ЈБМО 1998

1. Докажи дека бројот $\underbrace{11...11}_{1997}1\underbrace{22...22}_{1998}25$ е точен квадрат.

Решение. Имаме:

$$\underbrace{11...11}_{1997}1\underbrace{22...22}_{1998}25=\underbrace{11...111}_{1997}\cdot 10^{1999}+\underbrace{22...222}_{1998}\cdot 10+5$$

$$=\frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999}+2\cdot\frac{10^{1998}-1}{9}\cdot 10+5$$

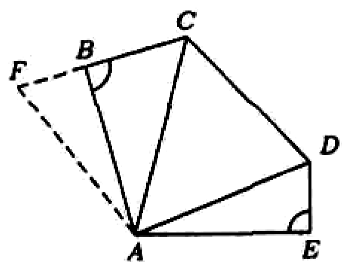
$$=\frac{1}{9}(10^{3996}-10^{1999}+2\cdot 10^{1999}-20+45)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{3996}+2\cdot 5\cdot 10^{1998}+25)=\frac{1}{9}(10^{1998}+5)^2$$

$$=(\frac{10^{1998}+5}{3})^2=(\underbrace{33...33}_{1997}5)^2.$$

2. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{CD}=1$, $\measuredangle ABC=\measuredangle DEA=90^\circ$ и $\overline{BC}+\overline{DE}=1$. Определи ја плоштината на петаголникот $ABCDE$.

Решение. На продолжението на страната BC преку точката B конструираме точка F таква што $\overline{BF}=\overline{DE}$. Тоа значи, $\triangle AED\cong\triangle ABF$, па затоа плоштината на петаголникот $ABCDE$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $ADCF$. Понатаму,



$$\overline{CD}=1=\overline{CB}+\overline{BF}=\overline{CF},\ \overline{AD}=\overline{AF} \text{ и } \overline{AD}=\overline{AD},$$

па затоа $\triangle ADC\cong\triangle AFC$. Сега, бидејќи $P_{\triangle AFC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CF}}{2}=\frac{1}{2}$, заклучуваме дека $P_{ABCDE}=P_{ADCF}=2P_{\triangle AFC}=1$.

Забелешка. Задачата може да се реши со примена на Питагоровата теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

3. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^y=y^{x-y}.$$

Решение. Бидејќи x и y се природни броеви, заклучуваме дека $x^y=y^{x-y}$ е природен број. Затоа $x-y\geq 0$. Ако $x=y$, тогаш

$x^x = y^0 = 1$, па затоа $x = y = 1$. Ако $x > y$, тогаш $x \geq y+1$, па затоа $\frac{x^y}{y} = y^{x-y-1} \in \mathbb{N}$. Според тоа, $y \mid x$, односно $x = ky, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Оттука добиваме $(ky)^y = y^{ky-y} = (y^{k-1})^y$, па затоа $ky = y^{k-1}$, т.е. $k = y^{k-2}$ и оттука $x = ky = y^{k-1}$. Според тоа, можни се следниве случаи:

1) $k = 2$, па затоа $k = y^{k-2} = 1$, што не е можно,

2) $k = 3$, па затоа $3 = y^{3-2} = y$ и $x = y^{k-1} = 9$,

3) $k = 4$, па затоа $4 = y^{4-2} = y^2$, т.е. $y = 2$ и $x = y^{k-1} = 8$,

4) $k \geq 5$, па затоа $k = y^{k-2}$, па е $y \geq 2$. Бидејќи за $k \geq 5$ важи $2^{k-2} \geq k$ заклучуваме дека равенката нема други решенија.

Значи, $(x, y) \in \{(1,1), (8,2), (9,3)\}$.

4. Дали е можно користејќи само три цифри да се запишат 16 трицифрени броеви такви што меѓу нив да нема два броја кои при делење со 16 даваат ист остаток.

Решение. Да претпоставиме дека може да запишеме 16 такви броеви. Јасно, осум од обие броеви мора да се парни, а преостанатите мора да се непарни. Оттука следува дека цифрите не може сите да бидат парни или сите да бидат непарни. Ќе го разгледаме случајот кога дадените цифри се две парни и една непарна. Случајот две непарни и една парна цифра се разгледува аналогно. Со дадените цифри можеме да запишеме девет непарни трицифрени броеви $\overline{a_1 k}, \overline{a_2 k}, ..., \overline{a_9 k}$, при што $a_1, a_2, ..., a_9$ се двоцифрени броеви и k е дадената непарна цифра. Јасно, разликата $\overline{a_i k} - \overline{a_k k}$ е делива со 16 ако и само ако разликата $a_i - a_j$ е делива со 8. Меѓутоа, постојат само три двоцифрени непарни броеви, па затоа нема доволно (четири) различни непарни двоцифрени броеви кои би дале трицифрени броеви со различни остатои при делење со 16. Значи, не можеме да запишеме такви 16 трицифрени броеви.