{100} \cdot 3000 = 2850$ денари, а женските чевли чинат $\frac{115}{100} \cdot 3000 = 3450$ денари.

21. Ако цената на дадена стока се намали за 20%, за колку проценти ќе се зголеми купувната моќ на населението за таа стока?

Решение. Ако почетната цена е x денари, по нејзиното намалување таа ќе биде $0,8x$ денари. Со заштедените $0,2x$ денари може да се купат $\frac{0,2x}{0,8x} = \frac{1}{4}$ делови повеќе од оваа стока. Последното значи дека купувната моќ во однос на оваа стока се зголемува за $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$.

22. Пабло купил 550 грама пршута по цена од 10,60 евра за килограм и 650 грама кашкавал по цена од 8,80 евра за килограм. Тој на продавачот му дал банкнота од 20 евра. Колку пари му вратил продавачот?

Решение. За пршутата Пабло требало да плати $0,55 \cdot 10,60 = 5,83$ евра, а за кашкавалот $0,65 \cdot 8,8 = 5,72$ евра. Пабло дал банкнота од 20 евра, што значи дека продавачот му вратил $20 - (5,83 + 5,72) = 8,45$ евра.

23. Елена купила 4 нотези и 6 пенкала и платила 8,40 евра, а Иван купил 1 нотез и 1 пенкало и платил 1,50 евра. Колку пари чинат 2 нотеза и 1 пенкало.

Решение. Бидејќи 1 нотез и 1 пенкало чинат 1,50 евра, добиваме дека 4 нотези и 4 пенкала чинат $4 \cdot 1,50 = 6$ евра. Според тоа, 2 пенкала чинат $8,40 - 6 = 2,40$ евра, па затоа 1 пенкало чини 1,20 евра. Значи, 1 нотез чини $1,50 - 1,20 = 0,30$ евра. Конечно, 2 нотеза и 1 пенкало чинат $2 \cdot 0,30 + 1,20 = 1,80$ евра.

24. Цената на една математичка книга во книжарницата А на почетокот од месец јануари 2012 година била повисока од цената на истата книга во книжарницата Б. На 15 февруари 2012 година цената на книгата во книжарницата А се намалила за 30%, а цената на истата книга во книжарницата Б се зголемила за 30%. Потоа на 15 март 2012 година,

цената на книгата во книжарницата А се зголемила за 30%, а цената на книгата во книжарницата Б се намалила за 30%. Разликата во цените на книгата после промените на 15 март 2012 година била 273 денари. За колку била цената на математичката книга во книжарницата А повисока од цената на истата книга во книжарницата Б на почетокот од месец јануари 2012 година?

Решение. Нека цената на книгата во книжарницата А на почетокот од месец јануари 2012 година била x , а цената на истата книга во книжарницата Б била y . Ако цената z се намали за 30%, новата цена ќе биде $z - 30\%z = z - 0,3z = 0,7z$, додека ако цената z се зголеми за 30%, новата цена ќе биде $z + 30\%z = z + 0,3z = 1,3z$.

	1 јануари	15 февруари	15 март
книжарница А	x	$0,7 \cdot x$	$1,3 \cdot 0,7 \cdot x = 0,91 \cdot x$
книжарница Б	y	$1,3 \cdot y$	$0,7 \cdot 1,3 \cdot y = 0,91 \cdot y$

Дадено е дека $x > y$, и затоа

$$0,91x - 0,91y = 0,91(x - y) = 273$$

$$x - y = \frac{273}{0,91} = 300$$

Цената на математичката книга во книжарницата А, на почетокот од месец јануари 2012 година, била повисока од цената на истата книга во книжарницата Б за 300 денари.

25. Дедо Стамен од својот овоштарник набрал 258 килограми круши и заминал на пазар. Тој ден еден дел од нив продал. Ако продадел уште 15 kg би му останале уште шестина од вкупното количество круши. Притоа, $\frac{3}{8}$ од продадените круши и уште 5 kg ги продал претпладне по цена 30 ден/kg. Попладне ја зголемил цената, и добил $1\frac{5}{8}$ пати повеќе пари одколку од крушите што ги продал претпладне. По која цена дедо Стамен ги продал крушите попладне?

Решение. Дедо Стамен тој ден продал $\frac{5}{6} \cdot 258 - 15 = 200$ kg круши.

Претпладнето продал $\frac{3}{8} \cdot 200 + 5 = 80$ kg круши и заработил $80 \cdot 30 = 2400$ денари. Попладнето продал $200 - 80 = 120$ kg круши и за нив добил $2400 \cdot 1\frac{5}{8} = 2400 \cdot \frac{13}{8} = 3900$ денари. Тоа значи дека попладнето крушите ги продавал по цена од $3900 : 120 = 32,5$ денари.

26. Маја отишла во книжара да купи две книги. Цената на едната книга била 65%, а цената на другата книга била 57,5% од парите што ги имала. За да ги купи двете книги и недостигале 45 денари. Колку пари имала со себе Маја?

Решение. *Прв начин.* Нека Маја имала со себе x денари. Тогаш, од условот на задачата имаме дека $\frac{65}{100}x + \frac{57,5}{100}x = 45 + x$, односно $65x + 57,5x = 4500 + 100x$, па $22,5x = 4500$, и конечно $x = 200$. Значи, Маја имала 200 денари.

Втор начин. Книгите кои Маја сакала да ги купи биле

$$65\% + 57,5\% = 122,5\%$$

од парите кои ги носела со себе. Значи, и недостигале

$$122,5\% - 100\% = 22,5\%$$

од парите кои ги носела со себе. Од друга страна, според условот на задачата и недостигале 45 денари. Ако Маја носела со себе x денари, ја имаме равенката $\frac{22,5}{100}x = 45$, чие решение е $x = 200$.

Значи, Маја имала 200 денари.

27. Стефан, Филип и Никола понеле на екскурзија вкупно 222 денари. Стефан потрошил $\frac{1}{3}$ од својата сума, Филип $\frac{1}{5}$ од својата сума, а Никола $\frac{7}{15}$ од својата сума. После тоа им останале еднакви суми на пари. По колку пари понел секој од нив на екскурзијата?

Решение. Нека Стефан понел x денари, Филип понел y денари и Никола понел z денари. Од условот на задачата имаме дека

$$x + y + z = 222. \quad (1)$$

По трошењето на парите на Стефан му останале $\frac{2}{3}x$ денари, на Филип му останале $\frac{4}{5}y$ денари, а на Никола му останале $\frac{8}{15}z$ денари. Од условот на задачата имаме дека $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}y = \frac{8}{15}z$, од каде $5x = 6y = 4z$.

Значи $y = \frac{5}{6}x$ и $z = \frac{5}{4}x$, па со замена во (1) се добива

$$x + \frac{5}{6}x + \frac{5}{4}x = 222.$$

Со решавање на последната равенка се добива $x = 72$, од каде

$$y = \frac{5}{6} \cdot 72 = 60 \text{ и } z = \frac{5}{4} \cdot 72 = 90.$$

Значи, Стефан понел 72 денари, Филип понел 60 денари и Никола понел 90 денари.

28. Ана, Николина и Симон биле на излет. За ручек Ана понела 4 кифли, Николина понела 3 кифли, а Симон не понел ништо за јадење. Тројцата кифлите ги поделиле подеднакво, за што Симон им дал на девојчињата 140 денари. По колку пари треба да земе секое девојче за парите се распределат праведно?

Решение. Децата изеле 7 кифли, што значи дека секое дете изело по $\frac{7}{3}$ кифла. Симон за својот дел дал 40 денари, што значи дека тој за една кифла платил по $40 : \frac{7}{3} = 60$ денари. Ана на Симон му дала $4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$ кифли, па затоа таа треба да земе $\frac{5}{3} \cdot 60 = 100$ денари, а Николина треба да земе $140 - 100 = 40$ денари.

29. Ленче решила определена сума пари да стави во касите на нејзините три внуци Горјан, Андреј и Пабло. Во касата на Горјан таа ставила 0,25 од вкупната сума пари и уште 2 евра, во касата на Андреј ставила 0,5 од преостанатите пари без едно евро и во касата на Пабло ставила $\frac{2}{3}$ од преостанатите пари и последните 6 евра. Колку пари Ленче ставила во касата на секој внук?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Бидејќи 6 евра се $\frac{1}{3}$ од парите пред да стави во касата на Пабло добиваме дека Ленче ставила $3 \cdot 6 = 18$ евра во касата на Пабло. Понатаму, во касата на Андреј ставила половина од преостанатите пари без едно евро, што значи дека пред да стави пари во касата на Андреј таа имала $2 \cdot (18 - 1) = 34$ евра. Конечно, $1 - 0,25 = 0,75$ од целата сума изнесува $34 + 2 = 36$ евра, што значи дека Ленче во касите ставила $36 : 0,75 = 36 \cdot \frac{4}{3} = 48$ евра.

Значи, таа во касата на Горјан ставила $48 \cdot 0,25 + 2 = 14$ евра, во касата на Андреј ставила $\frac{48-14}{2} - 1 = 16$ евра и во касата на Пабло ставила $48 - (14 + 16) = 18$ евра.

30. Ана и Симон вкупно имале 48 евра. За $\frac{2}{7}$ од своите пари Ана купила книга, а Симон со $\frac{4}{9}$ од своите пари купил топка. По купувањето им

останале еднакви суми пари. Колку пари чинела топката, а колку книгата?

Решение. Нека Ана имала x евра, а Симон $48 - x$ евра. По купувањата Ана имала $\frac{5}{7}x$ евра, а Симон имал $\frac{5}{9}(48 - x)$ евра. Значи, $\frac{5}{7}x = \frac{5}{9}(48 - x)$, од каде добиваме $x = 21$ евро. Значи, книгата чинела $\frac{2}{7} \cdot 21 = 6$ евра, а топката чинела $\frac{4}{9} \cdot (48 - 21) = 12$ евра.

31. Ана купила 4 нотези и 6 пенкала и платила 9,60 евра, а Иво купил 2 нотеза и 1 пенкало и платил 2,20 евра. Колку евра е поскапо 1 пенкало од 1 нотез?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи 2 нотези и 1 пенкало чинат 2,20 евра, заклучуваме дека два пати повеќе, т.е. 4 нотези и 2 пенкала чинат $2 \cdot 2,20 = 4,40$ евра. Понатаму, 4 нотези и 6 пенкала чинат 9,60 евра, а 4 нотези и 2 пенкала чинат 4,40 евра, па затоа 4 пенкала чинат $9,60 - 4,40 = 5,20$ евра. Според тоа, 1 пенкало чини $5,20 : 4 = 1,30$ евра. Значи, 2 нотези чинат $2,20 - 1,30 = 0,90$ евра, т.е. 1 нотез чини 0,45 евра. Конечно, 1 пенкало е поскапо $1,30 - 0,45 = 0,85$ евра од еден нотез.

Втор начин. Нека нотез чини x евра, а пенкало чини y евра. Од условот на задачата го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 9,60 \\ 2x + y = 2,20 \end{cases}$$

чије решение е $x = 0,45$ и $y = 1,30$. Значи, едно пенкало е поскапо $1,30 - 0,45 = 0,85$ евра од еден нотез.

III.3. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

32. Масата на јајцето на кокошката е 30% од масата на јајцето на пајката, а масата на гускиното јајце е 25% поголема од масата на пајкиното јајце. Познато е дека гускиното јајце има маса 255 грама. Определи ги масите на јајцето на пајката и кокошката.

Решение. Нека x е масата на пајката. Тогаш $1,25x = 255$, т.е. $x = \frac{255}{1,25} = 204$ g. Според тоа, масата на јајцето на кокошката е еднаква на $0,3 \cdot 204 = 61,4$ g.

33. Едно буре е наполнето со вода до $\frac{5}{6}$ од својот волумен. Ако во бурето се налеат уште 10 литри вода, бурето ќе се дополни до $\frac{7}{8}$ од својот волумен. Колку литри вода собира бурето?

Решение. Нека бурето собира x литри вода. Од условот на задачата имаме дека $\frac{5}{6}x + 10 = \frac{7}{8}x$, односно $10 = (\frac{7}{8} - \frac{5}{6}) \cdot x$ т.е. $10 = \frac{1}{24} \cdot x$, од каде $x = 24 \cdot 10 = 240$. Значи, бурето собира 240 литри вода.

34. Во 1000 килограми свежи печурки има 77% вода. По испарување на одредено количество вода, масата на печурките била преполовена. Колку проценти вода содржат сега печурките?

Решение. Во 1000 килограми свежи печурки има 770 килограми вода. По испарувањето на водата масата на печурките се преполовила што значи дека испариле 500 килограми вода. Значи во преостанатите 500 килограми печурки има $770 - 500 = 270$ килограми вода. Значи, сега во печурките има $\frac{270}{500} = 54\%$ вода.

35. Три кокошки и 1 пајка имаат маса колку 2 гуски, а 1 кокошка, 2 пајки и 3 гуски имаат маса 25 kg. Колку килограми е масата на 1 пајка и 1 гуска, ако масата на секоја птица е цел број килограми.

Решение. Нека масата на 1 пајка е x , масата на 1 кокошка е y и масата на 1 гуска е z килограми. Од условот на задачата следува $x + 3y = 2z$ и $2x + y + 3z = 25$. Од втората равенка следува равенката $4x + 2y + 6z = 50$, и ако ја собереме со првата равенка добиваме $5x + 5y + 6z = 50 + 2z$, односно $5x + 5y + 4z = 50$. Сега бидејќи масата на секоја птица е природен број, заклучуваме дека $5 | z$. Единствен природен број z кој ја задоволува последната равенка е $z = 5$, од каде добиваме $5x + 5y = 30$, односно $x + y = 6$. Од друга страна $x + 3y = 10$, од каде добиваме $y = 2$ и $x = 4$. Значи, 1 кокошка има маса 2 kg, една пајка има маса 4 kg и 1 гуска има маса 5 kg. Конечно, 1 пајка и 1 гуска имаат маса 9 kg.

36. Ана, Бојан и Гроздан заедно имаат 114,5 kg. Ана и Бојан заедно имаат 70,5 kg, а Бојан и Гроздан заедно имаат 72,9 kg. Колку килограми има секое дете?

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата следува дека Гроздан има $114,5 - 70,5 = 44 \text{ kg}$, а Ана има $114,5 - 72,9 = 41,6 \text{ kg}$. Значи, Бојан има $70,5 - 41,6 = 28,9 \text{ kg}$.

Втор начин. Нека Ана, Бојан и Гроздан имаат x, y, z килограми, соодветно. Тогаш го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 114,5 \\ x + y = 70,5 \\ y + z = 72,9. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е

$$x = 41,6 \text{ kg}, y = 28,9 \text{ kg} \text{ и } z = 44 \text{ kg}.$$

37. Во една продавница има 45 kg шеќер, кој е во пакувања од 1 kg и $0,5 \text{ kg}$. Во продавницата има 12 пакувања од 1 kg . Колку има пакувања од $0,5 \text{ kg}$?

Решение. Во пакувања од 1 kg се запакувани $12 \cdot 1 = 12 \text{ kg}$ шеќер, што значи дека останатите $45 - 12 = 33 \text{ kg}$ се во пакувања од $0,5 \text{ kg}$. Според тоа, има $33 : 0,5 = 66$ пакувања од $0,5 \text{ kg}$.

38. Еден молер бои 10 m^2 за 35 минути, а друг молер бои 10 m^2 за 42 минути. Молерите почнуваат заедно да бојат две исти згради (со еднакви плоштини). Откако завршил првиот, на вториот му останале уште 520 m^2 за боење. Колкава е плоштината на секоја зград.

Решение. Нека зградите имале површина од $x \text{ m}^2$. Условите на задачата ја даваат равенката

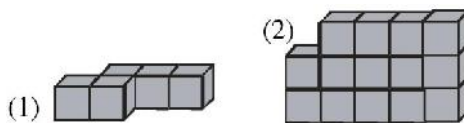
$$\begin{aligned} 35x &= 42(x - 520), \\ 42x - 35x &= 42 \cdot 520, \\ x &= 3120 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

39. Дадени се 5 коцки со еднакви маси и 4 цилиндри со еднакви маси. Вкупната маса на дадените тела е 420 g . Колкава е масата една коцка и на еден цилиндар, ако масата на 3 коцки и 1 цилиндар е еднаква на масата на 2 коцки и 3 цилиндри?

Решение. Ако од 3 коцки и 1 цилиндар и од 2 коцки и 3 цилиндри тргнеме по 2 коцки и 1 цилиндар, добиваме дека масата на 1 коцка е еднаква на масата на 2 цилиндри. Според тоа, масата на 5 коцки е

еднаква на масата на 10 цилиндри. Сега 5 коцки и 4 цилиндри имаат маса 420 g , па затоа $10 + 4 = 14$ цилиндри имаат маса 420 g . Според тоа, еден цилиндар има маса $420 : 14 = 30\text{ g}$, а една коцка има маса $2 \cdot 30 = 60\text{ g}$.

40. Единичните коцки од кои се формирани двете фигури имаат иста маса. Масата на фигурата (1) е $12,5\text{ g}$, а масата на



фигурата (2) е поголема од 43 g и е помала од $47,3\text{ g}$. Определи ја масата на фигурата (2), ако сите коцки на фигурата (1) се видливи на цртежот.

Решение. Фигурата (1) е составена од 5 единечни коцки и има маса $12,5\text{ g}$, што значи дека една единечна коцка има маса $12,5 : 5 = 2,5\text{ g}$. Масата на фигурата (2) е поголема од 43 g и како $17 \cdot 2,5 = 42,5 < 43$ заклучуваме дека фигурата (2) е составена од повеќе од 17 единечни коцки. Понатаму, бидејќи $19 \cdot 2,5 = 47,5 > 47,3$ заклучуваме дека во фигурата (2) има помалку од 19 коцки. Единствен број кој е поголем од 17 и е помал од 19 е 18, што значи дека фигурата (2) е составена од 18 коцки и нејзината маса е $18 \cdot 2,5 = 45\text{ g}$.

41. Растојанието меѓу два велосипедисти е 35 km . Тие почнуваат да се движат едновременно по права линија со постојани брзини: едниот со брзина од 12 km/h , а другиот со брзина од 15 km/h . Определи го збирот на можните растојанија меѓу велосипедистите по 2 часа, ако за време на тие два часа тие не ги менуваат насоките на движење.

Решение. Можни се четири случаи.

Прв случај. Двајцата велосипедисти се движат во спротивни насоки, оддалечувајќи се еден од друг. Тогаш растојанието е

$$35 + 2(12 + 15) = 89\text{ km}$$

Втор случај. Двајцата велосипедисти се движат еден кон друг. Тогаш растојанието по 2 часа ќе биде

$$35 - ((35 - 30) + (35 - 24)) = 19\text{ km}.$$

Трет случај. Двајцата велосипедисти се движат во една иста насока така што велосипедистот со поголема брзина е зад велосипедистот со помала брзина. Тогаш растојанието ќе биде

$$(35 - 30) + 24 = 29\text{ km}.$$

Четврт случај. Двајцата велосипедисти се движат во една иста насока така што велосипедистот со помала брзина е зад велосипедистот со поголема брзина. Тогаш растојанието ќе биде

$$(35 - 24) + 30 = 41 \text{ km}.$$

Според тоа, бараниот збир на растојанијата ќе биде

$$89 + 19 + 29 + 41 = 178 \text{ km}.$$

42. Од едно речно пристаниште едновременно тргнуваат сплав и моторен чамец. Брзината на чамецот по течението на реката е 46 km/h и по еден час чамецот се наоѓа на 40 km од пристаништето. Определи го растојанието меѓу чамецот и сплавот во тој момент.

Решение. Од $40 \text{ km} < 46 \text{ km}$ следува дека чамецот се движи наспроти течението на реката и неговата брзина наспроти течението на реката е 40 km/h . Но, неговата брзина по течението на реката е 46 km/h , па ако брзината на сплавот е v' , тогаш $46 - 40 = 2v'$, т.е. $v' = 3 \text{ km/h}$. Затоа растојанието меѓу чамецот и сплавот е $40 + 3 = 43 \text{ km}$.

43. Во 6:30 часот од градот *A* кон градот *B* тргнал автомобил кој се движел со брзина од $62,25 \text{ km/h}$. Во 9:30 часот од градот *A* во истата насока тргнал втор автомобил со брзина $67,5 \text{ km/h}$. На колкаво растојание во 11:30 часот ќе се наоѓаат еден од друг двата автомобили?

Решение. Првиот автомобил патувал од 6:30 до 11:30, т.е. патувал 5 часа. За тоа време поминал

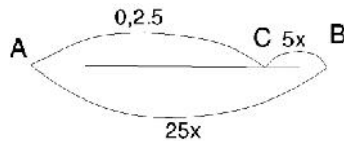
$$5 \cdot 62,25 = 311,25 \text{ km}.$$

Вториот автомобил патувал од 9:30 до 11:30, т.е. патувал 2 часа и за тоа време поминал $2 \cdot 67,5 = 135 \text{ km}$. Според тоа, двата автомобили во 11 часот еден од друг ќе се наоѓаат на

$$311,25 - 135 = 176,25 \text{ km}.$$

44. На секои 12 минути автобус тргнува од постојката, која е пред домот на Андреј, кон училиштето и се движи со просечна брзина од 25 km/h . Едно утро Андреј излегол од дома точно кога автобусот тргнал од постојката и по истиот пат тргнал пешки кон училиштето. Тој се движел со брзина од 5 km/h и на постојката пред училиштето пристигнал едновременно со следниот автобус. Определи го растојанието од домот на Андреј до училиштето.

Решение. Со A да го означиме домот на Андреј, а со B училиштето во кое учи. Нека Андреј се наоѓа во точката C кога вториот автобус тргнува од постојката пред неговиот дом. Ако со x го означиме времето, изразено во часови, за кое Андреј стигнува од C до B , тогаш $\overline{BC} = 5x$ и $\overline{AB} = 25x$. Но, автобусите пред домот на Андреј доаѓаат секои 12 минути, па затоа тој во точката C ќе стигне за 12 минути и како $12 \text{ min} = \frac{1}{5} h = 0,2 h$, добиваме $\overline{AC} = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ km}$. Според тоа,



$$25x = \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 1 + 5x, \text{ т.е. } x = \frac{1}{20} h.$$

Конечно, растојанието од домот на Андреј до училиштето е еднакво на $25 \cdot \frac{1}{20} = 1,25 \text{ km}$.

45. Растојанието меѓу речните пристаништа A и B е 90 km . Моторен чамец од растојанието A до B го минува за 3 часа, а во обратна насока за 5 часа. За колку часа сплав ќе стигне од A до B ?

Решение. Јасно, реката течи од A кон B . Брзината на чамецот по течението на реката е $90:3 = 30 \text{ km/h}$, а во обратна насока е $90:5 = 18 \text{ km/h}$. Ако брзината на чамецот во мирна вода е v , а брзината на реката е u , тогаш добиваме $v + u = 30$ и $v - u = 18$, од каде наоѓаме $2u = v + u - (v - u) = 30 - 18 = 12$, т.е. $u = 6 \text{ km/h}$. Според тоа, бидејќи брзината на сплавот е еднаква на брзината на реката, добиваме дека сплавот растојанието од A до B ќе го помине за $90:6 = 15 h$.

46. Моторциклист се движи со константна брзина и минува покрај километарска табла на која со двоцифрен број е означено во километри растојанието од градот од кој тргнал. Точно по еден час тој поминал покрај километарска табла на кој е запишан број со истите цифри но во обратен редослед. По уште еден час моторциклистот поминал покрај километарска табла која покажува број запишан со истите цифри и една нула помеѓу нив. Определи ја брзината на моторциклистот.

Решение. Разликата на два двоцифрени броја е секогаш помала од 90. Според тоа, бројот на третата километарска табла е од видот $\overline{10x}$, каде x е непозната цифра. Значи, бројот на првата километарска табла е $\overline{1x}$.

Бидејќи $\overline{10x} - \overline{1x} = 90$, заклучуваме дека брзината на моторциклистот е $90:2 = 45 \text{ km/h}$.

47. Мартин претрчува права патека долга 100 m за $10,2$ секунди, а Никола истата патека ја трча за 12 секунди. На колку метри на патеката треба да се наоѓа Никола за да при истовремено стартување двајцата заедно да стигнат на целта?

Решение. Нека бараното растојание е x метри. Бидејќи брзината на Никола е $\frac{100}{12} \text{ m/sec}$, од условот на задачата следува $\frac{100-x}{\frac{100}{12}} = 10,2$, од каде наоѓаме $12(100 - x) = 1020$, односно $x = 15 \text{ m}$.

48. Растојанието меѓу населените места A и B е 3 km . Во A живеат 300 ученици, а во B живеат 200 ученици. На кое растојание од A треба да се направи училиште така што збирот на растојанијата кои сите ученици треба да ги поминат еднаш дневно до училиштето е најмало?

Решение. Јасно, училиштето треба да се наоѓа на отсечката со крајни точки A и B . Во спротивно од неравенството на триаголник ќе следува дека учениците поминуваат поголемо вкупно растојание. Нека растојанието од A до училиштето е x . Тогаш збирот на растојанијата кои сите ученици ќе ги поминат е $300x + 200(3 - x) = 600 + 100x$ и истиот е најмал ако $x = 0$. Значи, училиштето треба да се направи во местото A .

49. Орелот решил да набљудува како волкот и лисицата, ќе се сретнат, движејќи се по права линија еден кон друг, оддалечени 40 km . Брзината на волкот е 45 km/h , а на лисицата е 35 km/h . Орелот бил одма над волкот и сите тргнале истовремено, при што орелот летал со брзина од 60 km/h . Орелот летал до лисицата, па се вратил до волкот и тоа се повторувало се додека волкот и лисицата не се сретнале. Колку километри прелетал орелот?

Решение. За да определиме колку километри прелетал орелот, доволно е да определиме колку време поминало до средбата на волкот и лисицата. Бидејќи волкот се движел со брзина од 45 km/h , а лисицата се движела со брзина од 35 km/h , тие до средбата патот од 40 km го поминале за $40:(45 + 35) = 0,5 \text{ h}$. Според тоа, орелот летал $0,5 \text{ h}$ и како неговата брзина е 60 km/h , тој вкупно прелетал $60 \cdot 0,5 = 30 \text{ km}$.

50. Иван живее на 1260 m од училиштето и на училиште тргнал во 7:30 часот. Првата половина од патот тој одел 3 m во 2 секунди. Потоа 4 минути ја чекал Мријана и другата половина од патот се движел со брзина од $4,2\text{ km/h}$. Во колку часот Иван притигнал во училиштето?

Решение. Имаме, $1260:2 = 630\text{ m}$. Овие 630 m Иван ги поминал за $(630:3) \cdot 2 = 420\text{ s}$, односно за $420:60 = 7\text{ min}$. Сега, бидејќи

$$4,2\text{ km/h} = \frac{4200}{60}\text{ m/min} = 70\text{ m/min},$$

вторите 630 m Иван ги поминал за $630:70 = 9\text{ min}$. Конечно, Иван на училиште стигнал по $7 + 4 + 9 = 20\text{ min}$ од поаѓањето од дома, што значи во 7:50 часот.

51. Бабата на братучедите Ангел и Васил живее во градот X кој се оддалечен 240 km од градот A , во кој живее Ангел и два пати повеќе од градот B , во кој живее Васил. За Нова година семејствата на двете момчиња ја посетиле бабата. Семејството на Ангел тргнало во 8:00 часот од градот A и пристигнало во 12:00 часот во градот X . Во колку часот пристигнало семејството на Васил во градот X , ако тие тргнале во 6:45 часот и се движеле со 20 km/h побрзо од семејството на Ангел?

Решение. Семејството на Ангел патувало 4 часа, што значи дека тоа се движело со брзина $240:4 = 60\text{ km/h}$. Семејството на Васил се движело со брзина $60 + 20 = 80\text{ km/h}$, а патот кој го поминало е $2 \cdot 240 = 480\text{ km}$. Според тоа, тие патувале $480:80 = 6$ часа. Значи, семејството на Васил во градот X пристигнало во 12:45 часот.

52. Патот меѓу градовите A и B е долг 37 km . Добре и Билјана тргнале од двата града еден кон друг, при што Билјана тргнала 1 час покасно од Добре. Добре поминува 7 km за 2 часа, а Билјана поминува 8 km за 2,5 часа. Колку километри ќе помине Добре до средбата?

Решение. Добре се движи со брзина $7:2 = 3,5\text{ km/h}$, а Билјана се движи со брзина $8:2,5 = 3,2\text{ km/h}$. Бидејќи Билјана тргнала 1 час покасно од Добре, тој изминал за 1 час $3,5\text{ km}$, што значи дека до средбата останало да поминат $37 - 3,5 = 33,5\text{ km}$. Ако x е времето до средбата, тогаш

$$3,5x + 3,2x = 33,5,$$

од каде добиваме $x = 33,5 : 6,7 = 5 \text{ h}$. Значи, Добре до средбата поминал $3,5 \cdot (5 + 1) = 21 \text{ km}$.

III.4. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

53. Сивата чапља издржува под вода 2,5 минути, малиот корморан издржува под вода 2 пати подолго време, а галебот издржува под вода 37,5 пати помалку време од малиот корморан. Колку секунди издржува под вода галебот?

Решение. Малиот корморан под вода издржува $2 \cdot 2,5 = 5 \text{ min}$, односно $5 \cdot 60 = 300 \text{ s}$. Според тоа, галебот под вода издржува $300 : 37,5 = 8 \text{ s}$.

54. Горјан погледнал во часовникот и забележал дека остатокот од деноноќието е 3 пати поголем од до тогаш изминатото време. По 3,5 часа започнал натпреварот по математика на кој учествувал. Натпреварот траел $2\frac{3}{5}$ часа. Во колку часот завршил натпреварот?

Решение. Нека x е изминатото време до моментот кога Горјан го погледнал часовникот. Тогаш остатокот од деноноќието е $3x$, па затоа $x + 3x = 24$, т.е. $x = 6 \text{ h}$. Натпреварот почнува $3,5 \text{ h} = 3 \text{ h } 30 \text{ min}$ по-касно и трае $2\frac{3}{5} \text{ h} = 2 \text{ h } \frac{3 \cdot 60}{5} \text{ min} = 2 \text{ h } 36 \text{ min}$, па затоа тој ќе заврши во $6 \text{ h} + 3 \text{ h } 30 \text{ min} + 2 \text{ h } 36 \text{ min} = 12 \text{ h } 06 \text{ min}$.

55. Машина за мелење месо мели по 7 kg месо во минута. Ако машината се вклучи во 9:45 часот кога ќе се стават 701 kg месо, а потоа на секои десет минути се додаваат за мелење по 2 kg месо, во колку часот машината ќе го сомели месото?

Решение. За 700 kg на машината и се потребни $700 : 7 = 100 \text{ min}$. Ако на секои 10 min се додаваат по 2 kg месо, тогаш во овој период ќе се додадат $20 \cdot 2 = 20 \text{ kg}$. За да се сомелат овие 20 kg и 1 kg од месото кое е ставено на почетокот ни се потребни $(20 + 1) : 7 = 3 \text{ min}$. Според тоа, машината целото месо ќе го сомели за $103 \text{ min} = 1 \text{ h } 43 \text{ min}$. Машината е вклучена во 9:45 часот, што значи дека таа месото ќе го сомели во 11:28 часот.

56. Четири работници кои работат со еднаква ефективност една работа ја завршуваат за 4 часа и 40 минути. За кое време истата работа ќе ја завршат 7 работници кои работата со истата ефективност?

Решение. Четири работници работата ја завршуваат за $4 \cdot 60 + 40 = 280$ минути. Значи, еден работник сам истата работа ќе ја заврши за 4 пати подолго време, т.е. за $4 \cdot 280 = 1120$ минути. Според тоа, седум работници оваа работа ќе ја завршат за 7 пати пократко време, односно за $1120 : 7 = 160$ минути, т.е. за 2 часа и 40 минути.

57. Горјан ја прекопува градината за 3 часа, а Андреј за 4 пати подолго време. За колку минути двајцата заедно ќе ја прекопаат градината?

Решение. За еден час Горјан прекопува $\frac{1}{3}$ од градината, а Андреј прекопува $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$ од градината. За еден час двајцата заедно прекопуваат $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ од градината. Според тоа, двајцата заедно прекопуваат $\frac{1}{12}$ од градината за $60 : 5 = 12$ минути. Конечно, целата градина ќе ја прекопаат за $12 \cdot 12 = 144$ минути.

58. Илија и неговиот син слават роденден на ист ден. Ако на роденденот во 2013 година Илија ги помножи своите години со годините на неговиот син ќе го добие бројот 2013. Која година е роден Илија?

Решение. Бидејќи $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ можните години на таткото и синот се: 2013 и 1, 671 и 3, 183 и 11 или 61 и 33. Од нив само 61 и 33 се реални вредности (не постои човек кој е стар 183 или повеќе години). Значи, Илија има 61 година, а неговиот син има 33 години. Според тоа, Илија е роден во $2013 - 61 = 1952$ година.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

59. Бојан, Мирко и Здравко имале кеса со џамлии. Бојан во кесата додал онолку џамлии колку што имало во кесата и уште една џамлија. Потоа, Мирко додал во кесата двојно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус три џамлии. На крај Здравко додал тројно повеќе џамлии од бројот на џамлии што во тој момент се наоѓал во кесата плус пет џамлии. На крај во кесата имало 149 џамлии. Колку џамлии имало во кесата на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во кесата имало x џамлии. Откога Бојан додал џамлии во кесата, во неа имало

$$x + x + 1 = 2x + 1$$

џамлии. Кога Мирко ги додал џамлиите, во кесата имало

$$2x + 1 + 4x + 2 + 3 = 6x + 6$$

џамлии. На крај, откога Здравко ги додал џамлиите во кесата, во неа имало

$$6x + 6 + 18x + 18 + 5 = 24x + 29$$

џамлии. Сега доволно е да ја решиме равенката

$$24x + 29 = 149 .$$

Нејзино решение е $x = 5$. На почетокот во кесата имало 5 џамлии.

60. Во слаткарницата „Кокос“ има масички и столови групирани во комплекти на следниов начин: неколку комплекти од една маса со четири ногалки и четири стола со три ногалки, неколку комплекти од една маса со три ногарки и четири стола со четири ногалки. Вкупниот број на ногалки е 264. Колку деца можат да седнат во слаткарницата.

Решение. Нека бројот на комплекти од првиот тип го означиме со a , а на вториот со b . Вкупниот број на ногалки од првиот тип е $4 + 4 \cdot 3 = 16$, а од вториот е $3 + 4 \cdot 4 = 19$. Сега, за вкупниот број ногалки ја добиваме равенката $16a + 19b = 264$. Оттука,

$$19b = 264 - 16a = 8(33 - 2a) .$$

Од тоа што 8 ја дели десната страна на последното равенство, јасно е дека мора да ја дели и левата страна. Но 19 не се дели со 8, па остаува 8 да е делител на b , односно $b \in \{8, 16, 24, \dots\}$. Притоа $19b \leq 264$. Јасно, тогаш $b = 8$ и $a = 7$. Следува дека бројот на слободни места во слаткарницата е $15 \cdot 4 = 60$.

61. Во едно училиште има 300 ученици и сите се занимаваат со по еден зимски и еден летен спорт. Преку летото 60% од нив се занимаваат со фудбал, а останатите 40% пливаат. Во текот на зимата учениците или скијаат или играат хокеј, но не и двата спорта истовремено. Со скијање се занимаваат 56% од оние ученици кои во лето играат фудбал, а 30% од фудбалерите преку зима играат хокеј. Одреди колку ученици се занимаваат со пливање и хокеј.

Решение. Во лето 180 ученици играат фудбал, а 120 пливаат. Од фудбалерите 30% во зима играат хокеј, т.е. $\frac{30 \cdot 180}{100} = 54$ ученици. Значи,

останатите $180 - 54 = 126$ ученици кои играат фудбал во зима скијаат. Ако со x го означиме бројот на сите ученици кои во зима скијаат, тогаш $\frac{56x}{100} = 126$, па $x = 225$. Според тоа 75 ученици во зима играат хокеј. Бидејќи 54 ученици играат фудбал и хокеј, останува 21 ученик кој се занимава со пливање и хокеј.

62. Во едно училиште од вкупниот број ученици 58% се момчиња. Колку биле момчиња, а колку девојчиња ако бројот на момчиња и девојчиња се разликува за 72? Колку вкупно ученици имало тоа училиште?

Решение. Со x да го означиме вкупниот број на ученици во тоа училиште. Од условот во задачата имаме $\frac{58-42}{100}x = 72$, а оттука $x = 450$. Значи имало вкупно 450 ученици во училиштето и тоа $\frac{58}{100} \cdot 450 = 261$ момчиња и $450 - 261 = 189$ девојчиња.

63. Учениците од едно училиште требало да одат на екскурзија. Се пријавиле $\frac{2}{9}$ повеќе ученици од планираниот број. Пред тргнување поради настинка се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, па на екскурзија отишле 5 ученици помалку од планираниот број. Колку ученици заминале на екскурзија?

Решение. Да го означиме планираниот број на ученици со x . Тогаш по пријавувањето имало $x + \frac{2}{9}x = \frac{11}{9}x$. Бидејќи пред тргнувањето се откажале $\frac{3}{11}$ од пријавените ученици, т.е. се откажале

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{9}x = \frac{3}{9}x = \frac{1}{3}x$$

од планираниот број на ученици. Значи вкупниот број на ученици кои одат на екскурзија е $\frac{11}{9}x - \frac{1}{3}x = \frac{8}{9}x$. На екскурзија отишле 5 ученици помалку од планираниот број, па според тоа $\frac{8}{9}x = x - 5$, т.е. $x = 45$. Значи, на екскурзија заминале $x - 5 = 45 - 5 = 40$.

64. Една слаткарница добила нарачка да направи извесен број на слатки за три дена. Првиот ден направила $\frac{2}{5}$ од нарачаните слатки, вториот ден направила $\frac{5}{9}$ од остатокот од нарачката, а третиот ден ги напра-

вила преостанатите 40 слатки од нарачката. Колку слатки биле нарачани во слаткатницата?

Решение. Нека со x го означиме бројот на нарачаните слатки. Тогаш првиот ден се направени $\frac{2}{5}x$ од слатките, вториот ден се направени $\frac{5}{9}(x - \frac{2}{5}x)$, а третиот ден се направени 40 слатки. Значи,

$$\frac{2}{5}x + \frac{5}{9}(x - \frac{2}{5}x) + 40 = x.$$

Со решавање на оваа равенка се добива дека бројот на нарачани слатки е $x = 150$.

65. Дедо Илија на пазар понел извесен број пилиња. Првиот купувач побарал да купи половина од сите пилиња и уште половина пиле и дедо Илија го услужил. Следниот купувач побарал да купи половина од преостанатите пилиња и уште половина пиле, па и тој бил услужен. Третиот купувач исто така добил половина од преостанатите пилиња и уште половина пиле. Откако го услужил третиот купувач, дедо Илија ги продал сите пилиња.

Колку пилиња понел дедо Илија на пазар? По колку пилиња купил секој купувач?

Решение. Нека биле вкупно x пилиња.

Првиот купувач купил: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, а останале

$$x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \text{ пилиња.}$$

Вториот купувач купил: $\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$, а останале

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - (\frac{x}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}.$$

На крај, третиот купувач: $\frac{1}{2}(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}) + \frac{1}{2} = \frac{x}{8} + \frac{1}{8}$, при што не останало ниту едно пиле, па затоа

$$0 = \frac{x}{4} - \frac{3}{4} - (\frac{x}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{x}{8} - \frac{7}{8}, \text{ т.е. } x = 7.$$

Значи, дедо Илија на пазар понел 7 пилиња.

Првиот купувач купил $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$ пилиња. Вториот купувач купил

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ пилиња и третиот купувач купил $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ пиле.

Забелешка. Задачата може да се реши одејќи одназад нанапред без користење на равенки.

66. Кожна фудбалска топка е шиена од делови од кожа во форма на правилни петаголници и правилни шестаголници. На топката има вкупно 32 парчиња кожа. Секое парче кожа во форма на петаголник споено е по страните само со парчиња кожа во форма на шестаголник. Секое парче кожа во форма на шестаголник споено е по страните со 3 петаголници и со 3 шестаголници. Колку делови кожа има во форма на петаголник, а колку во форма на шестаголник?

Решение. Нека x е бројот на парчиња во форма на шестаголник. Според тоа $32 - x$ е бројот на парчиња кожа во форма на петаголник. Ако ги изброиме страните на петаголниците вкупно се $5(32 - x)$. Бидејќи од друга страна и шестаголниците се граничат со 3 страни на петаголници, значи бројот на страни на петаголници е $3x$. Според тоа

$$3x = 5(32 - x),$$

$$3x + 5x = 160,$$

$$x = 20.$$

Значи, имало 20 шестаголници и 12 петаголници.

67. Човек и пол, за два и пол дена јаде три и пол леба. Колку леба ќе изедат 100 луѓе за 45 дена?

Решение. Човек и пол, за два и пол дена јаде три и пол леба. Значи тројца луѓе за 5 дена јадат $2 \cdot 2 \cdot 3,5 = 14$ леба. Еден човек за 1 ден јаде $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{15}$ леба. Еден човек за 45 дена јаде $45 \cdot \frac{14}{15} = 42$ леба, а 100 луѓе за 45 дена јадат $42 \cdot 100 = 4200$ леба.

68. Илина од новоотворена кеса со бомбони изела $\frac{1}{5}$ од вкупниот број на бомбони и уште 3 бомбони. Од преостанатиот број на бомбони, вториот ден изела $\frac{1}{5}$ од бомбоните и уште 5 бомбони. Третиот ден ги изела преостанатите 15 бомбони. Колку бомбони имало во кесата на почетокот?

Решение. Прв начин. Според условот на задачата, ако x е вкупниот број на бомбони, Илина првиот ден изела $\frac{1}{5}x + 3$ бомбони, а во кесата останале $\frac{4}{5}x - 3$ бомбони. Вториот ден Илина изела $\frac{1}{5}(\frac{4}{5}x - 3) + 5$ бомбони и за третиот ден и останале 15 бомбони. Според тоа,

$$\frac{1}{5}x + 3 + \frac{1}{5}(\frac{4}{5}x - 3) + 5 + 15 = x,$$

од каде

$$x + 15 + \frac{4}{5}x - 3 + 100 = 5x,$$

$$112 = 4x - \frac{4}{5}x,$$

$$560 = 16x,$$

$$x = 35.$$

Значи, на почетокот во кесата имало 35 бомбони.

Втор начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Според условот на задачата $15 + 5 = 20$ бомбони се $\frac{4}{5}$ од бонбоните кои на Илина и преостанале по првиот ден. Тоа значи дека по првиот ден на Илина и преостанале $20 : \frac{4}{5} = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$ бонбони. Значи, $25 + 3 = 28$ се $\frac{4}{5}$ од бонбоните кои Илина ги имала на почетокот. Конечно, на почетокот Илина имала $28 : \frac{4}{5} = 28 \cdot \frac{5}{4} = 35$ бонбони.

69. Учениците од две одделенија се договориле да играат фудбал. Во едно од одделенијата немало доволен број на играчи да состават екипа од 11 ученици, па тие се договориле учениците од двете одделенија да се „измешаат“ меѓу себе и потоа да состават две екипи. Наставникот забележал дека од првото одделение машки се $\frac{4}{13}$ од учениците, додека од второто одделение машки се $\frac{5}{17}$ од учениците. Секое од одделенијата има не повеќе од 40 ученици. Кое од одделенијата има повеќе девојчиња?

Решение. Нека бројот на ученици во првото одделение е x , а бројот на ученици во второто одделение е y .

Тогаш машки во првото одделение се $\frac{4x}{13}$, додека во второто се $\frac{5y}{17}$ на број. Бидејќи $\frac{4x}{13}$ мора да е природен број, мора $4x$ да се дели со 13, т.е. $x = 13, 26$ или 39 . Соодветно бројот на машки е 4, 8 или 12.

Аналогно $\frac{5y}{17}$ мора да е природен, па мора $5y$ да се дели со 17, тогаш $y = 17$ или 34 . Соодветниот број на машки е 5 или 10.

Бидејќи $22 = 12 + 10$, имаме дека првото одделение брои ученици 39 од кои 12 машки, т.е. 27 девојчиња. Второто одделение брои 34 ученици од кои 10 машки, т.е. 24 девојчиња.

Значи, првото одделение има повеќе девојчиња.

70. Во едно училиште учат помалку од 400 ученици во шесто одделение поделени во неколку паралелки. Шест од паралелките имаат по еднаков број на ученици и тие шест паралелки имаат вкупно повеќе од 150 ученици. Во останатите паралелки во шесто одделение има вкупно за 15% повеќе ученици отколку во овие шест паралелки заедно. Колку вкупно ученици во шесто одделение има во ова училиште?

Решение. Да го означиме со n вкупниот број на ученици во шесте паралелки. Значи, $6|n$. Од тоа што во останатите паралелки има вкупно за 15% повеќе ученици отколку во овие шест паралелки имаме дека

$$15\% \cdot n = \frac{15}{100} \cdot n = \frac{3}{20} \cdot n$$

треба да е природен број, од каде следи дека $20|n$. Од $6|n$ и $20|n$ следи дека $60|n$, односно $n = 60k$. Од условот на задачата имаме дека $n > 150$ и

$$n + n + 15\% \cdot n = 2,15n < 400.$$

Најмалиот природен број делив со 60 и поголем од 150 е $n = 180$ и за него имаме дека

$$2,15n = 2,15 \cdot 180 = 387.$$

Следниот природен број де-лив со 60 е $n = 240$, но за $n \geq 240$ имаме

$$2,15n \geq 2,15 \cdot 240 = 516,$$

па условот $2,15n < 400$ не е исполнет. Значи, вкупниот број на ученици во шесто одделение во ова училиште е 387 ученици.

71. Во едно училиште се запишани 180 момчиња и 192 девојчиња. Од нив се формирани паралелки со еднаков број на ученици, така што бројот на момчиња во секоја од паралелките е еднаков. Во училниците каде ја посетуваат наставата има најмногу по 40 столчиња. По колку момчиња и девојчиња има во секоја од паралелките?

Решение. Нека x е бројот на паралелки. Бидејќи, во секоја од паралелките има по еднаков број на момчиња и сите паралелки се со еднаков број на ученици, следи дека во секоја од паралелките има и по еднаков број на девојчиња. Бројот на момчиња во секоја од паралелките е $m = 180 : x$, а бројот на девојчиња во секоја од паралелките е $d = 192 : x$. Значи, x е делител и на 180 и на 192. Од разложувањата

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \text{ и } 192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,$$

имаме дека $x \in \{1, 2, 4, 6, 12\}$. Да забележиме дека треба $m + d \leq 40$, од каде заклучуваме дека и $m \leq 40$ и $d \leq 40$. Значи, $x \geq 5$ (имено ако $x < 5$, тогаш $m \geq 180 : 4 = 45$ и $d \geq 192 : 4 = 48$).

Значи, останува $x \in \{6, 12\}$.

Ако $x = 6$, тогаш

$$m = 180 : 6 = 30, d = 192 : 6 = 32 \text{ и } m + d = 62 > 40.$$

Ако $x = 12$, тогаш

$$m = 180 : 12 = 15, d = 192 : 12 = 16 \text{ и } m + d = 31 \leq 40.$$

Значи, во секоја од паралелките има по 15 момчиња и по 16 девојчиња.

72. Две полиња се засадени со рози и лаванди. 65% од плоштината на првото поле се рози, 45% од плоштината на второто поле се рози и 53% од плоштината на двете полиња заедно се рози. Колку проценти од вкупната плоштина (на двете полиња заедно) е плоштината на првото поле?

Решение. Да ги означиме со C_1 и C_2 плоштината на првото и второто поле соодветно. Тогаш, од условот на задачата добиваме

$$65\%C_1 + 45\%C_2 = 53\%(C_1 + C_2),$$

од каде се добива

$$45\%(C_1 + C_2) + 20\%C_1 = 53\%(C_1 + C_2),$$

односно

$$20\%C_1 = 8\%(C_1 + C_2)$$

или

$$C_1 = \frac{8}{20}(C_1 + C_2) = \frac{40}{100}(C_1 + C_2) = 40\%(C_1 + C_2).$$

Последното равенство покажува дека првото поле е 40% од вкупната плоштина на двете полиња заедно.

73. На еден натпревар биле зададени пет задачи. По проверката се покажало дека точно 120 ученици решиле барем една задача, а вкупниот број решени задачи од сите ученици е 277. Понатаму, $\frac{1}{3}$ од учениците кои решиле барем една задача решиле точно една задача, а $\frac{1}{4}$ решиле точно по две задачи и $\frac{1}{5}$ решиле точно по три задачи. Колку ученици решиле пет задачи.

Решение. Од условот следува дека $\frac{120}{3} = 40$ ученици решиле точно по една задача, $\frac{120}{4} = 30$ ученици решиле точно по две задачи и $\frac{120}{5} = 24$ ученици решиле точно по три задачи. Според тоа, $40 + 30 + 24 = 94$ ученици решиле вкупно $40 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 24 \cdot 3 = 172$ задачи. Значи, $120 - 94 = 26$ ученици, кои решиле по четири или пом пет задачи, вкупно решиле $277 - 172 = 105$ задачи. Нека x ученици решиле по пет задачи. Тогаш

$$5x + 4 \cdot (26 - x) = 105,$$

од каде добиваме $x = 1$. Конечно, само еден ученик ги решил сите пет задачи.

74. Четири верверици изеле 2008 ореви, при што секоја изела најмалку 109 ореви. Првата верверица изела повеќе од секоја од останатите три. Втората и третата вкупно изеле 1265 ореви. Колку ореви изела секоја верверичка?

Решение. Бидејќи втората и третата верверица изеле 1265 ореви, добиваме дека првата и четвртата изела $2008 - 1265 = 753$ ореви. Но, секоја верверица изела најмалку 109 ореви, заклучуваме дека за првата останале најмногу 634 ореви. Но, првата верверица изела најмногу и како втората и третата изеле 1265 заклучуваме дека тие изеле 633 и 632 ореви соодветно, а првата изела 634 ореви. Конечно, четвртата верверица изела 109 ореви.

75. Во кутија има моливи и пенкала. Бројот на моливите е еднаков на 40% од бројот на пенкалата. Ана од кутијата зела 2 молива и тогаш бројот на моливите бил еднаков на 30% од бројот на пенкалата. Колку моливи и колку пенкала имало на почетокот во кутијата?

Решение. Нека бројот на пенкалата е x . Тогаш на почетокот бројот на моливите е $\frac{40}{100}x$. Откако бројот на моливите се намалил за 2, тој број ќе биде еднаков на $\frac{40}{100}x - 2$ и еднаков на 30% од x , т.е. на $\frac{30}{100}x$. Според тоа,

$$\frac{40}{100}x - 2 = \frac{30}{100}x,$$

од каде следува $x = 20$. Значи, во кутијата имало 20 пенкала и $\frac{40}{100} \cdot 20 = 8$ моливи, т.е. вкупно 28 моливи и пенкала.

76. За Великден Ана бојадисала жолти, црвени и зелени јајца. Жолтите јајца се два пати помалку од црвените. Ако црвените јајца беа за 6 повеќе од зелените јајца, тогаш сите јајца ќе беа 38. Но, црвените јајца се за 6 помалку од зелените. Колку црвени јајца бојадисала Ана?

Решение. Од условот дека ако црвените се за 6 повеќе од зелените, тогаш вкупно се бојадисани 38 јајца, а во реалноста се 6 помалку од зелените, следува дека бројот на бојадисаните јајца е за 12 помал од 38. Според тоа, Ана вкупно бојадисала $38 - 12 = 26$ јајца. Нека имаме x жолти јајца. Тогаш црвените јајца се $2x$, а зелените се $2x + 6$. Значи, $x + 2x + 2x + 6 = 26$, од каде добиваме $x = 4$. Според тоа, жолти се 4, црвени 8 и зелени 14 јајца.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На секој од 25 листа хартија е запишан еден од броевите 1 или -1 . Бројот -1 е запишан 13 пати. Дозволено е два листа да се отстранат и да се заменат со лист на кој е запишан производот на отстранетите броеви. Постапката се повторува 24 пати. Кој број е запишан на последниот лист хартија?

Решение. Ако се отстранат два листа на кои се запишани исти броеви, се додава лист со бројот 1. Ако се отстранат два листа со различни броеви се додава лист со бројот -1 . Може да забележиме дека производот на сите броеви со изведување на постапката, со отфрлање на два броја и нивна замена со производот, не се менува. На почетокот имаме 13 негативни единици и 12 позитивни единици. Производот на сите броеви на почетокот е -1 . Затоа и на крајот производот повторно ќе биде -1 , односно мора да има непарен број од броевите -1 , па последниот напишан број ќе биде -1 .

2. Анета и Виктор играат игра. Играта ја започнува Анета кажувајќи број од 1 до 7. Потоа Виктор го собира тој број со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот. Анета, бројот што го кажал Виктор го собира со некој број од 1 до 7 и го кажува збирот и оваа постапка наизменично ја повторуваат, се додека некој од нив не го каже бројот 100. Победник е оној кој прв ќе го каже бројот 100. Дали Анета, како играч што ја почнува играта, може да си обезбеди сигурна победа и како?

Решение. Анета ќе победи во оваа игра ако стигне до бројот 92 (тогаш Виктор би го добил бројот 93, 94, ..., 98 или 99 па јасно Анета додавајќи 7, 6, ..., 2 или 1 ќе го каже бројот 100). За да со сигурност го каже бројот 92, во претходниот чекор Анета треба да го каже бројот 84, односно претходно да го каже 76 итн. Бидејќи $92 = 11 \cdot 8 + 4$, Анета како прв играч, треба да почне со бројот 4 и кажувајќи ги во секој нејзин следен чекор броевите помали од сто кои при делење со 8 даваат остаток 4 си обезбедува сигурна победа.

3. Пабло располага со три разнобојни кутии и во едната од нив го скрил камиончето на Андреј. На кутиите Пабло напишал: на белата - „Тука не е камиончето.“, на зелената - „Камиончето е тука.“ и на црвената - „Камиончето е во зелената кутија.“ Натписот само на една од кутиите е точен. Каде е камиончето?

Решение. Ако камиончето е во белата кутија, тогаш сите три натписи не се точни. Ако камиончето е во зелената кутија, тогаш и трите натписи се точни. Единствена можност е камиончето да е во црвената кутија, бидејќи во тој случај само натписот на белата кутија е точен.

4. Располагаме со два песочни часовници кои мерат 7 минути и 11 минути. Едно јајце се вари 15 минути. Како да се измери тоа време со двата песочни часовници?

Решение. Двата песочни часовници ќе ги пуштиме да го мерат времето во ист момент. Кога ќе истече песочниот часовник од 7 минути го ставаме јајцето да се вари. На другиот часовник му преостануваат уште 4 минути за да истече. После неговото истекување одма го пуштаме уште еднаш да измери 11 минути. Бидејќи $4 + 11 = 15$, после неговото истекување, јајцето ќе биде сварено.

5. За Великден тренерот на една фудбалска екипа решил на секој првотимец даму подари по едно бојадисано јаце, но имал сад во кој истовремено може да се варат најмногу 5 јајца. Ако се знае дека едно јаце се сварува во вода која врие за 4 минути, кое е најкраткото време за кое тренерот може да сvari 11 јајца.

Решение. Нека јајцата ги нумерираме со броевите од 1 до 11. Ќе покажеме како за 9 минути тренерот во вода која врие може да сvari 11 јајца.

Во првите 4 минути тренерот ги вари јајцата 1, 2, 3, 4 и 5.

Во 5-тата минута нека ги вари јајцата 6, 7, 8, 9 и 10.

Во 6-тата минута нека ги вари јајцата 7, 8, 9, 10 и 11.

Во 7-тата минута нека ги вари јајцата 8, 9, 10, 11 и 6.

Во 8-тата минута нека ги вари јајцата 9, 10, 11, 6 и 7.

Во 9-тата минута нека ги вари јајцата 11, 6, 7 и 8.

Забележуваме дека со ваквиот распоред секое јајце од 6 до 11 ќе биде сварено, бидејќи ќе се вари по 4 минути.

6. Дадено е множеството $A = \{1, 17, 5, 7, 2, 13, 23\}$. Ѓорѓи за секое двоелементно подмножество од A на табла го запишува помалиот број од

избраните два кои се во тоа подмножество. Да се определи збирот на броевите кои Ѓорѓи ги запишал на таблата.

Решение. Ѓорѓи за подмножествата $\{1, 2\}, \{1, 5\}, \dots, \{1, 23\}$ по ред ќе ги запишува броевите 1, 1, 1, 1, 1, 1. Бидејќи $A = \{1, 2, 5, 7, 13, 17, 23\}$ секој број Ѓорѓи ќе го запише на таблата онолку пати колку што има елементи по него (ако ги гледаме дадените броеви во растечки редослед од лево кон десно), т.е. бараниот збир ќе биде

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 13 + 1 \cdot 17 = 6 + 10 + 20 + 21 + 26 + 17 = 100.$$

7. Нека е дадена 5×5 квадратна табла. Во секое поле од таблата е запишан по точно еден од броевите 1 и -1 на тој начин што производот на елементите од секоја редица е негативен. Докажи дека постои колона таква што производот на елементите од нејзините полиња е негативен.

Решение. Производот на елементите во целата квадратна табла е еднаков на производот на редиците. Бидејќи знаеме дека сите тие имаат негативен производ, а се 5 на број следи дека производот на елементите во целата квадратна табла е негативен. Значи на таблата има непарен број на -1 . Па ако производот на елементите во секоја колона е позитивен значи во секоја колона има парен број на -1 , па тогаш на таблата ќе има парен број на -1 , но веќе видовме дека има непарен број на -1 . Значи постои колона со производ на елементите во неа кој е негативен.

8. Никола има 11 кутии со бонбони, при што во секоја кутија има 17 бонбони. Никола знае дека бонбоните во само една кутија се тешки 12 грама, додека во останатите кутии бонбоните се тешки 13 грама. Како со помош на само едно мерење на избаждарена вага ќе утврди која е кутијата со бонбони со маса 12 грама?

Решение. Никола кутиите со бонбони ќе ги нумерира со броевите од 1 до 11. Од првата кутија ќе земе 1 бонбона, од втората кутија 2 бонбони, од третата кутија 3 бонбони, ... , од десетата кутија 10 бонбони и од единаесетата кутија нема да земе ниту една бонбона. Вкупниот број на земени бонбони е $1+2+3+4+5+6+7+8+9=55$ и ако сите се по 13 грама нивната тежина треба да биде $55 \cdot 13 = 715$ грама. Ако оваа маса е измерена тогаш бонбоните од единаесетата кутија се по 12 грама. Ако е измерена друга маса помала од 715 грама, разликата на двете маси ќе го даде редниот број на кутијата со бонбони од 12 грама. На пример, ако вагата покаже 710 грама, тогаш петтата кутија е кутија со бонбони со маса 12 грама.

9. Правоаголна метална плочка има маса 10 грама. Таа треба да се раздели (расече) на три дела кои имаат целобројни маси. Со добиените три дела може да се измери во грамови секоја маса од 1 до 10 грама која е природен број, освен маса од 9 грама. Колкава треба да биде масата на секој од делбените делови?

Решение. Деловите на кои треба да се пресече плочката се $2g, 3g, 5g$ ($2 + 3 + 5 = 10$). Сега мерењето на масите може да се направи на следниов начин:

$$1 = 3 - 2,$$

$$2 = 2,$$

$$3 = 3,$$

$$4 = 5 - 1,$$

$$5 = 5,$$

$$6 = 5 + 3 - 2,$$

$$7 = 5 + 2,$$

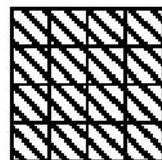
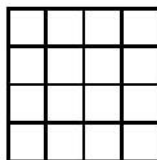
$$8 = 5 + 3,$$

$$10 = 5 + 3 + 2.$$

10. Имаме два сада од кои едниот собира точно 3 литри, а другиот собира точно 5 литри. Дали од чешма со помош на двата сада можеме да наполниме точно 4 литри вода?

Решение. Прво го полниме садот од 3 литри и го претураме во садот од 5 литри, каде останува место за уште 2 литри. Потоа, повторно го полниме садот од 3 литри, па го дополнуваме садот од 5 литри, што значи дека во садот од 3 литри ќе остане 1 литар вода. Полниот сад од 5 литри го празниме и во него го претураме едниот литар вода од садот со 3 литри. Конечно, го полниме по трет пат садот од 3 литри и го претураме во садот од 5 литри во кој претходно има 1 литар вода. Така, во садот од 5 литри сега има точно 4 литри вода.

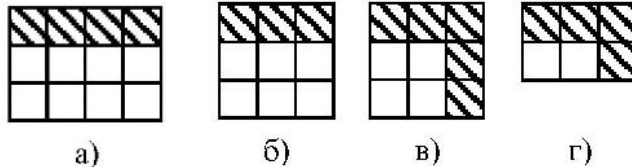
11. Книжен квадрат 4×4 е поделен на 16 единечни квадратчиња, кои од едната страна се бели, а од другата се штрафирани (цртежи десно). Само со превиткување, без да сечиш добиј:



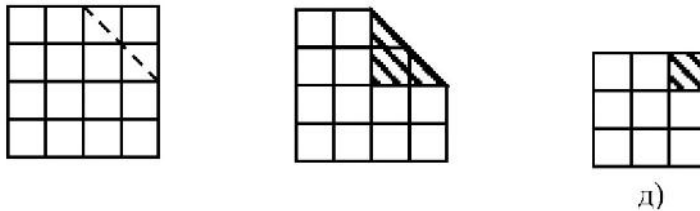
- правоаголник 4×3 со 4 штрафиани и 8 бели квадратчиња,
- квадрат 3×3 со 3 штрафиани и 6 бели квадратчиња,
- квадрат 3×3 со 5 штрафиани и 4 бели квадратчиња,
- правоаголник 3×2 со 4 штрафиани и 3 бели квадратчиња,
- квадрат 3×3 со 1 штрафиано и 8 бели квадратчиња.

Решение. а) Бараниот квадрат се добива со превиткување на горниот ред.

- б) Бараниот квадрат се добива од а) дополнително со едно превиткување на десната колона.
- в) Бараниот квадрат повторно се добива од а) дополнително со едно превиткување на десната колона, но во обратна насока од б).
- г) Бараниот квадрат се добива од в) со едно дополнително превиткување на долниот ред.



- д) Прво по дијагонала го го превиткуваме горниот десен 2×2 квадрат од почетниот 4×4 квадрат (цртеж десно) и го добиваме средниот цртеж. Сега на добиената фигура ги превиткуваме горниот ред и крајната десна колона (цртеж десно).



12. Пред кујната на кампот во редот за појадок застанала група ученици од петто одделение. По две минути пристигнала група ученици од шесто одделение и меѓу секои двајца ученици од петто одделение застанал ученик од шесто одделение. По две минути дошле ученици од седмо одделение и меѓу секои двајца ученици во редот застанал по еден ученик од седмо одделение, со што бројот на учениците во редот бил 85. Колку ученици од секое одделение има во редот?

Решение. *Прв начин.* Ако бројот на учениците од петто одделение е x , тогаш бројот на учениците од шесто одделение $x - 1$. Тоа значи дека бројот на учениците од седмо одделение е $x + x - 1 - 1 = 2x - 2$. Затоа, $x + x - 1 + 2x - 2 = 85$, од каде добиваме $x = 22$. Значи, во редот има 22 ученици од петто, 21 ученик од шесто и 42 ученици од седмо одделение.

Втор начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Ако учениците во редот ги нумерираме со броевите од 1 до 85, тогаш според условот на задачата учениците кои се на парните места се

ученици од седмо одделение. Значи, во редот има 42 ученика од семо одделение. Ако овие ученици излезат од редот, тогаш во редот ќе останат 43 ученици. Сега, ако одново нумерираме, на парните места ќе бидат учениците од шесто одделение. Според тоа, во редот има 21 ученик од шесто и 22 ученици од петто одделение.

13. Еден патник пристигнал на остров на кој живеат само витези и штитоношци. Витезите секогаш ја говорат вистината, а штитоношците секогаш лажат. Патникот од жителите на островот најмил водич и го замолил да го праша жителот кој минувал дали е витез или е штитоносец. Водичот ја исполнил задачата и соопштил: „Овој човек кажа дека е штитоносец.“ Колку со сигурност се витези меѓу водичот и жителот кој минувал?

Решение. Има четири можности за водичот и жителот кој минувал:

Прв случај	Втор случај	Трет случај	Четврт случај
Водич – витез	Водич – витез	Водич – штитоносец	Водич – штитоносец
Жител – витез	Жител – штитоносец	Жител – витез	Жител – штитоносец

Првиот и вториот случај не се можни, бидејќи тогаш водичот треба да каже „Овој човек кажа дека е витез“, што не е така. Третиот и четвртиот случај се можни, што значи дека меѓу водичот и жителот кој минувал немало витез или бил еден витез.

14. На еден остров живеат само витези кои секогаш ја говорат вистината и штитоношци кои сегогаш лажат. Еден посетител на островот сретнал тројца жители на островот и секој од нив го прашал: „Колку витези има меѓу твоите двајца сопатници?“ Првиот одговорил: „Ниту еден.“, вториот одговорил: „Еден.“, а третиот молчел. Колку витези има меѓу тројцата жители на островот?

Решение. За првиот (I) и вториот (II) жител има четири можности:

Прв случај	Втор случај	Трет случај	Четврт случај
I – витез	I – штитоносец	I – витез	I – штитоносец
II – витез	II – штитоносец	II – штитоносец	II – витез

Првиот случај не е можен, бидејќи тврдењето на I нема да биде точно. Во вториот случај од тврдењето на I следува дека меѓу неговите сопатници има еден или двајца витези. Но бидејќи II е негов сопатник и е штитоносец заклучуваме дека третиот жител е витез и тогаш тврдењето на II ќе биде точно, што не е можно. Значи, вториот случај

не е можен. Третиот случај исто така не е можен, бидејќи од тврдењето на I следува дека неговите сопатници се штитоноски, па затоа третиот жител е штитоносец. Но, тогаш штитоноски се точно двајца, а затоа тврдењето на II е точно, што не е можно. Условите на задачата се исполнети само во четвртиот случај, па затоа третиот жител е витез, т.е. меѓу тројката жители има два витеза.

15. На еден волшебен остро живеат два вида жители – витези, кои секогаш ја говорат вистината и лажливци, кои секогаш лажат. Патник сретнал група од седум жители на островот и секој од нив го прашал колку од останатите членови на групата се витези. Добил еден одговор 0, два одговори 1, а преостанатите четири одговори биле 2. Колку од членовите на групата биле витези?

Решение. Не е можно сите седум жители да се лажливци, бидејќи тогаш тој што кажал 0 кажал вистина. Значи, во групата има најмалку еден витез. Понатаму, на зададеното прашање секој витез од групата ќе каже еден ист број и тоа број кој е помал за еден од бројот на витезите (тој витез не се брои себе си). Видовме дека барем еден од одговорите е точен, заклучуваме дека во групата има 1, 2 или 3 витези. Ако во групата има 1 витез, тогаш тој кажал 0. Но, тоа ќе значи дека одговорите 1 кои се дадени од лажливците се точни, што е противречност. Ако во групата има точно два витеза, тогаш тие дале одговори 1. Но, тоа ќе значи дека одговорите 2 дадени од лажливците се точни, што е противречност. Значи, во групата има 3 витези, секој од нив дал одговор 2, а одговорите 0, 1 или 2 дадени од четирите лажливци не се точни.

16. Ана, Бети, Васка и Галина учествувале на натпревар по математика и ги освоиле првите четири места. На прашањето: „Ти кое место го освои?“, девојчињата ги дале следниве одговори:

Ана: „Јас не сум ниту прва, ниту четврта.“

Бети: „Јас не сум четврта.“

Васка: „Јас сум прва.“

Галина: „Јас сум четврта.“

Три од овие одговори се вистинити, а еден не е вистинит. Кое девојче не говорело вистина?

Решение. Проверуваме кој од дадените четири одговори не доведува до противречност.

1 *случај*. Ако одговорот на Ана не е вистинит, тогаш таа е или прва или четврта, но тогаш еден од одговорите на Васка или Галина не е вистинит, што не е можно, бидејќи добиваме повеќе од еден невистинит одговор.

2 *случај*. Ако одговорот на Бети не е вистинит, тогаш таа е четврта, па затоа одговорот на Галина не е вистинит, што повторно е противречност.

2 *случај*. Ако одговорот на Галина не е вистинит, тогаш добиваме дека никој не го освоил четвртото место, што не е можно.

4 *случај*. Ако одговорот на Васка не е вистинит, тогаш Галина е четврта, а Ана и Бети ги освоиле второто и третото место, во некој редослед.

Значи, Васка не кажала вистина.

17. Ана, Бојана, Ивана и Гордана се натпреварувале во трчање и никои две не стигнале на целта истовремено. По натпреварот секое девојче го прашале кое место го освоило, на што биле добиени следниве одговори:

Ана: „Јас не бев ниту прва, ниту последна.“

Бојана: „Јас не бев последна.“

Ивана: „Јас бев прва.“

Гордана: „Јас бев последна.“

Се покажало дека само едно од девојчињата не ја кажало вистината, Кое девојче го освоило првото место?

Решение. Задачата ќе ја решиме испитувајќи кое девојче лаже. Имаме четири случаи.

1 *случај*. Ако Ана лаже, тогаш таа е или прва или последна, па затоа или Ивана или Гордана лаже, што е противречност.

2 *случај*. Ако Бојана лаже, тогаш таа е последна, што значи дека Гордана лаже, што е противречност.

3 *случај*. Ако Гордана лаже, тогаш таа не е последна, па како Ана и Бојана не се последни, останува дека Ивана е последна. Но, тоа значи дека Ивана лаже, што е противречност.

4 *случај*. Ако Ивана лаже, тоа значи дека таа не е прва. Сега од изјавата на Гордана следува дека таа е четврта, а како Ана не е ниту прва, ниту последна, останува дека прва е Бојана.

Конечно, Бојана е прва, Ана и Ивана ги освоиле второто и третото место, во некој редослед, а Гордана е четврта.

18. На Великден другарките Ана, Весна, Емилија и Ивана на училиште понеле секоја по едно јаце. Четирите јајца биле црвено, сино, зелено и жолто. Познато е дека Ана не понела ниту сино, ниту жолто јајце. Емилија понела или сино или жолто јајце. Ивана ниту црвено, ниту жолто јајце. Сино јајце понела или Емилија или Ана. Определи кое девојче какво јајце понело на училиште.

Решение. Податоците последователно ќе ги внесуваме во табела. Во заедничките полиња на Ана и синото и жолтото јаце ставаме знак $-$, а исто знак $-$ ставаме и во заедничките полиња на Ивана со црвеното и жолтото јајце.

	црвено	плаво	жолто	зелено
Ана	+	-	-	-
Весна	-	-	+	-
Емилија	-	+	-	-
Ивана	-	-	-	+

Бидејќи Ана не понела ниту сино ниту жолто јајце, а сино јајце понела или Емилија или Ана, заклучуваме дека синото јајце е кај Емилија и во заедничкото поле ставаме $+$. Во останатите полиња на колоната на синото јајце и редот на Емилија ставаме $-$. Сега, еден знак $+$ мора да има во редот на Ивана, па останува тоа да е во колоната на зеленото јајце, што значи дека Ивана понела зелено јајце. Во останатите полиња на колоната на зеленото јајце ставаме знак $-$. Сега во редот на Ана мора да има знак $+$ и преостанува тоа да е во колоната на црвеното јајце. Значи, Ана понела црвено и останува дека Весна понела жолто јајце.

19. Четири фудбалски екипи A, B, C и D одиграле турнир на кој секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. На турнирот за победа се добиваат 3 бода, за нерешен резултат секоја екипа добива по еден бод и за пораз не се добиваат бодови. Екипите освоиле 5, 3, 3 и 2 бода. Колку натпревари завршиле нерешено?

Решение. На турнирот се одиграни $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ натпревари. Притоа, во случај на победа вкупниот број освоени бодови во натпреварот е $3 + 0 = 3$, а во случај на нерешен резултат тој број е $1 + 1 = 2$, т.е. еден бод помалку. Значи максималниот број бодови кој екипите можеле да го освојат е $6 \cdot 3 = 18$ бода, а се освоени $5 + 3 + 3 + 2 = 13$ бода. Според тоа, нерешено завршиле $18 - 13 = 5$ натпревари.

20. Докажи дека меѓу било кои 5 природни броеви кои не се деливи со 3, може да се најдат 3 броеви чиј збир е делив со 3.

Решение. Бидејќи петте броеви не се деливи со 3, за нив важи дека при делење со 3 даваат остаток 1 или 2. Тогаш од принципот на Дирихле следува дека барем три од нив имаат ист остаток. Значи, тие три броја се $3k+1, 3m+1, 3n+1$ или $3k+2, 3m+2, 3n+2$. Тогаш

$$3k+1+3m+1+3n+1=3(k+m+n+1)$$

или

$$3k+2+3m+2+3n+2=3(k+m+n+2).$$

Значи, и во двата случаи нивниот збир е број делив со 3.

21. Во квадратна шема со димензии 3×3 Димитар може да ги запишува броевите $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$. Дали може Димитар во секое квадратче да запише по еден од овие броеви така што зборовите на броевите во трите редици, трите колони и двете дијагонали да се различни меѓу себе.

Решение. Можни зборови на три броја од множеството $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$ се

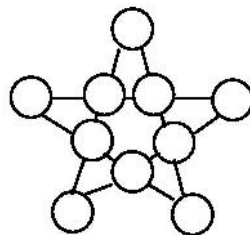
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

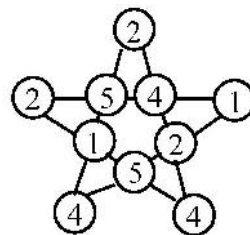
Значи, можни зборови се $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$, т.е. вкупно можни зборови се 7, а има вкупно 8 хоризонтали, вертикали и дијагонали. Според принципот на Дирихле, при било какво пополнување на квадратната шема ќе има најмалку два еднакви збира. Значи, такво пополнување не е можно.

IV.2. РАСПОРЕДУВАЊА

22. Во секое од десетте кругчиња на цртежот десно е запишан по еден едноцифрен број. За осум кругчиња се искористени броевите 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 и 4. Во преостанатите две кругчиња се запишани два исти ненулни броја така што зборовите на четирите броеви запишани во кругчињата кои се на иста права се еднакви. Кои се тие броеви?



Решение. Нека S е збирот на сите броеви запишани во четирите кругчиња кои се наоѓаат на секоја од петте прави. Тогаш вкупниот збир е еднаков на $5S$. Ако x е непознатиот број, тогаш збирот на броевите запишани во кругчињата е еднаков на



$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2x = 20 + 2x.$$

Бидејќи бројот запишан во секое кругче во збирот $5S$ се брои двапати добиваме $5S = 2(20 + 2x)$, т.е. $5S = 40 + 4x$. Значи, $4x = 5(S - 8)$. Според тоа, $5 \mid x$, па како x е едноцифрен број добиваме $x = 0$ или $x = 5$. Но, броевите треба да се ненулти, па затоа $x = 5$ и збирот на броевите запишани на една права е $S = 12$. Една можна реализација е дадена на горниот цртеж.

23. Природните броеви од 1 до 8 се ставаат во табела со 2 реда и 4 колони, така што збирот на броевите во секоја колона и во секој ред треба да биде ист (види цртеж).

8	2	3	5
1	7	6	4

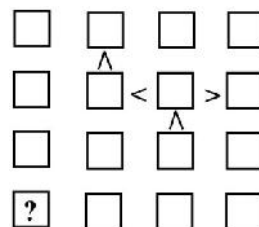
(Збирот во секоја колона е 9, а збирот во секој ред е 18.)

- а) Дали може првите 10 природни броеви да се постават во табела со 2 реда и 5 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секој ред да биде ист?
- б) Дали може првите 12 природни броеви да се постават во табела со 2 реда и 6 колони, така што збирот на броевите во секоја колона да е ист и збирот на броевите во секој ред да биде ист?

Решение. а) Збирот на првите 10 броеви е $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$. Ако збирот во редиците е ист, на пример k , тогаш би добиле дека збирот на сите броеви во таблицата е парен број, т.е. $2k$. Затоа не е можно збирот на броевите во двете редици да е ист. Па бараниот распоред не постои.

- б) Збирот на сите броеви во табелата е $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78$. Значи, ако е можен бараниот распоред, тогаш збирот во секоја колона ќе биде 13, а збирот во секој ред ќе биде 39. Определи еден начин на пополнување на табелата.

24. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона



се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Меѓу броевите 1, 2, 3, и 4 единствен број кој е помал од еден, а е поголем од два броја е бројот 3, па затоа во второто и третото квадратче на третата колона треба да се запишат броевите 3 и 4 соодветно. Понатаму, заради втората колона во второто и четвртото квадратче на вториот ред треба да се запишат броевите 2 и 1, соодветно, а во првото квадратче на втората колона бројот 1. Понатаму, јасно е дека во првото и четвртото квадратче на третата колона треба да се запишат броевите 2 и 1, соодветно, а во првото квадратче на вториот ред бројот 4. Сега, во првото и четвртото квадратче на првиот ред ги запишуваме броевите 3 и 4, соодветно. Понатаму, заради првата колона и четвртиот ред на местото на прашалникот треба да се запише бројот 2. Јасно, во третото квадратче на првата колона е бројот 1, а во четвртото квадратче на втората колона е бројот 4. Лесно се пополнуваат станатите три квадратиња (цртеж горе).

3	1	2	4
4	2	< 3	> 1
1	3	4	2
2	4	1	3

25. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

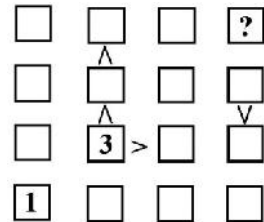
	?		
		<	2
2		<	

Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Во четвртото квадратче на четвртата колона може да биде запишан еден од броевите 3 или 4. Ако е запишан бројот 3, тогаш во третото квадратче на четвртиот ред мора да е бројот 4, па затоа во третото квадратче на третиот ред мора да е бројот 3. Сега во второто квадратче на третиот ред е бројот 1, а во првото квадратче од истиот ред е бројот 4, што не е можно заради првата колона. Значи, во четвртото квадратче на четвртата колона е бројот 4. Понатаму, во второто и третото квадратче на четвртиот ред се броевите 1 и 3, соодветно, а во третото квадратче на третиот ред е бројот 4. Сега, заради втората колона во второто квадратче на третиот

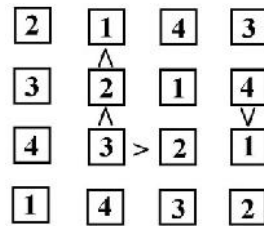
4	2	1	3
3	4	2	1
1	3	< 4	2
2	1	< 3	4

ред е бројот 3, а во првото квадратче е бројот 1. Јасно, на местото на прашалникот е бројот 2, а во второто квадратче на втората колона е бројот 4. Пополнувањето на останатите квадратчиња е едноставно и пополнетата шема е дадена на горниот цртеж.

26. Во секое квадратче на цртежот десно треба да се стави по еден од броевите 1, 2, 3 или 4 така што броевите во секој ред и во секоја колона се различни и да важат знаците за помало и поголемо. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



Решение. Ќе броиме од лево кон десно и од горе кон долу. Јасно, во празните квадратчиња на втората колона последователно треба да ги запишеме броевите 1, 2 и 4. Понатаму, ако во третото и четвртото квадратче на четвртиот ред ги запишеме броевите 2 и 3, соодветно, тогаш во третото квадратче на третиот ред



мора да е бројот 1. Сега во третото квадратче на четвртата колона мора да е бројот 2, во третото бројот 4 и во првото бројот 1, што е противречност бидејќи во првиот ред двапати ќе се појави бројот 1. Значи, во третото и четвртото квадратче на четвртиот број се запишани броевите 3 и 2, соодветно. Сега во третото квадратче на третиот ред мора да е бројот 2, па затоа во четвртото квадратче на овој ред мора да е бројот 1, а во првото квадратче бројот 4. Јасно, во второто квадратче на третата колона е бројот 1, па затоа во првото квадратче на оваа колона е бројот 4. Понатаму, во првото квадратче на првата колона е бројот 2, а во второто бројот 3. Конечно, на местото на прашалникот е бројот 3, а во второто квадратче на четвртата колона е бројот 4. Пополнетата шема е прикажана на горниот цртеж.

27. За Великден баба Павлина бојадисала 36 јајца по 6 јајца во 6 различни бои: плава (п), црвена (ц), зелена (з), жолта (ж), лилјакова (л) и розева (р). Бојадисаните јајца Матеа ги наредила во табла, така што во секој ред и во секоја колона имало по едно јајце од секоја боја. По неколку

п	ц	з	ж	л	р
				ц	
ж					
ц	з	п	р		
		р			12
з	р	л			

дена во таблата останале неколку јајца, како што е прикажано на цртежот десно. Како Матеа ги распоредила јајцата во таблата?

Решение. Да ги означиме празните полиња како на цртежот десно. Јасно во полето 17 мора да биде буквата ж, а во полето 18 буквата л. Понатаму, во полињата 4, 5 и 6 треба да се буквите ц, ж и п. Но, во 4 и 5 не може да е буквата ж, па останува таа да е во полето 6. Понатаму, во полето 5 не може да биде буквата ц, па таа е во полето 4 и во полето 5 е буквата п. Така ја добиваме табелата прикажана на долниот цртеж десно.

п	ц	з	ж	л	р
25	26	27	28	ц	30
ж	20	21	22	23	24
ц	з	п	р	17	18
7	8	р	10	11	12
з	р	л	4	5	6

Сега во полињата 11 и 23 треба да се буквите р и з, но р не може да е во 11, па затоа во 11 е буквата з, а во 23 е буквата р. Сега, во едно од полињата 7, 8, 10 и 12 треба да е буквата ц и како таа не може да е во 7, 8 и 10, останува во полето 12 да е буквата ц.

п	ц	з	ж	л	р
25	26	27	28	ц	30
ж	20	21	22	23	24
ц	з	п	р	ж	л
7	8	р	10	11	12
з	р	л	ц	п	ж

Понатаму, јасно е дека во полето 21 е буквата ц, во полето 27 е буквата ж и во полето 25 е буквата р. Јасно, во полето 7 е буквата л, во полето 8 е буквата ж, па во полето 10 е буквата п. Така ја добиваме табелата прикажана на цртежот десно.

п	ц	з	ж	л	р
р	26	ж	28	ц	30
ж	20	ц	22	р	24
ц	з	п	р	ж	л
л	ж	р	п	з	ц
з	р	л	ц	п	ж

Сега, буквата з мора да биде во вториот и третиот ред, како и четвртата и шестата колона, па затоа таа може да биде во полињата 22 и 30 или пак во полињата 24 и 28. Во првиот случај го добиваме распоредот кој долу е прикажан на левата табела, а во вториот случај распоредот кој долу е прикажан на десната табела.

п	ц	з	ж	л	р
р	п	ж	л	ц	з
ж	л	ц	з	р	п
ц	з	п	р	ж	л
л	ж	р	п	з	ц
з	р	л	ц	п	ж

п	ц	з	ж	л	р
р	л	ж	з	ц	п
ж	п	ц	л	р	з
ц	з	п	р	ж	л
л	ж	р	п	з	ц
з	р	л	ц	п	ж

IV.3. ПРЕБРОЈУВАЊА

28. Со помош на 10 еднакви коцки се формирани сите можни правоаголни паралелопипеди. При формирањето на паралелопипедот не е неопходно да се искористат сите коцки. Определи го бројот на различните паралелопипеди.

Решение. Со 10 еднакви коцки прво можеме да формираме 10 правоаголни паралелопипеди така што ќе ги редиме коцките една до друга. Понатаму, ако должината на работ на коцките е a можеме да формираме уште 6 правоаголни паралелопипеди и тоа се:

$a, 2a, 2a; a, 2a, 3a; a, 2a, 4a; a, 2a, 5a; 2a, 2a, 2a; a, 3a, 3a.$

29. Определи го бројот на сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што $b|a$ и $c|b$.

Решение. Ако a е прост број, тогаш постојат три такви броја $\overline{a11}, \overline{aa1}, \overline{aaa}$. Цифрите кои се прости броеви се 2, 3, 5 и 7. Оттука во овој случај добиваме $3 \cdot 4 = 12$ броја. Ако a има еден делител различен од 1 и од самиот a , тогаш имаме 6 можности, во што се убедуваме земајќи $a = 4$. Сега броевите се 411, 421, 422, 441, 442 и 444. Друга цифра со ова својство е 9, со која добиваме уште шест трицифрени броеви со саканите својства. Останува да ги разгледаме случаите $a = 6$ и $a = 8$. За $a = 6$ ги добиваме броевите 611, 621, 622, 631, 633, 661, 662, 663 и 666, што значи дека имаме уште девет броеви со саканите својства. За $a = 8$ ги добиваме броевите 811, 821, 822, 841, 842, 844, 881, 882, 884 и 888, т.е. уште десет броја. Конечно, ако го земеме предвиди и бројот 111, добиваме $1 + 12 + 6 + 6 + 9 + 10 = 44$ броја со саканите својства.

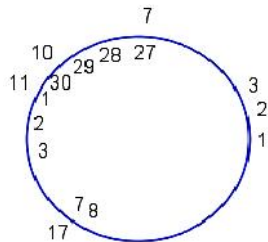
30. Определи го бројот на петцифрените броеви кои може да се запишат само со цифрите 5 и 0. (Не мора да бидат искористени и двете цифри.)

Решение. Нека $\overline{abcde}$ е петцифрен број запишан само со цифрите 5 и 0. Тогаш $a = 5$, а $b, c, d, e \in \{0, 5\}$, што значи дека за цифрата a имаме една можност, а за секоја од цифрите b, c, d, e имаме по две можности. Затоа бројот на петцифрените броеви запишани само со цифрите 5 и 0 е $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Тие броеви се:

50000, 55000, 50500, 50050, 50005, 55555, 50555, 55055,
55505, 55550, 50055, 55005, 55500, 50505, 55050, 50550.

31. Циркуска арена е осветлена од множество рефлектори распоредени на кружница. Наум и Димитар решиле да ги пребројат рефлекторите. Тие броеле во една иста насока, но започнале да бројат од различни места. Се покажало дека 17-тиот рефлектор за Наум е 7-ми за Димитар, а 7-миот за Наум е 27-ми за Димитар. Колку рефлектори имало?

Решение. Од условот дека 17-тиот рефлектор според Наум се совпаѓа со 7-миот рефлектор според Димитар, следува дека 11-тиот рефлектор според Наум е прв рефлектор според Димитар, што значи дека 10-тиот рефлектор според Наум е последен рефлектор според Димитар. Но, од 7-миот (27-миот) до 10-тиот (последниот) има уште три ефлектори, што значи дека циркуската арена е осветлена со вкупно $27 + 3 = 30$ рефлектори.



32. Дванаесетте витези на кружната маса треба да изберат двочлена делегација за посета на кралот Артур. На колку начини може тоа да се направи, така што во двочлената делегација да не бидат витези кои седат еден до друг на кружната маса.

Решение. Нека претпоставиме дека кружната маса е кружница, а витезите кои седат на кружната маса се темиња на 12 – аголник. Секој пар витези што седат на масата кои прават двочлена делегација според условот на задачата, определуваат една дијагонала на 12 – аголникот. Според тоа, тие може да формираат делегации колку што има дијагонали во 12 – аголник. Бројот на дијагонали во 12 – аголник е еднаков на $\frac{12 \cdot (12-3)}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$. Значи, кралот Артур може да формира 54 двочлени делегации, на начин определен во задачата.

33. Шаховската табла е поделена на 64 единечни квадрати. Најди го бројот на сите квадрати на шаховската табла, кои се формирани од единечните квадрати.

Решение. Бројот на квадратите 1×1 на шаховската табла е $8^2 = 64$. Квадрати 2×2 има $7^2 = 49$, 3×3 има $6^2 = 36$, 4×4 има $5^2 = 25$, 5×5 има $4^2 = 16$, 6×6 има $3^2 = 9$, 7×7 има $2^2 = 4$ и 8×8 има $1^2 = 1$. Според тоа, на таблата има вкупно

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204 \text{ квадрати.}$$

34. Табла 100×100 е поделена на единечни квадратчиња. Ќе сметаме дека две единечни квадратчиња се соседни ако имаат заедничка точка. Определи го најмалиот број бои со кои може да се обои таблата така што да не постојат истобојни соседни квадратчиња.

Решение. Секое единечно квадратче има најмалку три соседни квадратчиња (со најмалку три соседни квадратчиња се аголните), па затоа бројот на боите е поголем или еднаков на четири. Ќе докажеме дека четири бои се доволни. Да разгледаме квадрат 2×2 и да го обоеме во четири бои, кои на

1	2
3	4

цртежот десно се означени со 1, 2, 3 и 4. Ако десно од него залепиме уште еден таков квадрат, ќе добиеме правоаголник 2×4 кој ги задоволува условите на задачата. Понатаму, долепувајќи од десно 2×2 квадрати ќе добиеме 2×100 правоаголник кој ги задоволува условите на задачата. Сега, доволно е да земеме 50 такви 2×100 правоаголници кои ќе ги залепиме еден под друг и ќе добиеме 100×100 кој е обоен во четирите бои и ги задоволува условите на задачата.

35. Некои од единечните квадратчиња на квадратна 2020×2020 мрежа се обоени така што или во редот, или во колоната, или истовремено во редот и колоната на секое обоено квадратче нема други обоени квадратчиња. Определи го најголемиот можен број обоени квадратчиња.

Решение. Да разгледаме обоено квадратче. Ако тоа е единствено обоено во редот во кој се наоѓа, повлекуваме хоризонтална линија низ него. Ако не е единствено обоено во редот во кој се наоѓа, тогаш е единствено обоено во колоната во која се наоѓа. Тогаш повлекуваме вертикална линија низ него. На ваков начин на секое обоено квадратче му соодветствува точно по една линија (хоризонтална или вертикална) и на различните квадратчиња му соодветствуваат различни линии. Вкупно имаме најмногу $2020 + 2020 = 4040$ хоризонтални и вертикални линии, па затоа бројот на обоените квадратчиња е најмногу 4040. Ако претпоставиме дека обоените квадратчиња се 4039 или 4040, тогаш низ сите редови и/или низ сите колони се повлечени линии (во спротивно $2019 + 2019 = 4038 < 4039$). Ако низ сите редови се повлечени линии, добиваме дека бројот на обоените квадратчиња е 2020. Аналогно, ако низ сите колони се повлечени линии, бројот на обоените квадратчиња е 2020. И во двата случаја имаме противречност. Значи, бројот на обоените квадратчиња е помал или еднаков на

4038. Пример на 4038 обоени квадратчиња е кога ќе ги обоиме сите квадратчиња во најгорниот ред без првото квадратче одлево и сите квадратчиња на најлевата колона без најгорното квадратче.

36. Да ја разгледаме следната табела

4				
8	12			
16	20	24		
28	32	36	40	
...	...	...	...	...

Во која редица (хоризонтала) се наоѓа бројот 2012.

Решение. *Прв начин.* Во првата вертикала, разликата меѓу два соседни броја е за 4 поголема од разликата на претходните два такви броја. Според тоа, во првата колона се броевите:

4, 8, 16, 28, 44, 64, 88, 116, 148, 184, 224, 268, 316, 368,
424, 484, 548, 616, 688, 764, 844, 928, 1016, 1108, 1204,
1304, 1408, 1516, 1628, 1744, 1864, 1988, 2116.

Бројот 2012 се наоѓа меѓу броевите 1988 и 2116, па според тоа тој се наоѓа во 32-та редица (хоризонтала).

Втор начин. Забележуваме дека последен елемент во n -тата редица е $2n(n+1)$. Ако 2012-от број е во n -тата редица, важи

$$2(n-1)n < 2012 \leq 2n(n+1) \text{ или } (n-1)n < 1006 \leq n(n+1).$$

Јасно $n > 30$, бидејќи $30 \cdot 31 = 930$. За $n = 31$, $31 \cdot 32 = 992$ и за $n = 32$, $32 \cdot 33 = 1056$. Оттука добиваме дека $n = 32$. Значи 2012-от елемент се наоѓа во 32 редица.

37. Колку цели броеви x , $-1000 < x < 1000$ се деливи со 3, а колку цели броеви y , $-444 < y < 444$ не се деливи со 4. Кои се повеќе?

Решение. Од 1 до 999 имаме 333 броја кои се деливи со 3, од -999 до -1 имаме уште 333. Нулата е делива исто така со 3, па за x имаме $333 + 333 + 1 = 667$ можности.

За броевите од 1 до 443 имаме $443 = 4 \cdot 110 + 3$, т.е. има 110 броја кои се деливи со 4, од -443 до -1 има уште 110, плус и нулата добиваме дека од -443 до 443 има $110 + 110 + 1 = 221$ број делив со 4. Од -443 до 443 има 887 броеви, па имаме $887 - 221 = 666$ броја не се деливи со 4.

Значи, повеќе се оние од -999 до 999 кои се деливи со 3.

38. На таблата во низа се запишани 200 природни броеви еден по друг така што до секој парен број се наоѓа непарен број. Определи го најголемиот можен број парни броеви во низата?

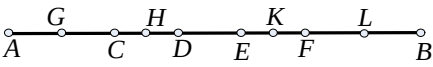
Решение. Од условот на задачата следува дека во низата не може да има три парни броеви еден по друг (до бројот во средината нема да има непарен број). Според тоа, во секоја тројка последователни броеви барем еден број е непарен. Но, $200 = 3 \cdot 66 + 2$, па затоа меѓу првите 198 броја има најмалку 66 непарни. Последните два броја не може да бидат и двата непарни (до последниот број нема да има непарен број). Според тоа во низата има најмалку 67 непарни броеви. Едно можно подредување со 67 непарни броеви во кое се посочени редните броеви на непарните броеви по нумерирањето на броевите во низата последователно со броевите од 1 до 200 е: 2, 5, 8, 11, 14, ..., 194, 197, 200. Конечно, во низата може да има најмногу $200 - 67 = 133$ парни броеви.

V ГЕОМЕТРИЈА

V.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. На отсечката AB се распоредени точките: C, D, E, F по дадениот редослед, така што $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. Растојанието меѓу средните точки на отсечките CD и EF е 12 cm , а растојанието меѓу средините точки на отсечките AC и FB е 23 cm . Најди ја должината на отсечката AB .

Решение. Нека G, H, K, L се

средишни точки на отсечките  AC, CD, EF, FB соодветно (види

цртеж). Бидејќи $\overline{CD} = \overline{EF}$, следува дека $\overline{CH} = \overline{EK}$ а оттука $\overline{HD} + \overline{EK} = \overline{CD} = \overline{DE}$. Тогаш имаме $12 = \overline{HD} + \overline{DE} + \overline{EK} = 2\overline{DE}$, па $\overline{DE} = 6\text{ cm}$. Оттука, добиваме $\overline{CF} = 3\overline{DE} = 18\text{ cm}$. Од друга страна,

$$\overline{GL} = \overline{GC} + \overline{CF} + \overline{FL}, \quad \overline{GC} = \overline{AG} = \frac{\overline{AC}}{2} \quad \text{и} \quad \overline{FL} = \overline{LB} = \frac{\overline{FB}}{2},$$

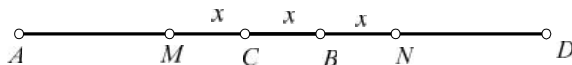
па имаме $23 = \frac{\overline{AC}}{2} + 18 + \frac{\overline{FB}}{2}$. Од последното равенство добиваме дека $\frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{FB}}{2} = 5\text{ cm}$. Според тоа

$$\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GL} + \overline{LB} = \frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{FB}}{2} + \overline{GL} = 5 + 23 = 28\text{ cm}.$$

2. Две отсечки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ со еднакви должини лежат на иста права, така што $\frac{1}{4}$ од нивните должини им е заедничка. Определи ја должината на тие отсечки ако растојанието меѓу нивните средни точки е 6 cm .

Решение. Нека со x

ја означиме должината на отсечката $\overline{CB}$.



Тогаш должината на отсечката $\overline{MN}$, која има должина 6 cm , изразена преку x е $3x$. Одовде имаме дека $3x = 6$, па затоа $x = 2\text{ cm}$. Должината на отсечката $\overline{AB}$ е двапати поголема од должината на отсечката $\overline{MB}$, односно 4 пати поголема од должината на отсечката $\overline{CB}$. Па според тоа должината на отсечката $\overline{AB} = 4 \cdot 2 = 8\text{ cm}$. Бидејќи од усло-

вот на задачата отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ се еднакви следува дека и отсечката $\overline{CD} = 8\text{ cm}$.

3. Дадена отсечка е поделена со три точки на четири нееднакви дела. Растојанието меѓу средините на внатрешните делови е 6 cm , а растојанието меѓу средините на крајните делови е 16 cm . Колку изнесува должината на дадената отсечка?

Решение. Нека крајните точки на дадената отсечка се A и B , и нека со точките C, D, E е поделена на четири нееднакви дела. Нека M е средина на AC , N средина на CD , P средина на DE и Q средина на EB . Тогаш, од услов $\overline{NP} = 6\text{ cm}$ и $\overline{MQ} = 16\text{ cm}$ (види цртеж). Сега, од $\overline{NP} = 6\text{ cm}$ имаме дека $\overline{CD} + \overline{DE} = 2 \cdot 6 = 12\text{ cm}$. Од последново и од $\overline{MQ} = 16\text{ cm}$, добиваме дека $\overline{MC} + \overline{EQ} = 16 - 12 = 4\text{ cm}$, па бидејќи M е средина на AC и Q е средина на AB , следи дека и $\overline{AM} + \overline{QB} = 4\text{ cm}$. Конечно, должината на дадената отсечка е

$$\overline{AB} = (\overline{AM} + \overline{QB}) + \overline{MQ} = 4 + 16 = 20\text{ cm}.$$

4. Аголот a е поголем од својот комплементен агол за толку пати колку што пати е помал од својот суплементен агол. Пресметај го аголот a .

Решение. Од условот на задачата, постои број ka таков што

$$a = k(90^\circ - a)$$

$$180^\circ - a = ka.$$

Но, тогаш

$$ka + a = 180^\circ$$

$$ka + a = k \cdot 90^\circ.$$

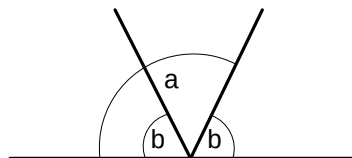
Според тоа, $k \cdot 90^\circ = 180^\circ$, од каде имаме $k = 2$. Но, тогаш $3a = 180^\circ$, т.е. $a = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

5. Нека a и b се два соседни агли такви што нивните симетрали се заемно нормални. Ако се знае дека a е за 30° поголем од b , пресметај колку степени изнесува секој од нив.

Решение. Бидејќи аглите се соседни и нивните симетрали се заемно нормални добиваме дека $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 90^\circ$, односно $a + b = 180^\circ$. Бидејќи знаеме дека a е за 30° поголем од b , добиваме дека $a = b + 30^\circ$. Ако го замениме ова во $a + b = 180^\circ$, добиваме $b = 75^\circ$. Па според тоа $a = 105^\circ$.

6. Разликата на аголот a и неговиот напореден агол b е 56° . Пресметај го комплементниот агол g на аголот b .

Решение. Нека a и b се напоредни агли кои го задоволуваат условот во задачата. Ако ја конструираме разликата $a - b$ како на цртежот, следува



$$b + (a - b) + b = 180^\circ.$$

Значи, $2b + 56^\circ = 180^\circ$, па затоа

$$b = (180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ.$$

Според тоа, $g = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$.

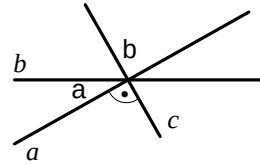
7. Две прави се сечат во една точка и образуваат четири агли (два остри и два тапи агли). Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половината од едниот накрсен тап агол. Определи ги големините на аглите?

Решение. *Прв начин.* Накрсните остри агли се еднакви меѓу себе и нека нивната големина изнесува x . Тогаш, накрсните тапи агли имаат големина $180^\circ - x$. Од условот имаме дека $2x = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$, односно $4x = 180^\circ - x$, од каде $5x = 180^\circ$, па $x = 36^\circ$ е големината на накрсните остри агли. Накрсните тапи агли имаат големина $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

Втор начин. Нека a е накрсниот остар агол и b е накрсниот тап агол. Од условот на задачата имаме дека накрсниот тап агол е 2 пати поголем од збирот на накрсните остри агли, односно $b = 2 \cdot (a + a) = 4a$ или накрсниот тап агол е 4 пати поголем од накрсниот остар агол. Значи, накрсниот остар агол изнесува $180^\circ : 5 = 36^\circ$, додека накрсниот тап агол е $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

8. При пресекот на правите a и b едниот од добиените агли е седум пати поголем од другиот. Во пресечната точка повлечена е нормала c на правата a . Пресметај го аголот меѓу правите b и c .

Решение. Да ги означиме со a и b , остриот и тапиот агол соодветно, што се добиваат при пресек на правите a и b (цртеж десно). Од условот на задачата следува дека $b = 7a$, па како $a + b = 180^\circ$, се добива дека $8a = 180^\circ$, односно $a = 180^\circ : 8 = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$. Конечно, аголот меѓу правите b и c е



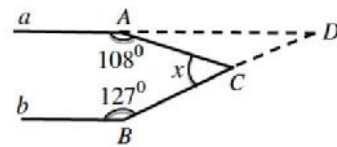
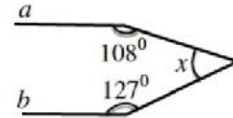
$$90^\circ - a = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$$

или

$$90^\circ + a = 90^\circ + 22^\circ 30' = 112^\circ 30'.$$

9. На цртежот десно правите a и b се паралелни. Користејќи ги дадените податоци определи го аголот x .

Решение. Да ги означиме темињата на аглиите 108° , 127° и x соодветно со A, B и C , а пресечната точка на правите a и BC со D (цртеж десно). Така $\angle ADC$ и $\angle bBC$ се агли на трансферзалата, па затоа



$$\angle ADC = 180^\circ - \angle bBC = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

Понатаму, $\angle CAD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ и како аголот x е надворешен за триаголникот ADC добиваме $x = 53^\circ + 72^\circ = 125^\circ$.

10. Две прави p и q се сечат во точката C . Точката C ја дели правата p на две полуправи, кои со една иста полуправа од правата q со почетна точка C градат два агли: $\angle pCq$ и $\angle qCp$. На симетралата на $\angle pCq$ избрана е точка M , а на симетралата на аголот $\angle qCp$ избрана е точка N така што $MN \parallel p$. Отсечката MN ја сече правата q во точка D . Докажи дека D е средина на отсечката MN .

Решение. Нека P е точка од полуправата Cp од $\angle pCq$ и нека Q е точка од полуправата Cp од $\angle qCp$. Нека CM е симетралата на $\angle pCq$ и CN е симетралата на $\angle qCp$ при што $MN \parallel PQ$, и нека D е пресечната точка на правата q со правата MN (види цртеж). Од CM е симетрала на аголот $\angle pCq$ и CN е симетрала на $\angle qCp$ следува

дека $\angle PCM = \angle MCD$ и $\angle DCN = \angle NCQ$. Како наизменични агли на трансферзала добиваме дека $\angle PCM = \angle CMD$ и $\angle NCQ = \angle CND$.

Значи,

$$\angle MCD = \angle CMD, \angle DCN = \angle DNC,$$

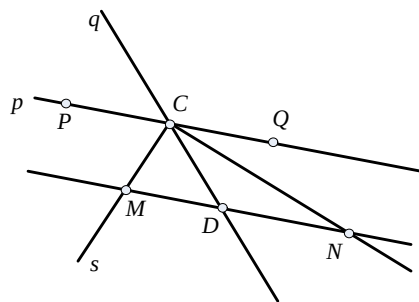
од каде следи дека триаголниците $\triangle CMD$ и $\triangle CND$ се рамнокраки со основи MC и NC , соодветно.

Според тоа

$$\overline{MD} = \overline{CD} \text{ и } \overline{CD} = \overline{DN}.$$

Од последните две равенства сле-

дува дека $\overline{MD} = \overline{DN}$, односно дека D е средина на отсечката MN .



V.2. ТРИАГОЛНИК

11. Во еден триаголник разликата на двата внатрешни агли a и b е еднаква на трикратната вредност на третиот агол g . Докажи дека $a - g = 90^\circ$.

Решение. Од условот имаме $a - b = 3g$ и $b = 180^\circ - a - g$ од каде што

$$3g = a - (180^\circ - a - g),$$

а оттука $2a - 2g = 180^\circ$, односно $a - g = 90^\circ$.

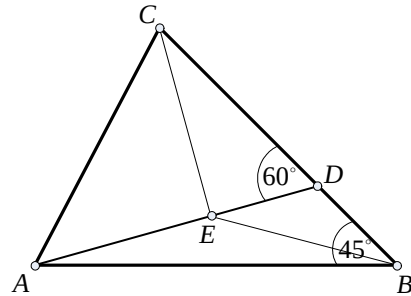
12. Да се определат внатрешните агли на триаголникот, ако е познато дека големината на еден агол е $\frac{8}{15}$ од големината на другиот агол и $\frac{4}{11}$ од големината на третиот агол.

Решение. Нека со a , b и g ги означиме внатрешните агли во триаголникот. Од условот на задачата следува дека $a = \frac{8}{15}b$ и $a = \frac{4}{11}g$.

Тогаш $b = \frac{15}{8}a$ и $g = \frac{11}{4}a$. Бидејќи збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180° добиваме $a + \frac{15}{8}a + \frac{11}{4}a = 180^\circ$. Решението на равенката е $a = 32^\circ$. Тогаш $b = 60^\circ$ и $g = 88^\circ$.

13. Нека D е точка на страната BC од триаголникот $\triangle ABC$, таква што $\overline{DC} = 2\overline{BD}$. Да се одредат аглиите на триаголникот ако $\angle ABC = 45^\circ$ и $\angle ADC = 60^\circ$.

Решение. Од услов на задачата следува $\overline{DC} = 2\overline{BD}$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$. Нека E е точка на AD таква што $CE \perp AD$. Јасно $\angle ECD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, па добиваме $\overline{DC} = 2\overline{DE}$, т.е. $2\overline{DE} = 2\overline{BD}$ од каде $\overline{DE} = \overline{BD}$.
Понатаму,



$$\angle BDE = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

и како $\overline{DE} = \overline{BD}$ добиваме $\angle DBE = \angle DEB = 30^\circ$. Значи,

$$\angle EBC = \angle ECB = 30^\circ, \text{ т.е.}$$

$$\overline{EC} = \overline{EB}. \quad (1)$$

Сега

$$\angle EBA = \angle CBA - \angle EBC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ \text{ и } \angle BEA = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

па следува дека $\angle EAB = 15^\circ$ т.е. $\triangle EAB$ е рамнокрак, т.е.

$$\overline{BE} = \overline{AE}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\overline{AE} = \overline{EC}, \text{ т.е. } \angle ECA = \angle EAC = 45^\circ.$$

Сега лесно се добива дека

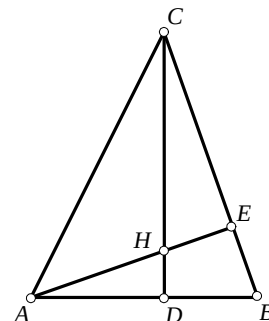
$$\angle BAC = 60^\circ, \angle CBA = 45^\circ, \angle BCA = 75^\circ.$$

14. Даден е остроаголен триаголник ABC . Неговите висини AE и CD се сечат во точката H , при што $\overline{AB} = \overline{CH}$. Пресметај го аголот $\angle ACB$.

Решение. Бидејќи $\angle EAB = \angle BCD$ (агли со нормални краци), триаголниците ABE и CHD се складни (според признакот АСА). Сега $\overline{CE} = \overline{AE}$, односно триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен.

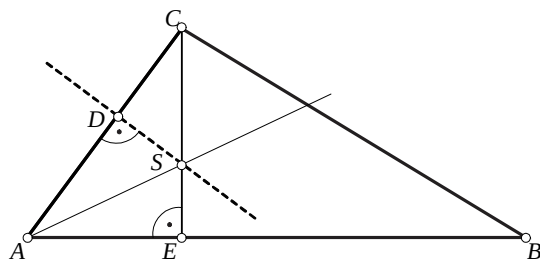
Според тоа,

$$\angle BAC = \angle ECA = 45^\circ.$$



15. Даден е остроаголниот $\triangle ABC$. Симетралата на аголот $\angle BAC$, симетралата на страната AC и висината од точката C се сечат во една точка. Одреди го аголот $\angle BAC$?

Решение. Нека $\angle BAC = a$ и нека S е пресекокот од условот на задачата. Бидејќи S припаѓа на симетралата на страната AC имаме дека $\overline{AS} = \overline{SC}$ односно, се добива дека триаголникот $\triangle ASC$ е рамнокрак. Затоа



$$\angle SAC = \angle ACS = \frac{a}{2}. \quad (1)$$

Од друга страна, триаголникот $\triangle AEC$ е правоаголен, па,

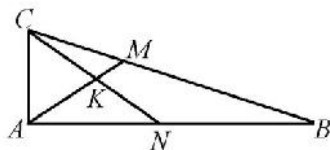
$$\angle ACS = 180^\circ - a - 90^\circ = 90^\circ - a. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $\frac{a}{2} = 90^\circ - a$, т.е. $a = 60^\circ$.

16. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Точката M е на страната BC и важи $\overline{AC} = \overline{AM}$, а точката N е на страната AB и важи $\overline{CN} = \overline{BN}$. Нека AM и CN се сечат во точката K . Определи го $\angle CKM$.

Решение. Имаме $\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$. Понатаму, триаголниците AMC и NBC се рамнокраки, па затоа $\angle ACB = \angle AMC$ и $\angle ABC = \angle NCB$. Според тоа,

$$\angle CKM = \angle KMC + \angle KCM = \angle AMC + \angle NCB = \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ.$$



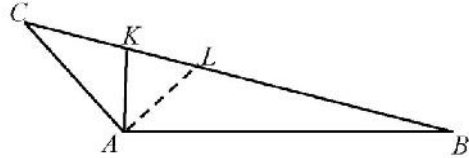
17. Даден е триаголник ABC во кој $\angle ABC = 20^\circ$ и $\angle ACB = 40^\circ$. Нака AL ($L \in BC$) е симетралата на аголот во темето A и важи $\overline{AL} = 3 \text{ cm}$. Определи ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.

Решение. Нека $K \in BC$ е таква што $\angle CAK = 40^\circ$. Тогаш триаголникот CAK е рамнокрак и затоа важи $\overline{AK} = \overline{CK}$. Понатами, имаме

$\angle AKC = 100^\circ$ и бидејќи овој агол е надворешен за триаголникот ABK имаме $\angle BAK = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$. Но, $\angle AKB = 180^\circ - \angle AKC = 80^\circ$, што значи дека триаголникот ALK е рамнокрак. Според тоа,

$$\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC} - \overline{BK} = \overline{CK} = \overline{AK}.$$

На крајот да забележиме дека и триаголникот ALK е рамнокрак. Навистина,



$$\angle BAC = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$$

и како AL е симетрала на агол добиваме $\angle BAL = 60^\circ$. Бидејќи

$$\angle LAK = \angle BAK - \angle BAL = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ,$$

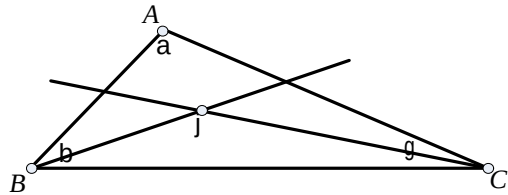
добиваме

$$\angle ALK = 180^\circ - (\angle ALK + \angle LAK) = 80^\circ.$$

Според тоа, $\overline{AK} = \overline{AL} = 3\text{ cm}$, па затоа $\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{AK} = 3\text{ cm}$.

18. Определи го аголот во триаголникот кој е за 20% помал од аголот меѓу симетралите на другите два агли на триаголникот.

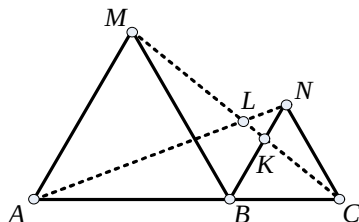
Решение. Нека бараниот агол е a , а нека со j го означиме аголот меѓу симетралите на другите два агли b и g на триаголникот (цртеж десно). Тогаш,



од условот имаме дека $a = 80\%j = \frac{80}{100}j = \frac{4}{5}j$. Од својството дека збирот на аглите во еден триаголник е 180° , ги имаме следните равенства $a + b + g = 180^\circ$ и $j + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g = 180^\circ$. Со замена за $a = \frac{4}{5}j$ во првото равенство и разложување на собироци на истото, добиваме $(\frac{4}{5}j + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g) + (\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g) = 180^\circ$, а со разложивање на собироци на второто равенство, добиваме $(\frac{4}{5}j + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g) + \frac{1}{5}j = 180^\circ$. Од последните две равенства се согледува дека $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g = \frac{1}{5}j$. Од друга страна $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}g = 180^\circ - j$. Следува дека $\frac{1}{5}j = 180^\circ - j$, од каде $\frac{6}{5}j = 180^\circ$, и конечно $j = 180^\circ \cdot \frac{5}{6} = 150^\circ$. Тогаш, бараниот агол во триаголникот е $a = \frac{4}{5}j = \frac{4}{5} \cdot 150^\circ = 120^\circ$.

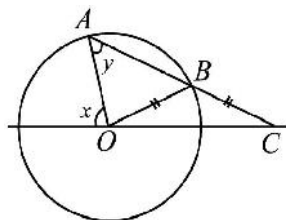
19. Точката B е внатрешна за отсечката AC . Во една иста полурамнина во однос на правата AC се конструирани рамностраните триаголници ABM и BCN . Правите AN и CM се сечат во точката L . Определи го $\angle CLN$.

Решение. Прво да забележиме дека аголот $\angle MBN = 60^\circ$. Ова значи дека аголот $\angle ABN = \angle MBC = 120^\circ$. Од рамностраните триаголници ABM и BCN имаме $\overline{AB} = \overline{BM}$ и $\overline{BC} = \overline{BN}$, соодветно. Од признакот за складност $\triangle ABN \cong \triangle MBC$, од каде следува дека $\angle ANB = \angle MCB = a$. Нека K е пресечната точка на правите MC и BN . Од $\angle BKC = \angle MKN = b$ (како накрсни агли), од $\triangle BKC$ имаме дека $a + b = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Конечно од $\triangle LKN$ добиваме дека $\angle KLN = 180^\circ - (a + b) = 60^\circ$, што значи дека $\angle CLN = 60^\circ$.



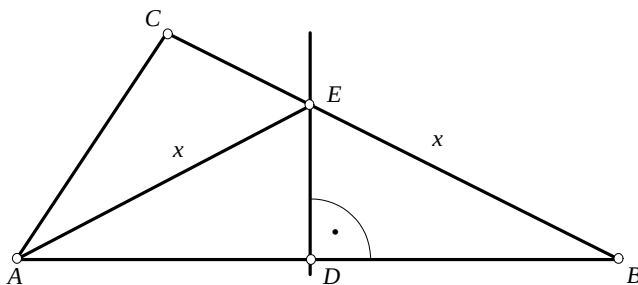
20. Нека O е центар на кружницата прикажана на цртежот десно. Определи ја релацијата меѓу аглиите x и y .

Решение. Од рамнокракиот триаголник ABO следува $\angle OBA = y$. Но, $\angle OBA$ е надворешен за триаголникот OCB , па затоа $\angle OCB = \frac{1}{2}y$. Понатаму, аголот x е надворешен за триаголникот OCA , па затоа $x = y + \frac{1}{2}y$, т.е. $2x = 3y$.



21. Во $\triangle ABC$, $\overline{AC} = 5\text{ cm}$ и $\overline{BC} = 9\text{ cm}$. Од средината на страната AB е издигната нормала која што страната BC ја сече во точка E . Точката E е поврзана со темето A . Пресметај го периметарот на $\triangle AEC$.

Решение. Ако D е средина на AB , тогаш од $DE \perp AB$, следува дека $\triangle ABE$ е рамнокрак, со основа AB , па $\overline{AE} = \overline{EB}$.



Тогаш имаме

$$L_{ACE} = \overline{AC} + (\overline{CE} + \overline{EA}) = 5 + 9 = 14 \text{ cm}.$$

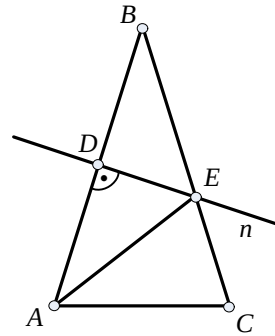
22. Нека е даден рамнокракиот триаголник ABC , каде $\overline{AB} = \overline{CB}$, со основа $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$. Низ средината D на кракот AB повлечена е нормала n на кракот AB која го сече кракот BC во точката E . Ако периметарот на триаголникот ABC е 40 cm , пресметај го периметарот на триаголникот AEC .

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник ($\overline{AB} = \overline{CB}$), D средина на кракот AB , n нормала на AB низ D која го сече кракот BC во точката E (цртеж десно). Од $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$ и $L_{ABC} = 40 \text{ cm}$ следува дека должината на секој од краците е

$$\overline{AB} = \overline{CB} = (40 - 10) : 2 = 15 \text{ cm}.$$

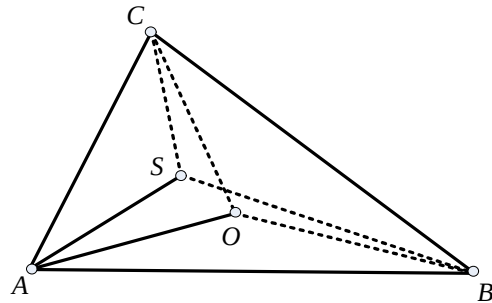
Триаголниците ADE и BDE се складни, бидејќи $\overline{AD} = \overline{BD}$ од D средина на AB , $\angle ADE = \angle BDE = 90^\circ$, $\overline{DE}$ заедничка страна. Од тука следува дека $\overline{AE} = \overline{BE}$. Сега, периметарот на триаголникот AEC е

$$L_{AEC} = \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{AC} = (\overline{BE} + \overline{EC}) + \overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AC} = 15 + 10 = 25 \text{ cm}.$$



23. Нека O и S се центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC соодветно ($b < c$, каде $b = \overline{AC}$ и $c = \overline{AB}$). Докажи дека $\angle SAO = \frac{1}{2}(g - b)$, каде $b = \angle ABC$ и $g = \angle ACB$.

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е остроаголен (при тоа центарот O на опишаната кружница ќе биде внатре во триаголникот, види цртеж). Случајот кога триаголникот е тапоаголен се разгледува на сличен начин. Нека $a = \angle CAB$. Тогаш користејќи ги својствата на центрите на опишаната и впишаната кружница добиваме,



$$\begin{aligned}
 \angle SAO &= \angle SAB - \angle OAB = \frac{1}{2}a - \angle ABO = \frac{1}{2}a - (b - \angle CBO) \\
 &= \frac{1}{2}a - b + \angle BCO = \frac{1}{2}a - b + (g - \angle OCA) \\
 &= \frac{1}{2}a - b + g - \angle CAO = \frac{1}{2}a - b + g - (\frac{1}{2}a + \angle SAO) \\
 &= g - b - \angle SAO,
 \end{aligned}$$

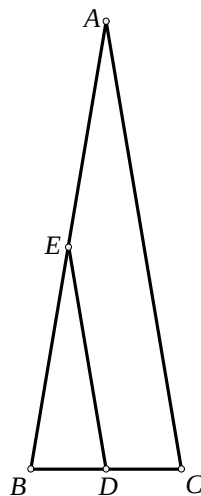
односно $2\angle SAO = g - b$, од каде се добива дека $\angle SAO = \frac{1}{2}(g - b)$, што и требаше да се докаже.

24. Рамнокракиот триаголник ABC има крак што е 3 пати подолг од основата. Ако точката D е средина на основата, а точката E средина на кракот AB , тогаш периметарот на четириаголникот $AEDC$ е за 42cm поголем од периметарот на триаголникот EBD . Пресметај го периметарот на триаголникот ABC .

Решение. Нека основата на триаголникот ABC има должина a . Тогаш должината на кракот е $3a$. Важи

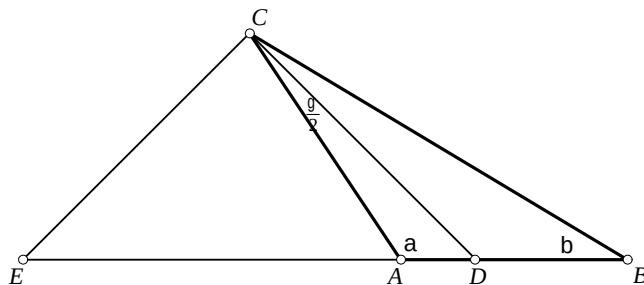
$$L_{AEDC} = \frac{3}{2}a + \overline{ED} + \frac{a}{2} + 3a \text{ и } L_{EBD} = \frac{3}{2}a + \overline{ED} + \frac{a}{2}.$$

Тоа значи дека $3a = 42$ односно $a = 14\text{cm}$. Должината на кракот е 42cm . Следува периметарот на триаголникот ABC е $L = 14 + 42 + 42 = 98\text{cm}$.



25. Нека во триаголникот ABC , разликата на аглите a и b е 90° . Симетралата на внатрешниот агол g при темето C ја сече спротивната страна AB во точката D , а симетралата на надворешниот агол при темето C го сече продолжението на страната AB , во точката E . Докажи дека триаголникот EDC е рамнокрак.

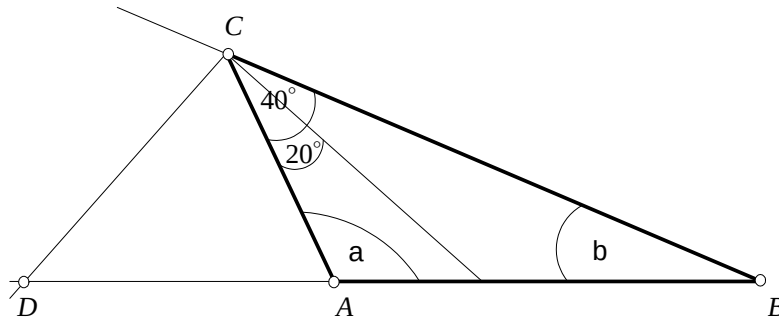
Решение. Според ознаките на цртежот имаме дека



$$\begin{aligned}\angle CDE &= 180^\circ - a - \frac{g}{2} = 180^\circ - a - \frac{180^\circ - a - b}{2} \\ &= \frac{180^\circ - a + b}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.\end{aligned}$$

Бидејќи краците на аголот DCE се симетрали на суплементни агли, следува $\angle DCE = 90^\circ$. Но, збирот на внатрешните агли на триаголникот EDC е 180° , па затоа $\angle CED = 45^\circ$. Значи триаголникот EDC е рамнокрак.

26. Во триаголникот ABC , $\angle ACB = 40^\circ$. Симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C ја сечат правата AB во точките D и E , така што $\triangle CDE$ е рамнокрак. Определи ги аглите на триаголникот ABC .



Решение. Нека CD е симетрала на надворешниот агол, а CE на внатрешниот во темето C . Симетралите CD и CE се заемно нормални, т.е. $\angle DCE = 90^\circ$. Од условот $\triangle CDE$ е рамнокрак, па следува дека тој е рамнокрак правоаголен со хипотенуза DE . Оттука следува дека $\angle DEC = 45^\circ$. Тој е надворешен агол за $\triangle CEB$ т.е.

$$45^\circ = 20^\circ + b, b = 25^\circ, a = 115^\circ.$$

27. Пресметај ги аглите во триаголникот ABC , ако аголот меѓу висината повлечена од темето C и симетралата на $\angle ACB$ изнесува 9° , а аголот меѓу симетралите на надворешните агли кај темињата A и B изнесува 61° .

Решение. Да ги означиме со a, b, g аглите во триаголникот ABC кај темињата A, B, C соодветно и со a_1, b_1, g_1 соодветните надворешни агли. Нека D е подножјето на висината од темето C , точката E е пресекот на симетралата на аголот $\angle ACB$ со страната AB и нека F е

пресекот на симетралите AY и BN на надворешните агли кај темињата A и B соодветно (види цртеж). Тогаш

$$\angle DCE = 9^\circ, \angle AFB = 61^\circ,$$

$$\angle XAY = \angle YAC = \frac{a_1}{2},$$

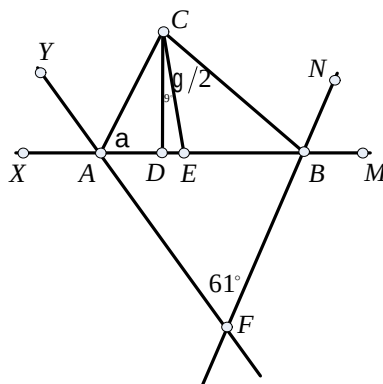
$$\angle CBN = \angle NBM = \frac{b_1}{2} \text{ и}$$

$$\angle ACE = \angle ECB = \frac{g}{2}.$$

За аглие во триаголникот ABF

имаме дека $\angle FAB = \angle XAY = \frac{a_1}{2}$ и

$$\angle ABF = \angle NBM = \frac{b_1}{2} \text{ како накрсни}$$



агли, па од збир на агли на еден триаголник имаме $\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2} + 61^\circ = 180^\circ$, од каде се добива дека $a_1 + b_1 = 238^\circ$. Од $a_1 = 180^\circ - a$ и $b_1 = 180^\circ - b$ со замена во последното равенство се добива $180^\circ - a + 180^\circ - b = 238^\circ$, од каде наоѓаме $a + b = 122^\circ$, па затоа

$$g = 180^\circ - (a + b) = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ.$$

Потоа, од правоаголникот триаголник ADC имаме

$$a = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - \left(\frac{g}{2} - \angle CDE\right) = 90^\circ - \left(\frac{58^\circ}{2} - 9^\circ\right) = 70^\circ$$

Конечно $b = 122^\circ - a = 122^\circ - 70^\circ = 52^\circ$.

28. Од точката M која страната AB на рамностраниот триаголник ABC ја дели на делови со должина 6 cm и 2 cm повлечени се нормали на останатите страни. Одреди го растојанието од точката C до повлечените нормали.

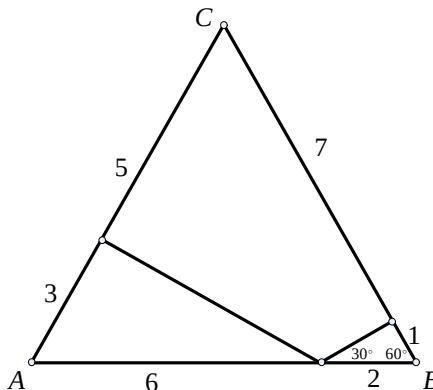
Решение. Триаголниците AMD и MBE се правоаголници со агли

30° и 60° , па

$$\overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AM} = 3 \text{ cm} \text{ и}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{MB} = 1 \text{ cm}.$$

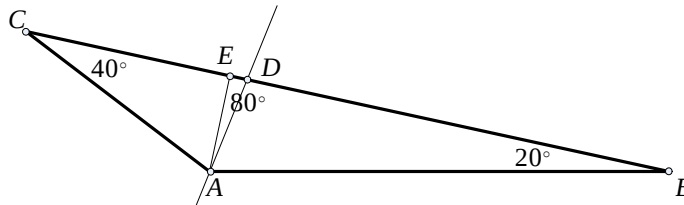
Бидејќи страната на триаголникот ABC е 8 cm имаме дека бараните растојанија од C до



нормалите се 5 cm и 7 cm .

29. Даден е триаголник ABC со $\angle CBA = 20^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$ и $\overline{AD} = 2\text{ cm}$, каде D е пресечната точка на симетралата на аголот кај темето A и страната BC . Одреди ја разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$.

Решение. На страната BC избираме точка E таква што $\angle AEB = 80^\circ$. Тогаш $\angle BAE = 80^\circ$, па триаголникот ABE е рамнокрак т.е. $\overline{AB} = \overline{AE}$. Триаголникот AEC е рамнокрак, бидејќи $\angle EAC = 40^\circ$, па $\overline{AE} = \overline{CE}$.



Триаголникот ADE е рамнокрак, бидејќи $\angle ADE = 80^\circ$, па затоа $\overline{AE} = \overline{AD} = 2\text{ cm}$.

Според тоа,

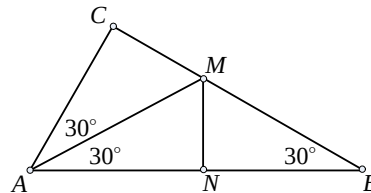
$$\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AD} = 2\text{ cm}.$$

30. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза AB таков што $\angle BAC = 60^\circ$. Нека M е пресекот на симетралата на аголот $\angle BAC$ со катетата BC . Точката N е средина на AB . Докажи дека $\overline{CM} = \overline{MN}$.

Решение. Од условот на задачата имаме $\angle ABC = 30^\circ$. Бидејќи AM е симетрала (види цртеж), имаме

$$\angle ABC = \angle BAM = 30^\circ.$$

Значи, триаголникот ABM е рамнокрак. Според тоа, MN е и висина во ABM повлечена кон AB . Оттука добиваме $\triangle ANM \cong \triangle ACM$, од каде добиваме дека $\overline{MN} = \overline{CM}$.



31. На страните AB и BC на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точки K и M така да $KM \parallel AC$. Отсечките AM и KC се сечат во точка O . Ако $\overline{AK} = \overline{AO}$, $\overline{KM} = \overline{MC}$, докажи дека $\overline{AM} = \overline{KB}$.

Решение. Од условот дека триаголниците $\triangle AKO$ и $\triangle KCM$ се рамнокраки триаголници и од $AC \parallel KM$ имаме:

$$\angle COM = \angle AOK = \angle AKO$$

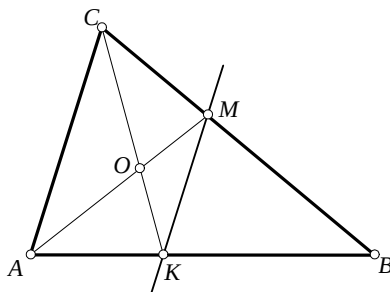
и

$$\angle MCO = \angle CKM = \angle ACK.$$

Затоа,

$$\angle AMC = 180^\circ - (\angle MOC + \angle OCM) = 180^\circ - (\angle AKO + \angle OKM) = \angle BKM$$

Уште, $\angle BMK = \angle BCA$, како агли со паралелни краци. Според тоа $\triangle MKB \cong \triangle AMC$, од каде следува дека $\overline{AM} = \overline{KB}$.



32. Во рамнокрак триаголник аголот кај врвот е 108° . Докажи дека висината спуштена кон основата е два пати помала од симетралата на аголот на основата.

Решение. Да ја означиме висината кон основата со $\overline{CD}$ која воедно е и симетрала на аголот кај врвот, а со $\overline{AE}$ симетралата на аголот на основата и нека пресечната точка на CD и AE е O . Аглите на основата се

$$(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ.$$

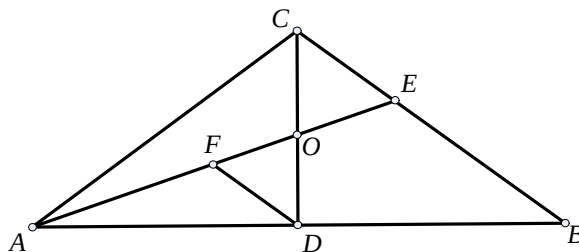
Тогаш

$$\angle OCE = 54^\circ \text{ и } \angle CEO = \angle CEA = 180^\circ - 108^\circ - 18^\circ = 54^\circ.$$

Значи триаголникот ECO е рамнокрак, па $\overline{OC} = \overline{OE}$. Ако F е средина на AE , тогаш $2\overline{FE} = \overline{AE}$. Понатаму, FD е средна линија на триаголникот ABE па $FD \parallel BC$. Тогаш

$$\angle FDO = \angle OCE = 54^\circ \text{ и } \angle OFD = \angle OEC = 54^\circ.$$

Затоа и триаголникот FDO е рамнокрак и важи $\overline{OF} = \overline{OD}$. Тогаш имаме $\overline{FE} = \overline{FO} + \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{OC} = \overline{CD}$. Значи $\overline{AE} = 2\overline{FE} = 2\overline{CD}$, па висината кон основата е два пати помала од симетралата на аголот на основата.

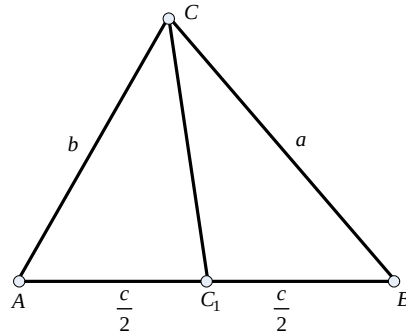


33. Докажи дека тежишната линија спуштена од темето C кон основата е помала од полупериметарот на триаголникот.

Решение Од триаголникот $\triangle ACC_1$ имаме дека $t_c < b + \frac{c}{2}$, а од триаголникот $\triangle BCC_1$ имаме дека $t_c < a + \frac{c}{2}$. Ако ги собереме овие две неравенства добиваме

$$2t_c < a + b + c,$$

од каде $t_c < \frac{L}{2}$.



34. Точките A, B, C, D припаѓаат на иста права во зададениот редослед, при што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Од истата страна на правата се избрани точките E и F , такви што $\triangle ACF$ и $\triangle CDE$ се рамнострани. Докажи дека триаголникот BEF е рамностран.

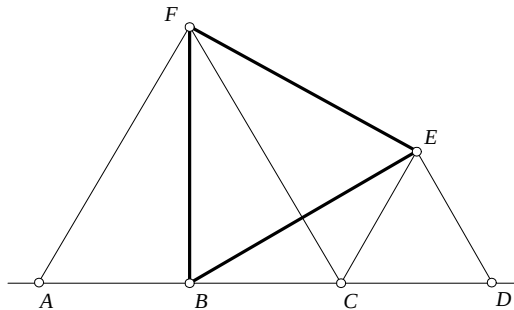
Решение. Бидејќи $\angle BCF = \angle ECD = 60^\circ$, добиваме

$$\angle FCE = 180^\circ - \angle BCF - \angle ECD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Триаголникот CDE е рамностран, па затоа

$$\overline{EC} = \overline{CD} = \overline{CB}.$$

Триаголниците BCF и ECF имаат по две еднакви страни $\overline{BC} = \overline{CE}$, FC е заедничка страна, и еднаков агол (што тие страни го зафаќаат). Според тоа



$\triangle FCB \cong \triangle FCE$, од каде добиваме $\overline{FB} = \overline{FE}$. Бидејќи $\angle BFC = \angle CFE = 30^\circ$, имаме $\angle BFE = 60^\circ$. Значи, $\triangle FBE$ е рамностран.

35. Даден е $\triangle ABC$ во кој должините на страните се последователни природни броеви. Тежишната линија од темето A е нормална на симетралата на аголот кај темето B . Да се пресмета периметарот на триаголникот $\triangle ABC$.

Решение. Нека D и E се пресечните точки на тежишната линија од A и симетралата на аголот од B , со страните BC и AC соодветно.

Од $\triangle ABD$ следува $\overline{AB} = \overline{BD}$, бидејќи BE е симетрала на $\angle B$, а ја сече AD под прав агол. Значи $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$. Бидејќи $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ се последователни броеви, имаме дека разликата $\overline{BC} - \overline{AB}$ е 1 или 2. Ќе ги разгледаме двата случаи посебно.

а) Ако $\overline{BC} - \overline{AB} = 1$, следува

$$2 \cdot \overline{AB} - \overline{AB} = 1$$

т.е. $\overline{AB} = 1$ и $\overline{BC} = 2$. Од условот на задачата, должините на страните се последователни природни броеви, па според тоа $\overline{AC} = 0$ или $\overline{AC} = 3$. За $\overline{AC} = 0$ имаме

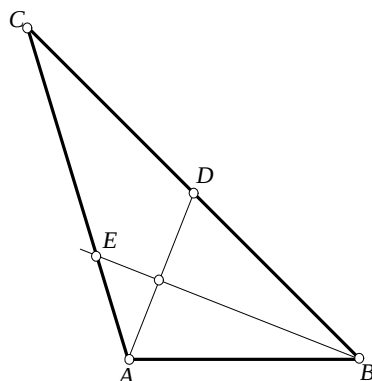
$$\overline{AB} + \overline{AC} = 0 + 1 < 2 = \overline{BC},$$

а за $\overline{AC} = 3$ имаме

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 1 + 2 = 3 = \overline{AC},$$

што не е можно (збирот на должините на две страни не е поголем од должината на третата страна).

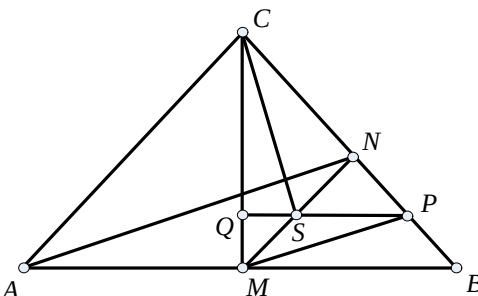
б) Ако $\overline{BC} - \overline{AB} = 2$, следува $\overline{AB} = 2$. Во тој случај имаме $\overline{BC} = 4$, и јасно $\overline{AC} = 3$. Значи, периметарот на триаголникот е $L = 2 + 3 + 4 = 9$.



36. Во рамнокракиот триаголник ABC , точката M е средина на основата $\overline{AB}$. Нека N е точка од кракот BC , така што $MN \perp BC$ и нека S е средина на отсечката $\overline{MN}$. Докажи дека правата AN е нормална на правата CS .

Решение. Од услов на задачата имаме дека $\overline{AM} = \overline{MB}$, $CM \perp AB$ ($\triangle ABC$ е рамнокрак со основа AB), $MN \perp BC$ и $\overline{MS} = \overline{SN}$. На страната BC избираме точка P така да $\overline{MP} \parallel \overline{AN}$. Во $\triangle ANB$ имаме $\overline{AM} = \overline{MB}$ и

$\overline{MP} \parallel \overline{AN}$, од каде следува дека MP е средна линија во $\triangle ANB$ и $\overline{NP} = \overline{PB}$. Во $\triangle MBN$ имаме $\overline{MS} = \overline{SN}$ и $\overline{NP} = \overline{PB}$, од каде следува



дека SP е средна линија во $\triangle MBN$ и дека $SP \parallel MB$. Нека Q е пресечната точка на правите SP и CM . Од $CM \perp AB$ и $PQ \parallel AB$, следува дека $PQ \perp CM$. Во триаголникот $\triangle MPC$ имаме дека $MN \perp PC$, $PQ \perp CM$ и $\{S\} = MN \cap PQ$, од каде следува дека S е ортоцентар во $\triangle MPC$. Значи, $CS \perp MP$, а од $MP \parallel AN$ ќе следува дека $CS \perp AN$, што и требаше да се докаже.

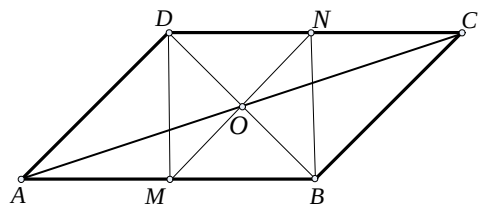
V.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

37. Периметарот на еден четириаголник е еднаков на 22 cm . Едната дијагонала на четириаголникот го разделува на два триаголника со периметри 13 cm и 19 cm . Определи ја должината на оваа дијагонала.

Решение. Во периметарот на секој од двата триаголника е вклучена дијагоналата која го дели четириаголникот на разгледуваните два триаголника. Затоа збирот на периметрите на двата триаголника се добива кога со периметарот на четириаголникот два пати се собере должината на дијагоналата. Според тоа, ако должината на дијагоналата е x , тогаш $22 + 2x = 19 + 13$, од каде добиваме $x = 5\text{ cm}$.

38. Нека $ABCD$ е паралелограм таков што $AB > BC$. Правата p која го содржи пресекот на дијагоналите O и е нормална на дијагоналата BD , ја сече страната AB во точка M и страната CD во точка N . Докажи дека четириаголникот $MBND$ е ромб.

Решение. Имаме $\triangle MBO \cong \triangle NDO$
($\angle OBM = \angle ODN$, како агли со паралелни краци, точката O е средина на дијагоналите, па $\overline{OB} = \overline{OD}$ и $\angle BOM = \angle DON = 90^\circ$). Следува $\overline{MB} = \overline{ND}$. Бидејќи овие страни се и паралелни следува четириаголникот $MBND$ е паралелограм. Неговите дијагонали се заемно нормални, па $MBND$ е ромб.



39. Отсечките AC и BD се сечат во точката O . Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на периметарот на триаголникот ABD , а пери-

метарот на триаголникот ACD е еднаков на периметарот на триаголникот BCD . Најди ја должината на отсечката $\overline{AO}$, ако $\overline{BO} = 10 \text{ cm}$.

Решение. Од $L_{\triangle ABC} = L_{\triangle ABD}$ следува

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{BD}$$

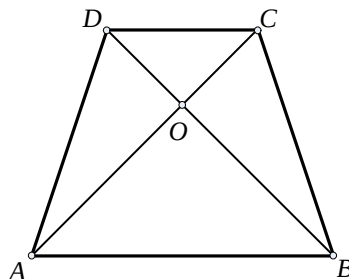
и од $L_{\triangle ACD} = L_{\triangle BCD}$ следува

$$\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{BC} + \overline{BD}.$$

Второто равенство го запишуваме како

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{BD} - \overline{AD}$$

и го собираме со првото, па добиваме $2\overline{AC} = 2\overline{BD}$, односно $\overline{AC} = \overline{BD}$.
Значи, $\overline{AD} = \overline{BC}$, па $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, од каде $\angle ABD = \angle CAB$. Оттука, $\triangle AOB$ е рамнокрак, па $\overline{AO} = \overline{BO} = 10 \text{ cm}$.



40. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = 3\overline{BC}$. На страната AB дадена е точка P таква што $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Докажи дека

$$\angle CAB + \angle CPB = 45^\circ.$$

Решение. Правоаголникот $ABCD$ го дополнуваме со на него складен правоаголник, како на цртежот. Нека на EF избереме точка Q таква што $\overline{EQ} = \frac{2}{3}\overline{EF}$.

Нека $\overline{BC} = x$. Ги разгледуваме правоаголните триаголници AEQ и QFC .

Бидејќи $\overline{AE} = \overline{QF} = x$ и $\overline{EQ} = \overline{CF} = 2x$

имаме дека тие се складни. Од складноста следува дека

$$\overline{AQ} = \overline{CQ} \quad (1)$$

односно

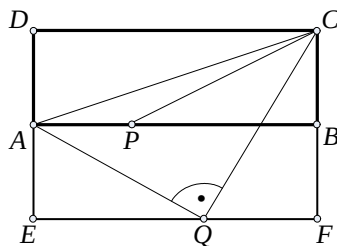
$$\angle EAQ = \angle CQF, \angle EAQ = \angle QCF. \quad (2)$$

Од (1) и (2) имаме дека триаголникот AQC е рамнокрак правоаголен.

Сега, бидејќи $\overline{PB} = 2x$ и $\overline{BC} = x$, следува дека правоаголните триаголници PBC и AEQ се складни. Од складноста имаме $\angle CPB = \angle EQA$.

Притоа $\angle QAB = \angle EQA$. Конечно

$$\angle CAB + \angle CPB = \angle CAB + \angle EQA = \angle CAB + \angle QAB = \angle QAC.$$



Бидејќи триаголникот QAC е рамнокрак правоаголен следува дека $\angle QAC = 45^\circ$.

41. Даден е паралелограмот $ABCD$. Нека E лежи на правата BC така што $\overline{AE} = \overline{AB}$ и нека F лежи на правата AB така што $\overline{CF} = \overline{CB}$. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{AC}$.

Решение. Да го означиме аголот

$\angle DAB$ со α . Тогаш важи

$$\angle CBF = \angle CFB = \angle ABE = \angle AEB = \alpha,$$

$$\angle BAE = 180^\circ - 2\alpha \text{ и}$$

$$\angle BCF = 180^\circ - 2\alpha.$$

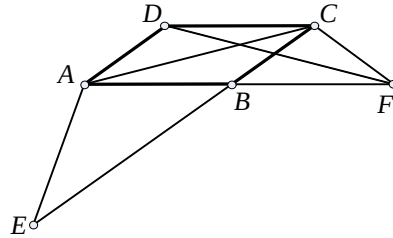
За триаголниците ADE и DAC важи:

$$\overline{AD} = \overline{DA}, \overline{AE} = \overline{AB} = \overline{DC} \text{ и } \angle DAE = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha = \angle ADC$$

и затоа тие се складни. Тогаш $\overline{DE} = \overline{AC}$. Триаголниците DFC и EDA се складни бидејќи $\overline{FC} = \overline{CB} = \overline{DA}$, $\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{EA}$ и

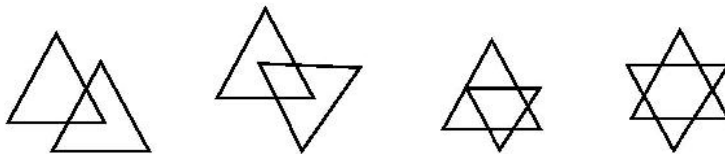
$$\angle ADCDCF = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha = \angle ADCEAD,$$

па затоа $\overline{DF} = \overline{ED}$. Конечно, $\overline{DF} = \overline{ED} = \overline{AC}$.



42. Покажи како триаголник, четириаголник, петаголник и шестаголник може да се добијат како пресек на два триаголника. Дали седумаголник може да се добие како пресек на два триаголника?

Решение. На долните цртежи е прикажано како триаголник, четириаголник, петаголник и шестаголник се добиваат како пресеци на два триаголника.



Како пресек на два триаголника не може да се добие седумаголник, бидејќи секоја страна на седумаголникот треба да лежи врз различна страна на некој од двата триаголника. Но два триаголника имаат купно 6 страни, па затоа пресекот може да има најмногу шест страни.

43. Дадени се пет кружници. Ако избереме било кои четири кружници од дадените пет, тие имаат заедничка точка. Докажи дека постои точка која е заедничка за сите пет кружници.

Решение. Нека k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5 се кружинците. Нека k_1, k_2, k_3 и k_4 поминуваат низ A , k_1, k_2, k_4 и k_5 поминуваат низ B и k_1, k_2, k_3 и k_5 поминуваат низ C . Но, тогаш k_1 и k_2 поминуваат низ A, B и C и бидејќи сите се различни кружници мора две од точките A, B и C да се соопфааат. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се A и B , односно $A \equiv B$. Но тогаш k_1, k_2, k_3, k_4 и k_5 поминуваат низ A .

44. Во рамнина се дадени 4 различни точки така што за секоја од нив постојат барем две од останатите три точки кои во однос на разгледуваната точка се на растојание не поголемо од 1. Докажи дека четирите точки можат да се покријат со круг со радиус 1.

Решение. Ако постои точка од четирите дадени точки, така што сите три останати точки се на растојание не поголемо од 1 во однос на разгледуваната точка тогаш покривањето го правиме со круг со центар во таа точка и радиус 1. Нека не постои таква точка. Следува постојат точки A и B што се на растојание поголемо од 1 ($\overline{AB} > 1$). Тогаш, од условот на задачата останатите две точки C и D се на растојание не поголемо од 1 и од A и од B ($\overline{AC} \leq 1, \overline{AD} \leq 1$ и $\overline{BC} \leq 1, \overline{BD} \leq 1$). Ќе докажеме дека сите 4 точки може да се покријат со кругот со центар во точката M –средина на отсечката AB и радиус 1. Од неравенството

$$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC} \leq 1 + 1 = 2,$$

следува дека точките A и B се во тој круг. Нека C_1 е симетрична точка на точката C во однос на центарот M . Тогаш, $\triangle BMC \cong \triangle AMC_1$ ($\overline{MB} = \overline{MA}$, $\angle BMC = \angle AMC_1$, $\overline{MC} = \overline{MC_1}$), од каде следува дека $\overline{BC} = \overline{AC_1}$. Тогаш,

$$2 \cdot \overline{CM} = \overline{CC_1} \leq \overline{AC} + \overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{BC} \leq 1 + 1 = 2,$$

односно $\overline{CM} \leq 1$. Аналогно се покажува дека и $\overline{DM} \leq 1$. Значи, и точките C и D се во тој круг.

V.4. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК, ЧЕТИРИАГОЛНИК И КРУГ

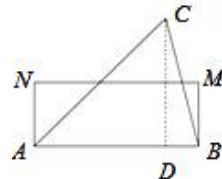
45. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle C = 90^\circ$) со катети $a = 12\text{ cm}$ и $b = 16\text{ cm}$. Висината повлечена кон хипотенузата е $h_c = 9,6\text{ cm}$. Определи ја хипотенузата.

Решение. За плоштината на правоаголникот добиваме

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96\text{ cm}^2 \text{ и } P = \frac{ch_c}{2} = \frac{9,6c}{2} = 4,8c.$$

Значи, $4,8c = 96$, па затоа $96 : 4,8 = 20\text{ cm}$.

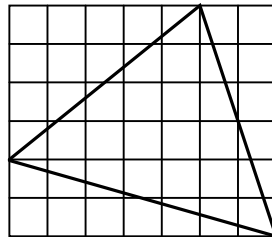
46. Правоаголникот $ABMN$ и триаголникот ABC имаат заедничка страна (цртеж десно). Плотините на двете фигури се еднакви. Определи ја должината на другата страна на правоаголникот ако $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ и $\overline{CD} = 4\text{ cm}$.



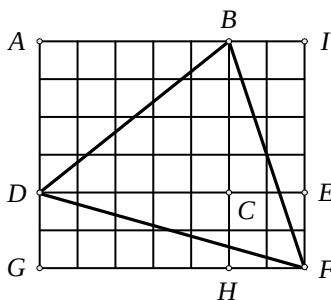
Решение. За плоштината на триаголникот добиваме $P = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\text{ cm}^2$.

Ако $\overline{AN} = x$, тогаш за плоштината на правоаголникот добиваме $P_1 = 5x$. Сега од $P = P_1$ следува $5x = 10$, т.е. $x = 2\text{ cm}$.

47. Определи ја плоштината на триаголникот на цртежот (без да се мерат потребните должини), ако секое од квадратчињата има плоштина 1 cm^2 .



Решение. Плоштината на триаголникот ќе ја пресметаме како разлика на плош-



тината на квадратот и триаголниците $\triangle ADB$, $\triangle BIF$ и $\triangle DFG$. Плоштините на триаголниците $\triangle ADB$, $\triangle BIF$ и $\triangle DFG$ ќе ги пресметаме како половина од плоштините на правоаголниците $ABCD$, $BIFH$ и $DEFG$ соодветно. Па плоштината на бараниот триаголник е

$$P = 42 - \frac{1}{2}(5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 7 \cdot 2) = 19\text{ cm}^2.$$

48. На страната AB на триаголникот е земена точка M , таква што $P_{AMC} = 2,7 \text{ cm}^2$ и $P_{BMC} = 3,6 \text{ cm}^2$. Ако $\overline{AM} = 3 \text{ cm}$, определи ја должината на отсечката BM .

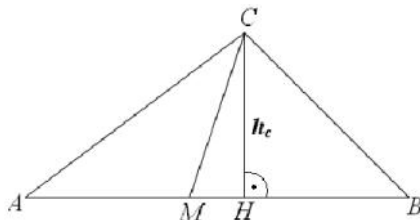
Решение. Нека h_c е висината повлечена од темето C во триаголникот ABC (цртеж десно).

Од $P_{AMC} = 2,7 \text{ cm}^2$ и $\overline{AM} = 3 \text{ cm}$

добиваме $\frac{\overline{AM} \cdot h_c}{2} = \frac{3h_c}{2} = 2,7$, па

затоа $h_c = 1,8 \text{ cm}$. Сега од $P_{BMC} = 3,6 \text{ cm}^2$ следува $\frac{\overline{BM} \cdot h_c}{2} = 3,6$, од

каде добиваме $\frac{\overline{BM} \cdot 1,8}{2} = 3,6$, односно $\overline{BM} = 4 \text{ cm}$.



49. На цртежот десно во квадратна мрежа е прикажан триаголникот ABC . Должината на страната на квадратчињата во мрежата е еднаква на 2 cm . Определи ја плоштината на триаголникот ABC .

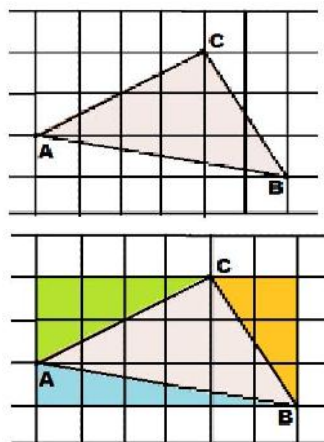
Решение. За да ја пресметаме плоштината на триаголникот ABC истиот ќе го сместиме во правоаголник формиран од шест хоризонтални и три вертикални квадратчиња (цртеж десно). Должините на страните на овој правоаголник се $3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$ и $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$. За да ја доби-

еме плоштината на триаголникот ABC од плоштината на правоаголникот треба да ги одземе плоштините на трите триаголници чии страни се 2 cm и 12 cm , 4 cm и 8 cm , 4 cm и 6 cm . Имаме

$$P_{ABC} = 12 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 12}{2} - \frac{4 \cdot 8}{2} - \frac{4 \cdot 6}{2} = 72 - 12 - 16 - 12 = 32 \text{ cm}^2.$$

50. Дадени се точките $A(-2, -2)$, $B(1, 5)$ и $C(-2, 3)$ во координатен систем со единечна отсчка 1 cm . Определи ја плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Дадените точки во координатниот систем се прикажани на цртежот десно. Нека висината на триаголникот ABC е отсечката BH .



Имаме:

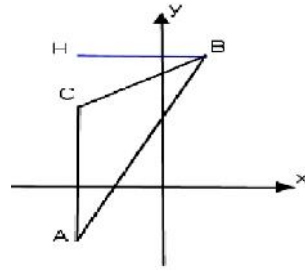
$$\overline{AC} = 3 - (-2) = 5 \text{ cm}$$

и

$$\overline{BH} = 1 - (-2) = 3 \text{ cm}.$$

Според тоа,

$$P_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5 \text{ cm}^2.$$



51. Колкав дел од правоаголникот претставува црната површина, ако точките F, G, E и H се средини на BC, CD, AF и FG , соодветно.

Решение. Со S да ја означиме плоштината на правоаголникот $ABCD$. Тогаш

$$P_{ABF} = \frac{1}{4}S, P_{CGF} = \frac{1}{8}S, P_{ADG} = \frac{1}{4}S.$$

Затоа,

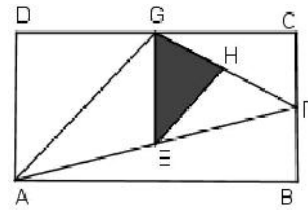
$$P_{AFG} = S - (\frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S + \frac{1}{4}S) = \frac{3}{8}S.$$

Сега,

$$P_{AEG} = P_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}S = \frac{3}{16}S,$$

па затоа

$$P_{EFH} = P_{ENG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}S = \frac{3}{32}S.$$



52. На страните MN, MC и PC на правоаголникот $MNPC$ земени се точки Q, A и B , соодветно (цртеж десно).

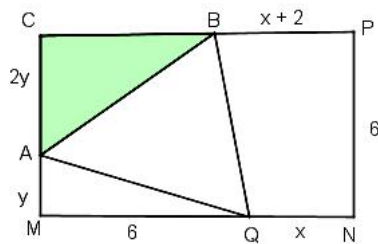
Ако

$$\overline{NP} = \overline{MQ} = 6 \text{ cm}, \overline{QN} = x, \overline{AM} = y,$$

$$\overline{BP} = x + 2 \text{ и } \overline{AC} = 2y,$$

определи ја плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Имаме $\overline{CB} = 6 + x - (x + 2) = 4 \text{ cm}$. Сега од $y + 2y = 6$, добиваме $y = 2 \text{ cm}$, па затоа $\overline{AC} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$. Значи, $P_{ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$.

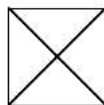


53. Триаголник и квадрат имаат еднакви плоштини. Ако висината на триаголникот е $1,25 \text{ cm}$, а периметарот на квадратот е 1 dm , определи

ја должината на страната на триаголникот соодветна на дадената висина.

Решение. Страната на квадратот е $a = 1\text{ dm} : 4 = 10\text{ cm} : 4 = 2,5\text{ cm}$. Според тоа, плоштината на квадратот е $2,5 \cdot 2,5 = 6,25\text{ cm}^2$. Ако b е страната соодветна на висината $h = 1,25\text{ cm}$ на триаголникот, тогаш $\frac{bh}{2} = 6,25$, па затоа $\frac{1,25b}{2} = 6,25$, т.е. $b = 10\text{ cm}$,

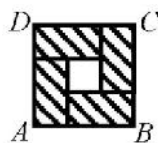
54. На цртежот десно е прикажан квадрат кој со дијагоналите е поделен на четири еднакви триаголници. Плоштината на еден од делбените триаголници е еднаква на најголемиот прост едноцифрен број. Определи го збирот на плоштините на сите триаголници прикажани на цртежот.



Решение. Најголемиот прост едноцифрен број е 7 и тоа е плоштината на еден од делбените квадрати. Во квадратот има 4 такви триаголници и уште 4 триаголници составени од по два делбени триаголници, па затоа нивните плоштини се еднакви на $2 \cdot 7 = 14$. Конечно, збирот на плоштините на сите триаголници е еднаков на

$$4 \cdot 7 + 4 \cdot 14 = 28 + 56 = 84.$$

55. Четири еднакви штрафирани правоаголници, секој со периметар 10 cm , се поставени така што формираат квадрат $ABCD$ (цртеж десно). Определи ја плоштината на овој квадрат.



Решение. Страна на квадратот е составена од една должина и една ширина на правоаголникот, па затоа нејзината должина е еднаква на полупериметарот на правоаголникот, т.е. на $10 : 2 = 5\text{ cm}$. Според тоа, плоштината на квадратот е еднаква на $5^2 = 25\text{ cm}^2$.

56. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за 2 cm , а нејзината соседна страна за 5 cm , тогаш добиваме правоаголник чија што плоштина е за 45 cm^2 поголема од плоштината на квадратот. Колкава е плоштината на квадратот?

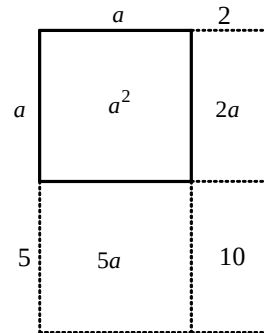
Решение. Нека страната на квадратот има должина a . Правоаголникот кој се добива со продолжувањето на страните на квадратот има страни $a + 2$ и $a + 5$. Плоштината на квадратот е $a \cdot a$, а на правоаголникот $(a + 2) \cdot (a + 5)$.

Но, правоаголникот всушност е добиен со доцртување на три правоаголници до дадениот квадрат и тоа правоаголници со плоштини $2a$, $5a$, $2 \cdot 5$ (види цртеж). Тогаш вкупното зголемување на плоштината на квадратот е

$$45cm^2 = 2a + 5a + 10 = (7a + 10)cm^2.$$

Оттука, $7a = 35$, односно страната на квадратот е $a = 5cm$.

Плоштината на квадратот изнесува $25cm^2$.



57. Должината на правоаголникот е $2mm$ помала од страната на квадратот со периметар $34,8cm$, а неговата ширина е за $2mm$ поголема од страната на рамностран триаголник со периметар $18,6cm$. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

Решение. Страната на квадратот е $34,8:4 = 8,7cm$, што значи дека должината на правоаголникот е $8,7 - 0,2 = 8,5cm$. Страната на рамностраниот триаголник е $18,6:3 = 6,2cm$, што значи дека ширината на правоаголникот е $6,2 - 0,2 = 6cm$.

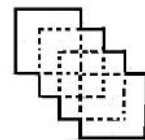
Според тоа, периметарот на правоаголникот е: $2(8,5 + 6) = 29cm$, а неговата плоштина е $8,5 \cdot 6 = 51cm^2$.

58. Должината на еден правоаголник е намалена за 10% , а неговата ширина е зголемена за 10% . Колку проценти е плоштината на новиот правоаголник во однос на плоштината на дадениот правоаголник?

Решение. Нека должините на страните на дадениот правоаголник се a и b . Тогаш димензиите на новиот правоаголник се $\frac{90}{100}a = 0,9a$ и $\frac{110}{100}b = 1,1b$. Неговата плоштина е $P_1 = 0,9a \cdot 1,1b = 0,99ab$ и како плоштината на почетниот правоаголник е $P = ab$, добиваме дека

$$P_1 = 0,99P = 99\%P.$$

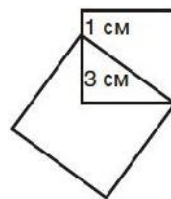
59. Четири квадратни салфетки се поставени како што е прикажано на цртежот десно, при што $\frac{2}{3}$ од страните им се преклопуваат. Периметарот на добиената фигура е еднаков на $48cm$. Определи ја нејзината плоштина.



Решение. Ако со a ја означиме страната на квадратот, тогаш периметарот на добиената фигура ќе биде $4a + 2 \cdot 6 \cdot \frac{a}{3} = 8a$. Затоа $8a = 48$, т.е. $a = 6 \text{ cm}$. Плоштината на добиената фигура е еднаква на збирот на плоштините на две цели салфетки и $\frac{6}{9}$ од плоштината на една салфетка, па затоа

$$P = 2a^2 + \frac{6}{9}a^2 = 2 \cdot 6^2 + \frac{6}{9} \cdot 6^2 = 72 + 24 = 96 \text{ cm}^2.$$

60. Од два квадрати е составена фигурата прикажана на цртежот десно. Периметарот на дадената фигура е еднаков на 24 cm . Определи ја плоштината на оваа фигура.



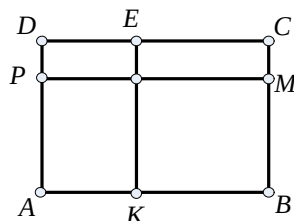
Решение. Должината на страната на малиот квадрат е еднаква на $1 + 3 = 4 \text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на

$$(24 - (1 + 4 + 4)) : 3 = 15 : 3 = 5 \text{ cm}.$$

Плоштината на дадената фигура се добива кога од збирот на плоштините на квадратите ја одземеме плоштината на правоаголниот триаголник со страни 3 cm и 4 cm . Имаме:

$$P = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 3}{2} = 35 \text{ cm}^2$$

61. Низ точката O во правоаголникот $ABCD$ повлечени се прави паралелни со страните на правоаголникот што го разбиваат на четири правоаголници $POED$, $OMCE$, $AKOP$, $KBMO$ (види цртеж).



а) Ако плоштините на правоаголниците $POED$, $OMCE$, $AKOP$ се соодветно 2, 4, 6, определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

б) Ако периметрите на правоаголниците $POED$, $OMCE$, $AKOP$ се соодветно 6, 10, 10, пресметај го периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Решение. а) Бидејќи плоштината на $OMCE$ е два пати поголема од плоштината на $POED$, следи дека страната OM е два пати поголема од страната OP . Слично, бидејќи плоштината на $AKOP$ е три пати поголема од плоштината на $POED$, следи дека OK е три пати

поголема од OE . Заклучуваме дека плоштината на правоаголникот $KBMO$ е $2 \cdot 3 = 6$ пати поголема од плоштината на правоаголникот $POED$, т.е. изнесува $6 \cdot 2 = 12$. Плоштината на $ABCD$ е збир од плоштините на четирите правоаголници и е еднаква на $2 + 4 + 6 + 12 = 24$.

б) Од тоа што периметарот на $OMCE$ е за 4 поголем од периметарот на $POED$, следува дека OM е за $4 : 2 = 2$ поголема од OP . Аналогно, OK е за два поголема од OE . Следи дека периметарот на $KBMO$ е за $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$ поголем од периметарот на $POED$, и изнесува $6 + 8 = 14$. За да се определи периметарот на правоаголникот $ABCD$, треба да се соберат периметрите на четирите правоаголници и збирот да се подели со 2, односно периметарот на $ABCD$ е $\frac{6+10+10+14}{2} = 20$.

62. Определи ја плоштината на правоаголник чија должина е еднаква на периметарот на квадрат со страна 3 cm , а ширина е еднаква на должината страната на квадрат со плоштина 4 cm^2 .

Решение. Периметарот на првиот квадрат е еднаков на $4 \cdot 3 = 12\text{ cm}$, па затоа должината на правоаголникот е 12 cm . Понатаму, од плоштината на вториот квадрат имаме $4 = 2 \cdot 2$, па затоа ширината на правоаголникот е еднаква на 2 cm . Конечно, плоштината на правоаголникот е еднаква на $12 \cdot 2 = 24\text{ cm}^2$.

63. Дадени се два еднакви квадрати со плоштина од 100 cm^2 . Страната на едниот квадрат се зголемила за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат за 16 cm . Кој од добиените квадрати ќе има поголема плоштина и за колку?

Решение. Ако плоштините на дадените квадрати се 100 cm^2 , тогаш нивните страни се 10 cm . Должината на страната на едниот од добиените квадрати е 12 cm . Ако периметарот на другиот квадрат се зголемил за 16 cm , тогаш неговата страна се зголемила за $16 : 4 = 4\text{ cm}$. Неговата страна е 14 cm .

Плоштината на првиот квадрат е $P_1 = 12 \cdot 12 = 144\text{ cm}^2$, а плоштината на другиот квадрат е $P_2 = 14 \cdot 14\text{ cm}^2 = 196\text{ cm}^2$. Разликата на нивните плоштини е

$$P_2 - P_1 = 196 - 144 = 52 \text{ cm}^2.$$

64. Во правоаголникот $ABCD$, должината на AB е двапати поголема од должината на BC . На страната AB е избрана точка P така што P е средина на отсечката AB . Со отсечката PC правоаголникот е поделен на еден четириаголник и еден триаголник чии периметри се разликуваат за 20 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

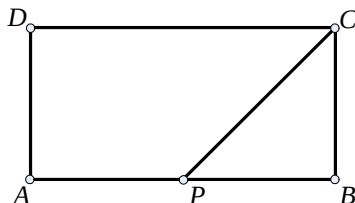
Решение. Ако означиме дека $\overline{BC} = b$

тогаш $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{AD} = b$. Периметарот на четириаголникот $APCD$ е

$b + b + 2b + \overline{PC}$, а периметарот на триаголникот PBC е $b + b + \overline{PC}$. Од ус-

ловот на задачата имаме дека периметрите се разликуваат за 20 па се добива $2b = 20$, односно $b = 10 \text{ cm}$. За

должината на правоаголникот $\overline{AB} = a$ имаме $a = 2b = 20 \text{ cm}$, а за плоштината



$$P = ab = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2.$$

65. Два квадрати имаат еднакви плоштини од 81 cm^2 . Страната на едниот квадрат е зголемена за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат е зголемен за 16 cm . Определи ја разликата на плоштините на добиените квадрати.

Решение. Од $81 = 9 \cdot 9$ следува дека должините на страните на квадратите се 9 cm . Значи, должината на страната на првиот квадрат е $9 + 2 = 11 \text{ cm}$, а на вториот квадрат е $9 + 16 : 4 = 9 + 4 = 13 \text{ cm}$. Нивните плоштин се $11 \cdot 11 = 121 \text{ cm}^2$ и $13 \cdot 13 = 169 \text{ cm}^2$. Конечно, разликата на плоштините на добиените квадрати е $169 - 121 = 48 \text{ cm}^2$.

66. Правоаголник со плоштина 99 cm^2 има ширина 9 cm . Пресметај ја плоштината на квадратот чиј периметар е еднаков на периметарот на дадениот правоаголник.

Решение. Ако плоштината на правоаголникот е 99 cm^2 , а ширината 9 cm , тогаш должината на правоаголникот е $99 : 9 = 11 \text{ cm}$. Периме-

тарот на правоаголникот е $L = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 11 = 40 \text{ cm}$. Тогаш, периметарот на квадратот е 40 cm , а неговата страна има должина $40 : 4 = 10 \text{ cm}$. Конечно, плоштината на квадратот е $P = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$.

67. Даден е правоаголник со страни $a \text{ cm}$ и $b \text{ cm}$. Ако страната со должина $a \text{ cm}$ се продолжи за $b \text{ cm}$ и страната со должина $b \text{ cm}$ се продолжи за $a \text{ cm}$ се добива квадрат со плоштина 100 cm^2 . Ако должините на страните на дадениот правоаголник се природни броеви, определи го правоаголникот со најмала плоштина.

Решение. Плоштината на добиениот квадрат е $P_{kv} = (a + b)^2 = 100 \text{ cm}^2$ и затоа $a + b = 10 \text{ cm}$. Бидејќи должините на страните на правоаголникот се природни броеви, за a и b можни се некој од следниве парови вредности: $a = 1, b = 9$; $a = 2, b = 8$; $a = 3, b = 7$; $a = 4, b = 6$; $a = 5, b = 5$, $a = 6, b = 4$; $a = 7, b = 3$; $a = 8, b = 2$ и $a = 9, b = 1$. Правоаголникот со најмала плоштина $P_{pr} = ab$ се добива за $a = 1, b = 9$ или $a = 9, b = 1$ и таа изнесува $P_{pr} = 9 \text{ cm}^2$.

68. Даден е правоаголен координатен систем Oxy со кој точките $A(-3, -2)$, $B(4, -2)$, $C(4, 5)$ и $D(-2, 2)$ се темиња на четириаголник. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Дијагоналата BD го дели четириаголникот $ABCD$ на два триаголника ABD и BCD (направи цртеж). Притоа важи

$$P_{ABD} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14 \text{ и } P_{BCD} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Затоа

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = 21 + 14 = 35.$$

69. Должините на основите на правоаголен трапез се 11 cm и 6 cm , а должините на неговите краци се 12 cm и $1,3 \text{ dm}$. Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Бидејќи трапезот е правоаголен, $1,3 \text{ dm} = 13 \text{ cm} > 12 \text{ cm}$ и најкраткото растојание меѓу две прави е нормалното растојание заклучуваме дека должината на висината на трапезот е 12 cm . Според тоа, плоштината на трапезот е еднаква на $\frac{11+6}{2} \cdot 12 = 17 \cdot 6 = 102 \text{ cm}^2$.

70. Во паралелограмот $ABCD$ точките K и P е средини на BD и AB , соодветно. Ако плоштината на триаголникот KPB е еднаква на 12 cm^2 , определи ја плоштината на четириаголникот $CKPB$.

Решение. Од условите на задачата следува дека точката K е пресек на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$ (направи цртеж). Сега, лесно се покажува дека

$$P_{APK} = P_{PBK} = 12 \text{ cm}^2 \text{ и } P_{AKD} = P_{ABK} = P_{CBK} = 24 \text{ cm}^2,$$

што значи

$$P_{CKPB} = P_{PBK} + P_{CBK} = 12 + 24 = 36 \text{ cm}^2.$$

71. Дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката O , која е средина на BD . Ако $\overline{AO} = 7,25 \text{ cm}$, $\overline{CO} = 2,5 \text{ cm}$ и плоштината на триаголникот OCD е $7,5 \text{ cm}^2$, определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Во четириаголникот $ABCD$ точката O е средина на дијагоналата BD , па затоа $\overline{BO} = \overline{OD}$ (направи цртеж). Бидејќи AO е тежишна линија на триаголникот ABD важи $P_{AOB} = P_{AOD}$ и како CO е тежишна линија на триаголникот BCD важи $P_{COB} = P_{COD} = 7,5 \text{ cm}^2$. Сега, $P_{COD} = \frac{\overline{OC} \cdot h}{2}$, па затоа $7,5 \text{ cm}^2 = \frac{2,5 \cdot h}{2}$, т.е. $h = 6 \text{ cm}$.

Триаголниците AOD и OCD имаат една иста висина $h = 6 \text{ cm}$, па затоа $P_{AOD} = \frac{\overline{AO} \cdot h}{2} = \frac{7,25 \cdot 6}{2} = 21,75 \text{ cm}^2$.

Според тоа, $P_{AOB} = P_{AOD} = 21,75 \text{ cm}^2$, па затоа

$$P_{ABCD} = 2P_{AOD} + 2P_{COD} = 2 \cdot 7,5 + 2 \cdot 21,75 = 58,5 \text{ cm}^2.$$

72. Даден е трапез со плоштина 182 cm^2 , чии мерни броеви на основите и висината, изразени во сантиметри се природни броеви. Нека помалата основа е b , поголемата основа е a и важи $0,6b = \frac{3}{8}a$, а висината е помала од големата основа и поголема од малата основа. Определи ја висината на трапезот.

Решение. Од $0,6b = \frac{3}{8}a$ следува $b = \frac{5}{8}a$. Според тоа,

$$182 = P = \frac{\frac{5}{8}a + a}{2} h, \text{ т.е. } ah = 14 \cdot 16.$$

Понатаму, $a = \frac{8}{5}b$, па затоа

$$182 = P = \frac{\frac{8}{5}b+b}{2}h, \text{ т.е. } bh = 10 \cdot 14.$$

Сега, бидејќи a, b, h се природни броеви за кои важи $b < h < a$, $bh = 10 \cdot 14$ и $ah = 14 \cdot 16$ заклучуваме дека $10 \cdot 14 < bh < h^2 < ah = 14 \cdot 16$, т.е. $h = 12, 13$ или 14 . Но, $h \nmid 10 \cdot 14$ и $h \nmid 14 \cdot 16$, па оттука следува $h = 14 \text{ cm}$.

73. Плоштината на трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е 14 cm^2 . Низ темето C е повлечена права $CM \parallel AD$ ($M \in AB$). Ако $\overline{AB} = 1 \text{ dm}$ и $\overline{DC} = 40 \text{ mm}$, определи ја плоштината на триаголникот MBC .

Решение. Од $\overline{DC} = 4 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ и $\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}h = P_{ABCD}$ следува $7h = 14$, т.е. $h = 2 \text{ cm}$ (направи цртеж). Понатаму,

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{CD} = 6 \text{ cm},$$

па затоа $P_{MBC} = \frac{\overline{MB} \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}^2$

74. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(-4, -2)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$ и D која е симетрична на точката C во однос на ординатната оска. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

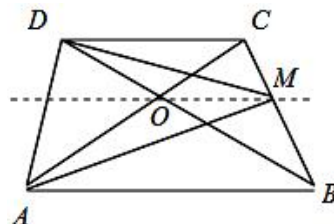
Решение. Четириаголникот $ABCD$ е трапез (направи цртеж). Притоа негови основи се $\overline{AB} = 7$ и $\overline{CD} = 4$, а висината е $\overline{CH} = 5$. Според тоа,

$$P_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{CH} = \frac{(7+4) \cdot 5}{2} = 27,5.$$

75. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се сечат во точката O . Низ точката повлекуваме права паралелна на основите на трапезот, која го сече кракот BC во точката M . Плоштината на триаголникот AMD е еднаква на $3,6 \text{ cm}^2$. Определи ја плоштината на триаголникот BOD .

Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат заедничка страна AB и еднакви висини (цртеж десно), па затоа имаат еднакви плоштини, т.е. $P_{ABC} = P_{ABD}$. Сега,

$$P_{AOD} = P_{ABD} - P_{ABO} \text{ и}$$



$$P_{BCO} = P_{ABC} - P_{ABO},$$

што значи

$$P_{AOD} = P_{BCO}. \quad (1)$$

На сличен начин, триаголниците OMD и OMC имаат заедничка страна и еднакви висини повлечени кон неа, па затоа

$$P_{OMD} = P_{OMC}, \quad (2)$$

и на потполно ист начин добиваме

$$P_{OMA} = P_{OMB}, \quad (3)$$

Ако ги собереме (2) и (3) добиваме

$$P_{OMD} + P_{OMA} = P_{OMC} + P_{OMB},$$

па од (1) следува $P_{AMDO} = P_{BCO} = P_{AOD}$. Според тоа,

$$P_{AMD} = P_{AOD} + P_{AMDO} = 2P_{BCO},$$

па затоа

$$P_{BCO} = P_{AMD} : 2 = 3,6 : 2 = 1,8 \text{ cm}^2.$$

76. Дадени се правилен петаголник, седумаголник и деветаголник, кои имаат еднакви плоштини и еднакви апотеми. Кој од многуаголниците има најголема страна?

Решение. Нека плоштините на многуаголниците се P_5, P_7, P_9 , а x, y, z се соодветно должините на нивните страни. Имаме:

$$P_5 = \frac{5ax}{2}, P_7 = \frac{7ay}{2}, P_9 = \frac{9az}{2}.$$

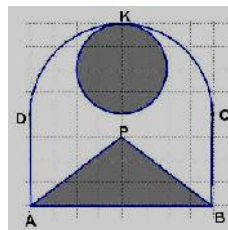
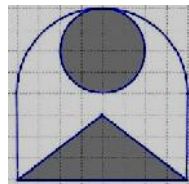
Но, $P_5 = P_7 = P_9$, па затоа $5x = 7y = 9z$, од каде следува дека $x > y > z$.

77. Должината на страната на едно квадратче во мрежата дадена на цртежт десно е 1 cm . Определи ја плоштината на белиот дел на фигурата прикажана на овој цртеж.

Решение. Целата фигура се состои од правоаголник $ABCD$ и полуокруг CKD . Должината на страните на правоаголникот се 8 cm и 4 cm , полуокругот е со радиус 4 cm . Според тоа, плоштината на целата фигура е:

$$P = 8 \cdot 4 + \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 32 + 8\pi \text{ cm}^2.$$

Сивите делови се круг со радиус 2 cm и триа-



голник со основа 8 cm и висина 3 cm . Значи, нивната плоштина е:

$$P' = \frac{8 \cdot 3}{2} + p \cdot 2^2 = 12 + 4p\text{ cm}.$$

Конечно, бараната плоштина е:

$$P - P' = 4(5 + p)\text{ cm}^2.$$

78. Даден е правоаголник $ABCD$ и полукружница со центар во средината O на страната BC (цртеж десно). Определи ја плоштината на сивиот дел од правоаголникот $ABCD$.

Решение. За плоштите на правоаголникот и полукругот имаме:

$$P_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32 \text{ и } P_{BCE} = \frac{2^2 p}{2} = 2p.$$

Според тоа, за плоштината на фигурата $ABECD$ добиваме

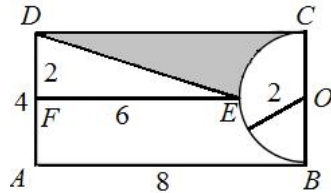
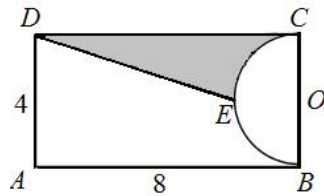
$$P_{ABECD} = P_{ABCD} - P_{BCE} = 32 - 2p.$$

Нека F е средина на AD . Тогаш

$$P_{ABEF} = \frac{1}{2} P_{ABECD} = \frac{1}{2} (32 - 2p) = 16 - p.$$

Понатаму, $P_{\triangle DFE} = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{FE}}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$, па затоа

$$P_{DEC} = P_{ECDF} - P_{\triangle DFE} = 16 - p - 6 = 10 - p.$$

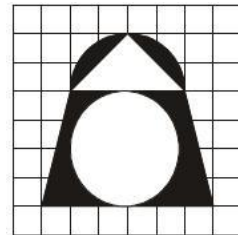


79. Должината на страната на едно квадратче во мрежата прикажана на цртежот десно е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на црниот дел од фигурата.

Решение. Дадената фигура е составена од траpez со должини на страни 6 cm и 4 cm , чија висина е 4 cm и полукруг со радиус 2 cm . Според тоа, плоштината на целата фигура е

$$\frac{6+4}{2} \cdot 4 + \frac{p \cdot 2^2}{2} = 20 + 2p\text{ cm}^2.$$

Белата површина е круг со радиус 2 cm и триаголник со основа 4 cm и висина 2 cm . Според тоа, плоштината на белиот дел од површината

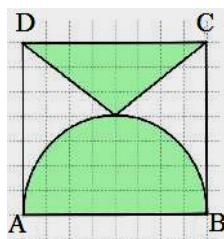


$$e \cdot p \cdot 2^2 + \frac{4 \cdot 2}{2} = 4p + 4 \text{ cm}^2.$$

Конечно, плоштината на црниот дел од фигурата е еднаква на

$$20 + 2p - 4p - 4 = 2(8 - p) \text{ cm}^2.$$

80. Должината на страната на едно квадратче во мрежата прикажана на цртежот десно е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на необоениот дел од правоагоникот.



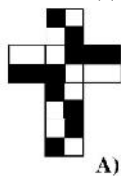
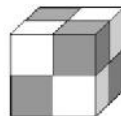
Решение. Имаме $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 7 \text{ cm}$ и должината на висината на обоениот триаголник 3 cm .

Според тоа, плоштината на правоаголникот е $P = 8 \cdot 7 = 56 \text{ cm}^2$, плоштината на полукругот е $P' = \frac{p \cdot 4^2}{2} = 8p \text{ cm}^2$ и плоштината на триаголникот е $P'' = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ cm}^2$. Конечно, бараната плоштина е

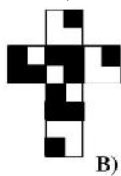
$$P - (P' + P'') = 56 - 8p - 12 = 4(11 - 2p) \text{ cm}^2.$$

V.5. СТЕРЕОМЕТРИЈА

81. Коцката прикажана на цртежот десно е составена од четири бели и четири црни единечни коцки. На долниот цртеж се прикажани пет мрежи на коцка. Која е мрежата на дадената коцка?



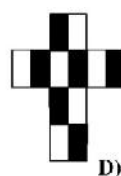
A)



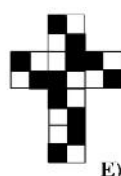
B)



C)



D)

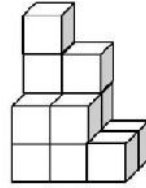


E)

Решение. Секој сид на коцката содржи по два црни квадрати и тие се наоѓаат во спротивните темиња (исто важи и за белите квадрати). Ова е исполнето само за мрежите C) и E). Според тоа, една од овие две мрежи е мрежа на дадената коцка. Да разгледаме било кои два сида на коцката кои имаат заеднички раб. Јасно, постои единечна коцка чии два сида учествуваат по еден во разгледаните два сида на големата коцка. Но двата сида на единечната коцка имаат заеднички раб, што значи дека соодветните на нив единечни квадрати во мрежата се

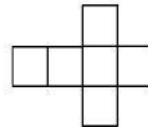
еднобојни и имаат заедничка страна. Тоа важи само за мрежата Е) и тоа е одговорот на задачата.

82. Телото на цртежот десно е составено од 13 еднакви коцки со раб долг 1 cm . Определи ја плоштината на ова тело.



Решение. Сидот на телото кој е на долната страна е правоаголник со должини на страни 2 cm и 3 cm , па затоа неговата плоштина е еднаква на $2 \cdot 3 = 6\text{ cm}^2$. Кога телото го гледаме од горе, повторно гледаме правоаголник со страни 2 cm и 3 cm , па затоа плоштината на горните сидови е еднаква на 6 cm^2 . Кога гледаме од напред сидовите на телото се составени од 8 единечни квадрати, па затоа нивната плоштина е еднаква на 8 cm^2 , а исто толку е плоштината на задниот сид (Зошто?). Кога гледаме од лево сидовите на телото се составени од 6 единечни квадрати, па затоа нивната плоштина е еднаква на 6 cm^2 , а исто толкава е плоштината на сидот кога гледаме од десно. Според тоа, плоштината на телото е еднаква на $6 + 6 + 8 + 8 + 6 + 6 = 40\text{ cm}^2$.

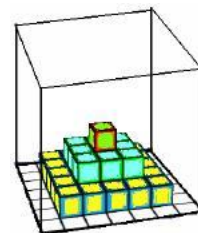
83. Периметарот на обвивката на коцката прикажана на цртежот десно е еднаков на $4,2\text{ dm}$. Определи ги волуменот и плоштината на коцката.



Решение. Нека должината на работ на коцката е еднаква на a . Тогаш периметарот на обвивката на коцката е еднаков на $14a$, па затоа $14a = 4,2$, односно $a = 4,2 : 14\text{ dm} = 42 : 14\text{ cm} = 3\text{ cm}$.

Според тоа, плоштината на коцката е $P = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 = 54\text{ cm}^2$, а нејзиниот волумен е $V = a^3 = 3^3\text{ cm}^3 = 27\text{ cm}^3$.

84. На дното на аквариум во форма на коцка се поставени мали коцки како што е прикажано на цртежот десно и аквариумот е наполнет со вода. Плоштината на телото формирано од малите коцки (без основата) е 549 cm^2 . Определи го волуменот на водата.



Решение. Плоштината на телото формирана од малите коцки (без основата) се состои од плоштините на $25 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 61$ сид на малите коцки. Затоа плоштината на еден сид на малите коцки е еднаква на $549 : 61 = 9 \text{ cm}^2$. Според тоа, должината на работ на малите коцки е 3 cm . Понатаму, должината на работ на аквариумот е $7 \cdot 3 = 21 \text{ cm}$ и неговиот волумен е $V = 21^3 = 9261 \text{ cm}^3$. Бројот на малите коцки е $5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 = 35$ и нивниот вкупен волумен е $35 \cdot 3^3 = 945 \text{ cm}^3$. Волуменот на водата е

$$9261 - 945 = 8316 \text{ cm}^3 = 8,316 \text{ dm}^3.$$

85. Основата на права призма е правоаголен триаголник со страни 3 cm , 4 cm и 5 cm . Околниот раб на призмата е 20% подолг од хипотенузата. Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

Решение. Катетите на основата се со должини 3 cm и 4 cm , а хипотенузата е со должина 5 cm . Според тоа, околниот раб на призмата е долг $\frac{120}{100} \cdot 5 = 6 \text{ cm}$. Значи, волуменот на призмата е

$$V = Bh = \frac{ab}{2} h = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 6 = 36 \text{ cm}^3,$$

а нејзината плоштина е

$$P = 2B + O = 2 \cdot \frac{ab}{2} + (a + b + c)h = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + (3 + 4 + 5) \cdot 6 = 12 + 72 = 84 \text{ cm}^2.$$

86. Една призма има 201 рабови. Определи го збирот на бројот на темињата и бројот на сидовите.

Решение. Ако призмата е n – страна, тогаш таа има $2n$ темиња, $n + 2$ сидови и $3n$ рабови. Според тоа, збирот на бројот на темињата и бројот на сидовите е $2n + n + 2 = 3n + 2$, т.е. тој е за 2 поголем од бројот на рабовите. Значи, во нашиот случај збирот на бројот на темињата и бројот на сидовите е $201 + 2 = 203$, а станува збор за $201 : 3 = 67$ страна призма.

Забелешка. Ако пирамидата е n – страна, тогаш таа има $n + 1$ теме, $2n$ рабови и $n + 1$ сид. Според тоа, збирот на бројот на темињата и бројот на сидовите е $n + 1 + n + 1 = 2n + 2$, т.е. тој е за 2 поголем од бројот на рабовите.

87. Дадено е тело со 24 рабови и 13 темиња. Колку сидови има ова тело?

Решение. Ако телото е призма, тогаш тоа има $2n$ темиња и $3n$ рабови, што во нашиот случај не е можно, бидејќи броевите 24 и 13 се заемно прости. Ако телото е пирамида, тогаш тоа има $n+1$ теме и $2n$ рабови. Во случајот имаме $n+1=13$ и $2n=24$, т.е. $n=12$. Значи, телото е дванаесетстрана пирамида и бројот на нејзините сидови $n+1=13$.

88. Дадена е пирамида со 17 сидови, кај која сите рабови се со еднаква должина. Збирот на должините на рабовите е 288 cm . Определи ја должината на еден раб на пирамидата.

Решение. Бидејќи пирамидата има 17 сидови и еден сид е основата, нејзиниот омотач се состои од 16 сидови. Според тоа, пирамидата е шестнаесетстрана и таа има $16+16=32$ рабови кои се еднаква должина. Значи, должината на еден раб е $288:32=9\text{ cm}$.

89. Мајстор и чирак треба да направат од бетон една плоча со димензии 4 m , 3 m и 20 cm , како и 4 оградни сидови со димензии 20 cm , 3 m и 25 cm . Мајсторот му рекол на чиракот да пресмета и да го нарача точното количество потребен бетон. Чиракот пресметал дека треба да нарача 30 m^3 бетон. Дали чиракот згрешил во пресметката?

Решение. Потребниот бетон за да се направи плоча со димензии 4 m , 3 m и 20 cm е

$$4 \cdot 3 \cdot 0,2 = 2,4\text{ m}^3,$$

а за 4 сидови со димензии 20 cm , 3 m и 25 cm е

$$4 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 0,25 = 0,6\text{ m}^3.$$

Значи вкупно се потребни 3 m^3 бетон, односно чиракот згрешил во пресметката.

90. Плоштините на трите различни сидови на квадар се 8 cm^2 , 24 cm^2 и 3 cm^2 . Определи го волуменот на овој квадар.

Решение. Ако должините на страните на квадарот се a, b и c , тогаш

$$ab = 3, bc = 8 \text{ и } ac = 24.$$

Според тоа,

$$(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) = 3 \cdot 8 \cdot 24 = 24^2,$$

па затоа $V = abc = 24\text{ cm}^3$.

91. Три полни метални коцки со рабови 3 cm , 4 cm и 5 cm се стопени и од растопениот метал е направена нова коцка. Определи ја плоштината на новата коцка.

Решение. За волуменот на новата коцка добиваме

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216\text{ cm}^3.$$

Бидејќи $6^3 = 216$, заклучуваме дека должината на раб на новата коцка е 6 cm . Конечно, плоштината на новата коцка е

$$P = 6 \cdot 6^2 = 216\text{ cm}^2.$$

92. Дрвен квадар со должини на рабовите природни броеви има волумен 250 cm^3 . Се пила тој е расечен на два дела кои се две еднакви коцки. Колкава е плоштината на квадарот?

Решение. Секоја од коцките има волумен $250 : 2 = 125\text{ cm}^3$. Ако a е раб на коцката, тогаш $a^3 = 125$, односно $a = 5\text{ cm}$. Значи рабовите на квадарот се $a, a, 2a$, т.е. $5\text{ cm}, 5\text{ cm}, 10\text{ cm}$, а неговата плоштина е

$$P = 2(5 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 10)\text{ cm}^2 = 250\text{ cm}^2.$$

93. Сад со форма на коцка со раб 7 cm е до горе полн со вода. Во него се става полна бронзена коцка, при што дел од водата во поголемиот сад претекува. Определи ја плоштината на бронзената коцка, ако волуменот на водата која останала во големата коцка е 335 cm^3 .

Решение. Од $7^3 = 343\text{ cm}^3$ и $343 - 335 = 8\text{ cm}^3$ заклучуваме дека волуменот на бронзената коцка е 8 cm^3 . Сега, од $8 = 2^3$ следува дека должината на раб на бронзената коцка е $a = 2\text{ cm}$. Според тоа, нејзината плоштина е еднаква на $6a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24\text{ cm}^2$.

94. Во фискултурна сала со должина 15 m и ширина 120 dm има 90 спортисти. Определи ја висината на салата, ако се знае дека за секој спортист има по 8 m^3 воздух.

Решение. Ширината на салата е $120\text{ dm} = 12\text{ m}$, па затоа ако нејзината висина е $x\text{ m}$, тогаш волуменот на салата е $15 \cdot 12x = 180x\text{ m}^3$. Од друга страна, бидејќи на секој спортист му припаѓаат по 8 m^3 воздух,

а има 90 спортисти волуменот на салата е $90 \cdot 8 = 720 m^3$. Значи,
 $180x = 720$, па затоа $x = 4 m$.

95. Должината на заедничкиот раб на два од сидовите на еден квадар е еднаква на $4 cm$, а нивните плоштини се еднакви на $6 cm^2$ и $24 cm^2$.
 Определи го волуменот на овој квадар.

Решение. Сидовите на квадарот се правоаголници и како плоштините на двата сида се $6 cm^2$ и $24 cm^2$, а должината на заедничкиот раб е $4 cm$, добиваме дека должините на другите два раба на квадарот се $6:4 = 1,5 cm$ и $24:4 = 6 cm$. Според тоа, волуменот на квадарот е $V = 4 \cdot 1,5 \cdot 6 = 36 cm^3$.

96. Пливачки базен во форма на правоаголен паралелопипед има должина $60 m$, ширина $200 dm$ и длабочина $2 m$. Колку литри вода е потребно за да се наполни базенот така што нивото на водата до $200 mm$ под горниот раб?

Решение. Бидејќи $200 mm = 20 cm = 0,2 m$, висината на водата со која треба да се наполни базенот е $2 - 0,2 = 1,8 m$. Понатаму, бидејќи $200 dm = 20 m$ за волуменот на потребната вода добиваме

$$V = 60 \cdot 20 \cdot 1,8 = 2160 m^3 = 2160000 dm^3,$$

што значи дека се потребни $2160000 l$ вода.

97. Кога водата замрзнува, таа го зголемува својот волумен за $\frac{1}{11}$. Во цилиндрична чаша со дијаметар $6 cm$ е ставено парче мраз во форма на паралелопипед со димензии $0,45 dm$, $2,4 cm$ и $33 mm$. Колку сантиметри ќе биде нивото на водата во чашата по топењето на разот?

Решение. Волуменот на паралелопипедот, т.е. на мразот е

$$V = 4,5 \cdot 2,4 \cdot 3,3 = 35,64 cm^3.$$

Ако за овој мраз е потребна вода со волумен V' , тогаш $V' + \frac{1}{11}V' = V$, па затоа $\frac{12}{11}V' = V$, т.е.

$$V' = \frac{11}{12}V = \frac{11}{12} \cdot 35,64 = 32,67 cm^3.$$

Плоштината на дното на чашата е $B = 3^2 p = 9p \text{ cm}^2$, па затоа висината на водата во чашата ќе биде

$$h = \frac{V'}{B} = \frac{32,67}{9p} = \frac{3,63}{p} \text{ cm}.$$

98. Плоштината на прав кружен цилиндар е 4 пати поголема од плоштината на основата. Изрази ја висината на конусот преку радиусот на основата.

Решение. Нека r е радиусот на основата, а h е висината на конусот. Тогаш плоштината на основата е $B = \pi r^2$, а плоштината на цилиндарот е $B = 2B + M = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Затоа $2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi r^2$, од каде наоѓаме $h = r$, што значи дека станува збор за рамностран цилиндар.

99. Правилна четириаголна призма со збир на должините на рабовите 84 cm е поделена на една голема коцка и 4 мали коцки. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

Решение. Ако основниот раб на призмата е b , тогаш околниот раб е еднаков на $b + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$ (Зошто?). Сега од условот на задачата следува $8b + 4 \cdot \frac{3b}{2} = 84$, па затоа $14b = 84$, односно $b = 6 \text{ cm}$. Според тоа, плоштината на призмата е

$$P = 2b^2 + 4b \cdot \frac{3b}{2} = 2b^2 + 6b^2 = 8b^2 = 8 \cdot 6^2 = 288 \text{ cm}^2,$$

а волуменот е

$$P = b^2 \cdot \frac{3b}{2} = \frac{3}{2} \cdot 6^3 = 324 \text{ cm}^3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.(1991). Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I. (1988). Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd
3. Ilić, N. V. (1991). Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd
4. Kostić, Z. K. (1963). Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd
5. Mićić, V.; Kadelburg, Z. (1989). Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd
6. Stojanović, V. (1985). Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd
7. Stojanović, V. (1999). Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd
8. Stojanović, V.; Zolić, A. (1991). Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd
9. Tošić, R. (1990). Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd
10. Tošić, R.; Vukoslavčević, V. (1995). Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
11. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
12. Zolić, A. (1990). Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd
13. Андрић, В. (2006). Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд
14. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В. (1997). 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд
15. Аневска, К. (2014). Логички парадокси, Нумерус, Скоје
16. Аневска, К. (2014). Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје
17. Аневска, К. (2018). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
18. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје

19. Аневска, К., Главче, М. (2017). Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје
20. Аневска, К., Гоговска, В. (2015). Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје
21. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
22. Аневска, К., Малчески, С. (2013). Геометриско пресметување на зборови, Нумерус, Скопје
23. Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И. (1961). Сборник задач по элементарной математике, Наука, Москва
24. Будуров, С.; Серафимов, Д. (1980). Математически олимпиади 2, Народна просвета, София
25. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
26. Главче, М. (2016). Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. (2016). Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
28. Главче, М. (2016). Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје
29. Главче, М. (2018). Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
30. Главче, М. (2018). Периметар и неравенство на триаголник, Нумерус, Скопје
31. Главче, М. (2018). Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје
32. Главче, М., Ангелкоска, В. (2013). Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, Скопје
33. Главче, М., Аневска, К. (2019). Решавање конструктивни задачи со помош на Питагорова теорема, Нумерус, Скопје
34. Главче, М., Малчески, С. (2019). Решавање на аритметички задачи со доведување до противречност, Нумерус, Скопје
35. Гоговска, В. Вкупен број можности, Нумерус, Скопје
36. Гоговска, В. Да започнеме од крајот, Нумерус, Скопје
37. Гоговска, В. Математички игри во кои се определува најголема и најмала вредност, Нумерус, Скопје
38. Гоговска, В. Неменливи големини, Нумерус, Скопје
39. Граврилов, Ј.; Давидов, Л. (1977). Делимост на числата, Народна просвета, София
40. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје

41. Гроздев, С. Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје
42. Гроздев, С. Неравенство на Шур и примена, Нумерус, Скопје
43. Гроздев, С. Црвенката и Диофантовата равека од прв ред, Нумерус, Скопје
44. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Боиме броеви, Нумерус, Скопје
45. Гроздев, С., Аневска, К. (2017). Броиме со помош на графови, Нумерус, Скопје
46. Гроздев, С., Аневска, К. (2018). Патување на островот на витезите и лажговците, Нумерус, Скопје
47. Гроздев, С., Малчески, А. (2016). Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
48. Гроздев, С., Малчески, А. (2017). Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2016
49. Димовски, И. Број на делители, Нумерус, Скопје
50. Димовски, И. Проблемот на Швејк, Нумерус, Скопје
51. Дојчев, С. Дали е можно Дали постои?, Нумерус, Скопје
52. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
53. Дуденков, С.; Чакърян, К. (1999). Задачи по теорија на числата, Регалия 6, София
54. Зубелевич, Г. И. (1967). Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва
55. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите, Нумерус, Скопје
56. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
57. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
58. Јанев, К.; Мишовски, К. (1985). Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје
59. Јошеска Јованчева, Б. Функционални равенки, Нумерус, Скопје
60. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
61. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, Скопје
62. Малчески, А. Адам Рис и лекомислениот геометар, Нумерус, Скопје
63. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
64. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решаваме задачи со множества, Нумерус, Скопје
65. Малчески, Р. (1994). Математички игри 1, Нумерус, Скопје
66. Малчески, Р. (1994). Математички игри 2, Нумерус, Скопје

67. Малчески, Р. (1995). Математички игри 3, Нумерус, Скопје
68. Малчески, Р. (1995). Математички игри 4, Нумерус, Скопје
69. Малчески, Р. (1995). Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје
70. Малчески, Р. (1996, 2015). Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје
71. Малчески, Р. (1997). Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус, Скопје
72. Малчески, Р. (1998). За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово
73. Малчески, Р. (2001). Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје
74. Малчески, Р. (2002). Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје
75. Малчески, Р. (2003). Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София
76. Малчески, Р. (2003). Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје
77. Малчески, Р. (2004). И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Нумерус, Скопје
78. Малчески, Р. (2004). Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје
79. Малчески, Р. (2005). Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје
80. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје
81. Малчески, Р. (2005). Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје
82. Малчески, Р. (2012). Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје
83. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
84. Малчески, Р. (2012). Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје
85. Малчески, Р. (2013). Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје
86. Малчески, Р. (2014). Пресметување на зборови од производи и степени, Нумерус, Скопје
87. Малчески, Р. (2015). Покривање рамнострани триаголник со рамнострани триаголници, Математика+ (Нумерус), София (Скопје)
88. Малчески, Р. (2017). Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје
89. Малчески, Р. (2018). Решаваме конструктивни задачи, Нумерус, Скопје

90. Малчески, Р. (2019). Пресметување плоштина на паралелограм и триаголник, Нумерус, Скопје
91. Малчески, Р. (2020). Занимливости со броеви, armaganka.org.mk
92. Малчески, Р. (2020). Расекување и составување геометриски фигури, armaganka.org.mk
93. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, armaganka.org.mk
94. Малчески, Р., (1998). Еден елементарен доказ на Хероновата формула, Сигма, Скопје
95. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
96. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
97. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К. (1993). Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје
98. Малчески, Р., Малчески, А. (1995). За златниот пресек, Нумерус, Скопје
99. Малчески, Р., Малчески, А. (2017). Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
100. Малчески, Р., Малчески, А. (2018). Откривање на непознат број, магија или математика, Нумерус, Скопје
101. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2019). Решавање на текстуални задачи (четврто издание), Армаганка, Скопје
102. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје
103. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). Збирка задачи по елементарна алгебра, Армаганка, Скопје
104. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К. (2020). По патеките на шампионите за математика (второ издание), Армаганка, Скопје
105. Малчески, С. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје
106. Малчески, С. Конструкција на аритметичка, геометриска и хармониска средина на две отсечки, Нумерус, Скопје
107. Малчески, С. Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
108. Малчески, С., Аневска, К. (2013). Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус, Скопје
109. Малчески, С., Аневска, К. (2018). Една теорема многу начини на докажување, Нумерус, Скопје

110. Малчески, С., Лукарески, М. Пополнуваме табели со броеви, Нумерус, Скопје
111. Милошевиќ, Д. Еден проблем во врска со расекување на коцка, Нумерус, Скопје
112. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – втор дел, Нумерус, Скопје
113. Милошевиќ, Д. Една задача, повеќе начини за решавање – прв дел, Нумерус, Скопје
114. Милошевиќ, Д. Квадрат и точка, Нумерус, Скопје
115. Милошевиќ, Д. Некои теореми за точки во рамнината на триаголникот, Нумерус, Скопје
116. Милошевиќ, Д. Основни својства на магичните квадрати од ред четири, Нумерус, Скопје
117. Михајлова, Е. Брзо множење, Нумерус, Скопје
118. Михајлова, Е. Како едноставно да решаваме текстуални задачи – вештина за составување равенки, Нумерус, Скопје
119. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
120. Муминагиќ, А. За една олимписка задача, Нумерус, Скопје
121. Муминагиќ, А. Плоштина на правилен петаголник; Нумерус, Скопје
122. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
123. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
124. Петревски, Н. Максимум и минимум во задачи од геометрија, Нумерус, Скопје
125. Петревски, Н. Ојлерова кружница, Нумерус, Скопје
126. Петровиќ, В. Натпревар во повеќебој, Нумерус, Скопје
127. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1993). Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София
128. Раковска, Д.; Тонов, И. и др. (1995). Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София
129. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
130. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
131. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. (1994). Занимлива математика, МММ, Скопје

132. Тфекчиев, И.; Лесов, Х. (1988). Задачи за извнкласна работа по математака в IV и V клас, Софија
133. Филипоски, С. Неколку избрани задачи од неравенства, Нумерус, Скопје
134. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч. (1998). Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София
135. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збирите на елементите на некои низи броеви, Нумерус, Скопје
136. Шарик, Милан Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
137. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје
138. Шаркова, И., Карацова, Р. Бројните ребуси помагаат, Нумерус, Скопје