Mirjana Đorić (Beograd)
Branislav Đurđevac (Zemun)

ZAVRŠAVAMO ŠKOLSKU 1987/88, ČEKAMO ŠKOLSKU 1988/89 GODINU

Često se u konkursnim i odabranim zadacima i na matematičkim takmičenjima javljaju razni zadaci iz teorije brojeva. Postoji nekoliko priručnika i zbirki u kojima je obrađena ta problematika, a mi smo ovom prilikom sastavili nekoliko zadataka vezanih za broj 1988.

Zadatak 1. Nataša je prvog januara 1988. godine napunila onoliko godina koliko iznosi zbir cifara godine njenog rođenja. Koje godine je rođena Nataša?

Rešenje. Neka je Nataša rođena $\overline{19xy}$ godine. Tada je po uslovu zadatka $1988-\overline{19xy}=1+9+x+y$. Odavde je $1988-(1900+10x+y)=$ $=10+x+y$ tj. $11x+2y=78$. Lako se zaključuje da je jedino moguće da je $x=6$ i $y=6$. Znači, Nataša se rodila 1966. godine.

Zadatak 2. Odrediti cifre x i y tako da je broj $\overline{1988xy}$ deljiv i sa 8 i sa 9.

Rešenje. *Pošto je broj deljiv sa 9 ako je zbir njegovih cifara* deljiv sa 9, sledi da je broj $\overline{1988xy}$ deljiv sa 9 ako je $1+9+8+$ $+8+x+y=26+x+y=27+x+y-1$ deljivo sa 9. Odavde je $x+y-$ $-1=9$ *ili* $x+y-1=0$ *(ostali slučajevi ne dolaze u obzir pošto je* $x\in[0,9]$ i $y\in[0,9]$ i $x, y\in Z$).

Dati broj možemo zapisati u obliku $\overline{1988xy}=198800+10x+y=$ $=8\cdot 24850+8x+2x+y$. On je deljiv sa 8 ako je $2x+y$ deljivo sa 8. Ukoliko je $x+y-1=0$, tj. $y=1-x$, sledi da je $2x+y=2x+1-x=x+1$ deljivo sa 8 ako je $x=7$. Tada je $y=-6$, što je nemoguće. Ako je $x+y-1=9$, tada je $y=10-x$, pa je $2x+y=2x+10-x=x+10$ deljivo sa 8 ako je $x=6$. Tada je $y=4$ i traženi broj je 198864.

Zadatak 3. Dokazati da je broj oblika $1987^{1988}+4$ složen.

Rešenje. Dokazaćemo da je dati broj složen tako što ćemo ga napisati u obliku proizvoda dva prirodna broja.

$$1987^{1988}+4=(1987^{497})^4+4=(1987^{497})^4+4\cdot(1987^{497})^2+4-$$
$$-4\cdot(1987^{497})^2=[(1987^{497})^2+2]^2-(2\cdot 1987^{497})^2=$$
$$=[(1987^{497})^2+2-2\cdot 1987^{497}]\cdot[(1987^{497})^2+2+2\cdot 1987^{497}].$$

Zadatak 4. a) Dokazati da $3 \mid a^3-a,\ a\in N$.

b) Neka je $a_1+a_2+\cdots+a_n=1988^{1988}$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi i $n>1$. Odrediti ostatak pri deobi broja $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ sa 3.

Rešenje. a) Dati broj je deljiv sa 3 jer je to proizvod tri uzastopna prirodna broja: $a^3-a=(a-1)\cdot a\,(a+1)$.

b) $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+\cdots+(a_n^3-a_n)+a_1+a_2+\cdots+a_n=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+\cdots+(a_n^3-a_n)+1988^{1988}$. Kako je, zbog prethodno dokazanog, svaki od brojeva u zagradi deljiv sa 3, to brojevi $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ i 1988^{1988} imaju isti ostatak pri deobi sa 3. Pošto je $1988\equiv 2 \pmod 3$, sledi da je $1988^2\equiv 2^2 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$. Odavde je $1988^{1988}\equiv 1 \pmod 3$, pa je traženi ostatak pri deobi $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ sa 3 jednak 1.

Zadatak. 5. Ako je $x^2+x+1=0$, dokazati da je $x^{1988}+x^{-1988}=-1$.

Rešenje. Iz uslova $x^2+x+1=0$, tj. $x^2+1=-x$ kvadriranjem leve i desne strane jednakosti, dobijamo $x^4+2x^2+1=x^2$ tj. $x^4+1=-x^2$ (1). Dalje, kako je $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$, sledi da je $x^3=1$ (2). Korišćenjem relacija (1) i (2) sledi $x^{1988}+x^{-1988}=(x^3)^{662}\cdot x^2+(x^3)^{-662}\cdot x^{-2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^4+1}{x^2}=\dfrac{-x^2}{x^2}=-1$.

Zadatak 6. Dokazati da je zbir $2+2^2+2^3+\cdots+2^{1987}+2^{1988}$ deljiv sa 6.

Rešenje. $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{1987}+2^{1988}=2(1+2)+2^3(1+2)+\cdots+2^{1987}(1+2)=3\cdot(2+2^3+\cdots+2^{1987})$. Kako je dati proizvod deljiv sa 2 i sa 3, deljiv je i sa 6.

Zadatak 7. Dokazati da postoji broj oblika $19871987 1987\cdots 198700\cdots 0$ koji je deljiv sa 1988.

Rešenje. Posmatrajmo niz od 1988 brojeva: 1987, 19871987, 198719871987, ..., 19871987 ... 1987. Pošto je broj 1988 paran, nijedan član niza nije deljiv sa 1988, jer su to neparni brojevi. U uočenom nizu ima 1988 članova, te pri deobi svakog od njih sa 1988 dobijamo 1988 ostataka različitih od nule. Odavde sledi da neka dva člana imaju isti ostatak pri deobi sa 1988. Razlika između većeg i manjeg od tih brojeva je broj deljiv sa 1988, i ima traženi oblik.

Zadatak 8. Koliko najmanje puta treba redom ispisati broj 1988 da bi se dobio broj deljiv sa 33?

Rešenje. Broj je deljiv sa 33 ako je deljiv i sa 3 i sa 11. Obeležimo sa n traženi broj zapisa broja 1988 koji je potreban da bi se dobio broj 19881988…11988 koji je deljiv sa 33. Kako je broj deljiv sa 3 ako je zbir cifara tog broja deljiv sa 3, to mora biti $n(1+9+8+8)=26n=3k$, $k\in N$. Pošto je broj deljiv sa 11 ako je razlika zbira cifara na parnim mestima i zbira cifara na neparnim mestima deljiva sa 11, to mora biti $n(1-9+8-8)=-8n=11\cdot h$, $h\in Z$. Na osnovu prve jednakosti broj n mora biti deljiv sa 3, a na osnovu druge jednakosti broj n mora biti deljiv sa 11. Iz ovoga zaključujemo da je n najmanji zajednički sadržalac brojeva 3 i 11, tj. potrebno je broj 1988 ispisati najmanje 33 puta da bi se dobio broj deljiv sa 33.

Zadatak 9. Da li je $1988^{1988}+4$ deljivo sa 10?

Rešenje. Odredimo poslednju cifru broja 1988^{1988}.

$$1988^2\equiv 4 \pmod{10},\quad 1988^4\equiv 4^2 \pmod{10}\equiv 6 \pmod{10}$$

$(1988^4)^{497}\equiv 6^{497} \pmod{10}\equiv 6 \pmod{10}$, pa je dati broj $1988^{1988}+4$ deljiv sa 10.

Zadatak 10. Odrediti poslednju cifru broja $19^{88}+88^{19}$.

Rešenje. Kako je $19\equiv -1 \pmod{10}$, sledi da je $19^{88}\equiv 1 \pmod{10}$ a kako je $88\equiv -2 \pmod{10}$ sledi da je $88^4\equiv 6 \pmod{10}$ tj. $88^{16}\equiv 6 \pmod{10}$. Pošto je $88^2\equiv 4 \pmod{10}$ to je $88^{18}\equiv 4 \pmod{10}$, $88^{19}\equiv -8 \pmod{10}\equiv 2 \pmod{10}$. Odavde sledi da je $19^{88}+88^{19}\equiv 3 \pmod{10}$, tj. poslednja cifra datog broja je 3.

Zadaci za vežbu.

1. Napisati broj 1988^{1988} u obliku zbira nekoliko prirodnih brojeva. Zatim sabrati kubove tih brojeva i dobijeni zbir podeliti sa 3. Koliki je ostatak deljenja?

2. Da li je broj $1^{1988}+2^{1988}+3^{1988}+4^{1988}+5^{1988}+1$ deljiv sa 10?

3. Dužine stranica pravouglog trougla su celi brojevi. Odrediti dužinu hipotenuze ako je dužina jedne katete 1988.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија