Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 26
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО
ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Скопје, јуни 2021

Рецензент
Д-р Даниел Велинов
Д-р Зоран Мисајлески

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Предметнава книга е мала збирка задачи по Теорија на броеви, наменета за учениците за учениците од основното образование. Збирката содржи 272 решение задачи, кои се поделени во 11 параграфи. Притоа, може да се каже дека задачите содржани во првиот параграф не се класични задачи од теорија на броеви, т.е. дека тоа повеќе се алгебарски задачи. Меѓутоа, при решавање на задачите од теоријата на броеви најчесто се користиме со различни разложувања, пресметувања на збирови и слично, а токму такви задачи се содржани во првиот параграф и нивната намена е учениците на повисоко ниво да се потсетат на алгебарските содржини кои им се неопходни за решавање на задачи од теоријата на броеви.

Може да се каже дека оваа збирка задачи во целост ја поддржува книгата [26] од наведената литература, при што дополнително се поместени задачи за чие решавање се користи малата теорема на Ферма. Тоа значи дека задачите содржани во оваа збирка всушност се димензионирани се со цел учениците да се стекнат со потребните знаења и умеења за успешно учество како на државните, така и на меѓународните натпревари по математика кои се организираат за учениците од основното образование.

Што се однесува до самата организација на параграфите, задачите содржани во секој параграф не се подредени по тежина, туку е направен обид тие да се подредат според сличноста на апаратот кој се користи за нивно решавање. Затоа, може да се случи по некоја исклучително тешка задача која има едноставно решение.

Како и секоја книга, така и во оваа мала збирка задачи можни се грешки и тоа како од технички така и од стручен карактер. За намалување на грешките особена заслуга има рецензентите д-р Даниел Велинов и д-р

Зоран Мисајлески, чии забелешки и сугестии значително придонесоа за подобрување на книгата во целина, за што посебно сум благодарен. Се надевам дека книгава ќе биде од корист на како на учениците на кои им е наменета, така и на наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на напредувањето на учениците надарени за математика. Воедно, ќе им бидам благодарен на сите оние кои ќе ми укажат на грешките кои ќе ги забележат, се со цел истите да бидат отстранети во следните изданија на книгава.

Скопје   Авторот
јуни, 2021 г.

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. За броевите a,b,c,d важи $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$. Докажи дека $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$.

2. Определи го најмалиот природен број x, за кој
$$x=a+b+c=d+e+f,$$
каде a,b,c,d,e,f се по парови различни природни броеви.

3. За кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е точен квадрат.

4. Определи го најмалиот природен број x за кој постојат по парови различни броеви a,b,c,d кои ги задоволуваат равенствата
$$x=ab+a-b=cd+c-d.$$

5. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што
$$\overline{abc}=a+b^2+c^3.$$

6. За секои два цели броја $a\neq 0$ и $b\neq 0$ дефинираме операција $a\otimes b$ со $a\otimes a=a+2$, $a\otimes b=b\otimes a$ и $\frac{a\otimes(a+b)}{a\otimes b}=\frac{a+b}{b}$. Пресметај $8\otimes 5$.

7. Нека $a\oplus b=(a+1)(b+1)-1$ за секои a и b. Докажи дека
а) $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$,
б) $1\oplus(2\oplus(3\oplus(4\oplus...(2010\oplus 2021)...)))=2022!-1$.

8. Пресметај го збирот
$$\frac{2\cdot1-1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2\cdot2-1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2\cdot3-1}{3\cdot4\cdot5}+...+\frac{2\cdot n-1}{n(n+1)(n+2)}+...+\frac{2\cdot2-12-1}{2012\cdot2013\cdot2014}.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011})+3017(\frac{1}{1006\cdot 2011}+\frac{1}{1007\cdot 2010}+...+\frac{1}{1508\cdot 1509}).$$

10. Дали постојат 2013 по парови различни природни броеви такви што збирот на нивните реципрочни вредности е еднаков на:
а) 0,2013 б) 2,013 в) 20,13

11. Определи го најмалиот можен природен број кој може да се добие ако четирицифрен број се подели со збирот на неговите цифри.

12. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е низа позитивни броеви и за секој $n \in \mathbb{N}$ важи
$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2.$$
Определи ја оваа низа.

13. Низата $a_1, a_2, ...$ е определена со $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$, за $n \in \mathbb{N}$. Определи го членот a_{2021}.

14. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ постои $n-$цифрен број A, во чиј декаден запис не е цифрата 0 и го има следново својство: ако на A се додаде производот на неговите цифри, тогаш се добива број кој има еднаков производ на цифри на производот на цифрите на бројот A.

15. Колку пати се среќава цифрата 5 во декадниот запис на бројот
$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + ... + (10^{2014} - 9) + 10^{2014}. \quad (1)$$

16. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

17. За природниот број n ќе велиме дека е *квадратен* ако постојат природни броеви $a < b < c$ такви што $a^2 + b^2 - c^2 = n$. Определи го бројот на квадратните броеви кои се помали или еднакви на 2021.

18. Петцифрениот број n е запишан со пет различни цифри. Кој е најмалиот број што може да се добие ако n се подели со збирот на неговите цифри?

2. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го најголемиот број запишан со различни цифри таков што секои две соседни цифри формираат двоцифрен број кој е делив со 7.

2. Определи го најголемиот природен број запишан со различни цифри таков што секои две соседни цифри формираат двоцифрен број делив со 7 или со 13.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат n природни броеви такви што точно еден број е делив со n, точно два броја се деливи со $n-1$ итн. точно $n-1$ броеви се деливи со 2.

4. Множеството $\{1,2,...,2010\}$ е поделено на 1005 парови (a_i, b_i), $1 \leq i \leq 1005$ така што $|a_i - b_i| = 1$ или $|a_i - b_i| = 6$ за секој i. Определи ја цифрата на единиците на збирот
$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{1005} - b_{1005}|.$$

5. Дадени се 17 броеви, секој од кои е еднаков на еден од броевите 2, 3, 4 или 5. Збирот на сите 17 броја е делив со 17. Докажи дека меѓу дадените 17 броја некој од броевите 2, 3, 4 и 5 се среќава најмногу два пати.

6. Горјан избрал природен број a и го запишал едноподруго два пати, со што го добил ројот b. На пример, за $a = 17$ се добива бројот $b = 1717$. Горјан забележал дека $a^2 \mid b$. Определи ги сите можни вредности на $b : a^2$.

7. Бројот на годините на Дамјан е двоцифрен број n.
Косара рекла: n е делив со 3 и n е парен број.
Невена рекла: n е делив со 3 и цифрата на единицте на n е 5.
Јованка рекла: n е делив со 5 и збирот на цифрите на n е 12.
Секое од трите девојчиња искажало едно точно и едно неточно твр-

дење. Колку години може да има Дамјан?

8. Маѓионичар му предлага на гледач да замисли трицифрен број $\overline{abc}$ и да му го каже збирот на броевите $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Маѓионичарот тврди дека само со таа информација може да го определи бројот $\overline{abc}$. Дали е ова точно?

9. Нека $A = \overline{abcdef}$ и $B = \overline{fedcba}$ се шестцифрени броеви. Определи го најголемиот број на појавување на цифрата 5 во разликата $|A-B|$.

10. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што
$$2\overline{abc} = \overline{bca} + \overline{cab}.$$

11. Реши го бројниот ребус
$$\overline{COOK} \cdot 3 = \overline{MEAL},$$
ако производот $\overline{MEAL}$ е запишан со последователни цифри во некој редослед, а на различните букви соодветствуваат различни цифри и на различните цифри соодветствуваат различни букви.

12. Определи ги сите тројки броеви (a,b,c) такви што
а) a,b,c се последователни непарни природни броеви,
б) бројот $a^2+b^2+c^2$ се запишува со четири еднакви цифри.

13. Нека n е природен број и a е произволен делител на $2n^2$. Докажи дека бројот n^2+a не е точен квадрат на природен број.

14. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на дадениот број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 27.

15. Дали постојат три природни броја, поголеми од 1, такви што квадратот на секој од трите броја намален за 1 е делив со другите два броја.

16. Нека $n>3$ е природен број. Докажи дека барем еден од броевите
$$n!+1,\ n!+2,\ \dots,\ (n+1)!-1,\ (n+1)! \qquad (1)$$

е делив со n^3.

17. Одреди ги сите подредени двојки (x, y), $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ за кои што три од наведените тврдења се точни, а само едно е неточно:
(1) $y \mid (x+1)$
(2) $x = 2y + 5$
(3) $3 \mid (x + y)$
(4) $x + 7y$ е прост број

18. Определи ги сите природни броеви n за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е исто така природен број.

19. Определи го бројот x така што $2x-3$, $5x-14$ и $\frac{2x-3}{5x-14}$ се цели броеви.

20. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$ такви што $\overline{ab} \mid \overline{a0b}$.

21. Определи ги сите природни броеви n за кои $\frac{n(n+1)}{2}$ е трицифрен број запишан со исти цифри.

22. Докажи дека за секој цел број m и $A = \frac{m^4}{24} + \frac{m^3}{4} + \frac{11m^2}{24} + \frac{m}{4}$ е цел број.

23. Докажи, дека за секој природен број n важи $6 \mid n^3 + 11n$.

24. Докажи дека производот на четири последователни природни броеви:
а) е делив со 24,
б) не е квадрат на природен број.

25. Докажи дека $584 \mid (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

26. Докажи дека за секој природен број n важи $7 \mid (8^n - 14n - 1)$.

27. Докажи дека за ниту еден природен број n бројот

$$1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + \ldots + (n-1)^{2021} + n^{2021}$$

не е делив со $n+2$.

28. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.

29. Определи ги сите природни броеви n за кои $n!+n+1$ е делител на $(n+1)!-n+29$.

30. На секое од девет картончиња е запишан по еден од броевите од 1 до 9, при што не сите запишани броеви се еднакви меѓу себе. Докажи дека можеме да избереме неколку картончиња така што збирот на броевите запишани на нив е делив со 10.

31. Дадени се 2011 цели броеви за кои важи: ако отстраниме било кој од дадените броеви, тогаш преостанатите 2010 броеви можеме да ги поделиме во две множества од по 1005 броеви со еднаков збир на нивните елементи. Докажи дека сите 2011 броеви се еднакви меѓу себе.

32. Определи го најмалиот природен број n со следново својство: Збирот на цифрите на n е делив со 101 и збирот на цифрите на $n+1$ е делив со 101.

33. Определи ги сите парови природни броеви m и n кои се запишани со еднаков број цифри и за кои $2mn=\overline{mn}$, каде $\overline{mn}$ е бројот кој се добива кога броевите m и n се запишат еден по друг.

3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Целите броеви x, y и z се такви што
$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z\,. \tag{1}$$
Докажи дека 3 е делител на $x+y+z$.

2. Ако природниот број n го поделиме со 6 се добива остаток 3. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот $3n$ со 6.

3. Дадени се различни седумцифрени броеви a и b, секој од кои е запишан со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, без тие да се повторуваат. Дали може $\frac{a}{b}$ да е природен број?

4. Дадени се n броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека од нив може да се изберат неколку чиј збир на квадрати е делив со n.

5. Нека r е остатокот при делењето на броевите 1059, 1417 и 2312 со бројот $d>1$. Определи ја вредноста на изразот $d-r$.

6. Ако на таблата е запишан број n, тогаш тој може да биде заменет со некој од броевите $2n-4, 3n-8$ или $8-n$. Дали на овој начин може од бројот 41 да се добие број кој е поголем од 10^7, но е помал од 10^7+20.

7. Андреј замислил број X кој ги имал следниве својства: X е за 1 помал од број делив со 210, збирот на цифрите на X е два пати поголем од бројот на цифрите на X, X се запишува со најмногу 12 цифри и во записот на X се менуваат непарни и парни цифри. Кој број го замислил Андреј?

8. Докажи дека ако за природните броеви n и m е точно неравенството $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, тогаш $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

9. Нека $n_1, n_2, ..., n_{2011}, n_{2012}$ се природни броеви такви што
$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{2011}^2 = n_{2012}^2 .$$
Докажи дека најмалку два од дадените броеви се парни.

10. Докажи дека за бесконечно многу природни броеви n точно два од трите броја $n, n+2$ и $n+64$ може да се запишат како збир на кубови на три природни броја.

11. Докажи дека $a^3 + b^3 + 4$ не е куб на цел број за било кои природни броеви a и b.

12. Од 7 листови хартија определен број листови се исечени на по 10 делови. Од добиените листови, определен број листови повторно се исечени на по 10 делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 2021 листови?

13. Ако $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $9 \mid (a^3 + b^3 + c^3)$, тогаш барем еден од броевите a, b и c е делив со 3. Докажи!

14. Ако n е непарен природен број, тогаш 48 е делител на бројот $n^3 + 3n^2 - n - 3$. Докажи!

15. За природните броеви a и b важи: ако a^2 се подели со b се добива остаток 2, а ако a^3 се подели со b се добива остаток 5. Определи го бројот b.

16. Во една држава има бесконечно многу градови кои се нумерирани со броевите 1, 2, 3, 4, ... Градовите се поврзани со патишта така што за секој $n \geq 1$ е можно двосмерно движење меѓу градовите $n, 2n$ и $3n+1$. Докажи дека од произволен град може да се стигне до секој од друг град.

17. Во низата $a_1, a_2, .a_3, ...$ бројот $a_{n+1}, n \geq 2$ е еднаков на остатокот од делењето на $a_n + a_{n-1} + 1$ со 3. Определи го a_1 ако $a_{93} = a_1$.

4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Горјан запишал 2011 броеви, првиот број бил 1, а секој следен е за 3 поголем од претходниот: 1, 4, 7, 10, ... Андреј исто така запишал 2011 броеви, првиот е 9, а секој следен е за 7 поголем од претходниот: 9, 16, 23, ... Колку различни броеви запишале Горјан и Андреј?

2. Нека a,b и p се произволни цели броеви. Докажи, дека постојат $k,l \in \mathbb{Z}$, такви што $(k,l)=1$ и $p \mid ak+bl$.

3. Определи ги сите цифри a, за кои броевите
$$\overline{100a}, \overline{1001a}, \overline{10011a}, \overline{100111a}, \ldots, \overline{100\underbrace{11\ldots1}_{n}a}, \ldots$$
имаат заеднички делител поголем од 1.

4. Производот на два природни броја е 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Определи ги сите парови природни броеви кои го задоволуваат тоа својство.

5. Определи ги природните броеви m и n, ако $(m,n)=8$ и $[m,n]=168$?

6. Определи го најголемиот природен број a а кој постои природен број
$$b>a \text{ таков што } [a,b]-(a,b)=\tfrac{ab}{99}.$$

7. Определи го најголемиот природен број n за кој бројот n^3+100 е делив со $n+10$.

8. Палиндром е број кој од десно се чита исто како и од лево на десно. Определи го најголемиот заеднички делител на сите десетцифрени палиндроми.

9. Пресметај го збирот $(1,91)+(2,91)+(3,91)+\ldots+(90,91)+(91,91)$.

10. Правоаголник може да се расече на n еднакви квадрати. Истиот правоаголник може да се расече на $n+76$ еднакви квадрати. Определи ги можните вредности на n.

11. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Определи ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот најголем заеднички делител.

12. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n.

13. Нека m и n се заемно прости броеви. Со кој број може да се скрати дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$. Дади пример.

14. Определи $(2n+3, n+7)$, каде n е природен број.

15. Определи го најмалиот природен број, кој поделен со секој од броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 1.

16. Определи го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3 и поделен со 5 дава остаток 4.

17. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 4, 6, 8, 10 и 12 дава остатоци 2, 3, 6, 8 и 10 соодветно.

18. Марко замислил осум природни броеви, кои по парови не се заемно прости. Нивниот најмал заеднички содржател е 210, а нивниот производ не е точен квадрат кој е делив со 1920. Кои броеви ги замислил Марко?

19. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител е 15.

20. Определи ги сите заемно прости природни броеви a и b такви што $\overline{b,a} = \frac{a}{b}$.

21. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите
$$1+2+2^2+...+2^{5n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

5. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Нека a е произволен природен број. Докажи дека $ax+1$ е сложен број за барем еден природен број x.

2. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3-12n^2+6n+63$ е сложен.

3. Определи го најмалиот природен број n таков што сите дропки
$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$
се нескратливи.

4. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви што збирот на секои три од дадените броеви е прост број.

5. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои постои цел број a таков што $a^4 = pa^3 + q$.

6. Дадени се прости броеви p, q, r такви што $p+q<111$ и
$$\frac{p+q}{r} = p-q+r.$$
Определи ја најголемата можна вредност на производот pqr.

7. Определи ги сите четирицифрени броеви, чии први две цифри се меѓусебно еднакви и последни две цифри се меѓусебно еднакви, а кои се точни квадрати.

8. Определи ги сите природни броеви чиј квадрат е шестцифрен број од видот $\overline{ab73ab}$.

9. Определи го најмалиот природен број, на кој производот на цифрите е

еднаков на 75600.

10. За еден број ќе велиме дека е убав ако тој е сложен и не е делив со 2, 3 или 5. Првите три убави броеви се 49, 77 и 91. Познато е дека постојат 168 прости броеви кои се помали од 1000. Определи го бројот на убавите броеви кои се помали од 1000.

11. За секој природен број n со $D(n)$ го означуваме најголемиот делител на n, различен од n. Определи ги сите природни броеви n за кои $n+D(n)$ е степен на бројот 10.

12. Определи ги сите природни броеви n за кои броевите
$$3n-4, 4n-5, 5n-3$$
се прости.

13. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $p_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-1$ е прост.

14. Природните броеви a,b,c се такви што
$$a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$$
се седум различни прости броеви. Нека d е разликата меѓу најмалиот и најголемиот од овие прости броеви. Ако $a+b=800$, определи ја најголемата можна вредност на d.

15. Определи ги сите прости броеви p за кои постои природен број n таков што броевите n^2+3 и $(n+1)^2+3$ се деливи со p.

16. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n\in\mathbb{N}$, бројот $z=n^4+a$ е сложен.

17. Докажи дека бројот $1\underbrace{000...000}_{2012\,\text{нули}}1$ е сложен.

18. Докажи дека секој од броевите
$$1007,\ 10017,\ 100117,\ ...,100\underbrace{11...1}_{n}7, ...$$

е сложен.

19. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $3^{2n+1}-2^{2n+2}+6^n$ е прост.

20. Докажи, дека за секој прост број $p>2$, броителот m на дропката

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1},\ m,n\in\mathbb{N}$$

е делив со p.

21. Докажи дека за секој прост број p бројот $p^{2014}+1$ е сложен.

22. Докажи дека постои 2021-цифрен сложен природен број таков што при замена на произволни три негови последователни цифри со произволни три цифри повторно се добива сложен број.

23. Дали бројот $\underbrace{1010...10101}_{2n+1 \text{ цифра}}$ е прост за бесконечно многу природни броеви n?

24. Определи трицифрен број кој помножен со 7 дава куб од природен број.

25. Производот на бројот 21 со некој четицифрен број x е куб на некој цел број y. Определи го бројот x.

26. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

27. Дали постојат прости броеви p и q такви што $3p+5q=67$?

28. За природните броеви a,b,c и d е исполнето равенството

$$a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Докажи дека $a+b+c+d$ е сложен број.

29. Простите броеви p,q,r се такви што $pq+1, pr+1$ и $qr-p$ се точни

квадрати. Докажи дека $p+2qr+2$ е точен квадрат.

30. Определи ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p}=\frac{n}{2010}$.

31. Определи го простиот број p така што и броевите $p+2$ и p^2+2 се прости.

32. Секој од четирите природни броеви $a, a+1, a+2, a+3$ има точно шест позитивни делители. Постојат точно дваесет различни природни броеви секој од кои е делител точно на еден од овие броеви, и еден од овие дваесет делители е 27. Определи го бројот a.

33. Нека n е најголемиот трицифрен број кој е производ на цифрите на природен број m.
а) Определи го n.
б) Определи го бројот на сите можни броеви m.

34. Нека $n<2013$ е најголемиот број кој е производ на цифри на природен број m.
а) Определи го n.
б) Определи го бројот на сите можни броеви m.

35. Определи го најмалиот природен број n кој по делењето со 2 станува точен квадрат, а по делењето со 3 станува точен куб.

36. За секој двоцифрен прост број p е пресметан производот
$$(p^2-1)(p^2-4).$$
Определи го најголемиот заеднички делител на пресметаните производи.

37. За секој природен број $k>1$ со $p(k)$ го означуваме најмалиот делител на k поголем од 1. Определи ги сите природни броеви m за кои постои природен број n таков што
$$m+n=p^2(m)-p^2(n). \tag{1}$$

38. Пресметај $x+y+z$, ако за природните броеви x,y,z важи

$$xyz = 77077 \text{ и } x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2 .$$

39. Определи го волуменот на правоаголен паралелопипед кој има плоштина 2014, чии рабови се со целобројни должини и должината на најмалиот раб е делива со 5.

40. За природниот број n со $F(n)$ го означуваме производот на сите позитивни делители на n. Определи го најмалиот број k за кој постои n таков што $F(n) = 2014n^k$.

41. Дали постои бесконечно множество A од природни броеви со следново својство: збирот на броевите од секое конечно подмножество на A не е точен степен на природен број?

42. За еден природен број n ќе велиме дека е интересен ако збирот на неговите делители е еднаков на $2n-1$. Определи ги сите интересни броеви за кои точните степени се исто така интересни броеви.

6. БРОЈ НА ДЕЛИТЕЛИ НА ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ е каноничната факторизација на природниот број n и со $\tau(n)$ да го означиме бројот делителите на n. Докажи дека
$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1). \qquad (1)$$

2. Ако $(m,n) = 1$, тогаш $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. Докажи!

3. Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако n е точен квадрат.

4. Колку делители има бројот 1200?

5. Определи ги сите прости броеви за кои бројот $p^2 + 11$ има точни 6 природни делители.

6. Определи го бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10}, 15^7, 18^{11}$.

7. Нека S е множеството природни броеви кои не може да се претстават во видот $m^{\tau(n)} + n^{\tau(n)} + l^{\tau(l)}$, $m,n,l \in \mathbb{N}$. Дали ова множество е конечно или е бесконечно.

8. Нека N е трицифрен број таков што разликата на секои два делители на N е делива со 3. Ако d е бројот на делителите на N, определи ја најголемата можна вредност на производот dN.

9. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2014}.$$

10. Определи го бројот на паровите природни броеви (m,k) за кои важи
$$20m = k(m - 15k).$$

7. КОНГРУЕНЦИИ

1. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

2. Нека $f(n) = 9n^2 + 3n - 2$. Докажи, дека

   а) $9 \nmid f(n)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, и

   б) постојат бесконечно многу природни броеви n такви да $4 \mid f(n)$.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои 15 е делител на $10^n + 5$, $n \geq 1$.

4. Определи го остатотокот при делење со 1000 на бројот

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot ... \cdot \underbrace{99...9}_{9999}.$$

5. Доокажи дека $3^{2001} + 4^{2001}$ е делив со 13.

6. Докажи дека $13^{101} - 13^{95}$ е делив со 7.

7. Определи го остатокот при делењето на бројот:

   а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24,

   б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,

   в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.

8. Докажи, дека

$$5 \mid (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}).$$

9. Определи го остатокот од делењето на бројот $3^{105} + 4^{105}$ со бројот 11.

10. Определи го најмалиот природен број k кој може да се запише во ви-

дот $k = 19^n - 5^m$, каде $m, n \in \mathbb{N}$.

11. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека
$$(n+2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}).$$

12. Докажи дека бројот 2001 не може да биде збир на кубови на два природни броја.

13. Дали за секој парен природен број n бројот $20^n + 16^n - 3^n - 1$ е делив со 323.

14. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ако $m \mid (ab^n + cn + d)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $m \mid c^2$. Докажи!

15. Докажи дека за секој цел број a, $a > 1$, постои прост број p таков што
$$M = 1 + a + a^2 + ... + a^{p-1}$$
е сложен број.

16. Низата природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е определена со $a_n = \underbrace{33...3}_{n}1$, за $n \geq 1$. Докажи дека оваа низа содржи бесконечно многу сложени броеви.

17. Со $f(n)$ да го означиме бројот на делителите на природниот број n чија цифра на единици е 1 или 9, а со $g(n)$ - бројот на делителите на n чија цифра на единиците е 3 или 7. Докажи дека $f(n) \geq g(n)$.

18. Определи ги сите природни броеви n за кои 13 е делител на $2^n + 3^n$.

19. Ако a и b се цели броеви и $s = a^3 + b^3 - 60ab(a+b) \geq 2012$, определи ја најмалата можна вредност на s.

20. Определи ги сите прости броеви p, q, r такви што $p + q + r$ не е делив со 3, а броевите $p + q + r$ и $pq + qr + rp + 3$ се точни квадрати.

21. Броевите од 1 до n^2 се распоредени во полињата на $n\times n$ табела. За секој ред и за секоја колона е пресметан збирот на броевите содржани во редот, односно колоната. Нека A е збирот од тие збирови кои се парни, а B е збирот од тие збирови кои се непарни. За кои природни броеви n е можно равенството $A=B$.

22. Нека $m\in\mathbb{N}$ и p,q,r се прости броеви, при што $r\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$. Определи ги m и q ако $2^m p^2+1=q^r$.

8. ПОЛИНОМНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Со $S(n)$ да го означиме бројот на цифрите на природниот број n.
   1) Дали постои природен број n таков, што $n+S(n)=1980$?
   2) Докажи дека барем еден од секои два последователни природни броја може да се запише во облик $n+S(n)$, за некој $n\in\mathbb{N}$.

2. Определи го најмалиот петцифрен природен број кој при делење со 17 дава остаток 5, а при делење со 24 дава остаток 3.

3. Определи го бројот на трицифрените парови природни броеви (x,y) за кои важи $15x+3y=2010$.

4. Определи ги сите трицифрени броеви n кои се деливи со 7, а при делење со 9 даваат остаток 5.

5. Реши ја Диофантовата равенка
   а) $3x+7y=1988$,
   б) $3x+15y=1235$.

6. Определи ги сите трицифрени броеви кои го имаат следново својство: ако пред дадениот број се запише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од производот на дадениот број и бројот 23.

7. Нека a и b се заемно прости броеви. Докажи дека равенката
$$ax+by=ab$$
нема решение во множеството природни броеви.

8. Докажи дека не постојат цели броеви a,b,c такви да
$$a^2+b^2-8c=6.$$

9. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2 .$$

10. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy + 12 = x^3 + 2y .$$

11. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2 - y^2 = 203 .$$

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$9x^2 + 11xy + 2y^2 = 2010 .$$

13. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy - 3x + y = 5 .$$

14. Определи ги сите природни броеви n такви што ако n се зголеми за 5 или се намали за 11 се добива точен квадрат на некој број.

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(n+1)(2n+1) = 10m^2 .$$

16. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$$

е точен квадрат.

17. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + 84x + 2008 = y^2 .$$

18. Дали постојат природни броеви a, b, c кои го задоволуваат условот

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 340 . \qquad (1)$$

19. а) Во множеството природни броеви реши ја равенката $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{8}$.

б) Докажи дека постојат цели броеви a, b, c, d секој од кои по апсолутна вредност е поголем од 1000001 и такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{abcd}\,.$$

20. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, каде $p>1$ е даден прост број.

21. Нека p е прост број. Определи ги сите природни броеви x и y такви што
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{p}\,.$$

22. За кои цели броеви p равенката
$$\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{p-1}{16-x^2}=\frac{p}{(x+4)^2}$$
има единствено целобројно решение?

23. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1\,.$$

24. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=1\,.$$

25. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b+c-1}+\frac{1}{c+a-1}+\frac{1}{a+b-1}\,.$$

26. Докажи дека за секој $n\geq 3$ равенката
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$$
има решение $(x_1,x_2,...,x_n)$ од по парови различни броеви.

27. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$x(y+1)^2=243y\,.$$

28. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$(y^3+xy-1)(x^2+x-y)=(x^3-xy+1)(y^2+x-y)\,.$$

29. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{n^3-1}{n^3+2}.$$

30. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^6+3x^3+1=y^4.$$

31. Од точно 2014 еднакви кибритени чкорчиња во рамнината е направен правоаголник, поделен на квадрати со страна едно чкорче. Определи ги димензиите на правоаголникот.

32. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5a-ab=9b^2.$$

33. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$4n(n+1)=m(m+1).$$

34. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$y^2+y=x^4+x^3+x^2+x. \qquad (1)$$

35. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{xy}.$$

36. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) за кои важи

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z})=2.$$

37. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{2}\cdot n!+2013=m^2.$$

38. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1!+2!+\ldots+x!=y^2.$$

39. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5-y!=2015.$$

40. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1 .$$

41. Докажи, дека равенката

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1 \qquad (1)$$

има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

42. Докажи, дека равенката

$$x^2 + y^2 = z^{1990}$$

има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

43. Докажи дека равенката

$$5x^2 - 4y^2 = 2015$$

нема решенија во множеството цели броеви.

44. Докажи дека равенката

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

нема целобројни решенија.

45. Докажи, дека равенката

$$5x^2 - 7y^3 = 9$$

нема решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

46. Докажи дека ако p е прост број и $n \in \mathbb{N}$, тогаш равенката

$$x(x+1) = p^{2n} y(y+1) \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

47. Во множеството рационални броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1 . \qquad (1)$$

48. Докажи дека системот

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = z^2 \\ 2x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

49. Докажи дека системот

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = z^2 \\ 5x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

50. Докажи дека системот

$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

51. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

52. Во множеството $\mathbb{N}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y = zt \\ z + t = xy, \qquad x \le y,\ x \le z \le t. \end{cases}$$

53. Определи ги трицифрените броеви *A*, со следното својство: аритметичката средина на сите броеви, добиени од бројот *A* со пермутирање на неговите цифри е еднаква на бројот *A*.

54. Определи го бројот n за кој збирот на парните природни броеви кои се поголеми од $n^2 - n + 1$, а се помали од $n^2 + n + 1$ е еднаков на 2210.

55. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)\,. \qquad (1)$$

56. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\sum_{i=0}^{7} (x + i)^3 = y^3\,.$$

57. Определи ги сите цели броеви n за кои $\sqrt{n^2 + 3n + 38}$ е цел број.

58. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$$

има решение во множеството природни броеви.

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=y^3.$$

60. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{2015}.$$

61. Колку решенија има равенката $x^2+y^2=x^3$ во множеството $\mathbb{N}$, ако x е помал од 2012.

62. Нека a, b и n се природни броеви, $a>b$, $n>b$ и $a^n+b^n=c^n$. Докажи дека $c\notin\mathbb{Z}$.

9. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката $a!+b!+c!=2^n$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $2^8+2^{11}+2^n$ е точен квадрат.

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката: $x^y-y^x=xy^2-19$.

4. Во множеството на целите броеви реши ја равенката
$$2^a+8b^2-3^c=283.$$

5. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што
$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

6. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(2n)^{2n}-1=m^3. \qquad (1)$$

7. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $2^x+7^y=z^4$.

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката $3^m-7^n=2$.

9. Определи ги сите $a,b,c\in\mathbb{N}$ такви што $4^a+2^b+1=c^2$ и $b<2a$.

10. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката.
$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}=2^y+1.$$

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката $14^x-3^y=2015$.

10. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што
$$a^2+b^2-33c^2=8bc\,,$$
ако се знае дека a е прост број.

2. Определи ги сите природни броеви n и сите прости брови p такви што
$$p^3+n(p+2)=n^2+p+1\,.$$

3. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

4. Определи ги сите прости броеви p за кои постојат природни броеви x и y такви што
$$p+1=2x^2 \text{ и } p^2+1=2y^2\,.$$

5. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$x^2-2y^2=1\,.$$

6. Производот на три прости број е еднаков на n. По додавањето на 1 на секој од простите броеви производот на трите добиени броеви е еднаков на $n+963$. Определи го бројот n.

7. Определи ги целите броеви x и y и простиот број p за кои важи
$$x^2-3xy+p^2y^2=12p\,.$$

8. Определи ги простите броеви p,q,r за кои важи
$$p=q^3-r^3\,.$$

9. Определи ги сите прости броеви p, q и r такви што
$$p^q + 1 = r \, .$$

10. Во множеството прости броеви најди ги сите решенија на равенката
$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}$$
такви што $p < q < r < s$.

11. Во множеството прости броеви, реши ја равенката
$$x^2 + y^3 = z^4 \, . \qquad (1)$$

12. Докажи, дека равенката
$$x^2 + x + 1 = py$$

13. Докажи, дека равенката
$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2 \, ,$$
нема решение во множеството прости броеви.

14. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$p(p+1) + q(q+1) = r(r+1) \, .$$

15. Во множеството прости броеви реши ја равенката $x^y = z - 1$.

11. МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Определи го остатокот од делењето на бројот $(85^{74}+19^{99})^{16}$ со 13.

2. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека
$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1(\text{mod } pq).$$

3. Определи ги сите прости броеви p такви што $5^{p^2}\equiv -1(\text{mod } p^2)$.

4. Нека n е природен број кој не е делив со 17. Докажи дека барем еден од броевите n^8-1 и n^8+1 е делив со 17.

5. Збирот на природните броеви a,b и c е делив со 30. Докажи дека и збирот на нивните петти степени е делив со 30.

6. Нека p е прост број. Докажи дека за секој $a\in\mathbb{N}$ важи
$$a^{(p-1)!+1}\equiv a \ (\text{mod } p).$$

7. Нека p е прост број. Докажи дека
$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+...+(p-1)^{p-1}\equiv -1 \ (\text{mod } p).$$

8. Нека p непарен е прост број. Докажи дека
$$1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p\equiv 0(\text{mod } p)$$

9. Ако a е цел број таков што $(a,35)=1$, тогаш бројот
$$A=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$
е делив со 35. Докажи!

10. Ако a е цел број кој не е делив со 3, тогаш $a^{13}-a\equiv 0(\text{mod } 2^{13}-2)$. Докажи!

11. Нека p е прост број и $p=4k+1, k\geq 1$ е природен број. Докажи дека важи $k^{2k}\equiv 1(\text{mod } p)$.

12. Докажи дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}}+19$ е сложен.

13. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^{p}-4$ не е точен квадрат. Докажи!

14. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот $2^{n}-n$.

15. Докажи дека за секој непарен прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p\,|\,(2^{n}n+1)$.

16. Докажи дека меѓу броевите $(2^{2n}+1)^{2}+2^{2}$, каде $n=1,2,...$ има бесконечно многу сложени броеви.

17. Ако p е прост број, тогаш $p\,|\,\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p}-123456789$. Докажи!

18. Определи го петцифрениот број n со најмал можен збир на цифрите со кои е запишан и е таков што 2556 е делител на $n^{3}-1$.

19. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на $2^{n}-8$ и кои имаат најмалку три различни прости делители.

20. Определи ги сите природни броеви a со следново својство: за секој непарен прост број p постои природен број n таков што $a^{n}-n$ и $a^{n+1}-n-1$ се деливи со p .

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. За броевите a,b,c,d важи $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$. Докажи дека $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$.

Решение. Ако $a+b=c+d=0$, тогаш $a=-b, c=-d$, па затоа

$$a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}=0\,.$$

Ако $a+b=c+d\neq 0$, тогаш

$$3ab(a+b)=(a+b)^3-a^3-b^3=(c+d)^3-c^3-d^3=3cd(c+d)\,,$$

па затоа $ab=cd$.

Ако $b=0$, тогаш од $ab=cd$ имаме $cd=0$, па затоа $c=0$ или $d=0$. Но, тогаш од $a+b=c+d$ следува $\{a,b\}=\{c,d\}$. Нека $b\neq 0$. Тогаш $a=\frac{cd}{b}$, па затоа $\frac{cd}{b}+b=c+d$ од каде добиваме $(d-b)(\frac{c}{b}-1)=0$, па затоа $d=b$ или $c=b$. Но, тогаш од $a+b=c+d$ следува $\{a,b\}=\{c,d\}$.

Според тоа, $\{a,b\}=\{c,d\}$, па затоа $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$.

2. Определи го најмалиот природен број x, за кој

$$x=a+b+c=d+e+f\,,$$

каде a,b,c,d,e,f се по парови различни природни броеви.

Решение. Нека a,b,c,d,e,f се по парови различни природни броеви за кои

$$a+b+c=d+e+f=x\,.$$

Тогаш

$$2x=x+x=a+b+c+d+e+f\geq 1+2+3+4+5+6=21,$$

од каде добиваме дека $x\geq 11$. За броевите $a=2,b=4,c=5,=1,e=3,$ $f=7$ имаме

$$11=2+4+5=1+3+7\,.$$

Значи, бараниот број е $x=11$.

3. За кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е точен квадрат.

Решение. За било кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот

$$9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$$

можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4&=9(10\cdot\overline{ab}+5-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4\\&=9(9\cdot\overline{ab}+5)(\overline{ab}+1)+4\\&=81\cdot\overline{ab}^2+126\cdot\overline{ab}+49\\&=(9\cdot\overline{ab}+7)^2\end{aligned}$$

Значи, за било кои цифри a и b ($a\neq 0$), бројот

$$9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$$

е точен квадрат.

4. Определи го најмалиот природен број x за кој постојат по парови различни броеви a,b,c,d кои ги задоволуваат равенствата

$$x=ab+a-b=cd+c-d\ .$$

Решение. Дадените равенства се еквивалентни со равенствата

$$x-1=(a-1)(b+1)=(c-1)(d+1)\ .$$

Со непосредна проверка се добива дека $x-1=0,1,2,3,4,5$ не се решенија, а за $x-1=6$ добиваме решение: $a=4,b=1,c=3,d=2$. Според тоа, $x=7$.

5. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што

$$\overline{abc}=a+b^2+c^3\ .$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$100a+10b+c=a+b^2+c^3$$

$$99a+b(10-b)=c^3-c.$$

Понатаму,

$$108=99\cdot 1+1\cdot 9\leq 99a+b(10-b)=c^3-c\leq c^3,$$

и како c е цифра добиваме $c\geq 5$. Одделно ќе ги разгледаме случаите $c=5,6,7,8,9$.

Ако $c=5$, тогаш $99a+b(10-b)=120$, па затоа $a=1$, што значи $b(10-b)=21=3\cdot 7$, од каде добиваме $b=3$ или $b=7$. Значи, во овој случај добиваме две решенија и тоа $\overline{abc}=135$ и $\overline{abc}=175$.

Ако $c=6$, тогаш $99a+b(10-b)=210$, па затоа $a=2$ и добиваме

$b(10-b)=12$, што не е можно.

Ако $c=7$, тогаш $99a+b(10-b)=336$, па затоа $a=3$ и добиваме $b(10-b)=39$, што не е можно.

Ако $c=8$, тогаш $99a+b(10-b)=504$, па затоа $a=5$ и добиваме $b(10-b)=9=1\cdot 9$, од каде добиваме $b=1$ или $b=9$. Значи, во овој случај добиваме две решенија и тоа $\overline{abc}=518$ и $\overline{abc}=598$.

Ако $c=9$, тогаш $99a+b(10-b)=720$, па затоа $a=7$ и добиваме $b(10-b)=27$, што не е можно.

Конечно, задачата има четири решенија и тоа: 135, 175, 518 и 598.

6. За секои два цели броја $a\neq 0$ и $b\neq 0$ дефинираме операција $a\otimes b$ со $a\otimes a=a+2$, $a\otimes b=b\otimes a$ и $\frac{a\otimes(a+b)}{a\otimes b}=\frac{a+b}{b}$. Пресметај $8\otimes 5$.

Решение. Од условот следува $1\otimes 1=3$. Земаме $a=b=1$ и добиваме $\frac{1\otimes(1+1)}{1\otimes 1}=\frac{1+1}{1}$, од каде наоѓаме $1\otimes 2=6$. Аналогно, за $a=2,b=1$ добиваме $2\otimes 3=18$, па ако потоа земеме $a=3,b=2$ добиваме $3\otimes 5=45$. Конечно, за $a=5,b=3$ наоѓаме $8\otimes 5=120$.

7. Нека $a\oplus b=(a+1)(b+1)-1$ за секои a и b. Докажи дека

а) $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$,

б) $1\oplus(2\oplus(3\oplus(4\oplus...(2010\oplus 2021)...)))=2022!-1$.

Решение. а) Имаме

$$a\oplus b=b\oplus a \text{ и } a\oplus b=ab+a+b,$$

па затоа

$$\begin{aligned}a\oplus(b\oplus c)&=a\oplus(bc+b+c)=a(bc+b+c)+a+bc+b+c\\&=abc+ab+bc+ca+a+b+c,\\(a\oplus b)\oplus c&=(ab+a+b)\oplus c=(ab+a+b)c+ab+a+b+c\\&=abc+ab+bc+ca+a+b+c,\end{aligned}$$

опдносно $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$.

б) Важи

$$1\oplus(2\oplus(3\oplus(4\oplus...(2010\oplus 2011)...)))=((...(1\oplus 2)\oplus 3)\oplus 4)...\oplus 2011).$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}&1\oplus 2=2\cdot 3-1,\\&(1\oplus 2)\oplus 3=(2\cdot 3-1)\oplus 3=2\cdot 3\cdot 4-1=4!-1.\end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека

$$((...(1\oplus 2)\oplus 3)\oplus 4)...\oplus (n-1)) = n!-1 .$$

Тогаш

$$((...(1\oplus 2)\oplus 3)\oplus 4)...\oplus n) = (n!-1)\oplus = n!(n+1)-1 = (n+1)!-1 ,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека

$$((...(1\oplus 2)\oplus 3)\oplus 4)...\oplus k) = (k+1)!-1 . \qquad (1)$$

Ако во (1) ставиме $k = 2021$ добиваме

$$1\oplus (2\oplus (3\oplus (4\oplus ...(2010\oplus 2021)...))) = 2022!-1 .$$

8. Пресметај го збирот

$$\frac{2\cdot 1-1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2\cdot 3-1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{2\cdot n-1}{n(n+1)(n+2)}+...+\frac{2\cdot 2-12-1}{2012\cdot 2013\cdot 2014} .$$

Решение. Имаме

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{n+1}-\frac{1}{n}-\frac{5}{n+2}\right) ,$$

па ако замениме, за бараниот збир добиваме

$$\frac{2\cdot 1-1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2\cdot 3-1}{3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{2\cdot 2-12-1}{2012\cdot 2013\cdot 2014} = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2014}-\frac{5}{2015}\right) .$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011}\right)+3017\left(\frac{1}{1006\cdot 2011}+\frac{1}{1007\cdot 2010}+...+\frac{1}{1508\cdot 1509}\right) .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\\ &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2010}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2011}\right)\\ &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1005}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2011}\right)\\ &= 1-\left(\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+...+\frac{1}{2011}\right)\\ &= 1-3017\left(\frac{1}{1006\cdot 2011}+\frac{1}{1007\cdot 2010}+...+\frac{1}{1508\cdot 1509}\right),\end{aligned}$$

па затоа

$$\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{2010\cdot 2011}\right)+3017\left(\frac{1}{1006\cdot 2011}+\frac{1}{1007\cdot 2010}+...+\frac{1}{1508\cdot 1509}\right) = 1 .$$

10. Дали постојат 2013 по парови различни природни броеви такви што збирот на нивните реципрочни вредности е еднаков на:

а) 0,2013 б) 2,013 в) 20,13

Решение. Имаме

$$2,013=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{100}+\frac{1}{500}+\frac{1}{1000}.$$

Сега, ако искористиме дека $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ и ако работиме со најмалата дропка, тогаш на десната страна во секој чекор бројот на дропките, т.е. бројот на броевите се зголемува за 1 и така можеже да добиеме 2013 дропки, т.е. 2013 по парови различни броеви чиј збир на реципрочни вредности е 2,013. Според тоа, одговорот по б) е потврден. Понатаму, ако добиеното равенство го поделиме со 10, добиваме 2013 дропки, т.е. 2013 по парови различни природни броеви чиј збир на реципрочни вредности е еднаков на 0,2013, што значи дека и одговорот под а) е потврден.

Од друга страна,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}<\frac{1}{1}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2})+$$
$$+...+(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+...+\frac{1}{2^{10}})=11$$

па затоа одговорот под в) е одречен.

11. Определи го најмалиот можен природен број кој може да се добие ако четирицифрен број се подели со збирот на неговите цифри.

Решение. Нека четирицифрениот број е $\overline{abcd}$. Бидејќи

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=1+\frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d},$$

за да биде количникот најмал можен број, цифрата d која се јавува само во именителот на дропката на десната страна треба да е најголема можна. На ист начин, од

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=10+\frac{990a+90b-9d}{a+b+c+d}$$

заклучуваме дека цифрата c треба да е најголема можна. Понатаму, од

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=1000-\frac{900b+990c+999d}{a+b+c+d},$$

следува дека цифрата a треба да е најмалата можна. За $a=1$ добиваме

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}=100-\frac{99d+90c-900}{1+b+c+d},$$

па изразот на десната страна е најмал ако $b=0$. Бидејќи c и d треба да се најголеми можни, земаме $c=d=9$ и го добиваме бројот 1099 кој не е делив со збирот на неговите цифри $1+0+9+9=19$. Следните можности се $c=9,d=8$ или $c=8,d=9$, при што се добиваат броевите 1089 и 1098, од кои само вториот е делив со збирот на цифрите $1+0+9+8=18$ и притоа важи $1098:18=61$. Според тоа, бараниот број е 61.

12. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е низа позитивни броеви и за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 .$$

Определи ја оваа низа.

Решение. За $n=1$ имаме $a_1^3 = a_1^2$ и како $a_1 > 0$ добиваме $a_1 = 1$. Понатаму, за $n=2$ важи $1+a_2^3 = (1+a_2)^2$, од каде добиваме дека $a_2(a_2+1)(a_2-2)=0$ и како $a_2 > 0$ наоѓаме $a_2 = 2$. Нека претпоставиме дека $a_k = k$ за секој $k < n$. Имаме

$$1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 + a_n^3 = (1+2+...+n-1+a_n)^2$$

и ако земеме предвид дека

$$1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = (1+2+...+n-1)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} ,$$

од последното равенство добиваме

$$a_n(a_n + n - 1)(a_n - n) = 0 .$$

Но, $a_n > 0$, па затоа $a_n = n$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $a_n = n$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

13. Низата $a_1, a_2, ...$ е определена со $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$, за $n \in \mathbb{N}$. Определи го членот a_{2021}.

Решение. Имаме $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{2}{5}$ и $a_4 = \frac{2}{7}$, па затоа логично е да претпоставиме дека $a_n = \frac{2}{2n-1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Навистина, последната формула е точна за $n = 1, 2, 3, 4$. Ако претпоставиме дека таа е точна за некој природен број n, тогаш

$$a_{n+1} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{2}{2n-1}+1} = \frac{\frac{2}{2n-1}}{\frac{2n+1}{2n-1}} = \frac{2}{2n+1} = \frac{2}{2(n+1)-1} ,$$

т.е. формулата важи и за природниот број $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

Конечно,

$$a_{2021} = \frac{2}{2 \cdot 2021 - 1} = \frac{2}{4041} .$$

14. Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$ постои $n-$цифрен број A, во чиј декаден запис не е цифрата 0 и го има следново својство: ако на A се додаде производот на неговите цифри, тогаш се добива број кој има еднаков производ на цифри на производот на цифрите на бројот A.

Решение. Бројот 28 го има саканото својство, бидејќи $28+2\cdot 8=44$ и $2\cdot 8=4\cdot 4$. Сега, за $n>2$ со додавање на $n-2$ единици од лево на бројот 28 се добива број кој го има саканото својство.

15. Колку пати се среќава цифрата 5 во декадниот запис на бројот

$$1+10+19+28+37+...+(10^{2014}-9)+10^{2014}. \qquad (1)$$

Решение. Во збирот $1+10+19+28+37+...+(10^n-9)+10^n$ имаме $\frac{10^n-1}{9}+1$ собирци. Затоа

$$1+10+19+28+37+...+(10^n-9)+10^n=(\tfrac{10^n-1}{9}+1)\tfrac{10^n+1}{2}.$$

Бидејќи $\frac{10^n-1}{9}+1=\underbrace{11...1}_{n-1}2$, важи $\frac{1}{2}(\frac{10^n-1}{9}+1)=\underbrace{55...5}_{n-2}6$. Според тоа,

$$\begin{aligned}1+10+19+28+37+...+(10^n-9)+10^n&=\underbrace{55...5}_{n-2}6\cdot(10^n+1)\\&=\underbrace{55...5}_{n-2}60\underbrace{55...5}_{n-2}6\end{aligned}$$

и цифрата 5 во овој број се среќава $2(n-2)$ пати. За $n=2014$ добиваме дека цицфрата 5 во бројот (1) се среќава $2(2014-2)=4024$ пати.

16. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

Решение. Со N да го означиме најголемиот таков број. Нека

$$N=a_1a_2...a_n \text{ и } a_1+a_2+...+a_n=1976.$$

Ќе докажеме дека $a_i \leq 4$. Ако за некој i е исполнето $a_i \geq 5$, тогаш наместо a_i можеме да земеме 2 или a_i-2, па во тој случај добиваме поголем производ, а збирот на множителите ќе остане непроменет. Последното следува од $2(a_i-2)>a_i$ и $2+(a_i-2)=a_i$. Исто така наместо четири земаме две двојки.

Затоа $N=2^k3^l$ при што $2k+3l=1976$.

Од $2^3<3^2$ и $2+2+2=3+3$, следува дека $k\in\{0,1,2\}$.

Конечно, од $1976=3\cdot 658+2$, добиваме $k=1$ и $N=2\cdot 3^{658}$.

17. За природниот број n ќе велиме дека е *квадратен* ако постојат природни броеви $a<b<c$ такви што $a^2+b^2-c^2=n$. Определи го бројот на квадратните броеви кои се помали или еднакви на 2021.

Решение. Од равенството $(3n+2)^2+(4n)^2-(5n+1)^2=2n+3$ следува дека 5 и секој непарен број $n\geq 9$ е квадратен (за $n=2$ имаме $a=b$). Понатаму, бидејќи

$$1=4^2+7^2-8^2,\ 3=4^2+6^2-7^2 \text{ и } 7=10^2+14^2-17^2,$$

заклучуваме дека сите непарни броеви се квадратни.

Од $(3n)^2+(4n-1)^2-(5n-1)^2=2n$ следува дека секој парен број $n\geq 4$ е квадратен (за $n=1$ имаме $a=b$). Бидејќи $2=5^2+11^2-12^2$, заклучуваме дека сите непарни броеви се квадратни.

Според тоа, имаме 2021 квадратни броеви кои се помали или еднакви на 2021.

18. Петцифрениот број n е запишан со пет различни цифри. Кој е најмалиот број што може да се добие ако n се подели со збирот на неговите цифри?

Решение. Нека $n=\overline{abcde}$ и $k=\frac{n}{a+b+c+d+e}$. Тогаш

$$10000a+1000b+100c+10d+e=k(a+b+c+d+e),$$
$$(10000-k)a+(1000-k)b=(k-100)(c+d+e)+90(d+e)+9e,$$

од каде добиваме

$$10000-k\leq (k-100)\cdot 24+90\cdot 17+9\cdot 9,$$

односно $10789\leq 25k$. Значи, најмалата вредност на $k=\frac{10789}{25}=431,56$ и таа се достигнува за $n=10789$.

2. ДЕЛИВОСТ

1. Определи го најголемиот број запишан со различни цифри таков што секои две соседни цифри формираат двоцифрен број кој е делив со 7.

   Решение. Ако ги запишеме сите двоцифрени броеви кои се деливи со 7 забележуваме дека:

   1) Ако во бројот е некоја од цифрите 0 или 7, тој може да е најмногу 70.
   2) Ако во бројот е некоја од цифрите 3, 5 или 6, тогаш во бројот може да се само овие цифри и најголемиот број е 635.

   Значи, најголемиот број треба да се обидеме да го формираме од цифрите 1, 2, 4, 8 и 9. За да бројот биде најголем земаме првата цифра е 9, па од исти причини втората да е 8, сега третата мора да е 4, четвртата да е 2 и петтата да е 1. Значи, бараниот број е 98421.

2. Определи го најголемиот природен број запишан со различни цифри таков што секои две соседни цифри формираат двоцифрен број делив со 7 или со 13.

   Решение. Ако во записот на бројот се содржи цифрата 7, тогаш таа може да биде само најлево во записот на бројот. Ако во записот на бројот се содржи цифрата 0, тогаш таа може да биде само најдесно во записот на бројот, а пред неа да е цифрата 7. Последното значи дека, ако постои деветцифрен број со саканите својства, тогаш цифрата 0 не треба да се содржи во записот, а цифрата 7 треба да е најдесно во записот. Сега, ако се има предвид барањето двоцифрените броеви составени од соседни цифри да се деливи со 7 или 13 добиваме дека втората цифра е 8, третата цифра е 4, четвртата 9, петтата е 1, шестата е 3, седмата е 5 и осмата е 2. Значи, бараниот број е 784913526.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат n природни броеви такви што точно еден број е делив со n, точно два броја се деливи со $n-1$ итн. точно $n-1$ броеви се деливи со 2.

   Решение. Броевите 60, 12, 6, 2 и 1 покажуваат дека $n=1,2,3,4,5$ се решенија на задачата. Нека претпоставиме дека $n\geq 6$. Бидејќи $n-1$ броеви се деливи со 2, а $n-2$ броеви се деливи со 3, заклучуваме дека барем $n-3$ броеви се деливи со 6, што противречи на условот на задачата бидејќи точно $n-5$ броеви треба да се деливи со 6.

4. Множеството $\{1,2,...,2010\}$ е поделено на 1005 парови (a_i, b_i), $1 \le i \le 1005$ така што $|a_i - b_i| = 1$ или $|a_i - b_i| = 6$ за секој i. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{1005} - b_{1005}|.$$

Решение. Нека k е бројот на паровите со разлика 6. Тогаш има $1005 - k$ парови со разлика 1 и во овие парови се содржани $1005 - k$ парни и $1005 - k$ непарни броеви. Според тоа, k парни и k непарни броеви се содржани во паровите со разлика 6. Секој пар со разлика 6 е составен од броеви со еднаква парност, па затоа бројот k е парен. Имаме

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{1005} - b_{1005}| = 6k + (1005 - k) = 1005 + 5k,$$

и како k е парен број заклучуваме дека цифрата на единиците на збирот е 5.

5. Дадени се 17 броеви, секој од кои е еднаков на еден од броевите 2, 3, 4 или 5. Збирот на сите 17 броја е делив со 17. Докажи дека меѓу дадените 17 броја некој од броевите 2, 3, 4 и 5 се среќава најмногу два пати.

Решение. Да претпоставиме дека секој од броевите 2, 3, 4 и 5 се среќава барем три пати. Збирот на овие 12 броја е $3 \cdot (2+3+4+5) = 42$. Преостанатите 5 броја можат да бидат било кои од броевите 2, 3, 4 или 5 и затоа тие ќе имаат збир поголем или еднаков на 10 и помал или еднаков на 25. Според тоа, за збирот S на сите 17 броја ќе важи $52 \le S \le 67$. Но, ниту еден од броевите 52, 53, 54, ..., 67 не е делив со 17, што противречи на условот на задачата. Конечно од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

6. Горјан избрал природен број a и го запишал едноподруго два пати, со што го добил бројот b. На пример, за $a = 17$ се добива бројот $b = 1717$. Горјан забележал дека $a^2 \mid b$. Определи ги сите можни вредности на $b : a^2$.

Решение. Нека бројот a е запишан со k цифри. Тогаш $b = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k-1}1$. Според тоа, a е делител на $1\underbrace{0...0}_{k-1}1 = c$. Сега, a е запишан со k цифри, па затоа $a \ge 1\underbrace{0...0}_{k-1}$, од каде добиваме $c : a \le 11$. Но, ниту еден од броевите 2, 3 и 5 не е делител на c, па затоа единствени можности за $c:a$ се 7 и 11. Овие броеви се добиваат за $a=143$ и $a=1$, соодветно.

7. Бројот на годините на Дамјан е двоцифрен број n.
Косара рекла: n е делив со 3 и n е парен број.
Невена рекла: n е делив со 3 и цифрата на единицте на n е 5.
Јованка рекла: n е делив со 5 и збирот на цифрите на n е 12.
Секое од трите девојчиња искажало едно точно и едно неточно тврдење. Колку години може да има Дамјан?
Решение. Ако бројот n не е делив со 3, тогаш n е парен број и цифрата на единиците на n е 5, што не е можно. Значи, n е делив со 3, не е парен број и цифрата на единиците не му е 5, што значи дека не е делив со 5. Значи, збирот на цифрите на n е 12. Двоцифрени броеви чиј збир на цифри е 12, не се деливи со 5 и не се парни се: 39, 57 и 93.

8. Маѓионичар му предлага на гледач да замисли трицифрен број $\overline{abc}$ и да му го каже збирот на броевите $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}$ и $\overline{cba}$. Маѓионичарот тврди дека само со таа информација може да го определи бројот $\overline{abc}$. Дали е ова точно?
Решение. *Одговор*: ДА.
Да го означиме збирот на цифрите на x со $S(x)$. Тогаш маѓионичарот го знае збирот $222S(x)-x$. Доволно е да докажеме дека сите броеви од овој вид се различни за трицифрените броеви x.
Нека претпоставиме дека за некои различни трицифрени броеви x и y важи

$$222S(x)-x=222S(y)-y \text{, т.е. } x-y=222(S(x)-S(y)).$$

Јасно, $S(x)\neq S(y)$, бидејќи во спротивно ќе важи $x=y$. Бидејќи $S(x)-x$ и $S(y)-y$ се деливи со 9, заклучуваме дека $221(S(x)-S(y))$ е делив со 9, што значи дека $S(x)-S(y)$ е делив со 9. Тогаш $|S(x)-S(y)|\geq 9$, па затоа

$$|x-y|\geq 9\cdot 222>1000,$$

што не е можно за трицифрен број.

9. Нека $A=\overline{abcdef}$ и $B=\overline{fedcba}$ се шестцифрени броеви. Определи го најголемиот број на појавување на цифрата 5 во разликата $|A-B|$.

Решение. Разликата $|A-B|$ е делива со 9, па затоа не е можно цифрата 5 да се појави шест пати. Ако цифрата 5 се појавува пет пати, тогаш шестата цифра мора да е 2. Ако двете цифри над 2 се x и y, тогаш $x-y=2$ или $x-1-y=2$ или $10+x-y=2$ или $10+x-y-1=2$. Тогаш $x-y=2,3,-8,-7$. Цифрата во разликата $|A-B|$ во позицијата во која имаме y и x е еднаква на $y-x=5$ или $y-1-x=5$ или $10+y-x=5$ или $10+y-x-1=5$, па затоа $y-x=5,6,-5,-4$, што противречи на $x-y=2,3,-8,-7$. Според тоа, цифрата 5 во разликата $|A-B|$ се појавува помалку од пет пати. Таа најмногу може да се појави четири пати, на пример, ако $A=676231$ и $B=132676$, при што добиваме $|A-B|=543555$.

10. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ такви што
$$2\overline{abc}=\overline{bca}+\overline{cab}.$$
Решение. Имаме:
$$2(100a+10b+c)=(100b+10c+a)+(100c+10a+b)$$
од каде следува $7a=3b+4c$. Ако две од цифрите a,b,c се еднакви, добиваме дека и третата цифра е еднаква на нив. Затоа да претпоставиме дека $a\neq b\neq c\neq a$. Имаме
$$7a=3b+4c,$$
$$3(a-b)=4(c-a),$$
$$\frac{a-b}{c-a}=\frac{4}{3}.$$
Нека $a-b=4k, c-a=3k$. Тогаш $c-b=7k$ и бидејќи c и b се цифри добиваме $-9\leq c-b\leq 9$, од каде следува дека $k=\pm 1$.
Ако $k=1$, тогаш $a-b=4, c-a=3$. Затоа $b=a-4\geq 0$, т.е. $a\geq 4$ и аналогно $a=c-3\leq 6$. Значи, $a=4,5,6$ и од $a-b=4, c-a=3$ добиваме $b=0,1,2$ и $c=7,8,9$, соодветно. Според тоа, броевите 407, 518 и 629 ги задоволуваат условите на задачата.
Ако $k=-1$, тогаш на потполно аналоген начин добиваме дека броевите 370, 481 и 592 ги задоволуваат условите на задачата.

11. Реши го бројниот ребус
$$\overline{COOK}\cdot 3=\overline{MEAL},$$
ако производот $\overline{MEAL}$ е запишан со последователни цифри во некој

редослед, а на различните букви соодветствуваат различни цифри и на различните цифри соодветствуваат различни букви.

Решение. Производот $\overline{COOK}\cdot 3$ е делив со 3, па затоа $\overline{MEAL}$ е делив со 3, што значи дека збирот на цифрите на $\overline{MEAL}$ е делив со 3. Бидејќи M, E, A, L се последователни цифри, ако најмалата ја означиме со n, нивниот збир е

$$n+n+1+n+2+n+3=3(n+2)+n .$$

Овој збир е делив со 3, што е можно ако n е делив со 3. Тоа значи дека четирите цифри со кои е запишан бројот $\overline{MEAL}$ се или 0, 1, 2, 3 или 3, 4, 5, 6 или 6, 7, 8, 9.

Нека последователните цифри се 0, 1, 2, 3. Бидејќи производот е поголем од $3\cdot 1000=3000$, добиваме дека $M=3$. Но, тогаш $C=1$, што не е можно бидејќи 1 е некоја од цифрите E, A и L. Нека последователните цифри се 3, 4, 5, 6. Тие можат да се разместат на 24 начини. За секое разместување се пресметува $\overline{MEAL}:3$ и се добива дека во овој случај единствено решение е $\overline{COOK}=2118$.

На ист начин се разгледува случајот кога цифрите се 6, 7, 8, 9 и се добива дека во овој случај задачата нема решение.

12. Определи ги сите тројки броеви (a,b,c) такви што

а) a,b,c се последователни непарни природни броеви,

б) бројот $a^2+b^2+c^2$ се запишува со четири еднакви цифри.

Решение. Ако $a=2t-1,\ b=2t+1,\ c=2t+3$, тогаш

$$a^2+b^2+c^2=12t^2+12t+11. \qquad (1)$$

Бидејќи $a^2+b^2+c^2$ се запишува со четири еднакви цифри, од (1) следува дека првите две цифри на $12t^2+12t$ се p, а последните две негови цифри се $p-1$. Бројот $12t^2+12t$ е парен, па затоа $p-1$ е парна цифра. Можни вредности за $12t^2+12t$ се 1100, 3322, 5544, 7766 и 9988. Понатаму, $12t^2+12t$ е делив со 3, па затоа единствена можна вредност е 5544, што значи $t(t+1)=462=21\cdot 22$, од каде добиваме $t=21$. Конечно, бараните броеви се $a=41,\ b=43,\ c=45$.

13. Нека n е природен број и a е произволен делител на $2n^2$. Докажи

дека бројот n^2+a не е точен квадрат на природен број.

Решение. Нека претпоставиме дека $n^2+a=x^2$ за некој $x\in\mathbb{N}$. Според условот $2n^2=ka$, $k\in\mathbb{N}$ и затоа

$$x^2=n^2+\tfrac{2n^2}{k}, \text{ т.е. } (\tfrac{kx}{n})^2=k^2+2k.$$

Значи, квадрат на рационален број е цел број, па затоа $\frac{kx}{n}$ е цел број. Но, тоа значи дека k^2+2k е точен квадрат, што противречи на неравенствата $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$.

14. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на дадениот број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 27.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број со бараното својство, т.е. таков да $a+b+c+d=27$. Имаме

$$\begin{aligned} S=\overline{abcd}+\overline{dcba}&=1001(a+d)+110(b+c)\\ &=110(a+d)+110(b+c)+891(a+d)\\ &=110(a+b+c+d)+891(a+d)\\ &=110\cdot 27+27\cdot 33(a+d)\\ &=27(110+33(a+d)),\end{aligned}$$

што значи дека $27\,|\,S$, што и требаше да се докаже.

15. Дали постојат три природни броја, поголеми од 1, такви што квадратот на секој од трите броја намален за 1 е делив со другите два броја.

Решение. Нека претпоставиме дека броевите a,b,c го задоволуваат условот на задачата. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\ge b\ge c>1$. Тогаш од $b\,|\,a^2-1$ следува $(a,b)=1$, па затоа од $a\,|\,c^2-1$ и $b\,|\,c^2-1$ следува $ab\,|\,c^2-1$. Но, тоа значи дека

$$c^2-1\ge ab\ge c\cdot c=c^2,$$

што е потивречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат броеви a,b,c кои го задоволуваат условот на задачата.

16. Нека $n>3$ е природен број. Докажи дека барем еден од броевите

$$n!+1,\ n!+2,\ \dots,\ (n+1)!-1,\ (n+1)! \qquad (1)$$

е делив со n^3.

Решение. Дадените броеви (1) се вкупно $(n+1)!-n!=n\cdot n!$. Понатаму, со индукција по n лесно се докажува дека за $n\geq 4$ важи $n!>n^2$. Според тоа, вкупно имаме $n\cdot n!>n^3$ последователни природни броеви и затоа барем еден од броевите (1) е делив со n^3.

17. Одреди ги сите подредени двојки (x,y), $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$ за коишто три од наведените тврдења се точни, а само едно е неточно:

(1) $y\,|\,(x+1)$

(2) $x=2y+5$

(3) $3\,|\,(x+y)$

(4) $x+7y$ е прост број

Решение. Тврдењата (2) и (3) не може истовремено да се точни. Од $x=2y+5$ и $3\,|\,(x+y)$, т.е. $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$ следува $2y+5+y=3k$, $5=3(k-y)$. Последното равенство не е можно, бидејќи десната страна е делива со 3, а левата не е.

Исто така, тврдењата (3) и (4) не можат истовремено да бидат точни. Од $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$, добиваме $x+7y=3k-y+7y=3(k+2y)$, па од $k+2y>1$ повлекува дека $k+2y$ не може да биде прост број за ниту едни $k,y\in\mathbb{N}$.

Следствено, треба да се точни (1), (2) и (4). Од (1) следува $x+1=my$, $m\in\mathbb{N}$, па со замена во (2) добиваме:

$$my-1=2y+5, \qquad y=\tfrac{6}{m-2}.$$

За да биде y природен број, треба $(m-2)\,|\,6$, т.е. $(m-2)\in\{1,2,3,6\}$, односно $m\in\{3,4,5,8\}$. Тогаш добиваме:

$$(x,y)\in\{(17,6),(11,3),(9,2),(7,1)\}.$$

За да биде точно и тврдењето (4) треба за овие вредности на x и y изразот $x+7y$ да е прост број, а тоа е точно само за подредените парови $(17,6)$ и $(9,2)$.

18. Определи ги сите природни броеви n за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е исто така природен број.

Решение. Дропката $\frac{24}{3n-4}$ е природен број ако и само ако $(3n-4)\,|\,24$, т.е. ако и само ако

$$3n-4 \in \{1,2,3,4,6,8,12,24\}.$$

Но, тогаш

$$3n \in \{5,6,7,8,10,12,16,28\}$$

и од тоа што n е природен број добиваме дека $3n$ може да биде само 6 или 12, па затоа $n=2$ или $n=4$.

19. Определи го бројот x така што $2x-3,\ 5x-14$ и $\frac{2x-3}{5x-14}$ се цели броеви.

Решение. Нека $a=2x-3, b=5x-14, c=\frac{2x-3}{5x-14}$ се цели броеви. Имаме

$$10x-15=5a \text{ и } 10x-28=2b,$$

па затоа $5a-2b=13$. Сега

$$b(5c-2)=(5x-14)(5\cdot\frac{2x-3}{5x-14}-2)=(5x-14)\cdot\frac{10x-15-10x+28}{5x-14}=13$$

и бидејќи 13 е прост број, а $5c-2\neq\pm1$ заклучуваме дека $b=1$ или $b=-1$. За $b=1$, добиваме $x=3$, па затоа $a=3$ и $c=3$. За $b=-1$ добиваме $x=\frac{13}{5}$, па затоа $a=2\cdot\frac{13}{5}-3=\frac{11}{5}\notin\mathbb{Z}$, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

20. Определи ги сите двоцифрени броеви $\overline{ab}$ такви што $\overline{ab}\,|\,\overline{a0b}$.

Решение. Од $\overline{ab}\,|\,\overline{a0b}$ следува

$$10a+b\,|\,100a+b=10(10a+b)-9b,$$

па затоа $10a+b\,|\,9b$. Но, b е цифра, т.е. $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Со непосредна проверка се добива дека бараните броеви се:

10,15, 18, 20, 20, 40, 45, 50, 60, 70, 80 и 90.

21. Определи ги сите природни броеви n за кои $\frac{n(n+1)}{2}$ е трицифрен број запишан со исти цифри.

Решение. Јасно, $\frac{n^2}{2}<\frac{n(n+1)}{2}\leq 999$, па затоа $n<48$. Секој трицифрен број запишан со исти цифри е делив со 111, што значи дека е делив со 37. Последното значи дека $37\,|\,n$ или $37\,|\,n+1$. Но, $n\leq 47$, па затоа $n=37$ или $n=36$. Со непосредна проверка се добива дека $n=36$ и притоа $\frac{n(n+1)}{2}=666$.

22. Докажи дека за секој цел број m и $A=\frac{m^4}{24}+\frac{m^3}{4}+\frac{11m^2}{24}+\frac{m}{4}$ е цел број.

Решение. Дадениот израз да го запишеме на следниот начин:

$$\begin{aligned}A&=\frac{m}{24}(m^3+6m^2+11m+6)\\&=\frac{m}{24}(m^3+3m^2+2m+3m^2+9m+6)\\&=\frac{m}{24}[m(m^2+3m+2)+3(m^2+3m+2)]\\&=\frac{m}{24}(m^2+3m+2)(m+3)\\&=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}\end{aligned}$$

Значи, за да докажеме дека A е цел број, треба да докажеме дека производот $n=m(m+1)(m+2)(m+3)$ е делив со 24. Производ на два последователни броја е делив со 2; од четири последователни броеви еден е делив со 4; значи, бројот n е делив со 8. Производ од три последователни броја е делив со 3, па, значи, n е делив со 3. Броевите 3 и 8 се заемно прости, што значи дека n е делив и со бројот $3\cdot 8=24$.

23. Докажи, дека за секој природен број n важи $6\,|\,n^3+11n$.

Решение. *Прв начин.* За $n=1$ имаме $6\,|\,12=1^3+11\cdot 1$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, односно дека важи $6\,|\,k^3+11k$, т.е. $k^3+11k=6m$, за некој $m\in\mathbb{N}$. За $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}(k+1)^3+11(k+1)&=k^3+3k^2+3k+1+11k+11\\&=k^3+11k+3k(k+1)+12\end{aligned}$$

и како $3k(k+1)+12$ е делив со 6, од индуктивната претпоставка следува дека $6\,|\,(k+1)^3+11(k+1)$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $6\,|\,n^3+11n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Имаме,

$$n^3+11n=(n-1)n(n+1)+12n,$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

24. Докажи дека производот на четири последователни природни броеви:
а) е делив со 24,
б) не е квадрат на природен број.

Решение. а) Нека $n, n+1, n+2, n+3$ се четири последователни природни броеви. Тогаш нивниот производ е $n(n+1)(n+2)(n+3)$, во кој два од броевите се парни, при што еден од е делив со четири, а најмалку еден е делив со 3. Според тоа, производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со производот $2 \cdot 3 \cdot 4$ т.е. со 24.
б) Производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ го запишуваме во видот

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= [n(n+3)][(n+2)(n+1)] \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\ &= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1-1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 - 1, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека тој не е квадрат на природен број за секој природен број n.

25. Докажи дека $584 | (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2} &= 8^n(1+8+8^2) \\ &= 73 \cdot 8^n = 584 \cdot 8^{n-1} \end{aligned}$$

и бидејќи $8^{n-1} \geq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$ следува дека $584 | (8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2})$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

26. Докажи дека за секој природен број n важи $7 | (8^n - 14n - 1)$.

Решение. Ако го искористиме равенството

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка, добиваме

$$\begin{aligned} 8^n - 1 &= (8-1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + ... + 8 + 1) \\ &= 7(8^{n-1} + 8^{n-2} + ... + 8 + 1), \end{aligned}$$

па затоа за секој природен број n важи $7 | (8^n - 1)$ и уште $7 | 14n$. Од последните две тврдења следува дека $7 | (8^n - 14n - 1)$.

27. Докажи дека за ниту еден природен број n бројот

$$1^{2021} + 2^{2021} + 3^{2021} + ... + (n-1)^{2021} + n^{2021}$$

не е делив со $n+2$.

Решение. Тврдењето на задачата следува од идентитетот:

$$\begin{aligned}2(1^{2021}&+2^{2021}+3^{2021}+...+(n-1)^{2021}+n^{2021})=\\&=2+(2^{2021}+n^{2021})+(3^{2021}+(n-1)^{2021})+...+(n^{2021}+2^{2021})\\&=2+(n+2)M,\end{aligned}$$

каде M е природен број.

28. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(n-1)^3+n^3+(n+1)^3&=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1\\&=3n^3-3n+9n\\&=3n(n^2-1)+9n\\&=3n(n-1)(n+1)+9n.\end{aligned}$$

Бидејќи производ на три последователни природни броја е делив со 3, добиваме дека $3\,|\,n(n-1)(n+1)$, па затоа $9\,|\,3n(n-1)(n+1)$ и како $9\,|\,9n$ добиваме $9\,|\,3n(n-1)(n+1)+9n=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$, што и требаше да се докаже.

29. Определи ги сите природни броеви n за кои $n!+n+1$ е делител на $(n+1)!-n+29$.

Решение. Непосредно се проверува дека за $n\leq 5$ решенија на задачата се $n=1, n=3, n=4$. Нека $n\geq 6$. Од условот следува дека

$$(n+1)!-n+29-(n+1)(n!+n+1)=-n^2-3n+28$$

исто така е делив со $n!+n+1$. Затоа

$$n^2+2n-28\geq n!\geq n(n-1)(n-2)(n-3)=n^4-6n^3+11n^2-6n,$$

односно

$$n^4-6n^3+10n^2-8n+28\leq 0,$$

што не е точно за $n\geq 6$.

30. На секое од девет картончиња е запишан по еден од броевите од 1 до 9, при што не сите запишани броеви се еднакви меѓу себе. Докажи дека можеме да избереме неколку картончиња така што збирот на броевите запишани на нив е делив со 10.

Решение. Нека на картончињата се запишани броевите $a_1, a_2, ..., a_9$, при што без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1 \neq a_2$. Да ги разгледаме збировите

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, ..., S_9 = a_1 + a_2 + ... + a_9 .$$

Ако некој од овие збирови завршува на цифрата 0, тогаш тврдењето е докажано. Ако цифрите на единиците на два збира се еднакви, тогаш ако од поголемиот збир го одземеме помалиот добиваме број чија цифра на единиците е 0 и тој број е делив со 10. Останува случајот кога цифриите на единиците на збировите $S_1, S_2, ..., S_9$ се сите цифри од 1 до 9. Тогаш некој збир S_k завршува на a_2 и тоа не е S_1, бидејќи $a_1 \neq a_2$. Според тоа, бројот $S_k - a_2$ има цифра на единиците 0, т.е. тој е делив со 10, со што тврдењето е докажано и во овој случај.

31. Дадени се 2011 цели броеви за кои важи: ако отстраниме било кој од дадените броеви, тогаш преостанатите 2010 броеви можеме да ги поделиме во две множества од по 1005 броеви со еднаков збир на нивните елементи. Докажи дека сите 2011 броеви се еднакви меѓу себе.

Решение. Нека дадените броеви се $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{2011}$. Ако го одземеме a_1 од сите дадени броеви ги добиваме броевите

$$b_1 = a_1 - a_1 = 0, b_2 = a_2 - a_1, ..., b_{2011} = a_{2011} - a_1 .$$

Лесно се докажува дека добиените броеви го задоволуваат условот на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + ... + b_{2011}$, од условот на задачата следува дека броевите $S - b_1, S - b_2, ..., S - b_{2011}$ се парни. Затоа сите броеви $b_1, b_2, ..., b_{2011}$ имаат иста парност, а тоа е парноста на S. Но, $b_1 = 0$ е парен број, па затоа сите броеви $b_1, b_2, ..., b_{2011}$ се парни. Ако ги поделиме со 2, тогаш добиените броеви повторно го задоволуваат условот на задачата и повторно првиот од нив е еднаков на 0. Според тоа и овие броеви се парни. Ако ја продолжиме постапката добиваме дека броевите $b_1, b_2, ..., b_{2011}$ произволен број пати се деливи со 2, а тоа е можно само ако $b_1 = b_2 = ... = b_{2011} = 0$, односно ако $a_1 = a_2 = ... = a_{2011}$ што и требаше да се докаже.

32. Определи го најмалиот природен број n со следново својство: Збирот на цифрите на n е делив со 101 и збирот на цифрите на $n+1$ е делив со 101.

Решение. Со $S(m)$ да го означиме збирот на цифрите на природниот број m. Ако последната цифра на n не е 9, тогаш $S(n+1)=S(n)+1$ и не е можно и двата броја да се деливи со 101. Ако n се состои само од деветки, тогаш $S(n+1)=1$ и не е делив со 101. Според тоа,

$$n=\overline{a_1a_2...a_k 99...9},$$

каде $a_k \neq 9$ и бројот на деветките е t. Ако $s=a_1+a_2+...+a_k$, тогаш $S(n)=s+9t$ и $S(n+1)=s+1$. Значи, $S(n)=S(n+1)=9t-1$ е делив со 101, т.е. $9t=101p+1$ и непосредно се проверува дека најмалиот p за кој $101p+1$ е делив со 9 е $p=4$. Притоа $t=45$.

Од друга страна, најмалиот s за кој $s+1$ е делив со 101 е $s=100$. Најмалиот број $\overline{a_1a_2...a_k}$ за кој важи $a_1+a_2+...+a_k=100$ и $a_k \neq 9$ е $2\underbrace{99...9}_{10}8$, па затоа бараниот број е

$$n=2\underbrace{99...9}_{10}8\underbrace{99...9}_{45}.$$

33. Определи ги сите парови природни броеви m и n кои се запишани со еднаков број цифри и за кои $2mn=\overline{mn}$, каде $\overline{mn}$ е бројот кој се добива кога броевите m и n се запишат еден по друг.

Решение. Според условот $2mn=10^k m+n$, каде k е бројот на цифрите на m и n. Според тоа, $m|n$ и нека $n=pm$. Бидејќи m и n имаа еднаков број цифри, заклучуваме дека p е едноцифрен број. Понатаму, $2n=10^k+p$, т.е. $n=\frac{10^k+p}{2}$, што значи дека p е парен број, т.е. $p=2,4,6,8$ и n е делив со p. За $p=2$ добиваме дека $5^k2^{k-1}+1$ е делив со 2, што е можно само за $k=1$ и тогаш $m=6, n=3$ е решение. За $p=4$ добиваме дека $5^k2^{k-1}+2$ е делив со 4, што е можно само за $k=2$ и тогаш $n=13, m=52$ е решение. За $p=6$ добиваме дека $5^k2^{k-1}+3$ е делив со 6, што не е точно за ниту еден природен број. За $p=8$ добиваме $5^k2^{k-1}+4$ е делив со 8, што е можно само за $k=3$, но тогаш $n=504$ и $m=63$ немаат еднаков број цифри.

3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

1. Целите броеви x, y и z се такви што

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z\,. \qquad (1)$$

Докажи дека 3 е делител на $x+y+z$.

Решение. Ќе докажеме дека броевите x, y и z имаат еднакви остатоци при делење со 3.

Нека претпоставиме дека x, y и z по парови даваат различни остатоци при делење со 3. Тогаш $(x-y)(y-z)(z-x)$ не е делив со 3, а $x+y+z$ е делив со 3, што противречи на (1).

Понатаму, ако два од броевите, на пример x и y даваат еднакви остатовци при делење со 3, а z дава различен од нив остаток, тогаш $(x-y)(y-z)(z-x)$ е делив со 3, а $x+y+z$ не е делив со 3, што противречи на (1).

Од добиените противречности следува дека трите броја x, y и z имаат еднакви остатоци при делење со 3. Според тоа,

$$x+y+z=3m+r+3n+r+3k+r=3(m+n+k+r)\text{, т.е. } 3\,|\,x+y+z\,.$$

2. Ако природниот број n го поделиме со 6 се добива остаток 3. Определи го остатокот кој се добива при делењето на бројот $3n$ со 6.

Решение. Од теоремата за делење со остаток следува $n=6k+3$, па затоа

$$3n=18k+9=6(3k+1)+3\,.$$

Сега, повторно од теоремата за делење со остаток следува дека при делењето на бројот $3n$ со 6 повторно се добива остаток 3.

3. Дадени се различни седумцифрени броеви a и b, секој од кои е запишан со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, без тие да се повторуваат. Дали може $\frac{a}{b}$ да е природен број?

Решение. Бидејќи $1+2+3+...+7=28$, заклучуваме дека двата броја даваат остаток 1 при делење со 9. Ако $a=kb$ за некој $k>1$, тогаш k исто така дава остаток 1 при делење со 9. Последното значи дека $k\geq 10$, што не е можно бидејќи и двата броја се седумцифрени.

4. Дадени се n броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека од нив може да се из-

берат неколку чиј збир на квадрати е делив со n.

Решение. Ако некој од броевите

$$S_1 = a_1^2, S_2 = a_1^2 + a_2^2, ..., S_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$$

е делив со n, тогаш тврдењето е докажано.

Ако ниту еден од броевите $S_1, S_2, ..., S_n$ не е делив со n, тогаш од принципот Дирихле следува дека постојат два броја кои при делење со n даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со n.

5. Нека r е остатокот при делењето на броевите 1059, 1417 и 2312 со бројот $d > 1$. Определи ја вредноста на изразот $d - r$.

Решение. Од теоремата за делење со остаток следува

$$1059 = da + r,$$
$$1417 = db + r,$$
$$2312 = dc + r,$$

за некои цели броеви a, b, c. Според тоа,

$$358 = 1417 - 1059 = (db + r) - (da + r) = d(b - a),$$
$$1253 = 2312 - 1059 = (dc + r) - (da + r) = d(c - a),$$
$$895 = 2312 - 1417 = (dc + r) - (db + r) = d(c - b).$$

Значи, $d \,|\, 358 = 2 \cdot 179$, $d \,|\, 1253 = 7 \cdot 179$ и $d \,|\, 895 = 5 \cdot 179$. Но, $d > 1$, па затоа $d = 179$. Конечно, од $1059 = 5 \cdot 179 + 164$ следува $r = 164$, па затоа

$$d - r = 179 - 164 = 15.$$

6. Ако на таблата е запишан број n, тогаш тој може да биде заменет со некој од броевите $2n - 4, 3n - 8$ или $8 - n$. Дали на овој начин може од бројот 41 да се добие број кој е поголем од 10^7, но е помал од $10^7 + 20$.

Решение. Не! Ќе докажеме дека секој од запишаните броеви намален за 4 е делив со 37. За 41 тоа е точно и ако е точно за некој n, тогаш бидејќи броевите $(2n - 4) - 4, (3n - 8) - 4, (8 - n) - 4$ се деливи со $n - 4$, тогаш тврдењето е точно за секој следен број. Останува да провериме дека 10^7 дава остаток 10 при делење со 37, па затоа меѓу 10^7 и $10^7 + 20$ нема број кој дава остаток 4 при делење со 37.

7. Андреј замислил број X кој ги имал следниве својства: X е за 1 по-

мал од број делив со 210, збирот на цифрите на X е два пати поголем од бројот на цифрите на X, X се запишува со најмногу 12 цифри и во записот на X се менуваат непарни и парни цифри. Кој број го замислил Андреј?

Решение. Бидејќи $X+1$ е делив со 210, тој е делив со 10, па затоа цифрата на единиците на X е 9. Збирот на цифрите на X е $2n$ и тој дава остаток 2 при делење со 3 (бројот $X+1$ е делив со 3). Од $n \leq 12$ следува дека збирот на цифрите на X е најмногу 24. Според тоа, збирот на цифрите на X е 14 или 20.

Ако збирот на цифрите на X е 20, тогаш бројот е запишан со 10 цифри и точно 5 од нив треба да се непарни, што не е можно. Според тоа, збирот на цифрите на X е 14 и бројот е седумцифрен. Ако бројот е $\overline{ABCDEF9}$, каде A, C, E се непарни и B, D, F се парни цифри, тогаш $A+B+C+D+E+F=5$. Оттука A, C, E се 1, 1, 1 и B, D, F се 0, 0, 2 (во некаков редослед) или A, C, E се 1, 1, 3 и B, D, F се 0, 0, 0. Конечно, ако искористиме дека бројот $X+1$ е делив со 7, добиваме дека бараниот број е 1010309.

8. Докажи дека ако за природните броеви n и m е точно неравенството $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, тогаш $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

Решение. Од условот на задачата следува $\sqrt{7}n>m$, од каде добиваме $7n^2-m^2>0$. Ќе докажеме дека $7n^2-m^2 \geq 3$. Ако, $7n^2-m^2=1$ или $7n^2-m^2=2$, тогаш $7 \mid m^2+1$ или $7 \mid m^2+2$, што не е можно бидејќи квадрат на природен број при делење со 7 дава остатоци 0, 1, 2, 4, па затоа при делење на m^2+1 се добиваат остатоци 1, 2, 3, 5, а при делење на m^2+2 со 7 се добиваат остатоци 2, 3, 4 и 6.

Според тоа, $7n^2-m^2 \geq 3$, па затоа ако земеме предвид дека $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2m^2}$ добиваме

$$7 \geq \frac{m^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}=\frac{m^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2} \geq \left(\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\right)^2,$$

од каде следува $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

9. Нека $n_1, n_2, ..., n_{2011}, n_{2012}$ се природни броеви такви што

$$n_1^2+n_2^2+...+n_{2011}^2=n_{2012}^2.$$

Докажи дека најмалку два од дадените броеви се парни.

Решение. Ако меѓу броевите $n_1, n_2, ..., n_{2011}$ има барем два парни броеви, тогаш решението на задачата следува веднаш. Ќе разгледаме два случаја.

1) Меѓу броевите $n_1, n_2, ..., n_{2011}$ има еден парен број. Тогаш збирот $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{2011}^2$ е парен број, па затоа n_{2012}^2 е парен број. Според тоа, n_{2012} е парен број и конечно меѓу дадените броеви има најмалку два парни.
2) Меѓу броевите $n_1, n_2, ..., n_{2011}$ нема ниту еден парен број. При делење на квадрат на непарен број со 8 се добива остаток 1, па затоа при делење на збирот $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{2011}^2$ со 8 се добива остаток 2011, односно 3. Сега, од $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{2011}^2 = n_{2012}^2$ следува дека при делење на n_{2012}^2 со 8 треба да се добие остаток 3, што не е можно, бидејќи при делење на квадрат на природен број со 8 се добива остаток 0, 1 или 4.

10. Докажи дека за бесконечно многу природни броеви n точно два од трите броја $n, n+2$ и $n+64$ може да се запишат како збир на кубови на три природни броја.

Решение. Да забележиме дека $7^3 + 1^3 = 4^3 + 4^3 + 6^3$. Според тоа, ако за произволен број t ставиме $k = t^3 + 4^3 + 6^3$, тогаш $k + 64 = t^3 + 1^3 + 7^3$. Ако избереме t од видот $9s+1$, тогаш k дава остаток 2 при делење со 9 и $k+2$ дава остаток 4 при делење со 9. Тогаш $k+2$ не може да биде збир на три куба, бидејќи кубовите при делење со 9 даваат остатоци 1, 0 и -1.

11. Докажи дека $a^3 + b^3 + 4$ не е куб на цел број за било кои природни броеви a и b.

Решение. Ќе ги разгледаме остатоците кои ги дава $a^3 + b^3 + 4$ при делење со 9.

Куб на природен број при делење со 9 дава остатоци 0, 1 и 8. Навистина ако $n = 3k$, тогаш остатокот е 0, ако $n = 3k+1$, тогаш остатокот е 1 и ако $n = 3k+2$, тогаш остатокот е 8 (Провери!). Заради тоа, наместо a^3 и b^3 во збирот a^3+b^3+4 доволно е да ги разгледаме нивните остатоци при делење со 9. Можни се следните случаи:

1° $0+0+4=4$; при делење со 9 дава остаток 4

2° $0+1+4=5$; при делење со 9 дава остаток 5

3° $0+8+4=12$; при делење со 9 дава остаток 3

4° $1+1+4=6$; при делење со 9 дава остаток 6

5° $1+8+4=13$; при делење со 9 дава остаток 4

6° $8+8+4=22$; при делење со 9 дава остаток 2.

Бидејќи 2, 3, 4, 5, 6 не може да се добијат како остатоци на точен куб при делење со 9, a^3+b^3+4 не е точен куб на цел број.

Да забележиме дека заради симетрија на a^3+b^3+4 во однос на a и b доволно е што се разгледани претходните шест случаи.

12. Од 7 листови хартија определен број листови се исечени на по 10 делови. Од добиените листови, определен број листови повторно се исечени на по 10 делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 2021 листови?

Решение. Нека во првиот чекор се исечени n_1 листови. Тогаш по сечењето ќе има вкупно $10n_1+(7-n_1)=7+9n_1$ листови. Ако во вториот чекор се исечени n_2 листови ќе се добијат вкупно

$$10n_2+(7+9n_1-n_2)=7+9n_1+9n_2$$

листови. Продолжувајќи на сличен начин заклучуваме дека при секое ново сечење, бројот на листовите се зголемува за некој број помножен со 9. Според тоа, на крајот, ќе има вкупно $7+9n$ листови. Значи треба да важи равенството $2021=7+9n$, т.е. $9n=2014$. Бројот 2014 не е делив со 9, па затоа со опишаната постапка на крајот не може да се добијат 2021 листови.

13. Ако $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $9\,|\,(a^3+b^3+c^3)$, тогаш барем еден од броевите a,b и c е делив со 3. Докажи!

Решение. Нека $a,b,c\in\mathbb{Z}$ и $9\,|\,(a^3+b^3+c^3)$. Лесно се проверува дека за $m=3k+1$ важи $m^3=9q+1$, а за $m=3k+2$ важи $m^3=9q-1$. Според тоа, ако ниту еден од броевите a,b и c не е делив со 3, тогаш при делење на бројот $a^3+b^3+c^3$ со 9 се добива остаток од облик $\pm1\pm1\pm1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од броевите a,b и c е делив со 3.

14. Ако n е непарен природен број, тогаш 48 е делител на бројот n^3+3n^2-n-3. Докажи!

Доказ. *Прв начин.* Имаме:

$$\begin{aligned}n^3+3n^2-n-3&=n^2(n+3)-(n+3)\\&=(n+3)(n^2-1)\\&=(n-1)(n+1)(n+3).\end{aligned}$$

Бидејќи броевите $n-1, n+1, n+3$ се парни (според условот n е непарен) и еден од броевите $n-1, n+1$ е делив со 4, заклучуваме дека дадениот број е делив со 16. Ако n е делив со 3, тогаш и $n+3$ е делив со 3. Ако n не е делив со 3, тогаш при делење со 3 дава остаток 1 или -1 па еден од броевите $n-1$ и $n+1$ е делив со 3. Оттука, заклучуваме дека дадениот број се дели со $3\cdot16=48$.

Втор начин. Бројот n е непарен, па може да се запише во облик $n=2k-1,$ за некој природен број k. Ако го вметнеме ова во дадениот израз добиваме:

$$\begin{aligned}(2k-1)^3+3(2k-1)^2-(2k-1)-3&=8k^3-8k=8k(k^2-1)\\&=8k(k-1)(k+1).\end{aligned}$$

Еден од факторите $k-1$, k, $k+1$ е делив со 3 и барем еден од $k-1$, k, $k+1$ е парен. Затоа производот $8k(k-1)(k+1)$ е делив со $8\cdot3\cdot2=48$.

15. За природните броеви a и b важи: ако a^2 се подели со b се добива остаток 2, а ако a^3 се подели со b се добива остаток 5. Определи го бројот b.

Решение. Според условот бројот b е поголем од 5 и е делител на a^2-2 и a^3-5. Според тоа, b е делител на $a^3-5-a(a^2-2)=2a-5$. Следува дека b е делител на $2(a^2-2)-a(2a-5)=5a-4$, односно на $2(5a-4)-5(2a-5)=17$. Но, 17 е прост број и $b>5$, па затоа $b=17$.

16. Во една држава има бесконечно многу градови кои се нумерирани со

броевите 1, 2, 3, 4, ... Градовите се поврзани со патишта така што за секој $n \geq 1$ е можно двосмерно движење меѓу градовите $n, 2n$ и $3n+1$. Докажи дека од произволен град може да се стигне до секој од друг град.

Решение. Бидејќи дижењето е двосмерно, доволно е да докажеме дека од градот 1 може да се стигне до секој друг град. Нека претпоставиме дека од градот 1 има пат до секој град $m < n$. Ќе докажеме дека од n има пат до секој град со помал број, па оттука ќе следува дека има пат и до градот 1.

Ако $n = 3k+1$, тогаш според условот има пат од n до градот $k < n$.

Ако $n = 3k+2$, тогаш според условот има пат до градот $2n$, па како $2n = 6k+4 = 3(2k+1)+1$ од условот следува дека има пат до градот $2k+1 < n$.

Ако $n = 3k$, тогаш има пат до градот $3n+1 = 9k+1$, па затоа има пат до градот $2(9k+1) = 18k+2$, потоа до градот $2(18k+2) = 36k+4$, а бидејќи потоа $36k+4 = 3(12k+1)+1$ има пат до градот $12k+1$, а од $12k+1 = 3 \cdot 4k+1$ заклучуваме дека има пат до градот $4k$ и како $4k = 2 \cdot 2k$ има пат до градот $2k < n$.

17. Во низата $a_1, a_2, .a_3, ...$ бројот $a_{n+1}, n \geq 2$ е еднаков на остатокот од делењето на $a_n + a_{n-1} + 1$ со 3. Определи го a_1 ако $a_{93} = a_1$.

Решение. Во решението сите остатоци се при делење со 3. Остатокот на даден број зависи само од остатоците на претходните два броја. Ако два последователни броја даваат остаток 2, тогаш тоа важи и за сите броеви потоа во низата. Низата 1, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 2, ... соодветствува на рекурентната зависност и во неа се среќаваат како последователни сите други 8 парови остатоци. Според тоа, остатоците секогаш припаѓаат или на оваа низа (почнувајќи од некое место) или во низата 2, 2, 2, 2, ... И во двата случаја имаме $a_{n+8} = a_n$ за секој n, а $a_{n+4} = a_n$ ако $a_{n+4} = 2$. Според тоа, разликата на редните броеви на два еднакви члена може да даде остаток 4 при делење со 8 само ако нивната вредност е 2, а членовите a_{93} и a_1 соодветствуваат на овие услови.

4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Горјан запишал 2011 броеви, првиот број бил 1, а секој следен е за 3 поголем од претходниот: 1, 4, 7, 10, ... Андреј исто така запишал 2011 броеви, првиот е 9, а секој следен е за 7 поголем од претходниот: 9, 16, 23, ... Колку различни броеви запишале Горјан и Андреј?

Решение. Последниот број кој го запишал Горјан е $1+3\cdot 2010=6031$, а последниот број кој го запишал Андреј е $9+7\cdot 2010=14079$. Првиот број кој е заеднички во двете низи е 16. Понатаму, бидејќи $(3,7)=21$ сите броеви кои се повторуваат се од видот $16+21k$, каде k е природен број. Притоа, $16+21k\leq 6031$, па затоа $k\leq \frac{6015}{21}=286+\frac{9}{21}$. Значи, $286+1=287$ броеви се запишани и од Горјан и од Андреј, што значи дека тие заедно запишале $2\cdot 2011-287=3735$ различни броеви.

2. Нека a,b и p се произволни цели броеви. Докажи, дека постојат $k,l\in\mathbb{Z}$, такви што $(k,l)=1$ и $p\,|\,ak+bl$.

Решение. Нека $(b,p-a)=d$, т.е. $b=kd$ и $p-a=ld$. Тогаш броевите k и l се заемно прости и важи $ak+bl=\frac{ab}{d}+\frac{b(p-a)}{d}=\frac{pb}{d}=pk$.

3. Определи ги сите цифри a, за кои броевите

$$\overline{100a},\overline{1001a},\overline{10011a},\overline{100111a},...,\overline{100\underbrace{11...1}_{n}a},...$$

имаат заеднички делител поголем од 1.

Решение. Разликата на два последователни броја во горната низа е

$$\overline{100\underbrace{11...1}_{n}a}-\overline{100\underbrace{11...1}_{n-1}a}=901\underbrace{00...0}_{n}=2^n\cdot 5^n\cdot 17\cdot 53.$$

Според тоа, ако броевите имаат заеднички делител поголем од 1, тогаш тие ќе имаат заеднички делител 2, 5, 17 или 53. Освен тоа, ако $\overline{100a}$ е делив со некој од броевите 2, 5, 17 и 53, тогаш сите членови на низата се деливи со истиот број. Останува да провериме за кои цифри a бројот $\overline{100a}$ е делив со некој од броевите 2, 5, 17 или 53.

За $a=2,4,6,8,0$ бројот $\overline{100a}$ е делив со 2. За $a=5$ бројот $\overline{100a}$ е делив со 5, за $a=3$ бројот $\overline{100a}$ е делив со 17, а за $a=7$ бројот $\overline{100a}$ е делив со 53. За $a=1$ и $a=9$ соодветните броеви не се деливи со

ниту еден од броевите 2, 5, 17 и 53.
Конечно, $a = 0,2,3,4,5,6,7,8$.

4. Производот на два природни броја 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Определи ги сите парови природни броеви кои го задоволуваат тоа својство.

Решение. Со a и b да ги означиме бараните броеви. Од условот следува $(a,b) = 24$, па затоа $a = 24m$ и $b = 24n$, каде m и n се заемно прости броеви. Понатаму, $ab = 34560$, па затоа $34560 = 24m \cdot 24n$, т.е. $mn = 60$. Значи, бројот 60 треба да го запишеме како производ на два заемно прости броја. Сега имаме

$$60 = 1\cdot 60 = 3\cdot 20 = 4\cdot 15 = 5\cdot 12 .$$

Бараните броеви се: 24 и 1440, 72 и 480, 96 и 360, 120 и 288.

5. Определи ги природните броеви m и n , ако

$$(m,n) = 8 \text{ и } [m,n] = 168 ?$$

Решение. Нека $m = 8a, n = 8b$, при што $a,b \in \mathbb{N}$ и $(a,b) = 1$. Имаме,

$$mn = (m,n)\cdot[m,n]$$

па ако замениме за m и n , добиваме $8a\cdot 8b = 8\cdot 168$, од каде следува $ab = 21$. Понатаму, бројот 21 како производ на два заемно прости броја може да се запише на следниве два начина $21 = 1\cdot 21 = 3\cdot 7$, од каде наоѓаме дека $(a,b) \in \{(1,21),(3,7),(21,1),(7,3)\}$. Конечно, со замена во $m = 8a, n = 8b$ добиваме

$$(m,n) \in \{(8,168),(24,56),(168,8),(57,24)\} .$$

6. Определи го најголемиот природен број a а кој постои природен број $b > a$ таков што

$$[a,b] - (a,b) = \tfrac{ab}{99} .$$

Решение. Нека $(a,b) = d$, $a = ud$, $b = vd$, $(u,v) = 1$ и $[a,b] = duv$. Имаме $99uvd - 99d = uvd^2$, т.е. $uv(99 - d) = 99$. Најголемите u и d се добиваат за

$$99 - d = 1,\ d = 98,\ u = 9,\ v = 11,\ a = 98\cdot 9 = 882 \text{ и } b = 98\cdot 911 = 1078 .$$

7. Определи го најголемиот природен број n за кој бројот $n^3 + 100$ е делив со $n + 10$.

Решение. Ако $n+10\,|\,n^3+100$, тогаш $(n+10,n^3+100)=n+10$. Ако го примениме Евклидовиот алгоритам добиваме:

$$\begin{aligned} n+10=(n+10,n^3+100)&=(n+10,-10n^2+100)\\ &=(n+10,100n+100)=(n+10,-900). \end{aligned}$$

Значи, $n+10\,|\,900$. Најголемиот природен број за кој $n+10$ е делител на 900 е $n=890$.

8. Палиндром е број кој од десно се чита исто како и од лево на десно. Определи го најголемиот заеднички делител на сите десетцифрени палиндроми.

Решение. Од признакот за деливост со 11 лесно следува дека секој десетцифрен палиндром е делив со 11. Понатаму, броевите

$$9999999999=11\cdot 909090909 \text{ и } 1000000001=11\cdot 90909091$$

се палиндроми и 11 е нивни заеднички делител. Но,

$$90909091\cdot 10-909090909=1,$$

па затоа броевите 90909091 и 909090909 се заемно прости, што значи дека најголемиот заеднички делител на сите десетцифрени палиндроми е 11.

9. Пресметај го збирот

$$(1,91)+(2,91)+(3,91)+...+(90,91)+(91,91).$$

Решение. Бидејќи $91=7\cdot 13$, можните вредности на $(n,91)$ се 1, 7, 13 и 91. За $1\le n\le 91$ само за $n=91$ имаме $(n,91)=91$. За 12 броја n имаме $(n,91)=7$ и тоа се броевите кои се деливи со 7 и се различни од 91, за 6 броја n имаме $(n,91)=13$ и тоа се броевите кои се деливи со 13 и се различни од 91. Според тоа, за $91-1-6-12=72$ броја n имаме $(n,91)=1$. Конечно,

$$\begin{aligned} (1,91)+(2,91)+(3,91)+...+(90,91)+(91,91)&=1\cdot 91+12\cdot 7+6\cdot 13+72\cdot 1\\ &=325. \end{aligned}$$

10. Правоаголник може да се расече на n днакви квадрати. Истиот правоаголник може да се расече на $n+76$ еднакви квадрати. Определи ги можните вредности на n.

Решение. Нека $ab=n$ и $cd=n+76$, каде a,b и c,d го означува бројот на квадратчињата по секој правец на двете расекувања. Тогаш

$a:c=b:d$, т.е. $ad=bc$. Нека $u=(a,c)$ и $v=(b,d)$. Тогаш постојат позитивни броеви x и y такви што $(x,y)=1$, $x=au$, $c=uy$ и $b=vx$, $d=vy$. Според тоа,

$$cd-ab=uv(y^2-x^2)=uv(y-x)(y+x)=76=2^2\cdot 19\,.$$

Броевите $y-x$ и $y+x$ се со иста парност и $(x,y)=1$. Ако претпоставиме дека $y-x$ и $y+x$ се парни, тогаш x и y се непарни и барем еден од $y-x$ и $y+x$ ќе биде делив со 4, па затоа $(y-x)(y+x)$ ќе биде делив со 8, што не е можно. Според тоа, $y-x$ и $y+x$ се непарни, па затоа $y-x=1$ и $y+x=19$ е единствената можност. Значи, $y=10, x=9$ и $uv=4$. Конечно, $n=ab=x^2uv=324$.

11. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Определи ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот најголем заеднички делител.
Решение. Нека $a_1,a_2,...,a_{20}$ се природни броеви за кои

$$a_1+a_2+...+a_{20}=2002\,.$$

Ако $d=(a_1,a_2,...,a_{20})$, тогаш $a_i=dk_i$, $k_i\in\mathbb{N}$ за $i=1,2,...,20$. Значи,

$$d(k_1+k_2+...+k_{20})=2002\,.$$

Бидејќи $s=k_1+...+k_{20}$ и d се природни броеви за кои $d\cdot s=2002$ и $s\geq 20$, добиваме дека најмалата вредност кој може да ја прими бројот s е всушност најмалиот делител на 2002 поголем од 20. Со непосредна проверка добиваме дека тоа е бројот 22, т.е. $s=22$. Според тоа најголема вредност на d е 91. Навистина, збирот на броевите $a_i=91$, $i=1,2,...,19;\ a_{20}=273$ е 2002 и нивниот најголем заеднички делител е 91.

12. Докажи дека дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати ниту за еден природен број n.
Решение. *Прв начин*. Од $3\cdot(14n+3)-2\cdot(21n+4)=1$, следува дека броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи, дадената дропка не може да се скрати за ниту еден природен број n.
Втор начин. Од својствата на најголемиот заеднички делител на два природни броја

$$(a,b)=(a,b-a)=(a+b,b)$$

имаме:

$$\begin{aligned}(21n+4,14n+3)&=(7n+1,14n+3)\\&=(7n+1,7n+2)\\&=(7n+1,1)=1,\end{aligned}$$

т.е. броевите $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, дадената дропка не може да се скрати за ниту еден природен број n.

13. Нека m и n се заемно прости броеви. Со кој број може да се скрати дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$. Дади пример.

Решение. Ако го искористиме Евклидовиот алгоритам, добиваме

$$d=(3n-m,5n+2m)=(3n-m,5n+2m+2(3n-m))=(3n-m,11n). \quad (1)$$

Но, броевите m и n се заемно прости, па затоа

$$(3n-m,n)=(3n-m-3n,n)=(-m,n)=(m,n)=1. \quad (2)$$

Сега, од равенствата (1) и (2) следува $d=1$ или $d=11$. Според тоа, ако дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој број d, тогаш $d=11$.

На пример, за $n=2, m=3$ имаме $\frac{3n-m}{5n+2m}=\frac{3}{16}$ и оваа дропка е нескратлива, а за $n=5, m=4$ имаме $\frac{3n-m}{5n+2m}=\frac{11}{33}$ и оваа дропка може да се скрати со 11.

14. Определи $(2n+3,n+7)$, каде n е природен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}d&=(2n+3,n+7)\\&=(2n+3-2(n+7),n+7)\\&=(-11,n+7)\\&=(11,n+7),\end{aligned}$$

од каде следува $d=1$ или $d=11$. Нека

$$n=11q+r\,,\; 0\le r<10.$$

Ако $d=11$, тогаш од $11\,|\,(11q+r+7)$ следува $r=4$. Но, тогаш

$$2n+3=2(11q+4)+3=11(2q+1)\,,$$

и следствено е делив со 11. Според тоа, ако n е од видот $11q+4$, тогаш $d=11$, а ако $n=11q+r$, $r\ne 4$, тогаш $d=1$.

15. Определи го најмалиот природен број, кој поделен со секој од броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 1.

Решение. Ако n е бараниот број, тогаш $n-1$ е најмалиот број кој е делив со броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Според тоа,

$$n-1=[2,3,4,5,6,7]=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420,$$

од каде следува $n=420+1=421$.

16. Определи го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3 и поделен со 5 дава остаток 4.

Решение. Нека бараниот број е x. Тогаш имаме

$$x=2x_1+1=3x_2+2=4x_3+3=5x_4+4.$$

За бројот $x+1$ ќе имаме

$$x+1=2(x_1+1)=3(x_2+1)=4(x_3+1)=5(x_4+1),$$

што значи дека $x+1$ е делив со 2, 3, 4 и 5. Значи, бројот $x+1$ е најмалиот заеднички содржател на броевите 2, 3, 4 и 5, т.е. $x+1=60$, од каде добиваме $x=59$.

17. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 4, 6, 8, 10 и 12 дава остатоци 2, 3, 6, 8 и 10 соодветно.

Решение. Нека x е бараниот природен број. Постојат природни броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, такви што

$$x=4x_1+2=6x_2+4=8x_3+6=10x_4+8=12x_5+10$$

Но, тогаш

$$x+2=4x_1+4=4(x_1+1),$$
$$x+2=6x_2+6=6(x_2+1),$$
$$x+2=8x_3+8=8(x_3+1),$$
$$x+2=10x_4+10=10(x_4+1),$$
$$x+2=12x_5+12=12(x_5+1).$$

Значи, броевите 4, 6, 8, 10 и 12 се делители на бројот $x+2$, од каде следува дека најмалиот број кој е делител на $x+2$ е

$$s=[4,6,8,10,12]=120,$$

па затоа $x+2=120\cdot 1$, т.е. $x=118$.

18. Марко замислил осум природни броеви, кои по парови не се заемно прости. Нивниот најмал заеднички содржател е 210, а нивниот произ-

вод не е точен квадрат кој е делив со 1920. Кои броеви ги замислил Марко?

Решение. Бидејќи НЗС е еднаков на $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, во каноничното разложување на секој од дадените броеви има најмногу еден број 2. Производот на сите осум броја е деив со $1920 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$, па затоа седум од броевите се деливи со 2.

Ако сите броеви се деливи со 2, тогаш броевите се

$$2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 7,\ 2\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7,$$

и нивниот производ е точен квадрат на бројот $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7$.

Ако точно седум од броевите се деливи со 2, броевите се

$$2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 7,\ 2\cdot 5\cdot 7,\ 3\cdot 5\cdot 7,\ 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

па како нивниот производ не е точен квадрат, заклучуваме дека тоа се бараните броеви.

19. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител е 15.

Решение. Нека x и y, $x \le y$ се природни броеви такви што разликата меѓу нивниот најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител е 15. Нека $d = (x, y)$ и $s = [x, y]$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x = da$, $y = db$, $(a,b) = 1$ и $s = dab$. Од условот на задачата следува дека $s - d = 15$, каде ако замениме $s = dab$ се добива

$$dab - d = 15,$$
$$d(ab - 1) = 15,$$

па затоа можни вредности за d се 1, 3, 5 или 15.

1) За $d = 1$, добиваме $ab - 1 = 15$, т.е. $ab = 16$. Но, $(a,b) = 1$, па затоа $a = 1, b = 16$, односно $x = 1, y = 16$.
2) За $d = 3$, добиваме $ab - 1 = 5$, т.е. $ab = 6$. Но, $(a,b) = 1$, па затоа $a = 1, b = 6$ или $a = 2, b = 3$, од каде соодветно добиваме $x = 3,$ $y = 18$ или $x = 6, y = 9$
3) За $d = 5$, добиваме $ab - 1 = 3$, т.е. $ab = 4$. Но, $(a,b) = 1$, па затоа $a = 1, b = 4$, односно $x = 5, y = 20$.
4) За $d = 15$, добиваме $ab - 1 = 1$, т.е. $ab = 2$. Но, $(a,b) = 1$, па затоа $a = 1, b = 2$, односно $x = 15, y = 30$.

Значи, бараните природни броеви x и y се: 1 и 16; 3 и 18; 6 и 9; 5 и 20; 15 и 30.

20. Определи ги сите заемно прости природни броеви a и b такви што $\overline{b,a} = \frac{a}{b}$.

Решение. Ако k е бројот на цифрите на бројот a, тогаш важи $10^{k-1} \le a < 10^k$. Затоа $\frac{a}{b} = \overline{b,a} = b + \frac{a}{10^k}$, од каде следува $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$.

Бидејќи $(a,b) = 1$ и $(a - b^2, b) = 1$, добиваме дека $\frac{a-b^2}{b}$ е нескратлива дропка. Тоа значи, дека за некој природен број s важи $sb = 10^k$ и $s(a - b^2) = a$.

Од последното равенство следува дека $a - b^2$ е делив со a и бидејќи важи $(a - b^2, b) = 1$ добиваме $a - b^2 = \pm 1$. Но, $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$, па затоа $a - b^2 = 1$. Тогаш $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k}$ и бидејќи $a \ge 10^{k-1}$, добиваме $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \ge \frac{1}{10}$, т.е. $b \le 10$. Со непосредна проверка за $b = 1, 2, ..., 10$ и $a = b^2 + 1$ се покажува, дека единствено решение е $b = 2$ и $a = 5$, при што $\frac{5}{2} = 2,5$.

21. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{5n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{5n-1} \\ &= (2-1)(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{5n-1}) \\ &= 2^{5n} - 1 = (2^5)^n - 1 \\ &= (2^5 - 1)[(2^5)^{n-1} + (2^5)^{n-2} + ... + 2^5 + 1] \\ &= 31 \cdot [(2^5)^{n-1} + (2^5)^{n-2} + ... + 2^5 + 1], \end{aligned}$$

и бидејќи

$$a_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31,$$

заклучуваме дека најголемиот заеднички делител на броевите a_n, $n \in \mathbb{N}$ е 31.

5. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

1. Нека a е произволен природен број. Докажи дека $ax+1$ е сложен број за барем еден природен број x.

   Решение. За произволен природен број a земаме $x=a+2$ и добиваме

   $$ax+1=a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2,$$

   што е сложен број.

2. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3-12n^2+6n+63$ е сложен.

   Решение. Со средување на изразот добиваме

   $$\begin{aligned}8n^3-12n^2+6n+63&=(8n^3-12n^2+6n-1)+(63+1)\\&=(2n-1)^3+4^3\\&=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+16)\\&=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+4+12)\\&=(2n+3)((2n-3)^2+12),\end{aligned}$$

   па дадениот број е производ на два природни броја поголеми од 1, односно тој е сложен број.

3. Определи го најмалиот природен број n таков што сите дропки

   $$\frac{19}{n+21},\frac{20}{n+22},\frac{21}{n+23},\dots,\frac{91}{n+93}$$

   се нескратливи.

   Решение. Ако именителите на дропките ги запишеме во видот

   $$(n+2)+19,(n+2)+20,\dots,(n+2)+91,$$

   забележуваме дека дропките ќе бидат нескратливи ако бројот $n+2$ е заемно прост со секој од броевите 19, 20, 21, ..., 91. Најмалиот од тие броеви $n+2$ ќе биде најмалиот прост број кој е поголем од 91, а тоа е бројот 97. Значи, $n+2=97$, т.е. $n=95$. Сите броеви помали од 97, имаат прости делители помали од 91, а за секој таков прост делител меѓу броевите од 19 до 91 ќе има број кој се дели со него. Според тоа, $n=95$.

4. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни

природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што збирот на секои три од дадените броеви е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека $n \geq 5$. Од принципот на Дирихле следува дека меѓу секои пет природни броја или има три кои даваат еден ист остаток при делењес со 3 или има три кои даваат различни остатоци при делење со 3. Тоа значи дека постојат три броја чиј збир е делив со 3 и е поголем од 3, т.е. не е прост број. Пример за четири броја за кои е исполнет условот на задачата се броевите 1, 3, 7 и 9.

5. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои постои цел број a таков што $a^4 = pa^3 + q$.

Решение. Нека p и q се прости броеви и a е цел број таков што важи $a^4 = pa^3 + q$. Тогаш $a^3(a-p) = q$, што значи дека $a^3 \mid q$. Затоа $a = 1$ или $a = -1$. Ако $a = 1$, тогаш $q = 1 - p$, што не е можно. Значи, $a = -1$ и тогаш $1 + p = q$, а тоа единствено е можно за $p = 2$ и $q = 3$.

6. Дадени се прости броеви p, q, r такви што $p + q < 111$ и

$$\frac{p+q}{r} = p - q + r .$$

Определи ја најголемата можна вредност на производот pqr.

Решение. Бидејќи $p - q$ и $p + q$ се со иста парност, ако бројот r е непарен, тогаш $\frac{p+q}{r}$ ќе има иста парност како $p + q$, а $p - q + r$ ќе има иста парност како $p + q + 1$, што е противречност. Според тоа, $r = 2$ и добиваме $p = 3q - 4$. Сега од $p + q < 111$ следува $4q - 4 < 111$, односно $q < 29$. За $q = 23$ добиваме $p = 65$, кој не е прост број, а за $q = 19$ добиваме $p = 53$ и ова е прост број. Конечно, најголемата можна вредност на производот pqr е $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$.

7. Определи ги сите четирицифрени броеви, чии први две цифри се меѓусебно еднакви и последни две цифри се меѓусебно еднакви, а кои се точни квадрати.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{aabb} = n^2$. Тогаш

$$n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b),$$

па затоа $11 \mid n^2$, што значи $11 \mid n$. Според тоа, $n = 11k$, за некој $k \in \mathbb{N}$, па затоа бараните броеви се од видот $\overline{aabb}=121k^2$. За да бројот биде четирицифрен мора да важи $3 \le k \le 9$. Имаме

k	3	4	5	6	7	8	9
$121k^2$	1089	1936	3025	4356	5929	7744	9801

Според тоа, единствено решение на задачата е бројот 7744, кој е квадрат на бројот 88.

8. Определи ги сите природни броеви чиј квадрат е шестцифрен број од видот $\overline{ab73ab}$.

Решение. Имаме $\overline{ab73ab}=\overline{ab}\cdot 10001+73\cdot 100$ и $10001=73\cdot 137$, па затоа $73\,|\,\overline{ab73ab}$ и како 73 е прост број заклучуваме дека $73^2\,|\,\overline{ab73ab}$. Тоа значи дека $73\,|\,\overline{ab}\cdot 137+100=\overline{ab}\cdot 146+73-\overline{ab}\cdot 9+27$. Бидејќи 73 е делител на $\overline{ab}\cdot 9-27=9(\overline{ab}-3)$ заклучуваме дека $\overline{ab}=76$. Конечно,

$$767376=73^2\cdot(2\cdot 76+1-9)=73^2\cdot 144=(73\cdot 12)^2=876^2.$$

9. Определи го најмалиот природен број, на кој производот на цифрите е еднаков на 75600.

Решение. Го разложуваме бројот 75600 на прости множители и добиваме

$$75600=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7.$$

Сите прости делители на 75600 се едноцифрени броеви, па значи постои број таков што производот на неговите цифри е еднаков на 75600. Бараниот број ги содржи цифрите 5 и 7, бидејќи со множење на кој било од броевите 2, 3, 5 и 7 со 5 или 7 се добива број поголем од 9. Производот $2^4\cdot 3^3$ можеме да го запишеме со најмногу 7 цифри и тоа $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$, а со најмалку 3 цифри и тоа $6\cdot 8\cdot 9$. Бидејќи се бара најмалиот природен број, заклучуваме дека тој се запишува со цифрите $6,8,9,5,5,7$, а тоа е бројот 556789.

10. За еден број ќе велиме дека е убав ако тој е сложен и не е делив со 2, 3 или 5. Првите три убави броеви се 49, 77 и 91. Познато е дека постојат 168 прости броеви кои се помали од 1000. Определи го бројот на убавите броеви кои се помали од 1000.

Решение. Броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 2 има 499, деливи со 3 има 333, деливи со 5 има 199, деливи со 6 се 166, деливи со 10 се 99, деливи со 15 се 16 и деливи со 30 се 33. Според тоа, постојат $499+333+199-166-99-66+33=733$ броеви кои се помали од 1000 и се деливи со 2, 3 или 5. Од преостанатите $999-733=266$ броеви прости се $168-3=165$ броеви кои се различни од 2, 3 и 5. Ако го исключиме и бројот 1, кој не е ниту прост ниту сложен, добиваме дека преостануваат $266-165-1=100$ убави броеви.

11. За секој природен број n со $D(n)$ го означуваме најголемиот делител на n, различен од n. Определи ги сите природни броеви n за кои $n+D(n)$ е степен на бројот 10.

Решение. Ако n е прост број, тогаш $D(n)=1$ и затоа

$$n+D(n)=n+1=10^k .$$

Последното равенство не е можно за ниту еден природен број k, бидејќи $n=10^k-1$ е делив со 9.

Нека p е најмалиот прост делител на n. Тогаш $n=pD(n)$, $D(n)\neq 1$. Според тоа, $(p+1)D(n)=n+D(n)=10^k$ и затоа $D(n)$ мора да е делив со 2 или 5. Значи, n има прост делител помал или еднаков на 5, што значи дека $p=2,3$ или 5, при што $p+1$ не може да има делители различни од 2 или 5. Последното е можно само за $p=3$, па затоа n е непарен број и $D(n)$ како делител на n е непарен број. Тоа значи дека $D(n)$ е степен на бројот 5, т.е. $D(n)=5^k$ и оттука

$$4\cdot 5^k=5^k(p+1)=10^k ,$$

па затоа $k=2$ и бараниот број е $n=3\cdot 5^2=75$.

12. Определи ги сите природни броеви n за кои броевите

$$3n-4, 4n-5, 5n-3$$

се прости.

Решение. Да забележиме $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ е парен број. Затоа мора барем еден од броевите $3n-4, 4n-5$ и $5n-3$ да е парен. Бидејќи единствен парен прост број е 2, мора барем еден од броевите да е 2. Јасно $4n-5$ не може да е 2, па затоа тоа мора еден од броевите $3n-4$ или $5n-3$. Ако $3n-4=2$ тогаш $n=2$, па броевите се 2, 3 и 7 кои се прости броеви. Ако $5n-3=2$ тогаш $n=1$ и тогаш бревите се $-1,-1$ и 2. Но, тие не се сите прости рбоеви.

Конечно, само за $n=2$ броевите $3n-4,\ 4n-5,\ 5n-3$ се прости.

13. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $p_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-1$ е прост.

Решение. Јасно, $p_1=0$ и $p_n\in\mathbb{N}$ за секој $n\geq 2$. Понатаму,

$$p_n=\tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}-1>\tfrac{n\cdot 2\cdot 3}{6}-1=n-1\,.$$

Имаме,

$$6p_n=n^3+3n^2+2n-6=(n-1)(n^2+4n+6)\,.$$

Бидејќи p_n е прост број и $p_n>n-1$, заклучуваме дека $(p_n,n-1)=1$, па затоа $n-1\,|\,6$, односно $n=2,3,4$ или 7. Имаме: $p_2=3,\ p_3=9,$ $p_4=19$ и $p_7=83$, па затоа решенијата се $n=2, n=4$ и $n=7$.

14. Природните броеви a,b,c се такви што

$$a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$$

се седум различни прости броеви. Нека d е разликата меѓу најмалиот и најголемиот од овие прости броеви. Ако $a+b=800$, определи ја најголемата можна вредност на d.

Решение. Ќе докажеме дека $d\leq 1594$. Јасно, a,b,c се непарни броеви. Според тоа, секој од седумте прости броеви е непарен и најмалиот меѓу нив е поголем или еднаков на 3.

Бидејќи $a+b-c>0$, добиваме дека $c<800$. Но, c е прост број и како $799=17\cdot 47$, добиваме $c\leq 797$. Според тоа, најголемиот од седумте броеви, $a+b+c$, е помал или еднаков на $800+797=1597$. Значи, разликата d е помала или еднаква на $1597-3=1594$.

Останува да дадеме пример во кој разликата е 1594. Навистина, тоа важи за простите броеви $a=13, b=787, c=797$, при што оваа разлика се достигнува, а преостанатите прости броеви се 3, 23, 1571 и 1597.

15. Определи ги сите прости броеви p за кои постои природен број n таков што броевите n^2+3 и $(n+1)^2+3$ се деливи со p.

Решение. Нека p е делител на n^2+3 и $(n+1)^2+3=n^2+2n+4$ за некој $n\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$p \mid (n^2 + 2n + 4) - (n^2 + 3) = 2n + 1 .$$

Понатаму, $p \mid (2n+1)^2$ и $p \mid 4(n^2+3)$, па затоа

$$p \mid (2n+1)^2 - 4(n^2+3) = 4n - 11 .$$

Сега добиваме дека $p \mid 2(2n+1) - (4n-11) = 13$, па затоа $p = 13$ е единствениот прост број кој може да е решение на задачата. Според тоа, доволно е да определиме природен број n таков што $13 \mid n^2 + 3$ и $13 \mid (n+1)^2 + 3$. Бидејќи $13 \mid 2n+1$, добро е да провериме дали $n = 6$ ги задоволува условитѕе на задачата. Имаме,

$$13 \mid 39 = 6^2 + 3 \text{ и } 13 \mid 52 = 7^2 + 3 ,$$

што значи дека $p = 13$ е единствено решение на задачата.

16. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви a такви што за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот $z = n^4 + a$ е сложен.

Решение. Нека $a = 4k^4$, каде што $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} z = n^4 + a &= n^4 + 4k^4 \\ &= n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 \\ &= (n^2 + 2k^2) - (2nk)^2 \\ &= (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk) \end{aligned}$$

и притоа важи

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2 > 1;$$

$$n^2 + 2k^2 + 2nk = (n+k)^2 + k^2 > k^2 > 1.$$

Јасно, бројот z е сложен бидејќи може да се запише како производ на два природни броја поголеми од 1.

17. Докажи дека бројот $1\underbrace{000...000}_{2012 \text{ нули}}1$ е сложен.

Решение. Ако го искористиме разложувањето

$$x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + x^{2k-2} - ... + 1)$$

добиваме

$$1\underbrace{000...000}_{2012 \text{ нули}}1 = 10^{2013} + 1 = (10+1)(10^{2012} - 10^{2011} + 10^{2010} - ... + 1) .$$

Според тоа, бројот $1\underbrace{000...000}_{2012\,\text{нули}}1$ е производ на два броја кои се поголеми од 1, па затоа тој е сложен број.

18. Докажи дека секој од броевите

$$1007,\ 10017,\ 100117,\ ...,100\underbrace{11...1}_{n}7,...$$

е сложен.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&a_1 = 10^3 + 7,\\
&a_2 = 10^4 + 10^1 + 7,\\
&a_3 = 10^5 + 10^2 + 10^1 + 7,\\
&......................................\\
&a_n = 10^{n+2} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10 + 7,\\
&..
\end{aligned}$$

што значи дека за секој $k \geq 1$ важи

$$\begin{aligned}
a_k &= 10^{k+2} + 10^{k-1} + 10^{k-2} + ... + 10 + 1 + 6\\
&= 10^{k+2} + \tfrac{10^k - 1}{9} + 6 = \tfrac{9 \cdot 10^{k+2} + 10^k + 53}{9}\\
&= \tfrac{10^k \cdot 901 + 53}{9} = 53 \cdot \tfrac{17 \cdot 10^k + 1}{9}\\
&= 53(2 \cdot 10^k - 10^{k-1} - 10^{k-2} - ... - 1)\\
&= 53A,
\end{aligned}$$

каде $A > 1$, па затоа за секој $k \geq 1$ бројот a_k е сложен.

19. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $3^{2n+1} - 2^{2n+2} + 6^n$ е прост.

Решение. Имаме,

$$3^{2n+1} - 2^{2n+2} + 6^n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+2})\ .$$

Според тоа, ако $n > 1$, тогаш $3^{2n+1} - 2^{2n+2} + 6^n$ е производ на два броја поголеми од 1, што значи дека е сложен број. За $n = 1$ го добиваме бројот $3^3 - 2^4 + 6^1 = 17$ и тоа е прост број.

20. Докажи, дека за секој прост број $p > 2$, броителот m на дропката

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1},\ m,n\in\mathbb{N}$$

е делив со p.

Решение. Бројот p е прост број поголем од 2, што значи дека $p-1$ е парен број, па имаме

$$\frac{m}{n}=(1+\frac{1}{p-1})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}+...+(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}})$$

$$=\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2(p-2)}+...+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}=\frac{pQ}{(p-1)!},$$

т.е. $m(p-1)!=pnQ$, за некој $Q\in\mathbb{Z}$. Значи, $p\,|\,m(p-1)!$ и како p е прост број имаме $(p,(p-1)!)=1$, т.е. $p\,|\,m$.

21. Докажи дека за секој прост број p бројот $p^{2014}+1$ е сложен.

Решение. *Прв начин.* За $p=2$ имаме

$$p^{2014}+1=2^{2014}+1=(2^4)^{503}\cdot 2^2+1=16^{503}\cdot 4+1,$$

и тоа е сложен број, бидејќи цифрата на единиците на бројот 16^{503} е 6, па затоа цифрата на единиците на бројот $16^{503}\cdot 4$ е 4, т.е. цифрата на единиците на бројот $16^{503}\cdot 4+1$ е 5, што значи дека тој е делив со 5.

Ако $p>2$, тогаш тој е непарен број, па затоа p^{2014} е непарен број, т.е. $p^{2014}+1$ е парен број поголем од 2, што значи дека е сложен.

Втор начин. Имаме

$$p^{2014}+1=(p^2)^{1007}+1^{1007}$$
$$=(p^2+1)((p^2)^{1006}-(p^2)^{1005}+(p^2)^{1004}+...+(p^2)^2-p^2+1),$$

и како

$$p^2+1>1 \text{ и } (p^2)^{1006}-(p^2)^{1005}+(p^2)^{1004}+...+(p^2)^2-p^2+1>1$$

заклучуваме дека $p^{2014}+1$ е сложен број.

22. Докажи дека постои 2021-цифрен сложен природен број таков што при замена на произволни три негови последователни цифри со произволни три цифри повторно се добива сложен број.

Решение. Нека S е производот на непарните броеви од 1001 до 1999. Имаме производ на 500 броеви и секој од нив е помал од 2000, па затоа

$$S < 2000^{500} = 32^{100} \cdot 10^{1500} < 10^{1700}.$$

Запишуваме неколку нули оддесно на бројот S, потоа една единица и на крајот три нули, така што ќе добиеме 2021-цифрен број. Ако замениме три цифри кои не се последните три цифри, добиениот број завршува на 0, па затоа е сложен број. Ако последните три цифри ги замениме со парен број, тогаш добиениот број е делив со 2, па затоа е сложен број. Ако последните три цифри ги замениме со непарен број $\overline{abc}$, тогаш $\overline{1abc}$ е непарен број од 1001 до 1999, па затоа добиениот број е делив со $\overline{1abc}$, т.е. е сложен број.

23. Дали бројот $\underbrace{1010...10101}_{2n+1 \text{ цифра}}$ е прост за бесконечно многу природни броеви n?

Решение. За $n=1$ бројот е прост. Ќе докажеме дека за $n>1$ разгледуваниот број е сложен. Да го означиме бројот со a_n. Имаме

$$a_n = \frac{10^{2(n+1)}-1}{99}.$$

a) Нека n е непарен број поголем од 1. Тогаш $n+1=2k$, па затоа

$$10^{n+1}-1 = 10^{2k}-1 = (10^k-1)(10^k+1)$$

е делив со 9 и 11. Но, $(9,11)=1$ па затоа бројот $10^{n+1}-1$ е делив со 99. Според тоа,

$$a_n = \frac{10^{2(n+1)}-1}{99} = \frac{10^{n+1}-1}{99}(10^{n+1}+1)$$

е сложен број, како производ на два броја поголеми од 1.

b) Нека n е парен број. Тогаш $9\,|\,(10^{n+1}-1)$, а $11\,|\,(10^{n+1}+1)$, што значи a_n е сложен број бидејќи можеме да го запишеме како производ на два цели броеви поголеми од 1, т.е.

$$a_n = \frac{10^{2(n+1)}-1}{99} = \frac{10^{n+1}-1}{9} \cdot \frac{10^{n+1}-1}{11}$$

Значи, сите броеви a_n, $n>1$ се сложени.

24. Определи трицифрен број кој помножен со 7 дава куб од природен број.

Решение. Нека бараниот број е a. Од условот на задачата следува дека $7a=n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Значи, 7 е делител на n^3. Бидејќи 7 е прост број, следува дека 7 е делител на n. Нека $n=7k$. Тогаш $a=7^2k^3=49k^3$.

Ако $k \geq 3$, тогаш a има повеќе од 3 цифри. Ако $k = 1$, тогаш a има две цифри. Значи $k = 2$ и $a = 392$.

25. Производот на бројот 21 со некој четицифрен број x е куб на некој цел број y. Определи го бројот x.

Решение. Од условот на задачата имаме $21x = y^3$, т.е. $3 \cdot 7x = y^3$. Според тоа, $3 | y^3$ и бидејќи 3 е прост број добиваме дека $3 | y$. Од потполно исти причини следува дека и $7 | y$. Но, $(3,7) = 1$, па затоа од $3 | y$ и $7 | y$ следува $21 = 3 \cdot 7 | y$, т.е. постои $z \in \mathbb{N}$ таков што $y = 21z$. Заменувајќи во $21x = y^3$, добиваме $x = 441z^3$. Бројот x е четирицифрен, па z може да биде или 1 или 2, бидејќи за $z \geq 3$ имаме

$$x \geq 441 \cdot 27 = 11907 .$$

За $z = 1$ имаме $x = 441$, а за $z = 2$ имаме $x = 3528$. Значи, $x = 3528$, и притоа $21x = 168^3$.

26. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

Решение. Броевите a и b се прости и се поголеми од 3, па затоа тие се непарни, од што следува дека нивниот збир и нивната разлика се броеви деливи со 2, па затоа

$$4 | (a+b)(a-b) . \qquad (1)$$

Бидејќи a и b се прости броеви, тие се од облик $6k \pm 1$. Можни се следниве случаи:

- ако $a = 6k+1$ и $b = 6m+1$, тогаш $a - b = 6(k-m)$,
- ако $a = 6k+1$ и $b = 6m-1$, тогаш $a + b = 6(k+m)$,
- ако $a = 6k-1$ и $b = 6m+1$, тогаш $a + b = 6(k+m)$, и
- ако $a = 6k-1$ и $b = 6m-1$, тогаш $a - b = 6(k-m)$.

Значи, во секој случај $6 | (a+b)(a-b)$ и како $3 | 6$ заклучуваме дека

$$3 | (a+b)(a-b) . \qquad (2)$$

Конечно, бидејќи $(4,3) = 1$ од (1) и (2) добиваме дека $12 | (a+b)(a-b)$, што значи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

27. Дали постојат прости броеви p и q такви што $3p + 5q = 67$?

Решение. Бидејќи броевите 3 и 5 се непарни броеви, ако p и q се непарни броеви, тогаш броевите $3p$ и $5q$ се непарни, па затоа нивниот збир ќе биде парен број, што не е можно бидејќи 67 е непарен број. Значи, еден од броевите p и q мора да е парен. Единствен парен прост број е 2. Затоа, се можни само следниве два случаја.
Случај 1. $p=2$. Тогаш равенката го добива обликот $5q=61$ и оваа равенка нема решение во множеството прости броеви.
Случај 2. $q=2$. Тогаш равенката го добива обликот $3p=57$, од каде добиваме $p=19$. Значи единствено решение на равенката е $p=19$ и $q=2$.

28. За природните броеви a,b,c и d е исполнето равенството

$$a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Докажи дека $a+b+c+d$ е сложен број.

Решение. Ако го искористиме равенството $a^2+b^2=c^2+d^2$, добиваме

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2(a+b)(c+d)+2cd\\&=a^2+b^2+a^2+b^2+2ab+2(a+b)(c+d)+2cd\\&=2(a^2+b^2+ab+(a+b)(c+d)+cd).\end{aligned}$$

Според тоа, $2\,|\,(a+b+c+d)^2$ и како 2 е прост број заклучуваме дека $2\,|\,(a+b+c+d)$. Од друга страна, $a+b+c+d\geq 4$, што значи дека $a+b+c+d$ парен број поголем од 2, па затоа тој е сложен број.

29. Простите броеви p,q,r се такви што $pq+1, pr+1$ и $qr-p$ се точни квадрати. Докажи дека $p+2qr+2$ е точен квадрат.

Решение. Нека $pq+1=a^2$. Тогаш $pq=(a-1)(a+1)$ и како не е можно $a-1=1$, добиваме дека $|p-q|=2$. Аналогно се докажува дека $|p-r|=2$. Од овие равенства следува дека $p=5$ и q и r се 3 и 7 во некој редослед, или $q=r=p\pm 2$ и броевите повторно се непарни. Во првиот случај имаме $5+2\cdot 3\cdot 7+2=7^2$.
Ако $q=r=p-2$, тогаш $qr-p=q^2-q-2=m^2, m\in\mathbb{N}$ и како

$$(q-1)^2 \le q^2 - q - 2 < q^2$$

следува дека $q \le 3$, т.е. $q = r = 3$ и $p = 5$, па $5 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 = 5^2$.

Ако $q = r = p + 2$, тогаш $qr - p = q^2 - q + 2 = n^2, n \in \mathbb{N}$ и како

$$(q-1)^2 \le q^2 - q + 2 < q^2$$

следува дека во случајов задачата нема решение.

30. Определи ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $n \cdot p = 2010$, односно $n \cdot p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Од овде следува дека простиот број p може да биде 2, 3, 5, 67**.** Конечно:

- ако $p = 2$, тогаш $n = 1005$,
- ако $p = 3$,тогаш $n = 670$,
- ако $p = 5$, тогаш $n = 402$ и
- ако $p = 67$, тогаш $n = 30$.

31. Определи го простиот број p така што и броевите $p + 2$ и $p^2 + 2$ се прости.

Решение. Ако $p = 2$, тогаш $p + 2 = 4$ е сложен број. Значи, $p \ge 3$.

Ако $p = 3$, тогаш $p + 2 = 5$ и $p^2 + 2 = 11$ се исто така прости броеви.

Нека $p > 3$. Тогаш p е од облик $6k - 1$ или $6k + 1$.

1) Ако $p = 6k - 1$, тогаш $p + 2 = 6k + 1$ може да е прост број, но

$$p^2 + 2 = 3(12k^2 - 4k + 1)$$

е сложен број.

2) Ако $p = 6k + 1$, тогаш $p^2 + 2 = 3(12k^2 + 4k + 1)$ и $p + 2 = 3(2k + 1)$ се сложени броеви.

Конечно, $p = 3$ е единствениот прост број за кој и броевите $p + 2 = 5$ и $p^2 + 2 = 11$ се исто така прости броеви.

32. Секој од четирите природни броеви $a, a+1, a+2, a+3$ има точно шест позитивни делители. Постојат точно дваесет различни природни броеви секој од кои е делител точно на еден од овие броеви, и еден од овие

дваесет делители е 27. Определи го бројот a.

Решение. Бројот 1 е заеднички делител и на четирите броја. Бројот 2 е заенички делител на a и $a+2$ или на $a+1$ и $a+3$. Тоа значи дека меѓу сите $4\cdot 6=24$ делители на $a, a+1, a+2, a+3$ бројот 1 е броен четири пати, а бројот 2 е броен два пати. Според тоа, различните делители на $a, a+1, a+2,\ a+3$ се најмногу $24-2-1=20$. Бидејќи по услов тие се точно 20, заклучуваме дека нема други делители кои се среќаваат повеќе од еднаш. Значи, има само еден број кој е делив со 3 и тоа може да биде $a+1$ или $a+2$. Од условот следува дека овој број е делив со 27 и има шест различни делители. Ако овој број има прост делител различен од 3, тогаш тој ќе има најмалку 8 делители (Зошто?). Значи, овој број е 243, па затоа $a+1=243$ или $a+2=243$. Бидејќи 241 е прост број, заклучуваме дека $a=242$ и со непосредна проверка се уверуваме дека броевите 242, 243, 244 и 245 ги задоволуваат условите на задачата.

33. Нека n е најголемиот трицифрен број кој е производ на цифрите на природен број m.

а) Определи го n.

б) Определи го бројот на сите можни броеви m.

Решение. а) Лесно се проверува дека за трицифрените броеви поголеми од 980 каноничното разложување содржи прост број поголем од 10. Сега од $980=2\cdot 5\cdot 7^2$ следува дека бараниот број е $n=980$.

б) Цифрите на бројот m се 2, 5, 7 и 7, па затоа постојат $4\cdot 3=12$ вакви броеви.

34. Нека $n<2013$ е најголемиот број кој е производ на цифри на природен број m.

а) Определи го n.

б) Определи го бројот на сите можни броеви m.

Решение. а) Лесно се проверува дека броевите 2001, 2002, ..., 2011, 2012 имаат прости делители кои се поголеми од 10 и не може да се добијат на опишаниот начин. Од друга страна $2000=2^4\cdot 5^3$, па затоа бараниот број е $n=2000$.

б) Ако цифрите на бројот m се 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, тогаш можни броеви m има $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$. Ако цифрите на бројот m се 2, 2, 4, 5, 5, 5, тогаш можни броеви m има $\frac{6!}{2!3!}=60$. Ако цифрите на бројот m се 2, 8, 5, 5, 5, тогаш можни броеви m има $\frac{5!}{3!}=20$. Ако цифрите на бројот m се 4, 4, 5, 5, 5, тогаш можни броеви m има $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Според тоа, вкупно имаме $35+60+20+10=125$ можности за бројот m.

35. Определи го најмалиот природен број n кој по делењето со 2 станува точен квадрат, а по делењето со 3 станува точен куб.

Решение. Нека n е бараниот број p е прост делител на n. Ако $p\neq 2,3$ и го поделиме n со p ќе добиеме помал природен број од n кој го има истото својство како n, што е противречност. Според тоа, $n=2^a\cdot 3^b$, при што a е делив со 3 и дава остаток 1 при делење со 2, а b е делив со 2 и дава одтаток 1 при делење со 3. Најмалите броеви a и b со наведените својства се $a=3$ и $b=4$. Според тоа, бараниот број е $n=2^3\cdot 3^4=648$.

36. За секој двоцифрен прост број p е пресметан производот

$$(p^2-1)(p^2-4).$$

Определи го најголемиот заеднички делител на пресметаните производи.

Решение. Нека d е бараниот најголем заеднички делител. Меѓу множителите $(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)$ има:

а) два деливи со 2, од кои еден е делив со 4, па затоа d е делив со 2^3,

б) два деливи со 3, па затоа d е делив со 3^2,

в) еден делив со 5, па затоа d е делив со 5.

Според тоа, $d\geq 2^3\cdot 3^3\cdot 5=360$ и овој број е најголемиот заеднички делител на производите добиени за $p=13$ и $p=17$. Значи, $d=360$.

37. За секој природен број $k>1$ со $p(k)$ го означуваме најмалиот делител на k поголем од 1. Определи ги сите природни броеви m за кои постои природен број n таков што

$$m+n=p^2(m)-p^2(n). \qquad (1)$$

Решение. Нека $m=q$ е непарен прост број и $n=q^2-q-4$. Тогаш

$p(m) = q$ и $p(n) = 2$ и равенството (1) е исполнето.

Ако $p = 2$, тогаш $p(m) = 2$ и $p^2(m) - p^2(n) = 4 - p^2(n) \le 0 < m + n$.

Ако m е сложен број, тогаш $p^2(m) \le m = p^2(m) - (p^2 n) + n) < p^2(m)$, што е противвречност.

Значи, решенија на задачата се сите непарни прости броеви.

38. Пресметај $x + y + z$, ако за природните броеви x, y, z важи

$$xyz = 77077 \text{ и } x^2 y + y^2 z + z^2 x = xy^2 + yz^2 + zx^2 .$$

Решение. Равенството

$$x^2 y + y^2 z + z^2 x = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

е еквивалентно на равенството

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0 ,$$

што значи дека меѓу броевите x, y, z има еднакви.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x = y$. Сега, од $77077 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13$ следува дека се можни следниве случаи:

$x = y = 1,\ z = 77077,\ x + y + z = 77079,$

$x = y = 7,\ z = 1573,\ x + y + z = 1587,$

$x = y = 11,\ z = 637,\ x + y + z = 659,$

$x = y = 77,\ z = 13,\ x + y + z = 167.$

39. Определи го волуменот на правоаголен паралелопипед кој има плоштина 2014, чии рабови се со целобројни должини и должината на најмалиот раб е делива со 5.

Решение. Нека рабовите се a, b, c при што $a \ge b \ge c$. Тогаш c е делив со 5 и $ab + bc + ca = 1007$. Понатаму, $3c^2 \ge 1007$, па затоа $c < 19$.

Прв случај. Ако $c = 5$, тогаш $ab + 5b + 5a = 1007$, односно

$$(a + 5)(b + 5) = 1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43 .$$

Но, $a + 5 \ge b + 5 \ge 10$, па затоа единствени можности се

$$a + 5 = 2 \cdot 43, b + 5 = 4 \cdot 3 \text{ и } a + 5 = 43, b + 5 = 8 \cdot 3 ,$$

од каде соодветно наоѓаме

$$a = 81, b = 7, V = abc = 2835 \text{ и } a = 38, b = 19, V = abc = 3610 .$$

Втор случај. Ако $c = 10$, тогаш $ab + 10b + 10a = 1007$, односно

$$(a + 10)(b + 10) = 1107 = 3^3 \cdot 41 .$$

Но, $a+10 \geq b+10 \geq 20$, па затоа единствена можност е

$$a+10=41, b+10=27$$

од каде наоѓаме

$$a=31, b=17, V=abc=5270 \text{ и } a=38, b=19, V=abc=3610.$$

Трет случај. Ако $c=15$, тогаш $ab+15b+15a=1007$, односно

$$(a+15)(b+15)=1232=2^4 \cdot 7 \cdot 11.$$

Но, $a+15 \geq b+15 \geq 30$, а $2^4 \cdot 7 \cdot 11$ не може да се претстави како производ на два броја поголеми или еднакви на 30, па затоа во овој случај задачата нема решение.

40. За природниот број n со $F(n)$ го означуваме производот на сите позитивни делители на n. Определи го најмалиот број k за кој постои n таков што $F(n)=2014n^k$.

Решение. Имаме

$$F(2014)=F(2 \cdot 13 \cdot 79)=1 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 79 \cdot (2 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 79) \cdot (13 \cdot 79) \cdot (2 \cdot 13 \cdot 79)$$
$$=2^4 \cdot 13^4 \cdot 79^4 = 2014^4 = 2014 \cdot 2014^3,$$

па затоа $k \leq 3$.

Нека претпоставиме дека за $k=1$ или 2 постои n таков што важи $F(n)=2014n^k=2 \cdot 13 \cdot 79n^k$. Тогаш 2, 13 и 79 се делители на n и нека 2^s е највисокиот степен на 2 кој е делител на n. Степенот на 2 во $F(n)=2014n^k$ е еднаков на $1+ks$. Броевите

$$2^s, 13 \cdot 2^s, 79 \cdot 2^s \text{ и } 13 \cdot 79 \cdot 2^s$$

се делители на n, па затоа $F(n)$ е делив со 2^{4s}, што значи дека $4s \leq 1+ks$, т.е. $(4-k)s \leq 1$, што е противречност.

41. Дали постои бесконечно множество A од природни броеви со следново својство: збирот на броевите од секое конечно подмножество на A не е точен степен на природен број?

Решение. Нека $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ... е низата прости броеви и да го разгледаме множеството

$$A=\{a_1=p_1, a_2=p_1^2 p_2, ..., a_n=p_1^2 p_2^2 ... p_{n-1}^2 p_n, ...\}.$$

Да разгледаме произволен конечен збир S на елементи од A и нека a_k е најмалиот број од тој збир. Бројот S е делив со p_k, но не е делив со p_k^2, па затоа не може да биде точен степен на природен број.

42. За еден природен број n ќе велиме дека е интересен ако збирот на неговите делители е еднаков на $2n-1$. Определи ги сите интересни броеви за кои точните степени се исто така интересни броеви.

Решение. Нека делителите на природниот број n се

$$d_1=1, d_2, ..., d_k, d_{k+1}=n \text{ и } d_1+d_2+...+d_k=2n-1.$$

Понатаму, некои од делителите на интересниот број n^t се:

$$1, d_2, ..., d_k, n, nd_2, ..., nd_k, n^2, n^2 d_2, ..., n^2 d_k, ..., n^{t-1}, n^{t-1}d_2, ..., n^{t-1}d_k.$$

Ако ги собереме овие делители добиваме

$$\begin{aligned} S &= (1+d_2+...+d_k)(1+n+n^2+...+n^{t-1}) \\ &= (n-1)(1+n+n^2+...+n^{t-1}) \\ &= n^t-1. \end{aligned}$$

Бидејќи n^t е интересен, заклучуваме дека n нема други делители. Оттука следува дека n е точен степен на прост број. Ако $n=p^s$, тогаш

$$p^s-1=1+p+p^2+...+p^{s-1}=\frac{p^s-1}{p-1},$$

т.е. $p=2$. Конечно, решение на задачата се сите степени на бројот 2.

6. БРОЈ НА ДЕЛИТЕЛИ НА ПРИРОДЕН БРОЈ

1. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е каноничната факторизација на природниот број n и со $\tau(n)$ да го означиме бројот делителите на n. Докажи дека
$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1). \qquad (1)$$
Решение. Делители на n се броевите од видот $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, каде $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i=1,2,...,k$. Според тоа, постои биекција меѓу множеството делители на бројот n и подредените $k-$торки броеви $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)$, каде $0\le\beta_i\le\alpha_i$ за $i=1,2,...,k$. Значи, за β_i имаме α_i+1 можност, па затоа од принципот на производ следува дека бројот на подредените $k-$торки броеви од дадениот вид е еднаков на
$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1),$$
што значи точна е формулата (1).

2. Ако $(m,n)=1$, тогаш $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$. Докажи!

Решение. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ и $m=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_s^{\beta_s}$. Бидејќи $(m,n)=1$ имаме $mn=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_s^{\beta_s}$. Сега од задача 1 следува
$$\begin{aligned}\tau(mn)&=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)(\beta_1+1)(\beta_2+1)...(\beta_s+1)\\&=\tau(m)\tau(n).\end{aligned}$$

3. Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако n е точен квадрат.

Решение. На секој делител d на бројот n кој е помал од $\sqrt{n}$ му соодветствува делител $\frac{n}{d}$ кој е поголем од $\sqrt{n}$ и обратно. Значи, за секој број n, бројот на неговите делители кои се различни од $\sqrt{n}$ е парен број. Според тоа, ако бројот на делителите на n е непарен број, тогаш $\sqrt{n}$ е делител и обратно, ако $\sqrt{n}$ е делител, тогаш бројот на делителите на n е непарен број.

4. Колку делители има бројот 1200?
Решение. Го разложуваме бројот 1200 на прости множители, т.е. го запишуваме во каноничен вид:
$$1200=12\cdot10\cdot10=4\cdot3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5=2^4\cdot3^1\cdot5^2,$$

па од задача 1 имаме

$$\tau(1200)=(4+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)=5\cdot 2\cdot 3=30\,.$$

Значи, бројот 1200 има вкупно 30 делители.

5. Определи ги сите прости броеви за кои бројот p^2+11 има точни 6 природни делители.

Решение. За $p=2$ добиваме $2^2+11=15$ и овој број има точно 4 природни делители: 1, 3, 5 и 15.

За $p=3$ добиваме

$$3^2+11=20=2^2\cdot 5$$

и овој број има точно $(2+1)(1+1)=6$ делители: 1, 2, 4, 5, 10 и 20.

Нека $p>3$ е прост број. Тогаш p^2 дава остаток 1 при делење со 3 и со 4, па затоа бројот p^2+11 е делив со 12. Според тоа, бројот p^2+11 е делив со самиот себе (бидејќи $p^2+11>12$) и со бројот $12=2^2\cdot 3$, што значи дека има најмалку $(2+1)(1+1)+1=7$ делители.

Конечно, единствено решение е $p=3$.

6. Определи го бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10},15^7,18^{11}$.

Решение. Имаме:

$$10^{10}=2^{10}5^{10},$$

$$15^7=3^7 5^7,$$

$$18^{11}=2^{11}3^{22},$$

па затоа

- 10^{10} има $(10+1)(10+1)=121$ делител,
- 15^7 има $(7+1)(7+1)=64$ делители и
- 18^{11} има $(11+1)(22+1)=276$ делители.

Во збирот $121+64+276$ два пати ги броевме заедничките делители на два броја. Затоа мора да ги одзмеме заедничиките делители на 10^{10} и 15^7, на 15^7 и 18^{11}, на 18^{11} и 10^{10}. Бројот на заедничките делители на два броја е еднаков на бројот на делителите на нивниот најголем заеднички делител. Имаме:

- $(10^{10},15^7)=5^7$, па затоа 10^{10} и 15^7 имаат $7+1=8$ заеднички делители,
- $(15^7,18^{11})=3^7$, па затоа 15^7 и 18^{11} имаат $7+1=8$ заеднички делители и
- $(10^{10},18^{11})=2^{10}$, па затоа 18^{11} и 10^{10} имаат $11+1=12$ заеднички делители.

Понатаму, во збирот на делителите на поединечните броеви $121+64+276$ три пати ги броевме заедничките делители на сите три броја и во збирот на делителите на паровите броеви три пати ги пребројавме заедничките делители на сите три броја, па затоа овој број мора да го додадеме. Но, заеднички делител на сите три броја е само бројот 1, па затоа бројот на природните броеви кои се делители на барем еден од броевите $10^{10},15^7,18^{11}$ е еднаков на

$$121+64+276-8-8-11+1=435.$$

7. Нека S е множеството природни броеви кои не може да се претставуваат во видот $m^{\tau(n)}+n^{\tau(n)}+l^{\tau(l)}$, $m,n,l\in\mathbb{N}$. Дали ова множество е конечно или е бесконечно.

Решение. Бројот $k^{\tau(k)}$ секогаш е точен квадрат. Навистина, ако k е точен квадрат, тогаш сите негови степени се точни квадрати, а ако k не е точен квадрат, тогаш $\tau(k)$ е парен број.

Според тоа, множеството S е составено броеви кои не може да се претставуваат како збирови на три точни квадрати. Понатаму, квадрат на природен број при делење со 8 дава остаток 0, 1 или 4, па затоа број кој при делење со 8 дава остаток 7 не може да се претстави како збир на три точни квадрат. Оттука следува дека множеството S е бесконечно.

8. Нека N е трицифрен број таков што разликата на секои два делители на N е делива со 3. Ако d е бројот на делителите на N, определи ја најголемата можна вредност на производот dN.

Решение. Бидејќи 1 е делител на N, заклучуваме дека секој прост делител на N при делење со 3 треба да дава остаток 1. Но, тоа значи дека простиот делител на N и при делење со 6 треба да дава остаток 1. Најмалите прости броеви со ова својство се 7, 13, 19, ... Бидејќи

$7^4 = 2401 > 1000$, бројот има најмногу 3 прости делители (вклучено е повторувањето на делителите). Од $7 \cdot 13 \cdot 19 = 1729 > 1000$ следува дека N има најмногу шест делители. Ако $d < 6$, тогаш $dN < 5000$, а бројот $7^2 \cdot 19 = 931$ има шест делители и за него важи $dN = 5586$. Останува да се провери дека од броевите кои имаат 6 делители и го задоволуваат условот на задачата нема пример со поголем производ.

9. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2014}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(m-2014)(n-2014) = 2014^2,$$

при услов $m, n \neq 0$. Секое решение се добива од цел делител на

$$2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2,$$

при што за делителот -2014 се добива $m = n = 0$ и затоа не дава решение. Значи, бројот на решенијата на равенката е еднаков на

$$2\tau(2014^2) - 1 = 2\tau(2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2) - 1 = 2(2+1)(2+1)(2+1) - 1 = 53.$$

10. Определи го бројот на паровите природни броеви (m, k) за кои важи

$$20m = k(m - 15k).$$

Решение. Јасно, $k \neq 20$, па затоа важи

$$m = \frac{15k^2}{k-20}.$$

Од последното равенство следува $k > 20$ и $k - 20$ е делител на $15k^2$. Имаме

$$\frac{15k^2}{k-20} = 15(k+20) + \frac{6000}{k-20},$$

па затоа m е природен број ако и само ако $k > 20$ и $k - 20$ е делител на 6000. Но, $6000 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^3$, па затоа бројот на делителите на 6000 е еднаков на $(4+1)\cdot(1+1)\cdot(3+1) = 40$. Според тоа, бараниот број парови (m, k) е 40.

7. КОНГРУЕНЦИИ

1. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

Решение. Нека m е цел број. Тогаш $m \equiv i \pmod 4$, за $i = 0,1,2,3$, па затоа $m^2 \equiv i^2 \pmod 4$, за $i = 0,1,2,3$. Но,

$$0^2 \equiv 0 \pmod 4,\ 1^2 \equiv 1 \pmod 4,\ 2^2 \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } 3^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

па затоа за секој цел број m важи $m^2 \equiv 0$ или $1 \pmod 4$.

2. Нека $f(n) = 9n^2 + 3n - 2$. Докажи, дека

а) $9 \nmid f(n)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, и

б) постојат бесконечно многу природни броеви n такви да $4 \mid f(n)$.

Решение. а) Јасно, $f(n) \equiv 1 \pmod 3$, па затоа $3 \nmid f(n)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, од што следува дека $9 \nmid f(n)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) Лесно се гледа дека

$$f(4k) \equiv -2 \pmod 4,\ \ f(4k+1) \equiv 2 \pmod 4,$$

$$f(4k+2) \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } f(4k+3) \equiv 0 \pmod 4.$$

Значи, $f(n)$ е делив со 4 ако $n \equiv 2 \pmod 4$ или $n \equiv 3 \pmod 4$.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои 15 е делител на $10^n + 5$, $n \geq 1$.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $15 = 3 \cdot 5$ и $(3,5) = 1$ за да $10^n + 5$, $n \geq 1$ е делив со 15 потребно и доволно е тој да биде делив со 3 и со 5. Збирот на цифрите на бројот $10^n + 5$, $n \geq 1$ е еднаков на $1 + 5 = 6$, па затоа тој е делив со 3. Понатаму, цифрата на единиците на бројот $10^n + 5$, $n \geq 1$ е 5, па затоа тој е делив со 5. Според тоа, $10^n + 5$ е делив со 15 за секој $n \in \mathbb{N}$

Втор начин. Важи

$$10^n + 5 \equiv 0 \pmod 5 \text{ и } 10^n + 5 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

па како $(3,5) = 1$ заклучуваме:

$$10^n + 5 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 5},$$

т.е.

$$10^n + 5 \equiv 0 \pmod{15},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

4. Определи го остатотокот при делење со 1000 на бројот

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99...9}_{9999}.$$

Решение. Имаме

$$999 \equiv 9999 \equiv \ldots \equiv \underbrace{99...9}_{9999} \equiv -1 (\mathrm{mod} 1000).$$

Тоа се вкупно $9999 - 2 = 9997$ броеви, па затоа

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99...9}_{9999} \equiv 9 \cdot 99 \cdot (-1)^{9997} (\mathrm{mod} 1000),$$

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99...9}_{9999} \equiv -9 \cdot 99 (\mathrm{mod} 1000),$$

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99...9}_{9999} \equiv -891 (\mathrm{mod} 1000)$$

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot \underbrace{99...9}_{9999} \equiv 109 (\mathrm{mod} 1000),$$

што значи дека бараниот остаток е 109.

5. Доокажи дека $3^{2001} + 4^{2001}$ е делив со 13.

Решение. Од

$$3^3 \equiv 1 (\mathrm{mod} 13) \text{ и } 4^3 \equiv -1 (\mathrm{mod} 13)$$

следува дека

$$3^{2001} + 4^{2001} = (3^3)^{667} + (4^3)^{667} \equiv 1^{667} + (-1)^{667} = 0 (\mathrm{mod} 13).$$

6. Докажи дека $13^{101} - 13^{95}$ е делив со 7.

Решение. Имаме $13 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$, па затоа

$$13^{101} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7) \text{ и } 13^{95} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7),$$

од што следува дека

$$13^{101} - 13^{95} \equiv -1 - (-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7).$$

7. Определи го остатокот при делењето на бројот:

а) $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24,

б) $(3^{10} + 2)^{77}$ со 9,

в) $(17^{17} + 116)^{21}$ со 8.

Решение. а) Од $5^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 24)$ добиваме дека $5^{100} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 24)$. Според тоа, $5^{100} + 55 \equiv 56 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 24)$. Понатаму $8^2 \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 24)$, па затоа за секој природен број k важи $8^{2k} \equiv 16^k \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 24)$. Конечно,

$$(5^{100} + 55)^{100} \equiv 8^{100} = 8^{2\cdot 50} \equiv 16 (\mathrm{mod}\, 24),$$

што значи дека остатокот од делењето на бројот $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24 е 16.

б) Од $3^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 9)$, следува дека $3^{10} + 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$. Понатаму, од $2^7 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$ следува $(3^{10} + 2)^{77} \equiv (2^7)^{11} \equiv 2^{11} \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 9)$.

в) Од $17 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$ следува $17^{17} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$. Од друга страна имаме $116 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 8)$, па затоа

$$17^{17} + 116 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8).$$

Понатаму, $5^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, па затоа

$$(17^{17} + 116)^{21} \equiv 5^{21} \equiv 5^{20} \cdot 5 \equiv 1 \cdot 5 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8).$$

8. Докажи, дека $5 \mid (7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}})$.

Решение. Од $7^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$ следува $7^{4k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$. Но, $4 \mid 1980^{1990}$, па затоа

$$7^{1980^{1990}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10).$$

Слично, $3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10)$ и $4 \mid 80^{90}$, па затоа

$$3^{80^{90}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 10).$$

Според тоа,

$$7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10).$$

9. Определи го остатокот од делењето на бројот $3^{105} + 4^{105}$ со бројот 11.

Решение. Имаме

$$3^2 \equiv -2 \ (\mathrm{mod}\, 11) \text{ и } 3^3 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\, 11),$$

па од својствата на конгруенции следува

$$3^5 \equiv -10 \ (\mathrm{mod}\, 11), \text{ т.е. } 3^5 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 11).$$

Слично,

$$4^2 \equiv 5 \ (\mathrm{mod}\, 11) \text{ и } 4^3 \equiv -2 \ (\mathrm{mod}\, 11),$$

и затоа $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$. Сега

$$3^{105} = (3^5)^{21} \equiv 1^{21} \equiv 1 \pmod{11},$$

$$4^{105} = (4^5)^{21} \equiv 1^{21} \equiv 1 \pmod{11},$$

и од својствата на конгруенциите добиваме

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \pmod{11},$$

што значи дека бараниот остаток е 2.

10. Определи го најмалиот природен број k кој може да се запише во видот $k = 19^n - 5^m$, каде $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ако n е парен број, тогаш цифрата на единиците на бројот $k = 19^n - 5^m$ е 6. Но, од равенството $19^n - 5^m = 6$ по модул 3 следува дека и m е парен број. Сега, ако $n = 2a$ и $m = 2b$, добиваме

$$(19^a + 5^b)(19^a - 5^b) = 6,$$

што не е можно во множеството природни броеви. Ако n е непарен број, тогаш цифрата на единиците на $k = 19^n - 5^m$ е 4. Но, равенството $19^n - 5^m = 4$ не е можно, што лесно се добива ако истото го разгледаме по модул 3. Конечно, за $m = n = 1$ добиваме

$$k = 19^n - 5^m = 19 - 5 = 14.$$

11. Нека n е непарен природен број. Докажи, дека

$$(n+2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}).$$

Решение. Ако искористиме дека

$$k^{2013} + (n-k+2)^{2013} \equiv 0 (\bmod\, n+2), \text{ за } k = 2,3,...,n,$$

добиваме

$$2(1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}) = 2 + (2^{2013} + n^{2013}) + ... + (n^{2013} + 2^{2013})$$
$$\equiv 2 (\bmod\, n+2)$$

и бидејќи $(2, n+2) = 1$ добиваме

$$1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013}) \equiv 1 (\bmod\, n+2),$$

што значи дека $(n+2) \nmid (1^{2013} + 2^{2013} + ... + n^{2013})$.

12. Докажи дека бројот 2001 не може да биде збир на кубови на два природни броја.

Решение. Лесно се докажува дека за секој природен број n точни се конгруенциите

$$n^3 \equiv 0\,(\text{mod}\,7) \text{ или } n^3 \equiv \pm 1\,(\text{mod}\,7).$$

Затоа збирот $m^3 + n^3$ при делење со 7 дава остатоци $0, \pm 1, \pm 2$. Но, $2001 \equiv -1(\text{mod}\,7)$, па затоа еден од кубовите во збирот мора да е делив со 7. Нека $m = 7k$, бидејќи треба да важи $(7k)^3 \le 2001$ добиваме дека $k = 1$, па затоа $m = 7$. Меѓутоа, од $7^3 + n^3 = 2001$ следува $n^3 = 1658$, што не е можно бидејќи 1658 не е куб на природен број, со што тврдењето е докажано.

13. Дали за секој парен природен број n, бројот $20^n + 16^n - 3^n - 1$ е делив со 323.

Решение. Бројот 323 можеме да го запишеме во облик $323 = 17 \cdot 19$. Бидејќи n е парен природен број, од својствата на конгруенции имаме

$$20 \equiv 3(\text{mod}\,17), \qquad 16 \equiv -1(\text{mod}\,17)$$

$$20^n \equiv 3^n(\text{mod}\,17), \qquad 16^n \equiv 1(\text{mod}\,17).$$

Од последните две конгруенции добиваме

$$17 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1. \tag{1}$$

Слично, од тоа што n е парен природен број, од својствата на конгруенции имаме

$$20 \equiv 1(\text{mod}\,19), \qquad 16 \equiv -3(\text{mod}\,19)$$

$$20^n \equiv 1(\text{mod}\,19), \qquad 16^n \equiv 3^n(\text{mod}\,19).$$

Значи,

$$19 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1, \tag{2}$$

Бидејќи $(17,19) = 1$, од (1) и (2) имаме $323 = 17 \cdot 19 \mid 20^n + 16^n - 3^n - 1$.

14. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ако $m \mid (ab^n + cn + d)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $m \mid c^2$. Докажи!

Решение. Имаме

$$ab + c + d \equiv 0(\text{mod}\,m)$$

$$ab^2 + 2c + d \equiv 0(\text{mod}\,m)$$

$$ab^3 + 3c + d \equiv 0(\text{mod}\,m)$$

па затоа

$$ab(b-1)+c\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$$

$$ab^2(b-1)+c\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$$

од каде следува

$$ab(b-1)^2\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)\,. \qquad (1)$$

Сега, ако конгруенцијата $ab(b-1)+c\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ ја помножиме со $b-1$ и ја искористиме (1) добиваме

$$(b-1)c\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)\,. \qquad (2)$$

Понатаму, конгруенцијата $ab(b-1)+c\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ ја множиме со c и добиваме

$$abc(b-1)+c^2\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)\,,$$

па ако ја искористиме (2) добиваме $c^2\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$, т.е. $m\,|\,c^2$.

15. Докажи дека за секој цел број $a, a>1$, постои прост број p таков што

$$M=1+a+a^2+...+a^{p-1}$$

е сложен број.

Решение. Ако $a=2$, тогаш за $p=11$ имаме

$$1+2+2^2+...+2^{11-1}=2^{11}-1=2047=23\cdot 89\,.$$

Нека $a>2$ е природен број. Тогаш $a-1>1$. Според тоа, постои прост број p кој е делител на $a-1$. Значи,

$$a-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)\,,\ \text{т.е.}\ a\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Според својствата на конгруенциите следува дека $a^k\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ за $k=0,1,2,...,p-1$, од каде добиваме

$$M=1+a+a^2+...+a^{p-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

а од неравенствата $M\geq 1+a>p$ следува тврдењето на задачата.

16. Низата природни броеви $a_1,a_2,...,a_n,...$ е определена со $a_n=\underbrace{33...3}_{n}1$, за $n\geq 1$. Докажи дека оваа низа содржи бесконечно многу сложени броеви.

Решение. Имаме

$$a_n=1+3(10+10^2+...+10^n)=1+3\cdot 10\cdot\tfrac{10^n-1}{10-1}=\tfrac{10^{n+1}-7}{3}\,.$$

Ќе докажеме дека $17\,|\,a_n$ за секој n од видот $n=16k+8$, $k=0,1,2,...$, со што задачата ќе биде решена. Имаме $7^2=49\equiv -2(\mathrm{mod} 17)$, па затоа

$7^8 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17}$, од каде следува дека $7^{8(2k+1)} \equiv -1 \pmod{17}$. Сега,

$$10^{n+1} - 7 \equiv (-7)^{n+1} - 7 \equiv -7(7^{8(2k+1)} + 1) \equiv 0 \pmod{17}.$$

Според тоа, $17 \mid a_n$ за $n = 16k + 8$, $k = 0,1,2,...$.

17. Со $f(n)$ да го означиме бројот на делителите на природниот број n чија цифра на единици е 1 или 9, а со $g(n)$ - бројот на делителите на n чија цифра на единиците е 3 или 7. Докажи дека $f(n) \geq g(n)$.

Решение. За $n = 1$ тврдењето е точно и да претпоставиме дека тоа е точно за секој $k < n$. Ако n е прост број, тогаш тој има само два делители 1 и n, па затоа тврдењето е точно. Нека $n = p^t s$, каде p е најмалиот прост делител на n. Тогаш:

1) Ако $p = 2$, тогаш n е парен број и секој непарен делител на n е делител на t. Значи, $f(n) = f(t)$ и $g(n) = g(t)$ и тврдењето следува од индуктивната претпоставка.

2) Ако $p = 5$, тогаш повторно непарните делители на n кои завршуваат на 1, 3, 7 или 9 се делители и на t, па како и во претходниот случај тврдењето следува од индуктивната претпоставка.

3) Ако $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$, тогаш ако m е делител на $p^{t-1}s$ со последна цифра 1 или 9 (соодветно 3 или 7), тогаш pm е делител на n со последна цифра 1 или 9 (соодветно 3 или 7). Според тоа, $f(n) = 2f(p^{t-1}s) \geq 2g(p^{t-1}s) = g(n)$.

4) Ако $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$, тогаш ако m е делител на $p^{t-1}s$ со последна цифра 1 или 9 (соодветно 3 или 7), тогаш pm е делител на n со последна цифра 3 или 7 (соодветно 1 или 9). Според тоа, $f(n) = f(p^{t-1}s) + g(p^{t-1}s) = g(n)$.

18. Определи ги сите природни броеви n за кои 13 е делител на $2^n + 3^n$.

Решение. Нека $13 \mid 2^n + 3^n$, т.е. $2^n \equiv -3^n \pmod{13}$. Тогаш

$$2^{3n} \equiv -27^n \pmod{13}, \text{ т.е. } 2^{3n} \equiv -1 \pmod{13}.$$

Последната конгруенција е исполнета само кога $6 \mid 3n$ и $12 \nmid 3n$, т.е. кога $2 \mid n$ и $4 \nmid n$, што значи кога $n = 4k + 2, k \geq 0$. Обратно, ако $n = 4k + 2, k \geq 0$, тогаш

$$2^n+3^n=4^{2k+1}+9^{2k+1}=(4+9)(4^{2k}-4^{2k-1}\cdot 9+...-4\cdot 9^{2k-1}+9^{2k}),$$

па затоа $13\,|\,2^n+3^n$. Според тоа, бараните броеви се $n=4k+2,\ k\geq 0$.

19. Ако a и b се цели броеви и $s=a^3+b^3-60ab(a+b)\geq 2012$, определи ја најмалата можна вредност на s.
Решение. Имаме

$$s=(a+b)^3-63ab(a+b)\geq 2012$$

и како $s\equiv(a+b)^3\equiv 0{,}1$ или $6(\bmod 7)$, а $2012\equiv 3(\bmod 7)$, заклучуваме дека $s\geq 2012+3=2015$. Значи, најмалата можна вредност на s е 2015 и таа се достигнува, на пример, за $a=6, b=-1$.

20. Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $p+q+r$ не е делив со 3, а броевите $p+q+r$ и $pq+qr+rp+3$ се точни квадрати.

Решение. Нека $p+q+r=x^2$ и $pq+qr+rp+3=y^2$, каде x и y се природни броеви. Нека претпоставиме дека p,q,r се непарни. Тогаш со непосредна проверка по модул 4 се добива дека $x^2\equiv 3(\bmod 4)$ или $y^2\equiv 3(\bmod 4)$ што е противречност. Според тоа, барем еден од броевите p,q,r е еднаков на 2.
Нека $p=2$ и $q\leq r$. Имаме

$$q+r=x^2-2 \text{ и } qr=y^2-2(q+r)-3=y^2-2x^2+1.$$

Ако 3 е делител на y, тогаш од $qr+2(q+r)=y^2-3$, добиваме $(q+2)(r+2)=y^2+1$, па затоа $q+2\equiv r+2\equiv\pm 1(\bmod 3)$. Во едниот случај добиваме $q=r=3$ и тоа не е решение, а во другиот случај добиваме $3\,|\,x$, што е противречност. Според тоа, 3 не е делител на y.
Бидејќи x и y не се деливи со 3, добиваме

$$qr=y^2-2x^2+1\equiv 1-2+1=0(\bmod 3),$$

па затоа $q=3$. Тогаш $5r=y^2-9=(y-3)(y+3)$, од каде лесно се добива дека $r=11$.

21. Броевите од 1 до n^2 се распоредени во полињата на $n\times n$ табела. За секој ред и за секоја колона е пресметан збирот на броевите содржани

во редот, односно колоната. Нека A е збирот од тие збирови кои се парни, а B е збирот од тие збирови кои се непарни. За кои природни броеви n е можно равенството $A=B$.

Решение. Нека n е парен. Ако $n=4k+2$, да ги распоредиме парните броеви во левата половина на табелата, а непарните во десната. Така збирот во секој ред е непарен, а збирот во секоја колона е парен и јасно $A=B$. Ако $n=4k$, да ги распоредиме парните броеви во левата половина на табелата, а непарните во десната, освен во последниот ред, каде во левиот дел ставаме непарни, а во десниот дел ставаме парни броеви. Сега збирот во секој ред е парен, а во секоја колона е непарен и повторно $A=B$.

Нека n е непарен. Ако саканото распоредување е можно, догаш двократниот збир на броевите во табелата ќе биде

$$2(1+2+...+n^2)=n^2(n^2+1)=A+B=2A.$$

Но, A е парен број, па десната страна на последното равенство е делива со 4, а

$$n^2(n^2+1)\equiv 1(1+1)=2(\bmod 4),$$

што е противречност.

22. Нека $m\in\mathbb{N}$ и p,q,r се прости броеви, при што $r\equiv 5(\bmod 8)$. Определи ги m и q ако $2^m p^2+1=q^r$.

Решение. Од равенството

$$2^m p^2=(q-1)(q^{r-1}+q^{r-2}+...+q+1)$$

и фактот дека вториот множител е непарен и поголем од 1, следува дека $q-1=2^m$ или $q-1=2^m p$.

Ако $q-1=2^m p$, тогаш

$$2^m p^2+1=(2^m p+1)^r\geq(2^m p+1)^3>2^{3m}p^3,$$

што е противречност.

Ако $q-1=2^m$, тогаш

$$2^m p^2=(2^m+1)^r-1=2^{2m}A+2^m r,$$

каде A е непарен природен број. Според тоа, $p^2=2^m A+r$, што не е можно за $m\geq 2$ (противречност по модул 8). За $m=1$ добиваме $q=3$, при што решение е на пример $r=5$ и $p=11$.

8. ПОЛИНОМНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Со $S(n)$ да го означиме бројот на цифрите на природниот број *n*.
   1) Дали постои природен број *n* таков, што $n+S(n)=1980$?
   2) Докажи дека барем еден од секои два последователни природни броја може да се запише во облик $n+S(n)$, за некој $n\in\mathbb{N}$.

   Решение. 1) Нека $n=\overline{abcd}$ е таков пророден број што $n+S(n)=1980$. Очигледно $a=1,\ b=9$, т.е. $n=1900+10c+d$ и $S(n)=10+c+d$. Според тоа, $1910+11c+2d=1980$ или $11c+2d=70$, $0\le c\le 9$ и $0\le d\le 9$. Јасно, *c* е парен број и $c\le 6$. Но, при $c\le 4$ имаме $2d\ge 26$, т.е. $d\ge 13$ што не е можно. Значи, $c=6$ и $d=2$, па бараниот број е $n=1962$.
   2) Ако бројот *n* завршува на цифрата 9, тогаш $S(n+1)<S(n)$, а ако *n* не завршува на 9, тогаш $S(n+1)=S(n)+2$. За секој природен број $m>2$ избираме најголем број N за кој $S(N)<m$. Тогаш $S(N+1)\ge m$, при што последната цифра на *N* не е 9, па затоа или $S(N+1)=m$ или $S(N+1)=m+1$, од што следува тврдењето на задачата.

2. Определи го најмалиот петцифрен природен број кој при делење со 17 дава остаток 5, а при делење со 24 дава остаток 3.

   Решение. Нека n е бараниот број. Тогаш $n=17x+5$ и $n=24y+3$, каде $x,y\in\mathbb{N}$. Значи $17x+5=24y+3$, т.е. $17x=24y-2$. Ќе ја решиме последната Диофантова равенка. Користејќи го Ојлеровиот метод наоѓаме
   $$x=\frac{24y-2}{17}=\frac{17y+7y-2}{17}=y+\frac{7y-2}{17}$$
   и бидејќи $x\in\mathbb{N}$ добиваме $\frac{7y-2}{17}=a\in\mathbb{N}$, т.е. $7y-2=17a$, па затоа
   $$y=\frac{17a+2}{7}=2a+\frac{3a+2}{7}.$$
   Понатаму, $y\in\mathbb{N}$, па затоа $\frac{3a+2}{7}=b\in\mathbb{N}$, т.е. $3a+2=7b$, што значи
   $$a=\frac{7b-2}{3}=2b+\frac{b-2}{3}$$
   и бидејќи $a\in\mathbb{N}$ добиваме $\frac{b-2}{3}=c\in\mathbb{N}$, т.е. $b=3c+2$, $c\in\mathbb{N}$, па затоа
   $$a=7c+4\ \Rightarrow\ y=17c+10\ \Rightarrow x=24c+14\ \Rightarrow\ n=408c+243.$$
   Конечно, од $10000=408\cdot 24+208$, добиваме $c=24$ и
   $$n=408\cdot 24+243=10035.$$

3. Определи го бројот на трицифрените парови природни броеви (x, y) за кои важи $15x + 3y = 2010$.

Решение. *Прв начин*. Дадената равенка ја делиме со 3 и ја добиваме равенката $5x + y = 670$. Значи, $y = 670 - 5x$. Бидејќи x и y се трицифрени броеви имаме $100 \le x < 1000,\ 100 \le y < 1000$, т.е.

$$100 \le 670 - 5x < 1000,$$

од каде наоѓаме $66 < x \le 114$. Но, x е трицифрен број, па затоа важи $100 \le x \le 114$ што значи дека имаме 15 парови трицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата и тоа:

$$(100,170), (101,165), (102,160), ..., (113,105), (114,100).$$

Втор начин. Лесно се гледа дека едно решение на дадената равенка е $x = 1,\ y = 695$. Според тоа, сите решенија на дадената Диофантова равенка се дадени со $(1 + t, 665 - 5t), t \in \mathbb{Z}$. Бидејќи се бараат парови трицифрени броеви имаме

$$100 \le 1 + t \le 999,\ 100 \le 665 - 5t \le 999,$$

од каде добиваме $99 \le t \le 113, t \in \mathbb{Z}$. Според тоа, имаме имаме 15 парови трицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

4. Определи ги сите трицифрени броеви n кои се деливи со 7, а при делење со 9 даваат остаток 5.

Решение. Имаме

$$n = 7x \text{ и } n = 9y + 5,\ x, y \in \mathbb{N},$$

па затоа $7x = 9y + 5$, односно треба да ја решиме Диофантовата равенка:

$$7x - 9y = 5.$$

Едно нејзино решение е $x_0 = 2, y_0 = 1$, па затоа општото решение е дадено со $x = 2 + 9t, y = 1 + 7t, t \in \mathbb{N}$. Но, $100 < n < 100$ и $n = 7x = 14 + 63t$, па затоа

$$100 < 14 + 63t < 1000,$$

$$86 < 63t < 986,$$

$$\frac{86}{63} < t < \frac{986}{63},$$

од каде добиваме $t \in \{2, 3, ..., 15\}$. Конечно,

$$n = 14 + 63t, t = 2, 3, ..., 15,$$

т.е.

$$n \in \{140, 203, 266, 329, 392, 455, 518, 581, 644, 707, 770, 833, 896, 959\} .$$

5. Реши ја Диофантовата равенка

а) $3x + 7y = 1988$,

б) $3x + 15y = 1235$.

Решение. а) Едно од можните решенија е $x_0 = 0, y_0 = 284$. Сите решенија на дадената равенка се дадени со: $x = 7t, y = 284 - 3t, t \in \mathbb{Z}$.

б) Равенката нема решение бидејќи $(3,15) = 3$ и $3 \nmid 1235$.

6. Определи ги сите трицифрени броеви кои го имаат следново својство: ако пред дадениот број се запише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од производот на дадениот број и бројот 23.

Решение. Нека $x = \overline{abc}$ е бараниот број. Од условот на задачата имаме $\overline{cabc} = 246 + 23 \cdot \overline{abc}$. Но, $\overline{cabc} = \overline{c000} + \overline{abc} = 1000c + x$, па затоа

$$1000c + x = 246 + 23x ,$$

од каде добиваме $x = \frac{1000c-246}{22} = 45c - 11 + \frac{5c-2}{11}$ Бидејќи $5c - 2$ е делив со 11 само за $c = 7$ од последната равенка следува $x = 307$.

7. Нека a и b се заемно прости броеви. Докажи дека равенката

$$ax + by = ab$$

нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Нека (x, y) е решение на равенката во множеството природни броеви. Од равенството $a(b - x) = by$ добиваме $a \mid by$. Бидејќи $(a,b) = 1$, од $a \mid by$ следува $a \mid y$. Според тоа, постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $y = na$. Слично, од равенството $b(a - y) = ax$ добиваме $b \mid ax$ и како $(a,b) = 1$ следува $b \mid x$. Според тоа, постои $m \in \mathbb{N}$ таков што $x = bm$.

Но, тогаш $abm + abn = ab$ и затоа $m + n = 1$. Значи, m и n се природни броеви кои во множеството $\mathbb{N}$ се решенија на равенката $u + v = 1$, што не е можно.

Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решенија во $\mathbb{N}$.

8. Докажи дека не постојат цели броеви a, b, c такви да

$$a^2 + b^2 - 8c = 6 .$$

Решение. Дадениот услов ќе го запишеме во обликот $a^2+b^2=8c+6$. Според тоа, збирот a^2+b^2 е парен број, па затоа или броевите a и b се и двата парни или се и двата непарни. Ако a и b се и двата парни, тогаш a^2+b^2 е делив со 4, но $8c+6=2(4c+3)$ не е делив со 4. Значи, a и b може да бидат само непарни броеви. Но, тогаш бидејќи производ на два последователни природни броја е делив со 2, добиваме дека броевите

$$a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1) \text{ и } b^2-1=(2p+1)^2-1=4p(p+1)$$

се деливи со 8. Дадената равенка да ја запишеме во видот

$$a^2+b^2-2=8c+4. \qquad (1)$$

Јасно, левата страна на (1) е делива со 8, а десната $8c+4=4(2c+1)$ не е делива со 8, што е противречност. Конечно, a и b се со иста парност, но не се ниту парни ниту непарни, што е противречност. Оттука следува дека не постојат цели броеви a и b такви да $a^2+b^2-8c=6$.

9. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+y)^2=xy(xy+1).$$

Производ на два последователни цели броја може да биде квадрат на цел број ако и само ако тие броеви се $-1,0$ или $0,1$. Значи, $xy=-1$ или $xy=0$. И во двата случаи $x+y=0$. Решавајќи ги соодветните системи лесно добиваме дека единствени можни решенија на дадената равенка се $(0,0);(1,-1)$ и $(-1,1)$.

10. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$xy+12=x^3+2y.$$

Решение. Имаме, $xy-2y=x^3-8-4$, од каде следува

$$y(x-2)=(x-2)(x^2-2x+4)-4$$

па затоа $x-2$ е делител на 4, т.е. $x-2=\pm1,\pm2,\pm4$. За секоја вредност имаме по едно решение и тоа:

$$(x,y)=(3,15),(1,11),(4,26),(0,6),(6,51),(-2,5).$$

11. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x^2 - y^2 = 203\,.$$

Решение. Ако парот (x, y) е решение на равенката $x^2 - y^2 = 203$. Тогаш и паровите $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ се исто така решение на равенката. Затоа доволно е да ги определиме само позитивните решенија. Од $203 = 1\cdot 203 = 7\cdot 29$ и $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ добиваме

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 203 \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 29 \end{cases} \tag{2}$$

Решение на системот (1) е $x = 102$, $y = 101$, а на системот (2) е парот $x = 18,\ \ y = 11$. Според тоа решенија на дадената равенка се паровите

$(102,101)$, $(102,-101)$, $(-102,-101)$, $(-102,101)$,
$(18,11)$, $(-18,11)$, $(-18,-11)$ и $(18,-11)$.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$9x^2 + 11xy + 2y^2 = 2010\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(9x + 2y)(x + y) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67\,.$$

Сега, бидејќи за секои природни броеви x и y важи

$$x + y < 9x + 2y\,,$$

единствена можност е

$$\begin{cases} 9x + 2y = 67 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x = 1, y = 29$.

13. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xy - 3x + y = 5\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x+1)(y-3) = 2\,.$$

Според тоа, производот на два цели броја треба да е еднаков на 2, па затоа

$$\begin{cases} x+1=2, \\ y-3=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=1, \\ y-3=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x+1=-1, \\ y-3=-2, \end{cases} \begin{cases} x+1=-2, \\ y-3=-1, \end{cases}$$

од каде ги добиваме решенијата

$$(x,y) \in \{(1,4),(0,5),(-2,1),(-3,2)\}.$$

14. Определи ги сите природни броеви n такви што ако n се зголеми за 5 или се намали за 11 се добива точен квадрат на некој број.

Решение. Нека n е бараниот број. Имаме $n+5=a^2$ и $n-11=b^2$, од каде добиваме

$$a^2-b^2=16, \text{ т.е. } (a-b)(a+b)=16.$$

Од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=4 \end{cases}.$$

Од првиот систем имаме $a=5, b=3$, па е $n=20$. Вториот систем нема решенија во множеството природни броеви, а од третиот систем добиваме $a=4, b=0$, па е $n=11$.

15. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(n+1)(2n+1)=10m^2.$$

Решение. Имаме,

$$(n+1,2n+1)=(n+1,2n+1-2(n+1))=(n+1,-1)=1,$$

што значи дека броевите $n+1$ и $2n+1$ се заемно прости. Според тоа, секој множител од видот p^{2k} од каноничното разложување на бројот m^2 се содржи или во бројот $n+1$ или во бројот $2n+1$. Според тоа, $m^2=a^2b^2$, каде $a^2 \mid n+1$ и $b^2 \mid 2n+1$. Простите делители 2 и 5 на 10 може призволно да се распределат меѓу $n+1$ и $2n+1$, па затоа можни се следниве четири случаи:

1) $n+1=5a^2,\ 2n+1=2b^2$,

2) $n+1=a^2,\ 2n+1=10b^2$,

3) $n+1=10a^2,\ 2n+1=b^2$,

4) $n+1=2a^2,\ 2n+1=5b^2$.

Првите два случаја не се можни, бидејќи бројот $2n+1$ е непарен. Во третиот случај добиваме $20a^2-b^2=1$, а во четвртиот $4a^2-5b^2=1$. И во двата случај добиваме дека b^2 при делење со 4 треба да дава остаток 3, што не е можно. Според тоа, дадената равенка нема решенија во множеството природни броеви.

16. Определи ги сите природни броеви n за кои
$$n^4-4n^3+22n^2-36n+18$$
е точен квадрат.

Решение. Имаме
$$n^4-4n^3+22n^2-36n+18=(n^2-2n+9)^2-63$$
и ако ставиме $n^4-4n^3+22n^2-36n+18=t^2$ и $n^2-2n+9=p$, ја добиваме равенката $p^2-t^2=63$. Но, $p-t<p+t$, па затоа $p-t=1,3,7$ и соодветно $p+t=63,21,9$. Оттука добиваме $p=32, p=12$ или $p=8$. За најдените вредности на p од $n^2-2n+9=p$ добиваме само две можни решенија и тоа $n=1$ и $n=3$. Непосредно се проверува дека најдените вредности за n се решенија на задачата.

17. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+84x+2008=y^2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките
$$\begin{aligned}
&x^2+84x+2008=y^2,\\
&x^2+2\cdot 42x+42^2-42^2+2008=y^2,\\
&(x+42)^2+244=y^2,\\
&y^2-(x+42)^2=244,\\
&(y-x-42)(y+x+42)=244.
\end{aligned}$$
Бидејќи x и y се природни броеви, добиваме $y+x+42>0$, па затоа од последната равенка следува дека се можни следниве случаи:

$y-x-42$	1	2	4	61	122	244
$y+x+42$	244	122	61	4	2	1

Решавајќи ги овие четири системи со по две равенки со по две непознати добиваме дека единственото решение на почетната равенка е $(x,y)=(16,62)$.

18. Дали постојат природни броеви a,b,c кои го задоволуваат условот

$$(a+b)(b+c)(c+a)=340\,. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи a,b,c се природни броеви имаме $a+b\geq 2, b+c\geq 2$ и $c+a\geq 2$. Понатаму, од (1) добиваме

$$(a+b)(b+c)(c+a)=2\cdot 2\cdot 5\cdot 17\,.$$

Ќе докажеме дека не може $a+b$ и $b+c$ да бидат парни, а $c+a$ непарен. Имено, ако $a+b=2m$ и $b+c=2n$ добиваме $a+c=2m+2n-2b$. Во овој случај $(a+b)(b+c)(c+a)$ е делив со 8, а 340 не е делив со 8. Значи, само еден множител може да биде парен, што значи дека, на пример, $a+b=4,\ \ b+c=5$ и $c+a=17$. Меѓутоа, решението на овој систем равенки е $a=8,\ \ b=-4$ и $c=9$, што не е можно бидејќи b треба да е природен број.

19. а) Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}\,.$$

б) Докажи дека постојат цели броеви a,b,c,d секој од кои по апсолутна вредност е поголем од 1000001 и такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{abcd}\,.$$

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a-8)(b-8)=64=2^6\,.$$

Од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases}a-8=64,\\ b-8=1,\end{cases}\quad \begin{cases}a-8=32,\\ b-8=2,\end{cases},\ \begin{cases}a-8=16,\\ b-8=4,\end{cases},\ \begin{cases}a-8=8,\\ b-8=8,\end{cases}$$

од каде ги добиваме решенијата на дадената равенка.
б) Лесно се проверува дека за произволен природен број n броевите $a=-n, b=n+1, c=-n(n+1), d=n(n+1)+1$ го задоволуваат даденото равенство. Сега, доволно е да избереме $n>1000001$.

20. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}\,,$$

каде $p > 1$ е даден прост број.

Решение. Од дадената равенка последователно добиваме

$$px + py = xy$$

$$xy - px - py + p^2 = p^2$$

$$x(y-p) - p(y-p) = p^2$$

$$(x-p)(y-p) = p^2 .$$

Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x - p = 1, y - p = p^2$, па затоа $x = p+1, y = p^2 + p$

2) $x - p = p, y - p = p$, па затоа $x = 2p, y = 2p$ и

3) $x - p = p^2, y - p = 1$, па затоа $x = p^2 + p, y = p+1$.

Лесно се проверува дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

21. Нека p е прост број. Определи ги сите природни броеви x и y такви што

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{p} .$$

Решение. *Прв начин*. Даденото равенство може да го запишеме во следниот облик

$$(p-x)(p+y) = p^2 .$$

Бидејќи $p + y > p$ еднствена можност е $p + y = p^2$ и $p - x = 1$. Според тоа, $x = p - 1$ и $y = p^2 - p$ се единствените природни броеви кои го задоволуваат даденото равенство.

Втор начин. Имаме $p(y-x) = xy$. Но, p е прост број, па затоа $p \mid x$ или $p \mid y$. Ако $p \mid x$, тогаш $py \le xy = p(y-x) < py$, што не е можно. Значи, $p \mid y$, т.е. $y = pk$, $k \in \mathbb{N}$. Сега равенството го добива видот $pk = x(k+1)$ и како $(k, k+1) = 1$ и $p \nmid x$, заклучуваме дека $p = k+1$ и затоа $x = k$. Според тоа, $x = k = p - 1$ и конечно $y = pk = p(p-1)$.

22. За кои цели броеви p равенката

$$\frac{1}{(x-4)^2} + \frac{p-1}{16-x^2} = \frac{p}{(x+4)^2}$$

има единствено целобројно решение?

Решение. При услов $x \neq \pm 4$, по множењето со $(x-4)^2(x+4)^2$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&(x+4)^2 + (p-1)(x-4)(x+4) = p(x-4)^2,\\
&x^2 + 8x + 16px^2 - 16p - x^2 + 16 = px^2 - 8px + 16p,\\
&8x + 32 - 16p = -8px + 16p,\\
&x(p+1) = 4p - 4.
\end{aligned}$$

Јасно, $p = -1$ не е решение. Затоа $p \neq -1$ и $x = \frac{4p-4}{p+1}$, од каде добиваме

$$x = 4 - \frac{8}{p+1}.$$

Јасно, x е цел број, ако и само ако $p+1 | 8$, т.е. $p+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, од каде добиваме $p \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$. Но, $x \neq \pm 4$, па затоа мора да е $p \neq 0$. Конечно, $p \in \{-9, -5, -3, -2, 1, 3, 7\}$.

23. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1.$$

Решение. Јасно, $xy \neq 0$. Ако дадената равенка ја помножиме со xy, ја добиваме равенката

$$x + y + 1 = xy,$$

па како $x \neq 1$, дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$y = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Според тоа, $\frac{2}{x-1}$ е цел број, па затоа $x-1$ е делител на 2, односно $x-1 = -2, -1, 1, 2$, од каде добиваме $x = -1, 0, 2, 3$, па $y = 0, -1, 3, 2$, соодветно. Но, $xy \neq 0$, па затоа единствени решенија на дадената равенка се $x = 2, y = 3$ и $x = 3, y = 2$.

24. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = 1.$$

Решение. *Прв начин.* Јасно, $xy \neq 0$. Ако дадената равенка ја помножиме со xy, ја добиваме равенката

$$x + y + 2 = xy,$$

па како $x \neq 1$, дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$y=1+\frac{3}{x-1}.$$

Според тоа, $\frac{3}{x-1}$ е цел број, па затоа $x-1$ е делител на 3, односно $x-1=-3,-1,1,3$, од каде добиваме $x=-2,0,2,4$, па $y=0,-2,4,2$, соодветно. Но, $xy\neq 0$, па затоа единствени решенија на дадената равенка се $x=2,y=4$ и $x=4,y=2$.

Втор начин. Дадената равенка ќе ја запишеме во видот

$$(x-1)(y-1)=3,$$

од каде ги добиваме системите равенки

$$\begin{cases}x-1=-3,\\ y-1=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=-1,\\ y-1=-3,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=3,\\ y-1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}x-1=1,\\ y-1=3.\end{cases}$$

Решенија на овие системи се $(x,y)\in\{(-2,0),(0,-2),(4,2),(2,4)\}$, соодветно и како $xy\neq 0$, добиваме дека единствени решенија на дадената равенка се $(x,y)\in\{(4,2),(2,4)\}$.

25. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b+c-1}+\frac{1}{c+a-1}+\frac{1}{a+b-1}.$$

Решение. Имаме $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{a+b-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $b=1$, $\frac{1}{b}\geq\frac{1}{b+c-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $c=1$ и $\frac{1}{c}\geq\frac{1}{c+a-1}$ при што знак за равенство важи ако и само ако $c=1$. Значи, единствено решение на дадената равенка е $a=b=c=1$.

26. Докажи дека за секој $n\geq 3$ равенката

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=1$$

има решение $(x_1,x_2,...,x_n)$ од по парови различни броеви.

Решение. За $k=3$ имаме $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $k\geq 3$, т.е.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}=1$$

каде $x_1,x_2,...,x_k$ се по парови различни природни броеви. Тогаш за $k+1$ добиваме

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}=1$$

и $2, 2x_1, 2x_2, ..., 2x_k$ се по парови различни природни броеви. Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

27. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката

$$x(y+1)^2 = 243y .$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $x = \frac{243y}{(y+1)^2}$. Но, тогаш од $x \in \mathbb{N}$, следува $(y+1)^2 \mid 243 = 3^5$, односно $(y+1)^2 = 1$, $(y+1)^2 = 3^2$ или $(y+1)^2 = 3^4$. Според тоа, $y = 0$, $y = 2$ или $y = 8$ и како $y \in \mathbb{N}$ заклучуваме $y = 2$ или $y = 8$. За $y = 2$ имаме $x = 54$, а за $y = 8$, $x = 24$.

28. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$(y^3 + xy - 1)(x^2 + x - y) = (x^3 - xy + 1)(y^2 + x - y) .$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$x - y = \frac{x^2-1}{x^2+x-y} + \frac{y^2-1}{y^2+x-y} ,$$

при што случаите $x^2 + x = y$ и/или $y^2 + y = x$ се елементарни и треба одделно да се разгедаат. Ако $y = x$, тогаш $x^2 = 1$, од каде ги добиваме решенијата $(1,1)$ и $(-1,-1)$. За $|x| \le 1$ и/или $|y| \le 1$ ги добиваме и решенијата $(0,0), (0,1), (-1,0), (1,2)$ и $(-2,-1)$. Сега, нека $|x|,|y| \ge 2$ и $x \ne y$.

Нека $k = x - y > 0$, $k = \frac{x^2-1}{x^2+k} + \frac{y^2-1}{y^2+k}$. Очигледно и двете дропки се меѓу 0 и 1, што значи, дека $k = 1$ и $\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{y^2-1}{y^2+1} = 1$. Но, сега и двете дропки се од интервалот $(\frac{1}{2}, 1)$ што е противречност.

Нека $t = y - x > 0$ и да ја запишеме равенката во видот

$$t + 2 = \frac{t-1}{t-x^2} + \frac{t-1}{t-y^2} .$$

Ако истовремено $t > x^2$ и $t > y^2$, тогаш $2(y-x) = 2t > x^2 + y^2$, па затоа $(x+1)^2 + (y-1)^2 < 2$, што не е можно бидејќи $|x|,|y| \ge 2$. Според тоа, една од дропките помала или еднаква на нула. Но очигледно другата е помала или еднаква на $t-1$, што значи дека нивниот збир е помал или еднаков на $t-1$, што е противречност.

29. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката
$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{n^3-1}{n^3+2}.$$
Решение. Ако го искористиме идентитетот
$$k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1,$$
тогаш левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик:
$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{m^3-1}{m^3+1}=\frac{2(m^2+m+1)}{3(m^2+m)}.$$
Според тоа во множеството природни броеви треба да ја решиме равенката
$$\frac{2(m^2+m+1)}{3(m^2+m)}=\frac{n^3-1}{n^3+2}$$
Која е евивалентна на равенката
$$\frac{m(m+1)}{2}=1+\frac{9}{n^3-7}.$$
Левата страна на последната равенка е природен број за секој $m\in\mathbb{N}$, па затоа, ако m и n се решенија на истата, тогаш и $\frac{9}{n^3-7}\in\mathbb{N}$, т.е. $(n^3-7)\,|\,9$. Единствена можност е $n=2$ и притоа добиваме $m=4$.

30. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката
$$x^6+3x^3+1=y^4.$$
Решение. За $x>0$ имаме
$$(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+4x^3+4=(x^3+2)^2,$$
т.е. $x^3+1<y^2<x^3+2$, што за цели броеви x и y не е можно.

За $x\le-2$ добиваме
$$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+2x^3+1=(x^3+1)^2,$$
т.е. $-(x^3+2)<y^2<-(x^3+1)$, што за цели броеви x и y не е можно.

За $x=-1$ имаме $y^4=-1$, што не е можно.

За $x=0$ ги добиваме решенијата $(0,-1)$ и $(0,1)$.

31. Од точно 2014 еднакви кибритени чкорчиња во рамнината е направен

правоаголник, поделен на квадрати со страна едно чкорче. Определи ги димензиите на правоаголникот.

Решение. Ако правоаголникот има m редови и n колони ($1 \le m \le n$), тогаш тој има $m+1$ ред со n хоризонтални чкорчиња и $n+1$ колона со по m вертикални чкорчиња. Затоа $(m+1)n+(n+1)=2014$, т.е.

$$2mn+m+n=2014.$$

Ако последната равенка ја помножиме со 2 и додадеме 1 добиваме

$$4mn+2m+2n+1=4029,$$

$$(2m+1)(2n+1)=3\cdot 17\cdot 79.$$

Од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases}2m+1=3,\\2n+1=1343,\end{cases}\qquad \begin{cases}2m+1=17,\\2n+1=237,\end{cases}\qquad \begin{cases}2m+1=51,\\2n+1=79,\end{cases}$$

чии решенија се

$$(m,n)=(1,671),\ (m,n)=(8,118),\ (m,n)=(25,39),$$

соодветно.

32. Во множеството природни броеви реши ја равенката $5a-ab=9b^2$.

Решение. Десната страна на равенката е секогаш позитивна, а левата може да се запише во облик $a(5-b)$. Според тоа $b<5$, односно $b\in\{1,2,3,4\}$. Секоја од овие можности ќе ја разгледаме одделно.

- Ако $b=1$, тогаш равенката го добива обликот $4a=9$, која нема решение во $\mathbb{N}$, па затоа почетната равенка нема решение во $\mathbb{N}$.
- Ако $b=2$, тогаш равенката го добива обликот $3a=36$, чие решение е $a=12$, а решението на почетната равенка е $a=12,\ b=2$.
- Ако $b=3$, тогаш равенката го добива обликот $2a=81$, која нема решение во $\mathbb{N}$, па затоа почетната равенка нема решение во $\mathbb{N}$.
- Ако $b=4$, тогаш равенката го добива обликот $a=144$. Решението на почетната равенка е $a=144$, $b=4$.

Значи, равенката има две решенија и тоа $a=12, b=2$ и $a=144$, $b=4$.

33. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$4n(n+1)=m(m+1).$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2n+1)^2=m^2+m+1. \qquad (1)$$

Но, бидејќи за секој $m\in\mathbb{N}$ важи

$$m^2 < m^2 + m + 1 < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 ,$$

добиваме дека бројот $m^2 + m + 1$ не може да биде точен квадрат, што значи дека равенката (1), а со тоа и дадената равенка нема решенија во множеството природни броеви.

34. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x . \qquad (1)$$

Решение. Ако равенката ја помножиме со 4 и на двете страни додадеме 1, добиваме дека равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$(2y+1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 .$$

Понатаму, за секој $x \in \mathbb{N}$ важи

$$(2x^2 + x)^2 < 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 ,$$

а за $x > 2$ важи

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2 + x + 1)^2 .$$

Според тоа, за секој $x > 2$ важи

$$(2x^2 + x)^2 < (2y+1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2 ,$$

што значи дека равенката (1) нема решение за $x > 2$. За $x = 1$ добиваме $y^2 + y = 4$, т.е. $y(y+1) = 4$, што не е можно, а за $x = 2$ имаме $y^2 + y = 30$, т.е. $y(y+1) = 5 \cdot 6$, од каде следува $y = 5$. Конечно, единствено решение на дадената равенка е $x = 2, y = 5$.

35. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy} .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y \le x$. Тогаш

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \le \frac{2}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{2x-1}{xy} < \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y} ,$$

па затоа $y < 6$. Со непосредна проверка добиваме дека за $y = 1$, $y = 2$ и $y = 3$ равенката нема решение. За $y = 4$ добиваме $x = 9$, а за $y = 5$ добиваме $x = 6$. Конечно, заради симетрија добиваме дека решенија на дадената равенка се: $(x, y) \in \{(4,9), (5,6), (6,5), (9,4)\}$.

36. Определи ги сите тројки природни броеви (x, y, z) за кои важи

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})=2\ .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x \geq y \geq z$. Според тоа, важи $2 \leq (1+\frac{1}{z})^3$, од каде добиваме $z \leq 3$.

Ако $z=1$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=1$, што не е можно.

Ако $z=2$ имаме $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{4}{3}$. Следува, $\frac{4}{3} \leq (1+\frac{1}{y})^2$, од каде добиваме $y<7$. Бидејќи $1+\frac{1}{x}>1$, добиваме $1+\frac{1}{y}<\frac{4}{3}$, па затоа $y>3$. Ги заменуваме добиените вредности за y и ги наоѓаме решенијата $(7,6,2)$, $(9,5,2)$, $(15,4,2)$.

Ако $z=3$, тогаш $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{3}{2}$. Аналогно како и во претходниот случај добиваме дека $y<5$ и $y \geq z=3$. Така ги добиваме решенијата $(8,3,3)$ и $(5,4,3)$.

Значи, сите решенија на почетната равенка се сите пермутации на подредените тројки $(7,6,2),(9,5,2),(15,4,2),(8,3,3)$ и $(5,4,3)$.

37. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{2}\cdot n!+2013=m^2\ .$$

Решение. Бидејќи за $n>4$ цифрата на единиците на $\frac{1}{2}\cdot n!$ е 0, а точен квадрат нема цифра на единици 3, заклучуваме дека можни вредности за n се 2, 3 и 4. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $n=4, m=45$. Навистина, $\frac{1}{2}\cdot 4!+2013=2025=45^2$.

38. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1!+2!+...+x!=y^2\ .$$

Решение. Ќе разгледаме пет случаи.

- Ако $x=1$, тогаш $1!=1^2$, т.е. $y=1$.
- Ако $x=2$, тогаш $1!+2!=3 \neq y^2$.
- Ако $x=3$, тогаш $1!+2!+3!=9=3^2$, т.е. $y=3$.
- Ако $x=4$, тогаш $1!+2!+3!+4!=33 \neq y^2$.
- Ако $x \geq 5$, тогаш цифрата на единиците на бројот $x!$ е 0, па затоа

цифрата на единиците на бројот $1!+2!+...+x!$ е 3. Но, квадрат на природен број нема цифра на единици 3, па затоа равенката нема решение за кое $x \geq 5$.

Конечно, решение на дадената равенка е: $(x,y) \in \{(1,1),(3,3)\}$.

39. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^5 - y! = 2015.$$
Решение. За $y = 1,2,3,4$ непосредно проверуваме дека $2015 + y!$ не е петти степен на природен број. За $y \geq 5$ важи $5 \mid y!$ и како $5 \mid 2015$ добиваме $5 \mid x^5$, односно $5 \mid x$. Според тоа, $25 \mid x^5$ и како 25 не е делител на 2015 заклучуваме дека 25 не е делител на $y!$. Според тоа, $y < 10$. Непосредно проверуваме дека за $y = 5,6,7,8,9$ бројот $2015 + y!$ не е петти степен на природен број. Конечно, равенката нема решение во множеството природни броеви.

40. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1.$$
Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките
$$y^4 - 2y^2 + 1 + x^{2010} = 0,$$
$$(y^2 - 1)^2 + x^{2010} = 0.$$
Од последната равенка добиваме $y^2 - 1 = 0$ и $x = 0$. Според тоа, решенијата на равенката се $(x,y) = (1,0),(-1,0)$.

41. Докажи, дека равенката
$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1 \qquad (1)$$
има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека $x = a, y = b$ е едно решение на равенката (1) во множеството $\mathbb{N}$. Од равенството $(a-1)^2 + (a+1)^2 = b^2 + 1$ следува равенството
$$(2b + 3a - 1)^2 + (2b + 3a + 1)^2 = (3b + 4a)^2 + 1,$$
што значи дека $x = 2b + 3a > a,\ y = 3b + 4a > b$ е решение на 1.

Значи, ако во множеството $\mathbb{N}$ постои едно решение на (1), тогаш равенката има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека $x = 2, y = 3$ е решение на (1).

42. Докажи, дека равенката

$$x^2 + y^2 = z^{1990}$$

има бесконечно многу решенија во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Користејќи го идентитетот

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

и принципот на математичка индукција лесно можеме да докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $(a^2 + b^2)^n$ е еднаков на збир на квадрати. За секои $a, b \in \mathbb{N}$ постојат $x, y \in \mathbb{N}$ такви што $(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$.

Ако ставиме $z = a^2 + b^2$, $n = 1990$, а a и b ги менуваме во множеството природни броеви добиваме бесконечно многу решенија на дадената равенка.

43. Докажи дека равенката

$$5x^2 - 4y^2 = 2015$$

нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$5x^2 - 4y^2 \equiv x^2 (\mathrm{mod}\, 4) \text{ и } 2015 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4),$$

па ако дадената равенка има решение во множеството цели броеви треба да важи $x^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Но, тоа противречи на фактот дека за секој цел број x важи $x^2 \equiv 0$ или $1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Конечно, до добиената противречност следува дека разгледуваната равенка нема решение во множеството цели броеви.

Втор начин. Ако x е парен број., тогаш левата страна на равенката е парен број, а десната е непарен број, па затоа во овој случај немаме решение на равенката. Ако $x = 2k + 1, \in \mathbb{Z}$, тогаш со замена во дадената равенка, по средувањето добиваме ја добиваме равенката

$$20k^2 + 20k - 4y^2 = 2010 .$$

Левата страна на последната равенака е делива со 4, а десната е делива со 2, но не и со 4, па затоа истата нема решение во множеството цели броеви.

44. Докажи дека равенката

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

нема целобројни решенија.

Решение. Ќе разгледуваме остатоци по модул 5. Јасно, ако $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, тогаш мора да е $y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$ и обратно, што не е можно бидејќи во тој случај левата страна на равенката е делива со 25, а десната страна е делива со 5, но не и со 25. Ако, $x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, тогаш $x^2 \equiv 1, 4 (\mathrm{mod}\, 5)$, а ако $y \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, тогаш $2y^2 - 75y + 5 \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 5)$. Бидејќи во овие случаи левата и десната страна на равенката даваат различни остатоци по модул 5, заклучуваме дека дадената равенка нема целобројни решенија.

45. Докажи, дека равенката

$$5x^2 - 7y^3 = 9$$

нема решенија во множеството $\mathbb{Z}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a, b \in \mathbb{Z}$ се такви што

$$5a^2 - 7b^3 = 9.$$

Тогаш $5a^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 7)$, од каде следува $a^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$, што не е можно, бидејќи во спротивно имаме

$$1 \equiv a^6 \equiv (-1)^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7) \text{ или } 0 \equiv a^6 \equiv (-1)^3 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7).$$

46. Докажи дека ако p е прост број и $n \in \mathbb{N}$, тогаш равенката

$$x(x+1) = p^{2n} y(y+1) \tag{1}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека p е прост број, $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{N}$ ја задоволуваат равенката (1). Од $(x, x+1) = 1$ следува $p^{2n} \mid x$ или $p^{2n} \mid x+1$, па затоа $x + 1 \geq p^{2n}$. Но, равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$p^{2n} - 1 = [p^n (2y+1) + (2x+1)][p^n (2y+1) - (2x+1)]. \tag{1}$$

Левата страна и првиот множител на десната страна на (2) се природни броеви, па затоа и вториот множител на десната страна на (2) мора да е природен број. Оттука следува, дека

$$p^{2n}-1>2x+1,\text{ т.е. } p^{2n}>2x+2.$$

Според тоа,

$$p^{2n}>2(x+1)>2p^{2n},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека равенката (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

47. Во множеството рационални броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z=1. \qquad (1)$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2=7,$$

па ако (1) има решенија во множеството рационални броеви, тогаш бројот 7 може да се претстави како збир на квадрати на три рационални броеви. Ќе докажеме, дека тоа не е можно.

Навистина, ако 7 може да се запише како збир на квадрати на три рационални броеви, тогаш по квадрирањето и сведување на добиените броеви на најмал заеднички содржател се добива равенката

$$a^2+b^2+c^2=7m^2,\ a,b,c\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

Според тоа, постои најмал природен број m, за кој равенката (2) има решение во множеството $\mathbb{Z}$.

Ако $m=2n, n\in\mathbb{N}$, тогаш десната страна на (2) се дели со 4, па затоа $a=2a_1$, $b=2b_1$ и $c=2c_1$, каде $a_1,b_1,c_1\in\mathbb{Z}$. Заменуваме во (2) и ја добиваме равенката

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=7n^2,\ n<m, n\in\mathbb{N}.$$

последното противречи на претпоставката дека m е најмалиот природен број за кој $7m^2$ е збир на кавдрати на три цели броеви.

Ако $m=2k+1$, тогаш $m^2=8t+1$ и $7m^2=8t_1+7$, а квадратите на цели броеви при делење со 8 даваат остатоци 0, 1 или 4, па затоа збир на три квадрати на цели броеви при делење со 8 не може да даде остаток 7.

48. Докажи дека системот

$$\begin{cases} x^2+2y^2=z^2 \\ 2x^2+y^2=t^2 \end{cases}$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека системот има решение во множеството $\mathbb{N}$, при што $(x,y)=1$, бидејќи ако $(x,y)=d>1$, тогаш и двете равенки можеме да ги поделиме со d^2. Според тоа, барем еден од броевите x и y е непарен. Меѓутоа, и двата броја не може да се непарни, бидејќи во тој случај левите страни на равенките при делење со 4 даваат остаток 3, што противречи на фактот дека десните страни се точни квадрати.

Нека x е парен, а y е непарен број. Тогаш левата страна на првата равенка на системот при делење со 4 дава остаток 2, што противречи на фактот дека десната страна е точен квадрат. Аналогно, ако x е непарен, а y парен број, тогаш до истата противречност доведува втората равенка на системот.

49. Докажи, дека системот

$$\begin{cases} x^2+5y^2=z^2 \\ 5x^2+y^2=t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Ако системот (1) има решение x,y,z,t, тогаш (1) има и такво решение за кое важи $(x,y)=1$. Ако ги собереме равенките на системот добиваме

$$6(x^2+y^2)=z^2+t^2, \qquad (2)$$

од што следува дека $3\,|\,z^2+t^2$. Последното е можно ако и само ако $3\,|\,z$ и $3\,|\,t$, што значи дека десната страна на (2) е делива со 9. Но, тогаш $3\,|\,x^2+y^2$, па затоа $3\,|\,x$ и $3\,|\,y$, што противречи на $(x,y)=1$.

50. Докажи, дека системот

$$\begin{cases} x^2+6y^2=z^2 \\ 6x^2+y^2=t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Од (1) следува

$$7(x^2+y^2)=z^2+t^2,$$

т.е. $7\,|\,z^2+t^2$. Аналогно, како во претходната задача заклучуваме дека $7\,|\,z$ и $7\,|\,t$, па затоа $49\,|\,7(x^2+y^2)$, т.е. $7\,|\,x$ и $7\,|\,y$. Според тоа,

$$x = 7a,\ y = 7b,\ z = 7c,\ t = 7d$$

и ако замениме во (1) го добиваме системот

$$\begin{cases} a^2 + 6b^2 = c^2 \\ 6a^2 + b^2 = d^2. \end{cases}$$

Последниот систем, всушност е системот (1) и продолжувајќи ја постапката заклучуваме, дека $7^k \mid x, 7^k \mid y, 7^k \mid z, 7^k \mid t$, за секој $k \in \mathbb{N}$. Последното е можно ако и само ако $x = y = z = t = 0$, што значи дека системот (1) нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

51. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Ќе го користиме равенството

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)\,. \qquad (1)$$

Ако $x, y, z \in \mathbb{Z}, x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, тогаш од (1) добиваме

$$8 = (x + y)(y + z)(z + x) = (3 - x)(3 - y)(3 - z)\,, \qquad (2)$$

а како $x + y + z = 3$ добиваме

$$6 = (3 - x) + (3 - y) + (3 - z)\,. \qquad (3)$$

Од (3) следува, дека меѓу броевите $3 - x, 3 - y, 3 - z$ или сите или само еден е парен.

Во првиот случај сите броеви по апсолутна вредност се еднакви на 2, а според (3) тие се еднакви на 2, па затоа

$$x = y = z = 1\,.$$

Во вториот случај, според (2) еден од броевите $3 - x, 3 - y, 3 - z$ по апсолутна вредност е еднаков на 8, а другите два по апсолутна вредност се еднакви на 1, па од (3) следува дека едниот е еднаков на 8, а другите два се еднакви на -1. Значи,

$$x = -5,\ y = z = 4 \text{ или } x = y = 4,\ z = -5 \text{ или } x = z = 4,\ y = -5\,.$$

Конечно, дадениот систем во множеството $\mathbb{Z}$ има четири решенија и тоа

$$(x, y, z) \in \{(1,1,1), (-5,4,4), (4,-5,4), (4,4,-5)\}\,.$$

52. Во множеството $\mathbb{N}$ реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=zt \\ z+t=xy, \quad x\le y, x\le z\le t. \end{cases}$$

Решение. Нека претпоставиме дека $x=1$. Тогаш ги добиваме равенките $1+y=zt, z+t=y$, од каде следува $zt=z+t+1$, па затоа $z\neq 1$. Ако $z=2$, тогаш $t=3$ и $y=z+t=5$. Ако $z\ge 3$, тогаш $t\ge z\ge 3$ и имаме $z=z_1+2,\ t=t_1+2$, каде $z_1\ge 1, t_1\ge 1$, па е

$$zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\ge z_1+t_1+7=z+t+3$$

што противречи на $zt=z+t+1$.

Сега, да претпоставиме дека $x=2$. Тогаш $z\ge x=2$. Ако $z=2$, тогаш $2+y=2t,\ 2+t=2y$, па затоа $y=t=2$. Во случајов, $x=y=z=t=2$ е решение на системот. Ако $z>2$, тогаш од $t\ge z$ следува $t>2$ и можеме да ставиме $z=z_1+2,\ t=t_1+2$, каде $z_1\ge 1, t_1\ge 1$, па е

$$zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\ge z_1+t_1+7=z+t+3\,.$$

Но, бидејќи $x=2$, имаме $2+y=zt, z+t=2y$, па е $zt=2+\frac{z+t}{2}$ и добиваме дека $2+\frac{z+t}{2}=zt\ge z+t+3$, т.е. $z+t+2\le 0$, што не е можно. Сега, да претпоставиме дека $x>2$, т.е. $x\ge 3$. Тогаш $z\ge x\ge 3$ и $t\ge z\ge x\ge 3$. Значи, можеме да ставиме $z=z_1+2,\ t=t_1+2$, каде $z_1\ge 1, t_1\ge 1$, па е

$$zt=(z_1+2)(t_1+2)=z_1t_1+2z_1+2t_1+4\ge z_1+t_1+7=z+t+3\,.$$

На сличен начин од $x\ge 3$, $y\ge x\ge 3$ добиваме $xy\ge x+y+3$. Но, $z+t=xy$, па затоа

$$zt\ge z+t+3=xy+3\ge x+y+6=zt+6\,,$$

што не е можно.

Конечно, во множеството $\mathbb{N}$ системот има две решенија

$$x=y=z=t=2 \text{ и } x=1,\, y=5,\, z=2,\, t=3\,.$$

53. Определи ги трицифрените броеви *A*, со следното својство: аритметичката средина на сите броеви, добиени од бројот *A* со пермутирање на неговите цифри е еднаква на бројот *A*.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Од условот на задачата имаме

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{acb}+\overline{cba}+\overline{bac}=6\overline{abc}\,,$$

односно

$$222(a+b+c)=6(100a+10b+c)\,.$$

Според тоа, $7a=4b+c$. Ако последната равенка ја запишеме во облик

$$7(a-b)=4(c-b)$$

добиваме $a=b=c$ или $a-b=4$ и $c-b=7$ (притоа $0\le b\le 2$) или $b-a=4$ и $b-c=7$ (притоа $7\le b\le 9$).

Значи, бараните броеви се: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 407, 518, 629, 370, 481, 565 и 592.

54. Определи го бројот n за кој збирот на парните природни броеви кои се поголеми од n^2-n+1, а се помали од n^2+n+1 е еднаков на 2210.

Решение. Бидејќи броеите n^2-n+1 и n^2+n+1 се непарни, првиот собирок во бараниот збир е еднаков на n^2-n+2, а последниот е еднаков на n^2+n. Според тоа,

$$(n^2-n+2)+(n^2-n+4)+...+(n^2+n-2)+(n^2+n)=2210\,. \qquad (1)$$

Јасно, во збирот на левата страна на (1) има n собирци. Понатаму,

$$(n^2-n+2)+(n^2+n)=(n^2-n+4)+(n^2+n-2)=...=2(n^2+1)\,,$$

па затоа од (1) следува

$$\tfrac{1}{2}n\cdot 2(n^2+1)=2210\,,$$

односно

$$n(n^2+1)=2\cdot 3\cdot 13\cdot 17\,,$$

од каде лесно се добива дека $n=13$.

55. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2=3(u^2+v^2)\,. \qquad (1)$$

Решение. Јасно, подредената четворка $(0,0,0,0)$ е решение на дадената равенка. Ако постои друго решение, тогаш би постоело и решение (x,y,u,v) за кое збирот x^2+y^2 на левата страна на равенката (1) е најмал. Од (1) следува дека збирот x^2+y^2 е делив со 3. Бидејќи, квадратите на природните броеви при делење со 3 даваат остатоци 0 и 1, следува дека збирот x^2+y^2 може да е делив со 3 само ако x и y се деливи со 3. Според тоа, $x=3x_1$, $y=3y_1$, односно

$$u^2+v^2=3(x_1^2+y_1^2)\,.$$

Според тоа, најдовме решение (u,v,x_1,y_1) такво што

$$u^2+v^2=\tfrac{1}{3}(x^2+y^2)<x^2+y^2\,,$$

т.е. решение за кое збирот на левата страна на (1) е помал, што е противречност. Од добиената противречност следува дека единствено решение на дадената равенка е $(0, 0, 0, 0)$.

56. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$\sum_{i=0}^{7}(x+i)^3 = y^3.$$

Решение. Да означиме $P(x)=\sum_{i=0}^{7}(x+i)^3 = y^3$. Нека $x \geq 0$. Тогаш

$$(2x+7)^3 < P(x) < (2x+10)^3$$

и лесно се проверува дека во овој случај равенката нема решение. Ако $x<0$, бидејќи $P(-x-7)=-P(x)$, равенката нема решение за $x \leq -7$. Останува да провериме дали $P(x)$ е точен куб за $x=-1,-2,-3,-4,$ $-5,-6$. Добиваме дека решенија на равенката се

$$(x,y)\in\{(-2,6),(-3,4),(-4,-4)\}.$$

57. Определи ги сите цели броеви n за кои $\sqrt{n^2+3n+38}$ е цел број.

Решение. Ако разгледуваниот број е цел, тогаш $n^2+3n+38=x^2$ за некој цел број x. Според тоа,

$$4x^2-4n^2-12n-9=143,$$
$$(2x-2n-3)(2x+2n+3)=143.$$

Бидејќи 143 е прост број, имаме четири можности при што се добива $n\in\{-37,-2,-1,34\}$.

58. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Јасно, $n>1$, $x<n$, $y<n$ и дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2\sqrt{xn}=n+x-y.$$

Според тоа, $xn=a^2$ за некој $a\in\mathbb{N}$, Нека n е производ на различни прости броеви, т.е. $n=p_1p_2...p_r$, $r>1$. Тогаш од $xn=a^2$ следува дека $p_i \mid a^2$, па затоа $p_i \mid x$ за секј $i=1,2,...,r$. Според тоа, $n \mid x$, па затоа

$x \geq n$, што не е можно.

Нека сега n е делив со квадрат на цел број $k > 1$, т.е. $n = k^2 l, l \in \mathbb{N}$.

Тогаш $x = l$ и $y = (k-1)^2 l$ е решение на равенката.

Според тоа, решение на задачата се сите природни броеви n кои се деливи со квадрат на природен број поголем од 1.

59. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = y^3 .$$

Решение. Имаме

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784 .$$

Ако $x \geq 0$, тогаш

$$(2x+7)^3 < 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784 < (2x+10)^3 ,$$

па затоа $y = 2x + 8$ или $y = 2x + 9$, но во овие случаи немаме целоброј-но решение за x. Ако $x < 0$, тогаш забележуваме дека ако (x, y) е решение, тогаш и $(-x-7, -y)$ е решение и затоа $-7 < x$. Сега, лесно се добива дека решенија на дадената равенка се:

$$(x, y) = (-2, 6), (-3, 4), -4, -4), (-5, -6) .$$

60. Колку решенија во множеството цели броеви има равенката

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{2015} .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(3m - 2015)(3n - 2015) = 2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 ,$$

$m \neq n$. Секој од двата множители е за 1 поголем од содржател на бројот 3. Ако е позитивен, тој треба да содржи парен број „5“ (две варијанти), произволен број „13“ (три варијанти) и произволен број „31“ (три варијанти). Секоја од овие $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ варијанти соодветствува на различно решение (m, n). Ако е негативен, тој треба да содржи непарен број „5“ (една можност), произволен број „13“ (три можности) и произволен број „31“ (три можности). Секоја од овие $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ варијанти соодветствува на различно решение (m, n), освен варијантата -2015 при која $m = n = 0$. Затоа вкупно имаме $18 + 8 = 26$ решенија на разгледуваната равенка.

61. Колку решенија има равенката

$$x^2 + y^2 = x^3$$

во множеството $\mathbb{N}$, ако x е помал од 2012.

Решение. Нека x и y се природни броеви кои се решенија на равенката. Тогаш

$$y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x-1),$$

па според тоа $x^2 \mid y^2$, од каде добиваме $x \mid y$. Значи $x-1=(\frac{y}{x})^2$, односно постои n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таков што $x-1=n^2$. Од условот $x \in \mathbb{N}$ и $x < 2012$ добиваме $-1 < n^2 < 2012$, т.е. $0 \le n \le 44$.

За $n=0$ имаме $x=1, y=0$ за кои не е исполнет условот на задачата. Значи, $1 \le n \le 44$, односно равенката има 44 решенија.

62. Нека a, b и n се природни броеви, $a > b$, $n > b$ и $a^n + b^n = c^n$. Докажи дека $c \notin \mathbb{Z}$.

Решение. Од $a^n + b^n = c^n$ следува $a < c$. Од друга страна, од

$$(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \ldots + 1,\ \ b < n \text{ и } b^{n-1} < a^{n-1}$$

следува $a^n + b^n < (a+1)^n$, односно $c^n < (a+1)^n$. Значи, $a < c < a+1$, па затоа $c \notin \mathbb{Z}$.

9. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a!+b!+c!=2^n.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\le b\le c$. Ако $a\ge 3$, тогаш левата страна на равенката е делива со 3, а десната страна не е делива со 3, па затоа равенката нема решение. За $a=1$ добиваме $b!+c!=2^n-1$ и тоа е непарен број, па затоа $b=1$. Тогаш $c!=2^n-2$ и ако $c\ge 4$, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. За $c=2$ и $c=3$ соодветно добиваме решенија $(1,1,2)$ и $(1,1,3)$.

Ако $a=2$, тогаш $b!+c!=2^n-2$ и ако $b\ge 4$, тогаш левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4. Ако $b=2$ имаме $c!=2^n-4$, па ако $c\ge 4$, тогаш левата страна е делива со 8, а десната не е делива со 8. За $c=2,3$ не се добива решение на равенката. Конечно, ако $b=3$, тогаш $c!=2^n-8$ и ако $c\ge 6$, тогаш левата страна е делива со 16, а десната страна не е делива со 16. За $c=3,4,5$ го добиваме само решението $(2,3,4)$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $2^8+2^{11}+2^n$ е точен квадрат.

Решение. Нека $2^n+2^8+2^{11}=x^2$, т.е. $2^n+(3\cdot 2^4)^2=x^2$. Оттука добиваме $2^n=(x-3\cdot 2^4)(x+3\cdot 2^4)$, па затоа

$$x-3\cdot 2^4=2^a \text{ и } x+3\cdot 2^4=2^b,\ a<b \text{ и } a+b=n.$$

Ако ги одземиме добиените две равенки имаме $2^b-2^a=6\cdot 2^4=3\cdot 2^5$, т.е. $2^a(2^{b-a}-1)=3\cdot 2^5$. Сега јасно е дека $a=5$ и $2^{b-5}-1=3$, па затоа $b=7$. Конечно, $n=a+b=12$.

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y-y^x=xy^2-19\ .$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y\equiv x(\mathrm{mod}\,y)$, па од дадената равенка добиваме $x\equiv -19(\mathrm{mod}\,y)$, т.е. $y\,|\,x+19$. Слично, со сведување по модул x добиваме $x \mid y-19$. Бидејќи равенката нема решение за $x=y$, од овде следува дека $xy \mid x-y+19$. Притоа

$$x-y+19=0$$

не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x=2$, но тогаш $y=21$ не е прост број. Значи,

$$xy \leq |x-y+19| < x+y+19 \text{, т.е. } (x-1)(y-1)<20 .$$

Останува да испитаме неколку случаи:

1) $x=2, y \leq 19$;

2) $x=3, y \leq 7$;

3) $y=3, 5 \leq x \leq 7$ или

4) $y=2, 5 \leq x \leq 19$.

Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

4. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$2^a+8b^2-3^c=283 .$$

Решение. Лесно се докажува дека $a,c \geq 0$. Бидејќи 3^c дава остаток 1 или 3 при делење со 8, заклучуваме дека $0 \leq a \leq 2$. Ако $a=0$ или $a=1$, тогаш соодветно се добива дека 2 е делител на 3^c или 8 е делител на 3^c+1, што е противречност. Нека $a=2$, т.е. $8b^2-3^c=279$. Случаите $c=0,1$ не се можни, па затоа $c \geq 2$. Тогаш $3 \mid b$ и ако ставиме $b=3d$ добиваме $8d^2-3^{c-2}=31$. Ако $c \geq 3$, тогаш $3 \mid d^2+1$, што е противречност. Според тоа, $c=2$ и $d=\pm 2$. Конечно, $a=2, b=\pm 6$ и $c=2$.

5. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 .$$

Решение. Нека

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2 .$$

Бројот y е непарен и $2^x \mid (y-1)(y+1)$, но двата множители не се деливи со 4, од каде следува дека еден од нив е делив со 2^{x-1}, т.е.

$$y=2^{x-1}z \pm 1 .$$

Од друга страна, очигледно е дека

$$2^x+1<y<2^{x+1}-1,\ \text{за}\ x\ge 2,$$

па затоа $z=3$. Ако означиме $t=2^{x-1}$, тогаш почетната равенка го добива обликот

$$8t^2+2t+1=(3t\pm 1)^2.$$

Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $t=8$. Сега, $x=4$ и $y=23$ и тоа навистина е решение, бидејќи $1+2^4+2^9=23^2$.

6. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(2n)^{2n}-1=m^3. \tag{1}$$

Решение. Равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$m^3=[(2n)^n-1][(2n)^n+1]. \tag{2}$$

Бидејќи $((2n)^n-1,(2n)^n+1)=((2n)^n-1,2)=1$, од (2) следува дека постојат $a,b\in\mathbb{N}$ такви што $b>a>1$ и $(2n)^n-1=a^3$, $(2n)^n+1=b^3$. Ако ги одземеме последните две равенства ја добиваме равенката

$$2=b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2),$$

која нема решенија во множеството природни броеви бидејќи за секои $a,b\in\mathbb{N}$ важи $b^2+ab+a^2>2$. Според тоа, равенката (1) нема решение во множеството природни броеви.

7. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2^x+7^y=z^4.$$

Решение. За $x=1$ имаме $7^y+2=z^4$. Ако $2\mid y$, тогаш $7^y\equiv 1(\text{mod}\,16)$, а ако $2\nmid y$, тогаш $7^y\equiv 1(\text{mod}\,16)$. Затоа $7^y+2\equiv 3$ или $9(\text{mod}\,16)$. Од друга страна, очигледно 2 не е делител на z, па лесно се добива дека $z^4\equiv 1(\text{mod}\,16)$, што е противречност.

Нека $x\ge 2$. Бидејќи 2 не е делител на z, добиваме $7^y\equiv 1(\text{mod}\,4)$, па затоа $2\mid y$. Нека $y=2k,\ k\in\mathbb{Z}$. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$(z^2-7^k)(z^2+7^k)=2^x.$$

Бидејќи $(z^2-7^k, z^2+7^k)=2$, добиваме $z^2-7^k=2$ и $z^2+7^k=2^{x-1}$. Од последните равенства следува $2^{x-2}-1=7^k$. Ако $x\geq 6$, добиваме $7^k\equiv -1(\mathrm{mod}\,16)$, што не е можно. Значи, $x\leq 5$ и наоѓаме дека единствено решение е $x=5, k=1$. Според тоа,

$$y=2 \text{ и } z^2=7^k+2=9, \text{ т.е. } z=3.$$

Конечно, $x=5, y=2, z=3$ е единствено решение на равенката.

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3^m-7^n=2.$$

Решение. За $n=1$ имаме $m=2$. Нека $n\geq 2$. Тогаш $3^m\equiv 2(\mathrm{mod}\,49)$, од каде добиваме $m=42k+26$. Но, тогаш

$$7^n+2=3^m\equiv 3^{26}\equiv 15(\mathrm{mod}\,43),$$

што лесно се проверува дека не е можно, при што треба да се искористи дека $7^6\equiv 1(\mathrm{mod}\,43)$.

9. Определи ги сите $a,b,c\in\mathbb{N}$ такви што $4^a+2^b+1=c^2$ и $b<2a$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2^b(2^{2a-b}+1)=(c-1)(c+1).$$

Од $2^{b-1}\,|\,c-1$ или $2^{b-1}\,|\,c+1$ следува $2^{b-1}\leq c+1$, па затоа $2^b\leq 2c+2$, што значи

$$2^{2a-b}+1\geq \tfrac{c-1}{2}\geq \tfrac{2^{b-1}}{2}-1,$$

односно $2^{2a-b-1}+1\geq 2^{b-3}$.

Ако претпоставиме дека $b\geq a+2$, тогаш

$$1\geq 2^{2a-b-1}(2^{(b-3)-(2a-b-1)}-1)=2^{2a-b-1}(2^{2b-2a-2}-1)\geq 3,$$

што е противречност. Затоа, $b\leq a+1$.

Ако претпоставиме дека $b<a+1$, тогаш

$$(2^a)^2<4^a+2^b+1<(2^a+1)^2,$$

што противречи на условот на задачата.

Значи, $b=a+1$ и сите решенија се подредените тројки

$$(a,b,c)=(a,a+1,2^a+1),\ a\in\mathbb{N}.$$

10. Во множеството $\mathbb{Z}$ реши ја равенката.

$$1+x+x^2+x^3=2^y.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$(1+x)(1+x^2)=2^y,$$

па затоа

$$1+x=2^m \text{ и } 1+x^2=2^{y-m},\ m\geq 0, \text{ т.е. } x=2^m-1 \text{ и } x^2=2^{y-m}-1.$$

Ако ја квадрираме првата равенка добиваме

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

Можни се два случаја:

1) за $m=0$ равенката има единствено решение $x=y=0$,
2) за $m>0$ добиваме $2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$. Броевите 2^m и 2^{2m-1} се парни, па затоа 2^{y-m-1} мора да е непарен, што е можно само ако $2^{y-m-1}=1$т.е. $y=m-1$. Со замена добиваме $2^m=2^{2m-1}$, односно $m=1$. Конечно $x=1$ и $y=2$.

11. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}=2^y+1.$$

Решение. Ако $x>1$, тогаш левата страна на равенката дава остаток 5 при делење со 9. Затоа треба да важи $2^y\equiv 4 \pmod 9$, од каде се добива $y\equiv 2 \pmod 6$. Нека $y=6k+2, k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$2^y+1\equiv(2^6)^k\cdot 2^2+1\equiv(-1)^k\cdot 2^2+1\equiv 5 \text{ или } 10 \pmod{13}.$$

Од друга страна,

$$(2^{2015}+1)^x+2^{2015}\equiv 8^x+7\equiv 2,6,8 \text{ или } 12 \pmod{13},$$

што значи дека дадената равенка нема решение во множеството природни броеви.

12. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$14^x-3^y=2015.$$

Решение. Од $14^x>2015$ следува $x\geq 3$. Тогаш

$$3^y\geq 14^3-2015=729,$$

па затоа $y\geq 6$ и го добиваме решението $(x,y)=(3,6)$. Уште повеќе, бидејќи $3^y\equiv 1 \pmod 7$ заклучуваме дека $y=6k$ за некој природен број

k. Бидејќи

$$0 \equiv 14^x - 3^{6k} \equiv (-1)^x - (-1)^{3k} \pmod{5},$$

заклучуваме дека броевите x и k се со иста парност. Но, од

$$-1 \equiv 14^x \pmod{9}$$

следува $x \equiv 3 \pmod{6}$, што значи дека x и k се непарни. Ако $x > 3$, тогаш

$$1 \equiv 3^{6k} \equiv 9^{3k} \pmod{16}$$

од каде следува дека k е парен, што е противречност.

10. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што
$$a^2+b^2-33c^2=8bc\,,$$
ако се знае дека a е прост број.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$a^2=33c^2-b^2+8bc$$
$$a^2=(3c+b)(11c-b).$$
Бидејќи $3c+b>1$ и a е прост број можни се следниве случаи:
$$\begin{cases}3c+b=a\\11c-b=a\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3c+b=a^2\\11c-b=1.\end{cases}$$
Во првиот случај по собирање на равенките добиваме $7c=a$ и како a епрост број единствено решение е $c=1, a=7$, па затоа $b=4$.

Во вториот случај имаме $14c=a^2+1$ и оваа равенка нема решение, бидејќи левата страна е делива со 7, а десната при делење со 7 дава остатоци 1, 2, 3 и 5.
Единствено решение е $a=7, b=4, c=1$.

2. Определи ги сите природни броеви n и сите прости брови p такви што
$$p^3+n(p+2)=n^2+p+1\,.$$
Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$p(p^2+n-1)=(n-1)^2\,, \qquad (1)$$
од каде добиваме дека $p\,|\,n-1$. Нека $n=kp+1, k\in\mathbb{Z}$. Ако замениме во (1), по скратувањето добиваме $p+k=k^2$, т.е. $p=k(k-1)$, па затоа $k=2$, $p=2$ и $n=5$.

3. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $7p+1=n^2$, $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, $7p=(n-1)(n+1)$, па бидејќи сите природни делители на бројот $7p$ се 1, 7, p и $7p$, добиваме $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$. Оттука следува дека $n \in \{2, 8, 0, 6\}$ и со директна проверка добиваме дека единствено решение е $n = 6$, односно $p = 5$.

4. Определи ги сите прости броеви p за кои постојат природни броеви x и y такви што $p+1 = 2x^2$ и $p^2 + 1 = 2y^2$.

Решение. Јасно, p е непарен број, т.е. $p \neq 2$. Од $2(y^2 - x^2) = p(p-1)$ и $p \neq 2$ следува $p \mid x - y$ или $p \mid x + y$. Освен тоа, $x < p, y < p$ и $x < y$, па затоа p не е делител на $y - x$, бидејќи во спротивно $x = y$. Значи, $p \mid x + y$ и од $x < p$ и $y < p$ следува дека $x + y = p$. Според тоа, треба да го решиме системот

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2, \\ p^2 + 1 = 2(p-x)^2. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, по скратувањето со p добиваме $p - 1 = 2k - 4x$, т.е. $x = \frac{p+1}{4}$. Сега, заменуваме во првата равенка и добиваме $p^2 - 6p - 7 = 0$, од каде наоѓаме $(p-7)(p+1) = 0$, па затоа $p = 7$ или $p = -1$. Значи, бараната вредност е $p = 7$.

5. Во множеството прости броеви реши ја равенката $x^2 - 2y^2 = 1$.

Решение. Бидејќи $2y^2$ е парен број добиваме дека x е непарен број. Значи, $2y^2 = (x-1)(x+1)$ е делив со 4 и како y е прост број имаме $y = 2$. Според тоа, $x = 3$.

6. Производот на три прости броја е еднаков на n. По додавањето на 1 на секој од простите броеви производот на трите добиени броеви е еднаков на $n + 963$. Определи го бројот n.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за простите броеви p, q, r важи $p \leq q \leq r$. Според условот на задачата имаме

$$(p+1)(q+1)(r+1) = pqr + 963,$$

т.е.

$$pq + qr + rp + p + q + r = 962.$$

Ако $p \geq 19$, тогаш

$$pq + qr + rp + p + q + r \geq 3\cdot 19^2 + 3\cdot 19 > 962 .$$

Според тоа, $p = 2,3,5,7,11,13$ или 17. За $p = 2$ имаме

$$qr + 3q + 3r = 960 ,$$

па затоа q и r треба да се парни, т.е. $q = r = 2$, што не е можно.

Ако $p = 3$, добиваме $qr + 4q + 4r = 959$, од каде следува

$$(q+4)(r+4) = 975 = 3\cdot 5^2 \cdot 13$$

и по разгледување на можностите за $q+4$ и $r+4$ го добиваме единственото решение $q = 11, r = 61$.

Случаите $p = 5,7,11,13$ се разгледуваат аналогно, при што се покажува дека не водат до решение.

Значи, $n = 3\cdot 11\cdot 61 = 2013$.

7. Определи ги целите броеви x и y и простиот број p за кои важи

$$x^2 - 3xy + p^2 y^2 = 12p .$$

Решение. Ако $p \neq 3$, тогаш добиваме $x^2 + y^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа $x \equiv y \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ и имаме противречност по модул 9. Според тоа, $p = 3$ и равенката го добива видот $x^2 - 3xy + 9y^2 = 36$. Оттука $x = 3t$, $t \in \mathbb{Z}$ и затоа $t^2 - ty + y^2 - 4 = 0$, од каде добиваме $(t - \frac{y}{2})^2 = \frac{16-3y^2}{4}$, па затоа $16 - 3y^2$ треба да е точен квадрат. Според тоа, $y^2 = 0$ или $y^2 = 4$. Со непосредна проиверка ги добиваме решенијата

$$(x, y, p) = (-6,0,3), (0,-2,3), (0,2,3), (6,-2,3), (6,0,3), (6,2,3) .$$

8. Определи ги простите броеви p, q, r за кои важи $p = q^3 - r^3$.

Решение. Имаме

$$p = q^3 - r^3 = (q-r)(q^2 + qr + r^2)$$

и условот дека p е прост број следува дека е можен еден од следниве два случаи:

1) $q - r = 1$ и $q^2 + qr + r^2 = p$. Од $q - r = 1$ следува дела r и q се последователни природни броеви и како тие се прости, единствена можност е $r = 2$ и $q = 3$. Според тоа,

$$p = q^3 - r^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19 .$$

2) $q-r=p$ и $q^2+qr+r^2=1$, што не е можно бидејќи за секои природни броеви, а со тоа и за секои прости броеви q и r важи $q^2+qr+r^2>1$.

9. Определи ги сите прости броеви p,q и r такви што $p^q+1=r$.

Решение. Од $p\geq 2, q\geq 2$ следува $r\geq 2^2+1=5$. Според тоа, r е непарен број, па затоа p^q е парен, од што следува $p=2$. Понатаму, ако q е непарен број, тогаш $2^q+1=(2+1)(2^{q-1}-2^{q-2}+...+1)$ е делив со 3, па затоа е е прост број. Тоа значи дека еднствена можност е $q=2$ и во тој случај $r=2^2+1=5$.

10. Во множеството прости броеви најди ги сите решенија на равенката

$$1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{1}{pqrs}$$

такви што $p<q<r<s$.

Решение. Ако $p\geq 3$, тогаш $q\geq 5$, $r\geq 7$ и $s\geq 11$, па затоа

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{1155}$$
$$=\frac{385+231+165+105}{1155}=\frac{886}{1155}<1.$$

Значи, $p=2$. Сега, ако $q\geq 5$, тогаш $r\geq 7$ и $s\geq 11$ и

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{pqrs}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{770}$$
$$=\frac{385+154+110+70}{770}=\frac{719}{770}<1.$$

Значи, $q=3$. Сега равенката го добива видот

$$(r-6)(s-6)=37$$

и како 37 е прост број добиваме

$$r-6=1 \text{ и } s-6=37, \text{ т.е. } r=7 \text{ и } s=43.$$

Конечно, решенија на дадената равенка се

$$p=2,\ q=3,\ r=7 \text{ и } s=43.$$

11. Во множеството прости броеви, реши ја равенката

$$x^2+y^3=z^4. \qquad (1)$$

Решение. Од

$$y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$$

и фактот дека y е прост број добиваме

$$\begin{cases} z^2 - x = 1 \\ z^2 + x = y^3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^2 - x = y \\ z^2 + x = y^2 \end{cases}$$

Но, последните два системи немаат решение во множеството прости броеви (Докажи!), па значи и равенката (1) нема решение во множеството прости броеви.

12. Докажи, дека равенката

$$x^2 + x + 1 = py$$

има решенија во $\mathbb{Z}$, за бесконечно многу прости броеви p.

Решение. Очигледно за $p = 3$ дадената равенка има решение $x = 1$ и $y = 1$. Сега да претпоставиме дека равенката има целобројни решенија (x, y) само за конечен број прости броеви $p_1, p_2, \dots, p_m$. Ставаме $P = p_1 p_2 ... p_m$. Бројот $P^2 + P + 1$ не е делив со ниту еден од простите броеви $p_1, p_2, \dots, p_m$, па затоа има прост делител $q \neq p_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Според тоа равенката $x^2 + x + 1 = qy$ има целобројно решение $x = P$, $y = \frac{P^2 + P + 1}{q}$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

13. Докажи, дека равенката

$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2,$$

нема решение во множеството прости броеви.

Решение. Да забележиме дека ако p, q, r, s и t се прости броеви и

$$p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2,$$

тогаш секој од броевите p и q е различен од секој од брооевите r, s и t. Навистина, ако на пример $p = r$, тогаш ја добиваме равенката $q^2 = s^2 + t^2$ која нема решение во множеството прости броеви, бидејќи броевите s и t не можат и двата да се ниту парни ниту непарни (во два случаи треба $q = 2$, што не е можно бидејќи десната страна е поголема од 4). Ако пак $s = 2$, тогаш бројот 4 ќе биде разлика на квадрати на два природни броја што не е можно.

Ако $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$, тогаш сите броеви p,q,r,s и t не може да бидат непарни. Ако p е парен, т.е $p=2$, тогаш броевите q,r,s,t мора да се непарни, а како квадрат на непарен број при делење со 8 дава остаток 1, тогаш левата страна при делење со 8 ќе дава остаток 5, а десната остаток 3 што не е можно. Слично не е можен случајот кога p и q се двата непарни, бидејќи левата страна при делење со 8 ќе дава остаток 2, а десната ќе дава остаток 6 (еден од броевите треба да е парен).

14. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$p(p+1)+q(q+1)=r(r+1).$$

Решение. Равенката има само едно решеие: $p=q=2, r=3$. За да го докажеме ова ќе ги најдеме сите решенија на равенката

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1) \tag{1}$$

каде p и q се прости броеви, а n е природен број. Од (1) добиваме

$$p\ (p+1)=n(n+1)-q(q+1)=(n-q)(n+q+1)$$

при што мора да е $n>q$. Бидејќи p е прост број имаме $p\,|\,n-q$ или $p\,|\,n+q+1$ Ако $p\,|\,n-q$, тогаш $p\le n+q$, па е

$$p(p+1)\le(n-q)(n-q+1)$$

и затоа

$$n+q+1\le n-q+1$$

што не е можно. Според тоа, $p\,|\,n+q+1$ и значи за некој природен број k важи:

$$n+q+1=kp,\quad p+1=k(n-q)\,. \tag{2}$$

Ако $k=1$, тогаш

$$n+q+1=p \text{ и } p+1=n-q$$

од што следува $p-q=n+1$ и $p+q=n-1$, што не е можно. Значи, $k>1$. Од (2) следува

$$\begin{aligned}2q&=(n+q)-(n-q)\\&=kp-1-(n-q)\\&=k[k(n-q)-1]-1-(n-q)\\&=(k+1)[(k-1)(n-q)-1].\end{aligned}$$

Бидејќи $k\ge2$ следува $k+1\ge3$. Делители на левата страна на последното равенство се $1,2,q,2q$, па затоа $k+1=q$ или $k+1=2q$. Ако

$k+1=q$, тогаш $(k-1)(n-q)=3$, па затоа $(q-2)(n-q)=3$. Според тоа, $q-2=1, n-q=3$ и оттука $q=3, n=6, k=4$ и од (2) добиваме $p=3$.

Ако $k+1=2q$, тогаш $(k-1)(n-q)=2$, па затоа $2(q-1)(n-q)=2$, од каде добиваме $q-1=1, n-q=1$ или $q=2, n=3$ и од (2) следува $p=2$.

Според тоа, за природни n ги имаме само следните решенија со множество прости броеви:

$$p=q=2, n=3; \ p=5, q=3, n=6 \text{ и } p=3, q=5, n=6.$$

Според тоа, решение на почетната равенка е $p=q=2, n=r=3$.

15. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$x^y=z-1.$$

Решение. За $z=2$ ја добиваме равенката $x^y=1$, која во множеството прости броеви нема решение. Ако z е прост број од облик $z=2s+1$, тогаш $x^y=2s$. Последната равенка е можна само ако $x=2$. Понатаму добиваме $y=2$ и $z=5$. Јасно, во множеството прости броеви тоа е единственото решение на дадената равенка.

11. МАЛА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

1. Определи го остатокот од делењето на бројот $(85^{74}+19^{99})^{16}$ со 13.

Решение. Бидејќи 13 е прост број и $13 \nmid 85$ од малата теорема на Ферма следува $85^{12} \equiv 1 (\bmod 13)$, па затоа $85^{72} \equiv 1 (\bmod 13)$. Од друга страна $85 \equiv 7 (\bmod 13)$, па затоа $85^2 \equiv 49 \equiv -3 (\bmod 13)$. Според тоа, $85^{74} \equiv -3 (\bmod 13)$.

Аналогно, $19^{12} \equiv 1 (\bmod 13)$, од каде следува дека $19^{96} \equiv 1 (\bmod 13)$. Но,

$$19 \equiv 6 (\bmod 13),\ 19^2 \equiv 36 \equiv -3 (\bmod 13) \text{ и } 19^3 \equiv -3 \cdot 6 \equiv -5 (\bmod 13).$$

Според тоа, $19^{99} \equiv -5 (\bmod 13)$.

Од досега изнесеното следува дека

$$85^{74}+19^{99} \equiv -8 \equiv 5 (\bmod 13).$$

Но, $5^2 \equiv -1 (\bmod 13)$, па затоа $5^{16} \equiv 1 (\bmod 13)$, т.е.

$$(85^{74}+19^{99})^{16} \equiv 1 (\bmod 13).$$

2. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека

$$p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 (\bmod pq).$$

Решение. Бидејќи p и q се различни прости броеви, според малата теорема на Ферма имаме

$$p^{q-1} \equiv 1 (\bmod p)$$
$$q^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$$

односно $q \mid p^{q-1}-1$ и $p \mid q^{p-1}-1$, па затоа

$$q \mid p^{q-1}+q^{p-1}-1 \text{ и } p \mid q^{p-1}+p^{q-1}-1.$$

Бидејќи $(p,q)=1$ добиваме дека $pq \mid p^{q-1}+q^{p-1}-1$. Значи,

$$p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 (\bmod pq).$$

3. Определи ги сите прости броеви p такви што $5^{p^2} \equiv -1 (\bmod p^2)$.

Решение. Ако p е прост број таков што $5^{p^2} \equiv -1 (\bmod p^2)$, тогаш

$$5^{p^2} \equiv -1 (\bmod p),$$

односно

$$5^{p^2}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)\,. \tag{1}$$

Од друга страна, според теоремата на Ферма имаме $5^p\equiv 5(\mathrm{mod}\, p)$, па затоа $5^{p^2}\equiv 5^p\equiv 5(\mathrm{mod}\, p)$, од каде добиваме

$$5^{p^2}+1\equiv 6(\mathrm{mod}\, p) \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме дека $6\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$. Единствени прости броеви за кои е точна последната конгруенција се $p=2$ и $p=3$.

а) За $p=2$ имаме $5^4+1=626\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

б) За $p=3$ имаме $5^9+1=1953126\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 9)$.

Значи, постои еден единствен прост број за кој е исполнет условот од задачата.

4. Нека n е природен број кој не е делив со 17. Докажи дека барем еден од броевите n^8-1 и n^8+1 е делив со 17.

Решение. Бидејќи $(n,17)=1$ и 17 е прост број, според теоремата на Ферма важи

$$n^{17-1}\equiv 1(\mathrm{mod}17)$$
$$n^{16}\equiv 1(\mathrm{mod}17)$$

Значи, $17\,|\,n^{16}-1$, т.е. $17\,|\,(n^8-1)(n^8+1)$ и бидејќи 17 е прост број добиваме $17\,|\,n^8-1$ или $17\,|\,n^8+1$.

5. Збирот на природните броеви a,b и c е делив со 30. Докажи дека и збирот на нивните петти степени е делив со 30.

Решение. Бидејќи 5 е прост број, од малата теорема на Ферма следува дека $x^5\equiv x(\mathrm{mod}\,5)$ за секој цел број x.

Слично, бидејќи 3 е прост број, од малата теорема на Ферма и својствата на конгруенции имаме $x^3\equiv x(\mathrm{mod}\,3)$, т.е. $x^5\equiv x^3\equiv x(\mathrm{mod}\,3)$ за секој цел број x .

За простиот број 2 имаме $x^2\equiv x(\mathrm{mod}\,2)$, па затоа $x^4\equiv x^2\equiv x(\mathrm{mod}\,2)$, односно $x^5\equiv x^2\equiv x(\mathrm{mod}\,2)$.

Сега бидејќи 2, 3 и 5 се прости броеви, за секој цел број x важи

$$x^5 \equiv x (\mathrm{mod}\, 2\cdot 3\cdot 5)\ .$$

Значи,

$$a^5 \equiv a(\mathrm{mod}\, 30)\ ,\ b^5 \equiv b(\mathrm{mod}\, 30)\ \text{ и }\ c^5 \equiv c(\mathrm{mod}\, 30)\ .$$

Сега, од условот на задачата $a+b+c \equiv 0(\mathrm{mod}\, 30)$ и од својствата на конгруенции, имаме

$$a^5+b^5+c^5 \equiv a+b+c \equiv 0(\mathrm{mod}\, 30)\ ,$$

што и требаше да се докаже.

6. Нека p е прост број. Докажи дека за секој $a \in \mathbb{N}$ важи

$$a^{(p-1)!+1} \equiv a\ (\mathrm{mod}\ p)\ .$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) $p \mid a$. Во овој случај

$$a^{(p-1)!+1} = a\cdot a^{(p-1)!} \equiv 0 \equiv a(\mathrm{mod}\, p)\ .$$

б) $p \nmid a$. Во овој случај, според малата теорема на Ферма имаме

$$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)\ .$$

Од својствата на конгруенции следува

$$(a^{p-1})^{(p-2)!} \equiv 1^{(p-2)!} = 1(\mathrm{mod}\, p)\ ,\ \text{т.е.}\ \ a^{(p-1)!+1} \equiv a\, (\mathrm{mod}\, p)\ .$$

7. Нека p е прост број. Докажи дека

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+...+(p-1)^{p-1} \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p)\ .$$

Решение. Бидејќи p е прост број, важи $(k,p)=1$ за $k=1,2,...,p-1$. Според малата теорема на Ферма добиваме

$$k^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)\ ,\ k=1,2,....,p-1\ .$$

Сега

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} 1 = p-1 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)\ .$$

8. Нека p непарен е прост број. Докажи дека

$$1^p+2^p+3^p+...+(p-1)^p \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

Решение. Бидејќи p е прост број, важи $(k,p)=1$ за $k=1,2,...,p-1$. Според малата теорема на Фермат имаме

$$k^p \equiv k(\mathrm{mod}\, p)\ ,\ k=1,2,....,p-1\ .$$

Сега,

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{p(p-1)}{2} \pmod p.$$

Бидејќи p е непарен прост, $p-1$ е парен број и $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$. Според тоа, $\frac{(p-1)p}{2} \equiv p \equiv 0 \pmod p$ од каде добиваме

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod p.$$

9. Ако a е цел број таков што $(a,35)=1$, тогаш бројот

$$A=(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

е делив со 35. Докажи!

Решение. Бидејќи $5 \nmid a$ и 5 е прост број од малата теорема на Ферма следува $a^4 \equiv 1 \pmod 5$, т.е. $5 \mid (a^4-1)$ и затоа $5 \mid A$. Понатаму,

$$\begin{aligned} A &= (a^4-1)(a^4+15a^2+1) = (a^4-1)(a^4+14a^2+a^2+1) \\ &= 14a^2(a^4-1)+(a^2-1)(a^2+1)(a^4+a^2+1) \\ &= 14a^2(a^4-1)+(a^6-1)(a^2+1) \end{aligned}$$

Бидејќи $7 \nmid a$, повторно од малата теорема на Ферма следува $a^6 \equiv 1 \pmod 7$. Така $7 \mid (a^6-1)$ и $7 \mid 14$, па затоа $7 \mid A$. Конечно, од $5 \mid A$, $7 \mid A$ и $(5,7)=1$ следува $35 \mid A$.

10. Ако a е цел број кој не е делив со 3, тогаш $a^{13}-a \equiv 0 \pmod{2^{13}-2}$. Докажи!

Решение. Имаме: $2^{13}-2 = 2\cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Бидејќи множителите се заемно прости броеви доволно е да докажеме дека се исполнети конгруенциите

$$a^3-a \equiv 0 \pmod m, \text{ за } m=2,9,5,7 \text{ и } 13.$$

За $m=2,5,7$ и 13 точноста на последните конгруенции следува од малата теорема на Ферма. Навистина, ако $m \mid a$, тогаш очигледно е дека $a^{13}-a \equiv 0 \pmod m$. Ако $(a,m)=1$ тогаш $a^{m-1} \equiv 1 \pmod m$, од каде степенувајќи со степен $\frac{12}{m-1}$ добиваме $a^{12} \equiv 1 \pmod m$, па затоа

$$a^{13} \equiv a \pmod{m}.$$

Останува да го разгледаме случајот $m = 9$. Бидејќи a не е делив со 3, имаме $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, т.е. $a^2 = 1 + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Оттука,

$$a^6 = 1 + 9k + 27k^2 + 27k^3 \equiv 1 \pmod 9,$$

па затоа $a^{12} \equiv 1 \pmod 9$, т.е. $a^{13} \equiv a \pmod 9$.

11. Нека p е прост број и $p = 4k + 1, k \ge 1$ е природен број. Докажи дека важи $k^{2k} \equiv 1 \pmod p$.

Решение. Очигледно $(k, p) = 1$. Од малата теорема на Ферма следува дека $k^{4k} = k^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Значи, $p \mid (k^{2k} + 1)(k^{2k} - 1)$ и доволно е да докажеме дека $p \nmid (k^{2k} + 1)$, од што ќе следува дека $p \mid (k^{2k} - 1)$.

Нека претпоставиме дека $p \mid (k^{2k} + 1)$. Тогаш $k^{2k} \equiv -1 \equiv 4k \pmod p$ и од $(k, p) = 1$ добиваме дека $k^{2k-1} \equiv 2^2 \pmod p$. Ако двете страни на последната конгруенција ги степенуваме на степен $\frac{p-1}{2} = 2k$ добиваме $k^{2k(2k-1)} \equiv 2^{p-1} \pmod p$. Но, од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, па затоа $k^{2k(2k-1)} \equiv 1 \pmod p$. Конечно, од последната конгруенција и од $k^{2k} \equiv -1 \pmod p$ добиваме дека $p = 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

12. Докажи дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}} + 19$ е сложен.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, па затоа $2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$, што значи дека бројот $2^{10n+1} - 2$ е дели со 22, т.е. $2^{10n+1} = 22k + 2$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Оттука, повторно од малата теорема на Ферма следува дека:

$$2^{2^{10n+1}} = 2^2 (2^{22})^k \equiv 4 \cdot 1^k \equiv 4 \pmod{23},$$

па затоа $23 \mid (2^{2^{10n+1}} + 19)$. Конечно, бидејќи $2^{2^{10n+1}} + 19 > 23$, за $n \ge 1$ добиваме дека за секој природен број n бројот $2^{2^{10n+1}} + 19$ е сложен.

13. Ако p е прост број, тогаш $7p+3^p-4$ не е точен квадрат. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека p е прост број поголем од 3 и

$$m=7p+3^p-4$$

е точен квадрат. Нека $m=n^2$ за некој $n\in\mathbb{Z}$. Од малата теорема на Ферма следува дека

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-4\equiv -1(\bmod p).$$

Ако $p=4k+3$, $k\in\mathbb{Z}$, тогаш повторно од малата теорема на Ферма добиваме дека

$$-1\equiv m^{2k+1}\equiv n^{4k+2}=n^{p-1}\equiv 1(\bmod p),$$

што е противречност. Така $p\equiv 1(\bmod 4)$. Тогаш

$$m=7p+3^p-4\equiv 3-1\equiv 2(\bmod 4),$$

што е противречност, бидејќи точен квадрат не е конгруентен со 2 по модул 4. За $p=2$ добиваме $m=19$, и за $p=3$ добиваме дека $m=44$, што значи дека и во двата случаи $m=7p+3^p-4$ не е точен квадрат.

14. Докажи дека секој прост број p е делител на бесконечно многу броеви од видот 2^n-n.

Решение. Ако $p=2$, тогаш за $n=2k$ броевите од видот $2^{2k}-2k$ се деливи со $p=2$. Нека претпоставиме дека p е непарен прост број. Бидејќи $(2,p)=1$ според малата теорема на Ферма, добиваме дека $2^{p-1}\equiv 1\ (\bmod\ p)$. Тогаш за било кој природен број m важи

$$(2^{p-1})^m\equiv 1^m\ (\bmod\ p),$$

односно

$$2^{m(p-1)}\equiv 1\ (\bmod\ p). \qquad (1)$$

Нека m е природен број таков што $m\equiv -1\ (\bmod\ p)$. Тогаш

$$m(p-1)\equiv -1(p-1)=1\ (\bmod\ p) \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)\equiv 0\ (\bmod\ p).$$

Броеви m кои го исполнуваат условот $m\equiv -1\ (\bmod\ p)$ има бесконечно многу. Бидејќи $m\equiv -1\ (\bmod\ p)$ добиваме дека $p\,|\,(m+1)$, односно дека $m = pk - 1$ за некој природен број k. Обратно, секој број од видот $m = pk - 1$ го исполнува условот $m \equiv -1 \pmod{p}$.

Множеството $\{n = (pk-1)(p-1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ е бесконечно множество на природни броеви за кои е исполнет условот $p \mid (2^n - n)$.

15. Докажи дека за секој непарен прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p \mid (2^n n + 1)$.

Решение. Нека n е непарен прост број и

$$n = (p-1)(kp+1), \text{ за } k = 0,1,2,3,\dots .$$

Имаме $n \equiv -1 \pmod{p}$. Согласно со малата теорема на Ферма важи

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

и ако последната конгруенција ја степенуваме на степен $kp+1$, добиваме дека

$$2^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Според тоа,

$$2^n n + 1 \equiv (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \pmod{p}.$$

Но, $k = 0,1,2,3,\dots$, па затоа постојат бесконечно многу природни броеви n со бараното својство.

16. Докажи дека меѓу броевите $(2^{2n}+1)^2 + 2^2$, каде $n = 1,2,\dots$ има бесконечно многу сложени броеви.

Решение. Такви се на пример сите броеви од дадената низа за кои $n = 28k+1$, $k = 1,2,3,\dots$. Од малата теорема на Ферма имаме

$$2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$$

па за $k = 1,2,3,\dots$ важи

$$2^{2 \cdot 28k} \equiv 1 \pmod{29}.$$

Значи, за $n = 28k+1$ важи

$$(2^{2n}+1)^2 + 2^2 \equiv 25 + 4 \equiv 0 \pmod{29},$$

т.е $29 \mid (2^{2n}+1)^2 + 2^2$ при што, бидејќи за секој природен број k важи $n = 28k+1 \geq 29$, следува дека $(2^{2n}+1)^2 + 2^2 > 29$. Оттука следува дека броевите $(2^{2n}+1)^2 + 2^2$, за $n = 28k+1$, каде $k = 1,2,3,\dots$ се сложени.

17. Ако p е прост број, тогаш $p\,|\,\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p}-123456789$. Докажи!

Решение. За $p=2,\ p=3,\ p=5$ тврдењето непосредно следува од признаците за деливост со броевите 2,3 и 5. Нека $p>5$. Тогаш имаме

$$N=\underbrace{11...1}_{p}\underbrace{22...2}_{p}...\underbrace{99...9}_{p}-123456789$$

$$=(10^p-1)+\tfrac{8}{9}10^p(10^p-1)+\tfrac{7}{9}10^{2p}(10^p-1)+...+\tfrac{1}{9}10^{8p}(10^p-1).$$

Од малата теорема на Ферма следува дека

$$10^p-1\equiv 10-1=9(\text{mod }p),$$

односно

$$\tfrac{10^p-1}{9}\equiv 1(\text{mod }p),$$

па затоа

$$\begin{aligned}N&\equiv 9+8\cdot 10^p+7\cdot 10^{2p}+...+10^{8p}\\&\equiv 9+8\cdot 10+7\cdot 10^2+...+10^8\\&=123456789(\text{mod }p),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

18. Определи го петцифрениот број n со најмал можен збир на цифрите со кои е запишан и е таков што 2556 е делител на n^3-1.

Решение. Имаме $2556=2^2\cdot 3^2\cdot 71\,|\,n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$. Ќе докажеме дека $n-1$ е делив со $852=2^2\cdot 3\cdot 71$. Бидејќи $4\,|\,(n-1)(n^2+n+1)$ и n^2+n+1 е непарен број, заклучуваме дека $4\,|\,n-1$. Ако n^2+n+1 е делив со 3, тогаш $n\equiv 1(\text{mod}\,3)$, т.е. $3\,|\,n-1$. Конечно, од $n^3\equiv 1(\text{mod}\,71)$ и од малата теорема на Ферма следува $n\equiv (n^3)^{23}n=n^{70}\equiv 1(\text{mod}\,71)$.

Сега бараме петцифрен број од видот $852k+1$ со најмал можен збир на цифрите. Бидејќи цифрата на единиците на бројот $852k$ не е 9, всушност бараме број од видот $852k$ со најмал можен збир на цифри. Еден кандидат е бројот $23100=4\cdot 3\cdot 71\cdot 25$, кој е најдобар меѓу броевите кои завршуваат на 00. Ако има подобар број, тогаш збирот на цифрите ќе биде помал од 6 и последните две цифри ќе даваат број кој е делив со 4. Можни случаи се $\overline{abc04},\overline{abc12},\overline{abc20},\overline{abc32},\overline{abc40}$, при што збирот $a+b+c$ е таков што нашиот број е делив со 3. Лесно се добива дека единствена можност е $a+b+c=1$, т.е. бројот 10020, но овој број не е делив со 71.

19. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на 2^n-8 и кои имаат најмалку три различни прости делители.

Решение. Ќе докажеме дека броевите од видот $n=2^{2p}-1$, каде $p>3$ е прост број ги имаат саканите својства. Од $n=(2^p-1)(2^p+1)$, $3\,|\,2^p+1$, $(2^p-1,2^p+1)=1$ и фактот дека $2^p+1\neq 3^k$ (Докажи!), следува дека бројот $n=2^{2p}-1$ има најмалку три прости делители.

Понатаму, $n\,|\,2^n-8$ ако и само ако $2^{2p}-1\,|\,8(2^{n-3}-1)$ ако и само ако $2p\,|\,n-3$. Но, од малата теорема на Ферма следува

$$n-3=2^{2p}-4=4^p-4\equiv 0(\bmod p).$$

20. Определи ги сите природни броеви a со следново својство: за секој непарен прост број p постои природен број n таков што a^n-n и $a^{n+1}-n-1$ се деливи со p.

Решение. Да претпоставиме дека a има непарен прост делител p. Тогаш од условот следува дека p е делител на n и $n+1$, што е противречност. Ако $a=1$, тогаш од условот следува дека p е делител на n и $n-1$. Нека $a=2^k, k\geq 2$. Тогаш бројот $a-1$ има непарен прост делител p, т.е. $a\equiv 1(\bmod p)$. Од условот следува дека $1-n\equiv 0(\bmod p)$ и $-n\equiv 0(\bmod p)$, што е противречност. Нека $a=2$. За простиот број p земаме $n=(p-1)^2$. Тогаш $n\equiv 1(\bmod p)$ и од малата теорема на Ферма следува

$$2^n\equiv (2^{p-1})^{p-1}\equiv 1\equiv n(\bmod p).$$

Оттука добиваме

$$2^{n+1}\equiv 2n\equiv n+1(\bmod p),$$

со што задачата е решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S.; Kolev, E.; Mushkarov, O.; Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
2. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
3. Stojanović, V.: Matematiskop 2, Naučna knjiga, Beograd, 1985
4. Stojanović, V.; Zolić, A.: Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DMS, Beograd, 1991
5. Tonov, I., Bankov, K., Vitanov, T., Rakovska, D.: Bulgarian Mathematics Competitions, Selected Problems, Regalia, Sofia, 2001
6. Tošić, R.: Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd, 1990
7. Tošić, R.; Vukoslavčević, V.: Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
8. Zolić, A.: Zbirka rešenih konkursnih zadataka, Matematički list, Beograd, 1990
9. Андрић, В.: Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 2006
10. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В.: 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд, 1997
11. Аневска, К. (2019). Питагорови тројки, Нумерус, Скопје
12. Аневска, К., Малчески, Р. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје
13. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
14. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, 1972
15. Граврилов, Ј.; Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1977
16. Дуденков, С.; Чакьрян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
17. Зубелевич, Г. И.: Сборник задач московских математических олимпиад, Просвещение, Москва, 1967
18. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990

19. Малчески, А., Аневска, К. (2019). Метод на Ферма за решавање Диофантови равенки, Нумерус, Скопје
20. Малчески, Р. (2012). Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје
21. Малчески, Р. (2019). Математички талент 7 (олимписки теми – прв дел, алгебра и теорија на броеви), Армаганка, Скопје
22. Малчески, Р. (2020). Решавање на некои нелинеарни Диофантови равенки, Армаганка, Скопје
23. Малчески, Р., Аневска, К. (2012). Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје
24. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
25. Малчески, Р., Аневска, К., Малчески, С. (2019). Математички талент 5 (збирка задачи за VIII одделение), Просветно дело, Скопје
26. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
27. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С. (2019). Математички талент 11 (олимписки теми – трет дел), Армаганка, Скопје
28. Малчески, Р., Малчески, С., Аневска, К. (2020). Математички талент 6 (збирка задачи за IX одделение), Просветно дело, Скопје
29. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
30. Мићић, В., Каделбург, З.: Увод у теорији бројева, ДМС, Београд, 2001
31. Тошић, Р., Вукосавчевић, В.: Елементи теорије бројева, Алеф, Нови сад, 1995