Весна Целакоска-Јорданова
Скопје

НЕКОЛКУ ЗАДАЧИ ЗА ЗЛАТЕН ПРЕСЕК

Многу дела од архитектурата и уметноста во Антиката и Ренесансата се темелеле врз принципот на златен пресек. Старите Грци му припишувале мистично и естетско значење, зашто сметале дека предметите што се правени врз овој принцип се згодни за користење и пријатни за гледање. Се претпоставува дека златниот пресек прв го разработил античкиот математичар Еудокс (Eudoxus, 408 п.н.е. - 355 п.н.е.), но за првпат се среќава во книгата “Елементи” на Евклид во третиот век п.н.е. Терминот “златен пресек” го вовел Леонардо да Винчи (1452-1519).

Златен пресек е поделба на дадена отсечка на два дела, еден поголем со должина a и еден помал со должина b, така што односот на поголемиот дел a кон помалиот дел b е еднаков со односот на вкупната должина на отсечката $a+b$ кон поголемиот дел a или, изразено со формула,

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}. \qquad (1)$$

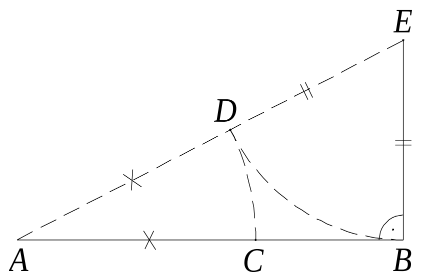
Со средување на оваа равенка се добива квадратна равенка

$$a^2-ab-b^2=0,$$

чии решенија по a се $a_{1,2}=\frac{b(1\pm\sqrt{5})}{2}$. Но, $a>0$, па значи $a=\frac{b(1+\sqrt{5})}{2}$.

Оттука $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Бројот $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ќе го означуваме со α па, имајќи го предвид (1), $\frac{a+b}{a}=\alpha$. Според тоа, дадена отсечка може да се подели со златен пресек ако нејзината должина се подели со бројот α.

Ќе разгледаме неколку задачи во врска со златен пресек.



Црт. 1

Задача 1. Конструирај златен пресек на дадена отсечка *AB*.

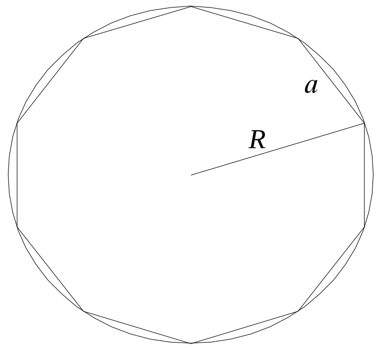
Конструкција. Нацртај отсечка AB. Во точката *B* (црт. 1) издигни нормала и на неа избери точка *E*, така што $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. На отсечката

EA избери точка D таква што $\overline{ED}=\overline{BE}$, а на отсечката AB, точка C т.ш. $\overline{AC}=\overline{AD}$. Тогаш $\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AB}:\overline{AC}$, т.е. важи (1) ($\overline{AC}=a$, $\overline{CB}=b$). Значи, точката C го остварува златниот пресек на отсечката AB.

Задача 2. Даден е правилен десетаголник (црт. 2) впишан во кружница со радиус R. Покажи дека страната a на десетаголникот е еднаква на поголемиот дел од радиусот R поделен со златен пресек.

Решение. Како што е познато, должината на страната на правилен десетаголник се пресметува по формулата:

$$a=2R\sin\frac{360^\circ}{2\cdot 10},\ \text{т.е.}\ a=2R\sin 18^\circ.$$



Црт. 2

Да го пресметаме $\sin 18^\circ$. Од основните тригонометриски формули имаме:

$$\sin 36^\circ=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ$$

$$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$$

Множејќи ги горните равенства едно со друго и со 2, добиваме:

$$2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=2\cdot 2\cdot\sin 18^\circ\cos 18^\circ(1-2\sin^2 18^\circ),$$

т.е.

$$\sin 72^\circ=4\cdot\sin 18^\circ\cos 18^\circ(1-2\sin^2 18^\circ).$$

Имајќи предвид дека $\sin 72^\circ=\cos 18^\circ\neq 0$, горната равенка можеме да ја поделиме со $\cos 18^\circ$. Оттука следува дека

$$1=4\sin 18^\circ(1-2\sin^2 18^\circ),$$

што значи дека $\sin 18^\circ$ е корен на равенката

$$1=4x(1-2x^2),\ \text{т. е.}\quad 8x^3-4x+1=0.$$

Бидејќи $x_1=\frac{1}{2}$ е еден нејзин корен, следува дека горната равенка можеме да ја разложиме на множители:

$$(2x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

Одовде ги добиваме останатите два корена:

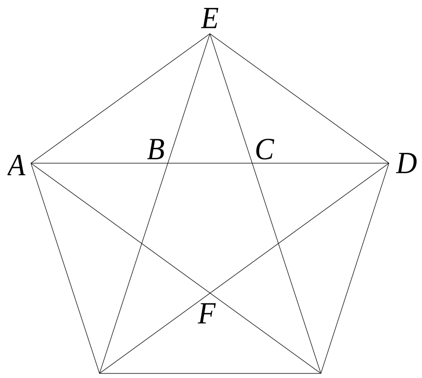
$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ \text{ и }\ x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Но, $\sin 18^\circ > 0$ и $\sin 18^\circ \neq \frac{1}{2}$, па значи $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Според тоа,

$$a = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{R}{\alpha}.$$

Со други зборови, страната a е еднаква на поголемиот дел од радиусот на кружницата поделен со златен пресек.

Задача 3. Даден е правилен петаголник, како на црт. 3. Докажи дека точката C ја дели дијагоналата AD со златен пресек.



Црт. 3

Решение. Знаеме дека аглите на правилен петаголник имаат по 108°, а секој од нив , со двете дијагонали повлечени од неговото теме, е поделен на три еднакви агли. Од тоа лесно ќе заклучиш дека

$$\angle ADF = 36^\circ, \text{ а } \angle AFD = 108^\circ.$$

Од синусната теорема имаме дека:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ.$$

Користејќи го резултатот $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ имаме дека:

$$1-2\sin^2 18^\circ = \cos 36^\circ = 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = 2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \alpha.$$

Бидејќи $\overline{AF} = \overline{AC}$, следува дека

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \alpha,$$

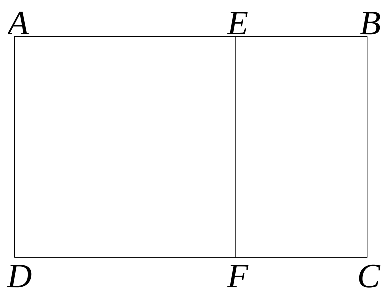
па точката C ја дели отсечката AD со златен пресек.

Забелешка. Горниот заклучок може да се претстави и вака: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\alpha$.

Имајќи предвид дека $\overline{AB}=\overline{CD}$, добиваме дека $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\alpha$. Според тоа, меѓу отсечките BC, AB, AC, AD, секоја наредна е α пати поголема од претходната.

Задача 4. Даден е правоаголник *ABCD*, таков што односот на неговите страни, a и b е еднаков на α. Правоаголниците што го имаат ова својство ги викаме *златни правоаголници*. Докажи дека ако во златен правоаголник впишеме најголем возможен квадрат (црт.4), тогаш повторно се добива златен правоаголник.

Решение. Нека *AEFD* е најголемиот можен квадрат впишан во правоаголникот *ABCD*.



Црт. 4

Од условот на задачата имаме:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\alpha \text{ и } \overline{AD}=\overline{AE}=\overline{EF}.$$

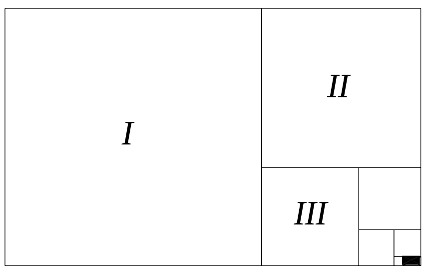
Оттука $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\alpha$. Ќе покажеме дека $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EB}}=\alpha$. Имаме:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{AB}-\overline{EB}}{\overline{EB}}=\frac{\alpha\overline{AE}-\overline{EB}}{\overline{EB}}=\frac{\alpha\overline{AE}}{\overline{EB}}-\frac{\overline{EB}}{\overline{EB}}=\alpha^2-1.$$

Од друга страна,

$$\alpha^2-1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha,$$

што значи дека $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EB}}=\alpha$. Значи и $EFCB$ е златен правоаголник.



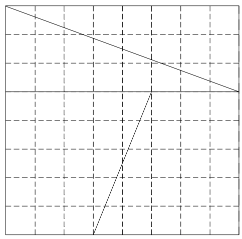
Црт. 5

Забелешка. На (црт. 5) е покажано како може во златен правоаголник повеќепати да се впишат квадрати I, II, III, ... Секој пат по впишувањето на наредниот квадрат останува фигура којашто е златен правоаголник.

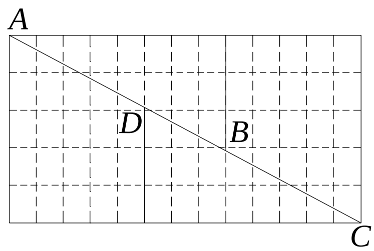
Примената на златните правоаголници е честа и во секојдневниот живот. На пример, на книги, кутии од кибрит, куфери,... често им се дава таква форма.

Задача 5. Со помош на златен пресек „докажи“ дека 64 = 65.

Решение. Да земеме квадрат со страна 8 и да го исечеме на 4 дела, како што е дадено на црт. 6. Овие делови ќе ги сложиме во правоаголник со страни 13 и 5, т.е. со плоштина 65, (црт. 7).

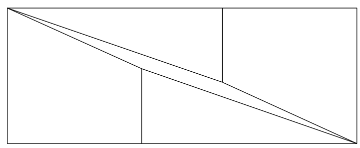


Црт. 6



Црт. 7

Објаснение за таа, на прв поглед загадочна појава не е тешко да се најде. Целата работа е во тоа што точките A, B, C, D на црт. 7, всушност не лежат на иста права, а се темиња на паралелограм чијашто плоштина и е еднаква на 1 (црт. 8). Ваквиот „веројатно точен“ но невистинит „доказ“ се вика софизам.

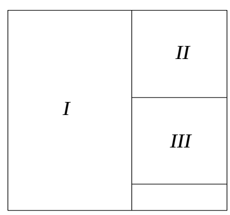


Црт. 8

На читателот му предлагам да ги реши следните задачи:

1. Користејќи ги ознаките од задача 3, докажи дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \alpha$.

2. Даден е квадрат и во него е вписан златен правоаголник I и квадрати II и III, како што е дадено на црт. 9. Докажи дека правоаголникот што останува е златен правоаголник.



Црт. 9

Литература

1. **J. N. Herstein, D. J. Winter:** *Matrix Theory and Linear Algebra*, New York 1989

Забелешка. Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА