МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С4

збирка задачи за II година
втор дел

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С4
(збирка задачи за II година)

Скопје, 2019

Рецензенти:
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С4 : (збирка задачи за II година) / Ристо
Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 421 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Слаѓана Брсаковска, Зоран Мисајлески,
Томи Димовски. - Библиографија: стр. 415-421

ISBN 978-608-4904-87-8
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Брсаковска,
Слаѓана [автор] 4. Мисајлески, Зоран [автор] 5. Димовски, Томи [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111826186

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С4 е продолжение на книгите Математички талент С1 – С3 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од втора година од средното образование. Книгата, всушност, е вториот дел од збирката задачи за втора година и во овој дел се содржани 747 решени задачи и во четири одделни дела се обработени содржини од множества и комбинаторика, планиметрија, стереометрија и геометриски неравенства. Притоа ВО ДЕЛОТ Планиметрија во одделни параграфи се разработени степенот на точка во однос на кружница, хомотетијата, инверзијата, пол и полара, како и низа класични теорема, кои од неразбирливи причини се изоставени во наставните содржини предвидени за учениците од средното образование. Токму затоа повеќето од овие теореми се целосно докажани, а низ систем задачи е дадена опсежна разработка на теориските знаења потребни решавање на задачи во кои примена наоѓаат хомотетијата, инверзијата, радикалните оски и радикалниот центар.

Како и во книгите *Математички талент* С1 – С3 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од планиметрија се распоредени во осумнаесет одделни делови, при што скоро сите делови се птопратени со соодветните теориски разгледувања.

Рецензентите, д-р Даниел Велинов, д-р Самоил Малчески и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите

ноември, 2019 г.

V МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРИКА

1. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ се природни броеви такви што $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n+1} \le 2n$. Докажи, дека постојат природни броеви a_i и a_j такви што $a_i \mid a_j$.

Решение. За произволен природен број a со $f(a)$ да го означиме најголемиот непарен делител на a, т.е. $a = 2^p f(a)$, каде $f(a)$ е непарен број. Дадените броеви се помали или еднакви на $2n$, па затоа од принципот на Дирихле следува дека постојат $i, j, 1 \le i < j \le n+1$ такви што $f(a_i) = f(a_j) = k$. Но, тогаш $a_i = 2^p k$ и $a_j = 2^q k$, каде $p < q$. Јасно, $a_i \mid a_j$.

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви такви што $1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$.

а) Докажи, дека за $n = 2k$ и $a_n \ne n+1$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

б) Докажи, дека за $n = 2k+1$ и $a_n \ne 2$ од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се изберат неколку чиј збир е еднаков на n.

Решение. а) Нека $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k, k = 1, 2, ..., n-1$. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку два од броевите $0, a_1 - a_n, S_1, S_2, ..., S_{n-1}$ даваат ист остаток при делење со n. Можни се следниве случаи:

1) $a_1 - a_n$ е делив со n. Тогаш $a_n = a_1 + kn$, па како $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n$ и $a_1 \ge 1$ добиваме дека $a_n \le 2n - (n-1) = n+1$. Освен тоа $a_n \ne n+1$, па затоа $a_n < n+1$. Значи, $a_1 + kn < n+1$, од што заради $a_1 \ge 1$ следува $k = 0$ и $a_1 = a_n$. Според тоа, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 2$, па бидејќи $n = 2k$ добиваме $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$.

2) $n \mid S_j - S_i$. Ако $j > i$, тогаш $nk = S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j < 2n$, па затоа $k = 1$ и $a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_j = n$.

3) S_i е делив со n и затоа $nk = S_i \le S_{n-1} = 2n - a_n < 2n$, т.е. $k = 1$, што значи дека $n = S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_i$.

4) $a_n - a_1$ и S_i даваат ист остаток при делење со n. Тогаш, ако $i = 1$ добиваме дека $a_1 - (a_1 - a_n) = a_n$ е делив со n. Но, $1 \le a_n < n+1$, па затоа $a_n = n$.

   Ако $i > 1$, тогаш $S_i - (a_1 - a_n) = a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n$ е делив со n и бидејќи
$$1 \le a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n \le 2n - a_1 < 2n$$
   добиваме $a_2 + a_3 + ... + a_i + a_n = n$.

б) Постапи аналогно како во решението на задачата под а).

3. Докажи, дека постои степен на бројот 3 чиј запис во декаден броен систем завршува на 0001.

Решение. Нека $a_i = 3^i, i = 1, 2, \ldots$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$ такви што $10^4 \mid 3^q - 3^p$, т.е. $10^4 \mid 3^p(3^{q-p} - 1)$. Меѓутоа, $\text{NZD}(10^4, 3^p) = 1$, па затоа $10^4 \mid 3^{q-p} - 1$, т.е. постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $3^{q-p} = 10^4 n + 1$, што значи дека декадниот запис на 3^{q-p} завршува на цифрите 0001.

4. Определи го најголемиот број A со следново својство: ако броевите 1, 2, ..., 1000 се запишат во произволен редослед, тогаш постојат 50 последователни броеви такви што нивниот збир е поголем или еднаков на A.

Решение. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ е произволно подредување на броевите од 1 до 1000. Да означиме

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{50},\ S_2 = x_{51} + x_{52} + \ldots + x_{100}, \ldots, S_{20} = x_{951} + x_{952} + \ldots + x_{1000}.$$

Бидејќи $S_1 + S_2 + \ldots + S_{20} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$, од принципот на Дирихле следува дека постои i таков што $S_i \geq \frac{500500}{20} = 25025$.

Од друга страна, ако бројот B го има саканото својство тогаш $B \leq 25025$. Навистина, за подредувањето 1000, 1, 999, 2, 998, 3, ..., 500, 501 важи: ако првиот меѓу последователните 50 броеви е поголем од 500, тогаш нивниот збир е 25025, а ако првиот меѓу последователните 50 броеви е помал од 500, тогаш нивниот збир е 25000.

5. Меѓу 11 произволни бесконечни децимални броеви секогаш можат да се најдат два кои се поклопуваат на бесконечно многу места.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека овие децимални броеви се наоѓаат во интервалот (0,1). Нека избраните броеви се:

$$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots a_k^{(1)} \ldots$$
$$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots a_k^{(2)} \ldots$$
....
$$x_{11} = 0, a_1^{(11)} a_2^{(11)} a_3^{(11)} \ldots a_k^{(11)} \ldots$$

Ги разгледуваме цифрите после децималната запирка $a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(11)}$ кои примаат вредности од множеството $\{0,1,2,\ldots,9\}$, па затоа барем две од нив се еднакви. Слично заклучуваме дека некои две меѓу цифрите $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(11)}$ се меѓу себе еднакви, каде k е произволен природен број.

Нека $S_{ij} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n^{(i)} = a_n^{(j)}, i < j, i, j = 1, 2, \ldots, 11\}$.

Јасно, $\mathbb{N} = \cup S_{ij}$. Според принципот на Дирихле едно од множествата S_{ij} е бесконечно. Ова значи дека x_i и x_j се совпаѓаат на бесконечно многу места.

6. Нека $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажи, дека постојат $p, q \in \mathbb{Z}$ такви што $1 \leq q \leq n$ и

$$|x-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{nq}.$$

Решение. Да ги разгледаме броевите $kx-[kx], k=0,1,2,...,n$, кои припаѓаат на интервалот $[0,1]$. Интервалот $[0,1]$ го делиме на n интервали $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$ со должина $\frac{1}{n}$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја $k\neq l$, $k,l\in\{0,1,2,...,n\}$ такви што $kx-[kx]$ и $lx-[lx]$ лежат во ист интервал, па затоа

$$|kx-[kx]-lx-[lx]|\leq\frac{1}{n}, \text{ т.е. } |(k-l)x-([kx]-[lx])|\leq\frac{1}{n}.$$

Нека $k>l, 0\leq k,l\leq n$. Ставаме $q=k-l$ и $p=[kx]-[lx]$. Тогаш p и q се цели броеви за кои важи $|qx-p|\leq\frac{1}{n}$, т.е. важи $|x-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{nq}$.

7. (*Теорема на Кронекер*). Нека α е ирационален број и $x,y\ (x<y)$ се реални броеви. Докажи, дека постојат цели броеви m и n такви што

$$x<m\alpha+n<y.$$

Решение. Нека $x<y$ и $\delta=y-x$. Интервалот $[0,1]$ го делиме на конечен број интервали $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_k$ чии должини се помали од δ. Понатаму, ако $m\in\mathbb{Z}$, тогаш за $n=-[m\alpha]$ важи

$$m\alpha+n=m\alpha-[m\alpha]=\{m\alpha\}\in[0,1].$$

Множеството $\mathbb{Z}$ е бесконечно, а множеството интервали $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_k$ е конечно, па затоа постојат цели броеви $m_1,m_2\ (m_1\neq m_2)$ такви што броевите $m_1\alpha+n_1$ и $m_2\alpha+n_2$ припаѓаат на ист интервал Δ_t. Според тоа,

$$|(m_1-m_2)\alpha+n_1-n_2|=|(m_1\alpha+n_1)-(m_2\alpha+n_2)|<\delta.$$

Од друга страна, ако претпоставиме дека $m_1\alpha+n_1=m_2\alpha+n_2$, добиваме дека $\alpha=\frac{n_1-n_2}{m_2-m_1}\in\mathbb{Q}$, што е противречност. Нека $m_1-m_2=m^*, n_1-n_2=n^*$. Да ги разгледаме броевите од видот $km^*\alpha+kn^*, k\in\mathbb{Z}$. Јасно, постои $k_0\in\mathbb{Z}$ таков што

$$k_0m^*\alpha+k_0n^*\leq x<(1+k_0)m^*\alpha+(1+k_0)n^*$$

и притоа важи

$$(1+k_0)m^*\alpha+(1+k_0)n^*<y,$$

т.е. бараните броеви се $(1+k_0)m^*$ и $(1+k_0)n^*$. (Во претходните разгледувања претпоставивме дека $m^*\alpha+n^*>0$.)

8. Нека $p_1,p_2,...,p_n$ се различни прости броеви и

$$M=\{m\,|\,m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}, a_i\in\mathbb{N}_0\}$$

и N е 2^n+1 елементно подмножество од M. Докажи, дека постојат два различни броја од N чиј производ е точен квадрат.

Решение. Бројот $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}\in M$ е точен квадрат ако и само ако сите броеви a_i се парни. На секој број $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}$ од N му придружуваме подредена $n-$торка $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ од остатоците по модул 2 на броевите $a_1,a_2,...,a_n$, т.е. $\alpha_i=0,1,\ \alpha_i\equiv a_i(\bmod 2)$. Подредени $n-$торки од нули и единици има 2^n, па како N има 2^n+1 елементи, од принципот на Дирихле следува дека најмалку за два броја од N овие $n-$торки се совпаѓаат, т.е. постојат $m_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n}$, $m_2=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_n^{b_n}$ такви што $a_i\equiv b_i(\bmod 2)$ за $i=1,2,...,n$. Последното значи дека бројот

$$m_1m_2=p_1^{a_1+b_1}p_2^{a_2+b_2}...p_n^{a_n+b_n}$$

е точен квадрат.

9. Нека $p_1,p_2,...,p_n$ се различни прости броеви,

$$M=\{m\,|\,m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n},\ a_i\in\mathbb{N}_0\}.$$

и N е подмножество од M такво што $|N|=n+1$. Докажи, дека постојат неколку различни броеви од N чиј производ е точен квадрат.

Решение. Нека $N=\{m_1,m_2,...,m_{n+1}\}$. Да ги разгледаме сите производи од видот $m_{i_1}m_{i_2}...m_{i_k}$, $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n+1$. Нивниот број е еднаков на 2^{n+1}, па од принципот на Дирихле следува дека постојат производи

$$m_{i_1}m_{i_2}...m_{i_k}=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_n^{a_n},$$

$$m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_l}=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_n^{b_n},$$

такви што $a_i\equiv b_i(\bmod 2)$ за $i=1,2,...,n$, т.е. $(m_{i_1}m_{i_2}...m_{i_k})(m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_l})$ е точен квадрат. Ако од последниот производ ги отстраниме броевите m_s кои истовремено учествуваат и во $m_{i_1}m_{i_2}...m_{i_k}$ и во $m_{j_1}m_{j_2}...m_{j_l}$, повторно добиваме точен квадрат, со што е докажано тврдењето на задачата.

10. Докажи, дека во произволна група луѓе постојат најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници. Познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B, тогаш B го познава A.

Решение. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ е множество од n луѓе. За секој $i\in\{0,1,2,...,n-1\}$ со A_i да го означиме подмножеството од S составено од оние луѓе ои имаат i познаници. Ако постои човек кој нема ниту еден познаник, тогаш не постои човек кој има $n-1$ познаник, што значи дека ако $A_0\ne\varnothing$, тогаш $A_{n-1}=\varnothing$. Точно е и обратното тврдење, т.е. ако $A_{n-1}\ne\varnothing$, тогаш $A_0=\varnothing$. Според тоа, најмногу $n-1$ од множествата A_i, $i=0,1,...,n-1$ се непразни. Но, $|S|=n$, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку едно од тие множества има барем два члена од S, што значи дека најмалку двајца кои меѓу членовите на таа група имаат еднаков број познаници.

11. Членовите на едно племе живеат не повеќе од 79 години и само оние кои наполниле 20 години можат да создаваат потомство. Во племето има 1986 луѓе. Докажи дека постојат 497 членови на племето од кои никој не е потомок на друг.

Решение. Бидејќи $\frac{79}{20} < 4$, следува дека секој член од тоа племе може да има најмногу три колена потомци. Членовите на племето можат да се разделат во четири дисјунктни класи. Во првата класа се сите членови кои немаат потомци. Во втората класа се сите членови кои имаат точно едно колено потомци. Во третата класа се сите членови кои имаат точно две колена потомци. Во четвртата класа се останатите членови на племето, т.е. оние членови кои имаат точно три колена потомци. Во секој од тие класи ниеден член не е потомок на друг член од истата класа, затоа што во спротивно, тие двајца би имале различен број на колена на потомци. Бидејќи $4 \cdot 496 < 1986$, следува, според принципот на Дирихле, дека постои барем една класа во кој има барем 497 членови.

12. На почетокот на месец декември еден ученик почнал да се подготвува за натпревар по математика кој бил закажан за почетокот на март следната година. Ученикот секој ден решавал најмалку по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица решавал најмногу 12 задачи. Докажи, дека во периодот на подготовките постојат неколку последователни деновиво кои ученикот решил точно 21 задача.

Решение. Со a_i да го означиме вкупниот број задачи кои ученикот ги решил од почетокот на подготовките до $i-$тиот ден, вклучувајќи го и тој ден. За низата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ важи $a_{i+1} \geq a_i + 1$, за $i = 1, 2, ...$. Од почетокот на месец декември до почетокот на месец март има најмалку 90 денови, па затоа оваа низа има најмалку 90 членови. Понатаму, секоја седмица ученикот решавал најмногу 12 задачи, па затоа $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$. Понатаму, низата $a_1 + 21, a_2 + 21, ..., a_{77} + 21$ ги има истите својства како и низата $a_1, a_2, ..., a_{77}$, а двете низи заедно имаат 154 членови, кои можат да бидат некои од броевите $1, 2, 3, ..., 132, 133, ..., 153 = 132 + 21$. Од принципот на Дирихле следува дека два члена од овие две низи се еднакви, а бидејќи двете низи се строго монотоно растечки, добиваме дека постојат p, q $(p < q)$ такви што $a_p + 21 = a_q$. Последното значи, дека во деновите $p+1, p+2, ..., q$ ученикот решил точно 21 задача.

13. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува најмногу на 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

Решение. Ќе докажеме дека има учесник кој се разбира со најмалку 992 од преостанатите учесници. Ако има учесник, кој се разбира со сите останати учесници, тогаш тој се разбира со $1984 > 992$ учесници. Нека претпоставиме дека два учесника A и B не се разбираат. Од условот на задачата следува дека секој од останатите 1983 учесници се разбира или со A или со B. Од принципот на Дирихле следува дека еден од нив (на пример A) се разбира со 992 учесници. Бидејќи тој говори најмногу 5 јазици и $\frac{992}{5} > 198$, заклучуваме дека барем 199 говорат еден ист јазик. Овие 199 учесници заедно со A ја формираат бараната група од најмалку 200 лица кои говорат еден ист јазик.

14. Во табла 17×17, во секое квадратче е запишан еден природен број од 1 до 17; секој број е запишан во точно 17 квадратчиња.

Докажи дека на таблата постои ред или колона во која се запишани најмалку 5 различни броеви.

Решение. Нека со I_n го означиме вкупниот број на редови и колони во кои се појавува бројот n $(n \in \{1,2,...,17\})$. Ќе докажеме дека $\forall n \in \{1,2,...,17\}$ важи $I_n \geq 9$. Навистина, ако некој број се појавува во x редови и y колони, тогаш тој не се појавува ниту еднаш надвор од пресекот на редовите со колоните. Затоа мора да важи $xy \geq 17$. Од неравенството $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ следува дека $I_n = x+y \geq 2\sqrt{17} > 8$. Бидејќи I_n е природен број, следува дека $I_n \geq 9$. Да го разгледаме сега збирот $S = I_1 + I_2 + ... + I_{17}$. Од претходното следува дека $S \geq 9 \cdot 17 = 153$.

Јасно е дека

$$I_1 + I_2 + ... + I_{17} = (r_1 + r_2 + ... + r_{17}) + (k_1 + k_2 + ... + k_{17}),$$

каде што r_i е бројот на различни броеви запишани во i-тата редица и k_i е бројот на различни броеви запишани во i-тата колона. Бидејќи

$$r_1 + r_2 + ... + r_{17} + k_1 + k_2 + ... + k_{17} \geq 153,$$

од принципот на Дирихле следува дека најмалку еден од собироците не е помал од $\frac{153}{34} = 4,5$. Бидејќи сите собироци r_i и k_i се природни броеви, следува дека редицата или колоната што соодветствува на собирокот кој не е помал од $4,5$ е бараната. Со тоа проблемот е решен.

15. Алекса направи список од 20 хокејарски тимови кои ги подредила според тоа колку се силни според него, но одбил да го покаже списокот. При секоја средба Бојан му кажува три тима и Алекса му кажува кој од нив е најслаб или кој е најсилен според неговиот список. Определи го најголемиот природен број N за кој Бојан може да гарантира наоѓање на низа од тимови $T_1, T_2, ..., T_N$ таква што според Алекса T_i е посилна од T_{i+1}, за секој $i \in \{1,2,..., N-1\}$.

Решение. Ќе докажеме дека $N = 10$ е најголемиот можен природен број.

Доказ дека $N \geq 10$. Треба да докажеме дека Бојан секогаш може да најде подреден список со должина 10. Парот тимови (t_x, t_y) ќе го наречеме проблематичен, ако независно од прашањата кои ги поставува Бојан не може да каже кој од нив според Алекса е посилен. Тогаш секој тиом t_x може да учествува најмногу во еден проблематичен пар: во спротивно ако (t_x, t_y) и (t_x, t_z) се два такви пара, Бојан може да праша за тимовите t_x, t_y, t_z и Алекса треба да каже нешто за барем еден од нив. Тоа значи дка ќе има најмногу 10 проблематични парови. Ако Бојан ги именува првите тимовите во проблематичните парови (a_i, b_i), тогаш сите тимови ќе се најдат во овие парови. Сега од пртходно изнесеното следува дека меѓу тимовите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ не може да има проблематичен пар, па затоа Бојан може да ги подреди по јачина.

Доказ дека $N \leq 10$. Ќе дадеме стратегија на Алекса, при која Бојан никогаш не може да најде ниту еден список од 11 тимови подредени по јачина. Нека подредеувањето на тимовите е $c_1, c_2, ..., c_{20}$, при што c_1 е најслабиот, а c_0 е њасилниот. Ако Бојан на Алекса му постави прашање во кое заедно со некој c_k

се вклучени тимовите c_{2i-1} и c_{2i}, за некој $i \in \{1,2,...,10\}$, тогаш Алекса ќе каже дека c_k е најслабиот или дека c_k е најлжсилниот. Во случајот Алекса никогаш нема да ги споредува c_{2i-1} и c_{2i}, а може да одговотри како сака на останатите прашања. Од принципот на Дирихле следува дека во секој список со должина 11 има два тима – едниот од видот c_{2i-1}, а другиот од видот c_{2i}, заклучуваме дека Бојан не може да каже кој од нив е подобар и затоа нема да може тимовите да ги подреди по јачина.

16. Група од 17 научници кореспондира меѓусебно - секој научник кореспондира со останатите 16. Во нивните кореспонденции тие пишуваат само на 3 теми. Секој пар научници кореспондира само на една тема. Докажи дека постојат тројца научници кои што кореспондираат меѓу себе на една иста тема.

Решение. Научниците ќе ги “гледаме” како темиња на граф. Секои две темиња се поврзани со ребро кое е обоено со една од боите црвена, жолта и сина, во зависност од темата на која еден пар научници меѓусебно се допишува. Треба да го докажеме следново: Постојат 3 темиња кои меѓусебно се поврзани со ребра со иста боја.

Избираме произволно теме А. Од него излегуваат 16 ребра, секое од нив е обоено со една од трите бои. Според Принципот на Дирихле, постојат 6 ребра со иста боја, да речеме црвена. Да ги разгледаме крајните точки на овие 6 ребра (А ја сметаме за почетна). Постојат 2 можности:

1) Постојат 2 точки (од 6-те крајни) кои се поврзани со ребро со црвена боја. Тогаш тие, заедно со А, формираат “црвен” триаголник (сите страни му се “црвени”).

2) Не постојат 2 точки поврзани со “црвено” ребро. Тогаш секои две се поврзани со ребро со жолта или сина боја. Нека В е едно од крајните темиња. Од него излегуваат 5 ребра кон другите “крајни” точки кои се обоени со жолта или сина боја. Според принципот на Дирихле, меѓу тие 5 ребра постојат 3 ребра со иста боја, да речеме сина. Да ги разгледаме сега “ крајните” точки на овие 3 ребра. Ако меѓу тие 3 точки постојат 2 поврзани со “сино” ребро, тогаш тие, заедно со темето В, формираат “син” триаголник, во спротивно формираат “жолт” триаголник.

Значи, во секој случај постои триаголник чии страин се обоени со иста боја. Со тоа тврдењето на задачата е докажано.

17. Во рамнината е дадено множество A од $n \geq 2$ точки, при што некои парови точки од A се поврзани со отсечки. Докажи, дека во A постојат најмалку две точки кои со отсечки се поврзани со еднаков број точки од A.

Решение. За произволна точка $x \in A$ со $v(x)$ да го означиме бројот на точките кои со x се поврзани со отсечка. Јасно, не постојат точки $a,b \in A$ такви што истовремено $v(a)=0$ и $v(b)=n-1$. Значи, $v(x)$ прима најмногу $n-1$ вредност, па бидејќи имаме n точки од принципот на Дирихле следува дека постојат две точки $x, y, x \neq y$ такви што $v(x)=v(y)$.

18. Докажи, дека ако една рамнинска фигура има плоштина поголема од 1, тогаш постојат две нејзини точки со координати (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такви што $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ се цели броеви.

Решение. Во секоја точка со целобројни координати повлекуваме прави паралелни со координатните оски, со што добиваме целобројна решетка која рамнината ја дели на квадрати со должина на страна еднаква на 1. Секој квадрат на оваа решетка, со помош на транслација од видот

$$x \to x - m, \quad y \to y - n, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

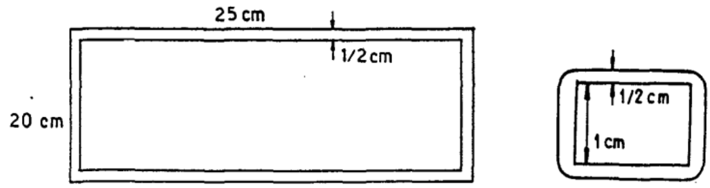
го пресликуваме во квадратот чии темиња се $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ и чија плоштина е еднаква на 1. Деловите од фигурата кои лежат во различните квадрати ќе се пресликаат на овој квадрат. Но разгледуваната фигура има плоштина поголема од 1, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку два од транслатираните делови ќе имаат заедничка точка (x_0, y_0). Во оваа точка се пресликани две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т.е. важи

$$x_1 \to x_1 - m_1 = x_0, \quad y_1 \to y_1 - n_1 = y_0, \text{ и}$$
$$x_2 \to x_2 - m_2 = x_0, \quad y_2 \to y_2 - n_2 = y_0.$$

Конечно, $x_2 - x_1 = m_2 - m_1 \in \mathbb{Z}$ и $y_2 - y_1 = n_2 - n_1 \in \mathbb{Z}$, што и требаше да се докаже.

19. Во правоаголник со страни $20cm$ и $25cm$ се сместени 120 квадрати со страна $1cm$ без притоа квадратите да се преклопуваат. Докажи, дека во правоаголникот може да се впише круг со дијаметар $1cm$ кој не сече ниту еден од квадратите.

Решение. Центарот на кругот со дијаметар $1cm$ сместен во правоаголникот мора да се наоѓа на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од секоја од страните на правоаголникот, т.е. во внатрешноста на помалиот правоаголник прикажан на левиот цртеж долу. Плоштината на овој правоаголник е еднаква на $19 \cdot 24 = 456cm^2$.



Освен тоа, центарот на кругот мора да е на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од секој квадрат, т.е. надвор од секоја фигура прикажана на десниот цртеж, чија плоштина е еднаква на $3 + \frac{\pi}{4}cm^2$. Максималната можна плоштина која ја зафаќаат сите 120 вакви фигури, под услов да не се сечат, е еднаква на

$$120(3 + \tfrac{\pi}{4}) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \cdot 3,2 = 456cm^2.$$

Според тоа, овие фигури не го покриваат внатрешниот правоаголник, па затоа постои точка која не лежи во ниту една од фигурите. Јасно, кругот со центар во оваа точка и дијаметар $1cm$ лежи во правоаголникот и не сече ниту еден од квадратите.

20. Нека се дадени n точки во рамнината така што растојанието меѓу било кои три од нив е најмногу 1. Ако m е најмало растојание меѓу две од дадените три точки, докажи дека $m < \frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}$.

Решение. Околу секоја од n-те точки опишуваме кружница со радиус $\frac{m}{2}$. Вкупната плоштина што ја покриваат вака добиените n кругови е $n\frac{m^2\pi}{4}$, затоа што овие кругови се допираат, а не се сечат. Околу една фиксно избрана точка опишуваме кружница со радиус $1+\frac{m}{2}$. Оваа кружница ги содржи сите n претходно споменати кругови. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(n-1)m^2-4m-4<0$. Решение на неравенката е секој m таков што $m\in(\frac{2(1-\sqrt{n})}{n-1},\frac{2(1+\sqrt{n})}{n-1})$. Значи $m<\frac{2(\sqrt{n}+1)}{n-1}$.

21. Рамностран триаголник ABC е покриен со пет помали рамнострани складни триаголници. Докажи, дека триаголникот ABC може да се покрие со четири од овие триаголници (дозволено е поместување на триаголниците).

Решение. Нека A_1,B_1,C_1 се средините на страните BC,CA,AB, соодветно, на триаголникот ABC. Според принципот на Дирихле еден од петте рамнострани складни триаголници покрива две од точките A,B,C,A_1,B_1,C_1, па затоа страната на овој триаголник не е помала од половината од страната на триаголникот ABC. Затоа секој од четирите рамнострани триагоници, на кои е разбиен триаголникот ABC, може да се покрие со еден од дадените пет триаголници.

22. Нека $P=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{0,1,2,...,2015\}\}$ е множество точки во рамнината. Во рамнината се поставени неколку хоризонтални и неколку вертикални отсечки, секоја со единечна должина, така што крајните точки на овие отсечки припаѓаат на P, секоја точка од P е крајна точка на барем една отсечка и никои две отсечки немаат заеднички крај.

Докажи дека постои хоризонтална или вертикална права која минува низ средините на барем 506 отсечки.

Решение. Бидејќи има 2016^2 точки во P, вкупно имаме $\frac{2016^2}{2}$ отсечки. Секоја вертикална отсечка има долен крај на правата $y=i$ за некој $i=0,1,2,...,2014$ и секоја хоризонтална отсечка има лев крај на правата $x=j$ за некој $j=0,1,2,...,2014$. Од принципот на Дирихле следува дека има најмалку $[\frac{2016^2}{2\cdot2\cdot2015}]$ паралелни отсечки чии леви (долни) краеви лежат на една иста права. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се вертикални отсечки и долниот крај е на правата $y=i*$.

Да претпоставиме дека овие отсечки се точно 505 и нека тие се $r_1,r_2,...,r_{505}$. Да забележиме дека има точно $2016(2016-i-1)$ точки од P кои се над правата $y=i*$. Точно 505 од овие точки се горните краеви на $r_1,r_2,...,r_{505}$, а другите може да се распоредат во парови краеви на отсечки над правата $y=i*$. Последното не е можно бидејќи $2016(2016-i-1)-505$ е непартен број.

Според тоа има најмалку 506 вертикални отсечки со долен крај на правата $y=i*$. Сега е јасно дека правата $y=i*+\frac{1}{2}$ го задоволува условот на задачата.

23. Нека A е дел од единичната сфера и нека плоштината на A е поголема од 2π. Докажи, дека A содржи две дијаметрално спротивни точки.

Решение. Нека претпоставиме дека A не содржи пар дијаметрално спротивни точки. Со A' да го означиме множеството дијаметрално спротивни точки на точките од A. Тогаш A и A' имаат еднакви плоштини, т.е. $P_A = P_{A'}$. Меѓутоа, $A \cap A' = \varnothing$ и затоа $P_{A\cup A'} = P_A + P_{A'}$. Понатаму, ако со S ја означиме единичната сфера, тогаш $A \cup A' \subseteq S$, па затоа

$$4\pi = P_S \geq P_{A\cup A'} = P_A + P_{A'} = 2P_A > 2\cdot 2\pi = 4\pi$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека A содржи две дијаметрално спротивни точки.

24. Во секое поле на квадратна табла $2n\times 2n$ $(n\in\mathbb{N})$ е наоѓа по една сијалица која може да биде запалена или изгасена. Во еден чекор можеме да избереме ред во кој барем n сијалици се запалени (под "ред" подразбираме било кој ред или или колона), и на сите сијалици во тој ред да ја промениме состојбата (запалените да ги изгасниме, а изгаснатите да ги запалиме).

а) Докажи дека постои почетен распоред на сијалиците таков што, без разлика на редот на чекорите секогаш ќе останат најмалку $2n(n-1)$ запалени сијалица.

b) Доказажи дека секогаш може во конечен број чекори да се постигне најмногу $2n(n-1)$ сијалици да бидат запалени.

Решение. а) Да ги означиме редовите и колоните со редните броеви $1,2,...,2n$. Ако во почетниот распоред сијалицата во полето на i-тиот ред и j-тата колона е запалена ако и само ако $j\in\{i+1,i+2,...,i+n-1\}$, запалени се точно $2n(n-1)$ сијалици, а со ниту еден чекор не може да се намали бројот на запалените сијалици.

b) Нека претпоставимо дека има повеќе $2n(n-1)$ запалени сијалици, а дека нивниот број не може да се намали со низа чекори. Јасно, тогаш во ниту еден ред не може да има повеќе од n запалени сијалици - во спротивно чекорот на тој ред ќе го намали бројот на запалените сијалици.

Редот го нарекуваме *добар* ако во него има точно n запалени сијалици. Од принципот на Дирихле следува дека постојат барем по една добра редица и добра колона. Нека a е бројот на добрите редици, а b е бројот на добрите колони. Сијалицата во пресекот на добра редица и добра колона мора да биде запалена – во спротивно, ако примениме чекор на добрата редица, колоната која претходно беше добра ќе има $n+1$ запалени сијалици, што претходно видовме дека не е можно.

Да ги промениме состојбите во сите a добри редици. Во колоните кои беа добри, a сијалици се гасат, па остануваат $n-a$ запалени. Од друга стране, се појавува определен број c нови добри колони. Во секоја од преостанатите $2n-b-c$ колони има најмногу $n-1$ запалена сијалица. Значи, има најмногу

$$b(n-a)+cn+(2n-b-c)(n-1) = 2n(n-1)+b+c-ab$$

запалени сијалици. Според тоа $b+c>ab$. Ако истата постапка ја примениме на новиот распоред добиваме дека $b+c>ac$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $a<2$, т.е. точно една редица е добра. Значи, сите останати редици содржат точно по $n-1$ запалена сијалица. Меѓутоа, тогаш со примена на чекорот на било која добра колона најмалку n редици ќе ги направиме добри, што противречи на нашите разгледувања.

25. Квадратна 4×4 табла е разделена на 16 единечни квадратчиња, кои ги нарекуваме полиња. Таблата е покриена со 13 домина со димензии 1×2 така што секое од двете полиња на домината покрива точно едно поле на таблата. Докажи, дека едно од домината може да се отстрани и таблата да остане покриена.

Решение. Бидејќи $13\times2=26>16$, очиглено е дека некои од полињата на домината се препокриваат. Од таа гледна точка постојат два случаја на распоредување на домината. Ако меѓу 13-те домина има едно, чии две половинки се препокриваат со други домина, тогаш очигледно тоа домино може да биде отстрането и задачата е решена. Во вториот случај важи спротивното, т.е. за секое од 13-те домина барем едната половинка не се препокрива со друго домино. Значи, сега имаме 13 половинки, кои покриваат точно 13 полиња на таблата и не се препокриваат со други половинки. Останатите 3 полиња на таблата $(4\cdot4=16$ и $16-13=3)$ се покриваат со другите 13 половинки. Од принципот на Дирихле следува, дека барем едно од тие 3 полиња е покриено со најмалку 5 половинки, т.е. во покривањето на такво поле од таблата учествуваат најмалку 5 домина. Но, едно поле од таблата може со домина да се покрие најмногу на четири различни начина и тоа: слободната половинка на доминото е налево, надесно, нагоре или надолу. Значи, барем две домина целосно се препокриваат и едното од нив може да биде отстрането.

26. Определи ги сите природни броеви n, за кои во секое од единечниге квадратчиња на квадратна табла со димензии $n\times n$ може да се запише по еден од броевите $-1, 0$ или 1, но така што сите $2n$ збирови на броевите запишани во колоните и редиците се различни.

Решение. Одговор: за секој парен број таков распоред е можен.

Нека е дадена квадратна табла со димензии $n\times n$ така што во секое нејзино поле е запишан еден од броевите $-1, 0$ или 1, т.е. нека $[a_{ij}]_{n\times n}$ е квадратната табла при што $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$, која го исполнува условот од задачата. Најголем збир кој може да се појави во некоја колона или редица е n, а најмал која може да се појави е $-n$. Според тоа можни збирови се сите броеви од множеството

$$\{-n,-(n-1),-(n-2),...,-2,-1,0,1,2,...,n-2,n-1,n\}.$$

Според принципот на Дирихле некој од овие броеви не е збир, бидејќи сите $2n$ збирови се меѓу себе различни. Нека $r_1,r_2,...,r_n$ се збирови по редици, а $c_1,c_2,...,c_n$ се збирови по колони. Нека бројот на ненегативни збирови во редиците е k. Тогаш според условот на задачата бројот на ненегативни збирови по колони е еднаков на $n-k$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1,r_2,...,r_k$ се ненегативни, т.е. во првите k редици збировите се ненегативни, и дека $c_1,c_2,...,c_{n-k}$ се исто така позитивни, т.е. во првите $n-k$ колони збировите се ненегативни. Ако тоа не е така ќе извршиме преместување на редиците и потоа преместување на колоните, при што збировите ниту по редици ниту по колони нема да се променат.

За таквиот распоред имаме

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j|\geq \sum_{r=-n}^{n}|r|-n=-n+2\tfrac{n(n+1)}{2}=n^2. \qquad (1)$$

Од друга страна

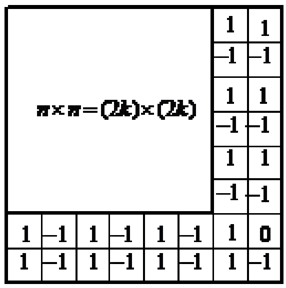
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j| &= \sum_{i=1}^{k}r_i-\sum_{i=k+1}^{n}r_i+\sum_{j=1}^{n-k}c_j-\sum_{j=n-k+1}^{n}c_j\\ &=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\\ &=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=1}^{k}a_{ij} \qquad (2)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}-\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}\\ &=2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k}a_{ij}-2\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_{ij}\leq 2k(n-k)+2k(n-k)=4k(n-k)\end{aligned}$$

1	0
1	−1

Цртеж 1

1	0	1	1
1	−1	−1	−1
1	−1	1	0
1	−1	1	−1

Цртеж 2



Цртеж 3

Од (1) и (2) добиваме $n^2\leq 4nk-4k^2$, кое е еквивалентно со $(n-2k)^2\leq 0$. Последното неравенство е можно ако и само ако $n=2k$.

Со помош на математичка индукција може да се докаже дека за секој парен природен број $n=2k$ таков распоред е можен. На цртеж 1 и цртеж 2 дадени се такви распореди за $n=2$ и $n=4$. За индуктивниот чекор на цртеж 3 е даден начинот на кој треба да се дополни квадратната табла со димензии $2k\times 2k$ со две нови редици и две нови колони за да се добие бараниот резултат. Притоа збировите на броевите по колони и по редици во квадратната табла со димензии $(2k)\times(2k)$ се даден со

$$c_1=n, c_2=-n+1, c_3=n-2, c_4=-n+3, ...c_{n-2}=-3, c_{n-1}=2, c_n=-1$$

$$r_1=n-1, r_2=-n+2, r_3=n-3, r_4=-n+4, ..., r_{n-2}=-2, r_{n-1}=1, r_n=0 .$$

2. МНОЖЕСТВА

1. Множеството десетцифрени природни броеви запишани со цифрите 1 и 2 претстави го како унија од две дисјункти непразни множества така што збирот на два различни броја од исто подмножество има барем две тројки.

Решение. Да избереме едното подмножество да ги содржи сите десетцифрени природни броеви запишани со цифрите 1 и 2, кои во својот запис имаат парен број единици, а другото-останатите броеви. Тие подмножества да ги означиме со A и B, соодветно. Нека $x, y \in A$ и $x \neq y$. Бројот $x+y$ во својот запис содржи барем една тројка (во спротивно $x = y$), но не е можно да е единствена, затоа што во тој случај бројот на единици во x и y има различна парност. Слично се разгледува и случајот $x, y \in B$.

2. Колку најмногу елементи може да има подмножество на множеството $\{1, 2, 3, ..., 2017\}$ такво што за секои два елементи a и b на тоа подмножество бројот $a+b$ не е делив со бројот $a-b$?

Решение. Во подмножеството не смее да има последователни броеви a и $b = a+1$ бидејќи 1 е делител на $a+b$. Во подмножеството не смее да се a и $b = a+2$, бидејќи 2 е делител на $a+b = 2a+2$. Значи, од три последователни броеви во подмножеството се наоѓа најмногу еден број. Затоа, бидејќи $2017 = 3 \cdot 672 + 1$ подмножество со саканото својство може да има најмногу 673 елементи. Подмножеството $A = \{1, 4, 7, ..., 2014, 2017\}$ кое се состои од броевите кои при делење со 3 даваат остаток 1 има 673 елементи. За било кои два елементи $a, b \in A$ бројот $a-b$ е делив со 3, а бројот $a+b$ при делење со 3 дава остаток 2, па затоа $a-b$ не е делител на $a+b$.

3. Дали постои конечно множество A од реални броеви, кое има барем 4 елементи и за секои четири различни елементи $a, b, c, d \in A$, важи $ab + cd \in A$?

Решение. Секое четириелементно множество $\{0, t, 1, \frac{1}{t}\}$, $t \in (0,1)$, го исполнува условот на задачата. Елементите на ваквите множества се добиваат ако претпоставиме $|A| = 4$ и $0 = a < b < c < d$, за $a, b, c, d \in A$.

4. Нека A и B се подмножества од $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определени со:

$$A = \{(x, y) \mid \text{за секој } a \in \mathbb{R}, y \neq \tfrac{x-a}{ax-1}\}$$

$$B = \{(x, y) \mid \text{постои } a \in \mathbb{R}, a(1+xy) = x+y\}.$$

Определи го $A \cap B$.

Решение. Нека $(x, y) \in A \cap B$. Бидејќи $(x, y) \in B$, постои $a \in \mathbb{R}$ така што $a(1+xy) = x+y$, т.е. $y(ax-1) = x-a$. Ако $ax-1 \neq 0$, тогаш $y = \frac{x-a}{ax-1}$, што е спротивно со $(x, y) \in A$. Значи, $ax = 1$ и $x = a$, од што следува дека $x^2 = 1$. За $x = 1$ имаме $-1 = \frac{1-a}{a-1}$ а за $x = -1$, $1 = \frac{-1-a}{-a-1}$, што значи $xy \neq -1$. Следствено,

$$A \cap B = \{(x, y) / x^2 = 1, xy \neq 1\},$$

и графички е претставено на цртежот.

5. Нека S е подмножество од реалните броеви за кое важат следниве услови:

(i) $Z \subseteq S$

(ii) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in S$

(iii) $x, y \in S \Rightarrow x+y \in S, xy \in S$

Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

Решение. Нека $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогаш $a^2 = 5+2\sqrt{6}$, т.е. $(a^2-5)^2 = 24$. Оттука добиваме $a(10a - a^3) = 1$, односно $\frac{1}{a} = 10a - a^3$. $a \in S,\ 10 \in S$, па од условот (iii) следува дека $10a \in S$. $a \in S$ тогаш од (iii) следува $aa \in S$, и повторно со примена на (iii) добиваме $a^3 = aaa \in S$. $-1 \in S,\ a^3 \in S$, па од (iii) следува $-a^3 \in S$. Од $10a \in S$ и $-a^3 \in S$ со примена на (iii) добиваме $10a - a^3 \in S$, т.е. $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

6. Множеството A ги задоволува следните услови:

а) $A \subseteq \{1, 2, 3, ..., 100\}$;

б) $|A| = 50$;

в) Ако a_i и a_j се елементи во A тогаш $a_i + a_j \neq 100$.

Докажи дека A содржи елемент што е полн квадрат.

Решение. Ако $100 \in A$, тогаш A содржи полн квадрат $(100 = 10^2)$. Нека $100 \notin A$. Тогаш $A \subseteq \{1, 2, 3, ..., 99\}$. Да ги разгледаме двоелементните множества $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, $\{3, 97\}$, ... , $\{49, 51\}$, заедно со едноелементното множество $\{50\}$. Сите тие се попарно дисјунктни, вкупно се 50 и нивната унија е $\{1, 2, 3, ..., 99\}$. Од дадените услови следува дека A содржи точно по еден елемент од секое од овие множества. Бидејќи меѓу дадените множества се наоѓа и $\{36, 64\}$, следува дека и во овој случај A содржи полн квадрат $(36 = 6^2, 64 = 8^2)$.

7. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f : \mathbb{N} \to A$ со следново својство: $f(i) \neq f(j)$ секогаш кога $|i - j|$ е прост број.

Решение. Нека функцијата $f : \mathbb{N} \to A$ го има саканото својство. Да ги разгледаме броевите 1, 3, 6 и 8. Разликата меѓу секои два од овие броеви е прост број и затоа A има барем 4 елементи.

Нека $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и за секој n нека $f(n)$ е остатокот од делењето на n со 4. Тогаш, од $f(i) = f(j)$ следува дека $|i - j|$ се дели со 4, т.е. $|i - j|$ е сложен број. Според тоа, минималниот број елементи на A е 4.

8. Докажи дека броевите 1, 2, 3, 4, ..., 23, 24, 25 не може да се поделат во две групи: A од 2 броја и B од 23 броја, така што збирот од броевите во групата B да биде еднаков на производот од броевите во групата A.

Решение. Нека таква поделба е можна и нека A се состои од броевите x и y, $x<y$. Тогаш, збирот на броевите во B е еднаков на

$$1+2+3+...+24+25-x-y=\frac{25(25+1)}{2}=325-x-y.$$

Затоа $xy=325-x-y$, т.е. $(x+1)(y+1)=326$. Единствени делители на бројот 326 се: 1, 2, 163 и 326, па затоа од последната равенка и фактот дека $x<y$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=326 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+1=2 \\ y+1=163 \end{cases}$$

од што наоѓаме $x=0, y=325$ или $x=1, y=162$, што не е можно бидејќи $1\leq x<y\leq 25$.

9. Дадено е множеството $A=\{3,5,7,9\}$. Определи го бројот на конечните множества природни броеви B такви што за множествата

$$X=\{2a+b\,|\,a\in A, b\in B\} \text{ и } Y=\{a+2b\,|\,a\in A, b\in B\}$$

е исполнет условот: за секој елемент на X (соодветно на Y) постои елемент на Y (соодветно на X) таков што разликата на двата елементи е 1.

Решение. Да забележиме дека сите елементи на множеството Y се непарни броеви. Тоа значи дека во множеството X нема непарни броеви, т.е. елементите на множеството се парни броеви.

Ако M е најголемиот елемент на B, тогаш $9+2M$ и $2\cdot 9+M$ се најголемите елементи на Y и X, соодветно. Од условот следува дека овие два елементи се разликуваат за 1, од каде наоѓаме $M=8$ или $M=10$. Аналогно за најмалиот елемент m на B имаме $m=2$ или $m=4$. Според тоа, елементи на B се парни броеви, при што најголемиот од нив е 8 или 10, а најмалиот е 2 или 4.

Множества со ова својство се:

$\{2,4,6,8,10\}, \{2,6,8,10\}, \{2,4,8,10\}, \{2,4,6,10\}, \{2,8,10\}, \{2,6,10\}, \{2,4,10\}, \{2,10\}$,

$\{2,4,6,8\}, \{2,6,8\}, \{2,4,8\}, \{2,8\}, \{4,6,8,10\}, \{4,8,10\}, \{4,6,10\}, \{4,10\}, \{4,6,8\}, \{4,8\}$.

Со непосредна проверка се покажува дека 5 од овие множества не го задоволуваат условот на задачата и тоа: $\{2,8,10\}, \{2,4,10\}, \{2,10\}, \{2,8\}, \{4,10\}$. Според тоа, постојат 13 множества кои го задаволуваат условот на задачата.

10. Иво нумерирал 100 картички со природните броеви од 1 до 100 и ѝ дал на Јана дел од нив. Познато е дека за секоја картичка на Иво и секоја картичка на Јана, збирот на броевите со кои се означени не е запишан на нартичка кај Иво и производот не е запишан на картичка кај Јана. Колку картички има Јана, ако картичката со број 13 не е кај неа?

Решение. Јана има барем една картичка k. Ако 1 е кај Иво, тогаш производот на 1 и k е кај Јана, што противречи на условот. Значи, 1 е кај Јана.

Ако 12 е кај Иво, тогаш збирот на 1 и 12 е кај Иво, што е противречност. Значи, 12 е кај Јана.

Бидејќи збирот на 6 и 7 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 1 и 6 е кај Иво, што е противречност. Значи, 6 и 7 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 3 и 10 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 7 е кај Иво, што е противречност. Значи, 3 и 10 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 5 и 8 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 5 и 8 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 4 и 9 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 4 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 4 и 9 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 2 и 11 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 2 и 9 е кај Иво, што е противречност. Значи, 2 и 11 се кај Јана.

Според тоа, броевите од 1 до 12 се кај Јана. Тогаш броевите од видот $13k$, $k=1,2,...,7$ се кај Иво, а нивните збирови со броевите од 1 до 12 се кај Јана. Според тоа, кај јана се картичките означени со броевите кои не се делат со 13, што значи дека Јана има $100-7=93$ картички.

11. Нека n е парен број и A е множеството од сите ненулти низи од 0 и 1 со должина n. Докажи дека елементите на A можат да се поделат на дисјунктни тројки така што за произволна тројка $(a_1a_2...a_n, b_1b_2...b_n, c_1c_2...c_n)$ бројот на единиците меѓу a_i, b_i, c_i, за секој $i=1,2,...,n$ е парен број.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=2$ имаме $A=\{11,10,01\}$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој парен број k. За $n=k+2$ ги разгледуваме тројките

$$(a_1a_2...a_k, b_1b_2...b_k, c_1c_2...c_k)$$

со должина k и од нив ги формираме тројките

$$(00a_1a_2...a_k, 00b_1b_2...b_k, 00c_1c_2...c_k),\ (01a_1a_2...a_k, 10b_1b_2...b_k, 11c_1c_2...c_k)$$
$$(10a_1a_2...a_k, 11b_1b_2...b_k, 01c_1c_2...c_k),\ (11a_1a_2...a_k, 01b_1b_2...b_k, 10c_1c_2...c_k),$$

кои исто така го имаат саканото мсвојство. Непосредно се проверува дека на овој начин ги добиваме сите ненулти низи со должина $k+2$, со што тврдењето е докажано.

12. Докажи, дека за секој сложен природен број $n\geq 6$ постои множество A од n различни природни броеви, со следново својство: за секој вистински делител d на n, елементите на A можат на два различни начини да се поделат на $\frac{n}{d}$ по парови дисјунктни подмножества секое со по d елементи така, што збирот на секое множество од едната поделба да е еднаков на збирот на елементите на некое множество од другата поделба.

Решение. Нека $d=2$. Бидејќи $1+5=2+4, 3+4=1+6$ и $6+2=3+5$, добиваме дека елементите на множеството $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ може да се поделат на два начина, така што е исполнет условот на задачата. Според тоа, кога $d=2$ за добивање на множеството A кон елементите на множеството B треба да додадеме произволни $n-6$ различни природни броеви поголеми од 6. Во двете поделби овие $n-6$ елементи ги групираме на еден ист начин во двоелементни подмножества.

Ќе докажеме дека ако во A имаме четири елементи a,b,c,d за кои $a+b=c+d$, тогаш за секој $d\geq 3$ бараната поделба постои. Навистина, нека првите две множества од првата поделба ги содржат множествата $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$, соодветно и уште $d-2$ различни елементи. Останатите елементи ги групираме на произволен начин во останатите $\frac{n}{d}-2$ множества. При втората поделба во првите две множества ги заменуваме местата на $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$, а се останато е непроменето. Лесно се гледа дека во случајов условот на задачата е исполент.

Според тоа, доволно е да избереме множество A од n различни природни броеви кое ги содржи броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6.

13. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,...,62,63\}$. Подмножеството X на множеството A ќе го наречеме *добро* ако за секој елемент $x\in X$ бројот x не е делител на збирот на преостанатите елементи на множеството X. Определи го максималниот број елементи кој може да има добро подмножество.

Решение. Нека X е добро множество. Јасно, $1\notin X$. Исто така множеството $\{2,3,...,63\}$ не е добро бидејќи $5\,|\,2+3+...+63\ =31\cdot 65=2015$. Значи, X нема повеќе од 61 елемент. Од друга страна, множеството $X=\{2,3,5,6,7,...,63\}$ има 61 елемент е добро бидејќи збирот на неговите елементи е 2011 и тоа е прост број. Значи, максималниот број елементи кој може да го има добро множество е 61.

14. Докажи, дека било 2001-елементно подмножество на множеството $\{1,2,3,...,3000\}$ содржи три елементи такви што секои два од нив се меѓусебно заемно прости.

Решение. Нека S е произволно подмножество со 2001 елементи од множеството $\{1,2,3,...,3000\}$. Да ги разгледаме множествата:

$$K_j=\{6j+i\,|\,i=1,2,3,4,5,6),\ j=0,1,2,3,...,499\ .$$

Бидејќи $4\cdot 500<2001$, меѓу овие множества постои множество кое содржи најмалку пет елементи од S. Ако три од овие пет елементи се непарни броеви, тогаш тоа е бараната тројка. Во спротивно во воочените множество K_j имаме три парни и два непарни броја од S. Овие два непарни броја се заемно прости, бидејќи нивната разлика е или 2 или 4. Трите парни броја од исто множество K_j се три последователни парни броеви, па затоа само еден од нив е делив со 3 и можда најмногу еден од нив е делив со 5. Затоа од овие броеви можеме да избереме број кој не е делив ниту со 3 ниту со 5. Овој парен број и двата непарни броја е бараната тројка. Имено, бидејќи разликата на броевите во множесвото K_j е помала од 6, само еден од нив може да биде делив со простиот број $p.\ p\geq 7$.

15. За множеството A од природни броеви помали од 2000000 ќе велиме дека е *добро* ако $2000\in A$ и $a\,|\,b$ за секои $a,b\in A,\ a<b$.

а) Колку најмногу елементи може да има едно добро множество?

б) Определи го бројот на добрите множества со максимален број елементи.

Решение. а) Нека

$$a_1<a_2<...<a_n<2000<a_{n+1}<...<a_m$$

се елементите на едно добро множество. Бидејќи $a_{i+1}\geq 2a_i$, заклучуваме дека

$2000000 > a_m \geq 2^{m-n}2000$, што значи $m-n \leq 9$. Од друга страна, равенството $2000 = 2^4 5^3$, покажува дека $a_i = 2^{k_i} 5^{l_i}$, за $i \leq n-1$, каде

$$0 \leq k_i \leq k_{i+1} \leq 4, 0 \leq l_i \leq l_{i+1} \leq 3 \text{ и } k_i + l_i = 6.$$

Според тоа, $n \leq 8$, па затоа A има најмногу $8+9=17$ елементи. На пример

$$a_i = 2^{i-1}, 1 \leq i \leq 5, \ a_i = 2^4 5^{i-5}, 6 \leq i \leq 8, \ a_i = 2^{i-4} 5^3, 9 \leq i \leq 17$$

докажува дека $m = 17$ може да се реализира.

б) За едно добро множество со максимален број на елементи имаме $m = 17$ и $n = 8$, т.е. $a_8 = 2000$. Освен тоа, $k_i + l_i = i - 1$, за $1 \leq i \leq 7$, што покажува дека $a_1 = 1$ и подмножеството $\{a_2, ..., a_7\}$ еднозначно се определува со броевите $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 7$, за кои $l_{i_1} = 0, l_{i_1+1} = 1, l_{i_2} = 1, l_{i_2+1} = 2, l_{i_3} = 2$ и $l_{i_3+1} = 3$. Според тоа, за ова множество имаме $\binom{7}{3} = 35$ можности. Бидејќи $2^9 < 3 \cdot 2^8 < 1000 < 2^{10}$, следува дека $a_i = 2^{i-4} 5^3$ за $9 \leq i \leq 17$ или постои j таков што $9 \leq j \leq 17$ важи $a_i = 2^{i-4} 5^3$ за $8 \leq i < j$ и $a_i = 2^{i-5} 5^3 3$ за $j \leq i \leq 17$. Според тоа, за подмножеството $\{a_9, ..., a_{17}\}$ има 10 можности. Конечно, бројот на добрите множества со максимален број елементи е еднаков на $35 \cdot 10 = 350$.

16. Нека M е множеството рационални броеви во интервалот $(0,1)$. Дали постои подмножество A од M такво што секој број од M може на единствен начин да се претстави како збир на еден или конечно многу различни броеви од A?

Решение. Ќе докажеме дека такво множество не постои. Нека го претпоставиме спротивното. Нека $a \in A$ и да претпоставиме дека постои $a' \in A$ таков што $a' > \frac{a}{2}$. Тогаш бројот $a - a' < \frac{a}{2}$ може да се претстави како збир на еден или конечно многу различни броеви од A. Бидејќи секој од овие броеви е помал од $\frac{a}{2}$, добиваме дека бројот $a = a' + a - a'$ се претставува на два различни начини (еднаш како a, а вториот пат како збир од a' и претставувањето на $a - a'$) како збир на еден или конечно многу броеви од A, што е противречност. Според тоа, ако $a \in A$, тогаш $A \cap (\frac{a}{2}, a) = \varnothing$. Последното значи дека секој од интервалите $[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}), i = 1, 2, ...$ содржи најмногу еден елемент од A. Но, множеството A е бесконечно (во спротивно како збир на различни броеви од A може да се претстават само конечно многу броеви, а множеството рационални броеви од интервалот $(0,1)$ е бесконечно), па затоа елементите на A може да се подредат во бесконечна низа $a_1, a_2, ...$ при што важи $a_i \geq 2a_{i+1}$, за секој i. Ако за некој i во последното неравенство имаме строго неравенство, тогаш

$$s = \sum_{i=2}^{\infty} a_i < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_1}{2^{i-1}} = a_1.$$

Последното значи дека броевите од интервалот (s, a_1) не може да се претстават како збир на различни броеви од A. Според тоа, $a_{i+1} = \frac{a_1}{2^i}$ за секој i. Тогаш лесно се покажува дека само броевите од видот $a_1 \frac{m}{2^n}$ може да се претставaт како збир на еден или конечно многу броеви од A. Бидејќи секој рационален број со непарен именител кој е заемно прост со именителот на a_1 не може да се претстави во дадениот вид, добиваме противречност, со што задачата е решена.

17. Дали може множеството природни броеви да се разбие на три непразни по парови дисјунктни множества A, B, C така што ако $x \in A$ и $y \in B$, тогаш $x + y + xy \in C$.

Решение. Нека претпоставиме дека бараното разбивање постои.

Ќе докажеме дека во тој случај 1 и 3 припаѓаат на исто множество.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $1 \in A$ и $3 \in B$. Тогаш

$$1+3+1\cdot 3 = 7 \in C, 1+7+1\cdot 7 = 15 \in B \text{ и } 3+7+3\cdot 7 = 31 \in A.$$

Од друга страна $1+15+1\cdot 15 = 31 \in C$, штое противречност, па затоа 1 и 3 се во исто множество. Нека $1, 3 \in A$ и $n \in B$. Тогаш

$$1+n+1\cdot n = 2n+1 \in C \text{ и } 3+n+3n = 4n+3 \in C.$$

Од друга страна, $1+(2n+1)+1\cdot(2n+1) = 4n+3 \in B$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека бараното разбивање не е можно.

18. Определи ги сите подредени тројки (A, B, C) од непразни множества цели броеви такви што $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, а множествата $A+B, B+C$ и $C+A$ се по парови дисјунктни ($X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$).

Решение. Ќе докажеме дека единствено разбивање со саканите својства е

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, B = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, C = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad (1)$$

со точност до пермутација на множествата. Нека $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, каде множествата $A+B, B+C$ и $C+A$ се по парови дисјунктни. Да забележиме, дека од $a \in A, b \in B, c \in C$ следува $a+b-c \in C, b+c-a \in A$ и $c+a-b \in B$. Навистина, ако на пример $a+b-c \in A$, тогаш $a+b \in A+B \cap A+C = \varnothing$, што е противречност.

Да фиксираме два последователни природни броја од различни множества, $b \in B$ и $c = b+1 \in C$. Тогаш за секој $a \in A$ имаме $a-1 = a+b-c \in C$ и $a+1 = a+c-b \in B$, т.е. секој број од A има претходник во C и следбеник во B. Во случајов, постои подреден пар $(c, c+1)$ таков што $c \in C$ и $c+1 \in A$. Сега, како погоре добиваме дека секој број $b \in B$ има претходник во A и следбеник во C. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека секој број $c \in C$ има претходник во B и следбеник во A. Конечно, од претходните разгледувања следува дека со точност до пермутација множествата A, B, C се точно множествата (1).

19. Дадени се природни броеви m и n, поголеми од 1 и цели броеви $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Докажи, дека постои множество T од цели броеви такво што $|T| \le 1 + \frac{a_m - a_1}{2n+1}$ и секој a_i може да се претстави во облик $a_i = t + s$ за некои $t \in T$ и $s \in [-n, n]$.

Решение. Да ставиме

$$a_1 = a, a_m = b, b-a = (2n+1)q + r \text{, каде } q, r \in \mathbb{Z} \text{ и } 0 \le r \le 2n .$$

Да го разгледаме множеството

$$T = \{a+n+(2n+1)k \mid k = 0,1,2,...,q\} .$$

Имаме

$$|T| = q+1 \le 1 + \tfrac{b-a}{2n+1} = 1 + \tfrac{a_m - a_1}{2n+1} .$$

Нека

$$B = \{t+s \mid t \in T, s = -n, -n+1, ..., n\} = \{a, a+1, a+2, ..., a+(2n+1)q+2n\} .$$

Останува да забележиме дека

$$a+(2n+1)q+2n \ge a+(2n+1)q+r = b ,$$

т.е. секој a_i припаѓа на B, со што задачата е решена.

20. Нека $S = \{1,2,3,...,n\}$ и нека

$$T_k = \{x_1 + x_2 + ... + x_k \mid x_i \in S, x_i \ne x_j \text{ za } i \ne j\} .$$

Ако t_k е бројот на елементите во множеството T_k, да се докаже дека

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \tfrac{n}{6}(n^2+5) .$$

Решение. Да го најдеме на почеток бројот t_k. Најмалиот број во T_k е бројот

$$1+2+3+...+k = \tfrac{k(k+1)}{2}$$

а најголемиот е:

$$(n-k+1)+(n-k+2)+...+n = \tfrac{k}{2}(2n-k+1) .$$

Според тоа, ќе имаме:

$$t_k = \tfrac{k}{2}(2n-k+1) - \tfrac{k(k+1)}{2} + 1 = k(n-k)+1 .$$

На крајот ќе имаме:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = n + \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = n + n \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n + \tfrac{n^2(n+1)}{2} - \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{n}{2}(n^2+5) .$$

21. Множеството A се состои од сите седумцифрени броеви запишани со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, при што цифрите им се различни. Докажи дека меѓу нив не постојат два, такви што едниот е делив со другиот.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат $a, b \in A$, такви што $a = bk$, $k \ge 2$. Од $k \le \frac{7654321}{1234567} < 7$, следува $k \in \{2,3,4,5,6\}$. Бидејќи

$$1+2+3+4+5+6+7 = 28 ,$$

секој од броевите од множеството A е од видот $3l+1$, т.е. ниту еден од нив не се дели со 3, па според тоа ни со 6. Значи $k \ne 3$ и $k \ne 6$.

Случај $k = 2$. Ако $a = 2b$, $a+b = 3b$. Но $a+b$ не е делив со 3, бидејќи $a = 3s+1$ и $b = 3p+1$. Значи $k \ne 2$.

Случај $k = 5$. Ако $a = 5b$, тогаш $a+b = 6b$. Бидејќи $a+b$ не е делив со 3, заклучуваме дека $k \ne 5$.

Случај $k=4$. Ако $a=4b$, тогаш $a-b=3b$. Бидејќи $a-b$ се дели со 9 (секој од броевите a и b при делење со 9 има ист остаток) следува дека $a-b=3m$, а оттука и од $a=4b$ добиваме $3m=b$ што не е можно. Значи $k\neq 4$.

22. Определи ги сите множества S од цели броеви, за кои од $m,n\in S$ следува $3m-2n\in S$ (m и n не мора да се различни).

Решение. Јасно, секое едноелементно множество S е решение на задачата. Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $|S|\geq 2$.

Нека $d=\min\{|m-n|: m,n\in S, m\neq n\}$. Лесно се гледа дека постои цел број a таков, што $a+d$ и $a+2d$ се елементи на S (на пример, $a=n-d$, за $d=m-n$). Последователно добиваме

$$a+4d=3(a+2d)-2(a+d)\in S,\qquad a-d=3(a+d)-2(a+2d)\in S,$$

$$a+5d=3(a+d)-2(a-d)\in S,\qquad a-2d=3(a+2d)-2(a+2d)\in S,$$

и аналогно понатаму, добиваме $S_0=\{a+kd : k \text{ не се дели со } 3\}\subset \mathrm{S}$. Уште повеќе, множеството S_0 е решение на задачата за произволен цел број a.

Нека претпоставиме, дека $S\setminus S_0\neq\varnothing$ и нека $b\in S\setminus S_0$. Тогаш постои $l\in\mathbb{Z}$, таков што $a+ld\leq b<a+(l+1)d$. Јасно, барем еден од броевите $a+ld$ и $a+(l+1)d$ се содржи во S_0. Оттука и од дефиницијата на d лесно следува дека $b=a+ld$, а од последното и од дефиницијата на b следува, дека $a+ld\notin S_0$, т.е. l се дели со 3.

Добивме, дека постои $l\in\mathbb{Z}$, за кој петте броеви $a+il, i\in\{-2,-1,0,1,2\}$ припаѓаат на S. Оттука лесно се добива, дека $\{a+kd : k\in\mathbb{Z}\}\subset S$. Од друга страна, од дефиницијата на d следува дека ниту еден интервал $(a+kd, a+(k+1)d)$ не содржи броеви од S, т.е $S=\{a+kd : k\in\mathbb{Z}\}$.

Конечно, решенија на задачата се три вида множества

$$S=\{a\},\ S=\{a+kd : k \text{ не се дели со } 3\},\ S=\{a+kd : k\in\mathbb{Z}\}$$

при што и во трите случаи a е произволен цел број, а d е природен број.

23. Определи ги сите реални броеви t со следново својство: Постои бесконечно множество реални броеви X такво, што неравенството

$$\max\{|x-(a-d)|, |y-a|, |z-(a+d)|\}>td$$

е точно за секои $x,y,z\in X$, секој реален број a и секој позитивен реален број d (броевите x,y,z не мора да се различни).

Решение. Нека $t\in(0,\frac{1}{2})$ и да избереме фиксен $\lambda\in(0,\frac{1-2t}{2(1+t)})$. Ќе докажеме дека геометриската прогресија $X=\{x_i=\lambda^i \mid i\in\mathbb{N}\}$ го има саканото својство.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. постојат реални броеви a и $d>0$ и три броеви $x_i, x_j, x_k\in X$ (не задолжително различни), за кои

$$\max\{|x_i-(a-d)|, |x_j-a|, |x_k-(a+d)|\}\leq td.$$

Последниот услов е еквивалентен на истовремено исполнување на неравенствата

$$-td \le x_i-(a-d) \le td \quad \Leftrightarrow \quad x_i+(1-t)d \le a \le x_i+(1+t)d\ ,$$
$$-td \le x_j-a \le td \quad \Leftrightarrow \quad x_j-td \le a \le x_j+td\ ,$$
$$-td \le x_k-(a+d) \le td \quad \Leftrightarrow \quad x_k-(1+t)d \le a \le x_k+(t-1)d\ .$$

Од неравенствата за a добиваме

$$x_k-(1+t)d \le a \le x_i+(1+t)d$$
$$x_i+(1-t)d \le a \le x_j+td$$
$$x_j-td \le a \le x_k+(t-1)d$$

од каде наоѓаме

$$d \ge \frac{x_k-x_i}{2(t+1)},\quad d \le \frac{x_j-x_i}{1-2t},\quad d \le \frac{x_k-x_j}{1-2t}\ .$$

Бидејќи $d>0$, од горните неравенства следува $x_i<x_j<x_k$, од каде добиваме $i>j>k$ и значи

$$\lambda^j+\lambda^{i+1}<\lambda^{k+1}+\lambda^i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^j-\lambda^i<\lambda(\lambda^k-\lambda^i)\,,$$

па затоа

$$\frac{x_j-x_i}{x_k-x_i}=\frac{\lambda^j-\lambda^i}{\lambda^k-\lambda^i}<\lambda\ .$$

Од друга страна од неравенствата $\frac{x_k-x_i}{2(t+1)} \le d \le \frac{x_j-x_i}{1-2t}$ добиваме

$$\frac{x_j-x_i}{x_k-x_i} \ge \frac{1-2t}{2(t+1)}>\lambda\,,$$

што противречи на претходното неравенство. Според тоа, множеството $X=\{x_i=\lambda^i \mid i\in\mathbb{N}\}$ го има сакането својство.

Нека сега $t\ge\frac{1}{2}$. Ќе докажеме, дека за секое бесконечно множество X и за секои три броеви $x<y<z$ од X, постојат реални броеви a и $d>0$ такви, што

$$\max\{|x-(a-d)|,|y-a|,|z-(a+d)|\}\le td\ . \tag{1}$$

Нека $d=\frac{z-x}{2}$, од каде добиваме $x+(1-t)d=z-(1+t)d$. Нека

$$a=\max\{x+(1-t)d,\,y-td\}\,.$$

Бидејќи $t\ge\frac{1}{2}$, имаме

$$y-x<2d\le(1+2t)d,\ \ x-y<0<(2t-1)d$$

од каде следува

$$y-td\le x+(1+t)d,\quad x+(1-t)d\le y+td\ .$$

Оттука и од изборот на a следуваат неравенствата

$$x+(1-t)d\le a\le x+(t+1)d,$$
$$y-td\le a\le y+td,$$
$$z-(1+t)d\le a\le z-(1-t)d,$$

од каде следува неравенството (1).

24. За секој природен број $n>1$ дефинираме

$$D(n)=\{a-b \mid a,b \text{ се природни броеви и } n=ab,\ a>b\}\ .$$

Докажи, дека за секој природен број $k>1$ постојат k различни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, $n_i>1, 1\le i\le k$, за кои пресекот

$$D(n_1)\cap D(n_2)\cap ...\cap D(n_k)$$

содржи барем два елементи.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ се $k+1$ различни непарни природни броеви, такви што секој од нив е помал од производот на останатите k броеви. За $N=a_1a_2...a_{k+1}$ за секој $i=1,2,...,k+1$ да ставиме

$$x_i=\tfrac{1}{2}(\tfrac{N}{a_i}+a_i),\quad y_i=\tfrac{1}{2}(\tfrac{N}{a_i}-a_i).$$

Тогаш $x_i^2-y_i^2=N$ и бидејќи $a_ia_j<N$ и $\frac{N}{a_i}>a_i$, добиваме дека (x_i, y_i), $1\le i\le k+1$ се $k+1$ различни целобројни решенија на равенката $x^2-y^2=N$. Без ограничување на општоста можеме даземеме дека $x_{k+1}=\min\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. За секој $i\in\{1,2,...,k\}$ од $x_i^2-y_i^2=x_{k+1}^2-y_{k+1}^2=N$ следува

$$(x_i+x_{k+1})(x_i-x_{k+1})=x_i^2-x_{k+1}^2=y_i^2-y_{k+1}^2=(y_i+y_{k+1})(y_i-y_{k+1}).$$

За $n_i=(x_i+x_{k+1})(x_i-x_{k+1})=(y_i+y_{k+1})(y_i-y_{k+1})$ имаме

$$2x_{k+1}=(x_i+x_{k+1})-(x_i-x_{k+1})\in D(n_i),$$
$$2y_{k+1}=(y_i+y_{k+1})-(y_i-y_{k+1})\in D(n_i).$$

Затоа $x_{k+1}>y_{k+1}$, т.е. $2x_{k+1}$ и $2y_{k+1}$ се два различни елементи на

$$D(n_1)\cap D(n_2)\cap ...\cap D(n_k).$$

25. За непразни бројни множества S и T дефинираме

$$S+T=\{s+t\mid s\in S, t\in T\},\ \ 2S=\{2s\mid s\in S\}.$$

Нека n е природен број, а A и B се подмножества од $\{1,2,...,n\}$. Докажи, дека постои подмножество D на $A+B$, за кое

$$D+D\subseteq 2(A+B)\ \text{ и }\ |D|\ge\frac{|A|\cdot|B|}{2n},$$

каде $|X|$ го означува бројот на елементите на множеството X.

Решение. Нека $S_y=\{(a,b)\mid a-b=y, a\in A, b\in B\}$. Бидејќи

$$\sum_{y=1-n}^{n-1}|S_y|=|A|\cdot|B|,$$

постои y_0, таков што $1-n\le y_0\le n-1$ и множеството $D=S_{y_0}$ го има второто ос саканите својства, т.е.

$$|D|=|S_{y_0}|\ge\frac{|A|\cdot|B|}{2n}.$$

Од дефиницијата на S_{y_0} следува, дека за секој $d\in D$ постои подреден пар $(a,b)\in S_{y_0}$ таков што $d=2b+y_0=a+b\in A+B$ и следствено $D\subseteq A+B$. За секои $d_1, d_2\in D$ нека $d_1=2b_1+y_0=2a_1-y_0$, $d_2=2b_2+y_0$, каде $b_1, b_2\in B, a_1\in A$. Тогаш

$$d_1+d_2=2a_1-y_0+2b_2+y_0=2(a_1+b_2)\in 2(A+B).$$

Според тоа, множеството $D = S_{y_0}$ го има и второто од саканите својства.

26. Нека затворениот интервал $[0,1]$ е разделен на две дисјунктни множества A и B, т.е. нека $A \cup B = [0,1]$ и $A \cap B = \emptyset$. Дали постои реален број a таков што $A + a = B$, каде

$$A + a = \{y, y = x + a, x \in A\}.$$

Решение. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a > 0$ (во спротивно наместо со a ќе работиме со $-a$ и ќе ги смениме улогите на множествата A и B). Најмала вредност која може да припаѓа на B е a, бидејќи во спротивен случај, ако $0 < x < a, x \in B$, тогаш $x - a < a - a = 0$ и $x - a \in A$ што не е можно. Според тоа $[0, a) \subseteq A$. Но тогаш интервалот $[a, 2a)$ е подмножество од B, и според тоа, тој е дисјунктен со A.

Нека $y \in [2a.3a) \cap B$. Тогаш постои $x \in A$ таков што што $y = x + a$, т.е. $x = y - a$. Сега, од $2a \le y < 3a$ следува $a \le y - a < 2a$, т.е. $x = y - a \in [a, 2a) \subseteq B$, што противречи на $A \cap B = \emptyset$. Значи, $[2a, 3a) \cap [0,1] \subseteq A$.

Нека претпоставиме дека $3a > 1$. Тогаш $[2a,1] \subseteq A$ и од $1 \in A$ следува $1 + a \in B$, што не е можно бидејќи $B \subseteq [0,1]$, а $1 + a > 1$. Значи, $[2a, 3a) \subseteq A$.

Повторувајќи ја постапката добиваме дека

$$[4a, 5a), [6a, 7a), ..., [2ka, (2k+1)a), ... \subseteq A.$$

Понатаму, за секој позитивен реален број a, постои $k_0 \in \mathbb{N}$ таков што $2k_0 a > 1$. Значи,

$$1 < 2k_0 a \in [2k_0 a, (2k_0 + 1)a) \subseteq A \subseteq [0,1],$$

што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат множества A и B и реален број a со саканите својства.

27. Нека n е природен број. Множеството $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$ е поделено на три (попарно дисјунктни) n - елементни множества A, B, C. Дали е можно секогаш да се изберат три броеви x, y, z, по еден од секое множество, такви што $x + y = z$.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Без ограничување на општоста можеме да земеме $1, 2, ..., k-1 \in A$ и $k \in B$. Да разгледаме некој елемент $x \in C$. Бројот $x - 1\,(x \ge 3$ бидејќи $2 \notin C)$ очигледно не е во B, па да претпоставиме дека $x - 1 \in C$. Тогаш елементот $x - k$ не е во A бидејќи $(x - k) + k = x$ и не е во B бидејќи $x - k + (k-1) = x - 1$. Слично, $x - k - 1$ не е ниту во A ниту во B заради $(x - k - 1) + k = x - 1$ и $(x - k - 1) + 1 = x - k$. Според тоа, $x - k - 1, x - k \in C$. Со индукција добиваме дека $x - ik - 1, x - ik \in C$ за сите дозволени $i = 0, 1, 2, ...$, што не е точно на пример за $i = [\frac{x-1}{n}]$, бидејќи тогаш $x - ik \in \{1, 2, ..., k\}$.

Според тоа, од $x \in C$ следува $x - 1 \in A$. Тоа значи дека $C = \{y + 1 \mid y \in A\}$, што не е можно бидејќи $k - 1 \in A$ и $k \in B$. Конечно од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

28. Од n-елементно подмножество S се избрани $(n+1)$-но триелементни подмножества. Докажи дека меѓу избраните триелементни подмножества постојат две чиј пресек е едноелементно множество.

Решение. Нека $S_1, S_2, ..., S_{n+1}$ се избраните подмножества. Означуваме $S_i \sim S_j$ ако $|S_i \cap S_j| = 2$. Тогаш ако $S_i \sim S_j$ и $S_j \sim S_k$, множествата S_i и S_k имаат барем еден заеднички елемент, па затоа $S_i \sim S_k$. На овој начин подмножествата $S_1, S_2, ..., S_{n+1}$ се разбиваат на класи така што секои две множества од иста класа имаат двоелементен пресек, а секои две множества од различни класи се дисјунктни.

Доволно е да докажемедека во класа која опфаќа r елементи има најмногу r подмножества. Ова е јасно за $r \le 4$. Нека $r \ge 5$ и да ги разгледаме множествата $A = \{a,b,c\}$ и $B = \{a,b,d\}$ од таа класа. Нека e е елемент од таа класа различен од a,b,c,d. Подмножеството кои го содржат e мора да содржат уште по два елементи од секое од множествата A и B, па затоа тоа мора да биде подмножеството $\{a,b,e\}$. Сега добиваме дека во оваа класа има најмногу $r-2$ елементи, со што доказот езавршен.

29. За множеството $S = \{1,2,3,....,n\}$ се направени две разбивања. Првиот пат е разбиено на m непразни подмножества, а вториот пат е разбиено на $m+k$ ($k > 1$) непразни подмножества. Докажи дека барем $k+1$ елемент од множеството S при првото разбивање се наоѓа во побројно подмножество одколку при второто разбивање.

Решение. Нека

$$S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{m+k}$$

се дадените разбивања. За $t \in S$ со x_t и y_t да го означиме бројот на елементите на она множество A_i и B_i соодветно кое го содржи t. Бидејќи за секој $t \in A_i$ важи $x_t = |A_i|$ следува дека $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} = m$. Аналогно $\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{y_t} = m+k$. Тоа значи дека $\sum_{t=1}^{n} (\frac{1}{y_t} - \frac{1}{x_t}) = k$, па бидејќи сите собирци во овој збир се помали од 1, мора да има најмалку $k+1$ позитивен број, т.е. најмалку за $k+1$ вредности на t важи $y_t < x_t$.

30. Дадени се природните броеви a и b. Конечните подмножества $A, B \subset \mathbb{Z}$ се дисјунктни и го имаат својството: за секој $x \in A \cup B$ е исполнето $x+a \in A$ или $x-b \in B$. Докажи дека $a|A| = b|B|$ (со $|X|$ е означен бројот на елементи на множеството X).

Решение. Разгледуваме ориентиран граф чии темиња се елементите на множеството $A \cup B$, а гранката од i до j постои ако $j = i - a \in A$ или $j = i + b \in B$. Од условот на задачата следува дека излезниот степен на секое теме е најмалку 1, а влезниот степен е најмногу 1 бидејќи $A \cap B = \emptyset$. Бидејќи збирот на влезните степени е еднаков на збирот на излезните степени, од секое теме излегува и во него влегува точно една гранка. Тоа значи дека графот е унија на дисјунктни цикли $C_1, ..., C_k$.

Нека циклот C_i содржи a_i елементи на множеството A и b_i елементи на множеството B. Тогаш долж гранката на циклот C_i индексите на темињата се зголемуваат за a точно a_i пати, а се намалуваат за b точно b_i пати, па затоа $aa_i = bb_i$. Бидејќи ова важи за сите цикли имаме $a|A| = b|B|$.

31. Докажи дека сите природни броеви може да се распоредат во 100 непразни подмножества такви што не постојат три броеви a, b, c од три различни подмножества за кои е исполнето $a + 99b = c$.

Решение. Ако $a + 99b = c$, тогаш барем два од броевите a, b и c во каноничното претставување имаат ист степен на бројот 2 (зошто?). Затоа е доволно во $i-$тото множество да ги ставиме сите броеви од видот $2^n a$, каде $2 \nmid a$ и $n \equiv i (\text{mod} 100)$. Тогаш три броја a, b, c од три различни подмножества во каноничното претставување имаат различни степени на бројот 2, па затоа не е можно да важи $a + 99b = c$.

32. Дадено е 8-елементно подмножество A од множеството $\{1, 2, 3, ..., 17\}$. Докажи дека постои $k > 0$ такво што равенката $x - y = k$ има барем три решенија во A.

Решение. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_8$. Ги разгледуваме разликите

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, ..., a_8 - a_7 \text{ и } a_3 - a_1, a_4 - a_2, ..., a_8 - a_6 .$$

Нивниот збир е еднаков на $2a_8 + a_7 - a_2 - 2a_1 \le 46$. Од друга страна, ако ниту една од овие разлики не се појавува трипати, тогаш нивниот збир е поголем или еднаков на $2(1+2+3+4+5+6)+7 = 49$, што е противречност.

33. Да ги разгледаме сите подмножества од множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ кои не содржат два последователни броја и за секое од нив да го пресметаме производот на неговите елементи. Збирот на квадратите на овие производи е еднаков на $(n+1)!-1$. Докажи!

Решение. За $n = 1$ имаме $1^2 = 1 = (1+1)!-1$, а за $n = 2$ добиваме $1^2 + 2^2 = 5 = (2+1)!-1$, т.е. тврдењето на задачата е точно.

Нека $n > 2$ и да претпоставиме дека тврдењето важи за секој природен број $n-1$. Збирот на сите производи од множествата кои не го содржат n е еднаков на S_{n-1}, збирот на сите производи од множествата кои се различни од $\{n\}$ и како свој елемент не го содржат $n-1$ е еднаков на $n^2 S_{n-2}$. Затоа

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + n^2 S_{n-2} + n^2 \\ &= n!-1 + n^2((n-1)!-1) + n^2 \\ &= n!-1 + n \cdot n! - n^2 + n^2 \\ &= n!(n+1) - 1 = (n+1)!-1, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција заклучуваме дека тврдењето важи за секој природен број n.

34. Дали постои природен број $n>1$ со следното својство: множеството природни броеви $\mathbb{N}$ може да се раздели на n непразни подмножества така што збирот на било кои $n-1$ броеви од $n-1$ различни подмножества секогаш припаѓа на преостанатото делбено множество.

Решение. Да претпоставиме дека таков n постои. Очигледно $n \geq 3$. Разгледуваме различни елементи $a,b \in A_1$ и цел број $c > \max(-a;-b)$. Ќе докажеме дека $a+c$ и $b+c$ лежат во исто подмножество. Да претпоставиме дека на пример $a+c \in A_1$ и $b+c \in A_3$, и да разгледуваме произволни елементи $x_i \in A_i, i=3,...,n$. Бидејќи $a+x_3+...+x_n;\ b+x_3+...+x_n \in A_2$, збирот

$$s=(a+c)+(b+x_3+...+x_n)+x_4+...+x_n=(a+x_3+...+x_n)+(b+c)+x_4+...+x_n$$

од една страна лежи во A_3, а од друга во A_1, што е противречност. Слично, ако $a+c \in A_2$ и $b+c \in A_3$, тогаш $s=a+(b+c)+x_4+...+x_n$ припаѓа на A_2, но

$$s=b+(a+c)+x_4+...+x_n \in A_3,$$

што повторно е противречност.

За $i=1,...,n$ избераме $x_i \in A_i$ и нека $s=x_1+...+x_n$ и $y_i=s-x_i$. Тагаш $y_i \in A_i$. Од претходно изнесеното $2x_i=x_i+x_i$ е во исто множество како $x_i+y_i=s$. Следува дека сите броеви $2x_i, i=1,...,n$ се во исто множество, па затоа сите парни броеви се во исто множество, да кажеме A_1. Слично,

$$2x_i+1=(x_i+1)+x_i \text{ и } (x_i+1)+y_i=s+1$$

се во исто множество за $i=1,...,n$; т.е. сите непарни броеви поголеми од 1 се во исто множество, да кажеме A_2. Исто така, $3-2=1 \in A_2$, но тогаш $A_3,...,A_n$ се празни множества што е противречност.

35. Ако $A=\{1,2,...,4s-1,4s\}$ и $S \subset A$ е такво што $|S|=2s+2$, тогаш во множеството S постојат три различни броја x,y,z такви што $x+y=2z$. Докажи!

Решение. Од принципот на Дирихле следува дека во множеството S постојат најмалку $s+1$ елемент со иста парност. Нека $1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_{s+1} \leq 4s$ се елементи од S со иста парност и нека $x_{s+2}, x_{s+3}, ..., x_{2s+2}$ се преостанатите елементи на S. Броевите

$$x_1+x_2 < x_1+x_3 < ... < x_1+x_{s+1} < x_2+x_{s+1} < ... < x_s+x_{s+1}$$

се парни, лежат во интервалот $[2,8s]$ и ги има $2s-1$. Понатаму, броевите

$$\{2x_i \mid i=1,2,...,2s+2\}$$

се парни, лежат во интервалот $[2,8s]$ и ги има $2s+2$. Бидејќи

$$(2s-1)+(2s+2)=4s+1>4s$$

а во интервалот $[2,8s]$ има $4s$ парни броеви, постојат i и j такви што $x_1+x_j=2x_i$ или $x_j+x_{s+1}=2x_i$, со што тврдењето е докажано.

36. Определи ги сите елементи $n \in A=\{2,3,...,2016\} \subset \mathbb{N}$ со следново својство: секој број $m \in A$ кој е помал од n и е заемно прост со n, мора да биде прост број.

Решение. Со M да го означиме бараното множество. Нека $n \in M$. Ако

$p^2 < n$ за некој прост број p, тогаш p мора да е делител на n. Имено, ако n и p се заемно прости, тогаш бидејќи $n \in M$ бројот p^2 треба да е прост број. Значи, ако $n \in M$ и $p^2 < n$, тогаш p е делител на n.

Бидејќи $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2016$, заклучуваме дека броевите од M не може да се поголеми од $11^2 = 121$.

Ако $n \in M$ и $49 < n \leq 121$, тогаш n е делив со 2, 3, 5 и 7, што не е можно бидејќи $n \leq 121$. Значи, мора да е $n \leq 49$,

Ако $n \in M$ и $25 < n \leq 49$, тогаш n е делив со 2, 3 и 5, од каде заклучуваме дека $n = 30$.

Ако $n \in M$ и $9 < n \leq 25$, тогаш n е делив со 2 и 3, па затоа $n \in \{12,18,24\}$.

Конечно, за $n \in M$ и $4 < n \leq 9$ бројот n мора да е делив со 2, од што следува $n \in \{6,8\}$. Очигледно, $2,3,4 \in M$, па затоа $M = \{2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$.

37. За едно множество природни броеви X ќе велиме дека е добро, ако за секои $a,b \in X$ точно еден од броевите $a+b$ и $|a-b|$ припаѓа на X (броевите a и b може да бидат еднакви). Определи го максималниот број добри множества кои го содржат бројот 2008.

Решение. Ќе дадеме целосен опис на добрите множества.

Нека X е добро множество и a е најмалиот елемент на X. Тогаш $0 = |a-a| \in X$, па затоа $2a = a+a \in X$. Оттука и од условот, применет на a и $2a$, бидејќи $a = |2a-a| \in X$ заклучуваме дека $3a = a+2a \notin X$. Сега со индукција следува дека за секој природен број k важи $(3k-2)a, (3k-1)a \in X$ и $3ka \notin X$.

Нека претпоставиме дека X има и бореви кои не се деливи со a и нека b е најмалиот меѓу нив. Тогаш $b > a$ и бројот $b-a = |b-a| \notin X$, бидејќи ако $b-a \in X$ добиваме противречност со изборот на b. Според тоа, $a+b \in X$. Сега, ако условот го примениме на a и $a+b$, заклучуваме, дека $2a+b \in X$. Понатаму, ако условот го примениме на $2a$ и b добиваме дека $|2a-b| \in X$, што не е можно бидејќи $|2a-b| < b$ не се дели со b.

Според тоа, секое добро множество е наполно определено со својот најмал елемент. Тоа може да го содржи бројот 2008, кога најмалку еден негов елемент е делител на 2008. Бидејќи бројот $2008 = 2^3 \cdot 5001$ има 8 природни делители, заклучуваме дека постојат точно 8 добри множества.

38. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S.

Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S.

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S. Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k-1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \le h(y) - h(x) \le k-1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\text{mod}\, k)\}$, $m = 1,2,...,k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S. Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

39. Нека $n > 2$ е природен број и $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ се по парови различни непразни подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$. Определи ја најголемата можна вредност на

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}, \text{ каде } A_{2n+1} = A_1 .$$

Решение. Ќе докажеме дека $\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \le \frac{1}{2}$. Ако $A_i \cap A_{i+1} = \varnothing$, тогаш имаме $|A_i \cap A_{i+1}| = 0$ и неравенството е очигледно. Нека $|A_i \cap A_{i+1}| = a \ge 1$. Тогаш или двете множества имаат повеќе од a елементи, или едното од двете множества има a елементи, а другото има најмалку $a+1$ елемент. И во двата случаја важи $|A_i| \cdot |A_{i+1}| \ge a(a+1)$, па затоа

$$\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \le \frac{a}{a(a+1)} = \frac{1}{a+1} \le \frac{1}{2} .$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \le \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} = n .$$

Оваа граница се достигнува со множествата

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{1,2\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{2,3\}, ..., A_{2n-1} = \{n\}, A_{2n} = \{n,1\} .$$

40. Во една вреќа се наоѓаат 255 топчиња означени со броевите 1, 2, ,3, ..., 255. Секој од N ученици од вреќата зел по едно топче. Се покажало дека ниту еден од извлечените броеви не е точно двапати поголем од некој друг извлечен број. Определи ја најголемата можна вредност на N.

Решение. Разгледуваните броеви да ги групираме во множествата

$A_0=\{1\}$, $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{4,5,6,7\}$, $A_3=\{8,9,...,15\}$
$A_4=\{16,17,...,31\}$, $A_5=\{32,33,...,63\}$, $A_6=\{64,65,...,127\}$, $A_7=\{128,129,...,255\}$.

Во множеството A_k, $k=0,1,2,...,7$ се наоѓаат 2^k броеви. Притоа сите броеви n и $2n$ се наоѓаат соодветно во множествата A_k и A_{k+1} за некој k. Нека се извлечени сите броеви од множествата A_1, A_3, A_5, A_7, што значи дека се извлечени 170 броеви и меѓу нив нема број кој е двапати поголем од друг број.

Ќе докажеме дека не е можно да се изберат повеќе од 170 броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Нека од множеството A_k, $k=0,1,2,...,7$ се извлечени a_k броеви. Да ги разгледаме множествата A_k и A_{k+1}. За секој $m\in A_k$ важи $2m\in A_{k+1}$. Вакви парови $(m,2m)$ има 2^k. Јасно е дека е извлечен најмногу еден број од секој пар. Освен овие броеви во множеството A_{k+1} има уште 2^k непарни броеви, па затоа од множествата A_k и A_{k+1} може да се извлечат најмногу $2^k+2^k=2^{k+1}$ броеви. Тоа значи дека

$$a_0+a_1\le 2^1,\ a_2+a_3\le 2^3,\ a_4+a_5\le 2^5,\ a_6+a_7\le 2^7\ .$$

Собирајќи ги овие неравенства добиваме

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\le 2^1+2^3+2^5+2^7=170\ ,$$

што значи дека најголемиот можен број N е 170.

41. а) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества A и B. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја x,y и z такви што $x+y=z$.

б) Дали за множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ е точно тврдењето од задачата под а).

Решение. а) Нека тврдењето на задачата не е исполнето. Значи множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ не може да се разбие на две дисјунктни подмножества за кој е исполнет условот на задачата.

Од условот $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ добиваме дека бројот 5 припаѓа на едно од множествата. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $5\in A$. Аналогно, бројот 4 припаѓа на точно на едно од множествата A и B и бројот 6 припаѓа точно на едно од множествата A и B. Во зависност од броевите 4,5 и 6 и направената претпоставка, ги имаме следните случаеви.

Случај 1. Нека $5\in A, 4\in A$. Тогаш $9\in B$ и $1\in B$. Според тоа $8\in A$. Бидејќи $5,8\in A$ добиваме дека $3\in B$. Но, од $1,3\in B$ добиваме $2\in A$, а од $2,4\in A$ имаме $6\in B$. Значи во овој случај $1,3,6,9\in B$, што не е можно и е спротивно од претпоставката на доказот.

Случај 2. Нека $5,6\in A, 4\in B$. Од $5,6\in A$ добиваме дека $1\in B$, а од $1,4\in B$ добиваме дека $3\in A$. Но од $3,5\in A$ добиваме дека $8\in B$. Сега, од $1,8\in B$ имаме $9\in A$. Значи, $3,5,6,9\in A$, што е спротивно на претпоставката од доказот.

Случај 3. Нека $5\in A; 4,6\in B$. Од $4,6\in A$ добиваме дека $2\in A$, а од $5,2\in A$ добиваме дека $3\in B$. Но сега, од $3,4\in B$ имаме $7\in A$. Значи, $2,5,7\in A$ што е спротивно на претпоставката од доказот.

Конечно, во било кое разбивање на множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на две дисјунктни подмножества A и B исполнет е условот од задачата.

б) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ може да се разбие на дисјунктни подмножества $A=\{1,2,4,8\}$ и $B=\{3,5,6,7\}$ за кои не е исполнет условот од задачата од делот а).

42. Нека $n\geq 3$ е природен број. Докажи, дека множеството $\{1,2,3,...,n^2-n\}$ може да се разбие на две дисјунктни множества такви што ниту едно од нив не содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ за кои важи $a_k\leq\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$.

Решение. За $k=1,2,...,n-1$ дефинираме

$$S_k=\{k^2-k+1,k^2-k+2,...,k^2\},\quad T_k=\{k^2+1,k^2+2,...,k^2+k\}$$

и нека $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}S_k$ и $T=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}T_k$. Лесно се проверува дека $S\cap T=\varnothing$ и $S\cup T=\{1,2,3,...,n^2-n\}$. Ќе докажеме дека ова разбивање го има саканото својство.

Нека претпоставиме, дека S содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ такви што $a_k\leq\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$. Нека $a_1\in S_i$ и нека $S'=\bigcup\limits_{j=i+1}^{n-1}S_j$. Бидејќи S_{n-1} има $n-1$ елемент, добиваме $i<n-1$. Според тоа, множеството $S'\cap\{a_1,a_2,...,a_n\}$ содржи њјамалку $n-|S_i|=n-i>0$ елементи. Но, множеството S' е унија на $n-i-1$ множества, па од принципот на Дирихле следува дека најмалку едно од овие множества содржи два елементи од $\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Значи, постојат k и j такви што $a_{k-1}\in\bigcup\limits_{l=1}^{j-1}S_l$ и $\{a_k,a_{k+1}\}\subset S_j$. Но, тогаш важи

$$a_{k+1}-a_k\leq|S_j|-1=j-1 \text{ и } a_k-a_{k-1}\geq|T_j|+1=j.$$

Според тоа, $a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$, т.е. $2a_k>a_{k+1}+a_{k-1}$, што е противречност.

Аналогно се докажува дека множеството T не содржи n броеви $a_1<a_2<...<a_n$ такви што $a_k\leq\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ за секој $k=2,3,...,n$.

43. Нека $A_1,A_2,...,A_{1066}$ се подмножества на конечното множество M такви што $|A_j|>\frac{1}{2}|M|$, за $j=1,2,...,1066$. Докажи, дека постојат елементи $x_1,x_2,...,x_{10}$ од M такви што секој A_j содржи најмалку еден елемент од $x_1,x_2,...,x_{10}$.

Решение. Од $|A_j|>\frac{1}{2}|M|$, за $j=1,2,...,1066$ следува дека

$$|A_1|+|A_2|+...+|A_{1066}|>533|M|.$$

Од принципот на Дирихле заклучуваме дека постои $x_1\in M$ кој се содржи најамалку во 534 од множествата $A_1,A_2,...,A_{1066}$. Овие множества да ги означиме со $B_1,B_2,...,B_{534}$.

Аналогно докажуваме дека постојат елементи $x_2, x_3, ..., x_{10}$ за кои важи

$$x_2 \in B_{266} \cap B_{267} \cap ... \cap B_{532} \qquad x_3 \in B_{133} \cap B_{134} \cap ... \cap B_{265}$$
$$x_4 \in B_{66} \cap B_{67} \cap ... \cap B_{132} \qquad x_5 \in B_{33} \cap B_{34} \cap ... \cap B_{65}$$
$$x_6 \in B_{16} \cap B_{17} \cap ... \cap B_{32} \qquad x_7 \in B_8 \cap B_9 \cap ... \cap B_{15}$$
$$x_8 \in B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7 \qquad x_9 \in B_2 \cap B_3, \quad x_{10} \in B_1,$$

каде $(B_1, B_2, ..., B_{1066})$ е некоја пермутација на множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$. Значи, секое подмножество $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ содржи најмалку еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

44. Дадено е множество M од 2^{2015} природни броеви, секој од кои има 2014 цифри. Секои два од овие броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{2015}. Колку најмалку различни цифри учествуваат во декадните записи на броевите од M ?

Решение. Ако броевите x и y даваат различни остатоци при делење со 2^n, тогаш од $10x + c \equiv 10y + c(\mod 2^{n+1})$ следува дека после допишувањето на произволна цифра од десно, новите броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{n+1}. Според тоа, ако имаме полн систем на остатоци по модул 2^n, после допичување на 1 (од ови броеви ќе се добијат различни непарни остатоци, а после допишување на 2 од овие броеви ќе се добијат различни парни остатоци, па добиваме полн систем на остатоци по модул 2^{n+1}.

Почнувајќи од 1, 2, 3, 4 кои формираат полн систем на остатоци по модул 2^2, добиваме пример со 4 различни цифри, кои го задоволуваат условот на задачата.

Нека претпоставиме дека такво множество можеме да конструираме со три цифри a, b и c. Цифрите a, b и c не се со еднаква парност, бидејќи во спротивен случај сите остатоци по модул 2^{2015} ќе бидат со еднаква парност и нема да формираат полн систем на остататоци. Нека a и b се непарни, а c е парна (другиот случајс е разгледува аналогно). Бидејќи броевите од M формираат полн систем на остатоци, половината од броевите во M се парни, а половината се непарни. Бидејќи c е единствена парна цифра, добиваме дека сите парни броеви од M завршуваат на c. Ако ја избришеме последната цифра од овие броеви, ќе добиеме полн систем на остатоци од различни 2013-цифрени броеви по модул 2^{2014}, бидејќи ако $x \equiv y(\mod 2^{2014})$, тогаш $10x + c \equiv 10y + c(\mod 2^{2015})$. За новото множество го повоторуваме размислувањето и добиваме полн систем на остатоци по модул 2^{2013}, составен од 2012-цифрени броеви. Продолжувајќи на овој начин ќе добиеме полн систем на остатоци по модул $2^2 = 4$ составен од различни едноцифрени броеви. Последното противречи на фактот дека имаме само три едноцифрени броеви a, b и c.

45. Определи го најмалиот природен број k со следново својство: за секое $k-$ елементно подмножество A на множеството $S = \{1, 2, ..., 2012\}$ постојат $a, b, c \in S$, $a \neq b \neq c \neq a$ такви што $a + b, b + c, c + a \in A$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a<b<c$. Ако $x=a+b, y=a+c$ и $z=b+c$, тогаш $x<y<z, x+y>c$ и $x+y+z$ е парен број. Обратно, ако $x,y,z\in A$ се такви што $x<y<z, x+y>z$ и $x+y+z$ е парен број, тогаш

$$a=\frac{x+y-z}{s}, b=\frac{x+z-y}{2}, c=\frac{y+z-x}{2}$$

се различни елементи од S и $x=a+b, y=a+c$ и $z=b+c$.

Од досега изнесеното следува дека задачата е еквивалентна на задачата: за секое $k-$елементно подмножество A од S постојат три елементи на A такви што

$$x<y<z, x+y>z, \text{ и } x+y+z \text{ е парен број.} \qquad (1)$$

За множеството $A=\{1,2,3,5,7,9,11,...,2011\}$ имаме $|A|=1007$ и лесно се докажува дека A не содржи три елементи со саканото својство. Според тоа, $k\geq 1008$. Ќе докажеме дека секое 1008-елементно подмножество на S го има својството (1).

Со индукција по n ќе го докажеме следново тврдење: за секој $n\geq 4$ секое $n+2$ елементно подмножество на множеството $\{1,2,3,4,...,2n\}$ содржи три елементи кои ги задоволуваат условите (1).

За $n=4$ нека A е 6-елементно подмножество на $\{1,2,3,...,8\}$. Бидејќи тројката 4, 6, 8 го има својството (1), нека барем еден од елементите 4, 6, 8 не е во A. Ако $4\notin A$, тогаш ги разгледуваме тројките 3, 6, 7; 5, 6, 7; 5, 7, 8 и 3, 5, 6, секоја од кои го задоволува условот (1). Аналогно се разгледуваат случаите кога $6\notin A$ и $8\notin A$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n\geq 4$ и нека A е $n+3$ елементно подмножество на множеството $\{1,2,3,4,...,2n+2\}$. Ако

$$|A\cap\{1,2,...,2n\}|\geq n+2,$$

тогаш тврдењето следува од индуктивната претпоставка. Останува да го разгледаме случајот кога

$$|A\cap\{1,2,...,2n\}|=n+1 \text{ и } 2n+1,2n+2\in A.$$

Ако A содржи непарен број $x>1$ од множеството $\{1,2,...,2n\}$, тогаш тројката $x,2n+1,2n+2$ го задоволува условот (1). Во спротивно

$$A=\{1,2,4,6,...,2n,2n+1,2n+2\}$$

и тројката 4, 6, 8 го задоволува условот (1).

Од претходно изнесеното следува дека $k=\frac{2012}{2}+2=1008$.

46. Множеството X се состои од осум последователни природни броеви и е поделено на две дисјунктни подмножества A и B со еднаков број елементи. Ако збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B, докажи дека тогаш збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

Решение. Ако a е најмалиот елемент на множеството X, тогаш

$$X=\{a,a+1,a+2,...,a+7\}.$$

Нека $X=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$ и нека збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството

B. Со S_X, S_A, S_B да ги означиме збиротвите на квадратите на елементите на множествата X, A, B, соодветно. Според условот на задачата имаме $S_A = S_B = \frac{1}{2}S_X$. Ќе го определиме збирот S_X. Имаме

$$S_X = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + ... + (a+7)^2 = 8a^2 + 56a + 140 .$$

Значи, $S_A = S_B = 4a^2 + 28a + 70$.

Имаме, $a+7 \in X$ и $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+7 \in A$ и $a+7 \notin B$. Нека $a+i, a+j, a+k, i, j, k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ се останатите елементи на множеството A. Тогаш

$$\begin{aligned} S_A &= (a+i)^2 + (a+j)^2 + (a+k)^2 + (a+7)^2 \\ &= 4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49. \end{aligned}$$

Но, $S_A = 4a^2 + 28a + 70$, па затоа

$$4a^2 + 28a + 70 = 4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49 ,$$

т.е.

$$2a(i+j+k+7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2) . \qquad (1)$$

Збирот на елементите на множеството X е $a+28$, а збирот на елементите на множеството A е $i+j+k+7$. Треба да докажеме дека множествата A и B имаат еднакви збирови на елементите, т.е. дека збирот на елементите на множеството A е еднаков на $4a+14$, од каде добиваме $i+j+k=7$.

Нека претпоставиме дека $i+j+k>7$, т.е. $i+j+k \geq 8$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за различните ненегативни броеви следува $\sqrt{\frac{i^2+j^2+k^2}{3}} > \frac{i+j+k}{3} \geq \frac{8}{3}$, па затоа

$$i^2 + j^2 + k^2 \geq \tfrac{64}{3} > 21 . \qquad (2)$$

Од $i+j+k>7$, следува дека левата страна на (1) е позитивна, па затоа и десната страна треба да е позитивна, т.е. $21-(i^2+j^2+k^2)>0$, па затоа $i^2+j^2+k^2>21$, што противречи на (2). Од добиената противречност следува $i+j+k \leq 7$. Нека претпоставиме дека $i+j+k<7$. Левата страна на (1) е парен број, па затоа и десната мора да е парен број. Но, тогаш $i^2+j^2+k^2$ е непарен број, па затоа и $i+j+k$ е непарен број. Бидејќи овој број е помал од 7, тој може да биде или 1 или 3 или 5.. Но, i, j, k се различни елементи од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, па затоа можни се следниве случаи: $\{i, j, k\} \in \{\{0,1,2\}, (0,1,4\}, \{0,2,3\}\}$. Оттука следува дека $i^2+j^2+k^2 \in \{5,13,17\}$, т.е. $i^2+j^2+k^2<21$, па затоа десната страна на (1) е позитивна, а од $i+j+k<7$ следува дека левата страна на (1) е негативна, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $i+j+k=7$, што и требаше да се докаже.

47. Нека $A=\{1,2,...,2008\}$. Ќе велиме дека едно множество е од тип r $(r=0,1,2)$ ако тоа е подмножество од A и збирот на неговите елементи при делење со 3 дава остаток r. Нека X_r е класата множества од тип r. Определи која од класите X_0, X_1, X_2 е најголема.

Решение. Кон X_0 да го додадеме празното множество и со $X_{r,n}$ да ја означиме класата подмножества од тип r на $\{1,2,...,n\}$. После пермутација на $n+1, n+2, n+3$ добиваме три броја $a\equiv 0(\mathrm{mod}\,3), b\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $c\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Тогаш $X_{0,n+3}$ се сотои од:

- множествата од $X_{0,n}$ со додадено $\varnothing, \{a\}, \{b,c\}$ или $\{a,b,c\}$,
- множествата од $X_{1,n}$ со додадено $\{c\}$ или $\{a,c\}$,
- множествата од $X_{2,n}$ со додадено $\{b\}$ или $\{a,b\}$.

Според тоа,

$$|X_{0,n+3}|=4|X_{0,n}|+2|X_{1,n}|+2|X_{2,n}|$$

и аналогно

$$|X_{1,n+3}|=2|X_{0,n}|+4|X_{1,n}|+2|X_{2,n}|,\ |X_{2,n+3}|=2|X_{0,n}|+2|X_{1,n}|+4|X_{2,n}|$$

Бидејќи $|X_{0,1}|=|X_{1,1}|=1$ и $|X_{2,1}|=1$, по индукција следува дека

$$|X_{0,3n+1}|=|X_{1,3n+1}|>|X_{2,3n+1}|.$$

Но, $2008=3\cdot 669+1$ и $|X_0|=|X_{0,2008}|-1$, па затоа $|X_1|>|X_0|>|X_2|$.

48. Нека A е множество со n^2, ($n\geq 2$) елементи, $\mathbf{F}$ е фамилија подмножества од A такви што секое од нив има n елементи и секои две различни множества од $\mathbf{F}$ имаат најмногу еден заеднички елемент. Докажи,

а) фамилијата $\mathbf{F}$ има најмногу n^2+n елементи,

б) горната граница може да се достигне за $n=3$.

Решение. а) За фиксиран елемент $x\in A$ со $k(x)$ да го означиме бројот на множествата $B\in\mathbf{F}$ кои го содржат елементот x. Овие множества да ги означиме со $B_1, B_2, ..., B_{k(x)}$. Тогаш множествата $B_1\setminus\{x\}, B_2\setminus\{x\}, ..., B_{k(x)}\setminus\{x\}$ се дисјунктни подмножества на множеството $A\setminus\{x\}$. Бидејќи секое од овие множества има $n-1$ елемент, а множеството A има n^2-1 елементи, заклучуваме дека важи $k(x)\leq\frac{n^2-1}{n-1}=n+1$. Повторувајќи ја постапката за секој елемент $x\in A$ и ако ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$\sum_{x\in A}k(x)\leq n^2(n+1).$$

Меѓутоа,

$$\sum_{x\in A}k(x)=\sum_{B\in\mathbf{F}}|B|=n|\mathbf{F}|,$$

па затоа $|\mathbf{F}|\leq n^2+n$.

б) Да ги распределиме елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во табела:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

и множествата на фамилијата $\mathbf{F}$ да ги оформиме како редици, колони и „дијагонали“ на оваа фамилија. Така ги добиваме множествата:

$$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},$$

$$\{1,6,8\},\{2,4,9\},\{3,5,7\},\{3,4,8\},\{2,6,7\},\{1,5,9\}.$$

49. Нека $x_1,x_2,...,x_{2n}$ се произволни реални броеви. Докажи, дека овие броеви можат да се разделат на две множества A и B од по n броеви така што разликата на збировите $S(A)$ и $S(B)$ на броевите во множествата го задоволуваат неравенството

$$|S(A)-S(B)|\leq \max_{1\leq i<2n}|x_{i+1}-x_i|.$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ тврдењето е очигледно. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n\geq 1$ и да ги разгледаме броевите $x_1,x_2,...,x_{2n},x_{2n+1},x_{2n+2}$. Тогаш, ако $M=\max\limits_{1\leq i<2n+2}|x_{i+1}-x_i|$, точни се неравенствата $\max\limits_{3\leq i<2n+2}|x_{i+1}-x_i|\leq M$ и $|x_1-x_2|\leq M$.

Од индуктивната претпоставка следува дека броевите $x_3,...,x_{2n},x_{2n+1},x_{2n+2}$ може да се разделат во две множества A и B од по n броеви, за кои важи

$$|S(A)-S(B)|\leq \max_{2\leq i<2n+2}|x_{i+1}-x_i|\leq M.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $S(A)\geq S(B)$ и $x_1\geq x_2$. Да ги разгледаме множествата $A\cup\{x_2\}$ и $B\cup\{x_1\}$. Ако искористиме дека за позитивни реални броеви x и y важи $|x-y|\leq\max\{x,y\}$, тогаш за соодветните збирови имаме

$$\begin{aligned}|S(A)+x_2-S(B)-x_1|&=|(S(A)-S(B))-(x_1-x_2)|\\&\leq\max\{S(A)-S(B),x_1-x_2\}\leq M.\end{aligned}$$

Според тоа, тврдењето важи за $n+1$, со што задачата е решена.

50. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството $\{1,2,...,3n\}$ може да се подели на n дисјунктни триелементни подмножества $\{a,b,c\}$ за кои $b-a$ и $c-b$ се различни броеви од множеството $\{n-1,n,n+1\}$.

Решение. Бараната поделба на множеството $\{1,2,...,3n\}$ соодветствува на поделбата на темињата на правилен $3n-$аголник $P_1P_2...P_{3n}$ на тројки $\{A_i,B_i,C_i\}$ такви да аглите на секој од триаголниците $A_iB_iC_i$ се еднакви на $\frac{n-1}{3n}\pi,\frac{n}{3n}\pi$ и $\frac{n+1}{3n}\pi$. Со погодно означување на темињата на $3n-$аголникот можеме да постигнеме темињата A_1,B_1,C_1 да бидат точно темињата P_n,P_{2n-1},P_{3n}. Со други зборови, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека меѓу тројките $\{a,b,c\}$ на кои множеството $\{1,2,...,3n\}$ е поделено се наоѓа и тројката $\{n-1,n,n+1\}$.

Една од преостанатите тројки мора да содржи два броја од интервалот

$[2n, 3n-1]$, а тоа единствено може да бидат броевите $2n$ и $3n-1$. Единствена тројка која ги содржи овие броеви и не го содржи n е $\{n-1, 2n, 3n-1\}$. Сите останати тројки содржат точно по еден број од секој од интервалите $[1, n-2]$, $[n+1, 2n-2]$ и $[2n+1, 3n-2]$. Со пресликувањето $(a,b,c) \to (a, b-2, c-4)$, за $a<b<c$ добиваме соодветна поделба на множеството $\{1,2,...,3n-2\}$. Бидејќи за $n=1$ ваква поделба не е можна со едноставна индукција се докажува дека поделбата не е можна ниту за еден непарен број n.

Од друга страна, за $n=2m$ тројките

$$(2i-1, 2i+n, 2i+2n-1) \text{ и } (2i, 2i+n-1, 2i+2n), \text{ за } i=1,2,...,m$$

ги задоволуваат условите на задачата.

51. Дадени се конечни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ такви што

$$|A_i \cap A_{i+1}| > \tfrac{n-2}{n-1} |A_{i+1}|,$$

за секој $i=1,2,...,n$ ($A_{n+1} = A_1$). Докажи дека пресекот на овие множества е непразно множество.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека множеството A_1 има најмногу елементи. Да означиме $B_i = A_i \cap A_{i+1}$, за $i=1,2,...,n$. Бидејќи $B_n \cup B_{n-1} \subset A_n$, добиваме

$$|A_n| \ge |B_n \cup B_{n-1}| = |B_n| + |B_{n-1}| - |B_n \cap B_{n-1}|$$
$$> \tfrac{n-2}{n-1} |A_n| + \tfrac{n-2}{n-1} |A_1| - |B_n \cap B_{n-1}|.$$

Затоа

$$|B_n \cap B_{n-1}| > \tfrac{n-2}{n-1} |A_1| - \tfrac{1}{n-1} |A_n| > \tfrac{n-3}{n-1} |A_1|,$$

т.е. $|A_n \cap A_{n-1} \cap A_1| > \frac{n-3}{n-1} |A_1|$. Освен тоа, ако $C = A_n \cap A_{n-1} \cap A_1$, тогаш $A_{n-1} \supset C \cup B_{n-2}$ и

$$|A_{n-1}| \ge |B_{n-2} \cup C| = |B_{n-2}| + |C| - |B_{n-2} \cap C|$$
$$> \tfrac{n-2}{n-1} |A_{n-1}| + \tfrac{n-3}{n-1} |A_1| - |B_{n-2} \cap C|.$$

Така,

$$|B_{n-2} \cap C| > \tfrac{n-3}{n-1} |A_1| - \tfrac{1}{n-1} |A_{n-1}| \ge \tfrac{n-4}{n-1} |A_1|,$$

т.е. $|A_n \cap A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap A_1| > \frac{n-4}{n-1} |A_1|$. Понатаму, со индукција лесно се покажува дека

$$|A_n \cap A_{n-1} \cap ... \cap A_{n-k} \cap A_1| > \tfrac{n-k-2}{n-1} |A_1|,$$

за $k = 1,2,...,n-2$. Во случајов за $k=n-2$ добиваме

$$|A_n \cap A_{n-1} \cap ... \cap A_2 \cap A_1| > 0,$$

што и требаше да се докаже.

52. Нека $A = \{A_i\}_{1 \le i \le n}$ и $B = \{B_i\}_{1 \le i \le n}$ се две разбивања на множеството M, такви што унијата $A_i \cup B_j$, на произволни две дисјунктни множества A_i и B_j не содржи помалку од n елементи. Докажи дека $|M|\geq \frac{n^2}{2}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата имаме $A_i \cap A_j = \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, за $i \neq j$, $i,j = 1,2,...,n$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = M$, Со $|A_i|$ и $|B_j|$ ќе го означиме бројот на елементи во множеството A_i и B_j, соодветно.

Множеството $S = \{|A_i|, |B_i| \mid i = 1,2,...,n\}$ е конечно, па според тоа во него постои најмал елемент, т.е. постои $k \in S$, таков што

$$k \leq |A_i|,\ k \leq |B_i|,\ i = 1,2,...,n.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|A_1| = k$ (во спротивен ќе извршиме преозначување на множествата).

Ако $k > \frac{n}{2}$, тогаш од принципот на збир заради дисјунктноста на фамилиите множества имаме

$$|M| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| > \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2} = n\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2},$$

што значи дека е исполнето тврдењето од задачата.

Нека $k \leq \frac{n}{2}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $B_1, B_2, ..., B_m$ се сите множества од фамилијата $B = \{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$ кои имаат непразен пресек со множеството A_1, а $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$ се дисјунктни со множеството A_1.

Ќе докажеме дека $m \leq k$. Навистина, од $B_i \cap B_j = \varnothing$, за $i \neq j$, $i,j = 1,2,...,n$, добиваме дека

$$(A_1 \cap B_i) \cap (A_1 \cap B_j) = \varnothing,$$

па затоа

$$\begin{aligned} k &= |A_1| = |A_1 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_m| \\ &= |(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_3) \cup ... \cup ((A_1 \cap B_m)| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |(A_1 \cap B_i)| \geq \sum_{i=1}^{m} 1 = m. \end{aligned}$$

Од изборот на бројот k следува дека секое од множествата $B_1, B_2, ..., B_m$ содржи барем k елементи и бидејќи овие множества се дисјунктност добиваме дека

$$|\bigcup_{i=1}^{n} B_i| = \sum_{i=1}^{m} |B_i| \geq \sum_{i=1}^{m} k = mk.$$

Од условот на задачата и фактот дека множества $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$ се дисјунктни со множеството A_1 следува дека

$$|A_1 \cup B_i| \geq n,\ i = m+1, ..., n. \qquad (1)$$

Сега од (1) и од формулата за вклучување и исклучување следува дека

$$|A_1 \cup B_j| = |A_1| + |B_j| - |A_1 \cap B_j| = k + |B_j| \geq n, \text{ за } j = m+1, ..., n,$$

т.е. $|B_j| \geq n-k$, за $j = m+1, ..., n$. Според тоа,

$$|\bigcup_{i=m+1}^{n} B_i| = \sum_{i=m+1}^{n} |B_i| \geq \sum_{i=m+1}^{n} (n-k) = (n-k)(n-m) .$$

Сега

$$|\bigcup_{i=1}^{n} B_i| = |\bigcup_{i=1}^{m} B_i \cup \bigcup_{i=m+1}^{n} B_i| = |\bigcup_{i=1}^{m} B_i| + |\bigcup_{i=m+1}^{n} B_i|$$
$$\geq km + (n-k)(n-m) = 2(k-\tfrac{n}{2})^2 + \tfrac{1}{2}n^2 \geq \tfrac{1}{2}n^2$$

Изразот $2(k-\frac{n}{2})^2 + \frac{1}{2}n^2$ достигнува минимум за $k = \frac{n}{2}$. Не е тешко да се провери дека равенство важи за $A_i = B_i$, $i = 1, 2, ..., n$ и $|A_i| = |B_i| = \frac{n}{2}$, $i = 1, 2, ..., n$.

53. Нека F е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

1) Ако $A \in F$, тогаш $|A| = 3$.

2) Ако $A, B \in F$ и $A \neq B$, тогаш $|A \cap B| \leq 1$.

Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|F|$ за сите такви множества F. Докажи, дека за $n \geq 3$ важи

$$\frac{n^2-4n}{6} \leq f(n) \leq \frac{n^2-n}{6} .$$

Решение. Нека F е произвона фамилија од триелементни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ која ги има саканите својства. Секој $A \in F$ има 3 двоелементни подмножества, при што заради 2) за $A, B \in F$, $A \neq B$ не е можно да содржат едно исто двоелементно подмножество. Тоа значи, дека множествата од F заедно содржат $3|F|$ различни двоелементни подмножества на $\{1, 2, ..., n\}$. Според тоа, $3|F| \leq \binom{n}{2}$, па затоа $f(n) \leq \frac{n^2-n}{6}$.

Нека $F_n = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in \{1, 2, ..., n\}, x + y + z \equiv 0 (\bmod n)\}$. Ќе докажеме, дека F_n ги има саканите својства и

$$|F_n| \geq [\tfrac{n^2-3n+6}{6}] \geq [\tfrac{n^2-4n}{6}].$$

Очигледно условот 1) е исполнет. Ако претпоставиме дека $A, B \in F_n$, $A \neq B$ и $|A \cap B| = 2$, тогаш без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $A = \{x, y, z_1\}, B = \{x, y, z_2\}$ при што $z_1 \neq z_2$. Но, од дефиницијата на F_n имаме $n | (x + y + z_1) - (x + y + z_2)$, што е можно ако и само ако $z_1 = z_2$, противречност.

Да означиме

$$G_1 = \{\{x\} : x \in \{1, 2, ..., n\}, 3x \equiv 0 (\bmod n)\}, a = |G_1|,$$
$$G_2 = \{\{x, y\} : x, y \in \{1, 2, ..., n\}, 2x + y \equiv 0 (\bmod n)\}, b = |G_2| .$$

Понатаму, збирот $a + 3b + 6|F_n|$ е еднаков на бројот на тројките $(x, y, z), x, y, z \in \{1, 2, ..., n\}$ кои ја задоволуваат конгруенцијата $x + y + z \equiv 0 (\bmod n)$. Од друга страна, бројот на овие тројки е еднаков на n^2, бидејќи секој избор на x и y еднозначно го определува z.

Лесно се докажува дека $a=1$ ако n не се дели со 3 и дека $a=3$ ако n се дели со 3. Понатаму, важи $b=n$, бидејќи секој избор на x еднозначно го определува y. Според тоа,

$$|F_n|\geq \frac{n^2-a-3b}{6}\geq \frac{n^2-3n+6}{6},$$

со што доказот е завршен.

54. Докажи, дека постои подмножество A на множеството $\{1,2,3,...,2^{1996}-1\}$ со следниве својства:

1) $1, 2^{1996}-1\in A$,
2) Секој елемент од $A\setminus\{1\}$ е збир на два (не задолжително различни) елементи од A,
3) Бројот на елементите на A е најмногу 2012.

Решение. Нека $f(n)$ е најмалиот можен број на елементи на подмножеството A од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$ кое ги задоволува условите 1) и 2). Тогаш

- $f(2^{n+1}-1)\leq f(2^n-1)+2$. Навистина, $B=A\cup\{2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1\}$ е подмножество на $\{1,2,3,...,2^{n+1}\}$ кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи $2^{n+1}-2=2^n-1+2^n-1$ и $2^{n+1}-1=1+2^{n+1}-2$.
- $f(2^{2n}-1)\leq f(2^n-1)+(n-1)$. Навистина $C=A\cup\{2(2^n-1), 2^2(2^n-1),...,2^n(2^n-1),\quad 2^{2n}-1\}$ е подмножество на $\{1,2,3,...,2^{2n}-1\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{j+1}(2^n-1)=2^j(2^n-1)+2^j(2^n-1), \text{ за } j=0,1,...,n-1 \text{ и}$$

$$2^{n+1}-1=2^n(2^n-1)+2^n-1.$$

Тогаш

$$f(2^{1996}-1)\leq f(2^{998}-1)+999,\quad f(2^{998}-1)\leq f(2^{499}-1)+500,$$
$$f(2^{499}-1)\leq f(2^{498}-1)+2,\quad f(2^{499}-1)\leq f(2^{249}-1)+250,$$
$$f(2^{249}-1)\leq f(2^{248}-1)+2,\quad f(2^{248}-1)\leq f(2^{124}-1)+125,$$
$$f(2^{124}-1)\leq f(2^{62}-1)+63,\quad f(2^{62}-1)\leq f(2^{31}-1)+32,$$
$$f(2^{31}-1)\leq f(2^{30}-1)+2,\quad f(2^{30}-1)\leq f(2^{15}-1)+16,$$
$$f(2^{15}-1)\leq f(2^{14}-1)+2,\quad f(2^{14}-1)\leq f(2^{7}-1)+8,$$
$$f(2^{7}-1)\leq f(2^{6}-1)+2,\quad f(2^{6}-1)\leq f(2^{3}-1)+4,$$
$$f(2^{3}-1)\leq f(2^{2}-1)+2,\quad f(2^{2}-1)\leq f(2^{1}-1)+2,$$
$$f(2^{1}-1)\leq 1.$$

Ако ги собереме горните неравенства, после скратувањето добиваме

$$f(2^{1996}-1)\leq 2012.$$

55. Нека фамилиите $A=\{A_i\}_{1\le i\le n}$, $B=\{B_j\}_{1\le j\le n}$ и $C=\{C_k\}_{1\le k\le n}$ се разбивања на конечното множество M такви што за секои i,j,k, $1\le i,j,k\le n$ важи

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\ge n. \tag{1}$$

Докажи дека $|M|\ge\frac{n^3}{3}$. Докажи дека за $n\in\mathbb{N}$, $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ може да важи знак за равенство.

Решение. Бидејḱи фамилијата $B=\{B_i\}_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$ фамилиите $\{B_j\cap A_i\}_{1\le j\le n}$ е разбивање на A_i и за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ фамилијата $\{B_j\cap C_k\}_{1\le j\le n}$ е разбивање на C_k. Според тоа, ако за $j=1,2,...,n$ ги собереме неравенствата (1) добиваме

$$n^2=n\cdot n\le\sum_{j=1}^{n}(|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|)=|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|\quad .(2)$$

Фамилијата $A=\{A_i\}_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, па затоа за секој $k=1,2,...,n$ фамилијата $\{A_i\cap C_k\}_{1\le i\le n}$ е разбивање и на множеството C_k. Според тоа, ако за $i=1,2,...,n$ ги собереме неравенствата (2) добиваме

$$n^3=n^2n\le\sum_{i=1}^{n}(|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|)=|M|+n|M|+n|C_k|. \tag{3}$$

Конечно, бидејḱи $C=\{C_k\}_{1\le k\le n}$ е разбивање на множеството M, ако за $k=1,2,...,n$ ги собереме неравенствата (3) добиваме

$$n^4=n^3n\le\sum_{k=1}^{n}(|M|+n|M|+n|C_k|)=n|M|+n|M|+n|M|.$$

Конечно, од последното неравенство следува дека $|M|\ge\frac{n^3}{3}$.

Нека $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ и M е множество со $\frac{n^3}{3}$ елементи. Множеството M ḱе го разбиеме на n^2 множества $A_{i,j}$, $i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,n$, такви што

$$A_{i,j}\cap A_{k,l}=\varnothing,\ (i,j)\ne(k,l)\ \text{ и }\ |A_{i,j}|=\frac{n}{3}.$$

Ḱе ги формираме множествата

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j},\quad B_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i},\quad C_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i+j-1(\mathrm{mod}\,3)}$$

Не е тешко да се провери дека $A=\{A_i\}_{1\le i\le n}$, $B=\{B_j\}_{1\le j\le n}$ и $C=\{C_k\}_{1\le k\le n}$ се разбивања на множеството M, при што

$$\begin{aligned}|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|&=|A_{i,j}|+|A_{j+k-1(\mathrm{mod}\,n),j}|+|A_{i,k+i-1(\mathrm{mod}\,n)}|\\&=\frac{n}{3}+\frac{n}{3}+\frac{n}{3}=n.\end{aligned}$$

56. Нека S е множество од n различни реални броеви, а A_S е множеството од аритметичките средини на паровите броеви од S. За дадено $n\ge 2$ определи го најмалиот можен број елементи во множеството A_S.

Решение. Нека $x_1 < x_2 < ... < x_n$, $x_i \in S$, за $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш

$$\frac{x_1+x_2}{2} < \frac{x_1+x_3}{2} < ... < \frac{x_1+x_n}{2} < \frac{x_2+x_n}{2} < \frac{x_3+x_n}{2} < ... < \frac{x_{n-1}+x_n}{2}.$$

Во горните неравенства има $2n-3$ броеви, па значи бројот на елементите на A_S е поголем или еднаков на $2n-3$. Од друга страна, за $S = \{1, 2, ..., n\}$ имаме $A_S = \{\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, ..., \frac{2n-1}{2}\}$ што значи дека множеството A_S има $2n-3$ елементи.

Значи, најмалиот можен број елементи на A_S е $2n-3$.

57. Нека $S \subseteq \mathbb{N}$ и S ги има следниве својства:

а) меѓу секој 2003 последователни природни броеви постои барем еден број кој припаѓа на S,

b) ако $n \in S$ и $n > 1$, тогаш $[\frac{n}{2}] \in S$.

Докажи дека $S = \mathbb{N}$.

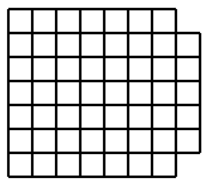
Решение. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $f(m) = [\frac{m}{2}]$. Со функцијата f, бројот n може да се добие од броевите $2n$ и $2n+1$, тие може да се добијат од броевите $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, итн. Заклучуваме дека со 11 примени на функцијата f, бројот n може да се добие од броевите $2^{11}n$, $2^{11}n+1$, $\dots$, $2^{11}n+(2^{11}-1)$. Тоа се $2^{11} > 2003$ последователни природни броеви, па барем еден од нив е од множеството S. Следува дека и бројот n е од множеството S.

3. БОЕЊА И ПОКРИВАЊА

1. Дали може квадратна табла со димензии 10×10 да се покрие со 1×4 тетрамина.

Решение. Да ја обоиме таблата со како во претходната задача. При вакво боење имаме 25 обоени квадратчиња, што е непарен број, а секое 1×4 тетрамино покрива 0 или 2 обоени квадратчиња, т.е. со 25 тетрамина ќе бидат покриени парен број обоени квадратчиња. Според тоа, квадратна табла со димензии 10×10 не може да се покрие со 1×4 тетрамина.

2. Да се докаже дека следната фигура која е составена од 54 единечни квадрати, не може да се препокрие со правоаголници чии страни се 3 и 1.

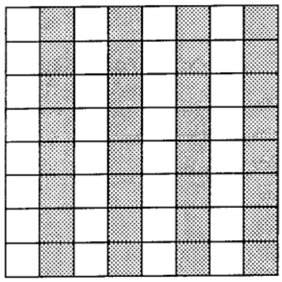


Решение. Да претпоставиме дека дадената фигура може да се покрие со правоаголници чии страни се 3 и 1. Секое поле на ова фигура го биоме со една од боите: сина, жолта и црвена како што е покажано на цртежот. На секој правоаголник ќе има едно сино, жолто и црвено поле. Значи, на фигурате ќе има 18 сини, 18 жолти и 18 црвени полиња. Со непосредно броење на полињата се гледа дека има 19 сини, 17 жолти и 18 црвени полиња, што претставува противречност.

с	ж	ц	с	ж	ц	с	
ж	ц	с	ж	ц	с	ж	ц
ц	с	ж	ц	с	ж	ц	с
с	ж	ц	с	ж	ц	с	ж
ж	ц	с	ж	ц	с	ж	ц
ц	с	ж	ц	с	ж	ц	с
с	ж	ц	с	ж	ц	с	

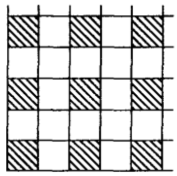
а) б)

3. Докажи, дека табла со димензии 8×8 не може да се покрие со 15 тетрамина од облик на цртеж а) и едно тетрамино од облик на цртеж б).



Решение. Таблата ќе ја обоиме како на цртежот десно. При вакво боење секое тетрамино а) покрива три бели и едно црно поле или три црни и едно бело поле, а секое тетрамино б) покрива 2 бели и 2 црни полиња. Според тоа, 15 тетрамина од облик а) покриваат непарен број црни и непарен број бели полиња, па како едното тетрамино од облик б) покрива 2 бели и 2 црни полиња заклучуваме дека со расположливите тетрамина може да покриеме непарен број црни и непарен број бели полиња. Но, нашето боење на таблата има парен број црни и парен број бели полиња, па затоа таа не може да се покрие со дадените тетрамина.

4. Правоаголна табла со димензии $m\times n$ е покриен со 2×2 и 1×4 тетрамина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од правоаголникот. Докажи, дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетратмино 1×4.

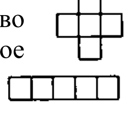


Решение. Броејќи од долниот лев агол на таблата со димензии $m\times n$ да ги обоиме непарните квадратчињата на непарните редови (цртеж десно). При вакво боење 1×4 тетрамино покрива или две или ниту едно обоено квадратче, а 2×2 тетрамино со покрива едно обоено квадратче. Ќе разгледаме два случаја.

Нека со 2×2 тетраминатa се покриени $2k+1$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња. Ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетрамино 1×4, тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m+1)$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

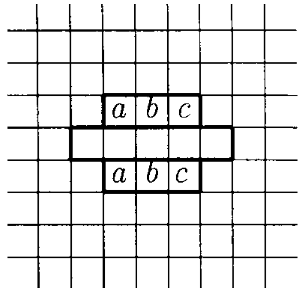
Нека со 2×2 тетраминатa се покриени $2k$ обоени полиња, а со 1×4 се покриени $2m$ обоени полиња, т.е. вкупно се покриени $2(k+m)$ обоени полиња. Ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тетрамино 1×4, тогаш вкупно ќе да бидат покриени $2(k+m)+1$ обоени полиња, што е противречност бидејќи бројот на обоените полиња е константен.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека таблата не може да се покрие на опишаниот начин со истите тетрамина, ако едно од тетраминатa 2×2 се замени со тератмино 1×4.



5. Нека рамнината е поделена со хоризонтални и ветикални прави на 1×1 квадратчиња, кои се обиени во 5 бои така што секое квадратче во секој крст (цртеж десно) е обоено во различна боја. Докажи дека секое квадратче во секој 1×5 правоаголник (цртеж десно) е обоено во различна боја.

Решение. Да претпоставиме дека во некој правоаголник отсуствува некоја од петте бие, да кажеме црвената (види цртеж). Тогаш едно од квадратчињата



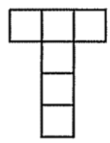
означени со исти букви ќе биде обоено со црвена боја (во спротивно црвената боја ќе отсуствува во соодветниот крст). Но, тогаш еден од двата кста кои вклучуваат ред означен со буквите a,b,c ќе има две квадратчиња обоени со црвена боја, што противречи на условот на задачата.

Значи секое квадратче во секој 1×5 правоаголник е обоено во различна боја.

6. Квадратна 4×4 табла е разделена на 16 единечни квадратчиња, кои ги нарекуваме полиња. Таблата е покриена со 13 домина со димензии 1×2 така што секое од двете полиња на домината покрива точно едно поле на таблата. Докажи, дека едно од домината може да се отстрани и таблата да остане покриена.

Решение. Бидејќи $13\times 2=26>16$, очиглено е дека некои од полињата на домината се препокриваат. Од таа гледна точка постојат два случаја на распоредување на домината. Ако меѓу 13-те домина има едно, чии две половинки се препокриваат со други домина, тогаш очигледно тоа домино може да биде отстрането и задачата е решена. Во вториот случај важи спротивното, т.е. за секое од 13-те домина барем едната половинка не се препокрива со друго домино. Значи, сега имаме 13 половинки, кои покриваат точно 13 полиња на таблата и не се препокриваат со други половинки. Останатите 3 полиња на таблата ($4\cdot 4=16$ и $16-13=3$) се покриваат со другите 13 половинки. Од принципот на Дирихле следува, дека барем едно од тие 3 полиња е покриено со најмалку 5 половинки, т.е. во покривањето на такво поле од таблата учествуваат најмалку 5 домина. Но, едно поле од таблата може со домина да се покрие најмногу на четири различни начина и тоа: слободната половинка на доминото е налево, надесно, нагоре или надолу. Значи, барем две домина целосно се препокриваат и едното од нив може да биде отстрането.

7. Дадена е шаховска табла со димензии 300×300. Ќе велиме дека едно нејзино покривање со плочки со димензии 1×3 е добро, ако не постојат две плочки кои ја формираат буквата T (цртеж десно), во било која положба.



Определи го бројот на добрите покривања на таблата.

Решение. Поставуваме координатен систем така што долната лева клетка има координати $(1,1)$, а горната десна клетка координати $(300,300)$.

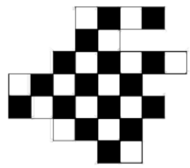
Нека клетката $(1,1)$ е покриена со вертикална плочка. Нека претпоставиме дека $(2,1)$ е покриена со хоризонтална плочка. За да избегнеме формирање на буквата T, $(2,2)$ треба да биде покриена со вертикална плочна, $(3,2)$ - со хоризонтална итн. Продолжувајќи ја постапката ќе стигнеме до десниот или горниот раб на таблата, после што буквата T сепак ќе биде покриена, што е противречност. Според тоа, $(2,1)$ исто така е покриена со вертикална плочка. Аналогно, $(3,1)$ е покриена со вертикална плочка итн, т.е. сите клетки $(i,1)$, $1\le i\le 300$) се покриени со вертикални плочки. Пота, ако некоја клетка од видот

$(i,4)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогаш одново ја добиваме буквата T. Аналогно, сите клетки од видот $(i,7)$, сите клетки од видот $(i,10)$ итн. се покриени со веретикални плочки. Значи, сите плочки во покривањето се вертикални.

На ист начин, ако $(1,1)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогашсите плочки во покривањето се хоризонтални.

Конечно, бројот на добриет покривања е еднаков на 2.

8. Полињата на единечна квадратна мрежа со големи димензии се обоени како шаховската табла, наизменично црно и бело. Од оваа мрежа е исечен многуаголник чии страни лежат на линиите на квадратната мрежа. Нека многуаголникот се состои од B бели и C црни полиња, а негиот раб од b бели и c црни единечни отсечки. Докажи, дека важи $c-b=4(C-B)$.



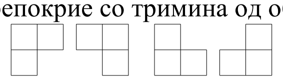
Решение. Единичните отсечки кои се на страните на некое квадратче на многуаголникот, но не се на работ на многуаголникот ќе ги наречеме внатрешни. Нека u е бројот на внатрешните црни отсечки. Ќе докажеме дека $c+u=4C$. На два начина ги броиме единичните отсечки кои воедно се страни на црните квадратчиња. Бројот на сите такви отсечки е еднаков на $4C$ бидејќи секое квадратче има 4 страни, а ниту една отсечка не е истовремено страна на две квадратчиња. Од друга страна секоја таква отсечка е или внатрешна отсечка или црна отсечка на работ на многуаголникот. Затоа $c+u=4C$. Аналогно се докажува дека $b+u=4B$. Од последните две равенства следува равенството $c-b=4(C-B)$.

9. Дадена е квадратна шема со димензии 6×6. Дали може во секој единечен квадрат да се запише природен број, така што во секоја негова правоаголна лента со димензии 4×1 збирот на броевите да биде парен, а збирот на сите броеви од квадратната шема да биде непарен.

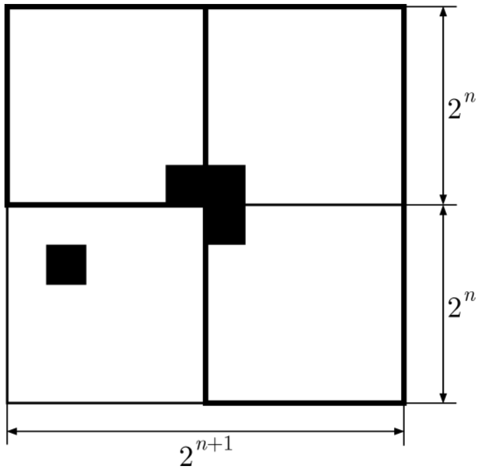
3	5	4	6	3	5
5	4	6	3	5	4
4	6	3	5	4	6
6	3	5	4	6	3
3	5	4	6	3	5
5	4	6	3	5	4

Решение. Квадратната шема ќе ја обиме во четири различни бои како што е прикажано на цртежот. На различни бројки одговараат различни бои. Ова боење има својство: секој правоаголник со димензија 4×1 содржи по едно квадратче од секоја боја. При тоа во дадениот распоред има 10 квадратчиња со боја број 5, 8 квадратчиња со боја број 6, 9 квадратчиња со боја број 3 и 9 квадратчиња со боја број 4. Сега, доволно е да поставиме непарни броеви во квадратичињата со боја број 3 и 5 и парни броеви во останатите квадратчиња, т.е. во кваратчињатата со боја број 4 и 6 (можни се и други избори). Тогаш во секој правоаголник со димензија 4×1 има по два парни и два непарни броја, значи збирот е парен, а во целата квадратна шема ќе има 19 - непарни броеви. Значи, збирот на сите броеви во квадратната шема ќе биде непарен.

10. Од шаховска табла со димензии $2^n\times 2^n$ острането е едно поле. Дали може остатокот на таблата да се препокрие со тримина од обликот



Решение. Шаховската табла со димензии $2^n \times 2^n$ од која е отстрането едно квадратче со димензија 1×1 може да се препокрие со тримина од облик како на цртежот.



Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Според задача 838 тврдењето е точно за $n=1,2,3$.

Нека квадратна шема со димензии $2^n \times 2^n$ од која е отстрането едно квадратче може да се препокрие со тримина од дадениот облик и нека од квадратната шема со димензии $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ е отстрането едно квадратче со димензија 1×1. Квадратната шема со димензии $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ќе го разделиме на четири еднакви квадратни шеми со димензии $2^n \times 2^n$. Отстранетото квадратче со димензии 1×1 припаѓа точно на една од овие квадратни шеми со димензии $2^n \times 2^n$. Според индуктивната претпоставка, квадратната шема со димензии $2^n \times 2^n$ од четирите квадратни шеми од која е отстранета едно квадратче со димензија 1×1 може да се препокрие со тримина од дадениот облик. Останатите три квадратни шеми, од кои не е отстрането квадратче (види цртеж), имаат заедничко теме. Со тримино од еден од дадените облици ќе препокриеме по едно квадратче со димензија 1×1 од секоја квадратна шема со димензии $2^n \times 2^n$, и тоа оние кои имаат заедничко теме (види цртеж). Притоа непокриени ќе останат три квадратни шеми со димензија $2^n \times 2^n$ од кои што недостасува (е препокриено) по едно квадратче со димензија 1×1. Според индуктивната претпоставка, секоја таква квадратна шема можеме да ја препокриеме со тримина од дадениот облик. Значи, квадратната шема со димензии $2^n \times 2^n$ од која недостасува едно квадратче со димензии 1×1 можеме да ја препокриеме со тримина од дадениот облик.

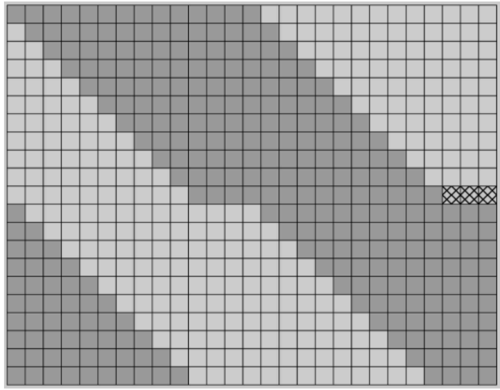
Според принципот на математичка индукција, секоја квадратна шема со димензии $2^n \times 2^n$ од која недостасува едно квадратче со димензии 1×1 можеме да ја препокриеме со тримина од дадениот облик.

11. Ги разгледуваме сите правоаголни табли, поделени на единечни полиња, чии полиња може да се обојат така што во секој ред има точно 14 сини полиња, во секоја колона има точно 10 црвени полиња и на целата табла има точно 3 полиња кои не се ниту црвени ниту сини. Определи ги димензиите на таква табла која има најмал вкупен број полиња.

Решение. Нека r е бројот на редовите, а s е бројот на колоните на разгледуваната табла. Вкупниот број полиња е еднаков на збирот на бројот на сините полиња, бројот на црвените полиња и бројот на полињата кои се ниту сини ниту црвени. Значи, $rs = 14r + 10s + 3$. Добиената равенка можеме да ја запишеме во видот $(r-10)(s-14) = 143$ и како $143 = 11 \cdot 14$ можни се четири случаи и тоа:

$$\begin{cases} r-10=1 \\ s-14=143 \end{cases} \quad \begin{cases} r-10=11 \\ s-14=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r-10=13 \\ s-14=11 \end{cases} \quad \begin{cases} r-10=143 \\ s-14=1 \end{cases}$$



Вкупниотброј на полиња rs е минимален ако $(r,s) = (21,27)$ На цртежот десно е даден пример на табла со димнзии 21×27 која е обоена на саканиот начин.

12. Горјан од n^3 единечни коцки составил коцка со должина на раб n и потоа некои од шесте страни на големата коцка ги обоил, а некои не ги обоил. Кога ја раставил големата коцка открил дека точно 1000 единечни коцки немаат ниту една обоена страна. Докажи, дека ова е навистина можно и определи го бројот на страните кои Горјан ги обоил.

Решение. По боењето на некои страни на коцката која е составена од n^3 единечни коцки, бројот на необоените страни е сигурно помал од n^3, а е поголем од $(n-2)^3$. Според тоа, $(n-2)^3 < 1000 < n^3$, па мора да важи $(n-1)^3 = 1000$, т.е. $n = 11$. Сега да ги преброиме необоените коцки во сите случаи.

Ако е обоена една страна на големата коцка, бројот на необоените коцки е $11 \cdot 11 \cdot 10 = 1210$.

Ако се обоени две страни на големата коцка, бројот на необоените коцки е $11 \cdot 10 \cdot 10 = 1100$ (во случај кога обоените страни се соседни) или $11 \cdot 11 \cdot 9 = 1089$ (во случај кога обоените страни не се соседни).

Ако се обоени три страни на големата коцка, бројот на необоените коцки е $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (во случај кога сите три обоени страни имаат заедничко теме) или $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ (во случај кога сите три обоени страни немаат заедничко теме).

Ако се обоени четири страни на големата коцка, бројот на необоените коцки е $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ (во случај кога двете необоени страни се соседни) или $11 \cdot 9 \cdot 9 = 891$ (во случај кога двете необоени страни не се соседни).

Ако се обоени пет страни на големата коцка, бројот на необоените коцки е $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$.

Како што гледаме само во случајот кога се обоени три страни на големата коцка кои имаат заедничко имаме 1000 необоени коцки, што значи дека Горјан обоил три страни со заедничко теме.

13. Сите реални броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се користат и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b за кои броевите $a + \frac{1}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ се обоени во различни бои.

Решение. Нека $a+\frac{1}{b}=x$ и $b+\frac{1}{a}=y$. Ако го елиминираме $b=y-\frac{1}{a}$ по a ја добиваме квадратната равенка $a^2y-axy+x=0$, која треба да има реални ненулти корен. Според тоа, $x^2y^2-4xy\geq 0$, од каде добиваме $xy\geq 4$.

Ако тврдењето на задачата не е точно, тогаш секои два броја x и y со производ $xy\geq 4$ треба да се обоени во иста боја (во спротивно од горниот систем наоѓаме a и b и имаме противречност). Тоа значи, дека секој број поголем од 1 треба да е обоен како и бројот 4 (зошто?), што е противречност.

14. Природните броеви се обоени во две бои.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу парови од различни еднобојни броеви x и y за кои бројот $x+y$ е точен квадрат.

б) Дали постојат два различни еднобојни броеви x и y чиј збир е степен на бројот 2.

Решение. а) За секој природен број $x>1$ е точно равенството

$$(2x+1)^2-(2x^2-2)+(2x+2)^2-(2x^2-2)=(2x+3)^2. \qquad (1)$$

Ако $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ или $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ е во бојата на $2x^2-2$, тогаш го имаме потребното претставување (првиот и третиот или вториот и третиот). Во спротивно, $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ и $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ се еднобојни броеви и претставувањето е дадено со (1).

б) Не! Да ги обоиме сите броеви од видот $2^m(4t+3)$ во боја A, а сите броеви од видот $2^n(4k+1)$ во боја B. Да претпоставиме дека збир на два различни броја со боја A е степен на бројот 2. Тогаш $2^{m_1}(4t_1+3)+2^{m_2}(4t_2+3)=2^l$. Ако $m_1\neq m_2$, добиваме противречност по модул 2, а ако $m_1=m_2$, тогаш $2[2(t_1+t_2+1)+1]$ треба да е степен на бројот 2, што не е можно. Аналогно се докажува дека збир на два различни броја обоени во бојата B не е степен на бројот 2.

15. Докажи, дека природните броеви можат да бидат обоени во две бои така што истовремено се исполнети условите:

1) За секој прост број p и секој природен број n броевите p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не се еднобојни.
2) Не постои бесконечна геометриска прогресија од еднобојни броеви.

Решение. Прво ќе ги обоиме сите природни броеви и нулата во две бои (зелена и црвена) така што да не постои бесконечна еднобојна аритметичка прогресија и да не три последователни еднобојни броеви.

Природните броеви и нулата ги делиме во групи така што $i-$тата група за $i=0,1,2,...$ почнува со бројот 2^i-1 и завршува со бројот $2^{i+1}-2$. Во секоја група броевите ги боиме алтернативно во две бои така што за i парен првиот број во групата го боиме во зелено, а за i непарен првиот број го боиме во црвено.

Очигледно, при ова боење нема три последователни еднобојни броеви. Ако претпоставиме дека постои бесконечна еднобојна аритметичка прогресија со разлика d, тогаш за доволно големо i должината на $i-$тата група ќе биде поголема од d. Тоа значи дека d е парен број, но тогаш два последователни члена на прогресијата кои лежат во различни групи се разнобојни. Според тоа, не постои бесконечна аритметичка прогресија составена од еднобојни броеви. Ова боење ќе го наречеме боење A.

Ќе конструираме боење B кое ги задоволува условите на задачата. Секој природен број $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ да го обоиме во бојата на бројот $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k$ од боењето A. Бидејќи во A нема три последователни еднобојни броеви, заклучуваме дека за секој прост број p и секој природен број n броевите p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не се еднобојни. Понатаму, бидејќи во A нема бесконечна еднобојна аритметичка прогресија, заклучуваме дека при боењето B нема бесконечна еднобојна геометриска прогресија.

16. Нека E е бројната оска (т.е. ориентирана права со единечна отсечка на неа) и нека S е множеството точки од E кои имаат координати $19x + 85y$, каде x и y се природни броеви. Точките од S се обоени во црвено, а останатите точки од E кои имаат целобројни координати се обоени во зелено. Дали постои точка A од E (не задолжително со цела координата) таква што секои две точки B и C од E со цели координати кои се симетрични во однос на A да се различно обоени?

Решение. Ќе докажеме дека точката A со координата $\frac{19 \cdot 85 + 19 + 85}{2} = \frac{1719}{2}$ го задоволува условот. За таа цел треба да докажеме дека секои две точки кои се симетрични во однос на A се разнобојни. Нека точките p и q се симетрични во однос на A. Тоа значи, дека $p + q = 2A = 1719$.

1) Нека точките p и q се црвени. Тогаш постојат природни броеви x_1, y_1, x_2 и y_2 такви што $p = 19x_1 + 85y_1,\ q = 19x_2 + 85y_2$. Оттука
$$19 \cdot 85 + 19 + 85 = 19(x_1 + x_2) + 85(y_1 + y_2),$$
односно
$$19 \cdot 85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1).$$
Броевите 19 и 85 се заемно прости, па од последното равенство следува дека $x_1 + x_2 - 1$ се дели со 85, а $y_1 + y_2 - 1$ се дели со 19. Од $x_1 + x_2 - 1 \geq 1$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 1$ заклучуваме дека $x_1 + x_2 - 1 \geq 85$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 19$, што значи дека
$$19 \cdot 85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1) \geq 2 \cdot 19 \cdot 85,$$
што е противречност.

2) Нека претпоставиме дека p и q се зелени. Бидејќи 19 и 85 се заемно прости броеви, постојат x_1, y_1, x_2 и y_2 за кои
$$p = 19x_1 + 85y_1,\ q = 19x_2 + 85y_2.$$
Притоа можеме да сметаме дека сме избрале решенија за кои x_1 и x_2 се можните најмали природни броеви. Бидејќи p и q се зелени, важи $y_1 \leq 0, y_2 \leq 0$. Ако $x_1 > 85$ од

$$19(x_1-85)+85(y_1+19)=19x_1+85y_1=p$$

добиваме противречност со минималноста на x_1. Според тоа, $x_1 \le 85$ и аналогно $x_2 \le 85$. Како во случајот 1) добиваме дека x_1+x_2-1 се дели со 85 и $x_1+x_2 \ge 86$. Но, $x_1+x_2 < 2\cdot 85$, па затоа $x_1+x \;\; =86$. Тогаш

$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2)=19\cdot 86+85(y_1+y_2)\,,$$

па затоа $y_1+y_2=1$, што противречни на $y_1 \le 0,\ y_2 \le 0$.

Конечно, останува единствена можност p и q да се разнобојни точки.

17. Докажи, дека меѓу секои шест ирационални броеви може да се изберат три броја a,b,c такви што броевите $a+b, b+c, c+a$ се ирационални.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Дадени се шест точки во рамнината, меѓу кои нема три колинеарни. Ако сите отсечки, чии крајни точки се шесте дадени точки ги обоиме во две бои, тогаш постои барем еден монохроматски триаголник (страните на триаголникот сеобоени со иста боја).

Доказ. Нека отсечките се обоени во сина и црвена боја. Да земеме една од дадените точки. Оваа точка со останатите точки формира 5 отсечки. Од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку три еднобојни отсечки. Нека овие три отсечки се обоени во сина боја. Ако било која од останатите отсечки чии крајни точки се крајните точки на трите сино обоените отсечки е обоена сино, тогаш имаме монохроматски (син) триаголник. Во спротивно, трите отсечки чии крајни точки се крајните точки на трите сино обоени отсечки се обоени црвено и тогаш повторно имаме монохроматски (цртвен) триаголник. ■

Да ги обоиме отсечките кои поврзуваат два ирационални броја со сина боја, ако збирот на тие два броја е ирационален број. Ако збирот на два такви броја е рационален број, отсечката ја боиме со црвена боја. Според лемата, Според лемата, секогаш постои барем еден монохроматски триаголник. Ако триаголникот е син, тогаш тврдењето е докажано. Нека монохроматскиот триаголник е црвен. Нека рабовите на тој триаголник се $a+b, b+c, c+a$. Сега да го разгледаме изразот

$$(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b\,.$$

Оттука следува дека b е рационален број, што е противречност. Од добиената противречност следува дека броевите $a+b, b+c, c+a$ се ирационални.

18. Определи го минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што да не постојат тројки различни еднобојни броеви a,b,c за кои $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$.

Решение. Нека $f(n)$ е минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што да не постојат тројки различни еднобојни броеви a,b,c за кои $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$. Ќе докажеме дека $f(n)=[\frac{k+1}{2}]$, каде $2^{k-1} \le n < 2^k$.

Јасно, во низата $1,2,2^2,...,2^{k-1}$ не може да има три еднобојни броеви, па затоа $f(n) \ge [\frac{k+1}{2}]$. Да ги нумерираме искористените бои со првите $[\frac{k+1}{2}]$ природни броеви и нека $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t} \leq n$. Очигледно, $h(m) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_t < k$. Го боиме бројот m во бојата со број $[\frac{h(m)+1}{2}]$. Ако $a | b$ и $b | c$, тогаш важи $h(a) < h(b) < h(c)$, т.е. $h(c) - h(a) \geq 2$. Според тоа, броевите a и c се обоени со различни бои. Затоа $f(n) = [\frac{k+1}{2}]$. Конечно, за $n = 2004$ добиваме $f(2004) = 6$.

19. Математички натпревар се состои од 3 задачи, секоја од кои се оценува со од 0 до 7 поени, заклучно. Познато е дека за секои двајца натпреварувачи постои најмногу една задача на која двајцата имаат еден и ист број поени. Определи го најголемиот можен број учесници на натпреварот.

Решение. Да ги разгледаме целите точки $(x, y, z), x, y, z \in [0, 7]$. Точката (x, y, z) ја боиме црвено ако постои ученик со поени x, y, z (во овој редослед) на трите задачи. Условот е еквивалентен на тоа ако (x, y, z) е црвена, тогаш $(x, y, k), (x, k, z), (k, y, z)$ не се такви за секој $0 \leq k \leq 7$ (во случај да се различни од (x, y, z)).

За фиксиран k меѓу точките (x, y, k), $x, y \in [0, 7]$ има најмногу 8 црвени точки – во спротивно од принципот на Дирихле следува дека има најмалку две точки со заедничка координата, што е противречност.

Според тоа, најголемиот број црвени точки се $8 \cdot 8 = 64$. Лесно се проверува дека ова се постигнува за точките $(x, y, (x - y)(\text{mod}\, 8)), x, y \in [0, 7]$.

20. Должината на страната на правилен шестаголник е еднаква на 5. Шестаголникот е разделен на рамнострани триаголници, со прави паралелни на страните на шестоаголникот, при што должина на страната на секој делбен триаголник е еднаква на 1. Повеќе од половината на темињата на делбените триаголниците се обоени со бела боја. Докажи дека пет обоени темиња лежат на иста кружница.

Решение. Вкупниот број на темиња на добиените рамнострани триаголници со повлечените делбени прави е еднаков на 91. Со центар во центарот на шестоаголникот можеме да повлечеме единаесет кружници, така што секое теме припаѓа на една кружница. Пет кружници со радиуси 1, 2, 3, 4, 5 четири кружници со радиуси $\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}$ и три кружници со радиуси $\sqrt{13}, \frac{\sqrt{79}}{2}, \sqrt{21}$.

Нека претпоставиме дека не постојат пет точки кои се обоени во бела боја што лежат на една кружница. Тогаш секоја од кружинците кои се опишани погоре не содржи повеќе од четири точки кои се обоени. Значи, бројот на обоени точки не е поголем од $11 \cdot 4 + 1 = 45$. Од друга страна бројот на обоени точки по претпоставка е $[\frac{91}{2}] + k$, каде $k \in \mathbb{N}$, кој е поголем од 45.

Заради добиената противречност, постојат барем пет точки кои се обоени во бела боја и кои лежат на една од опишаните кружници во првиот дел од решението на задачата.

21. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина или црвена. Да се докаже дека во таа рамнина постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

Решение. Најпрво ќе покажеме дека постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја. Имено, во дадената рамнина конструираме рамностран триаголник, тогаш според Принципот на Дирихле меѓу трите темиња постојат две кои се обоени во иста боја, според ова во дадената рамнина постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја.

Понатаму ќе покажеме дека постои отсечка чии крајни точки и средишна точка се обоени во иста боја.

Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени на пример во сина боја (таква отсечка постои според претходното). Нека D и E (од различни страни на A и B) се точки такви што $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во сина боја , задачата е решена. Затоа нека точките D и E се обоени во црвена боја. Средишната точка F на AB е средишна и на отсечката DE, и јасно F е обоена или во сина или во црвена боја. Со ова тврдењето е покажано.

Сега да разгледаме три сини точки A, B, C такви што B е средина на AC, (такви постојат според претходното). Нека D, E и F се трети темиња на рамностраните триаголници конструирани над AC, AB, BC , соодветно од иста страна на правата AC.

Тогаш ако барем една од E, F и D е сина , задачата е решена.

Ако пак сите три точки E, F и D се црвени тогаш бараниот триаголник е EFD (тој е рамностран и сите негови темиња се обоени црвено).

22. Целобројните точки во рамнината се обоени со три бои. Определи го најмалиот позитивен реален број S со следново својство: за секое такво боење постои триаголник со плоштина S, чии темиња се монохроматски?

Решение. Да ги разгледаме следниве две боења:

1) точката (x,y) ја боиме во бојата $i, 1\le i\le 2$ таква што $x\equiv i(\text{mod}\,2)$,

2) точката (x,y) ја боиме во бојата $i, 1\le i\le 3$ таква што $x\equiv i(\text{mod}\,3)$.

Јасно, ако бројот S постои, тогаш S е од видот n или $\frac{n}{2}, n\in\mathbb{N}$. Боењето 1) покажува дека S може да биде еднаков на 1, 2 или 3, а боењето 2) покажува дека S може да се $\frac{3}{2}, 3$ или поголем број. Според тоа, ако S постои, тогаш $S\ge 3$. Ќе докажеме дека при произволно боење од дадениот вид секогаш постои монохроматски триаголник со плоштина еднаква на 3.

На почетокот да забележиме дека за некој $d\in\{1,2,3\}$ постои монохроматски пар точки од видот $A(x,y), B(x+d,y)$. Навистина, последното следува од принципот на Дирихле применет на точките $(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)$. Сега, ако $m\equiv AB$ и l е паралелна права на m на растојание $\frac{6}{d}$, тогаш правата $l \,||\, Ox$ е двобојна или имаме монохроматски триаголник со плоштина 3.

Ќе велиме дека бојата c во правата l реализира растојание a, ако на правата l постојат две точки обоени во бојата c кои се на растојание a.

Ако има растојание $a\in\{1,2,3,6\}$, кое се реализира и од двете бои во l, тогаш правата $p \,||\, l$ на растојание $\frac{6}{a}$ од l треба да биде монохроматска (во спротивно имаме монохроматски триаголник со плоштина 3). Ако такво растојание не постои, тогаш една од боите во l ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$. Навистина, нека претпоставиме дека бојата c_1 не го реализира растојанието 1 и дека барем една точка P_0 од l е обоена во c_1. Тогаш во l соседните точки P_{-1} и P_1 на точката P_0 треба да се обоени во бојата c_2, што значи дека c_2 реализира растојание 2. Тоа значи, дека c_1 не реализира растојание 2, па затоа P_{-2} и P_2 се обоени во c_2. Значи, c_2 реализира растојание 3, па затоа c_1 не реализира растојание 3. Но, тоа значи дека P_{-3} и P_3 се обоени во c_2, што значи дека c_2 реализира растојание 6, т.е. c_2 ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$. Според тоа, и во двата случаја постои права $p \| Ox$ и боја c од p која ги реализира сите растојанија во множеството $\{2,3,6\}$ или веќе сме нашле монохроматски триаголник со плоштина 3.

Да ги разгледаме правите u_1, u_2, u_3 паралелни на p и такви што u_i, $i = 1,2,3$ е на растојание i над p. Тогаш од претходните разгледувања следува дека овие три прави се двобојни. Да ги разгледаме деветте точки во кои правите u_1, u_2, u_3 ги сечат правите $x = 0, x = 3, x = 6$. Лесно се покажува дека три од овие девет точки се темиња на монохроматски триаголник со плоштина 3.

23. Секоја страна и секоја дијагонала на конвексен $n-$аголник $(n \geq 3)$ се обоени со црвена или сина боја. Докажи, дека темињата на $n-$аголникот може да се означат со $A_1, A_2, ..., A_n$ така што е исполнет еден од следниве два услови:

1) Отсечките $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ се истобојни.
2) За некој $k, 1 < k < n$ отсечките $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{k-1}A_k$ се сини, додека отсечките $A_kA_{k+1}, A_{k+1}A_{k+2}, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ се црвени.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 3$ тврдењето очигледно важи. Нека $n > 3$ и нека тврдењето важи за $n-1$. Отстрануваме произволно теме X. Според индуктивната претпоставка, останатите темиња може да се означат со $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ така да отсечките A_iA_{i+1} се сини за $1 \leq i \leq k$, а црвени за $k < i \leq n-1$ (при што $A_n = A_1$).

Да ја разгледаме отсечката XA_1. Ако таа е сина, тогаш точките $X, A_1, ..., A_{n-1}$ последователно ги означуваме со $B_1, B_2, ..., B_n$, а ако е црвена така последователно да ги означиме точките $A_2, ..., A_{n-1}, A_1, X$. Така, за некој $p, 1 \leq p < n$ отсечките B_iB_{i+1} се сини за $1 \leq i \leq p$ и црвени за $p < i \leq n-1$.

Конечно, ако отсечката B_nB_1 е црвена, да означиме $A_i = B_i$ за секој i, а ако е сина да означиме $A_i = B_{i-1}$ за $1 \leq i \leq n$ (каде $B_0 = B_n$). Ваквото означување го задоволува условот на задачата.

24. Дадена е правоаголна шема со $(n+1) \times (n+5)$ квадрати и во полето од едниот агол еден играч. Играчот се движи по полињата како коњот во шахот. Дали играчот може да стигне во полето од спротивниот агол за $2n+3$ скокови?

Решение. Квадратната шема да ја обоиме со црна и бела боја како шаховска табла. Да воочиме дека во произволна така обоена шаховска табла две дијагонални спротивни темиња имаат иста боја ако и само ако $m+k$ е парен број. Во нашиот случај $(n+1)+(n+5)$ е парен број, па не е можно играчот со непарен број на скокови $2n+3$ да стигне од едно во друго поле со иста боја, бидејќи при секој скок коњот во шахот ја менува бојата. Значи, одговорот на задачата е „не може".

25. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:

- рамностран триаголник со должина на страна 2,
- рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
- ромб со должина на страна 1.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои еднобоен рамностран триаголник со должина на страна 1 или таков со должина на страна $\sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека не постои триаголник од првиот вид. Тогаш постојат точки A и B, A е црвена, B е плава и $\overline{AB}=1$. Да ја разгледаме точката C за која важи $\overline{AC}=\overline{BC}=2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека C е плава. Ако M е средината на AC, тогаш таа има иста боја како A или како C, па без ограничување на општоста можеме да земеме дека е бојата на A. Да ги разгледаме рамностраните триаголници ADM и AEM. По претпоставка точките D и E се обоени во плава боја, па затоа триаголникот CDE е плав, рамностран и има должина на страна $\sqrt{3}$.

Сега да претпоставиме дека постои еднобоен (црвен) триаголник PQR, кој е рамностран и има должина на страна 1. Надворешно за него конструираме рамнострани триаголници PQW, QRU и RPV. Тогаш или точките U,V,W се сите плави и тогаш имаме рамностран плав триаголник со должина на страна 2, или една од нив е црвена, на пример U и во тој случај четириаголникот $PQUR$ е ромб со саканите својства.

26. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?

Решение. Прво ќе докажеме дека за боење кое соодветствува на условите на задачата се потребни не повеќе од 11 бои.

Контурата на дадениот квадрат е обоена во најмногу две бои. Овие бои (или оваа боја) да ги наречеме *стари* (*стара*), а останатите бои да ги наречеме *нови*. Доволно е да докажеме дека се потребни најмногу 9 нови бои.

Лема 1. На секоја хоризонтална (вертикална) права има најмногу една нова боја.

Доказ. Да разгледаме хоризонтална (вертикална) отсечка од дадениот квадрат, која поврзува две спротивни страни. Оваа отсечка е страна на 10×10 квадрат, кој содржи иотсечки од дадениот квадрат, кои се обоени со најмалку една од старите бои. Според тоа, на неговата контура, вослучајов на разгледуваната отсечка, може да има најмногу една нова боја. ■

Лема 2. Ако вертикална и хоризонтална единечна отсечка се обоени со нови бои, тогаш тие бои се исти.

Доказ. Не е тешко да се види дека постои квадрат со страни на целобројната решетка, кој ги содржи рагледуваните две отсечки и дел од контурата на дадениот квадрат. Тогаш на неговата контура, што значи и на двете отсечки може да има најмногу една нова боја. ■

Од Лема 2 следува, дека ако постојат вертикални и хоризонтални отсечки, обоени во нови бои, тогаш имаме најмногу една нова боја. Понатаму, ако новите бои се само на вертикалните (или само на хоризонталните) отсечки, тогаш од лема 1 следува дека може да имаме најмногу 9 нови бои.

Пример, во кој се искористени точно 11 бои е следниов: единечните отсечки кои ги поврзуваат темињата (i,i) и $(i+1,i)$ ги боиме во бојата $i=1,2,...,10$, а сите останати се обоени во 11-тата боја. Лесно се гледа дека контурата на произволен квадрат со страни на целобројната решетка содржи најмногу една отсечка со боја од 1 до 10, па затоа содржи најмногу две бои.

27. Квадрат со димензии $n\times n, n\geq 2$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Секое единечно квадратче е обоено во бела или црна боја така што за секој правоаголник (со најмалку 4 квадратчиња) во квадратот барем две од единечните квадратчиња во четирите негови агли се разнобојни. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Ќе докажеме дека бараната вредност е 4.

Нека (i,j) е единечното квадратче кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона на 4×4 квадрат. Лесно се проверува дека ако квадратчињата $(1,1), (1,2),$ $(2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)$ ги обоиме во црна, а останатите во бела боја, тогаш условот на задачата е исполнет.

За да докажеме дека кога $n\geq 5$ немаме соодветно боење, доволно е да го разгледаме случајот $n=5$. Да разгледаме произволно боење на квадрат 5×5. Барем 13 од единечните квадратчиња се еднобојни, на пример црни. Можни се следниве три случаи.

1) Еден ред содржи само црни квадратчиња. Тогаш меѓу останатите редови има барем еден со најмалку 2 црни квадратчиња. Сега, доволно е да го разгледаме правоаголникот за кој тие квадратчиња се во два негови агли, а другите два агли се единечните квадратчиња во редот со 5 црни квадратчиња.
2) Во еден од редовите има 4 црни квадратчиња. Тогаш меѓу останатите редови има барем еден со најмалку 3 црни квадратчиња. Тогаш барем 3 од нив не соодветствуваат на бело квадратче и со нивна помош можеме да образуваме правоаголник со 4 црни аголни квадратчиња.
3) Секој ред содржи најмногу 3 црни квадратчиња. Тогаш барем три реда содржат точно по 3 црни квадратчиња. Можеме да сметаме дека тоа се првиот, вториот и третиот ред броено одгоре-надолу. Една колона ќе ја наречеме *црна*, ако најгормото нејзино квдратче е црно. Во спротивен случај ќе велиме дека колоната е *бела*. Имаме 3 црни колони. Ако во вториот или третиот ред 3 од црните квадратчиња се наоѓаат во црните колони тогаш очигледно имаме правоаголник со 4 црни агли. Во спротивно, 2 од црните квадратчиња од вториот и 2 од црните квадратчиња

од третиот ред се наоѓаат во двете бели колони. Јасно, точно тие 4 црни квадратчиња формираат правоаголник со 4 црни агли.

28. Квадрат $n\times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најголема вредност е $n=4$. Табелата дадена на цртежот десно, квадратчињата означени со X се обоени во црна боја, докажува дека $n\geq 5$.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

Нека претпоставиме дека квадрат со страна $n\geq 5$ го има саканото својство. Тогаш постои и квадрат со страна $n=5$ со саканото својство. Од принципот на Дирихле следува дека барем три од квадратчињата во првиот ред се обоени со иста боја (нека тие квадратчиња се црни). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се првите три квадратчиња. Ако во првите три квадратчиња на произволен ред од останатите четири реда има барем две црни квадратчиња, тогаш постојат два реда и две колони за кои четирите пресечни квадратчиња се еднобојни (црни), што е противречност.

Според тоа, меѓу првите три квадратчиња на секој ред освен првиот има најмногу едно црно квадратче, а останатите две се бели. Но, на три места две бели квадратчиња може да се распоредат на три различни начини, а имаме 4 редови, па затоа во два реда ќе имаме ист распоред на белите квадратчиња, што повторно епротивречност.

29. Нека $n\geq 3$ е непарен природен број. Шаховска $n\times n$ табла е стандардно обоена, т.е. долното лево поле е црно. Во еден чекор се избира произволен правоаголник составен од цели единечни полиња на таблата и се менуваат боите на сите полиња од тој правоаголник (црните полиња во бели, белите во црни). Определи го минималниот број чекори со чија реализација таблата може да стане

а) бела б) црна

Решение. Да разгледаме произволни две полиња со заедничка страна. Бидејќи на почетокот овие полиња се различно обоени, а на крајот се обоени со иста боја, заклучуваме дека при некој чекор нивната заедничка страна треба да биде дел од границата на соодветниот правоаголник од тој чекор (зошто?).

Има $4(n-1)$ полиња кои граничат со работ на таблата и тие меѓу себе имаат $4(n-1)$ заеднички страни. Лесно се гледа дека границата на секој правоаголник со страни паралелни на страните на таблата може да содржи најмногу четири од тие заеднички страни (по две од крајните редови или по две од крајните колони). Според тоа, потребни ни се барем $\frac{4(n-1)}{4}=n-1$ чекори.

Таблата може да стане еднобојна со следните $n-1$ чекори: последователно ги пребојуваме $2,4,...,(n-1)-$от ред, а потоа $2,4,...,(n-1)-$та колона. Во тој момент сите полиња се обоени со почетната боја на аголните полиња. Сега со еден чекор на целата табла ја добиваме другата боја.

Според тоа, за да ја пребоиме таблата во црна боја ни се потребни $n-1$ чекори (на почетокот аголните полиња се црни) и за бела боја потребни ни се n чекори.

30. Множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ е поделено на три подмножества. Докажи, дека постојат два броја (може и еднакви) од едно исто подмножество чиј збир е во истото тоа подмножество.

Решение. Нека трите дисјунктни подмножества се A_1, A_2, A_3. Избираме 17 точки во рамнината и ги нумерирамесо броевите 0, 1, 2, 3, 4, ..., 16. Отсечката со краеви i и j, ($i>j$) ја боиме со црвено, сино или жолто во зависност од тоа во кое множество A_1, A_2 или A_3 припаѓа разликата $i-j$. Користејќи го принципот на Дирихле можеме да докажеме дека постои триаголник со темиња i, j, k ($i>j>k$) чии страни се обоени во една иста боја, т.е.броевите $i-j,\ j-k$ и $i-k=i-j+(j-k)$ се од едно исто подмножество.

31. Нека n е природен број и S_n е множеството точки со целобројни координати (x,y) такви што $|x|+|y+\frac{1}{2}|<n$. Низата различни точки $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,$ (x_l,y_l) од S_n ја нарекуваме пат ако за $i=2,3,...,l$ растојанието меѓу точките (x_i,y_i) и (x_{i-1},y_{i-1}) е еднакво на 1, т.е. точките (x_i,y_i) и (x_{i-1},y_{i-1}) се соседни во целобројната решетка. Докажи, дека точките на S_n не може да се разбијат на помалку од n патишта (разбивање на S_n на m патишта е множество P од m непразни патишта при што секоја точка од S_n се користи точно еднаш во патиштата од P).

Решение. Точките од S_n да ги обоиме со црна и бела боја на следниов начин:

- ако $y\ge 0$, тогаш точката (x,y) ја боиме во бело ако $x+y-n$ е парен број, а во црно ако $x+y-n$ е непарен број,
- ако $y<0$, тогаш точката (x,y) ја боиме во бело ако $x+y-n$ е непарен број, а во црно ако $x+y-n$ е парен број.

Парот последователни црни точки (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i) во даден пат ќе го нарекуваме *црн пар*. Нека претпоставиме, дека S_n е разбиен на m патишта и нека k е бројот на црните парови во сите патишта. Бидејќи во множеството S_n имаме точно n црни парови (тоа се паровите $(x,0)$ и $(x,-1)$, за $x=-n+1,-n+3,...,$ $n-3,n-1$), заклучуваме дека $k\le n$.

Да ги поделиме сите патишта низ црните парови. Добиваме разбивање на S_n на $k+m$ патишта. Во секој од овие патишта има најмногу по една црна точка повеќе од белите точки. Според тоа, вкупниот број на црни точки е поголем од вкупниот број на бели точки за најмногу $k+m$. Од друга страна, во направеното боење има $2n$ повеќе црни од бели точки (во секој ред на S_n има точно по една црна точка повеќе). Според тоа, $2n\le k+m$ и бидејќи $k\le n$ добиваме $2n\le k+m\le n+m$, па затоа $n\le m$.

32. Во рамнината се дадени 2012 точки, секоја обоена во една од n бои. Познато е дека нема две бои со кои се обоени ист број точки. Да се определи оној број

n, за кој бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја, е максимален.

Решение. Нека имаме соодветно $x_1, x_2, ..., x_n$ точки од секоја боја, при што без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Бројот на множествата со по n точки, по една од секоја боја е $x_1 x_2 ... x_n$. Според тоа, задачата се сведува на наоѓање на оној n за кој $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2012$ и производот $x_1 x_2 ... x_n$ е најголем.

Ако за некои $i, j, 1 \le i < j - 1 \le n$ важи $x_i \le x_{i+1} - 2$ и $x_j \ge x_{j-1} + 2$, тогаш можеме x_i и x_j да ги замениме соодветно со $x_i + 1$ и $x_j - 1$, при што добиваме ист збир, а производот се зголемува (провери!). Според тоа, броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ се последователни, со исключок најмногу на еден број,

Нека

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{x, x+1, ..., x+l, x+l+k, x+l+k+1, ..., x+n+k-2\},$$

каде $n = k + l - 2$. Ако $k \ge 3$, како и претходно ги заменуваме $x + l$ и $x + l + k$ соодветно со $x + l + 1$ и $x + l + k - 1$ и добиваме поголем производ при ист збир. Ако $x \ge 5$, можеме да го замениме x со $x - 2$ и 2, при што производот се зголемува, бидејќи $2(x-2) > x$. Според тоа, $x \le 4$ и $k = 1$ или 2.

Ако $k = 1$, со непосредна проверка на равенството

$$\tfrac{n(n+1)}{2} - x + 1 = 2012,$$

за $1 \le x \le 4$ се добива дека во овој случај немаме решение.

Останува да го разгледаме случајот $k = 2$, при што броевите се сите броеви од x до $x + n$, со исключок на $x + l + 1$. Според тоа,

$$\tfrac{(n+x)(n+x+1)}{2} - \tfrac{x(x-1)}{2} = 2012 + x + l + 1$$

$$(n+x)(n+x+1) = 2[2013 + l + \tfrac{x(x+1)}{2}],$$

каде $1 \le x \le 4$ и $0 \le l \le n - 2$. Бидејќи десната страна во последното равенство е меѓу 4028 и $4052 + 2l \le 4048 + 2n$, лесно се заклучува дека $n + x = 63$. Тогаш $2l + x(x+1) = 6$, од каде лесно се добива дека $x = 1, l = 2$ и соодветно $n = 62$ и $x = 2, l = 0$ и соодветно $n = 61$. Во првиот случај производот е $\frac{63!}{4}$, а во вториот $\frac{63!}{3}$. Значи, бараниот брај е $n = 61$.

33. Во табела со димензии 2007×2007 се обоени неколку полиња. Нека S_{ij} е множеството од обоени полиња (x, y) за кои $x \le i, y \le j$. На почетокот во секое обоено поле го запишуваме бројот $|S_{i,j}|$. Во секој следен чекор во секое обоено поле (i, j) го запишуваме збирот на сите броеви кои во претходниот чекор се запишани во полињата од множеството $S_{i,j}$. Докажи, дека постои природен број M таков што после M чекори сите броеви запишани во обоените клетки ќе бидат непарни.

Решение. Нека $a_{i,j}$ е бројот запишан во полето (i,j) по модул 2, т.е. $a_{i,j}=0$ ако во (i,j) има парен број и $a_{i,j}=1$ ако во (i,j) има непарен број.

Ќе користиме индукција по бројот на обоените полиња n. Ако $n=1$, тогаш во секој чекор имаме $a_{i,j}=1$, т.е. тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за $n=k$ и да разгледаме табела со обоени $k+1$ поле.

Ќе велиме, дека $(i,j) \ll (p,q)$ ако истовремено $i \le p$ и $j \le q$. Нека (s,r) е максимално обоено поле при ова подредување. Ако го отстраниме полето (s,r), од индуктивната претпоставка следува дека постои M таков што после M чекори важи $a_{i,j}=1$ во сите останати обоени полиња. Не е тешко да се покаже дека полето (s,r) не влијае на останатите полиња во ниту еден чекор. Според тоа, и без да го отстраниме полето (s,r) после M чекори за сите останати полиња ќе важи $a_{i,j}=1$. Ако во овој момент $a_{s,r}=1$, тогаш нема што да се докажува. Ако пак после M чекори важи $a_{s,r}=0$, тогаш овие чекори на $a_{r,s}$ додале 1, па затоа уште после M чекори (т.е. после вкупно $2M$ чекори) ќе имаме $a_{i,j}=1$ во сите полиња.

34. Нека P е полимино со следниве својства:
1) барем еден правоаголник може да биде покриен со копии на P,
2) за секој правоаголник, кој може да биде покриен со копии на P, тоа покривање е единствено со точност до симетриите кои го запазуваат правоаголникот.

Докажи, дека P е квадрат.

Решение. Прво, да забележиме дека ако со копии на P може да се покрие правоаголник $a \times b$, тогаш може да се покрие и квадрат $ab \times ab$. Нека S е најмалиот можен квадрат кој може да се покрие со коипии од P и нека $(1,1)$ и (s,s) се долното лево и горното десно поле на тој квадрат.

Нека претпоставиме дека не постои коипија на P која ја сече правата $2x=s+1$. Тогаш s е парен број и симетријата во однос на правата $x=y$ покажува, дека не постои копија на P која ја сече правата $2y=s+1$. Последното значи дека со копии на P сме го покриле квадратот $\frac{s}{2} \times \frac{s}{2}$, што противречи на изборот на S.

Нека Q е копија на P која е пресечена од правата $2x=s+1$. Бидејќи симетријата во однос на оваа права го запазува покривањето, заклучуваме дека Q, т.е. P има вертикална оска на симетрија. Аналогно се добива дека P има и хоризонтална оска на симетрија.

Нека R е копија на P која го покрива полето $(1,1)$. Бидејќи симетријата во однос на правата $x=y$ го запазува покривањето, таа го пресликува R во R. Според тоа, R е симетрично истовремено во однос на правите $2x=m+1$ и $2y=m+1$, за некој природен број m. Тогаш R ги содржи полињата $(1,1),(m,1),(m,m)$ и $(1,m)$. Бидејќи целиот квадрат S лежи горе и десно во однос на полето $(1,1)$, добиваме дека R исто така лежи горе и десно во однос на полето

$(1,1)$, долу и десно од поелто $(1,m)$, долу и лево од полето (m,m) и горе и лево од полето $(1,m)$. Според тоа, R целосно се содржи во квадратот S', определен со аголните полиња $(1,1),(m,1),(m,m),(1,m)$.

Нека претпоставиме дека некое поле $(i,1)$, каде $1<i<m$, не припаѓа на R. Тогаш таа е покриена од некоја друга копија T на P. Бидејќи T и T се складни, најдолниот ред кој содржи полиња на T треба да содржи две такви полиња на растојание $m-1$ едно од руго, што не е можно. Според тоа, R ги содржи сите полиња меѓу $(1,1)$ и $(m,1)$ и тогашзаради симетријата, следува дека ја содржи и целта внатрешност на S'. Но, тоа значи дека $R \equiv S'$, односно дека R, па значи и P е квадрат.

35. Дадени се природни броеви m,n и r, $n \ge 2$, $1 \le r \le n-1$ и квадратна табла со димензии $(mn+r)\times(mn+r)$. Таблата е покриена со квадрати со димензии $n\times n$ со страни паралелни со страните на таблата, така што секое единечно поле е покриено барем еднаш. Определи го најмалиот можен број единечни полиња кои се покриени повеќе од еднаш.

Решение. Полињата кои се покриени повеќе од еднаш ќе ги наречеме *лоши*.

Да фиксираме еден ред и да ги разгледаме полињата кои се во колоните со броеви $r+1, r+n+1, ... r+(m-1)n+1$. Овој ред е покриен со најмалку $m+1$ „лента" од нашите $n\times n$ квадрати, а разгледуваме m полиња, па затоа барем едно од нив е лошо.

Аналогно добиваме барем едно лошо поле во пресекот на нашиот ред со колоните со броеви $r+2, r+n+2, ..., r+(m-1)n+2$ итн. Според тоа, во избраниот ред ќе имаме најмалку $n-r$ лоши полиња. Истото размислување во останатите неискористени колони дава по најмалку $n-r$ лоши полиња во секоја од нив. Според тоа, имаме најмалку

$$(mn+r)(n-r)+(m+1)r(n-r)=(mn+mr+2r)(n-r)$$

лоши полиња.

Ќе дадеме пример на покривање со точно $(mn+mr+2r)(n-r)$ лоши полиња. Во долниот лев агол на таблата одделуваме квадрат $(n+r)\times(n+r)$ и го покриваме поставувајќи квадрати во неговите четири агли. Понатаму, почнувајќи од горниот десен агол на дијагоналата на таблата поставуваме $m-1$ квадрати со димензија $n\times n$ кои не се преклопуваат и за секој од овие квадрати поставувајќи лево и долу по еден $n\times n$ квадрат ги дуплираме сите полиња кои се наоѓаат надвор од горниот десен $r\times r$ квадрат. Конечно, останатиот дел од таблата го покриваме со $n\times n$ квадрати кои не се преклопуваат. На ваков начин добиваме точно

$$(n+r)^2-r^2+(m-1)(n^2-r^2)=(mn+mr+2r)(n-r)$$

лоши полиња.

36. Петар покрил шаховска табла со димензии 600×600 со правоаголници со димензии 2×3 така што секое единечно квадратче од таблата е покриено со точно еден правоаголник. Потоа тој ги расекол сите правоаголници на три помали правоаголници со димензии $1\times1, 1\times2, 1\times3$ и му го покажал добиеното покривање на Никола. Дали може Никола според покривањето со помалите правоаголници еднозначно да го определи почетното покривање со правоаголниците 2×3?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат две покривања A и B со правоаголници 2×3, кои при соодветни расекувања доведуваат до едно исто покривање со помалите правоаголници. Тогаш постои правоаголник P_1 со димензии 1×3 таков што правоаголникот Q_1 со димензии 2×3, од кој P_1 е дел во A, е поставен различно од правоаголникот R_1 со димензии 2×3, од кој P_1 е дел во B. Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека P_1 се содржи во $i-$ тиот ред од таблата, Q_1 се содржи во $i-$тиот и $(i-1)-$ виот, а R_1 се содржи во $i-$тиот и $(i+1)-$виот ред од таблата.

Нека P_2 е правоаголникот 1×2, добиен од R_1 во B и нека Q_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_2 е дел во A. Тогаш P_2 се содржи во $(i+1)-$виот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+1)-$виот и $(i+2)-$риот ред на таблата.

Аналогно, нека P_3 е правоаголникот 1×3, добиен од Q_2 во A и нека R_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_3 е дел во B. Тогаш P_3 се содржи во $(i+2)-$риот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+2)-$риот и $(i+3)-$тиот ред на раблата.

Продолжувајќи ја постапката, ќе добиеме правоаголник P_n кој треба да лежи надвор од таблата, што е противречност.

Според тоа, меѓу сите покривања со правоаголници 2×3 само од почетното може да се добие покривањето со помали правоаголници, кое Петар му го покажал на Никола. Значи, Никола може еднозначно да го определи почетното покривање, за што е доволно да да ги провери сите можни почетни покривања и сите можни нивни расекувања.

37. Шаховска табла со димензија 6×6 е покриена со 18 плочки со димензија 2×1(секоја плочка покрива два квадрати). Да се покаже дека при секое такво покривање таблата може да се подели на два дела по хоризонтала или вертикала, при што не е пресечена ниту една од плочките 2×1.

Решение. Да го претпоставиме обратното, т.е. плочките се така поставени што секоја од хоризонталите и секоја од вертикалите дели барем едно поле на два дела.

Имаме 10 такви линии. Секоја од тие линии ја дели таблата на два дела, составена од парен број на полиња. Целите плочки 2×1 покриваат парен број полиња, па затоа од поделените полиња имаме парен број, т.е. најмалку две 2×1 плочки се пресечени од хоризонтала или вертикала.

Ако се има предвид дека секоја 2×1 плочка може да е пресечена само од една хоризонтала (вертикала), тогаш добиваме дека бројот на пресечени плочки е $10\times 2=20$. Противречност, бидејќи такви плочки имаме 18.

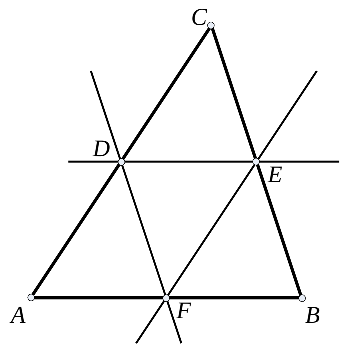
38. Еден квадрат е прекриен со правоаголници кои не се преклопуваат и не преоѓаат надвор од квадратот. Докажи дека збирот на плоштините на круговите определени со кружинците опишани околу покривачките правоаголници не е помал од плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу почетниот квадрат.

Решение. Нека плоштината на квадратот е P, а на кругот определен со кружницата опишана околу квадратот е K. Тогаш $K=\frac{P\pi}{2}$. Нека плоштината на еден од покривачките правоаголници е P', а плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу правоаголникот е K'. Нека страните на правоаголникот се a и b. Имаме:

$$K'=\frac{a^2+b^2}{4}\pi\geq\frac{\pi ab}{2}=\frac{P'\pi}{2}.$$

Со сумирање на соодветното неравенство за секој од покривачките правоаголници, а со оглед на фактот што сумата нап лоштините на покривачките правоаголници е еднаква нап лоштината на почетниот квадрат го добиваме бараниот резултат.

39. Во рамнината се дадени n точки ($n\geq 3$) така што нив нема три колинеарни точки и плоштината на секој триаголник определен со три од дадените точки е најмногу 1. Докажи дека постои триаголник ABC во рамнината (темињата не мора да се од дадените точки) со плоштина најмногу 4 така што сите дадени точки се покриени со триаголникот ABC.



Решение. Нека триаголникот DEF има најголема плоштина од сите триаголници чии темиња се три од дадените точки. Низ темето D повлекуваме права паралелна на EF, низ E паралелна на DF, а низ F паралелна на DE и на тој начин го добиваме триаголникот ABC. Бидејќи триаголникот DEF има плоштина најмногу 1, триаголникот ABC има плоштина најмногу 4 (ABC се состои од 4 триаголници кои се складни на DEF). Во внатрешноста и на рабовите на $\triangle ABC$ се наоѓаат точки од рамнината кои со секои две од точките D, E и F определуваат триаголник со плоштина најмногу еднаква на плоштината на DEF. Значи, сите n дадени точки се покриени со ABC.

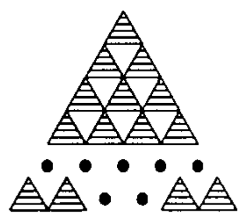
40. Секоја страна на рамностран триаголник ја делиме на k еднакви дела. Низ точките на страните повлекуваме прави паралелни на страните на триаголникот. Повлекуваме искршена линија низ триаголникот, при што:

а) Ниеден триаголник не се јавува два пати;

б) Секој нареден триаголник на искршената линија има заедничка страна со претходниот.

Низ колку триаголници минува искршената линија?

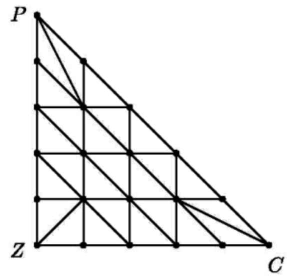
Решение. Да забележиме дека триаголникот е разбиен на k^2 мали триаголници. Да го обоиме триаголникот со две бои. Притоа црни триаголници има k повеќе од бели. Бројот на белите триаголници е $\frac{k(k-1)}{2}$ а на црните е $\frac{k(k+1)}{2}$. Два триаголници со иста боја не се допираат.затоа, при поминувањето на искршената линија се менува бојата



на триаголникот. Ако тргнеме од триаголникот со црна боја, тогаш можеме да ги опфатиме сите бели триаголници, т.е. $\frac{k(k-1)}{2}$ и уште $\frac{k(k-1)}{2}+1$ црни триаголници. Значи, сите опфатени триаголници се:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+1=k^2-k+1.$$

41. Триаголникот ZCP е поделен на 25 мали триаголници како на цртежот десно, а потоа сите темиња на овие триаголници се обоени во три бои на следниот начин: темето Z е обоено со зелена боја, темето C со црвена и темето P со сина; секое од темињата на отсечката ZC е обоено или со зелена или со црвена боја, секое од темињата на отсечката CP е обоено или со црвена или со сина боја, а секое од темињата на отсечката ZP е обоено или со зелена или со плава боја. Секое теме кое се наоѓа во внатрешноста на триаголникот е обоено без ограничување, со една од трите бои.



Докажи, дека за секое боење барем на еден од 25-те мали триаголници темињата се обоени со различна боја.

Решение. Ќе ги разгледуваме страните на малите триаголници кои имаат едно теме обоено со црвена, а друго со сина боја. Таквите страни ќе ги нарекуваме црвено-сини страни.

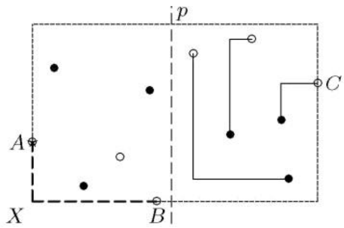
Секоја црвено сина страна која се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ZCP$ е страна на точно два мали триаголници. Понатаму, секоја црвено-сина страна која се наоѓа на една од страните на $\triangle ZCP$ според условот мора да припаѓа на отсечката CP. Бидејќи темето C е обоено со црвена боја, а темето P со сина боја, заклучуваме дека бројот на црвено-сините страни на отсечката CP е непарен.

Според тоа, мора да постои барем еден мал триаголник кој има непарен број црвено-сини страни. На тој триаголник мора сите три темиња да се обоени со различни бои.

42. *Ќоше* е искршена линија во (координатна) рамнина која се састои од една вертикална и една хоризонтална отсечка. Во рамнината се дадени n црвени и n сини точки чии проекции на оските x и y се меѓусебно различни. Докажи дека може да се нацртаат n ќошиња без заеднички точки така што секое ќоше има еден црвен и еден син крај. (Отсечката ги содржи своите краеви.)

Решение. Ќе користиме индукција по n. За $n=1$ тврдењето е тривијално. Нека $n>1$ и нека A, B и C крајната лева, крајната долнаа и крајната десна меѓу дадените точки, соодветно. Можеме да претпоставиме дека точката B е црвена.

1) Ако една од точките A и C, да кажеме A, е сина, точките A и B можеме да ги поврземе со ќоше AXB така што отсечката AX е вертикална, и на остатокот да ја примениме индуктивната претпоставка за $n-1$.



2) Ако точките A и C се црвени, дадените

точки може да се поделат со вертикална права p на две непразни подмножества така што лево од правата p (а исто така и десно) има еднаков број црвених и сини точки. Нивистина, при непрекинато поместување на правата p од точката A до точката С, разликата на бројот на црвените и сините точки се менува од 1 (на почетокот) до −1 (на крајот), менувајќи се при секој премин низ некоја точка за 1; па затоа во некој момент таа разлика мора да е 0. Сега е доволно да се примени индуктивната претпоставка на множествата точки лево и десно од правата p.

43. За полином $f(x)$ со реални коефициенти, $\deg f = 2012$ и позитивен водечки коефициент ја разгледуваме фигурата составена од сите точки со координати (x, y) такви што $y \geq f(x)$. Дали може рамнината да се покрие со конечен број такви фигури?

Решение. На почетокот фигурите да ги разгледаме како мдел од рамнината определен со неравенството $y \geq f(x)$. Секоја таква фигура може да се покрие со агол со однапред зададена големина и теме на $y-$оската. Навистина, бидејќи водеќкиот коефициент на $f(x)$ е позитивен и неговиот степен е парен број, неравенството $f(x) \geq ax$ е исполнето за секој доволно голем и секој доволно мал број x, а за останатиот конечен интервал покривањето можеме да го реализираме со транслација на аголот во негативната насока на $y-$оската.

Нека претпоставиме дека бараното покривање на рамнината е можно. Тогаш е можно рамнината да се покрие со конечен број агли со однапред зададени големини. Нека аглите се зададени така што нивниот збир е помал од 360°. Аглите да ги транслатираме така што тие да имаат заедничко теме. Тогаш постои полуправа со почетна точка во ова теме, која нема други заеднички точки (освен темето) со ниту еден од аглите. Последното е противречност, бидејќи оваа полуправа не може да биде покриена пред транслацијата, бидејќи секој агол од полуправата најмногу покрива отсечка со конечна должина.

44. Дадена е квадратна шема 4×4 и четири различни бои. На колку начини може да се обои квадратната шема, секое квадратче во една боја, така да во секоја колона и во секоја редица, секоја боја се јавува точно еднаш.

Решение. Нека претпоставиме дека боите во кои се обоени квадратчињата на квадратната шема се бела, црна, плава и зелена. Нив ќе го означуваме со буквите B, C, P, Z соодветно.

Првата хоризонтала (прва редица броејќи одгоре надолу) можеме да ја обоиме на $4!$ начини. Кога првата хоризонтала е обоена, првата вертикала (првата колона броејќи од лево кон десно) можеме да ја обоиме на $3!$ различни начини. Според тоа, бројот на различни боења на првата хоризонтала и првата вертикала истовремено е $4! \cdot 3!$.

B	C	P	Z
Z			
C			
P			

Цртеж 1

Ќе определиме на колку начини може да се обојат преостанатите девет полиња, кога првата хоризонтала и првата вертикала се фиксно обоени.

B	C	P	Z
Z	B	C	P
C			
P			

B	C	P	Z
Z	P	B	C
C			
P			

B	C	P	Z
Z	P	C	B
C			
P			

Цртеж 2

Нека претпоставиме дека првата хоризонтала и првата вертикала се обоени како на цртеж 1. Во преостанатите три бои во кои треба да ги обоиме трите полиња од втората хоризонтала, две бои веќе ги има во полињата над нив. При тоа трите полиња од втората хоризонтала можеме да ги обоиме на точно три начини (види цртеж 2). Во првиот и вториот случај на цртеж 2 (од лево кон десно) понатамошното боење може да се направи на еден единствен начин. Во третиот случај, понатамошното боење може да се направи на два начини (провери).

Според тоа квадратната шема може да се обои на $4!\cdot 3!(3+1)=24^2$ начини.

45. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна 1. На страните AB, BC и CA соодветно се избрани точки M, N и Q така што отсечките AN, BQ и CM го разделуваат $\triangle ABC$ на четири триаголници и три четириаголници. Секој триаголник го боиме со плава или жолта боја така што триаголниците со заедничко теме се обоени со различна боја. Ако плавиот и жолтиот дел имаат еднакви плоштини, пресметај ја вредноста на изразот $\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CQ}$.

Решение. Нека

$$\overline{AM}=m, \overline{BN}=n, \overline{CQ}=q,\ D\in AN\cap BQ, E\in CM\cap BQ, F\in AN\cap CM .$$

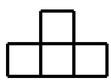
Ако F е меѓу A и D, D е меѓу B и E, E е меѓу C и F (направи цртеж), тогаш

$$P_{ABC}=P_{ANB}+P_{CMA}+P_{BQC}-P_{AFM}-P_{BDN}-P_{CEQ}+P_{DEF}=(m+n+q)P_{ABC},$$

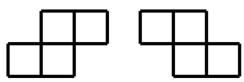
Бидејќи плавата и жолтата плоштина се еднакви. Оттука, $m+n+q=1$. Случајот кога D е меѓу A и F се разгледува аналогно.

4. РАСПОРЕДУВАЊА

1. Дали е можно во шаховска табла 8×8 да се запишат броевите од 1 до 64 (секој број е запишан точно еднаш) така да збирот на броевите во секоја фигура F е делив со 4.



цртеж 1

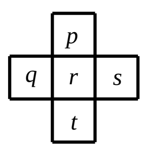


цртеж 2

а) фигурата F е од облик како на цртеж 1

б) фигурата F е од облик како на цртеж 2.

Решение. Деливоста на збирот на броевите во фигурата F со 4 е еднаква на деливоста со 4 на збирот на остатоците од делењето на броевите запишани во квадратчињата со 4. Според тоа, наместо да ги разгледуваме броевите од 1 до 64 во квадратната шема, доволно е да го разгледуваме распоредувањето на броевите $0,1,2,3$ во квадратчињата и деливост на соодветните збирови со 4.



цртеж 3

Да забележиме дека точно по 16 броеви од множеството броеви $\{1,2,3,....,64\}$ имаат еден ист остаток при делење со 4 кој мкоже да е еден од броевите $0,1,2,3$

а) Ќе разгледаме дел од квадратната шема како на цртежот 3, при што сметаме дека во неа се запишани броеви $p,q,r,s,t \in \{1,2,3,....,64\}$. Според условот од задачата имаме

$$p+q+r+s \equiv p+r+s+t \equiv q+r+s+t$$
$$\equiv q+p+r+t \pmod 4$$

Од особините на конгруенции добиваме

$$p \equiv q \equiv r \equiv s \equiv t \pmod 4).$$

Според тоа, броевите кои се наоѓаат во белите полиња, освен оние кои се наоѓаат во ќошевите на таблата, имаат еден ист остаток при делење со 4. Но такви има $30 > 16$. Според тоа таков распоред не е можен.

б) Можно е. Еден таков распоред е даден на црт. 4.

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

цртеж 4

2. Магичен квадрат со димензии 3×3 е квадрат со страна 3, составен од 9 единечни квадрати, така што реалните броеви запишани во единечните квадрати (по еден број во секој единечен квадрат) го задоволуваат својството: збирот на броевите од единечните квадрати во било која редица е еднаков на збирот на броевите од единечните квадрати во било која колона и е еднаков на збирот на броевите во единечните квадрати во двете дијагонали.

Даден е правоаголник со димензии $m\times n$, $m\geq 3, n\geq 3$, составен од mn единечни квадрати. Во секој единечен квадрат од правоаголникот е запишан по еден број така што секој квадрат со димензии 3×3 е магичен. Колку најмногу различни броеви можат да се употребат за пополнување на правоаголникот?

Решение. Да го разгледаме магичниот квадрат прикажан на цртежот десно. Тогаш

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

$$\begin{aligned} A_1+A_2+A_3 &= B_1+B_2+B_3 = C_1+C_2+C_3 = A_1+B_1+C_1 \\ &= A_2+B_2+C_2 = A_3+B_3+C_3 = A_1+B_2+C_3 \\ &= C_1+B_2+A_3 = S, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} 4S &= (B_1+B_2+B_3)+(A_2+B_2+C_2)+(A_1+B_2+C_3)+(C_1+B_2+A_3) \\ &= (A_1+A_2+A_3)+(B_1+B_2+B_3)+(C_1+C_2+C_3)+3B_2 \\ &= 3S+3B_2. \end{aligned}$$

Добиваме $S=3B_2$. Во продолжение централниот елемент B_2 го означуваме со x. Докажавме дека ако централниот елемент во магичниот квадрат е x, тогаш

$$S=3x \qquad (1)$$

Ако правоаголникот е со димензии 3×3, тогаш тој е магичен квадрат и постои пополнување со 9 различни броеви, на пример види цртеж десно.

1	10	4
8	5	2
6	0	9

	x								

Цртеж 1

	x	x							

Цртеж 2

Ќе докажеме дека правоаголник со димензии $n=3, m>3$ мора да се пополни со единствен број. Нека $n=3, m>3$ и нека во првиот централен квадрат е бројот x (цртеж 1).

	x	x	x	…	…	x	x	x	

Цртеж 3

a	c								
x	x	x	x	…	…	x	x	x	x
b	d								

Цртеж 4

Од (1) добиваме дека ако е пополнет единечниот квадрат од правоаголникот како на цртеж 1, тогаш S на означениот квадрат на сликата изнесува $3x$. Го разгледуваме квадратот означен на цртеж 2. Тогаш неговиот централен единечен квадрат мора да биде повторно x, бидејќи втората колона има сума $3x$. Аналогно, со поместување на квадратот на десно добиваме правоаголник кој мора да е пополнет како на цртеж 3.

Од квадратите кои се обоени, следува дека целата втора редица е пополнета со x. Нека претпоставиме дека пополнувањето е како на цртеж 4.

a	c	a							
x	x	x	x	…	…	x	x	x	x
b	d	b							

Цртеж 5

a	c	a	a						
x	x	x	x	…	…	x	x	x	x
b	d	b	b						

Цртеж 6

Бидејќи збирот на броевите по првата редица од обоениот квадрат е ист со збирот на броевите по дијагоналите, пополнувањето мора да биде како што е прикажано на цртеж 5. Понатаму, го разгледуваме обоениот квадрат на цртеж 6. Заради $2a+c=3x$ и $2b+d=3x$ го добиваме пополнувањето прикажано на цртеж 6.

Аналогно на пополнувањето на цртеж 5 на обоениот квадрат, добиваме дека $c=a, b=d$, што е прикажано на цртеж 7, од каде следува $a=b=c=d=x$ односно сите елементи од пополнувањето мора да бидат еднакви.

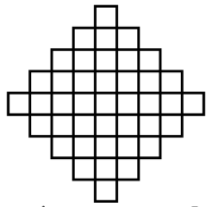
Нека $n>3, m>3$. Тогаш заради претходната дискусија, правоаголникот со ширина 3 и должина m мора да е пополнет со еден број. Од исти причини и секој правоаголник кој се добива со поместување по вертикала мора да е пополнет со еден број.

a	a	a	a						
x	x	x	x	…	…	x	x	x	x
b	b	b	b						

Цртеж 7

Конечно, ако $n=m=3$, тогаш постои пополнување со 9 различни броеви. Ако $n>3$ или $m>3$, тогаш единственото можно пополнување е со само еден број.

3. *Дијамант од ред* n е фигура составена од единични квадрати и тоа по $1,3,\dots,2n-3,2n-1,2n-3,\dots,3,1$ единични квадрати во секој ред, земено по тој редослед (види цртеж). Нека $A(n,k)$ е бројот на начини на поставување на k 2×2 квадрати без преклопување на $(2n-1)\times(2n-1)$ квадратна мрежа и нека $B(n,k)$ е бројот на начини на поставување на k 2×1 домина без преклопување на дијамант од ред n. Докажи дека $A(n,k) < B(n,k)$, за $2 \le k \le (n-1)^2$.


дијамант од ред 5

Решение. Да ја обоиме $(2n-1)\times(2n-1)$ квадратната мрежа како шаховска табла така што на аглите да бидат црни полиња. Секој 2×2 квадрат лежи на точно две дијагонално црно обоени полиња. Постои биекција меѓу црните квадратчиња од мрежата и квадратчињата од дијамантот. Притоа на два црни полиња кои имаат заедничко теме им одговараат две квадратчиња од дијамантот со заедничка страна. При таа биекција квадрат 2×2 се пресликува во домино 2×1, без преклопување. Според тоа секое поставување $A(n,k)$ на 2×2 квадрати одговара најмалку едно поставување $B(n,k)$ на 2×1 домина. Обратното не мора да важи бидејќи две домина кои формираат 2×2 на дијамантот им одговараат два 2×2 квадрати на квадратната мрежа со заедничко бело квадратче.

Притоа, ако $2 \le k \le (n-1)^2$, еден k распоред може да се најде и важи строго неравенство. Ако $k > (n-1)^2$, распоред како бараниот нема, па затоа важи $A(n,k) = B(n,k) = 0$.

4. Даден е квадрат поделен на 100×100 еднакви квадратчиња. На квадратот се нацртани искршени линии такви што:

а) Секоја од нив е составена од отсечки кои се страни на квадратчињата и се наоѓаат во внатрешноста на големиот квадрат;

б) Секоја од нив нема самопресечни точки;

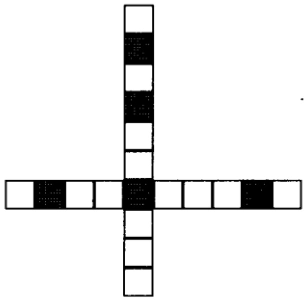
в) Кои било две од нив немаат заеднички точки;

г) Секоја од нив има краеви на страните на големиот квадрат.

Докажи дека освен темињата на големиот квадрат постои барем уште една точка (на страните на големиот квадрат или во неговата внатрешност) низ која не минува ниту една искршена линија.

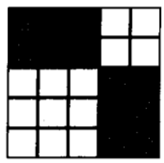
Решение. Да ги обоиме темињата на квадратчињата (јазлите) црно-бело како во шах. Секоја искршена линија со истобојни краеви има непарен број јазли, а со разнобојни краеви има парен број јазли. Да претпоставиме дека од сите јазли на границата на квадратот, освен темињата на квадратот, повлечени се сите искршени линии. Ќе докажеме дека сите линии заедно содржат парен број јазли. Доволно е да докажеме дека бројот на линии со истобојни краеви е парен (во спротивно, би добиле непарен број линии со истобојни краеви и на секоја од нив по непарен број јазли што значи дека на сите линии со истобојни краеви се наоѓаат непарен број јазли а на линиите со разнобојни краеви се наоѓаат парен број јазли, па бројот на сите јазли би испаднал непарен). На секоја страна од квадратот има по еднаков број бели и црни јазли (исклучени се темињата на квадратот). Значи бројот на бели и бројот на црни јазли се деливи со 4 . Нека има $4m$ бели и $4n$ црни јазли. Бројот на сите линии со бели краеви нека е k . Во тие k линии се искористени $2k$ бели јазли (на краевите), па остануваат $4m-2k$ - бели јазли. Секоја од линиите повлечени од тие јазли има црн крај. Значи има $4m-2k$ - линии со разнобојни краеви. Остануваат $4n-(4m-2k)$ - црни јазли и линиите повлечени од нив имаат црн крај т.е. има $\frac{4n-(4m-2k)}{2}=2(n-m)+k$ линии со црни краеви. Значи линии со истобојни краеви има $k+2(n-m)+k=2(n-m+k)$. Но во квадрат 100×100 има непарен број јазли затоа не може да минуваат низ сите јазли во квадратот.

5. За распоредувањето на жетони на табла $n\times n$ $(n\geq5)$, со најмногу еден жетон во единечно квадратче, ќе велиме дека е добро ако секој ред и секоја колона на таблата содржат најмалку 2 жетони. Определи го најголемиот број жетони m, за кој постои добро распоредување така што ако се отстрани било кој жетон тогаш распоредувањето веќе не е добро.



Решение. Под крст ќе подразбираме унија на ред и колона на таблата, ако и редот и колоната содржат барем по 3жетони од доброто множество S и заедничкото квадратче исто така содржи жетон од S (цртеж десно).

Подолу ќе докажеме дека ако за бројот s на елементите на S важи $s\geq4n-7$, тогаш на таблата сигурно ќе има крст. Но тогаш заедничкиот жетон за редот и колоната во крстот може да се отстрани и распоредувањето повторно ќе остане добро.



Оттука ќе следува дека бараниот максимум ѓетони е помал или еднаков на $4n-7-1=4n-8$. Случајот кога тој број се достигнува е прикажан на цртежот десно за $n=5$. За поголеми вредности на n примерите се аналогни: на пример пресекот на првите два реда одгоре-надолу првите $n-2$ колони одлево-надесно, како и пресекот на останатите редови и последните две колони, целосно се пополнуваат со жетони.

Прво нека $n=5,6$ или 7. Да ги разгледаме оние редови и колони кои имаат најмногу жетони од S и тој број да го означиме со k. Јасно, $k\geq3$. Во спротивен случја бројот на елементите на S е $2n$, но $2n<4n-8$. За определеност ќе сметаме дека овие k жетони се распоредени во горниот крај на најлевата колона. Исто така може да сметаме дека произволен ред од најгорните k реда содржи најмногу 2 жетони, бидејќи во спротивен случај ќе имаме крст и тврдењето ќе биде докажано. Заклучуваме дека вкупниот број жетони во најгорните k редови на таблата е најмногу $2k$. Останатите $n-k$ редови содржат најмногу $k(n-k)$ жетони од S и тогаш $4n-7\leq s\leq 2k+k(n-k)$, од каде добиваме $k^2-(n+2)k+4n-7\leq0$. Дискриминантата на добиената квадратна неравенка по однос на k е $(n+2)^2-4(4n-7)=(n-4)(n-8)$ и очигледно е негативна за $n=5,6$ и 7. Заклучуваме дека $k^2-(n+2)k+4n-7>0$, што е противречност.

Нека претпоставиме дека тврдењето е докажано за $n=k$. Ќе го докажеме за $n=k+3$. Да забележиме дека постои ред со најмалку 3 жетони од S, бидејќи во спортивно ќе добиеме дека $s \le 2n$ и неравенството $s \ge 4n-7$ ќе биде нарушено. Од истата причина постои и колона со најмалку 3 жетони од S. Да разгледаме таков ред и тахва колона. Без ограничување можеме да земеме дека таквата колона е најлевата и жетоните во неа се на горниот крај. Исто така, нека избраниот ред е најдолниоти нека жетоните од S се на десната. Ако некој од најгорните три реда содржи најмалку 3 жетони од S, тогаш тој ред заедно со најлевата колона формира крст. Затоа може да претпоставиме дека секој од најгорните три реда, како и секоја од најдесните три колони содржат најмногу по 2 жетони од S. Добивме дека во овие редови и колони се содржат најмногу 12 жетони од S. Тогаш од неравенството $s \ge 4n-7 = 4(k+3)-7 = 4k-7+12$ следува дека во останатата $k \times k$ табла се содржат барем $4n-7$ жетони од S. Сега, согласно индуктивната претпоставка тука ќе има крст, кој очигледно ќе биде крст и на целата $n \times n$ табла. Со тоа задачата е решена.

6. Определи ја најголемата вредност на бројот a таков што за било кој распоред на кружница на броевите 1,2,3, ..., 10, мора да постојат три соседни броеви чиј збир е поголем или еднаков на a.

Решение. Да ги расгледаме сите последователни тројки броеви. Такви има 10 и да ги означиме со $S_1, S_2, ..., S_{10}$. Важи

$$S_1 + S_2 + ... + S_{10} = 3(1+2+...+10) = 165.$$

Оттука следува дека мора да постои $i \in \{1,2,...,10\}$ таков што $S_i \ge \frac{165}{10} = 16,5$. Значи, $a \ge 17$.

Ќе докажеме дека $a = 18$. Ако го испуштиме бројот 1 ќе добиеме низа од девет броеви и истата да ја поделиме во три последователни збирови од по три броја T_1, T_2, T_3. Збирот на овие броеви ќе биде

$$2+3+...+9 = 54 = T_1 + T_2 + T_3.$$

Од овде следува дека $T_i \ge \frac{54}{3} = 18$. Дека a не може да биде поголем од 18 следува врз основа на цикличното распоредување $(1,10,6,2,9,4,5,3,8,7)$.

7. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1,2,3,...,n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број до секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$

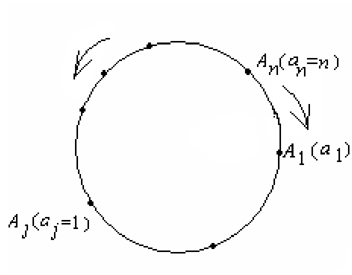
Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со A_i ($1 \le i \le n$), поаѓајќи од произволна точка движејќи се во позитивна насока. Нека бројот a_i ($1 \le a_i \le n$, $1 \le i \le n$) е запишан покрај точката A_i. Без губење на општоста можеме да земеме $a_n = n$. Нека 1 е запишан покрај точката A_j, т.е. $a_j = 1$. Тогаш движејќи се по кружницата од A_n кон A_j по една од двете насоки и пресметувајќи ги разликите на броевите кај соседните точки добиваме:

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_{j+1} - a_j| \geq (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{j+1} - a_j)$$
$$= a_n - a_j = n - 1$$

$$|a_n - a_1| + |a_1 - a_2| + ... + |a_{j-1} - a_j| \geq (a_n - a_1) + (a_1 - a_2) + ... + (a_{j-1} - a_j)$$
$$= a_n - a_j = n - 1$$

Оттука заклучуваме дека сумата на апсолутните вредности на разликите е поголема или еднаква на $2(n-1)$.

8. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1, 2, ..., n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број покрај секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$.



Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со $A_i, (1 \leq i \leq n)$ движејќи се во позитивна насока така што со A_n ќе биде означена точката покрај која е запишан бројот n. Нека со A_j е означена точката покрај која е запишан бројот j. Движејќи се од A_n кон A_j, првиот пат во позитивна, а вториот пат во негативна насока, добиваме

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_{j+1} - a_j| \geq (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{j+1} - a_j)$$
$$= a_n - a_j = n - 1$$
$$|a_n - a_1| + |a_1 - a_2| + ... + |a_{j-1} - a_j| \geq (a_n - a_1) + (a_1 - a_2) + ... + (a_{j-1} - a_j)$$
$$== a_n - a_j = n - 1.$$

Со собирање на последните две равенства добиваме

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \geq 2(n-1),$$

што требаше да се докаже.

9. На случаен начин 2008 момчиња и 2008 девојчиња се распоредени на круг. Секое девојче има топка, а секое момче има кукла. Во еден чекор секој на својот десен сосед му го предава предметот кој го има во моментот. Потоа сите момчиња кои добиле топка и сите девојчиња кои добиле кукла го напуштаат кругот, а останатите продолжуваат на истиот начин. Определи го максималниот можен број чекори во оваа игра.

Решение. Ако сите момчиња се наредени едно до друго, тогаш и сите девојчиња се наредени едно до друго. При ваков распоред во секој чекор само двајца го напуштаат кругот, едно момче и едно девојче. Според тоа, за овој распоред се потребни 2008 чекори.

Ќе докажеме дека за произволен распоред после најмногу 2008 чекори играта ќе заврши. За таа цел доволно е да докажеме дека во секој момент во кругот има како момчиња, така и девојчиња. Тоа значи дека во секој момент ќе има најмалку две соседства девојче-момче и во следниот чекор најмалку двајца ќе го напуштат кругот.

Нека претпоставиме дека во даден момент во кругот останале само момчиња. Тогаш тие имаат кукли, а од кругот излегле 2008 девојчиња, кои исто така имале куклу. Според тоа, кукли има повеќе од 2008, што противречи на условот на задачата. Аналогно се докажува дека не е можно во кругот да останале само девојчиња.

10. На републичкиот натпревар по математика, познато е дека секој натпреварувач има не повеќе од тројца познаници (познанството е симетрична релација). Докажи дека е можно натпреварувачите да се распоредат во две простории така што секој од нив на натпреварот има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.

Решение. Да ги распоредиме натпреварувачите во две простории сосема произволно. Со S_1 да го означиме вкупниот број познанства во првата просторија, а со S_2 да го означиме вкупниот број познанства во втората просторија. Нека $S = S_1 + S_2$ (доколку два натпреварувачи рапоредени во иста соба се познаници, тоа познанство го броиме еднаш, а не двапати) Тогаш S е ненегативен цел број. Да претпоставиме дека ваквиот распоред не е задоволителен т.е. постои натпреварувач A така да во неговата просторија има барем двајца негови познаници B и C. Го префрламе A во другата просторија; да забележиме дека со ова вредноста на S се намали барем за 1. Во другата просторија A има не повеќе од еден познаник. Според тоа, едниот од броевите S_1 и S_2 се намалил за два а другиот се наголемил за 1, па според тоа S се намалил за 1. Постапката ја продолжуваме се додека моменталниот распоред не е поволен. Бидејќи S е ненегативен цел број, после конечен број вакви префрлања ќе стигнеме до поволен распоред, т.е. распоред во кој натпреварувачите се распоредени во две простории така што секој натпреварувачите има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.

11. Македонската математичка олимпијада се одржува во две соби означени со броеви 1 и 2. На почетокот сите натпреварувачи влегуваат во соба бр. 1. Краен распоред на натпреварувачите по соби се добива на следниот начин: листа со имиња на неколку од натпреварувачите се чита на глас; кога едно име ќе биде прочитано, тој натпреварувач и сите негови познаници меѓу останатите натпреварувачи ја променуваат просторијата во која моментално се наоѓаат. Така на секоја листа имиња одговара по еден краен распоред на натпреварувачите по соби. Покажи дека вкупниот број на можни крајни распореди не е еднаков на 2009. (Познанство меѓу натпреварувачи е симетрична релација).

Решение. Ќе покажеме дека вкупниот број можни крајни рапореди е парен, па затоа не може да биде 2009. Доволно е да се покаже дека постои листа имиња на некои од натпреварувачите со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2. (ако ова важи тогаш за секој можен краен распоред и обратниот распоред во кое секој натпреварувач е во другата соба е можен, па имаме спарување на можните крајни рапореди) .

Тврдењето ќе го покажеме со индукција по n, каде n е бројот на натпреварувачи.

За n=1 тврдењето очигледно важи.

Нека претпоставиме дека за n натпреварувачи тврдењето важи.

Да го разгледаме случајот со n+1 натпреварувачи: за секои n меѓу нив постои листа имиња со која се префрлаат во соба бр. 2; доколку со некоја таква листа и преостанатиот натпреварувач се префрла во соба бр. 2 тогаш тврдењето важи; затоа да претпоставиме дека за секој од n+1-те натпреварувачи постои т.н. негова добра листа со која преостанатите n се префрлаат во соба бр. 2, а тој натпреварувач останува во соба бр. 1; ќе разгледаме два случаи:

(i) n е непарен; тогаш со големата листа составена од ваквите n+1 добри листи сите натпреварувачи се префрлаат во соба бр.2;

(ii) n е парен; тогаш меѓу n+1-те натпреварувачи постои барем еден со парен број на познаници меќу преостанатите; името на таков натпреварувач ни е прво во новоформираната листа; по прочитувањето на тоа име во собата бр. 2 има непарен број натпреварувачи, па ги додаваме нивните добри листи; така е конструирана листа со која сите натпреварувачи од соба бр. 1 се префрлаат во соба бр. 2.

Со тоа индуктивниот доказ е комплетиран.

12. Натпреварувачите на овогодинешната ММО *добро* се распоредени во n колони (рапоредување по колони е добро ако во иста колона не се појавуваат познаници), но истото не може да се постигне во помалку од n колони. Покажи дека постојат натпреварувачи $M_1, M_2, \dots, M_n$ за кои важи следново:

(1) M_i е во i -тата колона, за секој $i = 1, 2, \dots, n$;

(2) M_i е познаник со M_{i+1}, за секој $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Решение. Ќе извршиме прераспоредувања по колони. Најпрво, од втората колона го префрламе во првата колона секој натправарувач кој нема познаник во првата колона. Новото распоредување е добро, па затоа во втората колона останал барем еден натправарувач. Сега од третата колона го префрламе во втората колона секој натпреварувач кој нема познаник меѓу преостатаните во втората колона. Новото распоредување повторно е добро, па затоа во третата колона останал барем еден натпреварувач итн. За крај, од n -тата колона го префрламе во $(n-1)$ -вата колона секој натпреварувач кој нема познаник меѓу преостатаните во $(n-1)$ -вата колона. Добиеното распоредување повторно е добро, па затоа во n -тата колона останал барем еден натпреварувач. Означуваме еден таков со M_n . Мора да постои негов познаник M_{n-1} во $(n-1)$ -вата колона. Да забележиме дека M_{n-1} не е преместуван (во спротивно првичното распоредување не е добро). Затоа M_{n-1} има познаник M_{n-2} во $(n-2)$ -рата колона. Аналогно заклучуваме дека M_{n-2} не е преместуван итн. На овој начин се пронајдени натпреварувачи $M_1, M_2, \dots, M_n$ за кои важат условите (1) и (2).

13. Маѓионичар располага со 100 карти, нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става картите во три кутии: црвена, бела и сина така, што во секоја кутија има барем по една карта.

Човек од публиката избира две од трите кутии, вади од кутиите по една карта и го соопштува збирот на броевите од извадените карти. Дознавајќи го збирот, маѓионичарот ја определува кутијата, од која не е извадена карта.

На колку различни начини може да се распоредат сите карти во кутиите така, што маѓионичарот секогаш да е успешен?

(Два распореди се сметаат за различни, ако барем една карта е во различни кутии.)

Решение. Да ги означиме трите кутии со A, B и C и да ги разгледаме распоредите при кои маѓионичарот е успешен.

Прв случај. Постои i таков што $i, i+1, i+2$ се во различни кутии. Нека $i \in A, i+1 \in B$ и $i+2 \in C$. Од равенството $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$ следува дека треба $i+3 \in A$. Аналогно, $i+4 \in B$ и $i+5 \in C$. Според тоа, ако $1 \in A, 2 \in B$ и $3 \in C$, тогаш A ги содржи броевите од облик $3k+1$, B ги содржи броевите од облик $3k+2$ и C ги содржи броевите од облик $3k$. Јасно, при ваков распоред маѓионичарот е успешен и притоа имаме вкупно $3!=6$ различни распореди.

Втор случај. Нека не постојат три последователни броеви кои се во различни кутии. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $1 \in A$ и нека i е најмалиот број кој не е во A. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $i \in B$. Нека најмалиот број во C е k. Бидејќи $i-1 \in A$ и $i \in B$, според претпоставката не смее $i+1 \in C$. Ќе докажеме, дека $k=100$. Да претпоставиме, дека $k<100$. Од равенството $i+k=(i-1)+(k+1)$ следува дека $k+1 \in A$. Но, $i+(k+1)=(i+1)+k$, па затоа $i+1 \in C$, што е противречност. Според тоа, $k=100$. Ќе докажеме, дека секој $t=2,3,...,99$ е во B. Нека претпоставиме дека постои t таков што $t \in A$. Сега од равенството $t+99=(t-1)+100$ следува дека $t-1 \in C$, што е противречност. Лесно се проверува, дека при ваквиот распоред маѓионичарот е успешен. Јасно и во овој случај имаме вкупно $3!=6$ распореди.

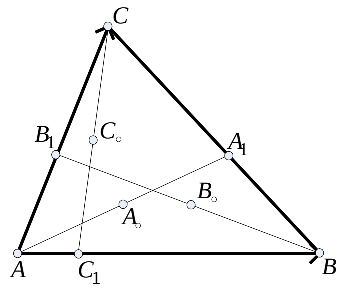
Конечно, вкупниот број на распореди при кои маѓионичарот е успешен е 12.

VI ПЛАНИМЕТРИЈА

1. ТРИАГОЛНИК

1. Нека A_1, B_1 и C_1 се произволни внатрешни точки соодветно од страните BC, CA и AB на триаголникот ABC и нека A_0, B_0 и C_0 се средини на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 соодветно. Докажи дека точките A_0, B_0 и C_0 не се колинеарни.

Решение. Да ставиме $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (види цртеж). Тогаш $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Точката C_1 лежи на страната AB што значи дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ се колинерани, па постои реален број λ $(0 < \lambda < 1)$, така што $\overrightarrow{AC_1} = \lambda\vec{b}$. Исто така, постојат реални броеви μ и ν $(0 < \mu, \nu < 1)$, така што $\overrightarrow{BA_1} = \mu(\vec{c} - \vec{b})$, $\overrightarrow{AB_1} = \nu\vec{c}$.



За да докажеме дека точките A_0, B_0, C_0 не се колинеарни, доволно е да докажеме дека векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_0C_0}$ не се колинеарни, т.е. не постои реален број x така што $\overrightarrow{A_0C_0} = x\overrightarrow{A_0B_0}$. За таа цел, прво да ги најдеме векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_0C_0}$. Имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0B_0} &= \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_0} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1})\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{AB_1}) = \tfrac{1}{2}(\mu\overrightarrow{BC} + \nu\overrightarrow{AC}) = \tfrac{1}{2}(\mu\vec{b} + (\nu - \mu)\vec{c})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0C_0} &= \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_0} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1})\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{AC_1}) = \tfrac{1}{2}((1-\mu)\overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}((1-\mu)(\vec{c} - \vec{b}) + \lambda\vec{b})\\ &= \tfrac{1}{2}((\lambda + \mu - 1)\vec{b} + (1-\mu)\vec{c})\end{aligned}.$$

Да ја разгледаме, сега, равенката $\overrightarrow{A_0C_0} = x\overrightarrow{A_0B_0}$, т.е.

$$(\lambda + \mu - 1 - x\mu)\vec{b} + (1 - \mu - x\nu + x\mu)\vec{c} = \vec{0}.$$

Векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не се колинеарни, па, ќе имаме

$$\lambda + \mu - 1 - x\mu = 0$$
$$1 - \mu - x\nu + x\mu = 0$$

Бидејќи $0 < \mu < 1$, првата равенка има единствено решение $x = \frac{\lambda+\mu-1}{\mu}$. Втората равенка има решение ако $\mu - \nu \neq 0$, или, пак, $\mu - \nu = 0$ и $\mu - 1 = 0$. Во вториот случај имаме $\mu = \nu = 1$, што не е можно. Значи, и втората равенка има единствено решение $x = \frac{\mu-1}{\mu-\nu}$. За равенката $\overrightarrow{A_0C_0} = x\overrightarrow{A_0B_0}$ да има решение, треба $\frac{\lambda+\mu-1}{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu-\nu}$, од каде што добиваме $\lambda = -1 + \frac{\mu(1-\nu)}{\mu-\nu} < 0$, што не е можно.

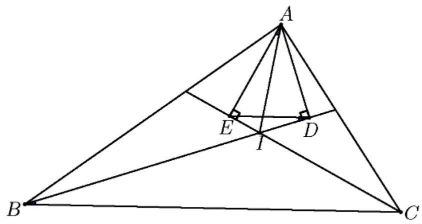
Следствено, не постои реален број x, така што да важи $\overrightarrow{A_0C_0} = x\overrightarrow{A_0B_0}$, т.е. точките A_0, B_0 и C_0 не се колинеарни.

2. Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето A на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Докажи дека $DE \parallel BC$.

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница (цртеж десно). Тогаш четириаголникот $ADIE$ е тетивен, па затоа $\measuredangle IDE = \measuredangle IAE$. Според тоа,

$$\measuredangle IDE = \measuredangle IAE = \measuredangle CAE - \measuredangle CAI$$
$$= 90^\circ - \frac{\measuredangle ACB}{3} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$$
$$= \frac{\measuredangle ABC}{2} = \measuredangle IBC,$$

што значи дека $DE \parallel BC$.



3. Нека $CL, (L \in AB)$ е симетрала на агол во $\triangle ABC$ и нека $\overline{AC} = \overline{CL}$. Точката K лежи на полуправата CL и важи $\measuredangle CAL + \measuredangle CAK = 180^\circ$. Докажи, дека $\overline{BC} = \overline{CK}$.

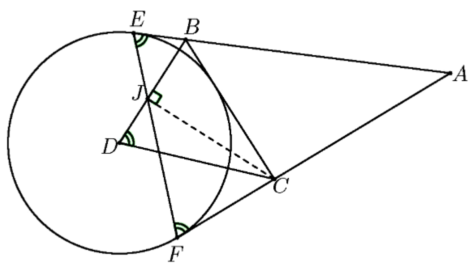
Решение. Од $\measuredangle CLA = \measuredangle CAL$ следува $\measuredangle CLB = \measuredangle CAK$, направи цртеж. Оттука и од условот следува дека триаголниците CAK и CLB се складни, па затоа $\overline{BC} = \overline{CK}$.

4. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е центар на припишаната кружница наспроти темето A. Нека оваа кружница ги допира страните AB и BC во точките E и F, соодветно и точката J е пресекот на BD и EF. Докажи дка $\measuredangle CJB = 90^\circ$.

Решение. Бидејќи

$$\measuredangle BDC = 90^\circ - \frac{\measuredangle BAC}{2} \text{ и}$$
$$\measuredangle EFC = 90^\circ - \frac{\measuredangle BAC}{2}$$

(второто заради $\overline{AE} = \overline{AF}$), добиваме $\measuredangle JDC = \measuredangle JFC$, што значи дека четириаголникот $JDFC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CJB = \measuredangle CFD = 90^\circ$.



5. Симетралата на $\measuredangle A$ на $\triangle ABC$ ги сече страната BC и опишаната кружница околу триаголникот во точките D и M соодветно. Права низ D ги сече полуправите MB и MC во точките P и Q, соодветно. Докажи, дека $\measuredangle PAQ \geq \measuredangle A$.

Решение. Од $\measuredangle DBM = \measuredangle DAC = \frac{\measuredangle A}{2}$ следува дека BM е тангента на опишаната кружница околу $\triangle ABD$, направи цртеж. Тогаш P е надворешна точка за таа кружница, па затоа $\measuredangle APD \leq \measuredangle ABD = \measuredangle B$. Аналогно $\measuredangle AQD \leq \measuredangle ACD = \measuredangle C$, па затоа

$$\measuredangle PAQ = 180^\circ - \measuredangle APD - \measuredangle AQP \ge 180^\circ - \measuredangle B - \measuredangle C = \measuredangle A.$$

6. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ е впишана кружница ω со центар I, која страната BC ја допира во точка D. Нека O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Опишаната кружница околу $\triangle AID$ по вторпат ја сече правата AO во точка E. Докажи, дека должината на отсечката AE е еднаква на радиусот на кружницата ω.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Нека полуправата DI ги сече отсечките AO и AC во точките P и Q соодветно, направи цртеж. Имаме

$$\measuredangle AIP = \measuredangle DQC - \measuredangle IAC = 90^\circ - \measuredangle C - \tfrac{1}{2}\measuredangle A.$$

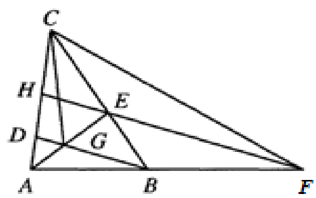
$$\measuredangle IAP = \measuredangle OAB - \measuredangle IAB = \tfrac{180^\circ - \measuredangle AOB}{2} - \tfrac{1}{2}\measuredangle A = 90^\circ - \measuredangle C - \tfrac{1}{2}\measuredangle A.$$

Според тоа, $\triangle API$ е рамнокрак ($\overline{AP} = \overline{PI}$), т.е. точката P лежи на симетралата l на AI, а полуправите PA и PI се симетрични во однос на l. Опишаната кружница околу $\triangle AID$ исто така е симетрична во однос на l. Затоа отсечките AE и ID се симетрични, па според тоа тие имаат еднакви должини.

7. Точката D на страната AC на $\triangle ABC$ е таква што $\overline{BD} = \overline{CD}$. Низ точка E од страната BC е повлечена права паралелна на правата BD и оваа права ја сече правата AB во точка F. Ако $G = AE \cap BD$, докажи дека $\measuredangle BCG = \measuredangle BCF$.

Решение. Ако $H = AC \cap EF$, тогаш $\measuredangle CDG = \measuredangle FHC$ и важи

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{HC}}.$$



Според тоа, $\triangle CDG \sim \triangle FHC$, па затоа $\measuredangle GCD = \measuredangle CFH$, од каде добиваме

$$\measuredangle BCG = \measuredangle BCD - \measuredangle GCD = \measuredangle CEH - \measuredangle CFH = \measuredangle BCF.$$

8. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, со симетрала на агол $AL, L \in BC$. Кружницата со дијаметар AL ги сече AC и BL соодветно во точките D и E, $D \ne A, E \ne L$. Докажи, дека D е средина на AC ако и само ако E е средина на BL.

Решение. Ако D е средината на AC, тогаш LD е средна линија и висина во $\triangle ALC$ и затоа $\measuredangle ACL = \measuredangle CAL$, направи цртеж. Од друга страна

$$\measuredangle CAL = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \tfrac{180^\circ - \measuredangle ACL}{2},$$

па лесно следува дека $\measuredangle ACB = 36^\circ$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 72^\circ$. Сега, од $\triangle ABL$ добиваме $\measuredangle ALB = 72^\circ$, што значи дека $\triangle ABL$ е рамнокрак и AE е негова висина и тежишна линија, т.е. E е средина на BL.

Обратната насока се докажува аналогно.

9. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар I, која страните BC, CA и AB

соодветно во точките D, E и F. Правата ID ја сече отсечката EF во точка K и точката M е средината на отсечката BC. Докажи дека точките A, K и M лежат на една права.

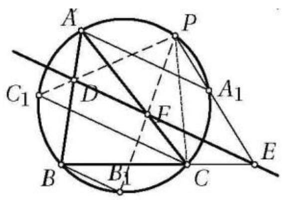
Решение. Повлекуваме права низ K паралелна со BC и нека таа права ги сече AB и AC соодветно во точките P и Q. Од $IK \perp PQ$ следува дека точките I, K, F и P лежат на една кружница (со дијаметар IP). Аналогно I, K, E Q лежат на една кружница. Според тоа,

$$\measuredangle FIP = \measuredangle FKP = \measuredangle EKQ = \measuredangle EIQ,$$

па затоа $\triangle FIP \cong \triangle EIQ$ и $\overline{IP} = \overline{IQ}$. Добиваме, дека $\triangle IPQ$ е рамнокрак, а IK е висина и тежишна линија во него, т.е. $\overline{KP} = \overline{KQ}$. Последното означува дека K лежи на тежишната линија AM.

10. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F, и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E. Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Докажи дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.

Решение. Нека правата A_1E по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P. Тогаш



$$\measuredangle EPC = \measuredangle A_1PC = \measuredangle A_1AC = \measuredangle EFC,$$

па затоа четириаголникот $EPFC$ е тетивен. Сега

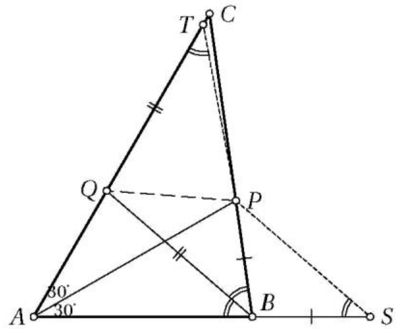
$$\measuredangle FPC = \measuredangle FEC = \measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1PC,$$

па затоа точката P лежи на правата B_1F.

Аналогно P лежи на правата C_1D.

11. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка P, а симетралата на аголот ABC ја сече страната CA во точка Q. Ако $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека S и T се точки на правите AB и AC, со распоред $A - B - S$ и $A - Q - T$, соодветно такви што $\overline{BS} = \overline{BP}$ и $\overline{QT} = \overline{QB}$. Дадено е дека



$$\overline{AS} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AT}.$$

Бидејќи $\measuredangle PAS = \measuredangle PAT$, триаголниците APS и APT се складни, па затоа

$$\measuredangle ATP = \measuredangle ASP = \tfrac{1}{2}\beta = \measuredangle QBP,$$

т.е. $\measuredangle QTP = \measuredangle QBP$.

Ако точката P не е на правата BT, триаголниците QBP и QTP мора да се складни, па затоа P лежи на симетралата на аголот BQT. Бидејќи AP е симетрала на аголот QAB, P е центар на припишаната кружница на $\triangle QAB$, па затоа и BP симетрала на аголот QBS. Според тоа,

$$\measuredangle PBQ = \tfrac{1}{2}\beta = \measuredangle PBS = 180^\circ - \beta ,$$

па затоа $\beta = 120^\circ$, што не е можно.

Значи, $P \in BT$, што значи дека $T \equiv S$. Сега, од $\overline{QC} = \overline{QB}$ добиваме $120^\circ - \beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\beta$, па затоа $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

12. Во остроаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 45^\circ$ симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O. Висината AH ја сече правата BO во точката L и правата AO ја сече страната BC во точката K. Ако $\overline{AL} = 2\overline{CK}$ определи ја големината на $\measuredangle ABC$.

Решение. Од својствата на симетралите имаме $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ (направи цртеж). Да означиме $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = x$, $\measuredangle OCB = \measuredangle OBC = y$. Тогаш

$$\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = 45^\circ - y .$$

Од збирот на аглите во $\triangle ABC$ добиваме $2x = 90^\circ$, па затоа $x = 45^\circ$ и $\measuredangle AOB = 90^\circ$. Сега $\measuredangle OBK = 90^\circ - \measuredangle OKB = \measuredangle LAO$, па затоа $\triangle AOL \cong \triangle BOK$, од што следува $\overline{BK} = \overline{AL} = 2\overline{CK}$.

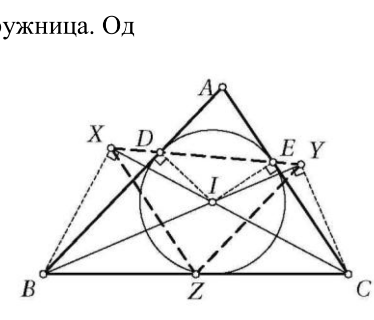
Нека M е средината на BK. Имаме $\overline{BM} = \overline{MK} = \overline{KC}$ и $\overline{BO} = \overline{OC}$, па затоа $\triangle BOM \cong \triangle COK$. Значи, $\overline{OK} = \overline{OM} = \overline{MK} = \overline{BM}$, па затоа $\triangle KOM$ е рамнокрак, $\measuredangle BMO = 120^\circ$, $\measuredangle MOB = \measuredangle MBO = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ + 30^\circ$.

13. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC соодветно во точките D и E. Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC. Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\measuredangle A = 60^\circ$.

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница. Од

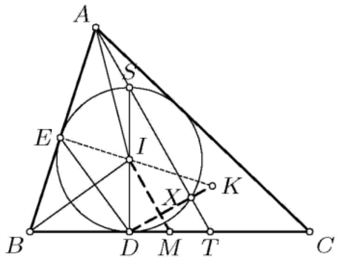
$$\measuredangle BIX = \tfrac{1}{2}(\measuredangle B + \measuredangle C) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle ADX$$

следува дека точките B, I, X, D лежат на иста кружница. Според тоа, $\measuredangle BXI = \measuredangle BDI = 90^\circ$, па затоа триаголникот BCX е правоаголен, што значи $\overline{ZX} = \overline{ZB}$ и $\measuredangle ZXC = \measuredangle ZCX = \measuredangle XCA$, т.е. $ZX \parallel AC$. Аналогно $\overline{ZY} = \overline{ZB}$ и $ZY \parallel AB$. Според тоа, $\overline{ZX} = \overline{ZY}$ и $\measuredangle XZY = \measuredangle A$, од што следува тврдењето.



14. Впишаната кружница k во триаголникот ABC ја допира страната BC во точката D. Нека I е центарот на кружницата k, M е средината на страната BC и K е ортоцентарот на триаголникот AIB. Докажи дека правата KD е нормална на IM.

Решение. Со S да ја означиме точката дијаметрално спротивна на точката D на кружницата k, а со T точката во која припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето A ја допира BC. Тогаш точките A, S и T се колинеарни и M е средина на отсечката DT, па затоа IM е средна линија во триаголникот SDT и $IM \parallel AT$. Нека правата AS ја сече кружницата k во точката $X \neq S$. Бидејќи



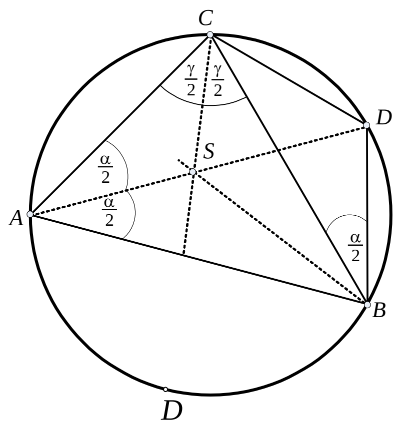
$$\measuredangle EXA = \measuredangle EXS = \measuredangle EDS = \measuredangle EBI = 90^\circ - \measuredangle BAK = \measuredangle EKA,$$

точките E, X, K и A лежат на иста кружница, па затоа

$$\measuredangle AXK = \measuredangle AEK = 90^\circ = \measuredangle SXD,$$

што значи дека точките D, X и K се колинеарни. Значи, $AT \perp DK$, т.е. $IM \perp DK$.

15. Ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D пресекот на правата AS и опишаната кружница на триаголникот ABC, тогаш $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DS}$. Докажи!



Решение. Бидејќи D е средина на лакот BC, следува $\overline{DB} = \overline{DC}$.

Имаме: $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC = \frac{\alpha}{2}$,

$$\begin{aligned}\measuredangle DSB &= 180^\circ - (\measuredangle SBD + \measuredangle BDS)\\ &= 180^\circ - (\measuredangle SBC + \measuredangle CBD + \measuredangle BCA)\\ &= 180^\circ - (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \gamma) = \tfrac{\alpha+\beta}{2} = \measuredangle SBD.\end{aligned}$$

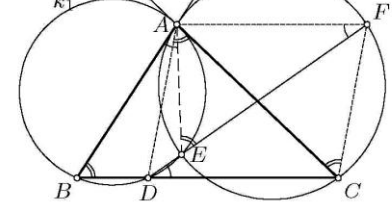
Значи $\triangle SBD$ е рамнокрак, па според тоа $\overline{DB} = \overline{DS}$.

16. Даден е триаголник ABC. Кружницата k_1 минува низ точките A и B и ја допира правата AC, а кружницата k_2 минува низ точките A и C и ја допира правата AB. Кружницата k_1 ја сече правата BC во точката D ($D \neq B$) и ја сече кружницата k_2 во точката E ($E \neq A$). Докажи дека правата DE ја полови отсечката AC.

Решение. Со F да ја означиме втората пресечна точка на правата DE и кружницата k_2. Тврдиме дека $ADCF$ е паралелограм. Навистина, во ориентираните агли имаме

$$\measuredangle AFE = \angle BAE = \measuredangle CDE,$$

т.е $AF \parallel CD$, и слично



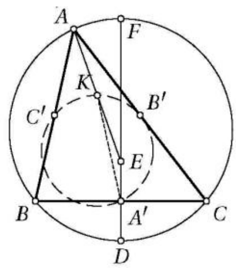
$$\measuredangle ACF = \measuredangle AEF = \measuredangle ABD = \measuredangle CAD,$$

т.е. $CF \parallel AD$.

17. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA.

а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K.

б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF.



Решение. а) Нека со A', B', C' соодветно ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Отсечките KB' и KC' се средни линии на триаголниците AEC и AEB, па затоа

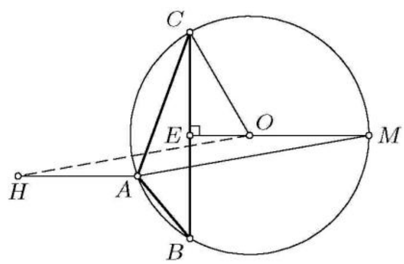
$$\measuredangle C'KB' = \measuredangle BEC = \measuredangle CDB = 180^\circ - \measuredangle BAC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle B'A'C',$$

што значи дека точката K лежи на кружницата $A'B'C'$.

б) Отсечката KA' е средна линија во триаголникот EAD, па затоа $KA' \parallel AD$. Понатаму, DF е дијаметар на кружницата ABC па затоа атоа $AD \perp AF$.

Конечно, од $KA' \parallel AD$ и $AD \perp AF$ следува $KA' \perp AF$.

18. Нека O е центар на опишаната кружница, а AD ($D \in BC$) е симетрала на внатрешниот агол кај темето A на триаголникот ABC. Нека е l е права низ O паралелна со AD. Докажи дека l минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC ако и само ако ABC е рамнокрак или $\measuredangle BAC = 120^\circ$.



Решение. Нека претпоставиме дека $OH \parallel AD$ и $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека E е средината на страната BC, а $M \neq A$ е пресечната точка на правата AD и опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Знаеме дека $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$. Од друга страна, четириаголникот $AMOH$ е паралелограм бидејќи $AH \parallel OM$ и $AM \parallel OH$, па имаме $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{OE}$. Значи, точката O е надвор од триаголникот ABC, и затоа $\measuredangle BAC = \alpha > 90^\circ$. Уште повеќе, од $\overline{CO} = \overline{MO} = 2\overline{OE}$ следува $|90^\circ - \alpha| = \measuredangle OCE = 30^\circ$, па затоа $\alpha = 120^\circ$.

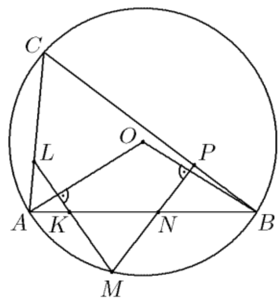
19. Нека M е точка на лакот AB од опишаната кружница околу остроаголен $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Нормалата повлечена од M на радиусот OA, O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$) ги сече страните AB и AC соодветно во точките K и L, а нормалата повлечена од M на радиусот OB ги сече страните AB и BC соодветно во точките N и P. Изрази го

$\measuredangle MLP$ со помош на аглите на триаголникот, ако е дадено, дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Од

$$\measuredangle AOB = 2\gamma \text{ и } \measuredangle OAB = 90^\circ - \gamma$$

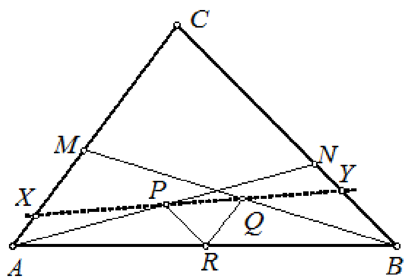
следува $\measuredangle AKL = \measuredangle BNP = \gamma$. Оттука $\measuredangle MKN = \measuredangle MNP = \gamma$, т.е. $\triangle MNK$ е рамнокрак и од условот добиваме, дека $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$.



Од $\triangle ALK \sim \triangle PNB$ (аглите им се α, β и γ) следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{NB}}$, а од $\triangle AKM \sim \triangle MNB$ (аглите им се $\measuredangle AKM = \measuredangle MNK = 180^\circ - \gamma$ и $\measuredangle AMK = \measuredangle MBN = \frac{1}{2}\measuredangle AOM$) добиваме $\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB}}$. Сега од $\frac{\overline{AK}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{NB}}$, $\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB}}$ и $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{MN}$, што значи дека KN е средна линија во $\triangle MPL$. Но, триаголникот $\triangle MNK$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle MLP = \measuredangle MPL = \gamma$.

20. Точките M и N се на страните AC и BC на триаголникот ABC , соодветно и за нив важи $\overline{AM} = \overline{BN}$. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките AN и BM е нормална со симетралата на аголот ACB .

Решение. Да ги означиме со P и Q средините на отсечките AN и BM , соодветно, со R средината на страната AB и со X и Y пресеците на PQ со AC и BC , соодветно. Тогаш PR и QR се средни линии во триаголниците ABN и BMA, соодветно и затоа



$$\overline{PR} = \frac{\overline{BN}}{2} \text{ и } \overline{QR} = \frac{\overline{AM}}{2} ,$$

а од условот $\overline{AM} = \overline{BN}$ следува $\overline{PR} = \overline{QR}$, односно триаголникот PQR е рамнокрак. Од паралелноста на PR и BN добиваме дека $\measuredangle QPR = \measuredangle CYX$, а од паралелноста на QR и AM , $\measuredangle PQR = \measuredangle CXY$. Значи, триаголникот CXY е рамнокрак (со основа XY) па симетралата на аголот XCY , односно на аголот ACB , е нормална со правата која минува низ P и Q , што требаше да се докаже.

21. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека точката M е средина на страната BC . Надворешната симетрала на $\measuredangle BAC$ ја сече полуправата BC во точка P . Точките K и F лежат на правата PA и се такви што $MF \perp BC$ и $MK \perp PA$. Докажи, дека $\overline{BC}^2 = 4\overline{PF} \cdot \overline{AK}$.

Решение. Со ω да ја означиме опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и нека O е центарот на ω , направи цртеж. Ако N е средината на лакот BC од ω , кој не ја содржи A, тогаш MN е симетрала на BC. Освен тоа, AN е симетрала на $\measuredangle BAC$, што значи дека $AN \perp FP$. Според тоа, NF е дијаметар на ω. Од $MK \parallel AN$ следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{FM}}$, па затоа $\overline{AK} = \frac{\overline{FK} \cdot \overline{MN}}{\overline{FM}}$. Бидејќи MK е висина во правоаголниот триаголник FMP имаме $\overline{FM}^2 = \overline{FK} \cdot \overline{FP}$. Од последните две равенства наоѓаме

$$\overline{AK} \cdot \overline{FP} = \frac{\overline{FK} \cdot \overline{MN}}{\overline{FM}} \cdot \frac{\overline{FM}^2}{\overline{FK}} = \overline{FM} \cdot \overline{MN}.$$

Бидејќи FN и BC се тетиви во ω кои се сечат во точката M, имаме

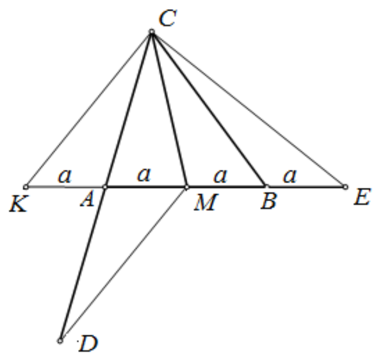
$$\overline{FM} \cdot \overline{MN} = \frac{\overline{BC}^2}{4}.$$

Конечно, од последните две равенства следува тврдењето на задачата.

22. Во триаголникот ABC должината на тежишната линија CM е еднаква на должината на страната AB. На продолженијата на страните AC и AB се избрани точки D и E соодветно, така што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BM}$. Докажи дека DM и CE се заемно нормални.

Решение. Воведуваме ознака $\overline{BM} = a$. Нека K е точка симетрична на точката M во однос на точката A. Тогаш

$$\overline{KM} = \overline{MC} = \overline{ME} = 2a.$$



Во триаголникот KCE должината на тежишната линија CM е половина од страната кон која е повлечена. Според тоа, триаголникот KCE е правоаголен. Значи, $KC \perp CE$.

Четириаголникот $DMCK$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се полoват. Според тоа $KC \parallel DM$, од каде добиваме $DM \perp CE$, што и требаше да се докаже.

23. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O. Точката $H \in AB$ е таква, што $CH \perp AB$. Точката P лежи на правата CH и важи $\frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} = \frac{1}{3}$, при што H е меѓу P и C. Точката $Q \in PB$ е таква што четририаголникот $PACQ$ е тетивен. Докажи дека правата AQ ја полови отсечката CO.

Решение. Нека M е средината на AC и нека точката N е таква што A е средина на NC (направи цртеж). Триаголниците BHC и OMC се слични. Освен тоа, $\frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MN}}$, па затоа $\triangle BCP \sim \triangle OCN$. Оттука $\measuredangle QAC = \measuredangle QPC = \measuredangle ONC$ и затоа $AQ \parallel ON$. Сега AQ е средна линија за $\triangle CON$, од каде следува дека AQ ја полови CO.

24. Точките M и N припаѓаат на страната AB на $\triangle ABC$. Тангентите повлечени од M и N на опишаните кружници околу $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ ги сечат отсечките CN и CM во точките P и Q, соодветно. Ако четириаголникот $ABPQ$ е рамнокрак трапез, докажи дека $\overline{AC}=\overline{BC}$.

Решение. Нека $PQ\cap AC=E$ и $PQ\cap BC=F$, направи цртеж. Тогаш

$$\measuredangle CEQ=\measuredangle CAM=\measuredangle CMP,$$

па затоа четириаголникот $CEMP$ е тетивен. Аналогно четириаголникот $CFNQ$ е тетивен. Тогаш

$\measuredangle MEQ=\measuredangle PCQ=\measuredangle NFP$,

па затоа $EFNM$ е рамнокрак трапез. Ако $O_1=AQ\cap ME$ и $O_2=BP\cap NF$, тогаш $\triangle AMO_1\sim\triangle QEO_1\sim\triangle PFO_2\sim\triangle BNO_2$, па затоа

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{EQ}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{EO_1}}{\overline{FO_2}}=\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{FN}}=1.$$

Тогаш, $\triangle AME\cong\triangle BNF$, па затоа $\measuredangle MAE=\measuredangle NBF$, т.е. $\overline{AC}=\overline{BC}$.

25. Во рамнокрак триаголник ABC, со агли при основата AB од 50°, е избрана точка D, таква што $\measuredangle ABD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=10^\circ$. Определи го аголот BCD.

Решение. Ако $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=50^\circ$, тогаш $\measuredangle ACB=80^\circ$. Од условите $\measuredangle ABD=30^\circ$ и $\measuredangle BAD=10^\circ$ (направи цртеж). Заклучуваме дека $\measuredangle DBC=20^\circ$ и $\measuredangle DAC=40^\circ$.

Ако $CH\perp AB$, тогаш $\measuredangle ACH=\measuredangle BCH=40^\circ$.

Нека S е пресечната точка на висината CH и правата BD, тогаш триаголникот ABS е рамнокрак, со основа AB и агли при основата од 30°. Оттука $\measuredangle DAS=20^\circ$ и $\measuredangle CAS=20^\circ$, т.е. AS е симетрала на аголот CAD.

Бидејќи $\measuredangle SDA=40^\circ$, како надворешен за $\triangle ABD$, и $\measuredangle SCA=40^\circ$, следува дека $\triangle ASD\cong\triangle ASC$ (според признакот ACA). Оттука $\overline{AD}=\overline{AC}$, т.е. $\triangle DCA$ е рамнокрак па

$$\measuredangle ADC=\measuredangle ACD=(180^\circ-40^\circ):2=70^\circ$$

Тогаш $\measuredangle DCS=70^\circ-40^\circ=30^\circ$ и конечно $\measuredangle BCD=10^\circ$.

26. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките A_1 и B_1, соодветно . Правата B_1A_1 ја сече AB во точката X, при што A е меѓу X и B. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\measuredangle CXB=90^\circ$ и $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}\cdot\overline{AC}$.

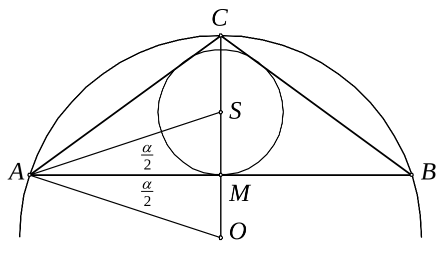
Решение. Нека $Y\in BC$ е таква што $AY\parallel XA_1$. Тогаш $\overline{BY}=a-b$ и од условот $\frac{a}{c}=\frac{c}{a-b}$ следува дека $\triangle ABC\sim\triangle YBA$ (направи цртеж). Според тоа, $\measuredangle AXA_1=\measuredangle BAY=\gamma$, што значи дека четириаголникот XAA_1C е тетивен. Од $\measuredangle XAC=\measuredangle XA_1C=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ добиваме $\alpha=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$. Освен тоа, $\measuredangle AA_1C=90^\circ$, т.е. AA_1 е висина и симетрала на гол. Тогаш $\gamma=\beta$ и $90^\circ+\frac{\gamma}{2}+2\gamma=180^\circ$, т.е. $\gamma=36^\circ$.

Конечно, аглите на триаголникот се 36°, 36° и 108°.

27. Во $\triangle ABC$ центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB. Најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека S е центар на впишаната кружница а O е центар на опишаната кружница. Триаголникот ABC е рамнокрак триаголник (правата OS е симетрала на AB). Според тоа

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \alpha .$$



Ако $\{M\} = SO \cap AB$ тогаш $\overline{SM} = \overline{OM}$ и $\triangle AMO \cong \triangle AMS$, па затоа $\measuredangle MAO = \frac{\alpha}{2}$.

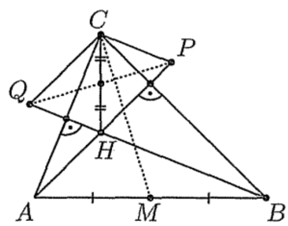
Периферниот агол $\measuredangle ABC$ над тетивата AC е еднаков на половина од централниот $\measuredangle AOC$ над истата тетива. Според тоа

$$\alpha = \measuredangle ABC = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOC = \tfrac{1}{2}(90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}) \text{ т.е. } 4\alpha = 180^\circ - \alpha .$$

Според тоа, аглите на триаголникот се $\alpha = \beta = 36^\circ$ и $\gamma = 108^\circ$.

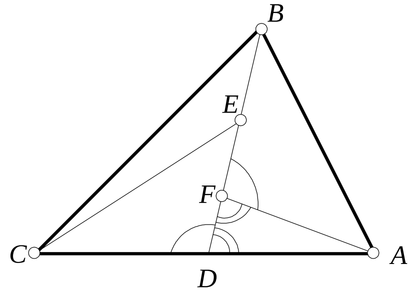
28. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB \neq 90^\circ$. Правите кои минуваат низ темето C и се нормални на страните AC и BC, ги сечат соодветно правите кои минуваат низ темињата A и B и се нормални на страните BC и AC во точките P и Q. Ако M е средината на страната AB докажи, дека правите PQ и CM се заемно нормални.

Решение. Нека H е ортоцентарот во $\triangle ABC$. Бидејќи $CP \parallel QH\ (\perp AC)$ и $CQ \parallel PH\ (\perp BC)$, добиваме дека четириаголникот $HPCQ$ е паралелограм и затоа PQ ја полови CH. Од друга страна, $CH \perp AB$, $HP \perp BC, CP \perp AC$, па затоа $\triangle CHP \sim \triangle ABC$. Според тоа, PQ и CM се соодветни тежишни линии во слични триаголници со нормалнн страни, па затоа тие исто така се замено нормални.



Забелешка. Задачата може да се реши ако неколку пати се искористи условот за нормалност на дијагонали во четириаголник, формулата за тежишни линии и Питагоровата теорема.

29. Во триаголникот ABC е повлечена тежишна линија BD. Точките E и F ја делат тежишната линија на три еднакви дела $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FD}$. Ако $\overline{AB} = 1$ и $\overline{AF} = \overline{AD}$, определи ја должината на отсечката CE.

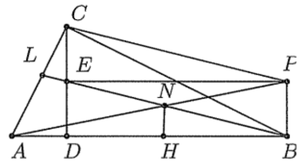


Решение. Бидејќи $\overline{AF} = \overline{AD}$, триаголникот DAF е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ADF = \measuredangle AFD$, а оттука имаме $\measuredangle BFA = \measuredangle CDE$. Отсечката BD е тежишна линија, па затоа $\overline{CD} = \overline{AF}$, а од условот на задачата

$\overline{BF} = \overline{DE}$. Заради тоа, од признакот CAC, триаголниците CDE и AFB се складни, па според тоа $\overline{CE} = \overline{AB} = 1$.

30. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина CD и нека E е средината на CD. Нека $BE \cap AC = L$. Точката P е избрана така, што четириаголникот $EDBP$ е правоаголник. Докажи, дека правата AP ја полови отсечката BL.

Решение. Нека точката H е подножјето на нормалата повлечена од точката N кон страната AB, види цртеж. Четириаголникот $EBPC$ е паралелограм, па затоа од теоремата на Талес следува дека

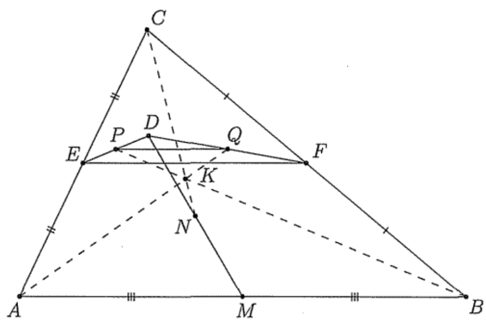


$$\frac{\overline{NB}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{CP}},$$

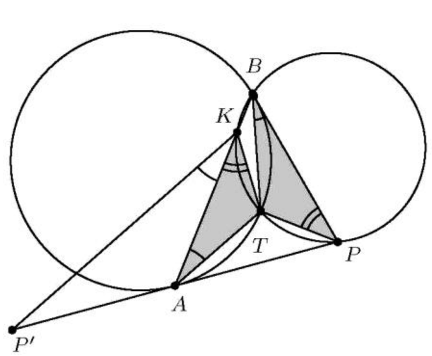
па затоа $\overline{NB} = \overline{LN}$, што и требаше да се докаже.

31. Даден е $\triangle ABC$ е произволна точка D од неговата внатрешност. Точките M, E и F се средини на страните AB, AC и BC, соодветно. Точките N, P и Q се средини на отсечките DM, DE и DF, соодветно. Докажи, дека правите AQ, BP и CN се сечат во една точка.

Решение. Нека $AQ \cap BP = K$. Од соодветните средни линии на $\triangle ABC$ и $\triangle EFD$ следува дека $PQ \parallel AB$ и $4\overline{PQ} = \overline{AB}$. Од теоремата на Талес следува $\frac{\overline{PK}}{\overline{KB}} = \frac{1}{4}$. Нека $CN \cap BP = K'$. Како и претходно заклучуваме дека $\frac{\overline{PK'}}{\overline{K'B}} = \frac{1}{4}$, од каде следува дека $K \equiv K'$ и затоа правите AQ, BP и CN се сечат во точката K.



32. Дадена е кружница C и точка P надвор од кружницата. Отсечките PA и PB се тангенти на кружницата C и K е произволна точка од отсечката AB. Опишаната кружница околу $\triangle PBK$ по вторпат ја сече C во точка T. Ако точката P' е симетрична на P во однос на A, докажи дека $\measuredangle PBT = \measuredangle P'KA$.



Решение. Бидејќи четириаголникот $KTPB$ е тетивен, важи $\measuredangle AKT = \measuredangle BPT$. Оттука и од равенството

$\measuredangle TAK = \frac{TB}{2} = \measuredangle TBP$ следува дека $\triangle TAK \sim \triangle TBP$. Затоа

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AP'}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{TA}}.$$

Горните равенства и

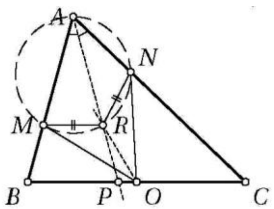
$$\measuredangle P'AK = \frac{AB}{2} = \measuredangle BTA$$

означуваат дека $\triangle P'AK \cong \triangle BTA$. Според тоа,

$$\measuredangle P'AK = \measuredangle BAT = \measuredangle PBT,$$

со што доказот е завршен.

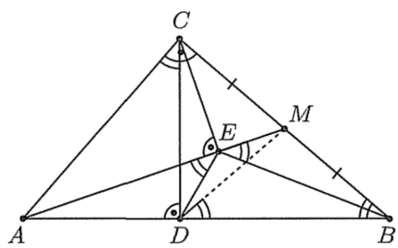
33. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар BC ги сече страните AB и AC во точките M и N соодветно. Со O да ја означиме средината на страната BC. Симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle MON$ се сечат во точка R. Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа на страната BC.



Решение. Од $\overline{OM} = \overline{ON}$ следува $\overline{RM} = \overline{RN}$. Бидејќи $\triangle ANM \sim \triangle ABC$ и $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ заклучуваме дека $\overline{AM} \neq \overline{AN}$. Според тоа, точката R е пресек на симетралата на $\measuredangle MAN$ и симетралата на отсечката MN, па затоа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMN$.

Нека правите AR и BC се сечат во точката P. Тогаш $\measuredangle MAR = \measuredangle MNA = \measuredangle ABP$ и $\measuredangle NRA = \measuredangle NMA = \measuredangle ACP$, што значи дека четириаголниците $RMBP$ и $RNCP$ се тетивни, т.е. P е пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$.

34. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека M е средината на BC, а D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето C кон AB и AM, соодветно. Ако $\overline{BE} = 2\overline{DE}$, определи го $\measuredangle ABC$.



Решение. Нека $\measuredangle ABC = \beta$. Бидејќи точките A, D, E и C лежат на кружницата со дијаметар AC заклучуваме дека
$\measuredangle AED = \measuredangle ACD = \measuredangle ABC = \beta$.

Според тоа, $\measuredangle DEM = 180^\circ - \beta$, што значи дека четириаголникот $DBME$ е тетивен. Освен тоа, DM е тежишна линија во правоаголниот $\triangle BDC$, па затоа

$$\measuredangle BEM = \measuredangle BDM = \measuredangle DBM = \beta.$$

Според тоа, $\measuredangle DEC = \measuredangle CEB = 90^\circ + \beta$.

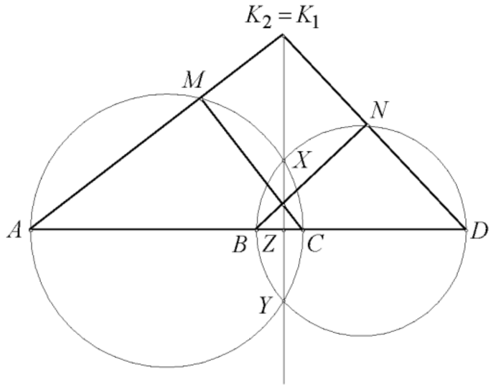
Од друга страна, $\measuredangle CDE = \measuredangle CAE = \measuredangle BCE$, па затоа $\triangle CDE \sim \triangle BCE$. Значи,

$$2 = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\right)^2,$$

т.е. $\overline{BC} = \sqrt{2}\overline{CD}$, па затоа $\beta = 45^\circ$.

35. Нека A, B, C и D се четири различни точки од дадена права, распоредени во запишаниот редослед. Кружниците со дијаметри AC и BD се сечат во точките X и Y. Правата XY ја сече BC во точка Z и P е точка на правата XY различна од Z. Правата CP ја сече кружницата со дијаметар AC во точките C и M, а правата BP ја сече кружницата со дијаметар BD во точките B и N. Докажи дека правите AM, DN и XY се сечат во една точка.

Решение. Нека $K_1 = DN \cap XY, K_2 = AM \cap XY$. Триаголникот BDN е правоаголен и $\measuredangle DNB = 90^\circ$. Од сличноста на триаголниците PBZ и DK_1Z следува

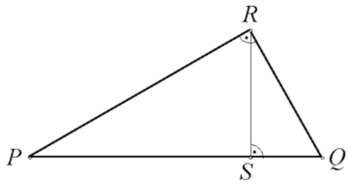


$$\frac{\overline{K_1Z}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{PZ}}, \text{ т.е. } \overline{K_1Z} = \frac{\overline{BZ} \cdot \overline{DZ}}{\overline{PZ}}$$

и аналогно од сличноста на триаголниците PCZ и AK_2Z следува

$$\frac{\overline{K_2Z}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{PZ}} \text{ т.е. } \overline{K_2Z} = \frac{\overline{AZ} \cdot \overline{CZ}}{\overline{PZ}}.$$

Ако триаголникот PQR е правоаголен со прав агол во темето R и ако S е подножната точка на висината од темето R (цртеж десно), тогаш од сличноста на триаголниците PSR и RSQ следува $\frac{\overline{RS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{RS}}$, т.е. од Евклидовите теореми следива $\overline{RS}^2 = \overline{PS} \cdot \overline{SQ}$.



Бидејќи триаголниците ACX и BDX се правоаголни, добиваме

$$\overline{AZ} \cdot \overline{CZ} = \overline{ZX}^2 = \overline{BZ} \cdot \overline{DZ},$$

па затоа $\overline{K_1Z} = \overline{K_2Z}$ т.е. $K = K_1 = K_2$ и $K = AM \cap DN \cap XY$.

36. Нека D е внатрешна точка во остроаголниот $\triangle ABC$ таква што

$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90^\circ \text{ и } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

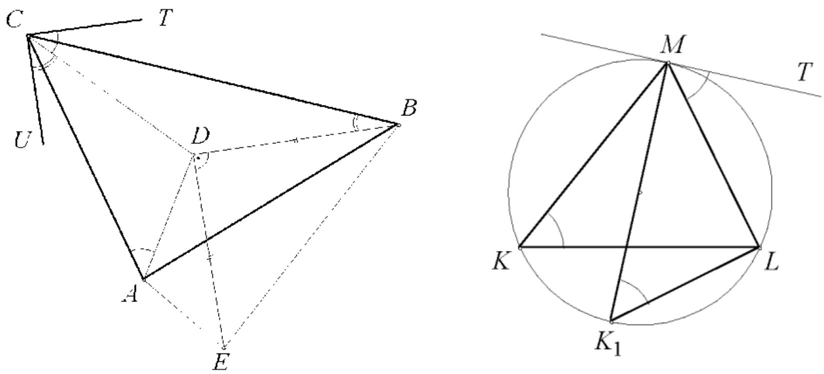
(a) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

(b) Докажи дека тангентите во точката C повлечени на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD се заемно нормални.

Решение. Нека $DE \perp DB$, $\overline{DE} = \overline{DB}$ и CT и CU се тангентите во точката C на кружниците впишани во триаголниците ACD и BCD, соодветно.

Лема. Ако во точката M на $\triangle KLM$ е повлечена тангента MT на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш $\measuredangle TML = \measuredangle MKL$.

Доказ. Низ точката M повлекуваме дијаметар MK_1. Тогаш, $\measuredangle MKL = \measuredangle MK_1L$, како агли над ист лак во кружница. Понатаму, аглите MK_1L и TML се агли со нормални краци, па затоа $\measuredangle TML = \measuredangle MK_1L$. Сега тврдењето на лемата следува од претходните две равенства. ■



б) Од претходната лема следува $\measuredangle TCD = \measuredangle CAD$ и $\measuredangle DCU = \measuredangle DBC$. Според тоа

$$\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Од условот на задачата следува

$$\measuredangle EDA + 90^\circ = \measuredangle BCA + 90^\circ \text{, т.е. } \measuredangle EDA = \measuredangle BCA.$$

Според тоа,

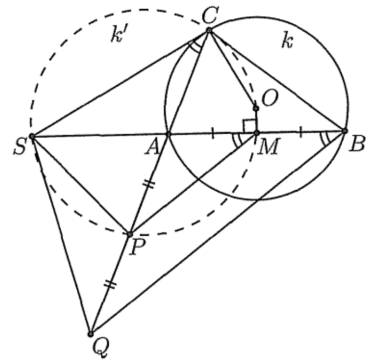
$$\measuredangle CAD + \measuredangle DBC = 180^\circ - (\measuredangle BCA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD)$$
$$= 180^\circ - (\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD) = 90^\circ.$$

Сега од $\measuredangle TCD + \measuredangle DCU = \measuredangle CAD + \measuredangle DBC = 90^\circ$ следува дека тангентите CT и CU се заемно нормални.

а) Од условите на задачата следува дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$. Од (б) имаме $\measuredangle EDA = \measuredangle BCA$, па затоа $\triangle EDA \sim \triangle BCA$, (должините на страните кај еднаквиот агол се пропорционални). Затоа, $\measuredangle CAB = \measuredangle DAE$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, од што следува $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB - \measuredangle DAB = \measuredangle DAE - \measuredangle DAB = \measuredangle BAE$. Од исти причини и триаголниците CAD и BAE се слични, па затоа $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{2} \cdot \overline{BD}}$, бидејќи триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен. Конечно, бараниот однос е $\sqrt{2}$.

37. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k со центар O . Тангентата на k во точката C ја сече полуправата BA во точка S . На полуправата CA после точката A се избрани точки P и Q такви што $\overline{AP} = \overline{PQ}$. Докажи, дека точките P, O, C и S лежат на една кружница ако и само ако точките Q, B, C и S лежат на една кружница.

Решение. Нека точките P, O, C и S лежат на една кружница k' .

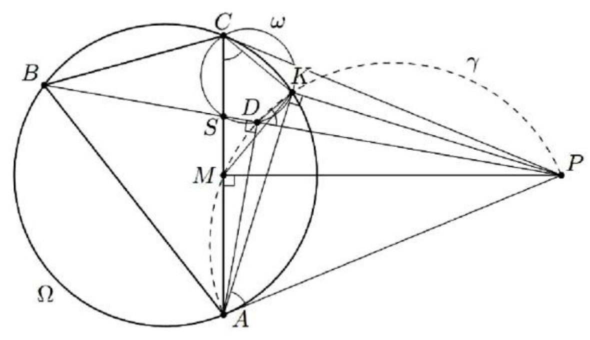


Од $OC \perp SC$ следува дека OS е дијаметар на k' и ако M е средината на AB, тогаш $OM \perp AB$, па затоа $M \in k'$. Според тоа, $\measuredangle SMP = \measuredangle SCP$ и бидејќи PM е средна линија во $\triangle QBA$, заклучуваме дека $\measuredangle SMP = \measuredangle SBQ$. Тогаш $\measuredangle SCQ = \measuredangle SBQ$, што значи дека точките Q, B, C и S лежат на една кружница.

Обратно, нека точките Q, B, C и S лежат на една кружница. Тогаш $\measuredangle SCQ = \measuredangle SBQ$ и бидејќи $\measuredangle SMP = \measuredangle SBQ$, заклучуваме дека точките S, P, M и C лежат на една кружница k'. Но, $\measuredangle OMS = \measuredangle OCS = 90^\circ$, па затоа дијаметарот на k' е отсечката SO. Конечно, точките P, O, C и S лежат на една кружница.

38. Точката M е средина на страната AC на остроаголниот $\triangle ABC$, во кој $\overline{AB} > \overline{BC}$, а Ω е кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тангентите на Ω во точките A и C се сечат во точка P. Отсечките BP и AC се сечат во точка S. Нека AD е висина во $\triangle ABP$. Кружницата ω, опишана околу $\triangle CSD$, ја сече Ω во точка $K \neq C$. Докажи дека $\measuredangle CKM = 90^\circ$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle AMP = \measuredangle ADP = 90^\circ$, точките M и D лежат на кружница γ со дијаметар AP. Бидејќи PA е тангента на Ω, важи $\measuredangle KAP = \measuredangle ACK$. Понатаму, точките C, K, D и S лежат на кружницата ω, па затоа $\measuredangle ACK = \measuredangle KDP$. Следствено, $\measuredangle KAP = \measuredangle ACK = \measuredangle KDP$, т.е. точките A, D, K и P лежат на една кружница. Добивме дека $K \in \gamma$ и $\measuredangle AKP = 90^\circ$.



Оттука имаме

$$\measuredangle MKP = 180^\circ - \measuredangle MAP = 180^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle AKC .$$

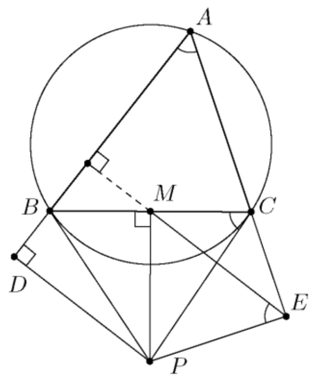
Конечно,

$$\measuredangle MKC = \measuredangle AKC - \measuredangle AKM = \measuredangle MKP - \measuredangle AKM = \measuredangle AKP = 90^\circ .$$

Забелешка. Од условот следува дека точката D е внатрешна за Ω, но е надвор од $\triangle ABC$.

39. Остроаголен $\triangle ABC$ е впишан во кружница Ω. Тангентите на Ω во точките B и C се сечат во точката P. Точките D и E се подножја на нормалите повлечени од P соодветно кон правите AB и AC. Докажи дека ортоцентарот на $\triangle ADE$ се совпаѓа со средината на отсечката BC.

Решение. Нека M е средината на BC. Бидејќи $\triangle BPC$ е рамнокрак ($\overline{BP} = \overline{CP}$ како тангентни отсечки), тежишната линија PM е и висина. Од $\measuredangle PMC = \measuredangle PEC = 90^\circ$ следува, дека четририаголникот $MCEP$ е тетивен, па затоа $\measuredangle MEP = \measuredangle MCP$. Понатаму, CP е тангента на Ω, па затоа $\measuredangle MCP = \measuredangle BAC$. Според тоа, $\measuredangle MEP = \measuredangle BAC$ и затоа



$$\measuredangle MEA + \measuredangle BAC = (90^\circ - \measuredangle MEP) + \measuredangle BAC = 90^\circ$$

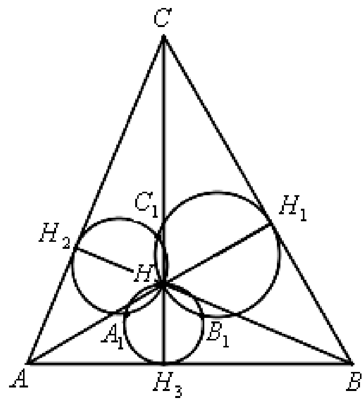
од каде следува дека $ME \perp AB$. Аналогно се докажува дека $MD \perp AC$, од каде следува дека M е ортоцентар на $\triangle ADE$.

40. Низ ортоцентарот H на остроаголниот триаголник ABC, минуваат три кружници така што секоја од кружниците допира една од страните на триаголникот во подножјата на висините. Докажи дека вторите пресечни точки на кружниците се темиња на триаголник, сличен со триаголникот ABC.

Решение. Нека подножјата на висините се: H_1 на страната BC, H_2 на страната CA и H_3 на страната AB. Бидејќи кружниците минуваат низ ортоцентарот и ги допираат страните во подножјата на висините, тие се со дијаметри $\overline{HH_1}, \overline{HH_2}$ и $\overline{HH_3}$. Тогаш,

$$\measuredangle HC_1H_1 + \measuredangle HC_1H_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

односно C_1 лежи на отсечката H_1H_2. Аналогно, A_1 лежи на отсечката H_2H_3, B_1 лежи на отсечката H_3H_1. Четириаголниците CH_2H_3B и ABH_1H_2 се тетивни и затоа важи



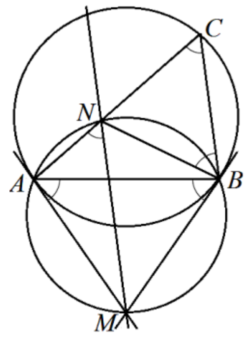
$$\measuredangle HH_2A_1 = \measuredangle BH_2H_3 = \measuredangle BCH_3 = 90^\circ - \measuredangle ABC \text{ и}$$

$$\measuredangle HH_2C_1 = \measuredangle BH_2H_1 = \measuredangle BAH_1 = 90^\circ - \measuredangle ABC,$$

односно $\measuredangle HH_2A_1 = \measuredangle HH_2C_1$. Тогаш триаголниците HH_2A_1 и HH_2C_1 се складни, односно четириаголникот $H_2A_1HC_1$ е делтоид и затоа $A_1C_1 \perp HH_2$. Значи, $A_1C_1 \parallel AC$. Аналогно се докажува дека $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$ и тогаш следува дека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични.

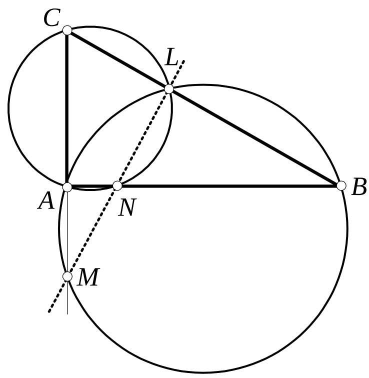
41. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Тангентите во точките A и B на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се сечат во точка M. Правата која минува низ M и е паралелна со страната BC ја сече страната AC во точката N. Докажи, дека $\overline{BN}=\overline{CN}$.

Решение. Нека α,β,γ се аглите на $\triangle ABC$ во темињата A,B,C соодветно. Од својството на аголот меѓу тетивата и тангентата следува $\measuredangle MBA=\gamma$. Бидејќи $MN \parallel BC$ важи $\measuredangle MNA=\gamma$, што значи дека четириаголникот $AMBN$ е тетивен. Аналогно, од својствата на аголот меѓу тетивата и тангентата следува $\measuredangle MAB=\gamma$, па затоа $\measuredangle MAN=\alpha+\gamma$. Бидејќи четириаголникот $AMBN$ е тетивен важи $\measuredangle MBN$ $=180^\circ-\measuredangle MAN=\beta$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle MBN=$ $\measuredangle ABC$, со одземање на $\measuredangle ABN$ добиваме $\measuredangle NBC=\measuredangle ABM=\gamma$. Значи, $\measuredangle BCN=\measuredangle NBC$, па затоа $\overline{BN}=\overline{CN}$.



42. Триаголникот ABC е правоаголен со теме на правиот агол во точката A. Точката L припаѓа на хипотенузата BC. Опишаната кружница околу триаголникот ALC по втор пат ја сече правата AB во точката N, а опишаната кружница околу ABL ја сече правата AC по втор пат во точката M. Докажи дека M, N и L лежат на една права.

Решение. Ќе претпоставиме дека AC не е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ALC$. Четириаголникот $ANLC$ е тетивен, при што $\measuredangle CAN=90^\circ$. Според тоа $\measuredangle CLN=90^\circ$. Значи, точката N припаѓа на нормалата повлечена кон CB во точката L.



Четириаголникот $AMBL$ е исто така тетивен, при што $\measuredangle BAM=90^\circ$. Значи BM е дијаметар на опишанта кружница, од каде добиваме дека $\measuredangle BLM=90^\circ$. Значи, и M припаѓа на нормалата кон BC во точката L.

Бидејќи низ точката L постои една единствена нормала кон BC, добиваме дека L, M и N лежат на една права.

Ако AC е дијаметар на кружницата опишана околу триаголникот ALC, тогаш $A\equiv N\equiv M$, па L, M и N лежат на една права.

43. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$. Нека се M и N средините на отсечките AB и AC и нека k е кружницата опишана околу $\triangle AMN$. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ припаѓа на кружницата k.

Решение. Нека E е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ и отсечката BC. Тогаш важи

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

Оттука следува

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

т.е.

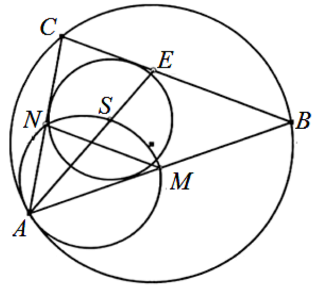
$$\frac{2\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

а од овде следува

$$\overline{CE}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}=\overline{CN}\,.$$

Аналогно се докажува дека

$$\overline{BE}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\overline{BM}\,.$$



Според тоа, триаголниците NEC и EMB се рамнокраки, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle NCE$ и $\measuredangle MBE$ истовремено се и симетрали на отсечките NE и ME, соодветно. Нивниот пресек е точката S, центарот на опишаната кружница околу триаголникот MNE, па затоа припаѓа и на симетралата на отсечката MN. Точката S истовремено е центар и на впишаната кружница на триаголникот ABC, па затоа се наоѓа на симетралата на аголот $\measuredangle BCA$, односно на аголот $\measuredangle MAN$. Но, симетралата на внатрешниот агол и симетралата на спротивната страна на тој агол во триаголникот се сечат на кружницата опишана околу триаголникот, па затоа точката S лежи на кружницата k.

44. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак со $\overline{AB}=\overline{AC}$. Дадена е точка D на страната AC таква што $\overline{CD}=2\overline{AD}$ и точка P на отсечката BD таква што $\measuredangle APC=90^\circ$. Докажи дека $\measuredangle ABP=\measuredangle PCB$.

Решение. Нека Q е средина на основата BC и S е таква што $AQCS$ е правоаголник. Значи,

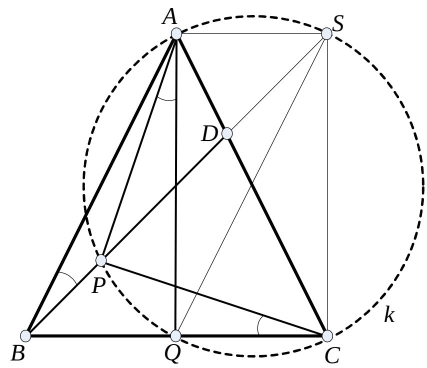
$$\overline{AS}=\overline{QC}=\overline{BQ} \text{ и } AS\parallel QC\parallel BQ\,.$$

Според тоа $BQSC$ е паралелограм, од каде добиваме

$$\measuredangle ABS=\measuredangle BSQ \qquad (1)$$

Од конструкцијата, повторно како агли на трансферзала имаме

$$\measuredangle BCD=\measuredangle CSA \qquad (2)$$



Од конструкцијата и условот на задачата следува

$$\overline{BC}:\overline{BD}=2\overline{QC}:2\overline{DA}=\overline{QC}:\overline{AD}=\overline{AS}:\overline{AD}\,. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме дека триаголниците $\triangle BDC$ и $\triangle SDA$ се слични, па $\measuredangle ADS=\measuredangle BDC$. Значи точките B,D,S се колинеарни.

Заради претпоставките на задачата и конструкцијата

$$\measuredangle APC=\measuredangle AQC=\measuredangle ASC=90^\circ,$$

и точките P,Q,C,S,A лежат на кружница со дијаметар AC. Значи, четириаголникот $PQSCA$ е тетивен. Од еднаквост на агли над ист кружен лак, добиваме

$$\measuredangle PSQ=\measuredangle QCP\,. \qquad (4)$$

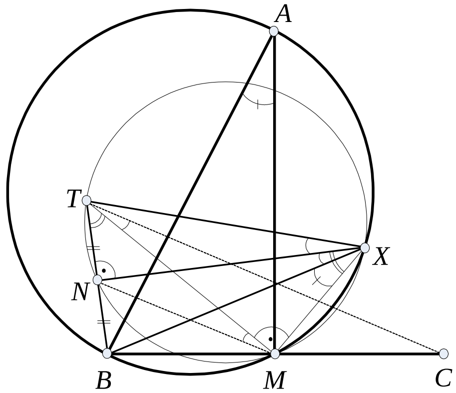
Конечно, од (1) и (4) имаме

$$\measuredangle ABP = \measuredangle ABS = \measuredangle BSQ = \measuredangle PSQ = \measuredangle QCP = \measuredangle BCP .$$

44. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB} = \overline{AC}$, и M е средна точка на основата BC. Нека X е точка од помалиот лак MA на опишаната кружница околу триаголникот ABM. Нека T е точка од внатрешноста на аголот BMA, така што $\measuredangle TMX = 90^\circ$ и $\overline{TX} = \overline{BX}$. Докажи дека разликата $\measuredangle MTB - \measuredangle CTM$ не зависи од X.

Решение. Од условот на задачата триаголникот BXT е рамнокрак со краци BX и BT. Ако N е подножје на висината спуштена од X, тогаш $\overline{BN} = \overline{NT}$ и

$$\measuredangle BXN = \measuredangle NXT . \qquad (1)$$



Од друга страна бидејќи M е средна точка на BC и N е средна точка на BT, отсечката MN е средна линија на триаголникот CTB, па според тоа $NM \parallel CT$, $\overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{CT}$ и

$$\measuredangle NMT = \measuredangle MTC \qquad (2)$$

Бидејќи $\measuredangle TNX = \measuredangle TMX = 90^\circ$, точките X, M, N, T припаѓаат на една кружница, од каде што добиваме дека

$$\measuredangle NXT = \measuredangle NMT \qquad (3)$$

Од истата кружница имаме

$$\measuredangle BTM = \measuredangle NTM = \measuredangle NXM , \qquad (4)$$

Од кружницата опишана околу триаголникот ABM, добиваме

$$\measuredangle BAM = \measuredangle BXM \qquad (5)$$

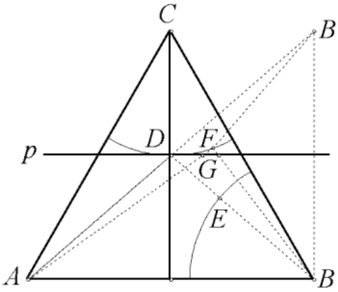
Според тоа (4) и (2),(3) и (1)

$$\measuredangle MTB - \measuredangle CTM = \measuredangle MXN - \measuredangle CTM = \measuredangle MXN - \measuredangle BXN = \measuredangle MXB = \measuredangle MAB ,$$

односно разликата не зависи од изборот на точката X.

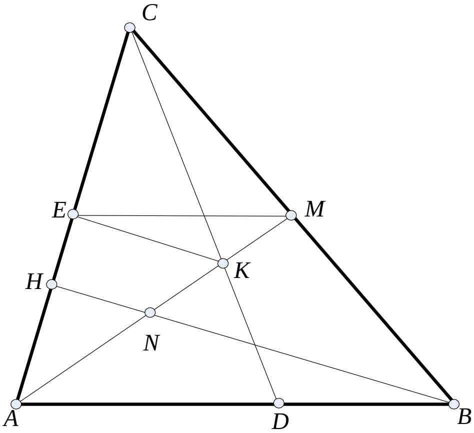
45. Војник треба да провери дали во област која има облик на рамностран триаголник (вклучувајќи ја и неговата граница) има мини. Дометот на неговиот детектор е еднаков на половина од должината на висината на триаголникот. Војникот тргнува од едно теме на триаголникот. Како треба да се движи војникот за да ја исполни задачата, а при тоа да помине пат со најмала можна должина.

Решение. Нека војникот поаѓа од темето A. За да ги испита темињата B и C, мора да дојде до кружните лаци со радиус $\frac{h}{2}$ (h е висина на триаголникот) и центри во B и C. Нека на почеток бил на лакот со центар во C, а потоа на лакот со центар во B. Ако на овој пат се додаде патот до темето B, задачата се сведува на барање на најкраток пат од A до B, при услов да дојде на лакот со центар во C. Ќе докажеме дека најкраток таков пат е патот ADB, каде



што D е средината на висината повлечена од темето C. Нека E е пресек на отсечката BD и лакот со центар во B, а F е било која точка на лакот со центар во C. Низ D повлекуваме права $p \parallel AB$ и точката B ја пресликуваме симетрично во однос на таа права. Добиената точка ја означуваме со B', а со G го означуваме пресекот на отсечката FB и правата p. Тогаш $\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GB}\geq\overline{AB'}=\overline{AD}+\overline{DB}$ (точките A, D, B' се на иста права). Значи, ADB е најкраткиот пат од A до B, па решение на задачата е патот ADE. (Сега не е тешко да се покаже дека може да се испита целата област).

46. На страната AB на остроаголниот триаголник ABC е избрана точка D. Тежишната линија AM ја сече висината BH и отсечката CD во точките N и K соодветно. Ако $\overline{AK}=\overline{CK}$, пресеметај го количникот $\frac{\overline{AN}}{\overline{KM}}$.

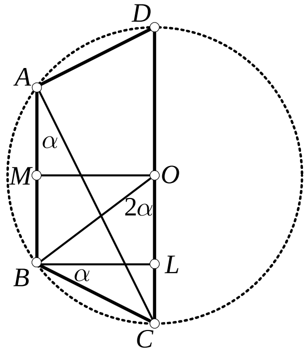


Решение. Од условот на задачата триаголникот AKC е рамнокрак, со краци AK и CK. Проекцијата на точката K врз AC ќе ја означиме со E. Бидејќи триаголникот AKC е рамнокрак, добиваме дека $\overline{AE}=\overline{EC}$, т.е. E е средна точка на AC. Значи, EM е средна линија на триаголникот ABC, па според тоа $EM \parallel AB$ и $2\overline{EM}=\overline{AB}$.

Од друга страна $EK \parallel BH$ (бидејќи $EK \perp AC$ и $BH \perp AC$). Добивме дека страните на триаголниците ABN и KME се паралелни соодветно. Според тоа $\frac{\overline{AN}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EM}}=2$.

47. Во триаголникот ABC, точката M е средина на страната AB, а O е центар на неговата опишана кружница, при што $\measuredangle COM=90^\circ$. Докажи дека

$$|\measuredangle ABC-\measuredangle BAC|=90^\circ.$$



Решение. Триаголникот BOA е рамнокрак, бидејќи $\overline{AO}=\overline{OB}=R$ каде R е радиусот на опишаната кружница k околу триаголникот ABC. Точката M е средина на основата AB ба тој триаголник, па според тоа OM е и висина. Оттука и од условите на задачата имаме $\measuredangle COM=\measuredangle BMO=90^\circ$. Нека CD е дијаметар на кружницата k. Според тоа четириаголникот $ABCD$ е трапез. Бидејќи тој е тетивен, тој е рамнокрка трапез. Нека BL е висина на трапезот. Аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BOC$ се перифериски и централен агол над ист кружен лак, па според тоа ако $\alpha = \measuredangle BAC$ тогаш $\measuredangle BOC = 2\alpha$. Триаголникот BOC е рамнокрак со основа BC па според тоа

$$\measuredangle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha .$$

Сега од триаголникот $\triangle CLB$ имаме

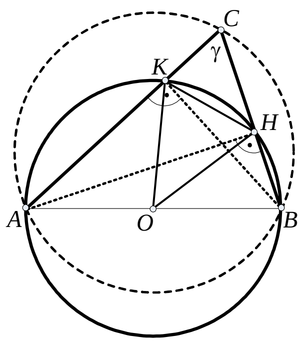
$$\measuredangle CBL = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha .$$

Конечно,

$$|\measuredangle ABC - \measuredangle BAC| = |\measuredangle ABC - \alpha| = |\measuredangle ABC - \measuredangle CBL| = |\measuredangle ABL| = 90^\circ .$$

48. Ако темињата A и B на триаголникот ABC се фиксни, а темето C се движи така што аголот $\measuredangle ACB$ останува константен, тогаш должината на отсечката што ги поврзува подножјата H и K на висините на триаголникот повлечени од темињата A и B соодветно е константа. Докажи!

Решение. Бидејќи аглите $\measuredangle AKB$ и $\measuredangle AHB$ се прави, точките H и K лежат на кружницата со дијаметар AB. Триаголникот ACH е правоаголен, од каде следува дека $\measuredangle CAH = \frac{\pi}{2} - \gamma$, каде што γ е означен аголот ACB. Централниот агол кој соодветствува на тетивата HK е еднаков на $\pi - 2\gamma$ (Зошто).



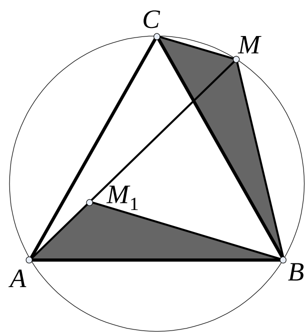
При движењето на C точките H и K се поместуваат по споменатата кружница. Бидејќи централниот агол што соодветствува на тетивата HK е константен, следува дека должината KH е константен.

49. Нека $A_1A_2A_3$ е даден триаголник, а B_1, B_2, B_3 се точки од страните A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, соодветно, различни од темињата на триаголникот $A_1A_2A_3$. Докажи дека симетралите на отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 не се сечат во една точка.

Решение. Нека претпоставиме дека симетралите на отсечките A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 се сечат во точката P. Без губење од општост претпоставуваме дека $\overline{PA_1} \le \overline{PA_2} \le \overline{PA_3}$. Тогаш A_1, A_2 лежат во круг со центар во P и радиус PA_3. Ова значи дека B_3 лежи во внатрешноста на овој круг и $\overline{PB_3} < \overline{PA_3}$. Од друга страна P лежи на симетралата на A_3B_3, па $\overline{PA_3} = \overline{PB_3}$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

50. Во една кружница впишан е рамностран триаголник ABC. На лакот BC земена е произволна точка M. Докажи дека $\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{MC}$.

Решение. Нека M_1 е точка од отсечката AM, така што важи $\overline{AM_1} = \overline{CM}$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle M_1AB = \measuredangle MCB$ (како периферниски агли на ист лак), па, значи $\triangle AM_1B \cong \triangle CMB$. Затоа, имаме



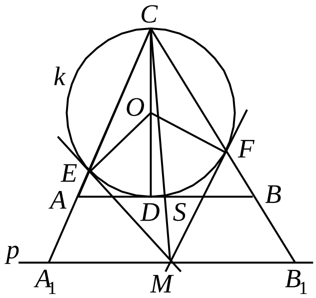
$\overline{BM_1} = \overline{BM}$ и $\measuredangle ABM_1 = \measuredangle CBM$. Од ова следува дека $\measuredangle M_1BM = 60^\circ$. Исто така, $\measuredangle M_1MB = \measuredangle ACM = 60^\circ$ (како перифериски агли над ист лак). Значи, ΔBMM_1 е рамностран, па имаме

$$\overline{MA} = \overline{MM_1} + \overline{M_1A} = \overline{MB} + \overline{MC},$$

што требаше да се докаже.

51. Во рамнината на остроаголниот триаголник $ABC,$ над неговата висина $CD,$ како над дијаметар, е конструирана кружница $k,$ која ги сече страните AC и BC во точките E и F соодветно. Докажи дека пресечната точка M на тангентите, повлечени на кружницата k во точките E и F лежи на правата определена со тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето $C.$

Решение. Низ M повлекуваме права $p \parallel AB.$ Нека A_1 и B_1 се пресечните точки на p со CA и CB соодветно. Доволно е да докажеме дека $\overline{A_1M} = \overline{MB_1}$.



Нека аглите кај темињата A, B и C на $\triangle ABC$ ги означиме со α, β и γ, соодветно. Тогаш

$$\measuredangle BCD = \beta' = 90^\circ - \beta.$$

Бидејќи $\triangle FCO$ е рамнокрак, добиваме $\measuredangle CFO = \beta',$ а бидејќи $\measuredangle OFM = 90^\circ,$ добиваме

$$\measuredangle BFM = 180^\circ - 90^\circ - \beta' = \beta.$$

Бидејќи $\measuredangle MB_1F = \beta$ (по конструкција), следува дека $\triangle B_1FM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{B_1M} = \overline{MF}$. Слично се докажува дека $\overline{A_1M} = \overline{ME}$. Но, $\overline{MF} = \overline{ME}$ како тангентни отсечки, па следува дека $\overline{A_1M} = \overline{MB_1}$.

Од тоа што M е средина на A_1B_1 и $AB \parallel A_1B_2,$ следува дека правата CM минува низ средината S на отсечката $AB,$ т.е. се совпаѓа со тежишната линија повлечена од темето C.

52. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Нека I е центарот на впишаната кружница k во $\triangle ABC$, а D, E, F се допирните точки на k со страните AB, BC, AC, соодветно.

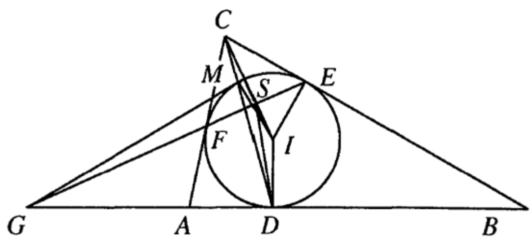
а) Ако $S = CI \cap EF$, докажи дека $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.

б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD. Тангентата на k во M ја сече правата AB во точката G. Докажи, дека $GS \perp CI$.

Решение. а) Од правоаголниот $\triangle CEI$ имаме

$$\overline{DI}^2 = \overline{EI}^2 = \overline{SI} \cdot \overline{CI},$$

па затоа $\frac{\overline{DI}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}$, што значи $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.



б) Четириаголникот $DIMG$

е тетивен. Од а) следува $\measuredangle ISD = \measuredangle IDC = \measuredangle IMD$, што значи дека S лежи на опишаната кружница околу $DIMG$. Сега очигледно $\measuredangle GSI = \measuredangle GMI = 90^\circ$.

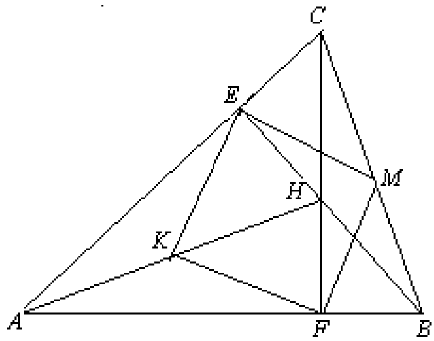
53. Даден е остроаголниот триаголник ABC со агол $\measuredangle BAC = 45^\circ$. Нека $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ се висините на триаголникот, H е ортоцентарот, а M и K се средини на $\overline{BC}$ и $\overline{AH}$, соодветно. Докажи дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

Решение. Триаголникот AHE е правоаголен, K е средина на неговата хипотенуза па затоа $\overline{KE} = \overline{KH} = \overline{KA}$. Бидејќи K е средина и на хипотенузата на правоаголниот триаголник AFH, следува $\overline{KF} = \overline{KH} = \overline{KA}$, Оттука добиваме

$$\overline{KE} = \overline{KF}. \qquad (1)$$

Слично, добиваме дека

$$\overline{ME} = \overline{MF}. \qquad (2)$$



Триаголниците ABE и HCE се рамнокраки правоаголни па важи $\overline{AE} = \overline{BE}$ и $\overline{HE} = \overline{CE}$. Тогаш триаголниците AHE и BCE се складни и оттука $\overline{AH} = \overline{BC}$. Затоа

$$\overline{EM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AH}}{2} = \overline{KE}, \qquad (3)$$

па од (1), (2) и (3) следува дека четириаголникот $KFME$ е ромб. Бидејќи

$$\measuredangle KEM = \measuredangle KEH + \measuredangle HEM = \measuredangle KHE + \measuredangle HBM = \measuredangle AHE + \measuredangle EAH = 90^\circ,$$

добиваме дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

54. Во $\triangle ABC$ точките D, E и F се соодветно од страните BC, CA и AB и важи $\overline{AF} = \overline{EF}$ и $\overline{BF} = \overline{DF}$. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle ABC$ лежи на кружницата опишана околу $\triangle CDE$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и A' и B' се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата A и B, соодветно. Прво ќе го разгледаме случајот кога $E \equiv A'$. Тогаш F е средината M на AB, $D \equiv B'$ и тврдењето е очигледно.

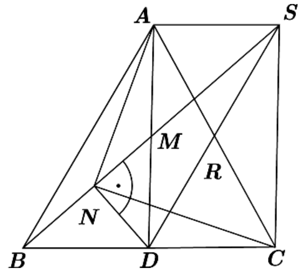
Нека $E \in BA_1$ (во спротивно $D \in BA_1$ и расудувањата се аналогни). Нека симетралата на BE ја сече AB во F и D е симетричната точка на A во однос на нормалата повлечена од D кон AC (направи цртеж). Тогаш

$$\frac{\overline{B_1D}}{\overline{A_1E}} = \frac{\overline{B_1D}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{A_1E}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{B_1H}}{\overline{HA_1}},$$

(последното следува од $\triangle AB_1H \sim \triangle BA_1H$). Но, тогаш $\triangle B_1DH \sim \triangle A_1EH$, па затоа $\measuredangle B_1DH = \measuredangle A_1EH$, што значи дека четириаголникот $DCEH$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

55. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека D е средина на страната BC, M е средина на отсечката AD и N е проекцијата на точката D на BM. Докажи дека $\measuredangle ANC=90^\circ$.

Решение. Нека S е точка таква што четириаголникот $ABDS$ е паралелограм. Тогаш, четириаголникот $ADCS$ е правоаголник и нека R е пресечната точка на неговите дијагонали AC и DS. Бидејќи N лежи на дијагоналата BS на паралелограмот $ABDS$ следува дека триаголникот SND е правоаголен. Тогаш R е центарот на опишаната кружница околу триаголникот SND и оттука $\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{DS}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Значи, важи $\overline{RA}=\overline{RC}=\overline{RN}$ и затоа триаголникот ANC е правоаголен, односно $\measuredangle ANC=90^\circ$.



56. Даден е рамнокрак триаголник. Да се најде множеството точки, кои што лежат во внатрешноста на триаголникот и растојанието до основата е е еднакво на геометриската средина од растојанијата до краците.

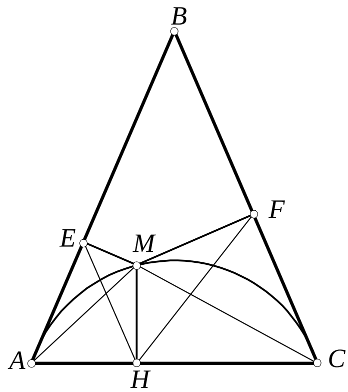
Решение. Нека ABC е дадениот триаголник, $\overline{AB}=\overline{BC}$ и M е точка од бараното множество точки, а E,F,H се проекции на M врз страните AB, BC и CA соодветно. Од условот на задачата добиваме

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{ME}}=\frac{\overline{MF}}{\overline{MH}}.$$

Четириаголниците $AEMH$ и $CHMF$ се слични па

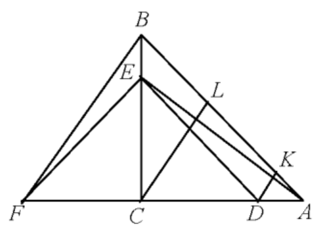
$$\triangle EMA\sim\triangle HMC \quad \text{и} \quad \triangle AMH\sim\triangle CFM.$$

Решението следува од равенството $\measuredangle AMC=\measuredangle HMF$ и од тоа што $\measuredangle AMC=180^\circ-\measuredangle C$.



57. На катетите на рамокракиот правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle BCA=90^\circ$) земени се точки $D\in AC$ и $E\in BC$ такви што $\overline{CD}=\overline{CE}$. Нека $K,L\in AB$ се такви што $DK\perp AE$ и $CL\perp AE$. Докажи дека $\overline{KL}=\overline{LB}$.

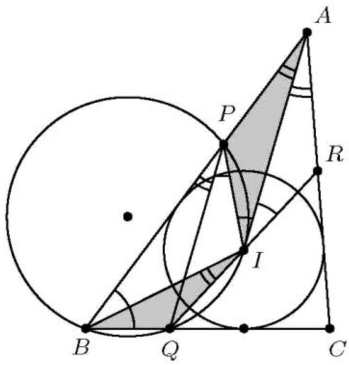
Решение. Нека F е точка за која важи $\overline{DC}=\overline{CF}$ и C се наоѓа меѓу F и D. Бидејќи, $\overline{DC}=\overline{CF}=\overline{CE}$, следи дека $\measuredangle DEF=90^\circ$, па затоа $FE\perp DE$, односно $FE\perp AB$ (од $\overline{CD}:\overline{CE}=\overline{CA}:\overline{CB}=1$, следи дека $DE\parallel AB$). Бидејќи и $BE\perp AF$, следи дека точката E е ортоцентар во триаголникот AFB, па $AE\perp BF$, од каде следи дека $DK\parallel CL\parallel FB$. Затоа, според Талесовата теорема, $\overline{KL}:\overline{LB}=\overline{DC}:\overline{CF}=1$, што требаше и да се докаже.



58. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Кружницата која минува низ B и во точката I ја допира правата AI по вторпат ја сече правата AB во точката P и по вторпат ја сече правата BC во точката Q. Правата QI ја сече AC во точката R. Докажи дека $\overline{AR}\cdot\overline{BQ}=\overline{PI}^2$.

Решение. Бидејќи AI е тангента, BI е симетрала на агол и четириаголникот $PBQI$ е тетивен добиваме

$$\measuredangle AIP=\measuredangle IBP=\measuredangle IBQ=\measuredangle IPQ.$$



Според тоа, $AI \parallel PQ$, па затоа

$$\measuredangle IAB=\measuredangle QPB=\measuredangle QIB.$$

Од овие равенства и од $\measuredangle AIP=\measuredangle IBQ$ следува дека $\triangle IAP \sim \triangle BIQ$. Оттука

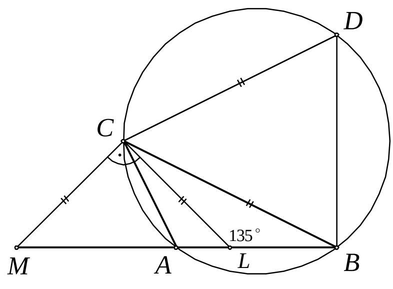
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PI}}=\frac{\overline{QI}}{\overline{BQ}}. \qquad (1)$$

Освен тоа $\measuredangle RIA=\measuredangle IPQ=\measuredangle AIP$ и бидејќи AI е симетрала добиваме $\measuredangle RAI=\measuredangle PAI$. Според тоа, $\triangle RAI \cong \triangle PAI$, па затоа $\overline{AR}=\overline{AP}$. Бидејќи I е средина на лакот PQ, важи $\overline{IP}=\overline{QI}$. Сега од равенството (1) добиваме $\frac{\overline{AR}}{\overline{PI}}=\frac{\overline{PI}}{\overline{BQ}}$, односно $\overline{AR}\cdot\overline{BQ}=\overline{PI}^2$.

59. Нека L и M се точките во кои симетралата на внатрешниот и симетралата на надворешниот агол во темето C на триаголникот ABC ја сечат правата $\overline{AB}$ соодветно. Ако $\overline{CL}=\overline{CM}$, тогаш $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4R^2$, каде што R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!

Решение. Отсечките CM и CL се симетрали на надворешниот и внатрешниот агол кај темето C соодветно и $\overline{CL}=\overline{CM}$. Затоа $\triangle MLC$ е правоаголен рамнокрак триаголник. Според тоа $\measuredangle BLC=135^\circ$, па од триаголникот CLB добиваме

$$\frac{\gamma}{2}+135^\circ+\beta=180^\circ,\text{ т.е. } \gamma+2\beta=180^\circ.$$



Од последното равенство следува $\alpha-\beta=90^\circ$.

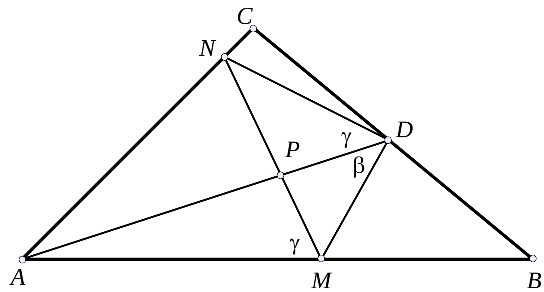
Нека точката D е на кружницата опишана околу $\triangle ABC$, таква што $\overline{CD}=\overline{CB}$. Четириаголникот $ABDC$ е тетивен па според тоа $\measuredangle CDB=180-\alpha$. Бидејќи $\triangle BDC$ е рамнокрак, добиваме $\measuredangle DCB=2\alpha-180^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle ACD=\gamma+2\alpha-180^\circ=90^\circ-2\beta+180^\circ+2\beta-180^\circ=90^\circ$$

Значи, $R=\frac{\overline{AD}}{2}$ и од триаголникот ACD добиваме

$$4R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$

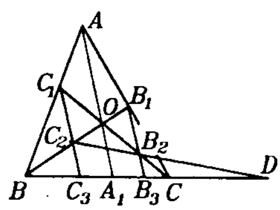
60. Во $\triangle ABC$, AD е симетралата на аголот кај темето A ($D \in BC$). Нека M е точка на страната AB така што $\measuredangle MDA = \measuredangle ABC$, а N е точка на страната AC така што $\measuredangle NDA = \measuredangle BCA$. Ако AD и MN се сечат во точка P, докажи дека $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.



Решение. Аглите кај темињата A, B и C ќе ги означиме со α, β и γ, соодветно. Бидејќи триаголниците AMD и ADB имаат еднакви агли, следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен, бидејќи $\measuredangle A + \measuredangle D = \alpha + \beta + \gamma = 180^0$, па затоа $\measuredangle NMA = \measuredangle NDA = \gamma$. Оттука, ACD и AMP се слични триаголници и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$. Тогаш

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}, \text{ т.е. } \overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}.$$

61. На страните AB, BC, CA на триаголникот ABC се избрани точки C_1, A_1, B_1, соодветно, така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка. Низ точките B_1 и C_1 повлекуваме прави паралелни на правата AA_1, кои ги сечат правите CC_1 и BB_1 во точките B_2 и C_2, соодветно. Докажи дека правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 или се паралелни или се сечат во една точка.



Решение. Пресечните точки на правите C_1C_2 и B_1B_2 со правата BC да ги означиме со C_3 и B_3, соодветно, а пресечната точка на правите AA_1, BB_1, CC_1 да ја означиме со O (види цртеж). Нека меѓу правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 има две кои не се паралелни, на пример BC и B_2C_2 (останатите случаи се разгледуваат аналогно), и нивната пресечна точка да ја означиме со D. Од Талесовата теорема имаме

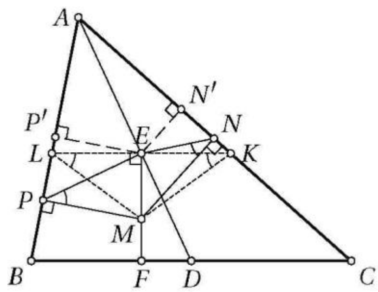
$$\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_2B_1}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{AO}} \text{ и } \frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{C_2C_1}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{AO}},$$

па затоа $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{C_2C_1}}$. Разгледуваните отсечки $B_1B_2, B_2B_3, C_1C_2, C_2C_3$ лежат на паралелни прави, точката B_1 лежи на правата DB_1, точките B_2, C_2 припаѓаат на правата DB_2 и точките B_3, C_3 припаѓаат на правата DB_3, па затоа точката C_1 мора да лежи на правата DB_1, што значи дека правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 се сечат во точката D.

62. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија $AD\,(D\in BC)$. Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC, M е внатрепна точка на отсечката EF, а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на правите AC и AB. Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглите PMN и PEN немаат заеднички точки.

Решение. Нека правата низ E паралелна на правата BC ги сече страните AC и AB соодветно во точките K и L. Од Талесовата теорема следува $\overline{EK}=\overline{EL}$, па затоа $\triangle MKL$ е рамнокрак. Освен тоа четириаголниците $MENK$ и $MELP$ се тетивни, па затоа важи

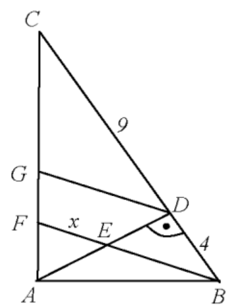
$$\measuredangle MNE=\measuredangle MKE=\measuredangle MLE=\measuredangle MPE\,.$$



Ако P' и N' се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката E на страните AB и AC, тогаш од претходно изнесеното следува $\measuredangle PEP'=\measuredangle NEN'$, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle PEN$ и $\measuredangle P'EN'$ се совпаѓаат. Бидејќи симетралите на аглите $\measuredangle P'EN'$ и $\measuredangle PMN$ се паралелни, останува само да забележиме дека тие не се совпаѓаат, бидејќи во спротивно во спротивно двете симетрали би се совпаѓале со правата ME, што не е можно затоа што $\overline{AB}\neq\overline{AC}$.

63. Во правоаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината од темето A на хипотенузата BC, E е средина на AD, а F е пресек на правите BE и AC. Ако $\overline{BD}=4$, $\overline{CD}=9$, најди ја должината на отсечката BF.

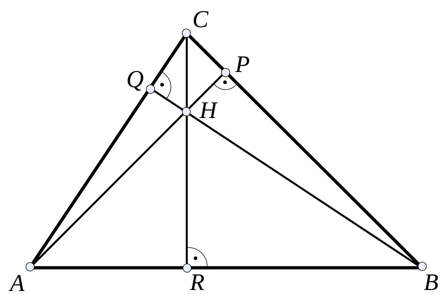
Решение. Од Евклидовата теорема за правоаголен триаголник $\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{BC}$ добиваме дека $\overline{AD}=6$ и $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=3$, а од правоаголниот триаголник BED добиваме $\overline{BE}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DE}^2}=5$. Нека G е точка на страната AC така што $DG\parallel BF$. Бидејќи EF е средна линија во триаголникот ADG, и нека $\overline{EF}=x$, следи дека $\overline{DG}=2x$. Од сличноста на триаголниците BFC и DGC, следи равенството $\frac{5+x}{2x}=\frac{13}{9}$, од каде $x=\frac{45}{17}$, односно $\overline{BF}=5+\frac{45}{17}=\frac{130}{17}$.



64. Нека AP, BQ и CR се висините во триаголникот ABC. Да се докаже дека

$$\overline{AR}^2+\overline{BP}^2+\overline{CQ}^2=\overline{RB}^2+\overline{PC}^2+\overline{QA}^2$$

Решение. Од цртежот се гледа дека важат следните равенства



$$\overline{AC}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{RB}^2$$
$$\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2$$
$$\overline{BC}^2 - \overline{CQ}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{QA}^2 .$$

Ако ги собереме овие равенства, ќе добиеме

$$\overline{AC}^2 - \overline{AR}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BP}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CQ}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{RB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{QA}^2 ,$$

т.е.

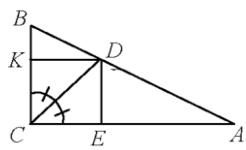
$$\overline{AR}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{RB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{QA}^2$$

што и требаше да се докаже.

64. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и нека симетралата на правиот агол ја сече хипотенузата во точката D. Нека точките K и E се подножјата на нормалите повлечени од точката D кон страните BC и AC, соодветно. Докажи дека

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AE} + \overline{BK})^2 .$$

Решение. Четириаголникот $CEDK$ е квадрат, од каде следи дека $\overline{DK} = \overline{DE}$. Триаголниците AED и DKB се правоаголни, па од Питагоровата теорема се добива



$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{KD}^2$$
$$= \overline{AE}^2 + \overline{BK}^2 + 2\cdot \overline{DE} \cdot \overline{DK}.$$

Од друга страна $(\overline{AE} + \overline{BK})^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BK}^2 + 2\cdot \overline{AE} \cdot \overline{BK}$, па следи дека доволно е да се покаже дека $\overline{DE} : \overline{AE} = \overline{BK} : \overline{DK}$, што следи од сличноста на триаголниците AED и DKB.

65. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Нека $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ и $\overline{CD} = \frac{ab}{a+b}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{BC} < \overline{AC}$. Нека E е точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ таква што $BE \parallel AC$. Имаме $\measuredangle BED = \measuredangle ACD = \measuredangle BCD$, па затоа $\overline{BC} = \overline{BE} = a$. Исто така, триаголниците ADC и BDE имаат еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува

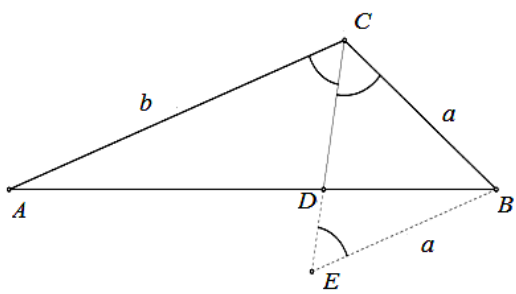
$$\overline{BE} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{CD} ,$$

односно

$$\overline{DE} = \frac{a}{b} \cdot \overline{CD} = \frac{a^2}{a+b} .$$

Според тоа,

$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \frac{ab}{a+b} + \frac{a^2 b}{a+b} = a .$$

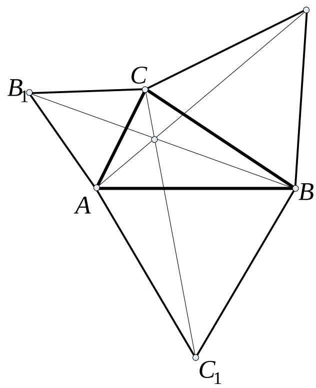


Значи, $\triangle BCE$ е рамностран, па затоа

$$\frac{1}{2}\measuredangle ACB = 60^\circ \text{, т.е. } \measuredangle ACB = 120^\circ .$$

66. Над страните BC, CA и AB оде ден произволен триаголник ABC, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Докажи дека со отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 може да се формира рамностран триаголник.

Решение. Од претпоставките на задачата (види цртеж) следува дека $\overline{B_1C} = \overline{AC}$, $\overline{CA_1} = \overline{BC}$, $\measuredangle ACA_1 = 60^\circ + \measuredangle ACB$, $\measuredangle BCB_1 = 60^\circ + \measuredangle ACB$, што значи дека $\measuredangle ACA_1 = \measuredangle BCB_1$. Докажавме дека $\triangle BB_1C \cong \triangle AA_1C$, од каде што следува $\overline{BB_1} = \overline{AA_1}$. На ист начин се покажува дека $\triangle CBC_1 \cong \triangle ABA_1$, од каде што следува $\overline{CC_1} = \overline{AA_1}$. Значи, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, т.е. од отсечките $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ може да се конструира рамностран триаголник.



67. Даден е триаголник ABC. Низ точката A минува кружница Γ која ја допира страната BC во точката P. Кружницата Γ ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека должините на малите кружни лаци MP и NP се еднакви ако и само ако кружницата Γ ја допира опишаната кружница на триаголникот ABC во точката A.

Решение. Нека N' е подножјето на нормалата од N на тангентата на Γ во точката A. Слично, нека C' е подножјето на нормалата од C на тангентата на опишаната кружница на триаголникот ABC во точката A. Тогаш, малите кружни лаци се еднакви ако и само ако последователно (направи цртеж):

$$\measuredangle MNP = \measuredangle NMP = \measuredangle NPC$$
$$\Leftrightarrow MN \parallel BC$$
$$\Leftrightarrow \measuredangle AMN = \measuredangle ABC = \measuredangle N'AN = \measuredangle C'AC$$

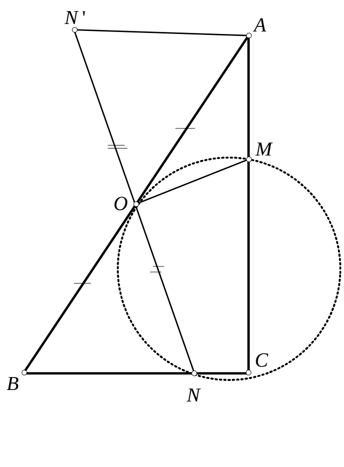
$\Leftrightarrow \Gamma$ ја допира опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката A.

68. Во правоаголниот триаголник ABC, точката O е средина на хипотенузата AB. На страната AC е земена точка M, а на страната BC точка N, така што $\angle MON$ е прав агол. Докажи дека

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{MN}^2. \qquad (1)$$

Решение. Нека N' е симетрична точка на точката N во однос на точката O.

Триаголниците OAN' и OBN се складни, според признакот САС. Од друга страна $\measuredangle N'AM = \measuredangle N'AO + \measuredangle MAO = \measuredangle ABC + \measuredangle CAB = 90^\circ$,



односно $\measuredangle N'AO$ е прав.

Според Питагоровата теорема,

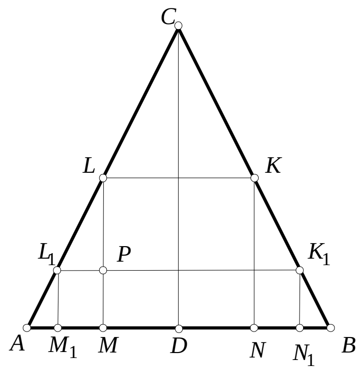
$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN'}^2 = \overline{MN'}^2 \qquad (2)$$

Точката O е средина на NN' и $OM \perp NN'$. Значи, $\triangle OMN \cong \triangle OMN'$, од каде добиваме $\overline{MN} = \overline{MN'}$.

Сега, ако замениме во (2) го добиваме (1).

69. Да се определат рамнокраките триаголници во кои правоаголниците, на кои едната страна му лежи на основата, имаат еднакви периметри.

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AB, во кој периметрите на правоаголниците кои се впишани во него, а едната основа им лежи на основата имаат еднакви периметри. Точката D е подножје на висината спуштена од темето C врз основата на триаголникот (види цртеж).



Нека $MNKL$ и $M_1N_1K_1L_1$ се правоаголници впишани во триаголникот, на кои страните MN и M_1N_1 им лежат на основата AB, а пресекот на страните ML и L_1K_1 е точката P (види цртеж). Ќе воведеме ознаки $\overline{MN} = x$, $\overline{M_1N_1} = x_1$, $\overline{ML} = y$ и $\overline{M_1L_1} = y_1$. Бидејќи периметрите на двата правоаголници се еднакви, имаме:

$$x + y = x_1 + y_1,$$
$$x - x_1 = y_1 - y.$$

Триаголниците $\triangle LL_1P$ и $\triangle CAD$ се слични, од каде добиваме дека,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{L_1P}} = \frac{y-y_1}{\frac{x_1}{2}-\frac{x}{2}} = 2\frac{y-y_1}{x_1-x} = 2.$$

Значи, $\overline{CD} = 2\overline{AD}$. Значи, за таквите триаголници основата и висината спуштена врз основата се еднакви. Не е тешко да се покаже и обратното.

70. Најди ги страните на правоаголен триаголник ако тие се природни броеви и производот на катетите е трипати поголем од периметарот на триаголникот.

Решение. Да ги означиме катетите со a и b, а хипотенузата со c. Според условот во задачата важи $ab = 3(a+b+c)$. Бидејќи a и b се природни броеви, следува дека 3 е делител на барем една од катетите**.** Нека $a = 3x$, тогаш $c = xb - 3x - b$ и имаме $(xb-3x-b)^2 = (3x)^2 + b^2$. Добиваме

$$xb(xb-6x-2b+6) = 0,$$

а од $x \neq 0$ и $b \neq 0$ следува $xb-6x-2b+6=0$, равенка која што е еквивалентна со $(b-6)(x-2)=6$**.** Оттука,

$$\begin{cases} b-6=1 \\ x-2=6 \end{cases}, \begin{cases} b-6=2 \\ x-2=3 \end{cases}, \begin{cases} b-6=3 \\ x-2=2 \end{cases}, \begin{cases} b-6=6 \\ x-2=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} b-6=-1 \\ x-2=-6 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-2 \\ x-2=-3 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-3 \\ x-2=-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-6=-6 \\ x-2=-1 \end{cases}.$$

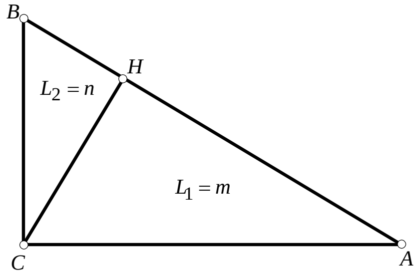
Значи, има три правоаголни триаголници (до складност) со бараните својства, а нивните страни се: $a=24, b=7, c=25$, $a=15, b=8, c=17$ и $a=12, b=9, c=15$.

71. Висината го дели правоаголнот триаголник на два триаголници кои имаат периметри m и n. Определи го периметарот на почетниот триаголник.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник (со теме на правиот агол во точката C) и нека CH е негова висина. Од условот на задачата имаме

$$L_1 = L_{AHC} = m \text{ и } L_2 = L_{CHB} = n.$$

Триаголниците AHC, BHC и ABC се слични, при што коефициентите на сличност се



$$k_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ и } k_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \qquad (1)$$

При тоа, исто така

$$\frac{L_1}{L} = k_1 \text{ и } \frac{L_2}{L} = k_2. \qquad (2)$$

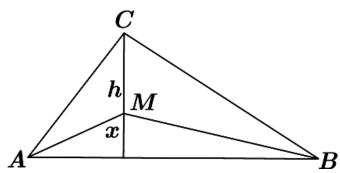
Од равенствата (1) имаме $\overline{AC} = k_1 \overline{AB}$ и $\overline{BC} = k_2 \overline{AB}$. Според Питагорина теорема

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

од каде го добиваме равенството $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Ако (2) замениме во претходното равенство, имаме $(\frac{L_1}{L})^2 + (\frac{L_2}{L})^2 = 1$, т.е. $L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$.

72. Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AC} = b, \overline{BC} = a$ и висината спуштена од темето C, $\overline{CD} = h$. Одреди точка M на висината таква што збирот $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$ че биде најмал.

Решение. Нека $\overline{MD} = x$. Тогаш $\overline{CM} = h - x$, односно $\overline{CM}^2 = (h-x)^2$. Користејќи ја Питагоровата теорема можеме да ги изведеме и следниве релации:



$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + x^2 = b^2 - h^2 + x^2 \text{ и}$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{BD}^2 + x^2 = a^2 - h^2 + x^2.$$

Со замена за збирот добиваме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = b^2 - h^2 + x^2 + a^2 - h^2 + x^2 + (h-x)^2,$$

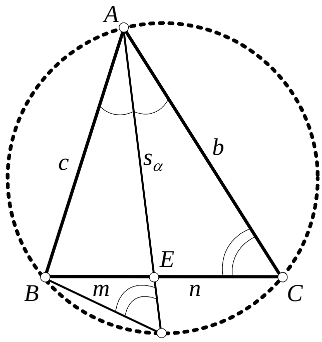
односно

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2.$$

Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција $f(x) = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2$ достигнува свој минимум, односно во темето на параболата. Темето на параболата е во точката $(\frac{h}{3}, a^2+b^2-\frac{4}{3}h^2)$, од каде заклучуваме дека точката M е определена со растојанието $\overline{MD}=\frac{h}{3}$.

73. Докажи дека квадратот на симетралата на еден агол во еден триаголник е еднаков на производот на должините на страните кои го зафаќаат тој агол намален за производот на должините на отсечките на кои е разделена страната на триаголникот со таа симетрала.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој $b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$ се должини на две негови страни, s_α е должината на симетралата на аголот $\alpha=\measuredangle A$, а m и n се должините на отсечките на кои е разделена страната BC ($E\in BC$, AE е симетрала и $\overline{BE}=m,$ $\overline{EC}=n$ (види цртеж).



Околу триаголникот ќе опишеме кружница k , а дадената симетрала AE ќе ја продолжиме до пресекот D со кружницата k . Ќе ја повлечеме отсечката BD . Триаголниците ABD и AEC се слични ($\measuredangle BAD=\measuredangle EAC$ бидејќи AE е симетрала на $\measuredangle BAC$; $\measuredangle BDA=\measuredangle BCA=\measuredangle ECA$ се периферни агли над ист кружен лак). Од сличноста последователно добиваме

$$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{AD},\ \ s_\alpha:c=b:(s_\alpha+\overline{ED})\ \ s_\alpha(s_\alpha+\overline{ED})=bc,$$

$$s_\alpha^2+s_\alpha\cdot\overline{ED}=bc\ . \qquad (1)$$

Но, AD и BC се тетиви на k кои се сечат во точката E . Според тоа

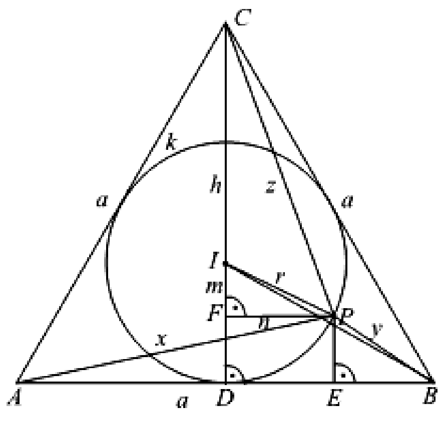
$$\overline{AE}\cdot\overline{ED}=\overline{BE}\cdot\overline{EC},\ \text{т.е.}\ \ s_\alpha\cdot\overline{ED}=mn\,.$$

Сега, ако замениме во (1), добиваме $s_\alpha^2+mn=bc$, што требаше да се докаже.

74. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностраниот триаголник ABC важи равенството

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}, \qquad (1)$$

каде a е должина на страната на триаголникот.



Решение. Да воведеме ознаки како на цртежот десно: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$; I - центар на впишаната кружница k во триаголникот ABC ; h е висина и затоа $\overline{IC}=\frac{2}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, D е подножје на висината h спуштена кон основата AB ; $P\in k$, $\overline{ID}=\overline{IP}=r=\frac{1}{2}\overline{IC}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, r е радиус на k ; $\overline{IF}=m, F\in ID$; $\overline{FP}=n$;

$\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$, $\overline{PC}=z$.

Применувајќи ја Питагоровата теорема на правоаголните триаголници $\triangle IFP$, $\triangle AEP$,$\triangle BEP$ и $\triangle CFP$ последователно, добиваме:

$$m^2+n^2=r^2, \tag{2}$$

$$x^2=\overline{AE}^2+\overline{EP}^2=(\overline{AD}+\overline{DE})^2+\overline{EP}^2=(\tfrac{a}{2}+n)^2+(r-m)^2, \tag{3}$$

$$y^2=\overline{BE}^2+\overline{EP}^2=(\overline{BD}-\overline{ED})^2+\overline{EP}^2=(\tfrac{a}{2}-n)^2+(r-m)^2, \tag{4}$$

$$z^2=\overline{CF}^2+\overline{FP}^2=(\overline{CI}+\overline{IF})^2+\overline{FP}^2=(\tfrac{a\sqrt{3}}{3}+m)^2+n^2. \tag{5}$$

Со собирање на равенствата (3), (4) и (5), и користејќи го (2) добиваме:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(\tfrac{a}{2}+n)^2+(r-m)^2+(\tfrac{a}{2}-n)^2+(r-m)^2+(\tfrac{a\sqrt{3}}{3}+m)^2+n^2\\&=\tfrac{5a^2}{6}+3(m^2+n^2)+2r^2-4rm+\tfrac{2}{3}am\sqrt{3}\\&=\tfrac{5a^2}{6}+5r^2-4\tfrac{a\sqrt{3}}{6}m+\tfrac{2}{3}am\sqrt{3}\\&=\tfrac{5a^2}{6}+5(\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2=\tfrac{5a^2}{6}+\tfrac{5a^2}{12}=\tfrac{5a^2}{4}\end{aligned}$$

т.е. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}$**,** што требаше да се докаже.

75. Да се најде односот на должината на основата и должината на кракот во рамнокрак триаголник со агол при основата еднаков на 72° .

Решение. Нека дадениот триаголник е ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$, $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=72^\circ$). Ќе воведеме ознаки $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ и $\overrightarrow{AB}=c$. Нека AL ($L\in BC$) е симетрала на аголот $\measuredangle A$. Од својствата на симетрала на агол на триаголник имаме $\frac{\overline{CL}}{\overline{LB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, па

затоа $\frac{\overline{CL}}{a-\overline{CL}}=\frac{a}{c}$, т.е.

$$\overline{CL}=\frac{a^2}{a+c}. \tag{1}$$

Но триаголниците ABC и BLA се слични (имаат исти агли), па според тоа $\overline{AL}=\overline{AB}=\overline{CL}=c$. Ако замениме во последното равенство од (1), добиваме $c=\frac{a^2}{a+c}$, од каде наоѓаме $(\frac{c}{a})^2+\frac{c}{a}-1=0$, т.е. $(\frac{c}{a})_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Според тоа, бараниот однос е $\frac{c}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

76. Периметарот на еден правоаголен триаголник е $2p$ ($p>0$) а неговата висина спуштена кон хипотенузата има должина h . Определи ги неговите страни.

Решение. Од условот на задачата имаме $a+b+c=2p$, каде a и b се должините на катетите а c е должина на хипотенузата. Според тоа

$$a+b=2p-c \tag{1}$$

$$(a+b)^2=(2p-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$$
$$c^2+2ab=(2p-c)^2$$
$$ab=2p^2-2pc. \qquad (2)$$

Бидејќи $ab=ch$, ако замениме во (2) добиваме $ch+2pc=2p^2$ односно $c=\frac{2p^2}{h+2p}$.

Ако добиеното c го замениме во (1) и (2) добиваме

$$\begin{cases} a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p} \\ ab=\frac{2p^2h}{h+2p} \end{cases}.$$

Според тоа, a и b се корени на квадратната равенка $x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0$.

Значи,

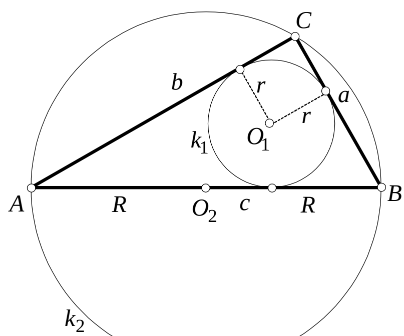
$$a=\frac{p}{h+2p}[h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\,],\ b=\frac{p}{h+2p}[h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\,],\ c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

77. Во правоаголен триаголник, односот на радиусите на впишаната и опишаната кружница е $2:5$. Определи го односот на катетите.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во темето C. Нека b е должината на поголемата катета AC и a е должината на помалата катета BC.

Нека r е радиус на впишаната кружница k_1 а R е радиус на опишаната кружница k_2 (види цртеж). Тогаш $R=\frac{c}{2}$ и $r=\frac{a+b-c}{2}$, па од условот на задачата, имаме

$$\frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{2}{5}.$$



Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5}. \qquad (1)$$

Од Питагоровата теорема имаме

$$(\tfrac{a}{c})^2+(\tfrac{b}{c})^2=1. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases} \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5} \\ (\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1. \end{cases}$$

Ако воведеме смени $\frac{a}{c}=x, \frac{b}{c}=y$, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y=\frac{7}{5} \\ x^2+y^2=1. \end{cases},$$

кој е еквивалентен со ситемот

$$\begin{cases} x+y=\frac{7}{5} \\ xy=\frac{12}{25}. \end{cases}.$$

Според тоа, x и y се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0 .$$

Решенија на квадратната равенка се $t_1=\frac{4}{5}$ и $t_2=\frac{3}{5}$. Сега имаме, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.

78. Нека растојанијата од точката M до темињата A, B и C на триаголникот ABC се p, q и r соодветно. Докажи дека не постојат реален број $d \neq 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A, B и C се еднакви на $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$ соодветно.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат реален број $d \neq 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A, B и C се $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$, соодветно. Тогаш

$$\begin{aligned} \overline{AF}^2-\overline{AM}^2&=d \\ \overline{BF}^2-\overline{BM}^2&=d \\ \overline{CF}^2-\overline{CM}^2&=d \end{aligned} \tag{1}$$

Од друга страна, геометриското место на точки D за кои важи $\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d$ е права нормална на FM . Навистина, ако D_1 е проекција на D врз правата FM , тогаш

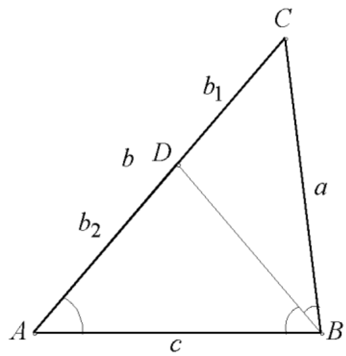
$$\begin{aligned} \overline{D_1F}^2-\overline{D_1M}^2&=(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DF})^2-(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DM})^2=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2+2\overrightarrow{DD_1}(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DM}) \\ &=\overline{DF}^2-\overline{DN}^2+2\overrightarrow{DD_1}\overrightarrow{FM}=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d^2 . \end{aligned}$$

Бидејќи на правата FM постои единствена точка D_1 за која важи $\overline{D_1F}^2-\overline{D_1M}^2=d^2$, заклучуваме дека сите точки на разгледуваното геометриско место ортогонално се проектираат во точката D_1, т.е. тоа е права нормална на правата FM . Конечно, од (1) следува дека правите AB, BA и CA се нормални на правата FM , т.е. точките A, B и C се колинеарни, што не е можно, бидејќи тие се темиња на триаголник.

79. Докажи дека постои точно еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. Нека $b>a$. Повлекуваме симетрала BD на аголот β и воведуваме ознаки $\overline{CD}=b_1$ и $\overline{DA}=b_2$. Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и заради тоа $\frac{c}{b_2}=\frac{a}{b_1}=\frac{b}{a}$, од каде што добиваме $c=\frac{bb_2}{a}$, $a=\frac{bb_1}{a}$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$(b_1+b_2)\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a}=c+a$$



каде $c+a$ е цел број.

Според условот на задачата, должините на страните мора да бидат последователни цели броеви, па затоа $b=a+1$ или $b=a+2$.

(1) $b=a+1$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+2a+1}{a}=a+2+\frac{1}{a}$, па затоа $a=1, b=2, c=3$, и овој триаголник е дегенериран.

(2) $b=a+2$, $\frac{b^2}{a}=\frac{a^2+4a+4}{a}=a+4+\frac{4}{a}$, па затоа $a\,|\,4$, т.е. $a=1$ или $a=2$ или $a=4$.

Ако $a=1$, тогаш $b=3$ и $c=\frac{b^2}{a}-a=8$, а триаголник со такви страни не постои.

Ако $a=2$, тогаш $b=4$ и $c=6$, и овој триаголник е дегенериран.

Ако $a=4$, тогаш $b=6$ и $c=5$, што е решение на задачата.

79. Нека *I* е центарот на впишаната кружница во триаголникот *ABC* која ги допира страните *BC*, *CA* и *AB* во точките *K*, *L* и *M* соодветно. Правата која што минува низ *B* и е паралелна со *MK* ги сече правите *LM* и *LK* во точките *R* и *S*. Докажи дека $\measuredangle RIS$ е остар.

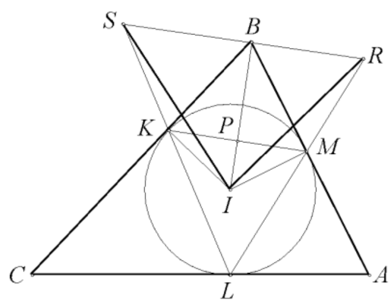
Решение. Бидејќи

$\measuredangle RMB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}, \measuredangle RBM=\measuredangle BMK=90^\circ-\frac{\beta}{2}$

$\measuredangle MRB=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle SKB=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$,

$\measuredangle SBK=\measuredangle MKB=90^\circ-\frac{\beta}{2}$ и

$\measuredangle KSB=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$,



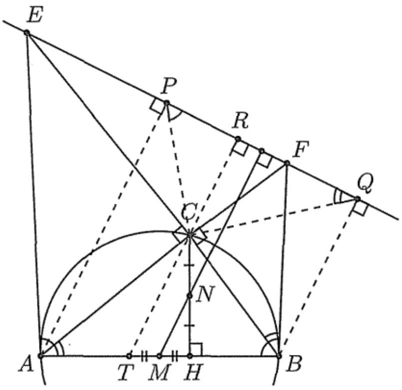
следува дека триаголниците *RMB* и *KBS* се слични. Оттука добиваме $\overline{RB}\cdot\overline{BS}=\overline{BK}^2$, затоа што $\overline{BK}=\overline{BM}$. Бидејќи $BI\perp MK$ (*BI* е симетрала на аголот *MBK* во рамнокракиот триаголник *MKB*) следува

$$\overline{RI}^2+\overline{SI}^2-\overline{RS}^2=\overline{RB}^2+\overline{BI}^2+\overline{BS}^2+\overline{BI}^2-(\overline{RB}+\overline{BS})^2=2(\overline{BI}^2-\overline{RB}\cdot\overline{BS})$$

$$=2(\overline{BI}^2-\overline{BK}^2)=2\overline{IK}^2>0.$$

Оттука следува дека аголот *RIS* е остар.

80. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, впишан во кружница k. Правите низ темето C нормални на страните AC и BC ги сечат тангентите на k повлечени во темињата A и B во точките E и F соодветно. Нека M е средината на AB, а N е средината на висината $CH, H\in AB$. Докажи, дека правите MN и EF се заемно нормални.



Решение. Нека P и Q се проекциите на темињата A и B на правата EF. Тогаш точките A,P,C и E лежат на кружницата со дијаметар AE, а точките B,C,F и Q лежат на кружницата со дијаметар BF. Според тоа,

$$\measuredangle CPQ = \measuredangle CAE = \measuredangle CBA \text{ и}$$

$$\measuredangle CQP = \measuredangle CBF = \measuredangle CAB$$

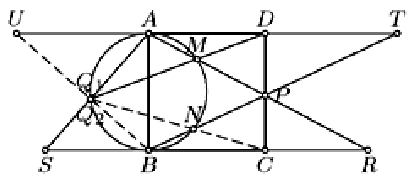
па затоа $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$.

Нека нормалата повлечена во точката C кон правата EF ги сече EF и AB во точките R и T, соодветно. Од $AP \| TR \| BQ$ следува дека

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BA}},$$

т.е. $\overline{AT} = \overline{BH}$ и M е средина на TH. Според тоа, MN е средна линија во $\triangle THC$, па затоа $MN \| TC$, односно $MN \perp EF$.

81. Даден е квадрат $ABCD$ и кружница γ со дијаметар AB. Нека P е произволна точка на страната CD, M и N се соодветно пресеците на AP и BP со γ кои се различни од A и B и Q е пресечната точка на правите DM и CN. Докажи, дека $Q \in \gamma$ и дека важи $\overline{AQ} : \overline{QB} = \overline{DP} : \overline{PC}$.



Решение. Нека правата DM по вторпат ја сече кружницата γ во точката Q_1 и нека правите AM и AQ_1 ја сечат правата BC во точките R и S, соодветно. Тогаш од Евклидовите теореми следува

$$\overline{AQ_1} \cdot \overline{AS} = \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 = a^2$$

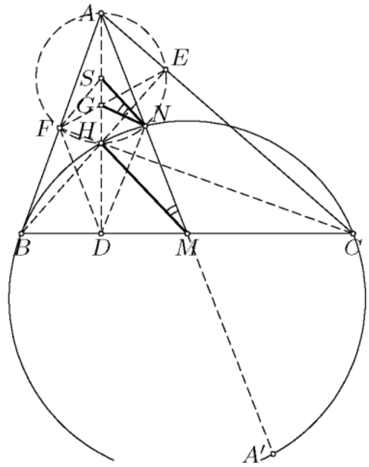
па следува дека $\triangle ADQ_1 \sim \triangle ASD$, па затоа $\measuredangle ASD = \measuredangle ADQ$. Слично се докажува дека $\measuredangle ARD = \measuredangle ADM$. Според тоа, $\measuredangle ASD = \measuredangle ARD$, т.е. точките A, S, R, D лежат на иста кружница и затоа $\overline{BS} = \overline{CR}$.

Аналогно, ако $Q_2 = CN \cap \gamma, (Q_2 \neq N)$ и T и U се пресечните точки на BN, BQ_2 со AD, соодветно, добиваме дека $\overline{AU} = \overline{DT}$.

Од $\overline{CR} : \overline{AD} = \overline{CP} : \overline{PD} = \overline{CB} : \overline{DT}$ следува $\overline{BS} \cdot \overline{AU} = \overline{CR} \cdot \overline{DT} = a^2$, па затоа $\overline{SB} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{AU}$ и конечно $\triangle SBA \sim \triangle BAU$. Следува дека $AS \perp BU$, па затоа AS и BU се сечат на кружницата γ во точката $Q \equiv Q_1 \equiv Q_2$. Уште повеќе, $\overline{AQ} : \overline{QB} = \overline{AU} : \overline{AB} = \overline{DT} : \overline{BC} = \overline{DP} : \overline{PC}$.

82. Во остроаголен $\triangle ABC$ точката M е средината на страната BC, а точките D, E и F се подножјата на висините повлечени од темињата A, B и C, соодветно. Нека H е ортоцентрот на $\triangle ABC$, S е средината на отсечката AH, а G е пресекот на отсечките FE и AH. Ако N е пресечната точка на тежишната линија AM и кружницата опишана околу $\triangle BCH$, докажи дека $\measuredangle HMA = \measuredangle GNS$.

Решение. Нека точката A' е таква што четириаголникот $ABA'C$ е паралелограм. Тогаш важи



$$\measuredangle BA'C = \measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle BHC$$

$$= 180^\circ - \measuredangle BNC$$

па затоа точките A', B, C, H, N лежат на иста кружница, т.е. на кружницата со дијаметар HA'. Оттука следува $\measuredangle AHN = 90^\circ$, што значи дека N лежи на опишаната кружница околу $\triangle AEF$ чиј центар е S.

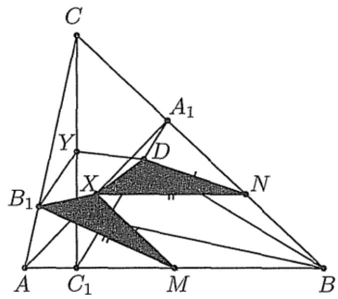
Сега имаме

$$\measuredangle SFG = 90^\circ - \measuredangle EAF = \measuredangle ACF = \measuredangle ADF.$$

Значи, триаголниците SFG и SDF се слични, па затоа $\overline{SG}\cdot\overline{SD} = \overline{SF}^2 = \overline{SN}^2$. Тоа значи, дека $\triangle SNG \sim \triangle SDN$ и конечно, $\measuredangle GNS = \measuredangle SDN = \measuredangle HMN$, бидејќи четириаголникот $HDMN$ е тетивен.

83. Во остроаголен $\triangle ABC$ се повлечени висините AA_1, BB_1 и CC_1. Докажи, дека симетричната точка на B_1 во однос на правата, определена со средините на AA_1 и CC_1, лежи на отсечката A_1C_1.

Решение. *Прв начин*. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од B кон A_1C_1. Ако X е средината на AA_1 ќе докажеме дека $\overline{XB_1} = \overline{XD}$. Нека M и N се средините на AB и A_1B, соодветно. Тогаш



$$\overline{MX} = \tfrac{1}{2}\overline{A_1B} = \overline{DN} \text{ и } \overline{MB_1} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \overline{XN}.$$

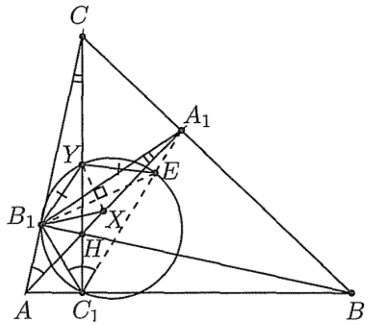
Освен тоа,

$$|\measuredangle XMB_1| = |\measuredangle AMB_1 - \measuredangle AMX| \text{ и}$$
$$|\measuredangle XND| = |\measuredangle A_1BD - \measuredangle A_1NX|,$$

каде $\measuredangle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha = \measuredangle A_1ND$ и $\measuredangle AMX = \beta = \measuredangle A_1NX$. Значи, $\triangle XMB_1 \cong \triangle DNX$, па затоа $\overline{XB_1} = \overline{XD}$. Аналогно се докажува дека $\overline{YB_1} = \overline{YD}$, каде Y е средината на CC_1.

Според тоа, XY е симетрала на BD, што значи дека D е симетрична на B_1 во однос на XY.

Втор начин. Нека X и Y се средините на AA_1 и CC_1, соодветно, а E е симетричната точка на B_1 во однос на правата XY. Лесно се покажува дека $\triangle AA_1B_1 \sim \triangle C_1CB_1$. Значи, B_1X и B_1Y се тежишни линии во слични триаголници,



па затоа $\measuredangle B_1XA = \measuredangle B_1YC_1$. Според тоа, четириаголникот B_1HXY е тетивен. Значи,

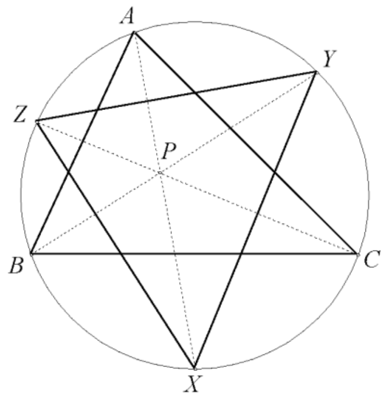
$$\measuredangle B_1EY = 90^\circ - \measuredangle B_1YX = 90^\circ - \measuredangle B_1HA$$
$$= \measuredangle B_1AH = \measuredangle B_1C_1Y,$$

т.е. четириаголникот B_1C_1EY е тетивен. Но, $\overline{YE} = \overline{YB_1}$, т.е.

$$\measuredangle EC_1Y = \measuredangle YC_1B_1 = \measuredangle XAB_1 = \measuredangle A_1C_1C,$$

па затоа $E \in A_1C_1$.

84. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle BPA - \measuredangle BCA = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$. Точките D и E се центри на кружниците впишани во триаголниците APB и APC, соодветно. Докажи дека правите AP, BD и CE се сечат во иста точка.



Решение. Доволно е да се докаже дека симетралите на $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ се сечат на отсечката AP. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и правите AP, BP и CP ја сечат k во точките X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Условот

$$\measuredangle APB - \measuredangle ACB = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$$

е еквивалентен со

$$\measuredangle PAC + \measuredangle PBC = \measuredangle PAB + \measuredangle PCB$$

од каде што со разгледување на периферните агли се добива $\measuredangle XZY = \measuredangle XYZ$ и $\overline{XZ} = \overline{XY}$. Исто така $\triangle BPC \sim \triangle ZPY$, (еднакви агли), па затоа

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PY}}.$$

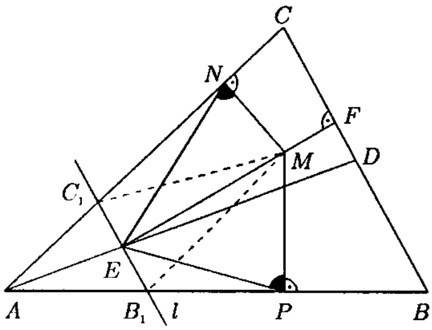
Нека $\overline{BP} \cdot \overline{PY} = k$. Тогаш, $\overline{PC} \cdot \overline{ZP} = k = \overline{AP} \cdot \overline{PX}$. Од релацијата

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ZY}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{BP}}{\frac{k}{\overline{PC}}} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{PC}}{k}$$

добиваме $\overline{ZY} = \frac{k\overline{BC}}{\overline{BP} \cdot \overline{CP}}$. Аналогно, $\overline{XY} = \frac{k\overline{AB}}{\overline{BP} \cdot \overline{AP}}$ и $\overline{XZ} = \frac{k\overline{CA}}{\overline{AP} \cdot \overline{CP}}$. Од $\overline{XY} = \overline{YZ}$ следува дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Симетралите на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ ја делат отсечката AP во еднаков однос, па затоа тие се сечат на AP.

852. Во разностран остроаголен триаголник ABC точката E е внатрешна точка за тежишната линија AD, $(D \in BC)$. Точката F е ортогонална проекција на E врз правата BC. Нека M е внатрешна точка на за отсечката EF, а точките N и P се ортогоналните проекции на точката M врз правите AC и AB, соодветно. Докажи, дека симетралите на аглите PMN и PEN се паралелни.

Решение. Ќе докажеме дека $\measuredangle ENM = \measuredangle EPM$, (цртеж лево). Нека l е права низ E паралелна на BC. Со B_1 и C_1 да ги означиме пресечните точки на правата l со правите AB и AC, соодветно. Јасно, E е средина на B_1C_1. Освен тоа $EF \perp BC$, па затоа $EF \perp B_1C_1$, што значи дека $\triangle B_1C_1M$ е рамнокрак. Според тоа $\measuredangle B_1C_1M = \measuredangle MB_1C_1$. Но, $\measuredangle MNC_1 = \measuredangle MEC_1 = 90^\circ$ па затоа точки-те E, M, N и C_1 лежат на иста кружница, од што следува дека $\measuredangle B_1C_1M = \measuredangle ENM$. Аналогно, $\measuredangle MPB_1 = \measuredangle MEB_1 = 90^\circ$, т.е. точките E, M, P и B_1 лежат на иста кружница, од што следува $\measuredangle EPM = \measuredangle MB_1C_1$. Сега да го разгледаме читириаголникот $EPMN$. Аглите PMN и PEN ќе ги поистоветуваме со соодветните внатрешни агли на четириаголникот и за расудувањата, кои следуваат, не е важно дали овој четириаголник е конвексен или не е.



Расудувањата остануваат во сила и кога четириаголникот се дегенерира во триаголник, т.е. кога E лежи на PN. За симетралата на $\measuredangle PEN$ можни се два случаи: таа минува низ точката M или сече некоја од отсечките MP или MN. Ако симетралата минува низ M, тогаш $\triangle EMN \cong \triangle EMP$, од што следува дека $\overline{MN} = \overline{MP}$. Но, тогаш $\triangle MNC_1 \cong \triangle MPB_1$, па затоа $\measuredangle MC_1N = \measuredangle MB_1P$. Но, тоа значи дека $\measuredangle AC_1E = \measuredangle AB_1E$, т.е. $\measuredangle ACB = \measuredangle ACB$, што не е можно бидејќи $\triangle ABC$ е разностран. Ако симетралата на $\measuredangle PEN$ сече некоја од отсечките MP или MN, на пример MP во точка Q, тогаш од

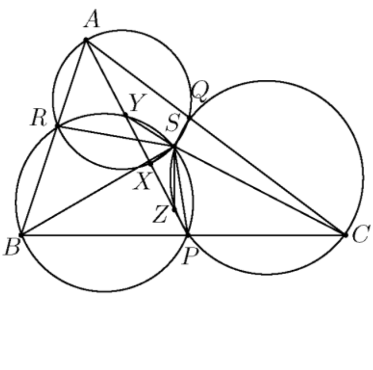
$$\measuredangle PMN = 360^\circ - 2\measuredangle PEQ - 2\measuredangle MPE$$

следува дека

$$\measuredangle EQP = 180^\circ - (\measuredangle PEQ + \measuredangle MPE) = \tfrac{1}{2}\measuredangle PMN$$

што значи дека симетралите на аглите PEN и PMN се паралелни.

86. Точките P, Q и R лежат соодветно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$. Нека ω_A, ω_B и ω_C се соодветно опишаните кружници околу триаголниците ABR, BRP и CPQ. Ако отсечката AP ги сече ω_A, ω_B и ω_C повторно соодветно во точките X, Y и Z, докажи дека $\frac{\overline{YX}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$.



Решение. Со S да ја означиме втората пресечна точка на ω_B и ω_C (случајот $S \equiv P$

се разгледува аналогно). Бидејќи четириаголниците $BPSR$ и $CPSQ$ се тетивни, имаме $\measuredangle RSP = 180^\circ - \measuredangle PBR$ и $\measuredangle PSQ = 180^\circ - \measuredangle QCP$. Тогаш

$$\measuredangle QSR = 360^\circ - \measuredangle RSP - \measuredangle PSQ = \measuredangle PBR + \measuredangle QCP$$
$$= \measuredangle CBA + \measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle BAC,$$

што значи дека четириаголникот $ARSQ$ е тетивен, т.е. ω_A, ω_B и ω_C се сечат во точката S.

Бидејќи четириаголникот $BPSY$ е впишан во ω_B, имаме $\measuredangle XYS = \measuredangle PTS = \measuredangle PBS$. Слично, $ARXS$ е впишан во ω_A, па затоа $\measuredangle SXY = \measuredangle SXA = \measuredangle SRA$, а $BPSR$ е впишан во ω_B и затоа $\measuredangle SPB = \measuredangle SRA$. Според тоа, $\measuredangle SXY = \measuredangle SRA = \measuredangle SPB$. Тогаш од $\measuredangle XYS = \measuredangle PBS$ и $\measuredangle SXY = \measuredangle SPB$ следува $\triangle SYX \sim \triangle SBP$, па затоа $\frac{\overline{YX}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{SX}}{\overline{PS}}$.

Аналогно се докажува, дека $\triangle SXZ \sim \triangle SPC$ и оттука $\frac{\overline{XZ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{SX}}{\overline{PS}}$. Со комбинирање на последните две равенства со добива бараното равенство.

87. Нека I е центар на впишаната кружница, а O центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, при што $\measuredangle ACB = 30^\circ$. На страните AC и BC се земени точки E и D, соодветно, такви што $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BD}$. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{IO}$ и $DE \perp IO$.

Решение. Да ја продолжиме AI до пресекот со опишаната кружница F. Правата AI е симетрала на аголот при темето A во $\triangle ABC$. Според условот $\triangle EAB$ е рамнокрак, па затоа AI е симетрала, тежишна линија и висина во овој триаголник. Нека AI ја сече страната EB во точката M. Бидејќи AM е симетрала на EB, добиваме дека $\triangle EFB$ е рамнокрак. Според тоа,

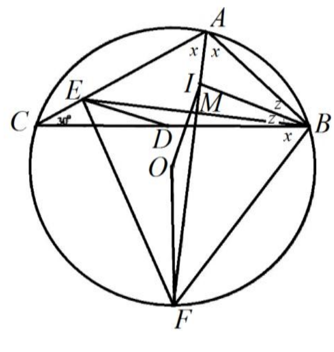
$$\measuredangle EFB = 2\measuredangle AFB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ.$$

Значи, $\triangle EFB$ е рамнокрак со агол меѓу краците еднаков 60°, па затоа тој е рамностран, т.е. $\overline{FB} = \overline{BE}$. Понатаму,

$$\measuredangle IBF = \measuredangle IBC + \measuredangle CBF = \measuredangle IBA + \measuredangle CAF = \measuredangle IBA + \measuredangle FAB = \measuredangle BIF,$$

што значи дека $\triangle BIF$ е рамнокрак и важи $\overline{FB} = \overline{FI}$. Значи,

$$\overline{BE} = \overline{FI}. \qquad (1)$$



Точката F е средина на лакот BC, па затоа FO е симетрала на тетивата BC. Правата AF е симетрала на отсечката BE, па затоа $IF \perp BE$. Според тоа, $\measuredangle OFI$ и $\measuredangle EBD$ се агли со нормални краци и важи

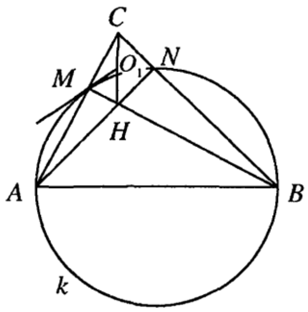
$$\measuredangle OFI = \measuredangle EBD. \qquad (2)$$

Од друга страна, $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ$, па затоа $\triangle AOB$ е рамностран и важи

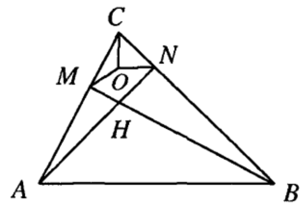
$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BD}. \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) заклучуваме дека $\triangle OFI \cong \triangle EBD$, т.е. $\overline{DE} = \overline{IO}$ и $\measuredangle FIO = \measuredangle BED$. Од $\measuredangle FIO = \measuredangle BED$ и $FI \perp BE$ следува дека и другите два краци се заемно нормални, т.е. $DE \perp IO$.

88. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружница k низ A и B ги сече страните AC и BC во внатрешни точки M и N, соодветно. Тангентите на k во точките M и N се сечат во точката O. Докажи, дека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$ ако и само ако AB е дијаметар на k.



Решение. Ако AB е дијаметар на k, тогаш AM и BN се висините на $\triangle ABC$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека тангентата на k во M ја сече висината CH во точка O_1, цртеж десно. Тогаш $\triangle CMH$ е правоаголен и важи $\measuredangle CMO_1 = \measuredangle ABM = \frac{AM}{2}$. Но, $\measuredangle ABM = \measuredangle ACH$ и затоа $\measuredangle CMO_1 = \measuredangle MCO_1$, т.е. $\triangle MCO_1$ е рамнокрак, од каде заклучуваме дека O_1 е средина на CH. Аналогно се докажува дека тангентата на k во N минува низ O_1, т.е. $O \equiv O_1$ и $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OC} = \frac{\overline{CH}}{2}$.



Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$. Тогаш

$$\measuredangle CMO = \measuredangle MCO = \measuredangle ABM \text{ и}$$
$$\measuredangle CNO = \measuredangle NCO = \measuredangle BAN,$$

па затоа

$$\measuredangle ACB = \measuredangle MCO + \measuredangle NCO = \measuredangle ABM + \measuredangle BAN.$$

Според тоа,

$$2\measuredangle ANB = \measuredangle ANB + \measuredangle AMB = 180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle BAN + 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ABM$$
$$= 360^\circ - (\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC) = 180^\circ,$$

од каде следува $\measuredangle ANB = 90^\circ$, т.е. AB е дијаметар на k.

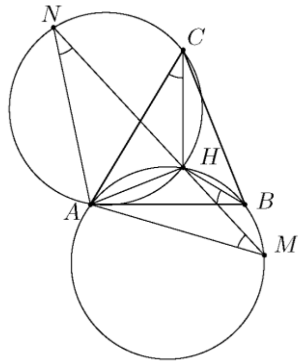
89. Остроаголен $\triangle ABC$ е впишан во кружница k и на лакот BC кој не ја содржи точката A е избрана точка D. Произволна права l која минува низ ортоцентарот H на $\triangle ABC$ гио сече опишаните кружници околу $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$ соодветно во точките M и N.

а) Определи ја положбата на правата l за која $\triangle AMN$ има максимална плоштина.

б) Нека d_1 е правата низ M, нормална на правата DB, а d_2 е правата низ N нормална на правата DC. Докажи, дека за секоја права l пресечната точка P на правите d_1 и d_2 лежи на една иста кружница.

Решение. а) Бидејќи $R_{AHB} = R_{AHC} = R_{ABC}$ и AH е заедничка тетива за опишаните кружници околу $\triangle AMH$ и $\triangle ANH$ следува дека

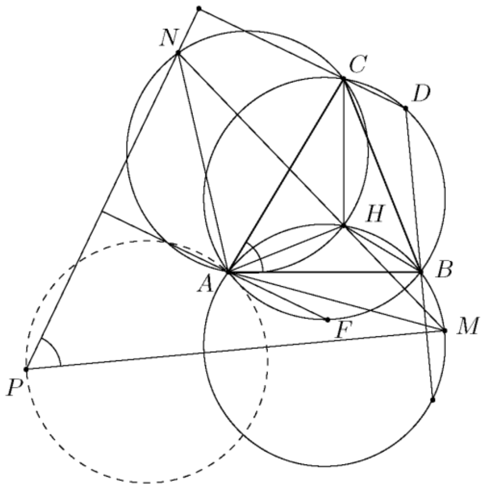
$\measuredangle AMH = \measuredangle ANH = \measuredangle ACH = 90^\circ - \measuredangle BAC$, од каде следува $\overline{AM} = \overline{AN}$. Освен тоа, кога правата l се менува, тогаш $\measuredangle AMH = \measuredangle ANH = 90^\circ - \measuredangle BAC$ не се менуваат, па затоа $\measuredangle MAN = 2\measuredangle BAC$ не се менува. Според тоа, $\triangle AMN$ има најголема плоштина кога $\overline{AN} = \overline{AM}$ е со најголема должина, т.е. кога AM и AN се дијаметри. Тоа значи, дека $\measuredangle AHM = \measuredangle AHN = 90^\circ$, т.е. правата l е нормална на AH.



б) Имаме

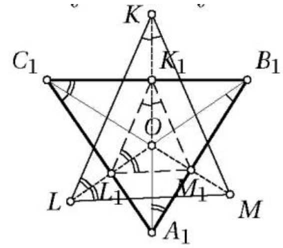
$\measuredangle MPN = 180^\circ - \measuredangle BDC = \measuredangle BAC$,

т.е. $\measuredangle MPN = \frac{1}{2}\measuredangle MAN$. Според тоа, точката P лежи на кружница со центар во A и радиус $\overline{AM}$. Нека F е пресечната точка на опишаната кружница околу $\triangle AHC$ и правата низ A која е паралелна на CD ($F \neq A$). Имаме $AF \perp PN$ и затоа P е симетрична на N во однос на AF. Бидејќи AF е постојана и N е на опишаната кружница околу $\triangle AHC$, добиваме дека P лежи на кружницата симетрична на опишаната кружница околу $\triangle AHC$ во однос на правата AF.



90. Нека O е внатрешна точка на остроаголниот триаголник ABC. Кружниците со центри во средините на страните на триаголникот ABC кои минуваат низ точката O меѓусебно се сечат во точките K, L и M различни од O. Докажи дека O е центар на впишаната кружница на триаголникот KLM ако и само ако O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

Решение. Со A_1, B_1, C_1 соодветно да ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Втората пресечна точка на K на кружниците $(B_1, \overline{B_1O})$ и $(C_1, \overline{C_1O})$ е симетрична на точката O во однос на B_1C_1 бидејќи $\overline{B_1K} = \overline{B_1O}$ и $\overline{C_1K} = \overline{C_1O}$. Аналогно L и K соодветно се симетрични на O во однос на C_1A_1 и A_1B_1. Средините K_1, L_1, M_1 на отсечките $OK,\ OL, OM$ соодветно лежат на правите B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Да забележиме дека, ако O е надвор од $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш O е надвор од $\triangle KLM$, па затоа не е центар на впишаната круж-



ница во $\triangle KLM$, а не е ниту центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Затоа во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека точката O е внатре во $\triangle A_1B_1C_1$.

Точката O е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$ ако и само ако

$$\measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OK_1M_1 = \measuredangle OKM = \measuredangle OKL = \measuredangle OK_1L_1 = \measuredangle OC_1A_1$$

и слично $\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1$ и $\measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1$, т.е. ако и само ако важи

$$\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1,\ \measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1,\ \measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OC_1A_1. \qquad (1)$$

Ако O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, т.е. ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш важи (1), бидејќи на пример $\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1 = 90^\circ - \measuredangle A_1B_1C_1$. Од друга страна, ако важи (1), тогаш

$$\measuredangle B_1OC_1 = 180^\circ - \measuredangle OB_1C_1 - \measuredangle OC_1B_1 = 180^\circ - \measuredangle OA_1C_1 - \measuredangle OA_1B_1 = 180^\circ - \measuredangle B_1A_1C_1$$

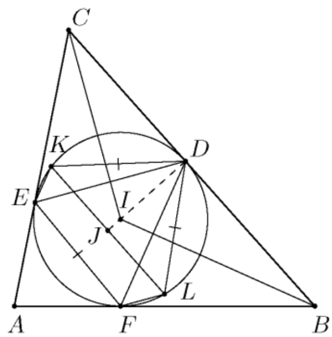
и аналогно $\measuredangle C_1OA_1 = 180^\circ - \measuredangle C_1B_1A_1$, па затоа O е ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

90. Кружница k со центар I е впишана во разностран $\triangle ABC$. Допирните точки на k со страните BC, CA, AB соодветно со D, E, F. Правата која минува низ E и е нормална на BI ја сече k во точката $K \neq E$. Правата која минува низ F и е нормална на CI ја сече k во точка $L \neq F$. Нека J е средината на отсечката KL.

а) Докажи дека точките D, I и J лежат на една права.

б) Нека B и C се фиксирани, а точката A е таква што $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = t$, каде t е дадена константа, при што A, B и C не лежат на една права. Нека M и N соодветно се пресечните точки на IE и IF со кружницата k ($M \neq E, N \neq F$). Правата MN соодветно ги сече правите IB и IC во точките P и Q. Докажи дека симетралата на отсечката PQ минува низ една иста точка.

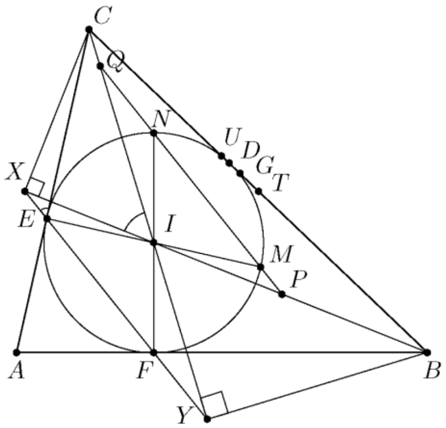
Решение. а) Бидејќи $DE \perp CI$ од условот $FL \perp CI$ следува дека $DE \parallel FL$. Аналогно следува дека $DF \parallel EK$. Значи, $\measuredangle KED = \measuredangle DFL$, па затоа $\overline{DK} = \overline{DL}$, т.е. D лежи на симетралата на KL. Но, I лежи на симетралата на KL, па затоа точките D, I и J лежат на една права.



б) Нека T е средината на BC, G е пресечната точка на AI и BC, U е симетричната точка на T во однос на G. Ќе докажеме, дека симетралата ма PQ минува низ точката U.

Нека X и Y се пресечните точки на EF соодветно со BI и CI. Имаме

$$\measuredangle XIC = 180^\circ - \measuredangle BIC = 180^\circ - (90^\circ + \tfrac{\measuredangle BAC}{2}) = 90^\circ + \tfrac{\measuredangle BAC}{2}$$
$$= \measuredangle AEI - \measuredangle EFI = \measuredangle AEF = \measuredangle XEC,$$

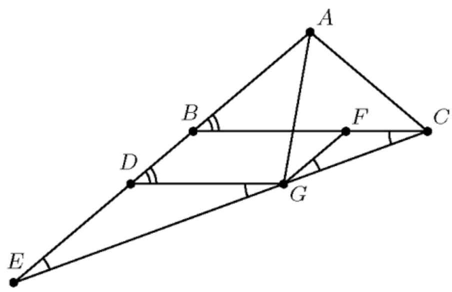


што значи дека точките C, I, E, X лежат на една кружница. Оттука наоѓаме $\measuredangle BXC = 90^\circ$ и аналогно $\measuredangle BYC = 90^\circ$. Според тоа, точките B, C, X, Y лежат на кружницата со центар T и дијаметар BC. Значи, точката T лежи на симетралата на XY.

Бидејќи точките M и E се симетрични на N и F во однос на I, заклучуваме дека $EF \parallel MN$, т.е. $XY \parallel PQ$. Оттука $\triangle IEX \cong \triangle IMP$ и следствено X е симетрична на P во однос на I. На ист начин се докажува дека Y е симетрична на Q во однос на I. Според тоа, симетралите XY и PQ се симетрични во однос на правата AI, од каде следува дека симетралата на PQ минува низ точката U.

91. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, за кој $\measuredangle BAC = 100^\circ$. На продолжението на страната AB преку темето B земени се точки D и E такви што $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BE}$. Докажи дека $\overline{BC} \cdot \overline{DE} = \overline{BD} \cdot \overline{CE}$.

Решение. Нека G и F се соодветно точки од отсечките EC и BC, такви што четириаголникот $BDGF$ е паралелограм ($DG \parallel BF$, $BD \parallel FG$). Бидејќи $\triangle ABC$ е рамнокрак, добиваме



$$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 40^\circ$$

и бидејќи $\triangle BEC$ е исто така рамнокрак добиваме

$$\measuredangle BEC = \measuredangle BCE = 20^\circ.$$

Сега од $DG \parallel BF$ следува $\measuredangle DGE = \measuredangle BCE = \measuredangle BEC$, што значи дека $\triangle DEG$ исто така е рамнокрак, па затоа $\overline{DG} = \overline{DE}$. Освен тоа, важи

$$\overline{DE} = \overline{BE} - \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AB}$$

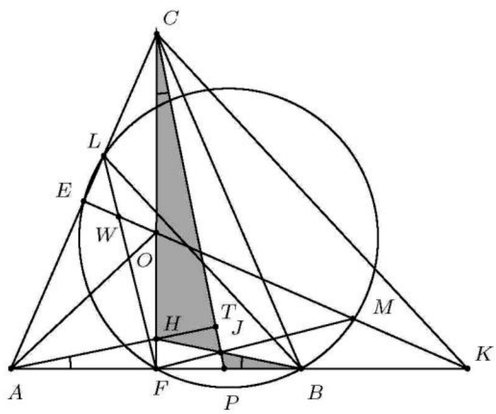
и од паралелограмот $BDGF$ наоѓаме

$$\overline{BF} = \overline{DG} = \overline{DE} = \overline{AB} = \overline{AC} \text{ и } \overline{FG} = \overline{BD} = \overline{BE} - \overline{DE} = \overline{BC} - \overline{BF} = \overline{FC}.$$

Според тоа $\triangle FGC$ е рамнокрак и $\measuredangle FGC = \measuredangle FCG = 20^\circ$. Затоа, $\triangle FGC \sim \triangle BEC$. Тогаш $\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CG}}$ и за да докажеме дека $\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$ доволно е да докажеме дека $\overline{CG} = \overline{DE}$.

Триаголниците ABC и GDA се складни ($\overline{DG}=\overline{AB}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle GDA = 40^\circ$), од каде следува дека $\overline{GA}=\overline{AC}$. Тогаш $\triangle GAC$ е рамнокрак и како $\measuredangle ACG=\measuredangle ACB+\measuredangle BCG=60^\circ$, заклучуваме дека тој е рамностран. Следствено, $\overline{CG}=\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{DE}$.

92. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, за кој важи $\overline{AC}=\overline{BC}>\overline{AB}$. Точките E и F се соодветно средини на страните AC и AB. Симетралата l на AC ја сече AB во точката K, а правата низ B паралелна со KC ја сече AC то точката L. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ACP$, каде P е произволна точка од отсечката BF. Отсечките BH и CP се сечат во точката J, а правите FJ и l се сечат во точката M. Ако W е пресечната точка на правите FL и l, докажи дека $\overline{AW}=\overline{PW}$ ако и само ако точките B,E,F и M лежат на една кружница.



Решение. Нека W' е центарот на впишаната кружница на $\triangle ACP$, а L' е пресекот на правата FW' и страната AC. Бидејќи точките A,F,C и подножјето T на нормалата повлечена од A кон PC лежат на кружница со дијаметар AB, добиваме дека $\measuredangle PAT=\measuredangle PCF$. Бидејќи $\overline{AC}=\overline{BC}$ и F е средина на AB, добиваме дека $\measuredangle HAF = \measuredangle HBF$, па затоа $\measuredangle PBJ=\measuredangle HCJ$. Од последното равенство и од равенството $\measuredangle PJB=\measuredangle HJC$ следува дека триаголниците PBJ и HCJ се слични.

За подножјата X и Y на нормалите повлечени од J соодветно кон FP и FC важи $\frac{\overline{XJ}}{\overline{JY}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CH}}$. Ако S е подножјето на нормалата повлечена од W' кон AP, тогаш $\overline{HC}=2\overline{W'S}$ и затоа важи

$$\overline{BP}=\overline{BF}-\overline{FP}=\overline{AF}-(\overline{PF}-\overline{FS})=\overline{AF}-(\overline{AS}-\overline{FS})=2\overline{FS}.$$

Значи, $\frac{\overline{XJ}}{\overline{JY}}=\frac{\overline{FS}}{\overline{W'S}}$, па затоа $\triangle JXF \sim \triangle FSW'$, т.е. $\measuredangle JFX=\measuredangle FW'S$. Од $W'S \parallel CF$ наоѓаме $\measuredangle CFW''=\measuredangle FW'S$, па затоа $\measuredangle JFX=\measuredangle CFW'$. Сега од равенствата

$$\measuredangle PFC=\measuredangle JFL'=\measuredangle JFW'=\measuredangle MEL'=90^\circ$$

следува дека точките E и F лежат на кружница со дијаметар ML'.

Нека сега $\overline{AW}=\overline{PW}$. Тогаш $\overline{CW}=\overline{AW}=\overline{PW}$, па затоа W е центар на кружницата опишана околу $\triangle APC$. Центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е ортоцентар за $\triangle AKC$, па затоа $AO\perp KC$. Но, $BL \parallel KC$, т.е. $AO \perp BL$ и тогаш $\measuredangle ABL+\measuredangle BAO=90^\circ$. Бидејќи A,F,O и E лежат на една кружница, важи $\measuredangle BAO=\measuredangle MEF$ и наоѓаме

$$\measuredangle FBL+\measuredangle FEL=\measuredangle ABL+\measuredangle MEF+90^\circ=180^\circ.$$

Според тоа, точките F,B,M,L и E лежат на една кружница.

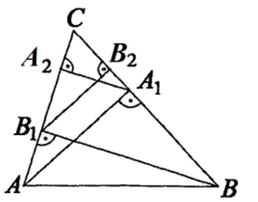
Обратно, ако B,E,F и M лежат на една кружница, тогаш бидејќи F и E лежат на кружница со дијаметар ML' добиваме дека $\measuredangle MBL'=90^\circ$. Лесно се гледа дека $\measuredangle MBK=\measuredangle MEF=\measuredangle BAO$, па затоа $BM\parallel AO$. Значи, $AO\perp BL'$, па затоа $\overline{BL'}=\overline{BL}$, т.е. $L'=L$ и $W'=W$.

93. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ACB=60^\circ$. Низата точки $A_0,A_1,...,A_{2006}$ е определена со: $A_0=A$, A_1 е подножјето на нормалата повлечена од A_0 кон правата BC, A_2 е подножјето на нормалата повлечена од A_1 кон правата AC итн. A_{2006} е поднокето на нормалата повлечена од A_{2005} кон правата AC. Аналогно е дефинирана низата $B_0,B_1,...,B_{2006}$: $B_0=B$, B_1 е подножјето на нормалата повлечена од B_0 кон правата AC итн. Докажи, дека правата $A_{2006}B_{2006}$ е тангента на впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

Решение. Последователно имаме $\overline{CA_1}=\frac{1}{2}\overline{CA_0}$, $\overline{CA_2}=\frac{1}{4}\overline{CA_0}$ итн. Јасно,

$$\overline{CA_{2006}}=\frac{1}{2^{2006}}\overline{CA_0}=\frac{1}{2^{2006}}\overline{CA}$$



и аналогно $\overline{CB_{2006}}=\frac{1}{2^{2006}}\overline{CB}$. Од обратната теорема на Талес следува дека $A_{2006}B_{2006}\parallel AB$, при што важи $\overline{A_{2006}B_{2006}}=\frac{1}{2^{2006}}\overline{AB}$. Правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако четириаголникот $ABB_{2006}A_{2006}$ е тетивен. Последното последователно е еквивалентно со

$$\overline{AB}+\overline{A_{2006}B_{2006}}=\overline{AA_{2006}}+\overline{BB_{2006}}$$

$$\overline{AB}+\frac{\overline{AB}}{2^{2006}}=\frac{(2^{2006}-1)(\overline{AC}+\overline{BC})}{2^{2006}}$$

$$\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

94. Дали може рамностран триаголник со страна 3 да се разбие на 2003 триаголници, такви што на секој од нив должините на страните му се поголеми од 1.

Решение. Ќе направиме конструкција која и ќе биде доказ дека такво разбивање е можна.

Нека A,B и $C=C_\circ$ се темиња на триаголникот. На отсечката AB ќе одбереме точки K и L така што $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LA}$. Нека правите k и l се нормални на правата AB и минуваат низ K и L соодветно. Точката C_1 е средна точка на отсечката $BC_\circ$. Точките $C_n, n\in\mathbb{N}$, $n>1$ ги определуваме на следниот начин:

$$C_{2n}=k\cap AC_{2n-1},\ C_{2n+1}=l\cap BC_{2n},$$

за $n \geq 1$. Ќе покажеме дека триаголниците

$$\triangle AC_{2n}C_{2n+1},\ 0 \leq n \leq 1000,\ \triangle BC_{2n-1}C_{2n},\ 1 \leq n \leq 1001 \text{ и } \triangle ABC_{2002}$$

го даваат бараното разбивање.

Да забележиме дека

$$\overline{C_iC_{i+1}} > \overline{KL} = 1,\ i = 1, 2, \dots .$$

При тоа:

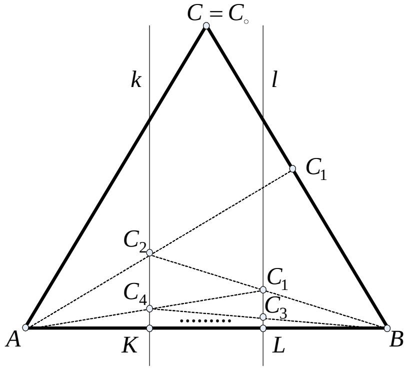
а) За триаголникот $AC_1C_\circ$ имаме:

$\overline{AC} = 3$, $\overline{C_1C_\circ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{3}{2}$ и $\overline{AC_1} > \overline{KL} = 1$.

б) За триаголникот $\triangle BC_2C_1$ имаме:

$$\overline{BC_2} > \overline{AL} = 1,\ \overline{BC_1} = \frac{1}{2}\overline{BC_\circ} = \frac{3}{2} \text{ и}$$

$$\overline{C_2C_1} > \overline{KL} = 1$$



в) За триаголниците $\triangle AC_{2n}C_{2n+1}$ имаме:

$$\overline{AC_{2n}} > \overline{AK} = 1,\ \overline{AC_{2n+1}} > \overline{AL} = 2 \text{ и } \overline{C_{2n}C_{2n+1}} > \overline{KL} = 1,\ 1 \leq n \leq 1001$$

г) За триаголниците $\triangle BC_{2n-1}C_{2n}$ имаме:

$$\overline{BC_{2n-1}} > \overline{AL} = 1,\ \overline{BC_{2n}} > \overline{AK} = 2 \text{ и } \overline{C_{2n-1}C_{2n}} > \overline{KL} = 1,\ 1 \leq n \leq 1000$$

д) За триаголникот $\triangle ABC_{2002}$ имаме:

$$\overline{AB} = 3,\ \overline{AC_{2002}} > \overline{AL} = 1 \text{ и } \overline{BC_{2002}} > \overline{BK} = 2 .$$

Според тоа, сите триаголници го исполнуваат условот од задачата.

2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Над дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ конструирани се рамнострани триаголници ACB' и BDC' такви, што B и B' се од една иста страна на AC, а C и C' се од една иста страна на BD. Определи го збирот $\measuredangle BAD + \measuredangle CDA$, ако е познато дека $\overline{B'C'} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Решение. Да конструираме рамностран $\triangle ADM$ така, што M и C се од иста страна на AD. Тогаш $\triangle MAB' \cong \triangle DAC$ и $\triangle MDC' \cong \triangle ADB$ (докажи!). Според тоа, $\overline{MB'} = \overline{CD}$ и $\overline{MC'} = \overline{AB}$, па затоа $\overline{B'C'} = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{MB'} + \overline{MC'}$. Последното значи, дека $M \in B'C'$. Тогаш

$$\measuredangle BAD + \measuredangle CDA = \measuredangle C'MD + \measuredangle B'MA = 180^\circ - \measuredangle AMD = 120^\circ .$$

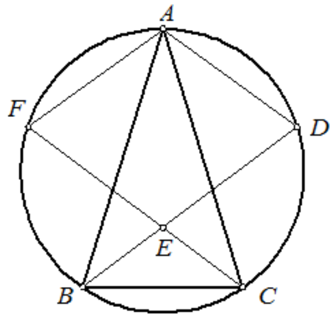
2. Нека k е опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник $\triangle ABC$ со основа BC. Нека E е пресечната точка на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Нека D и F се пресечните точки на симетралите на аглите во темињата B и C со k соодветно. Докажи дека $EDAF$ е ромб.

Решение. Нека

$$\alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB$$

и нека $\gamma = \measuredangle CAB$. Тогаш, бидејќи BD е симетрала на $\measuredangle CBA$ и CF е симетрала на $\measuredangle BCA$ следува дека:

$$\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle BCE = \measuredangle ACE$$



Значи $\measuredangle CED = \alpha$ и оттука $\measuredangle BEF = \alpha$. Но, $\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = \alpha$ како агли над ист кружен лак, па $\measuredangle CFA = \alpha = \measuredangle CED$, од каде $FA \| ED$. Аналогно $EF \| AD$. Сега

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \frac{\alpha}{2} \text{ и } \measuredangle BCF = \measuredangle BAF = \frac{\alpha}{2}$$

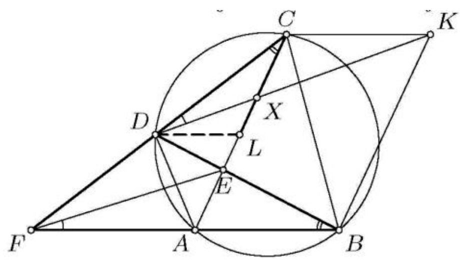
од каде добиваме

$$\measuredangle FAC = \measuredangle FAB + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma \text{ и } \measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma .$$

Значи, $\measuredangle FAC = \measuredangle DAB$. Сега, бидејќи и $\measuredangle ABD = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ACF$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ следува дека $\triangle ACF \cong \triangle ABD$ па $\overline{AF} = \overline{AD}$, што значи дека $EDAF$ е ромб.

3. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ чии дијагонали се сечат во точката E, а полуправите BA и CD се сечат во точката F. Точката K е таква што $ABKC$ е паралелограм. Докажи дека $\sphericalangle CDK = \sphericalangle AFE$.

Решение. Со X да ја означиме пресечната точка на правите AC и DK. Нека L е точката на отсечката AC таква што $DL \| CK \| AB$. Триаголниците DLC и FDB се слични бидејќи $\measuredangle DFB = \measuredangle LDC$ и $\measuredangle DCL = \measuredangle FDB$. Сега од равенствата

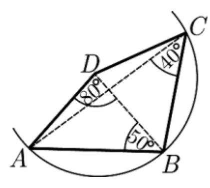


$$\frac{\overline{LX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}$$

следува дека и триаголниците DXC и FEB се слични, па затоа $\measuredangle CDX = \measuredangle BFE$.

4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој важи: $\measuredangle ABD = 50^\circ$, $\measuredangle ADB = 80^\circ$, $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и $\measuredangle DBC = \measuredangle BDC + 30^\circ$. Определи го $\measuredangle DBC$.

Решение. Според условите на задачата добиваме дека $\measuredangle BAD = 50^\circ$, односно триаголникот ABD е рамнокрак. Нека k е кружницата со центар D и радиус $\overline{DA}$. Јасно е дека $B \in k$. Бидејќи $\measuredangle ADB = 80^\circ$, $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и притоа $\measuredangle ADB$ е централен агол над лакот AB, следува дека $C \in k$. Значи и триаголникот BCD е рамнокрак. Од условите на задачата имаме:



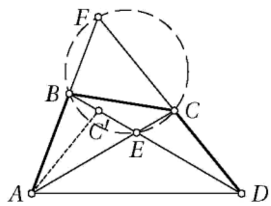
$$180^\circ = \measuredangle DBC + \measuredangle DCB + \measuredangle BDC = \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC$$

од каде што $\measuredangle BDC = 40^\circ$, односно $\measuredangle DBC = 70^\circ$.

5. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ чии дијагонали AC и BD се сечат во точката P, а продолженијата на страните DA и CB се сечат во точката Q. Точката E е средина на страната AB. Докажи дека ако PQ е нормална на AC, тогаш PE е нормална на BC.

Решение. Нека кружницата опишана околу $\triangle APQ$ ја сече BC во точката X (направи цртеж). Тогаш $\measuredangle AXQ = \measuredangle APQ = 90^\circ$. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle PAQ = \measuredangle PBQ$. Понатаму, четириаголникот $APXQ$ е тетивен, па затоа $\measuredangle PAQ = \measuredangle PXB$. Од последните две равенства следува $\measuredangle PBQ = \measuredangle PXB$, што значи дека $\triangle PBX$ е рамнокрак и точката P лежи на симетралата на BX. Бидејќи E е средина на хипотенузата AB во правоаголниот $\triangle AXB$, добиваме дека E лежи на симетралата на BX и затоа PE се совпаѓа со симетралата на BX. Сега тврдењето следува од фактот дека точките B, X и C лежат на една права.

6. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DE}$ ако и само ако $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$.



Решение. Нека C' е точка на полуправата EB таква што $\overline{EC'} = \overline{EC}$. Од складноста на триаголниците AEC' и DEC следува $\overline{AC'} = \overline{DC} = \overline{AB}$, но $C' \not\equiv B$, па затоа

$$180^\circ = \measuredangle ABD + \measuredangle AC'D = \measuredangle ABD + \measuredangle ACD.$$

Тоа значи дека полуправите AB и DC се сечат во некоја точка F (бидејќи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD > 180^\circ$) и дека четириаголникот $BEFC$ е тетивен. Сега

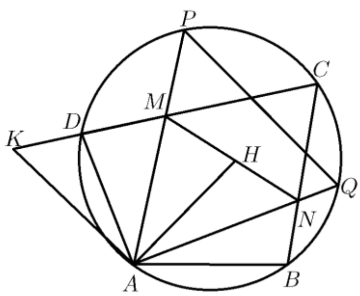
$$\measuredangle EFA = \measuredangle ECB = \measuredangle EAF,$$

па затоа $\overline{EF} = \overline{EA} = \overline{ED}$, т.е. E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADF$. Конечно,

$$2\measuredangle AFD = \measuredangle AED = \measuredangle BEC = 180^\circ - \measuredangle AFD,$$

па значи $\measuredangle AFD = 60^\circ$ и $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$.

7. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и точките M и N лежат на страните CD и BC и се такви што $\overline{MN} = \overline{BN} + \overline{DM}$. Правите AM и AN по вторпат ја сечат опишаната кружница околу $ABCD$ во точките P и Q, соодветно. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle APQ$ лежи на отсечката MN.



Решение. Конструираме точка $K \in MD$ така што $\overline{DK} = \overline{BN}$ и D лежи меѓу M и K. Тогаш од $\overline{DK} = \overline{BN}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\measuredangle ABN = \measuredangle ADK$ следува дека $\triangle ADK \cong \triangle ABN$, па затоа $\overline{AN} = \overline{AK}$. Оттука и од $\overline{MK} = \overline{MN}$ следува дека

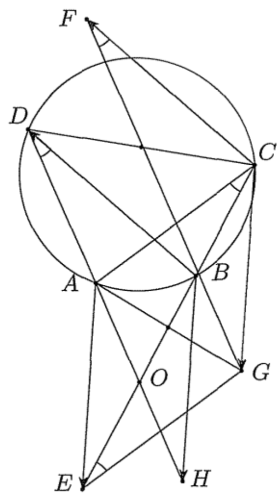
$\triangle AMK \cong \triangle AMN$, па затоа $\measuredangle AMK = \measuredangle AMN$.

Нека H е точка на MN, за која $\overline{MH} = \overline{MD}$. Тогаш точките D и H се симетрични во однос на AM и затоа $\measuredangle APD = \measuredangle APH$ и $DH \perp AP$. Но, $\measuredangle APD = \measuredangle APB = AD = AB$, што значи дека точките P, H и B лежат на една права. Аналогно се докажува дека $QH \perp AP$ и Q, H и D лежат на една права. Јасно, од досега изнесеното следува дека точката H е ортоцентар на $\triangle APQ$.

8. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O. Точката $H \in AB$ е таква, што $CH \perp AB$. Точката P лежи на правата CH и важи $\frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} = \frac{1}{3}$, при што H е меѓу P и C. Точката $Q \in PB$ е таква што четририаголникот $PACQ$ е тетивен. Докажи дека правата AQ ја полови отсечката CO.

Решение. Нека M е средината на AC и нека точката N е таква што A е средина на NC (направи цртеж). Триаголниците BHC и OMC се слични. Освен тоа, $\frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} = \frac{1}{3} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MN}}$, па затоа $\triangle BCP \sim \triangle OCN$. Оттука добиваме $\measuredangle QAC = \measuredangle QPC = \measuredangle ONC$ и затоа $AQ \,||\, ON$. Сега AQ е средна линија за $\triangle CON$, од каде следува дека AQ ја полови CO.

9. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката E е симетрична на точката B во однос на пресекот на правите AD и BC, точката F е симетрична на точката B во однос на средината на страната CD и точката G е симетрична на точката A во однос на средината на отсечката CE. Докажи, дека четириаголникот $EFGC$ е тетивен.



Решение. Нека H е симетричната точка на A во однос на пресечната точка на AD и BC. Тогаш $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD}$. Оттука следува, дека триаголниците FCG и BHD се складни. Според тоа, $\measuredangle CFG = \measuredangle BDH = \measuredangle ACB = \measuredangle CEG$ ($AEGC$ е паралелограм), т.е. точките E, F, G и C лежат на една кужница.

Забелешка. Задачата може да се реши со користење на синусната теорема. Задачата исто така може да се реши и ако се конструира средната линија низ O во $\triangle DBE$ и да се искористи сличност.

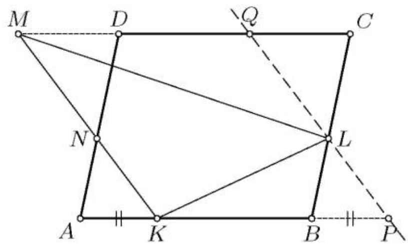
10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека M е произволна точка од страната AB, а N е средината на страната AC. Со P и Q да ги означиме подножните точки на нормалите повлечени од точката A кон правите MC и MN, соодветно. Докажи, дека кога M се менува, тогаш центарот на опишаната кружница околу $\triangle PQN$ лежи на постојана права.

Решение. Во точката C повлекуваме права l паралелна на AB и нека K е подножјето на нормалата повлечена од A кон правата l, направи цртеж. Точките A, K, P и C лежат на иста кружница. Да означиме $\measuredangle NKP = \measuredangle NPK = \alpha$. Тогаш $\measuredangle KNP = 180^\circ - 2\alpha$, па затоа $\measuredangle KAP = \frac{1}{2}\measuredangle KNP = 90^\circ - \alpha$, т.е. што значи

$$\measuredangle MAP = 90^\circ - \measuredangle KAP = \alpha .$$

Оттука и од тетивниот четириаголник $AMPQ$ добиваме $\measuredangle MQP = \alpha$. Според тоа, точките P, Q, K и N лежат на иста кружница, што значи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle PQN$ лежи на симетралата на KN, која е постојана права.

11. Даден е паралелограм *ABCD*. На страните *AB* и *BC* и продолжинието на страната *CD* преку темето *D* избрани се точки *K, L* и *M*, соодветно, така што $\overline{KL} = \overline{BC}, \overline{LM} = \overline{CA}$ и $\overline{MK} = \overline{AB}$. Отсечката *KM* ја сече отсечката *AD* во точката *N*. Докажи дека $LN \parallel AB$.

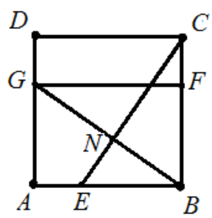


Решение. Нека правата низ точката *L* паралелна на правата *KM* ги сече правите *AB* и *CD* во тачките *P* и *Q*, соодветно. Висинитее во триаголниците *BCA* и *KLM* се еднакви, што значи дека растојанието меѓу правите *MK* и *PQ* е еднакво на растојанието меѓу правите *AB* и *CD*. Според тоа, овие четири прави формираат ромб *KPQM*, па затоа $\overline{KP} = \overline{MK} = \overline{AB}$, т.е. $\overline{BP} = \overline{AK}$. Бидејќи заради паралелноста

$$\measuredangle BPL = \measuredangle AKN \text{ и } \sphericalangle PBL = \sphericalangle KAN ,$$

добиваме дека $\triangle AKN \cong \triangle BPL$. Отука следува $\overline{BL} = \overline{AN}$, т.е. $LN \parallel AB$.

12. На страните AB и BC на квадратот $ABCD$ дадени се точки E и F, соодветно, такви што $\overline{BE} = \overline{BF}$. Нека BN е висината во триаголникот BCE. Докажи дека триаголникот DNF е правоаголен.

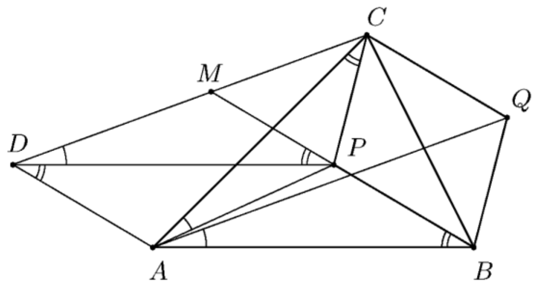


Решение. Нека G е пресечната точка на AD и BN. Тогаш правоаголните триаголници ABG и BCE се складни ($\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\measuredangle ABG = 90^\circ - \measuredangle NBC = \measuredangle BCN = \measuredangle BCE$). Значи, $\overline{AG} = \overline{BE} = \overline{BF}$, па затоа $\overline{GD} = \overline{FC}$. Од $\measuredangle GDC = \measuredangle GNC = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $GNCD$ е тетивен, а од $\overline{GD} = \overline{FC}$, следува дека $GFCD$ е правоаголник. Значи, $\measuredangle GFC = 90^\circ$ и како $\measuredangle GNC = 90^\circ$ добиваме дека петаголникот $GNFCD$ е впишан во кружница со дијаметри GC и DF. Затоа, $\measuredangle DNF = 90^\circ$, т.е. триаголникот DNF е правоаголен.

13. Точката P е внатрешна за $\triangle ABC$ и важи $\measuredangle ABP = \measuredangle PCA$. Точката Q е таква што четириаголникот $PBQC$ е паралелограм. Докажи дека $\measuredangle QAB = \measuredangle CAP$.

Решение. Нека точката D е таква што четириаголникот $BPDA$ е паралелограм. Тогаш триаголниците ABQ и DPC се складни. Според тоа,

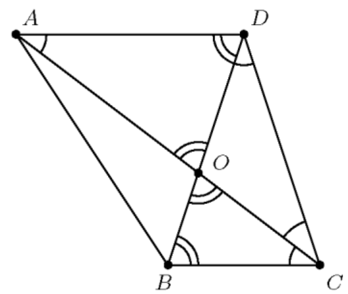
$$\measuredangle QAB = \measuredangle CDP .$$



Нека M е пресечната точка на BP и DC. Бидејќи правите AD, BP и CQ се паралелни, важи $\measuredangle ABP = \measuredangle DPM = \measuredangle PDA$. Од условот имаме $\measuredangle ABP = \measuredangle PCA$, па затоа $\measuredangle PCA = \measuredangle PDA$, што значи дека точките A, P, C и D лежат на иста кружница. Затоа, $\measuredangle CAP = \measuredangle CDP$, што значи дека $\measuredangle QAB = \measuredangle CAP$.

14. Страните BC и AD на четириаголникот $ABCD$ се паралелни, а дијагоналите му се сечат во точката O. АКо $\overline{CD} = \overline{AO}$, $\overline{BC} = \overline{OD}$ и CA е симетрала на аголот BCD, определи го аголот ABC.

Решение. Од $BC \| AD$ следува дека $\measuredangle BCO = \measuredangle CAD$, што значи дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AO} = \overline{CD} = \overline{AD}$, т.е. $\triangle AOD$ е рамнокрак. Тогаш $\measuredangle ADO = \measuredangle AOD$ и повторно од $BC \| AD$ наоѓаме $\measuredangle CBO = \measuredangle COB$, па затоа $\overline{BC} = \overline{CO}$. Тогаш $\overline{DO} = \overline{CO} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle COD$ е рамнокрак.



Ако $\measuredangle BCO = \alpha$, тогаш

$$\measuredangle CBO = \measuredangle COB = 2\measuredangle OCD = 2\alpha$$

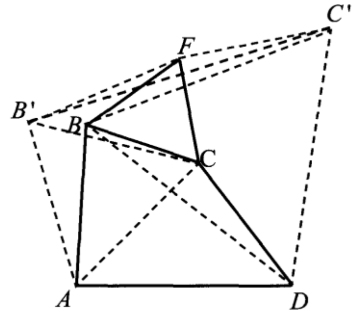
и од $\triangle COB$ наоѓаме $\alpha = 36^\circ$. Според тоа, $\triangle BCD$ е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BD}$, т.е. $\triangle ABD$ е рамнокрак. Тогаш

$$\measuredangle ABD = \tfrac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ ,$$

па затоа $\measuredangle ABC = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$.

15. На дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ACB' и BDC' така што темињата B и B' се во иста полурамнина во однос на дијагоналата AC, а C и C' се во иста полурамнина во однос на дијагоналата BD. Притоа важи $\overline{B'C'} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Определи го збирот

$$\measuredangle BAD + \measuredangle CDA .$$



Решение. Конструираме рамностран триаголник BCF како што е прикажано на цртежот десно. Тогаш

$$\measuredangle FBC = 60^\circ = \measuredangle C'BD$$

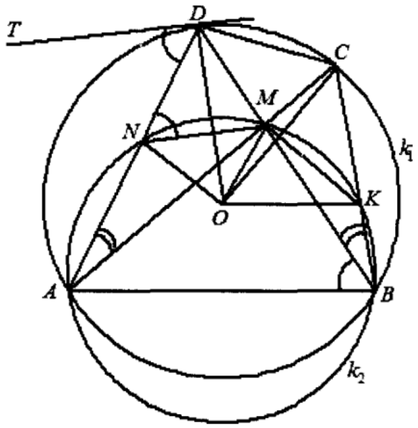
и затоа $\measuredangle FBC' = \measuredangle CBD$. Ако искористиме дека $\overline{BF} = \overline{BC}$ и $\overline{BC'} = \overline{BD}$, заклучуваме дека $\triangle BFC' \cong \triangle BCD$. Оттука $\overline{FC'} = \overline{CD}$ и $\measuredangle FBC' = \measuredangle BCD$. Аналогно,ноѓаме $\overline{B'F} = \overline{AB}$ и $\measuredangle B'FC = \measuredangle ABC$. Сега од $\overline{B'C'} = \overline{AB} + \overline{CD}$ следува $\overline{B'C'} = \overline{B'F} + \overline{FC'}$ и затоа точката F лежи на отсечката $B'C''$. Но, тогаш

$$\measuredangle BCD + \measuredangle ABC = \measuredangle BFC' + \measuredangle B'FC = 240^\circ,$$

па затоа $\measuredangle BAD + \measuredangle CDA = 120^\circ$.

16. Даден е четириаголник $ABCD$ кој е вписан во кружница со центар O и чиј пресек на дијагоналите е точката M. Опишаната кружница околу $\triangle ABM$ ги сече страните BC и AD во точките K и N, соодветно. Докажи дека четириаголниците $NOMD$ и $KOMC$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека k_1 и k_2 се опишаните кружници околу четириаголникот и $\triangle ABM$, соодветно. Имаме $\measuredangle CAD = \measuredangle DBC$ како периферски агли над тетивата CD во кружницата k_1. Но, овие агли се периферски агли над тетивите MN и MK во кружницата k_2, па затоа $\overline{MN} = \overline{MK}$. Освен тоа $\overline{OD} = \overline{OC}$ како радиуси во k_1. Според тоа, четириаголниците $NOMD$ и $KOMC$ имаат еднакви дијагонали. Ќе докажеме дека овие дијагонали се по парови заемно нормални. Нека TD е тангентата на k_1 во точката D. Тогаш $\measuredangle ADT = \measuredangle ABD$,



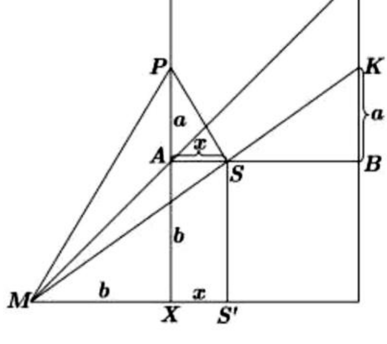
соодветно како периферски агол над тетивата AD и аголот меѓу оваат тетива и тангентата во точката D. Од друга страна $\measuredangle ABD = \measuredangle MND$, бидејќи четириаголникот $ABMN$ е вписан во k_2. Значи, $\measuredangle ADT = \measuredangle MND$, па затоа $TD \| MN$. Последното значи дека $MN \perp OD$. На иста начин докажуваме дека $MK \perp OC$. Сега тврдењето на задачата следува од формулата за плоштина на четириаголник со заемно нормални дијагонали.

17. Во квадрат *ABCT, K* и *P* се средни точки на страните *BC* и *AT* соодветно. На правата *AC* е избрана точка *M*, таква што *A* е меѓу *M* и *C*. Правата *MK* ја сече страната *AB* во точка *S*. Докажи дека аглите *MPA* и *SPA* се еднакви.

Решение. Имаме

$$(b+x):b = (2a+b):(a+b)$$

$$b^2 + ba + x(a+b) = 2ab + b^2$$

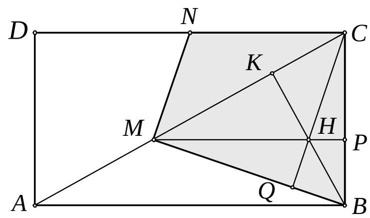


$x = \frac{ab}{a+b}$;

$x : a = b : (a+b)$

Според тоа, триаголниците MXP и SAP се слични, од каде следува дека $\measuredangle MPA = \measuredangle SPA$.

18. Во правоаголникот $ABCD$ повлечена е нормала BK на дијагоналата AC ($K \in AC$). Точките M и N се средини на AK и CD соодветно. Докажи дека $BMNC$ е тетивен четириаголник.



Решение. Ако $P \in BC$, таква што $MP \parallel AB$, тогаш MP е висина на $\triangle BMC$. Ако $\{H\} = KB \cap MP$, тогаш H е ортоцентар на $\triangle BMC$ и $CH \perp MB$. Нека $\{Q\} = CH \cap MB$. Бидејќи M е средина на AK и $MH \parallel AB$, MH е средна линија на $\triangle ABK$ па затоа

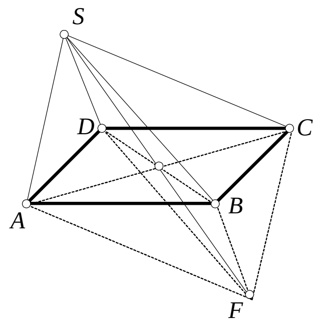
$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{DC} = \overline{NC}.$$

Значи $MHCN$ е паралелограм, па според тоа $MN \parallel QC$. Конечно,

$$\measuredangle NMB = \measuredangle CQB = 90^\circ, \text{ т.е. } \measuredangle NMB = \measuredangle NCB = 90^\circ,$$

од каде што следува дека $MBCN$ е тетивен (збирот на спротивните агли е 180°).

19. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка S (точката S не мора да лежи во рамнината на правоаголникот). Дали растојанијата од точката S до темињата на правоаголникот може во некој редослед да бидат еднакви на 1, 3, 5 и 7.



Решение. Нека за правоаголникот $ABCD$ точката S е таква да растојанијата на точката до темињата на правоаголникот по некој редослед се еднакви на 1, 3, 5, 7. Ќе ја пресликаме точката S, во однос на централна симетрија со центар пресекот на дијагоналите на правоаголникот E, во точка F. Тогаш четириаголниците $AFCS$ и $BFDS$ имаат дијагонали кои се преполовуваат, па оттука истите се паралелограми. Од равенството за паралелограм ($2(a^2+b^2) = d_1^2 + d_2^2$ каде a и b се страни на паралелограмот, а d_1 и d_2 негови дијагонали) имаме:

$$2(\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2) = \overline{SF}^2 + \overline{AC}^2 \text{ и } 2(\overline{SB}^2 + \overline{SD}^2) = \overline{SF}^2 + \overline{BD}^2.$$

Имајќи во предвид дека $\overline{AC} = \overline{BD}$, како дијагонали на правоаголникот $ABCD$, од горните равенства добиваме

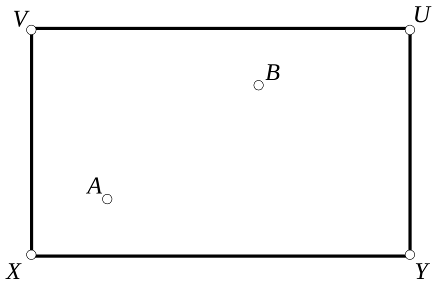
$$\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2.$$

Но сега, за било кој распоред на 1, 3, 5, 7 на местата на $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$, последното равенство не е точно. Навистина

$$1^2+7^2\neq 3^2+5^2, 1^2+5^2\neq 3^2+7^2, 1^2+3^2\neq 5^2+7^2 .$$

Значи растојанијата $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ во ниту еден редослед не можат да бидат 1, 3, 5, 7.

20. На правоаголна маса за билијард се наоѓаат две топки A и B. Како треба да се удри топката A за да таа удри во сите страни на масата и да ја удри топката B (види цртеж).

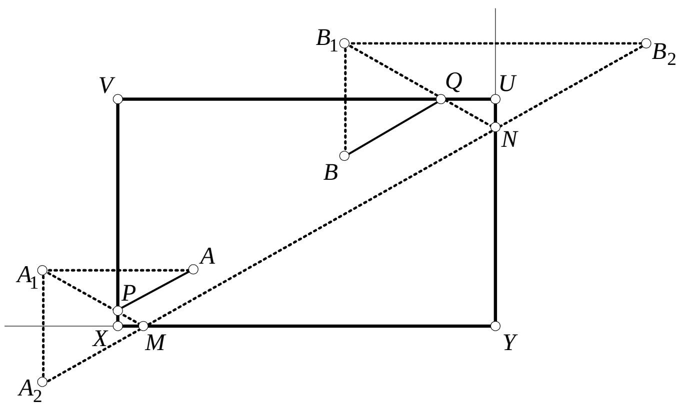


Решение. Со $XYUV$ ќе го означиме правоаголникот (масата за биљард) и

$A_1 = s_{XV}(A)$, $A_2 = s_{XY}(A_1)$,

$B_1 = s_{UV}(B)$ и $B_2 = s_{UY}(B_1)$.

Нека, сега $M = A_2B_2 \cap XY$, $N = A_2B_2 \cap UY$, $P = A_1M \cap XV$ и $Q = B_1N \cap UV$. Јасно,



$$\measuredangle APV = \measuredangle A_1PV = \measuredangle XPM$$

$$\measuredangle PMX = \measuredangle XMA_2 = \measuredangle NMY$$

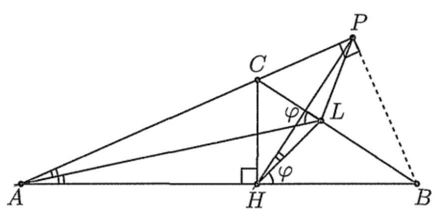
$$\measuredangle MNY = \measuredangle B_2NU = \measuredangle UNQ$$

$$\measuredangle NQU = \measuredangle B_1QV = \measuredangle VQB .$$

Заради сите претходни равенства, топката A треба да се удри на тој начин да ја погоди точката P. Тогаш таа ќе ја удри точката B.

21. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ACB > 90^\circ$. Нека CH е висината повлечена од темето C $(H \in AB)$, а AL е симетралата на $\measuredangle BAC$ $(L \in BC)$. Определи го $\measuredangle ALC$, ако се знае дека $\measuredangle ALC = \measuredangle BHL$.

Решение. Нека $\measuredangle ALC = \measuredangle BHL = \varphi$ и P е подножјето на висината од темето B спуштена на правата AC (P припаѓа на полуправата AC). Четириаголникот $HBPC$ е тетивен и истиот е впи-



шан во кружница со дијаметар BC. Затоа $\measuredangle BHP = \measuredangle BCP$. Тогаш

$$\measuredangle LAP = \measuredangle BCP - \varphi = \measuredangle BHP - \varphi = \measuredangle LHP,$$

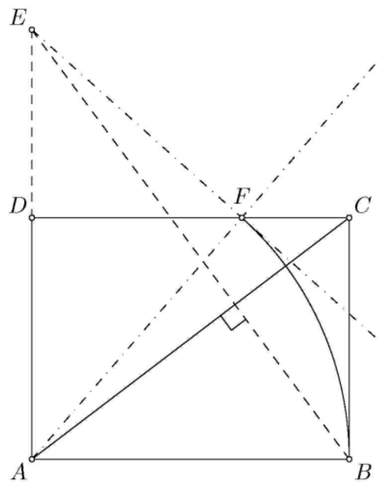
т.е. четириаголникот $AHLP$ е тетивен. Од друга страна, AL е симетрала на $\measuredangle BAC$ и затоа $L \in s_{PH}$. Можни се два случаи:

Прв случај. Ако $s_{PH} \cap BC = L$, тогаш L е центар на кружницата околу $HBPC$, т.е. $\overline{BL} = \overline{LC}$ и $\overline{AB} = \overline{AC}$, што противречи на $\measuredangle ACB > 90^\circ$.

Втор случај. Ако $s_{PH} \equiv BC$, тогаш четириаголникот $HBPC$ е делтоид и $\measuredangle CHL = \measuredangle CPL = \measuredangle BHL = \varphi$, т.е. $\varphi = 45^\circ$.

22. Даден е правоаголникот $ABCD$ чија подолга страна е отсечката AB. Нормалата повлечена од темето B кон дијагоналата AC ја сече правата AD во точка E, а кружницата со центар во точката A и радиус $r = \overline{AB}$ ја сече страната CD во точка F. Докажи дека $AF \perp EF$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$. Од сличноста на правоаголните триаголници EAB и ABC (агли со нормални краци) следува дека $\overline{EA} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BC}$, па затоа $\overline{EA} = \frac{a^2}{b}$. Бидејќи $\overline{AF} = a$, од Питагоровата теорема применета на $\triangle ADF$ следува $\overline{DF}^2 = a^2 - b^2$. Сега од правоаголниот $\triangle EDF$ следува



$$\begin{aligned}\overline{EF}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DF}^2 &= (\tfrac{a^2}{b} - b)^2 + a^2 - b^2 \\ &= \frac{(a^2-b^2)^2}{b^2} + a^2 - b^2 \\ &= \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 + b^2 + a^2 - b^2 \\ &= \frac{a^4}{b^2} - a^2.\end{aligned}$$

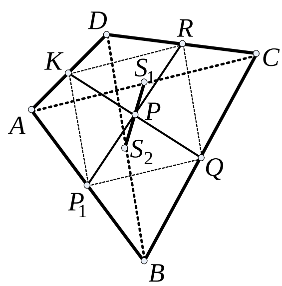
Според тоа,

$$\overline{EF}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{a^4}{b^2} - a^2 + a^2 = \frac{a^4}{b^2} = \overline{AE}^2,$$

што значи дека $\triangle AEF$ е правоаголен, т.е. $AF \perp EF$.

23. Нека S_1 и S_2 се средините на дијагоналите на произволен четириаголник $ABCD$. Докажи отсечката S_1S_2 минува низ пресекот P на средните линии на $ABCD$ и дека P е средина на отсечката S_1S_2.

Решение. Прво ќе докажеме дека средините на на страните на произволен четириаголник се темиња на паралелограм (види цртеж). Од тоа што P_1Q е средна линија на $\triangle ABC$ добиваме $\overline{P_1Q} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $P_1Q \parallel AC$, а од тоа што KR е средна линија на $\triangle ACD$ добиваме $\overline{KR} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $KR \parallel AC$, од што следува $\overline{P_1Q} = \overline{KR}$ и



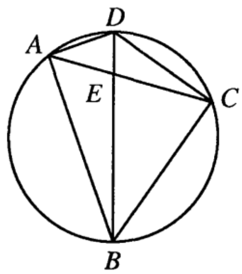
$P_1Q \parallel KR$. Аналогно се докажува дека $\overline{P_1K} = \overline{QR}$ и $P_1K \parallel QR$.

Четириаголникот P_1QRK е паралелограм, па затоа неговите дијагонали се преполовуваат. Од тоа што RS_1 е средна линија на $\triangle ADC$ добиваме дека $\overline{RS_1} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ и $RS_1 \parallel AD$, а пак од тоа што P_1S_2 е средна линија на $\triangle ABD$ се добива $\overline{P_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ и $P_1S_2 \parallel AD$. Значи, добиваме дека $\overline{RS_1} = \overline{P_1S_2}$ и $RS_1 \parallel P_1S_2$. Следствено, четириаголникот $P_1S_2RS_1$ е паралелограм, а бидејќи S_1S_2 и P_1R се негови дијагонали, тие се половат, што значи, P е средина на отсечката S_1S_2 .

24. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$. Ако

$$\overline{AC} = \overline{BC}, \ \overline{AD} = 5, \overline{BE} = 12 \text{ и } \overline{DE} = 3,$$

определи го $\measuredangle BCD$.



Решение. Ако симетралата на CD ја сече BD во точката O , тогаш

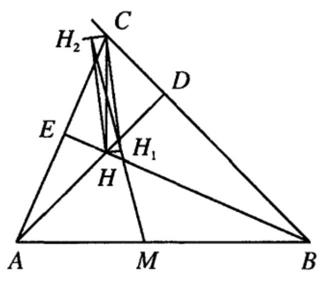
$$\begin{aligned}\measuredangle COD &= 180^\circ - 2\measuredangle ODC = 180^\circ - 2\measuredangle BAC \\ &= \measuredangle ACB = \measuredangle ADO\end{aligned},$$

па затоа $AD \parallel CO$. Тогаш

$$\frac{\overline{OE}}{3} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OE}+3}{5},$$

од каде добиваме $\overline{OE} = \frac{9}{2}$, т.е. O е средина на BC . Но, тоа значи дека $\measuredangle BCD = 90^\circ$.

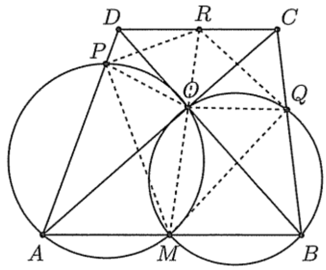
25. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Нека M е средината на AB , а H_1 и H_2 се проекциите на H врз симетралата на внатрешниот и надворешниот агол при темето C , соодветно. Докажи, дека точките M , H_1 и H_2 лежат на една права.



Решение. Нека D и E се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата A и B , соодветно (цртеж десно). Четириаголникот $HDCE$ е тетивен и е впишан во кружница со дијаметар CH . Јасно, точките H_1 и H_2 лежат на истата кружница. Понатаму, овие точки се наоѓаат на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C , па затоа тие се средини на двата лаци DE . Според тоа, правата H_1H_2 е симетрала на отсечката DE .

Од друга страна, четириаголникот $ABDE$ е тетивен и е впишан во кружница со дијаметар AB . Тоа значи дека симетралата H_1H_2 на тетивата DE минува низ центарот на кружницата опишана околу четириаголникот $ABDE$, а тоа е точката M , што значи дека точките M , H_1 и H_2 лежат на една права.

26. Даден е трапез $ABCD\,(AB \,||\, CD)$ со заемно нормални дијагонали и пресечна точка на дијагоналите O. На основата AB е избрана точка M. Опишаните кружници околу $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ по втор пат ги сечат отсечките AD и BC во точките P и Q, соодветно . Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ лежи на средната линија на трапезот $ABCD$.



Решение. Нека правата MO ја сече отсечката CD во точка R, види цртеж. Четириаголниците $AMOP$ и $MBQO$ се тетивни (зошто?). Затоа,

$$\measuredangle BMO = \measuredangle APO \text{ и } \measuredangle BMO = \measuredangle CQO.$$

Понатаму, $ABB \,||\, CD$, па затоа $\measuredangle BMO = \measuredangle DRO$, од каде добиваме

$$\measuredangle BMO = \measuredangle CQO = \measuredangle APO = \measuredangle DRO.$$

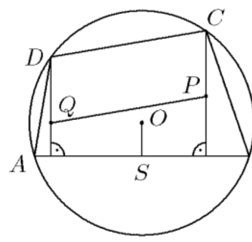
Според тоа, четириаголниците $POED$ и $OQCR$ се тетивни. Имаме

$$\measuredangle MQR = \measuredangle MQO + \measuredangle OQR = \measuredangle MBO + \measuredangle OCR = \measuredangle MBO + \measuredangle OAM = 90^\circ$$

и аналогно $\measuredangle MPR = 90^\circ$. Тоа значи, дека четириаголникот $MQRP$ е тетивен и центарот на опишаната кружница е средината на отсечката MR, која е средна линија на трапезот $ABCD$. Сега тврдењето на задачата следува од тоа што опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ се совпаѓа со опишаната кружница околу четириаголникот $MQRP$.

27. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е тетивен четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

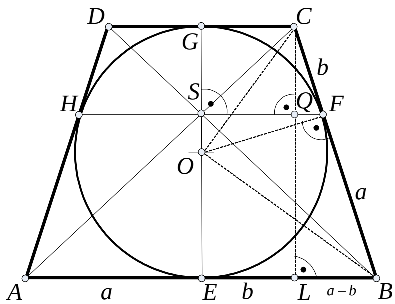


Лема. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник и P и Q се ортоцентрите соодвентно на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, тогаш четириаголникот $PCDQ$ е паралелограм.

Доказ. Од $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$ следува $CP \,||\, DQ$. Ако O е центарот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и S е средината на AB, тогаш важи $2\overline{OS} = \overline{CP}$ (ова својство се докажува ако се искористи дека пресечната точка на CS и OP е тежиштето на триаголникот ABC). Аналогно, $2\overline{OS} = \overline{DQ}$, па затоа $\overline{DQ} = \overline{CP}$. Конечно, од $CP \,||\, DQ$ и $\overline{DQ} = \overline{CP}$ следува, дека $PCDQ$ е паралелограм. ■

Од лемата следува, дека отсечките A_1A_2 и H_2H_1; A_2A_3 и H_3H_2; A_3A_4 и H_4H_3; A_4A_1 и H_1H_4 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

28. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез опишан околу кружницата k и нека E, F, G, H се допирните точки на страните AB, BC, CD, DA со k соодветно. Покажи дека пресекот на правите AC и BD се совпаѓа со пресекот на правите EG и HF.

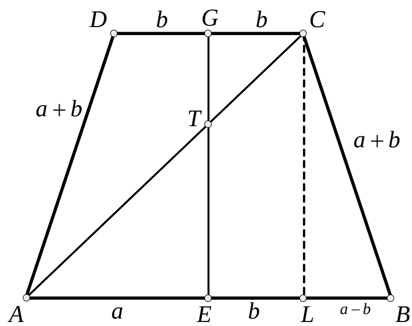


Решение. Нека S е пресекот на отсечките HF и EG, а O е центарот на вписаната кружница во трапезот $ABCD$ (види цртеж). Имаме

$$\triangle SOF \sim \triangle CQF \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SO}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{QF}}{\overline{CF}},$$

$$\triangle CQF \sim \triangle CLB \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{QF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{CB}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Притоа OF е висина на правоаголниот триаголник BCO и затоа $\overline{OF} = \sqrt{ab}$. Затоа добиваме $\overline{SO} = \sqrt{ab}\,\frac{a-b}{a+b}$, додека од $\overline{OE} = \overline{OF}$ и $\overline{SE} = \overline{SO} + \overline{OE}$ следува равенството $\overline{SE} = \frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}$.



Ако T е пресекот на дијагоналата AC на трапезот и отсечката EG (види цртеж), тогаш од $\triangle ATE \sim \triangle ACL$ се добива $\overline{TE} = \frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}$. Значи, добиваме дека отсечките SE и TE се еднакви, од каде што следува дека точките T и S се поклопуваат што требаше и да се докаже.

29. Точките M и N припаѓаат на страната AB на $\triangle ABC$. Тангентите повлечени од M и N на опишаните кружници околу $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ ги сечат отсечките CN и CM во точките P и Q, соодветно. Ако четириаголникот $ABPQ$ е рамнокрак трапез, докажи дека $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Решение. Нека $PQ \cap AC = E$ и $PQ \cap BC = F$, направи цртеж. Тогаш $\measuredangle CEQ = \measuredangle CAM = \measuredangle CMP$, па затоа четириаголникот $CEMP$ е тетивен. Аналогно четириаголникот $CFNQ$ е тетивен. Тогаш $\measuredangle MEQ = \measuredangle PCQ = \measuredangle NFP$, па затоа $EFNM$ е рамнокрак трапез.

Ако $O_1 = AQ \cap ME$ и $O_2 = BP \cap NF$, тогаш $\triangle AMO_1 \sim \triangle QEO_1 \sim \triangle PFO_2 \sim \triangle BNO_2$, па затоа

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{EQ}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{EO_1}}{\overline{FO_2}} = \frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{FN}} = 1.$$

Тогаш, $\triangle AME \cong \triangle BNF$, па затоа $\measuredangle MAE = \measuredangle NBF$, т.е. $\overline{AC} = \overline{BC}$.

30. Даден е трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$, за кој важи $\overline{AD} = 6$, $\overline{DC} = 3$, $\overline{BC} = 12$ и симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AD во точка M таква што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{5}{3}$.

а) Докажи, дека во четириаголникот $ABCD$ може да се впише кружница.

б) Определи ја должината на отсечката OM, каде O е центар на впишаната кружница во члетириаголникот $ABCD$.

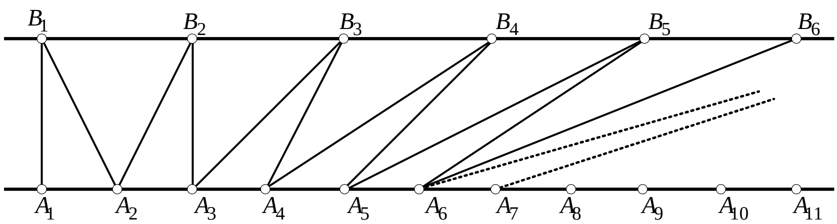
Решение. а) Со N да ја означиме пресечната точка на продолжението на BM и правата CD (направи цртеж). Бидејќи $\measuredangle BNC = \measuredangle ABM = \measuredangle NBC$, важи $\overline{NC} = \overline{BC}$. Според тоа, $\overline{DN} = \overline{NC} - \overline{DC} = 12 - 3 = 9$ и од сличноста на $\triangle DNM$ и $\triangle ABM$ добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{5}{3}$, т.е. $\overline{AB} = 15$. Бидејќи $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 18$, заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ може да се впише кружница.

б) Ако P е пресечната точка на AD и BC, од сличноста на $\triangle DCP$ и $\triangle ABP$ наоѓаме $\frac{\overline{PC}}{\overline{PC}+\overline{CB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$. Од ова равенство добиваме $\overline{PC} = 3$, т.е. $\overline{AB} = \overline{PB}$. Значи, $BO \perp AP$, од што следува дека OM е радисуот на впишаната кружница во члетириаголникот $ABCD$.

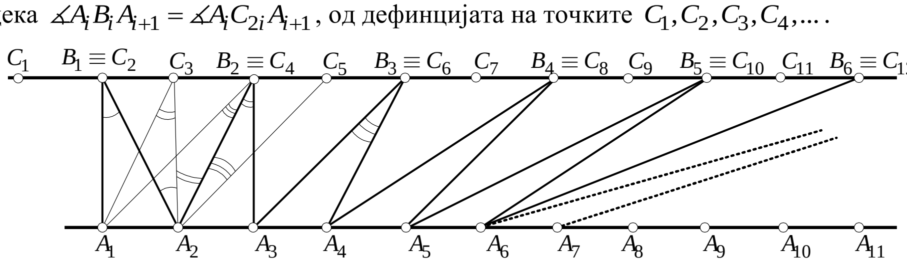
Бидејќи $\overline{AM} = \frac{15}{4}$, од правоаголниот $\triangle AMB$ наоѓаме $\overline{BM} = \frac{15}{4}\sqrt{15}$ и бидејќи AO е симетрала на аголот $\measuredangle BAM$ добиваме $\frac{\overline{OM}}{\overline{BM}-\overline{OM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$. Конечно, од последното равенство добиваме $\overline{OM} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.

31. Дадени се две паралелни прави. На едната се избрани попарно различни точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ такви што $\overline{A_i A_{i+1}} = 1$, а на другата исто така попарно различни точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ такви што $\overline{B_i B_{i+1}} = 2$. Ако $\measuredangle A_1 A_2 B_1 = \alpha$, пресметај го збирот

$$\measuredangle A_1 B_1 A_2 + \measuredangle A_2 B_2 A_3 + \measuredangle A_3 B_3 A_4 + \ldots .$$



Решение. Нека $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$ се точки од правата на која припаѓаат $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$ такви што $\overline{C_i C_{i+1}} = 1$ и $B_i \equiv C_{2i}$ за секој $i = 1, 2, 3, \ldots$. Да забележиме дека $\measuredangle A_i B_i A_{i+1} = \measuredangle A_i C_{2i} A_{i+1}$, од дефинцијата на точките $C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$.



Од друга страна $\measuredangle A_iC_{2i}A_{i+1}=\measuredangle A_1C_{i+1}A_2$, како агли со паралелни краци. Бидејќи $A_1C_{i+1}C_{i+2}A_2$ е параллелограм, добиваме дека $\measuredangle A_1C_{i+1}A_2=\measuredangle C_{i+1}A_2C_{i+2}$ за секој $i=1,2,3,...$.

Според тоа
$\measuredangle A_1B_1A_2+\measuredangle A_2B_2A_3+\measuredangle A_3B_3A_4+....=\measuredangle C_2A_2C_3+\measuredangle C_3A_2C_4+\measuredangle C_4A_2C_5+...=\pi-\alpha$.

32. Даден е паралелограм $ABCD$. Кружницата ω_1 се допира до отсечките AB и AD, а кружницата ω_2 се допира до отсечките BC и CD. Познато е, дека постои кружница, која се допира до правите AD и DC и надворешно ги допира кружниците ω_1 и ω_2. Докажи дека постои кружница, која ги допира правите AB и BC и надворешно ги допира кружниците ω_1 и ω_2.

Решение. Нека ω_1 ги допира AB и AD во точките P_1 и Q_1, а ω_2 ги допира BC и CD во точките P_2 и Q_2. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Кружницата ω ги допира полуправите BA и BC соодветно во точките P и Q ако и само ако $\sqrt{\overline{BP}}=\sqrt{\overline{AB}}\pm\sqrt{\overline{AP_1}}$ за некој избор на знакот.

Доказ. Бидејќи PP_1 е заедничка тангента за ω и ω_1, условот дека таа допира во точките P и P_1 е еквивалентен на $\overline{PP_1}=2\sqrt{rr_1}$, каде r и r_1 се радиусите на ω и ω_1. Лесно се докажува, дека $rr_1=\overline{BP}\cdot\overline{AP_1}$, од каде следува тврдењето на лемата. ■

Од условот на задачата и од лемата следуваат равенствата

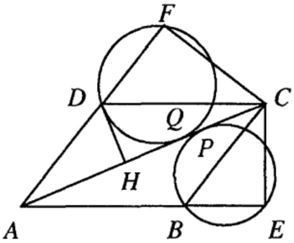
$$\sqrt{\overline{DQ}}=\sqrt{\overline{AD}}\pm\sqrt{\overline{AQ_1}} \text{ и } \sqrt{\overline{DP}}=\sqrt{\overline{CD}}\pm\sqrt{\overline{CP_1}}$$

за некој избор на знаците. Бидејќи $\overline{DQ}=\overline{DP}, \overline{CP_2}=\overline{CQ_2}, \overline{AD}=\overline{BC}$ и $\overline{AB}=\overline{CD}$, добиваме

$$\sqrt{\overline{BC}}\pm\sqrt{\overline{AP_1}}=\sqrt{\overline{AB}}\pm\sqrt{\overline{CQ_2}}\text{, т.е. }\sqrt{\overline{BC}}\pm\sqrt{\overline{CQ_2}}=\sqrt{\overline{AB}}\pm\sqrt{\overline{AP_1}}=d.$$

Сега е доволно да дефинираме точка $P'\in AB$ таква, што $\sqrt{\overline{BP'}}=d$ и да ја примениме лемата за кружницата ω', која се допира до полуправите BA и BC соодветно во точките P' и Q'.

33. Даден е паралелограм $ABCD$ со остар агол при темето A. Точките E и F се подножјата на нормалите повлечени од темето C кон правите AB и AD, соодветно. Кружница минува низ точките D и F и ја допира дијагоналата AC во точка Q, а друга кружница минува низ точките B и E и ја допира QC во точката P која е средина на QC. Ако $\overline{AQ}=1$, определи ја должината на дијагоналата AC.



Решение. Нека DH е нормална на AC $(H\in AC)$. Тогаш $\triangle AHD\sim\triangle AFC$ и $\triangle CHD\sim\triangle AEC$. Оттука следува дека

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC} + \overline{HC} \cdot \overline{AC} = \overline{AF} \cdot \overline{AD} + \overline{AE} \cdot \overline{CD}$$
$$= \overline{AQ}^2 + \overline{AE} \cdot \overline{AB} = \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2.$$

Ако $\overline{QP} = \overline{PC} = x$ имаме

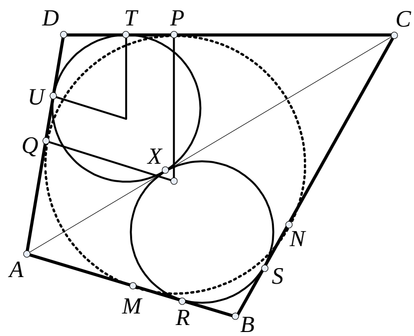
$$(1+2x)^2 = 1+(1+x)^2$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Позитивниот корен на последната равенка е $x = \frac{1}{3}$, па затоа $\overline{AC} = 1+2x = \frac{5}{3}$.

34. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник. Докажи дека:

$a)$ Вписаните кружници во двата триаголника на кои дијагоналата AC го дели четириаголникот се допираат.

$b)$ Допирните точки на двете кружници со страните на четириаголникот се темиња на тетивен четириаголник.



Решение. Нека M, N, P и Q се допирните точки на вписаната кружница во четириаголникот $ABCD$ со страните AB, BC, CD, DA соодветно. Нека вписаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB, BC, CA во точките R, S, X соодветно, а вписаната кружница во триаголникот ACD ги допира страните AC, CD, DA во точките X_1, T, U соодветно.

$a)$ Четириаголникот $ABCD$ е тангенен, па $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$. Од триаголникот ABC добиваме:

$$\overline{AX} = \overline{AC} - \overline{XC} = \overline{AC} - \overline{CS} = \overline{AC} - \overline{CB} + \overline{BS} = \overline{AC} - \overline{CB} + \overline{BR}$$
$$= \overline{AC} - \overline{CB} + \overline{AB} - \overline{AR} = \overline{AC} - \overline{CB} + \overline{AB} - \overline{AX}$$

а оттука добиваме

$$\overline{AX} = \frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{CB}}{2}$$

На сличен начин, од триаголникот ACD, добиваме $\overline{AX} = \frac{\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{CD}}{2}$. Понатаму,

$$\overline{XX_1} = |\overline{AX} - \overline{AX_1}| = |\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AD}+\overline{AC}-\overline{CD}}{2}| = \frac{1}{2}|\overline{AB} + \overline{CD} - \overline{BC} - \overline{AD}| = 0$$

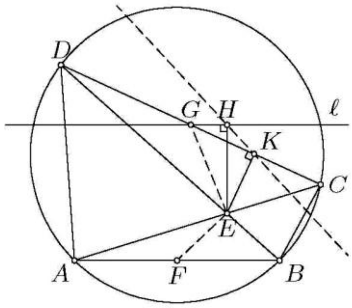
Значи, точките X и X_1 се совпаѓаат.

$b)$ Бидејќи $\overline{BR} = \overline{BS}$, $\overline{BM} = \overline{BN}$, следува дека $RS \parallel MN$. Слично се покажува дека $UT \parallel QP$, $QM \parallel UR$, $PN \parallel TS$. Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, па збирот на спротивните агли е 180°. Бидејќи страните на четириаголникот $RSTU$ се паралелни со страните на $MNPQ$ следува дека $RSTU$ е тетивен.

35. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E. Нека средините на отсечките AB и CD соодветно се точките F

и G, а l е права која минува низ G и е паралелна со AB. Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K. Докажи дека правите EF и HK за заемно нормални.

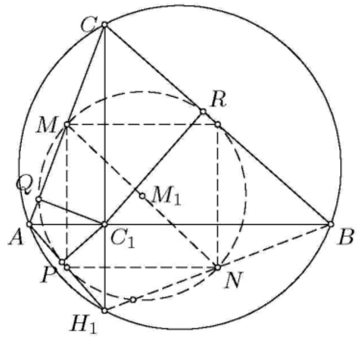
Решение. Нека претпоставиме дека точката K е меѓу точките G и C. Точките E,G,H и K лежат на кружницата со дијаметар EG, па затоа $\measuredangle EHK = \measuredangle EGK$. Бидејќи триаголниците EAB и EDC се слични ($\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ и $\measuredangle EAB = \measuredangle EDC$), заклучуваме дека триаголниците EFB и EGC исто така се слични. Следува дека $\measuredangle EFB = \measuredangle CGE = \measuredangle KHE$, што заедно со $FB \perp HE$ дава $EF \perp KH$.



36. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC, а M средината на AC. Нека C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на AB, а H_1 е симетричната точка на H во однос на AB. Нека P,Q и R соодветно се подножјата на нормалите повлечени од точката C_1 на правите AH_1, AC и CB, а M_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQR. Докажи дека симетричната точка на M во однос на точката M_1 лежи на отсечката BH_1.

Решение. Ќе го користиме следново едноставно тврдење.

Лема. Нека во конвексен тетивен четириаголник $A_1A_2A_3A_4$ дијагоналите се сечат по прав агол во точката X. Ако B_i е средина на страната A_iA_{i+1}, а X_i е подножјето на нормалата повлечена од X кон таа страна ($A_5 = A_1$), тогаш точките $B_i, X_i, i = 1,2,3,4$ лежат на иста кружница.



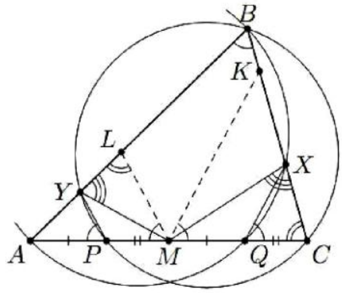
Доказ. Четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ е правоаголник бидејќи $B_1B_2 \parallel B_3B_4 \parallel A_1A_3$ и $B_2B_3 \parallel B_4B_1 \parallel A_2A_4$. Понатаму,

$$\measuredangle B_3XA_3 = \measuredangle A_4A_3A_1 = \measuredangle A_4A_2A_1 = \measuredangle A_1XX_1,$$

па затоа точките B_3, X, X_1 се колинеарни, што значи дека точката X_1 лежи на кружницата над дијаметарот B_1B_3, т.е. на опишаната кружница k околу правоаголникот $B_1B_2B_3B_4$. Аналогно се докажува дека $X_i, i = 2,3,4$ лежат на k. ■

Познато е дека точката H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Според претходната лема точките P,Q,R лежат на кружницата над дијаметарот MN, каде N е средина на отсечката BH_1. Според тоа, точката N е симетрична на точката M во однос на точката M_1, па затоа лежи на BH_1.

37. Точката M е средина на страната AC на $\triangle ABC$. На отсечките AM и CM соодветно се избрани точки P и Q такви, што $\overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Кружницата, опишана околу $\triangle ABQ$ ја сече страната BC во точка $X \neq B$, а кружницата, опишана околу $\triangle BCP$ ја сече страната AB во точка $Y \neq B$. Докажи, дека четириаголникот $BXMY$ е тетивен.



Решение. Од тетивните четириаголници $BCPY$ и $BAQX$ следува дека

$$\measuredangle APY = \measuredangle ABC = \measuredangle CQX .$$

Нека правата низ точката M, паралелна со QX, ја сече правата BC во точката K, а правата низ M, паралелна со PY, ја сече правата AB во точката L. Тогаш

$$\measuredangle AML = \measuredangle ABC = \measuredangle CMK ,$$

па затоа

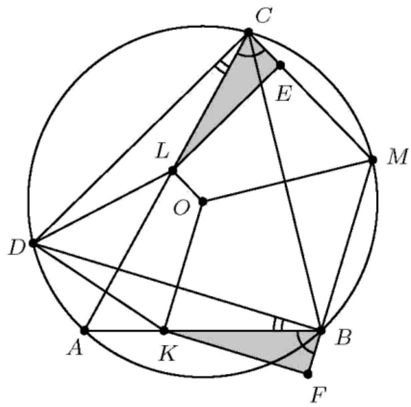
$$\measuredangle ALM = 180^\circ - \measuredangle LAM - \measuredangle AML = 180^\circ - \measuredangle BAC - = \measuredangle ACB .$$

Според тоа, $\triangle MAL \sim \triangle MKS$. Од условот следува

$$\overline{AP} = \overline{AM} - \overline{PM} = \overline{PQ} - \overline{PM} = \overline{MQ}$$

и аналогно $\overline{CQ} = \overline{PM}$. Оттука, $\frac{\overline{AY}}{\overline{YL}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{KX}}{\overline{XC}}$. Тогаш Y и X се соодветни точки во сличните триаголници MAL и MKC. Затоа, $\measuredangle MXC = \measuredangle MYL = \measuredangle MYB$, што значи дека четириаголникот $BXMY$ е тетивен.

38. Даден е $\triangle ABC$ и нека ω е опишната околу него кружница со центар O. Точката M е средина на лакот BC, кој не ја содржи A. Правите низ O, кои се паралелни на MB и MC, ги сечат страните AB и AC соодветно во точки K и L. Ако висината спуштена од темето A кон страната BC ја сече ω во точка N, докажи дека $\overline{NK} = \overline{NL}$.



Решение. Прво ќе докажеме дека $\overline{KB} = \overline{LC}$. Нека F и E се подножјата на нормалите спуштени од K и L соодветно кон MB и MC (цртеж десно).

Имаме $OK \parallel MB$, од каде следува, дека $\overline{KF}$ е растојанието од O до MB. Освен тоа $OL \parallel MC$, од каде следува, дека $\overline{LE}$ е растојанието од O до MC. Бидејќи M е средина на лакот BC важи $\overline{MB} = \overline{MC}$, па затоа растојанијата од O тетивите MB и MC се еднакви, т.е. $\overline{KF} = \overline{LE}$. Од друга страна, четириаголникот $ABMC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle KBF = \measuredangle LCE$.

Од $\overline{KF} = \overline{LE}$ и $\measuredangle KBF = \measuredangle LCE$ следува дека $\triangle KBF \cong \triangle LCE$, па затоа $\overline{KB} = \overline{LC}$. Ако D е средина на лакот BAC, тогаш $\overline{DB} = \overline{DC}$, $\overline{KB} = \overline{LC}$ и $\measuredangle DBA = \measuredangle DCA$, па затоа $\triangle DBK \cong \triangle DCL$. Оттука следува дека $\measuredangle KDL = \measuredangle BDC = \measuredangle BAC$ и $\overline{KD} = \overline{LD}$

Од $\measuredangle KOL = \measuredangle BMC$, следува дека $AKOLD$ е впишан во кружница. Според тоа,

$$\measuredangle AKD = \measuredangle ALD = \measuredangle AOD = \measuredangle B - \measuredangle C,$$

$$\measuredangle KBD = \measuredangle LCD = \tfrac{\measuredangle B - \measuredangle C}{2},$$

од каде следува $\measuredangle KDB = \measuredangle LDC = \frac{\measuredangle B - \measuredangle C}{2}$

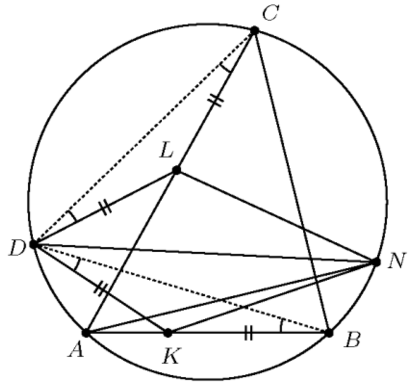
т.е. $\overline{KB} = \overline{KD} = \overline{LD} = \overline{LC}$. Освен тоа, важи

$$\measuredangle NDK = \measuredangle NDB + \measuredangle BDK$$

$$= 90^\circ - \measuredangle B + \tfrac{\measuredangle B - \measuredangle C}{2} = \tfrac{\measuredangle A}{2}$$

$$\measuredangle NDL = \measuredangle NDC + \measuredangle CDL$$

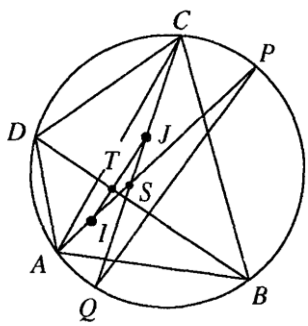
$$= 90^\circ - \measuredangle C - \tfrac{\measuredangle B - \measuredangle C}{2} = \tfrac{\measuredangle A}{2}$$



па затоа $\measuredangle NDK = \measuredangle NDL$. Од $\overline{KB} = \overline{KD} = \overline{LD} = \overline{LC}$ и $\measuredangle NDK = \measuredangle NDL$ следува дека $\triangle NDK \cong \triangle NDL$, па затоа $\overline{NK} = \overline{NL}$.

39. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека со I и J ги означиме центрите центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен ако и само ако точките A, I, J и C лежат на една права или на една кружница.

Решение. Ако точките A, I, J и C лежат на една права, тогаш лесно се докажува дека $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BC} = \overline{CD}$, па затоа четириаголникот $ABCD$ е тангентен. Нека точките A, I, J и C лежат на една кружница. Бидејќи $\measuredangle AIC > \measuredangle AIB$ или $\measuredangle AIC > \measuredangle AID$, добиваме дека $\measuredangle AIC > 90^\circ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle AJC > 90^\circ$, па затоа $\measuredangle AIC + \measuredangle AJC > 180^\circ$. Тоа значи дека точките I и J лежат на иста страна на правата AC. Нека AI и CJ се сечат во точка S и ја сечат опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ во точките P и Q, соодветно. Бидејќи точките P и Q се средини на лаците BCD и BAD соодветно, добиваме дека $PQ \perp BD$. Од друга страна, $\measuredangle SJI = \measuredangle CAI = \measuredangle CQP$, па затоа $IJ \parallel PQ$. Според тоа, $IJ \perp BD$, што значи дека кружниците впишани во $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ се допираат во точка $T \in BD$. Тогаш



$$\overline{DT} = \tfrac{\overline{AD} + \overline{BD} - \overline{AB}}{2} = \tfrac{\overline{BD} + \overline{CD} - \overline{BC}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD},$$

т.е. четириаголникот $ABCD$ е тангентен.

Обратно, нека претпоставиме дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен. Ако $I \in AC$, тогаш $J \in AC$. Нека $I \notin AC$. Од $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$ следува дека кружниците впишани во $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ се допираат во точка од BD. Според тоа, $IJ \perp BD$, па затоа $IJ \parallel PQ$. Но, тоа значи дека $\measuredangle SJI = \measuredangle CQP = \measuredangle CAI$, па затоа четириаголникот $ACJI$ е тетивен.

40. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA во точките C_1, A_1 и B_1, соодветно. Ортогоналните проекции на ортоцентарот на $\triangle A_1B_1C_1$ врз правите AA_1 и BC се точките P и Q, соодветно. Докажи, дека правата PQ ја полови отсечката B_1C_1.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle A_1B_1C_1$ и A_1H_a, B_1H_b и C_1H_c се висините на овој триаголник. Кружницата k со дијаметар A_1H ги содржи точките A_1, H_b, P, H, H_c и Q. Нека AA_1 по втор пат ја сече впишаната кружница во $\triangle ABC$ во точката T (направи цртеж). За аголот над лакот XY ќе ја користиме ознаката XY. Имаме $H_bP = \measuredangle H_bA_1P = \measuredangle C_1A_1T = C_1T$. Освен тоа, $QH_c = \measuredangle QA_1H_c = \measuredangle A_1C_1B_1 = A_1B_1$ (користевме дека QA_1 е тангента). Аналогно, $PH_c = TB_1$ и $H_bQ = C_1A_1$. Од последните равенства следува следува дека четири-аголниците PH_bQH_c и $TC_1A_1B_1$ се слични.

Нека M и N се средините на B_1C_1 и A_1H, соодветно. Имаме

$$\measuredangle MH_bN = 180^\circ - \measuredangle C_1H_bM - \measuredangle NH_bA_1 = 180^\circ - \measuredangle MC_1H_b - \measuredangle NA_1H_b$$
$$= 180^\circ - (\measuredangle H_aC_1A_1 - \measuredangle C_1A_1H_c) = 90^\circ$$

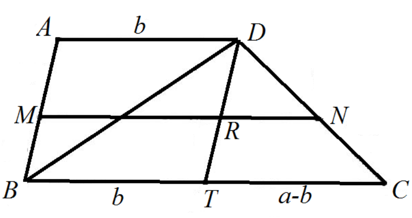
Според тоа, MH_b е тангента на k. Аналогно се докажува дека MH_c е тангента на k. Затоа фигурите PH_bQH_cM и $TC_1A_1B_1A$ се слични. Оттука и од тоа што точките A_1, T и A лежат на една права, следува дека точките Q, P и M лежат на една права.

41. Нека AD и BE се симетрали на внатрешните агли на $\triangle ABC$. Нека x, y, z се растојанијата од точка M, која припаѓа на отсечката DE, до страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи, дека $z = x + y$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $ABCD$ е трапез со должини на основи $\overline{AD} = b$ и $\overline{BC} = a$. Должината на отсечката MN која краците AB и CD ги сели во однос $p:q$ е

$$\overline{MN} = \tfrac{ap+bq}{p+q}.$$



Доказ. Лесно се докажува дека $MN \parallel BC \parallel AD$. Нека $a > b$. Конструираме паралелограм $ABTD$ и нека $R = DT \cap MN$. Од условот имаме

$$\overline{AM} : \overline{MB} = p : q = \overline{DN} : \overline{NC},$$

па затоа бидејќи $\triangle DRN \sim \triangle DTC$ важи

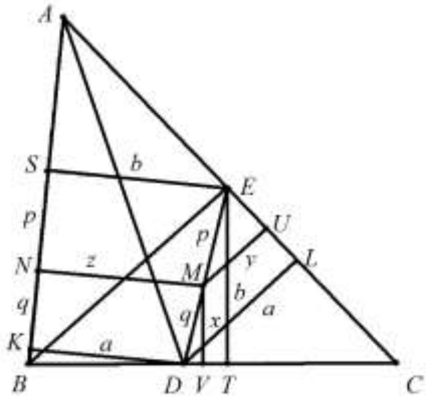
$$\tfrac{\overline{RN}}{\overline{TC}} = \tfrac{p}{p+q}, \text{ т.е. } \overline{RN} = \tfrac{p}{p+q}(a-b).$$

Значи,

$$\overline{MN}=\overline{MR}+\overline{RN}=b+\tfrac{p}{p+q}(a-b)=\tfrac{ap+bq}{p+q}\,.$$

Ако $a=b$, тогаш четириаголникот е паралелограм и тврдењето е точно. ■

Да се вратиме на почетната задача. Нека претпоставиме дека точката M ја дели отсечката ED во однос $p:q$. Нека S и K се подножјата на нормалите повлечени од точките E и D кон страната AB, соодветно.



Бидејќи $MN \parallel ES \parallel DK$ важи $\frac{\overline{SN}}{\overline{NK}}=\frac{p}{q}$.

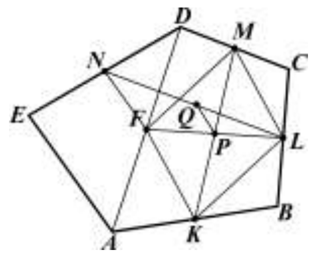
Да означиме $\overline{SE}=b$ и $\overline{DK}=a$. Нека T и L се подножјата на нормалите повлечени од точките E и D кон страните BC и AC, соодветно. Точките D и E припаѓаат на симетралите на внатрешните агли, па затоа важи $\overline{DL}=\overline{DK}=a$ и $\overline{ET}=\overline{ES}=b$. Сега, од лемата следува $z=\frac{ap+bq}{p+q}$.

Од $\triangle DET$ следува $x=\frac{bq}{p+q}$, а од $\triangle EDL$ следува $y=\frac{ap}{p+q}$. Конечно, од последните три равенства следува равенство $z=x+y$, кое и требаше да се докаже.

3. МНОГУАГОЛНИК

1. Во даден петаголник $ABCDE$, точките K,L,M,N се средини на страните на петаголникот AB,BC,CD,DE соодветно. Нека точките P,Q се средини на отсечките KM,LN соодветно. Докажи дека PQ и AE се паралелни и дека $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

Решение. Нека со F ја означиме средината на дијагоналата AD на петаголникот (види цртеж). Го разгледуваме четириаголникот $ADCB$. Во него е вписан четириаголник $KFML$ чии темиња се средини на страните на четириаголникот $ADCB$ и јасно $KFML$ е паралелограм. Во паралелограмот дијагоналите се преполовуваат, па точката P, која е средина на отсечката KM, е таква да $P\in LF$ и истовремено е средина и на отсечката LF. Во триаголникот LFN, отсечката PQ е средна линија и $PQ \parallel FN$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}$. Од триаголникот ADE може да се заклучи дека FN е средна линија и $FN \parallel AE$ и $\overline{FN}=\frac{1}{2}\overline{AE}$. Конечно $PQ \parallel FN \parallel AE$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}=\frac{1}{4}\overline{AE}$, што значи дека PQ и AE се паралелни и притоа важи $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

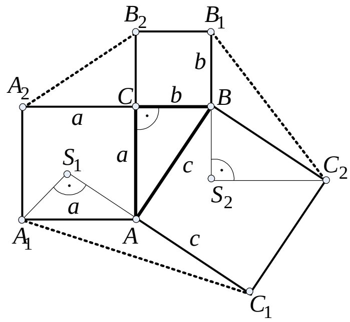


2. Над страните на еден правоаголен триаголник со катети a и b, конструирани се квадрати и потоа соседните слободни темиња на квадратите се поврзани со отсечки. Да се најде плоштината на добиениот шестаголник.

Решение. Од цртежот се гледа дека

$$P_{A_1A_2B_2B_1C_2C_1} = P_{A_2CB_2} + P_{B_1BC_2} + P_{A_1AC_1} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab}{2} .$$

Понатаму $P_{A_2CB_2} = \frac{ab}{2}$ и $P_{BC_2B_1} = \frac{1}{2} b \cdot \overline{S_2C_2}$.



Бидејќи $\triangle BC_2S_2 \cong \triangle ABC$ (имаат по една страна еднаква, двата се правоаголни и

$$\measuredangle S_2BC_2 = \measuredangle CBA$$

како агли со нормални краци), следува дека $\overline{S_2C_2} = a$. Според тоа, $P_{BC_2B_1} = \frac{1}{2}ab$. Слично се добива дека $P_{A_1AC_1} = \frac{1}{2}ab$, па бараната плоштина е еднаква на

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = 2(a^2 + b^2 + ab) .$$

3. Даден е конвексен шестаголник $ABCDEF$, при што $\measuredangle FAE = \measuredangle BDC$, а четириаголниците $ABDF$ и $ACDE$ се тетивни. Докажи дека BF и CE се паралелни.

Решение. Нека K е точка на пресек на AE и BF (види цртеж). Од условот на задачата $ABDF$ и $ACDE$ се тетивни четириаголници, па според тоа

$$\measuredangle AFB = \measuredangle ADB \quad (ABDF \text{ е тетивен})$$
$$\measuredangle ADC = \measuredangle AEC \quad (ACDE \text{ е тетивен})$$

Но тогаш

$$\measuredangle AKB = \measuredangle AFK + \measuredangle FAK = \measuredangle AFB + \measuredangle FAE = \measuredangle AFB + \measuredangle BDC = \measuredangle ADC = \measuredangle AEC .$$

Сега, од равенството $\measuredangle AKB = \measuredangle AEC$, добиваме $BF \parallel CE$.

4. На дијагоналите AC и CE на правилниот шестаголник $ABCDEF$ се избрани внатрешни точки M и N, такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$. Пресметај го λ, ако се знае дека точките B, M и N лежат на иста права.

Решение. *Прв начин.* Од $\overline{CM} = \overline{EN}$, следува дека триаголниците BCM и DEN се складни, па затоа $\measuredangle NBC = \measuredangle NDE$. Освен тоа $\measuredangle BCE = 90^\circ$, $\measuredangle DEC = 30^\circ$, па затоа

$$\measuredangle DNB = \measuredangle CNB + \measuredangle DNC = (90^\circ - \measuredangle NBC) + (\measuredangle DEC + \measuredangle NDE) = 120^\circ.$$

Тоа значи дека отсечката BD се гледа од точката N под ист агол како и од центарот O на кружницата опишана околу правилниот шестаголник. Затоа N лежи на кружница со центар во C, и радиус $\overline{CD} = \overline{CB}$ т.е. $\overline{CN} = \overline{CB}$. Конечно, $\lambda = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, бидејќи во правоаголниот триаголник BCE, $\angle EBC = 60^\circ$.

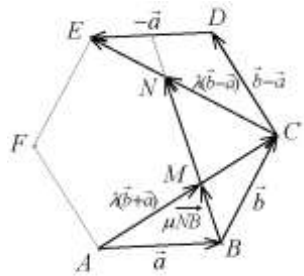
Втор начин. Ако ги воведеме ознаки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, добиваме $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - 2\vec{a}$. Од $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$ имаме

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a}+\vec{b})$ и $\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CE} = \lambda(\vec{b}-2\vec{a})$.

Точките B, M и N се колинеарни и затоа

$$\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BN} \qquad (1)$$

за некој μ. Ги изразуваме $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \lambda(\vec{b}-2\vec{a}),$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\vec{a}(\lambda - 1 + 2\lambda\mu) + \vec{b}(\lambda - \mu - \lambda\mu) = 0,$$

Бидејќи $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеано независни вектори, добиваме:

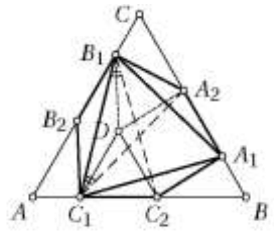
$$\lambda - 1 + 2\lambda\mu = 0$$

$$\lambda - \mu - \lambda\mu = 0$$

од каде што наоѓаме $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB. Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

Решение. Нека D е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle C_1C_2D$ е рамностран. Тогаш DC_1 е паралелна и еднаква со B_1B_2, па затоа $B_1B_2C_1D$ е ромб и оттука $\overline{DB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_1}$. Аналогно $\overline{DA_2} = \overline{A_2B_1}$, што значи дека $\triangle DA_2B_1$ е рамностран. Значи, точките A_2, B_1, C_1, C_2 лежат на кружница со центар D, па затоа



$$\measuredangle B_1C_1A_2 = \measuredangle C_1B_1C_2 = \tfrac{1}{2}\measuredangle C_1DC_2 = 30^\circ.$$

Слично,

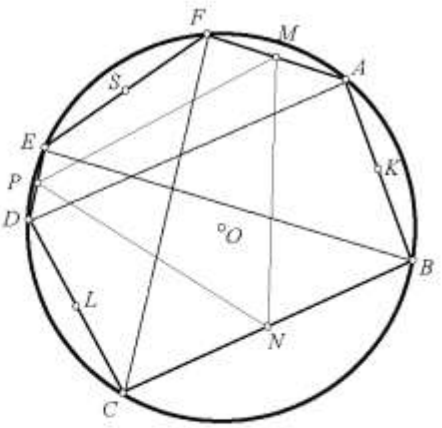
$$\measuredangle C_1A_1B_2 = \measuredangle A_1C_1A_2 = \measuredangle A_1B_1C_2 = \measuredangle B_1A_1B_2 = 30^\circ.$$

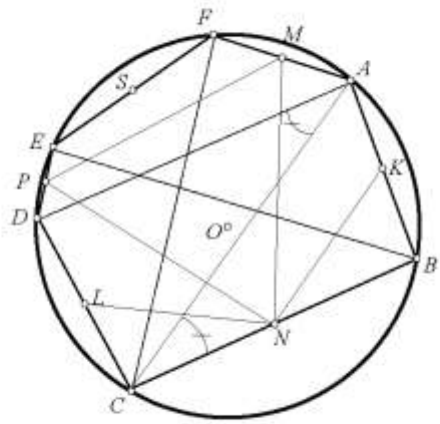
Од досега изнесеното следува дека $\triangle A_1B_1C_1$ е рамностан и дека A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

6. Во круг k е вписан шестоаголник $ABCDEF$ при што страните AB, CD и EF имаат должина еднаква на радиусот на кругот k. Определи го односот на страните на триаголникот со темиња во средните точки на преостанатите три страни BC, DE, FA.

Решение. Со M, N, P ќе ги означиме средините на страните AF, BC и DE соодветно. Со K, L и S ќе ги означиме средините на AB, CD и EF соодветно. Четириаголниците $ABCD, CDEF$ и $EFAB$ се рамнокраки трапези (например:

$\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle DAC = 30^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$). Сега ја имаме следната сличност:



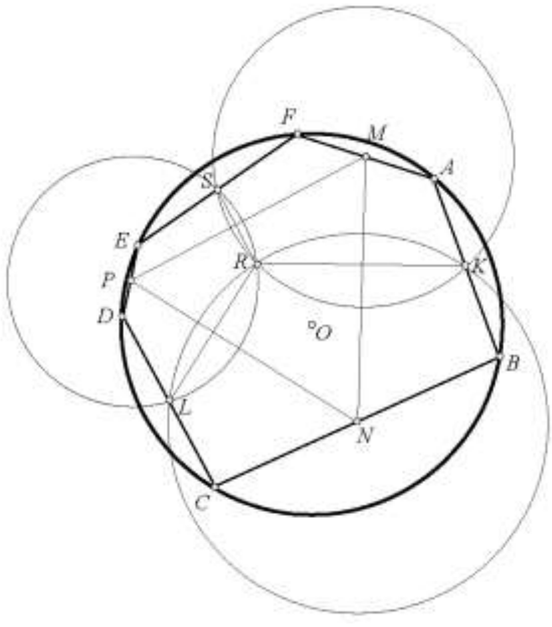


$\triangle KBN \sim \triangle LCN$ ($\overline{BN} = \overline{CN}$, $\overline{KB} = \overline{LC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2}$, додека $\measuredangle ABN = \measuredangle LCN$ бидејќи трапезот $ABCD$ е рамнокрак). Бидејќи KN е средна линија на триаголникот ABC добиваме дека $\measuredangle KNB = 30^\circ$. Аналогно, точно е и равенството $\measuredangle LNC = 30^\circ$.

Ако опишеме кружница со центар во N и радиус $\overline{NL} = \overline{NK}$, добиваме дека периферниот агол кој соодветствува на лакот LK (тој што се наоѓа во шестоаголникот) е еднаков на 60° , бидејќи соодветниот централен агол е $\measuredangle LNK = 120^\circ$. Аналогни разгледувања ќе направиме и за трапезот $CDEF$ и ќе опишеме лак LS со центар во P и радиус еднаков $\overline{PL} = \overline{PS}$. Со R ќе ја означиме другата пресечна точка на лаците LK и LS . Јасно е дека е точно равенството

$$\measuredangle LRK = \measuredangle LRS = 120^\circ .$$

Тогаш е точно и равенството $\measuredangle KRS = 120^\circ$. односно R е и на лакот KS со центар во M и радиус $\overline{MS} = \overline{MK}$. Значи, сите три лаци имаат заедничка точка R . При тоа LR е заедничка тетива на кружниците со центри N и P , па според тоа $PN \perp LR$. Аналогно се добива дека $PM \perp SR$ и $MN \perp KR$. Сега лесно може да се пресмета дека



$$\measuredangle MNP = \measuredangle NPM = \measuredangle PMN = 60^\circ$$

,

односно $\triangle MNP$ е рамностран.

7. Даден е конвексен шестаголник кај кој за секои две спротивни страни важи: растојанито меѓу нивните средини е еднакво на збирот на нивните должини помножен со $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажи, дека сите агли на овој шестаголник се еднакви?

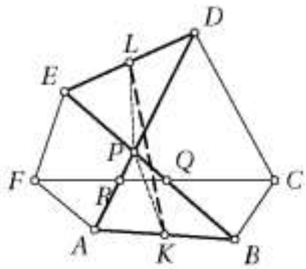
Решение. Нека $ABCDEF$ е дадениот шестаголник. Ќе го користиме следново тврдење.

Лема. Ако $\measuredangle XZY \geq 60^\circ$ и M е средина на отсечката XY, тогаш $\overline{MZ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\triangle XYZ$ е рамностран.

Доказ. Нека Z' е точка таква што $\triangle XYZ'$ е рамностран и Z, Z' се на иста страна на правата XY. Тогаш Z е во внатрешноста на опишаната кружница околу $\triangle XYZ'$, па затоа

$$\overline{MZ} \leq \overline{MZ'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $Z \equiv Z'$. ■



Да означиме

$$AD \cap BE = P,\ BE \cap CF = Q \text{ и } CF \cap AD = R.$$

Нека претпоставиме дека $\measuredangle APB = \measuredangle DPE > 60^\circ$. Тогаш, ако K и L се средини на отсечките AB и DE, соодветно, од лемата следува

$$\overline{KL} \leq \overline{PK} + \overline{PL} < \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB} + \overline{DE}) = \overline{KL},$$

што е противречност. Според тоа, $\measuredangle APB \leq 60^\circ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle BQC \leq 60^\circ$ и $\measuredangle CRD \leq 60^\circ$. Бидејќи

$$\measuredangle APB + \measuredangle BQC + \measuredangle CRD = 180^\circ,$$

заклучуваме дека

$$\measuredangle APB = \measuredangle BQC = \measuredangle CRD = 60^\circ$$

и уште повеќе триаголниците APB, BQC и CRD мора да бидат рамнострани. Следува дека

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABP + \measuredangle QBC = 120^\circ.$$

Аналогно се докажува дека и останатите агли на шестаголникот се еднакви на 120°.

8. Петаголникот $ABCDE$ е впишан во кружница и важи $AC \| DE$. Нека точката M е средината на дијагоналата BD. Докажи, дека ако $\measuredangle AMB = \measuredangle BMC$, тогаш BE ја полови AC.

Решение. Нека BE ја сече AC во точката N и точката P е средина на AB. Да означиме

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BDC = \alpha,\ \measuredangle ABE = \measuredangle ACE = \measuredangle CED = \measuredangle CBD = \beta \text{ и}$$

$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \gamma.$$

Тогаш $\triangle ABN \sim \triangle DBC$, а бидејќи NP и CM се тежишни линии во овие триаголници, соодветно имаме $\triangle BPN \sim \triangle BMC$.

Нека $\measuredangle AMB = \measuredangle BMC = \varphi$. Од претходно изнесеното следува дека $\measuredangle BPN = \varphi$.

Ќе го користиме следново тврдење:

Ако две тетиви половат трета тетива и ако со неа зафаќаат еднакви агли, тогаш тие се еднакви меѓу себе и нивната пресечна точка ги дели на еднакви делови, соодветно (направи цртеж и разгледај складни триаголници или осна симетрија).

Нека AM ја сече кружницата по вторпат во точката F. Тогаш $\overline{CM} = \overline{FM}$, па затоа $\triangle BMC \cong \triangle DMF$, од каде следува дека

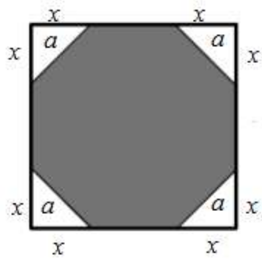
$$\overline{BC} = \overline{DF} \text{ и } \measuredangle MAD = \measuredangle FAD = \measuredangle BDC = \alpha .$$

Од $\triangle AMD$ добиваме $\varphi = \alpha + \gamma$. Оттука и од $\triangle APN$ заклучуваме дека

$$\measuredangle ANP = \varphi - \alpha = \gamma = \measuredangle ACB .$$

Значи, $NP \parallel BC$, т.е. NP е средна линија во $\triangle ABC$ и N е средина на AC, со што тврдењето е докажано.

9. Правилен осумаголник со должина на страна a е вппишан во квадрат со страна 1, како што е прикажано на цртежот. Докажи дека $a^2 + 2a = 1$.



Решение. Квадратот е составен од осумаголник и четири рамнокраки правоаголни триаголници, со хипотенуза a и катети $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Според тоа, од страната на квадратот имаме $a + 2\frac{a}{\sqrt{2}} = 1$, $a(\sqrt{2}+1) = 1$, т.е.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} - 1 .$$

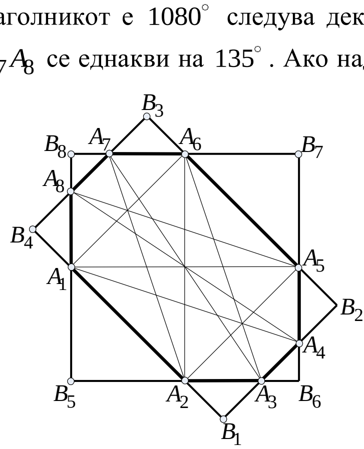
Сега,

$$a^2 + 2a = (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 1$$

што требаше да се докаже.

10. Ако еден осумаголник има еднакви агли и должините на страните му се рационални броеви, тогаш тој осумаголник има центар на симетрија. Докажи!

Решение. Бидејќи збирот на аглите на осумаголникот е 1080° следува дека аглите на дадениот осумаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ се еднакви на 135°. Ако над секоја страна од осумаголникот доцртаме од надворешна страна рамнокрак правоаголен триаголник, ќе добиеме два правоаголници $B_1B_2B_3B_4$ и $B_5B_6B_7B_8$ (види цртеж). Со пресметување се добива дека



$$\overline{B_1B_4} = \overline{A_1A_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_1A_9} + \overline{A_2A_3}) \text{ и}$$

$$\overline{B_2B_3} = \overline{A_5A_6} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}) \quad .$$

Од тоа што $\overline{B_1B_4} = \overline{B_2B_3}$; должините на страните на осумаголникот се рационални броеви;

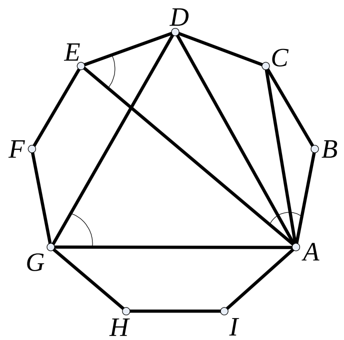
и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ е ирационален број, следува дека $\overline{A_1A_2} = \overline{A_5A_6}$. Слично се покажува дека

$$\overline{A_2A_3} = \overline{A_6A_7},\ \overline{A_3A_4} = \overline{A_7A_8} \text{ и } \overline{A_4A_5} = \overline{A_8A_1}.$$

Бидејќи $A_1A_2 \parallel A_5A_6, A_2A_3 \parallel A_6A_7$, $A_3A_4 \parallel A_7A_8$ и $A_4A_5 \parallel A_8A_1$ следува дека четириаголниците $A_1A_2A_5A_6$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_3A_4A_7A_8$, $A_4A_5A_8A_1$ се паралелограми. Од тоа што: A_1A_5 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_8$ и $A_1A_2A_5A_6$; A_2A_6 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_6A_7$; A_3A_7 е дијагонала на $A_2A_3A_6A_7$ и $A_3A_4A_7A_8$; и A_4A_8 е дијагонала на $A_3A_4A_7A_8$ и $A_1A_4A_5A_8$, следува дека горните четири паралелограми имаат ист центар на симетрија за осумаголникот

11. Даден е правилен деветаголник со должина на страна a. Определи ја разликата меѓу должините на најдолгата и најкратката дијагонала?

Решение. Без губење на општоста ќе ги земеме дијагоналите повлечени од темето A. Најдолгата дијагонала е AE а најкратката дијагонала е AC. Треба да ја пресметаме разликата $\overline{AE} - \overline{AC}$. Триаголниците ADG и BEH се рамнокраки. Од ова и од еднаквост на агли над ист кружен лак од кружница опишана околу деветаголникот имаме

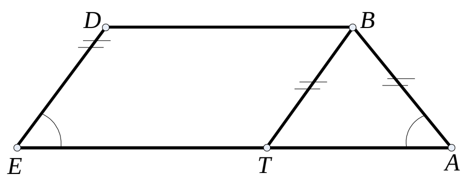


$$\measuredangle AED = \measuredangle AGD = 60^\circ$$

и

$$\measuredangle EAB = \measuredangle EHB = 60^\circ.$$

Според тоа, $ABDE$ е рамнокрак трапез. Низ B повлекуваме права паралелна на DE и нека T е пресечната точка со AE. Тогаш $ETBD$ е паралелограм и



$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AE} - \overline{BD} = \overline{AE} - \overline{TE} = \overline{AT}$$

а бидејќи ABT е рамнокрак триаголник, имаме

$$\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AT} = \overline{AB} = a.$$

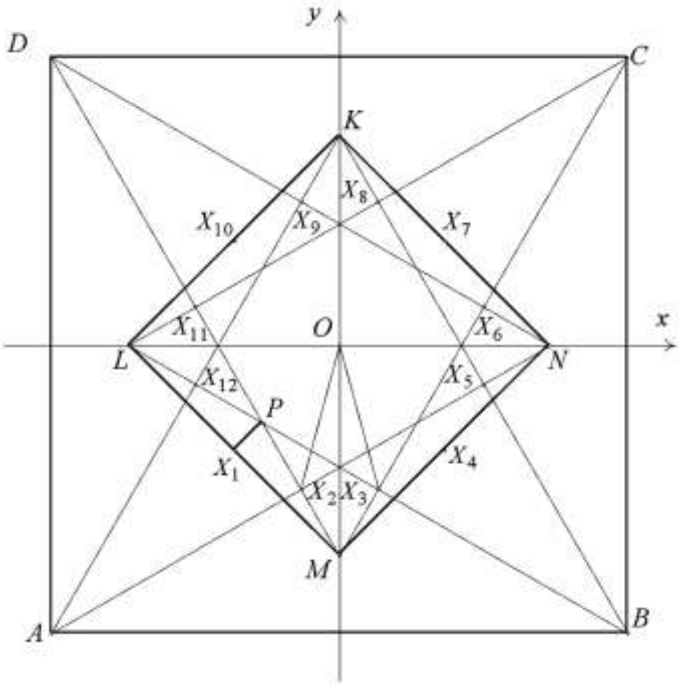
12. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ABK, BCL, CDM і DAN. Докажи дека средините на отсечките KL, LM, MN, NK, $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. Нека $X_1, X_2, ..., X_{12}$ се средини на отсечките LM, AN, BL, MN, $BK, CM, KN, CL, DN, KL, DM, AK$, соодветно.

Триаголникот PMX_3 е правоаголен, а X_2 е средина на хипотенузата MP. Имено, точката X_3 е средина на заемно нормалните отсечки BL и CM, а триаголникот MX_3X_2, заради симетрија на X_2 и X_3 во однос на правата KM е рамностран.

Точките P и X_1 лежат на дијагоналата AC (заради симетрија на M и L, односно B и D), па според тоа MPX_1 е правоаголен триаголник.

Четириаголникот X_1MX_3P е тетивен и $\angle X_3PM = 30^\circ$, па според тоа $\measuredangle MPX_1 = \frac{1}{2}\measuredangle MPL = 75^\circ$; $\measuredangle X_1X_2P = 30^\circ$ (агол спроти основа на рамнокрак триаголник) и $\measuredangle X_1X_2X_3 = 150^\circ$ е еднаков на збир на аглите X_1X_2P и PX_2X_3.



Со помош на симетрија во однос на правите KL, LN, AC и BD заклучуваме дека сите страни на дванаесетаголникот $X_1X_2...X_{12}$ се еднакви и дека секој агол во темињата $X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ е еднаков на 150°, а аглите во темињата X_1, X_4, X_7, X_{10} се меѓу себе еднакви. Збирот на внатрешните агли во дванаесетаголник е $10 \cdot 180^\circ$, па затоа

$$\measuredangle X_{12}X_1X_2 = \measuredangle X_3X_4X_5 = \measuredangle X_6X_7X_8 = \measuredangle X_9X_{10}X_{11} = 150^\circ.$$

4. КРУЖНИЦА И КРУГ

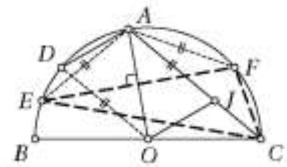
1. Во рамнина се дадени n точки ($n \geq 3$) така што меѓу нив нема три колинеарни. Докажи дека постои кружница низ три од дадените точки така што во внатрешноста на кругот определен со кружницата не лежи ниту една од дадените точки.

Решение. Нека A и B се две од дадените точки така што растојанието од A до B е минимално, односно за секој пар дадени точки X и Y важи $\overline{XY} \geq \overline{AB}$. Понатаму, нека точката C е избрана така што $\measuredangle ACB$ е максимален, односно за секоја точка Z, различна од A и B, важи $\measuredangle AZB \leq \measuredangle ACB$. Кружницата низ точките A, B и C ги задоволува бараните услови, затоа што секоја точка W од внатрешноста на кругот важи дека аголот $\measuredangle AWB$ е поголем од $\measuredangle ACB$ или некое од растојанијата $\overline{AW}$ и $\overline{BW}$ е помало од $\overline{AB}$, што значи дека ниту една од внатрешните точки на кругот не е една од избраните точки.

2. Дадена е кружница k со центар O и точка A надвор од кружницата. Од A се повлечени тангенти AX и AY, $X, Y \in k$, а точките P и Q од правите AX и AY (P е меѓу A и X, Y е меѓу A и Y) се такви, што $\overline{OP} = \overline{OQ}$. Докажи, дека средината на отсечката PQ припаѓа на отсечката XY.

Решение. Нека R е средината на PQ, направи цртеж. Тогаш $\measuredangle ORQ = \measuredangle OYQ = 90^\circ$. Според тоа, четириаголникот $OQYR$ е тетивен, па затоа $\measuredangle QRY = \measuredangle QOY$. Аналогно, $\measuredangle PRX = \measuredangle POX$. Бидејќи $\triangle OYQ \cong \triangle OXP$, добиваме $\measuredangle QOY = \measuredangle POX$. Според тоа, $\measuredangle QRY = \measuredangle PRX$, што значи дека точките X, R, Y лежат на една права.

3. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O, A е точка од k таква што $0^\circ < \measuredangle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C. Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J, а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F. Докажи, дека J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF.

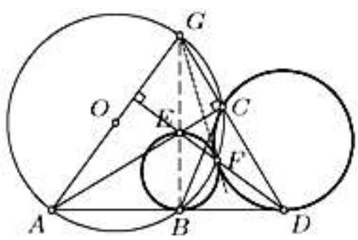


Решение. Од $\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA = \measuredangle BOD$ следува дека правите CA и OD се паралелни. Според тоа, четириаголникот $JADO$ е паралелограм. Оттука следува дека $\overline{AJ} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{AE} = \overline{AF}$, па затоа

$$\measuredangle JFE = \measuredangle JFA - \measuredangle EFA = \measuredangle AJF - \measuredangle ECA = \measuredangle AJF - \measuredangle ACF = \measuredangle CFJ.$$

Сега од $\overline{AE} = \overline{AF}$ следува дека CJ е симетрала на $\measuredangle ECF$, па затоа J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF.

4. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\measuredangle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AV во точката C. Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO, E е пресечната точка на правите l и AC, а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E. Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F.



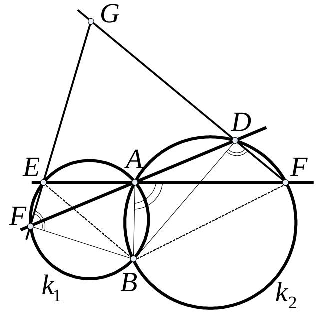
Решение. Нека G е точката на Γ дијаметрално спротивна на A. Точката E е ортоцентар на триаголникот DAG, па затоа G лежи на правата BE. Бидејќи

$$\measuredangle CDF = \measuredangle GAC = \measuredangle GFC \text{ и}$$
$$\measuredangle FBE = \measuredangle FAG = \measuredangle GFE,$$

правата FG е заедничка тангента на кружниците CFD и BFE, па затоа овие кружници се допираат во точката F .

5. Две кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B . Низ точката A повлечени се две прави p и q . Вторите пресечни точки на правата p со кружинците k_1 и k_2 се точките E и F соодветно, а на правата q се точките C и D соодветно. Нека $G = EC \cap DF$. Да се докаже дека точките B,C,D и G лежат на една кружница.

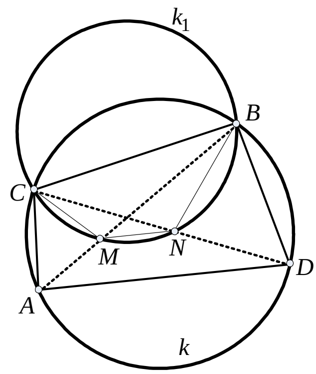
Решение. Од цртежот гледаме дека: $\measuredangle FDB = \measuredangle BAF$ (како периферискиа агли над ист лак); $\measuredangle BAF = 180^\circ - \measuredangle EAB$; $\measuredangle EAB = 180^\circ - \measuredangle ECB$ (четириаголникот $ABCE$ е тетивен). Според тоа, добиваме дека $\measuredangle FDB = \measuredangle ECB$.



Од друга страна имаме $\measuredangle GDB = 180^\circ - \measuredangle FDB$, па користејќи го претходното, добиваме дека $\measuredangle GDB + \measuredangle GCB = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $BCGD$ е тетивен, т.е. точките B,C,D и G лежат на иста кружница.

6. Нека AB и CD се тетиви на кружницата k што се сечат. На тетивата AB е избрана точка M така што $\overline{AM} = \overline{AC}$, а на тетивата CD е избрана точка N така што $\overline{DN} = \overline{DB}$. Ако точките N и M не се совпаѓаат, докажи дека правата MN е паралелна со правата AD.

Решение. Триаголникот MAC е рамнокрак, идејќи по услов $\overline{AM} = \overline{AC}$, па затоа $\measuredangle ACM = \measuredangle CMA$. Аналогно, триаголникот NDB е рамнокрак ($\overline{DN} = \overline{DB}$ по услов), па следува дека $\measuredangle DNB =$. $\measuredangle NBD$. Имајќи во предвид дека $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ (периферни агли над ист кружен лак), добиваме



$$2\measuredangle CMA + \measuredangle CAM = 180^\circ = \measuredangle CDB + 2\measuredangle DNB$$
$$= \measuredangle CAB + 2\measuredangle DNB$$

Оттука следува:

$$2\measuredangle CMA + \measuredangle CAB = \measuredangle CAB + 2\measuredangle DNB$$

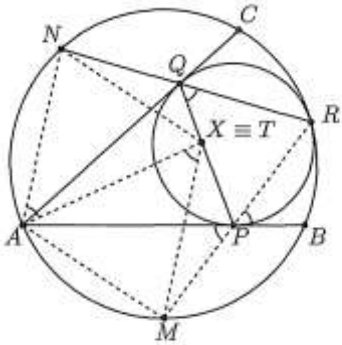
т.е. $\measuredangle CMA = \measuredangle DNB$. Понатаму,

$$\measuredangle CMB = 180^\circ - \measuredangle CMA = 180^\circ - \measuredangle DNB = \measuredangle BNC$$

т.е. $\measuredangle CMB = \measuredangle BNC$, што значи дека точките M, N, B и C лежат на иста кружница. Сега добиваме $\measuredangle BMN = \measuredangle BCN$ (периферни агли над лакот BN во кружницата k_1) и $\measuredangle BCN = \measuredangle BAD$ (периферни агли над лакот BD во кружницата k). Конечно $\measuredangle BMN = \measuredangle BAD$, а оттука следува дека $MN \parallel AD$.

7. На дадена кружница k се избрани точки A,B и C. Конструирана е кружница ω, која се допира до тетивите AB, AC и внатрешно до кружницата k во точките P,Q и R, соодветно. Нека правите PR и QR по втор пат ја сечат k

во точките M и N соодветно, а точката T е таква, што четириаголникот $AMTN$ е паралелограм. Докажи дека точките P,Q и T лежат на една права.



Решение. Четириаголникот $AMRN$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle AMP + \measuredangle ANQ = \measuredangle AMR + \measuredangle ANR = 180^\circ .$$

Нека опишаните кружници околу $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ по втор пат се сечат во точката X. Тогаш

$$\measuredangle AXP + \measuredangle AXQ = (180^\circ - \measuredangle AMP) + (180^\circ - \measuredangle ANQ)$$

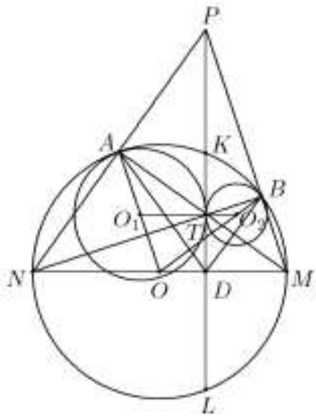
$$= 360^\circ - (\measuredangle AMP + \measuredangle ANQ) = 180^\circ$$

што значи дека $X \in PQ$. Понатаму,

$$\measuredangle AXM = \measuredangle APM = \measuredangle BPR = \measuredangle PQR = \measuredangle XAM$$

и затоа $MX \parallel AN$. Аналогно, $NX \parallel AM$, што значи дека четириаголникот $AMXN$ е паралелограм и $X \equiv T$, со што доказот е завршен.

8. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T. Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B. Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L. Ако D е средината на отсечката KL, докажи дека $\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle ADB$.



Решение. Нека правите AT и BT по вторпат ја сечат кружницата C соодветно во точките M и N. Тогаш од рамнокракиот триаголник ATO_1 добиваме $\measuredangle O_1TA = \measuredangle O_1AT$, од рамнокракиот триаголник AMO добиваме $\measuredangle OMA = \measuredangle OAT$, а точките A, O_1 и O лежат на една права. Значи, $\measuredangle O_1TA = \measuredangle OMA$, па затоа $O_1O_2 \parallel OM$. Аналогно $O_1O_2 \parallel ON$, т.е. точките O, M и N лежат на една права. На истата права лежи и точката D, бидејќи $KL \perp O_1O_2$, па затоа дијаметарот MN е нормален на тетивата KL, а D е средина на KL. Бидејќи MN е дијаметар, важи $\measuredangle NBM = \measuredangle NAM \; = 90^\circ$, па затоа темињата на $\triangle ABD$ се подножјата на висините во $\triangle MNP$, каде P е пресечната точка на NA и NB. Тогаш $\measuredangle NDA = \measuredangle MBD = \measuredangle MPN$ и затоа

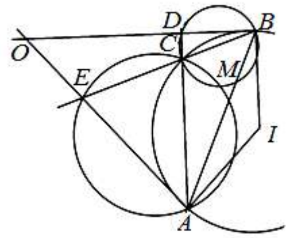
$$\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle AOB = 180^\circ - \measuredangle AON - \measuredangle BOM$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - 2\measuredangle ANM) - (180^\circ - 2\measuredangle BMN)$$

$$= 2(\measuredangle ANM + \measuredangle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\measuredangle MPN$$

$$= 180^\circ - \measuredangle NDA - \measuredangle MDB = \measuredangle ADB.$$

9. Дадени се кружница ω со центар I и две прави кој ја допираат ω во точките A и B и се сечат во точката O. Нека C е точка на помалиот лак AB на ω, различна од средината на лакот. Правите AC и OB се сечат во точката D, а правите BC и OA се сечат во точката E. Докажи, дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците ACE, BCD и OCI лежат на една права.



Решение. Нека M е вторaта пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците ACE и BCD (ако тие кружници се допираат, тогаш правите AE и BD ќе бидат паралелни). Доволно е да докажеме, дека кружницата опишана околу $\triangle OCI$ ја содржи точката M, бидејќи во тој случај центрите на трите кружници од условот на задачата ќе лежат на симетралата на отсечката CM.

Да означиме $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle CBA = \beta$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\beta > \alpha$. Тогаш $\measuredangle OBE = \alpha$ и $\measuredangle DAE = \beta$. Бидејќи четириаголникот $OBIA$ е тетивен, имаме

$$\measuredangle OIA = \measuredangle OBA = \alpha + \beta .$$

Според тоа,

$$\measuredangle CIO = \measuredangle CIA - \measuredangle OIA = 2\measuredangle CBA - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha .$$

За да докажеме, дека точката M лежи на кружницата опишана околу $\triangle OCI$ доволно е да докажеме дека $\measuredangle CMO = \beta - \alpha$.

Бидејќи четириаголниците $AECM$ и $DBMC$ се тетивни, добиваме

$$\measuredangle BME = \measuredangle BMC + \measuredangle CME = (180^\circ - \measuredangle CDB) + \measuredangle CAE$$

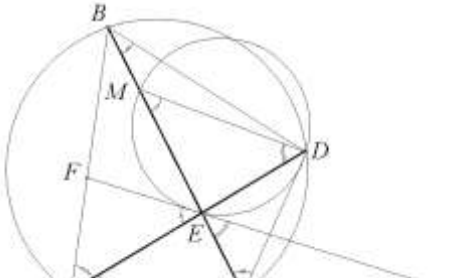
$$= \measuredangle ODA + \measuredangle DAO = 180^\circ - \measuredangle EOB,$$

т.е. четириаголникот $EOBM$ исто така е тетивен и важи $\measuredangle OME = \measuredangle OBE = \alpha$. Според тоа,

$$\measuredangle CMO = \measuredangle CME - \measuredangle OME = \measuredangle CAE - \alpha = \beta - \alpha ,$$

со што доказот е завршен.

10. Тетивите AB и CD се сечат во точката E во внатрешноста на дадената кружница. Нека M е внатрешна точка на отсечката BE. Тангентата на кружницата која минува низ точките D, E и M, повлечена во точката ги сече правите BC и AC во точките F и G, соодветно. Пресметај $\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$, ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = t$.



Решение. Бидејќи аголот меѓу тангентата и секантата низ допирната точка е еднаков на аголот над тетивата која припаѓа на секантата добиваме

$$\measuredangle GEA = \measuredangle EDM .$$

Значи:

$$\measuredangle GEC = \measuredangle AEC + \measuredangle GEA$$
$$= \measuredangle MED + \measuredangle EDM$$
$$= 180^\circ - \measuredangle DME = \measuredangle BMD.$$

Исто така $\measuredangle DBM = \measuredangle ECA$ (како агли над иста тетива), па триаголниците BDM и CGE имаат еднакви агли кај темињата B и C, односно, M и E, од каде следува дека тие се слични. Од сличноста на триаголниците BDM и CGE следува:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{EG}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BM} \cdot \overline{EG} = \overline{DM} \cdot \overline{CE} .$$

Понатаму, $\measuredangle FCE = \measuredangle MAD$ (како агли над иста тетива) и

$$\measuredangle CEF = 180^\circ - (\measuredangle AEC + \measuredangle GEA) = 180^\circ - (180^0 - \measuredangle DME) = \measuredangle DME ,$$

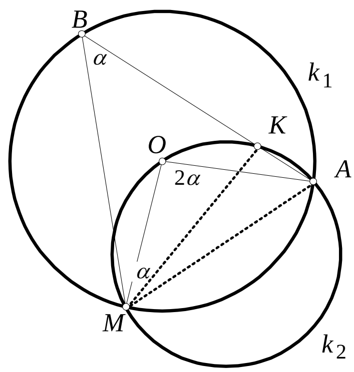
што значи дека триаголниците CEF и AMD се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DM}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \cdot \overline{EF} = \overline{DM} \cdot \overline{CE} = \overline{BM} \cdot \overline{EG}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB} - \overline{AM}} = \frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

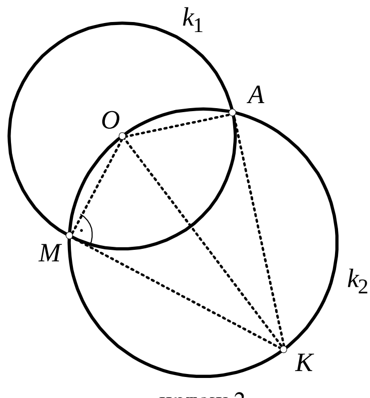
11. Дадена е кружница со центар во точката O и една нејзина тетива AB. Произволна кружница која минува низ точките O и A ја сече дадената кружница во точката M, а правата AB во точката K. Докажи дека $\overline{KB} = \overline{KM}$.

Решение. Кружницата со центар во точката O и минува низ A да ја означиме со k_1 а кружницата што минува низ O и A со k_2 .

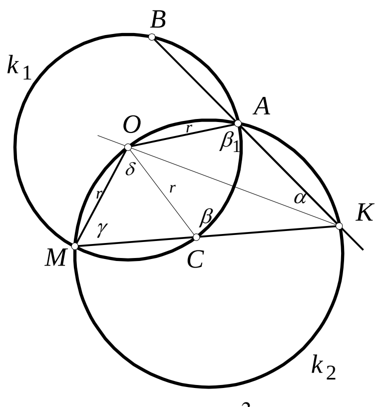


цртеж 1

1 случај. Точката K е во внатрешноста на кружницата k_1 (види цртеж 1). Нека $\alpha = \measuredangle ABM$. Тогаш $\measuredangle ABM$ е периферен агол над лакот AM во k_1, а $\measuredangle AOM$ е централен над лакот AM во k_1, па $\measuredangle AOM = 2\alpha$. Натаму аглите AOM и AKM се периферни над лакот AM во k_2 , па $\measuredangle AOM = \measuredangle AKM = 2\alpha$. Аголот AKM е надворешен во ΔKBM , па $\measuredangle AKM = \measuredangle KBM + \measuredangle BMK$, односно $2\alpha = \alpha + \measuredangle BMK$. Оттука $\measuredangle BMK = \alpha$. Значи $\triangle KBM$ е рамнокрак со основа BM , па следува $\overline{KB} = \overline{KM}$.



цртеж 2



цртеж 3

2 случај. Точката K е надвор од k_1. Најпрво да забележиме дека правата KM не е тангента на k_1. Во спротивно (цртеж 2) $\measuredangle KMO = 90^\circ$. Четириаголникот $AOMK$ е тетивен па $\measuredangle KMO + \measuredangle OAK = 180^\circ$. Добиваме дека $\measuredangle OAK = 90^\circ$, односно дека и правата AK е тангента на k_1, што противречи на условот дека AB е тетива на k_1.

Сега да ги означиме аглите како на цртеж 3. Тогаш $\measuredangle AKO = \alpha$, како периферни агли над тетиви со еднакви должини. Натаму триаголникот OMC е рамнокрак со основа MC, па $\beta = 180^\circ - \gamma$. Четириаголникот $AOMK$ е тетивен, па $\beta_1 = 180^\circ - \gamma$. Значи триаголниците OAK и OCK имаат три еднакви агли па се слични. Но страната OK е заедничка, па следува дека тие се складни. Значи и $\overline{AK} = \overline{CK}$. За степенот на точката K во однос на кружницата k_1 имаме $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = \overline{KC} \cdot \overline{KM}$, односно $\frac{\overline{KB}}{KM} = \frac{\overline{KC}}{KA} = 1$, од што следува тврдењето на задачата.

12. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Права низ B, по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точки C и D, соодветно, при што C лежи надвор од k_2, а D надвор од k_1. Нека M е пресечната точка на тангентите кон k_1 и k_2 повлечени низ C и D, соодветно, и $AM \cap CD = \{P\}$. Тангентата повлечена низ B кон k_1 ја сече AD во точка L, а тангентата повлечена низ B кон k_2 ја сече AC во точката K. Нека $KP \cap MD = \{N\}$ и $LP \cap MC = \{Q\}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

Решение. Од причини на симетрија, доволно е да се докаже дека важи $KP \| MC$. Најпрво ќе докажеме дека дека четириаголникот $ACMD$ е тетивен. Имено, да забележиме дека B лежи на отсечката CD, а A и M се на различни страни од правата CD. Од $\measuredangle BDM = \measuredangle DAB$ и $\measuredangle BCM = \measuredangle BAC$, следува

$$\measuredangle DAC = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC = \measuredangle BDM + \measuredangle BCM = 180^\circ - \measuredangle DMC .$$

Понатаму, ќе докажеме дека B и P лежат на ист кружен лак над точките A и K. За таа цел, разгледуваме два случаи:

<u>*Прв случај*</u>. Точката P лежи на остечката BC. Да забележиме дека точките A и B се од иста страна на правата KP. Нека со E го означиме пресекот на правите KB и DM. Имаме низа равенства

$$\measuredangle KBP = \measuredangle DBE = \measuredangle BDE = \measuredangle CDM = \measuredangle CAM = \measuredangle KAP .$$

Тогаш, од $\measuredangle KBP = \measuredangle KAP$ следува дека четириаголникот $AKPB$ е тетивен.

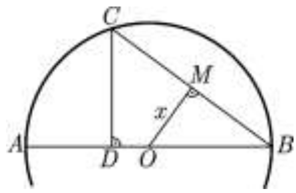
<u>*Втор случај*</u>. Точката P лежи на остечката AC. Сега точките A и B се од различни страни на правата KP. Повторно, нека E е пресекот на KB и DM. Ја имаме следната низа равенства

$$180^\circ - \measuredangle KBP = \measuredangle DBE = \measuredangle BDE = \measuredangle CDM = \measuredangle CAM = \measuredangle KAP ,$$

од што следува дека четириаголникот $AKBP$ е тетивен.
Така добиваме дека $\measuredangle APK = \measuredangle ABK = \measuredangle ADB = \measuredangle ADC = \measuredangle AMC$, Од што следува дека $KP \parallel MC$.

13. Дадена е кружница со центар O и дијаметар AB. Точката C е избрана на кружницата така што $\overline{DB} = 3\overline{OM}$, каде што D е проекција на C врз дијаметарот AB, а M е проекција на O врз BC. Определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{OM} = x$ и $\overline{OB} = r$. Според условот $\overline{DB} = 3\overline{OM} = 3x$, па $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 2r - 3x$. Од тоа што OM е средна линија во ΔABC имаме $\overline{AC} = 2\overline{OM} = 2x$.



Триаголниците OBM и ACD се слични, па $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM}}$ т.е. $\frac{2x}{2r-3x} = \frac{r}{x}$, од каде што

$$2x^2 + 3rx - 2r^2 = 0.$$

Решенија на оваа квадратна равенка се: $x_{1/2} = \pm\frac{r}{2}$, од каде $r = 2x$. Значи, $\overline{AC} = \overline{AO} = \overline{OC}$, па аголот CAB е 60°. Следува, бараниот агол е 30°.

14. Во кружен отсечок кој соодветствува на централен агол од 120° вписан е квадрат. Пресметај ја должината на страната на квадратот, ако радиусот на кругот е $3+\sqrt{3}$.

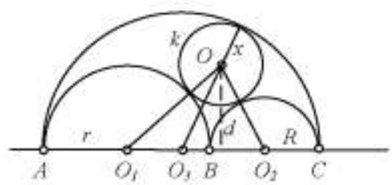
Решение. Нека дадениот квадрат $ABCD$ е таков што точките C и D се на кружницата. Нека точките E и F се пресек на нормалата од центарот на кругот со CD и AB соодветно. Нека R е радиус на кружницата, O е центар на кружницата, а $2x$ е страната на квадратот $ABCD$. Тогаш, од правоаголниот триаголник OEC имаме $\overline{OE}^2 = R^2 - x^2$, а од триаголникот OFB, кој е со агли 60°, 90° и 30°, имаме $\overline{OF} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и бидејќи

$$2x = \overline{EF} = \overline{OE} - \overline{OF} = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x\sqrt{3}}{3},$$

добиваме дека $x = \frac{R(6-2\sqrt{3})}{8} = \frac{3}{2}$, од каде страната на квадратот е 3.

15. Точките A, B и C лежат на иста права. Над AB, BC и AC, како над дијаметри, од иста страна на правата, конструирани се три полукружници. Центарот на кружницата k, која ја допира секоја од трите дадени полукружници се наоѓа на растојание d од правата AC. Најди го радиусот на на кружницата k.

Решение. Нека точките A, B и C се распоредени на правата според тој редослед. Нека $\overline{AB} = 2r$, $\overline{AC} = 2R$, O_1 е средина на $\overline{AB}$, O_2 е средина на $\overline{BC}$, O_3 е средина на $\overline{AC}$, O е центар на кружницата k и x ней-



зиниот радиус. Тогаш,

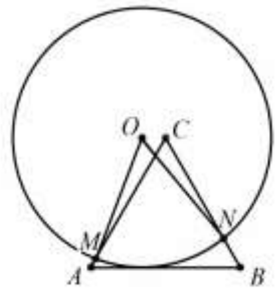
$$\overline{AO_3} = \overline{O_3C} = r + R\,,\ \overline{O_1O_3} = \overline{AO_3} - \overline{AO_1} = R\,,$$

$$\overline{O_2O_3} = \overline{CO_3} - \overline{CO_2} = r\,,\ \overline{O_1O} = r + x\,,\ \overline{O_2O} = R + x\,,\ \overline{O_3O} = R + r - x\,.$$

Изразувајќи ја плоштината на триаголникот O_1OO_3 од една страна преку Хероновата формула, а од друга страна преку полупроизводот од една страна и висината спуштена кон неа, се добива равенството $\sqrt{(R+r)r(R-x)x} = \frac{1}{2}Rd$. Слично, од формулите за плоштина на триаголникот O_1OO_2, се добива $\sqrt{(R+r+x)Rrx} = \frac{1}{2}(R+r)d$. По квадрирање и одземање на последните две равенства, се добива $rx^2(2R+r) = \frac{1}{4}rd^2(2R+r)$, односно $x = \frac{d}{2}$.

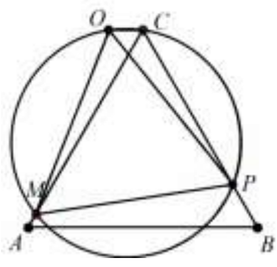
16. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на висина 1. Кружница со центар на иста страна на правата AB како и точката C и радиус 1 ја допира страната AB. Кружницата се тркала по страната AB. Додека кружницата се тракала, таа ги сече страните AC и BC. Докажи, дека должината на лакот кој е внатре во триаголникот е константна.

Решение. Нека k е разгледуваната кружница, O е нејзиниот центар и k ги сече страните AC и BC во точките M и N, соодветно. Точките O и C се еднакво оддалечени од правата AB, па затоа $OC \parallel AB$. Од $OC \parallel AB$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$ следува дека $\measuredangle OCB = 120^\circ$. Понатаму, од $\measuredangle ACB = 60^\circ$ следува $\measuredangle ACO = 60^\circ$.



Нека кружницата низ точките O, C, M ја сече страната BC во точката P. Ќе докажеме дека $P \equiv N$. Четириаголникот $MOCP$ е тетивен, па затоа важи

$$\measuredangle PMO = 180^\circ - \measuredangle OCP = 60^\circ = \measuredangle MCO = \measuredangle MPO\,.$$



Според тоа, за $\triangle MOP$ два агли се еднакви на 60°, па затоа тој е рамностран. Значи, $\overline{OP} = \overline{ON} = 1$, т.е. $P \equiv N$.

Сега, од еднаквоста на аглите над иста тетива следува дека

$$\measuredangle MON = \measuredangle MOP = \measuredangle MCP = 60^\circ\,.$$

Значи, централниот агол на кружницата k над лакот MP (делот кој се наоѓа внатре во $\triangle ABC$) е константен, па затоа и должината на лакот MP е константна.

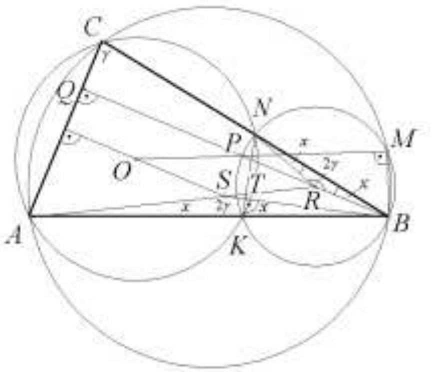
17. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во различни точки K и N, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M. Докажи дека $\measuredangle BMO = 90^\circ$.

Решение. Кружницата опишана околу триаголникот ABC има центар S. $\angle BCA$ е периферен агол над тетивата AB, а $\measuredangle BSA$ е централен агол над истата тетива, па според тоа $\measuredangle BSA = 2\gamma$. Четириаголникот $AKNC$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle KNC = \pi - \alpha \;\Rightarrow\; \measuredangle BNK = \alpha \text{ и } \measuredangle NKB = \gamma .$$

Значи, $\triangle ABC$ е сличен со $\triangle NBK$. Ако R е центар на кружницата опишана околу триаголникот NBK, тогаш $\measuredangle NRB = 2\gamma$. Од рамнокраките триаголници ABS и BNR добиваме

$$x = \measuredangle ABS = \tfrac{\pi}{2} - \gamma$$



па според тоа триаголниците BCQ и TBK се правоаголни. Бидејќи $OS \perp AC$, од триаголникот BCQ добиваме

$$BR \parallel OS . \qquad (1)$$

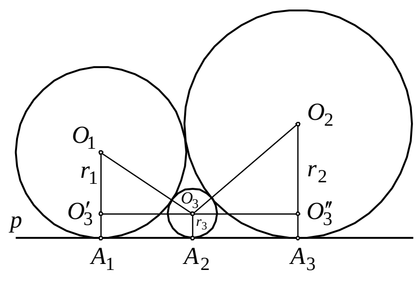
Бидејќи $OR \perp NK$ (O и R се наоѓаат на симетралата на отсечката NK) и $SB \perp NK$, од триаголникот BTK, добиваме

$$SB \parallel OR . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $OSBR$ е паралелограм. Нека точката P е симетрична на точката B во однос на R. Тогаш и четириаголникот $OSRP$ е паралелограм. Бидејќи S и R лежат на симетралата на отсечката BM добиваме $SR \perp BM$ и $OP \perp BM$. Сега од Талесовата теорема следува $PM \perp BM$, т.е. $OM \perp BM$, па затоа $\measuredangle BMO$ е прав.

18. Три кружници со центри O_1, O_2 и O_3 и радиуси r_1, r_2 и r_3 соодветно, се допираат попарно меѓу себе од надворешна страна и сите три ја допираат правата p. Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ (r_3 е радиус на најмалата кружница).

Решение. Со A_1, A_2, A_3 ги означуваме проекциите на точките O_1, O_2, O_3 на правата p. Нека O_3' е проекцијата на точката O_3 на правата O_1A_1 (кружницата со радиус O_3 има најмал радиус). Од Питагоровата теорема за $\triangle O_3O_3'O_1$ имаме



$$\overline{O_3O_3'}^2 = 4r_1r_3 = \overline{A_1A_3}^2 .$$

Со слична постапка се добива дека $\overline{A_2A_3}^2 = 4r_2r_3$ и $\overline{A_1A_2}^2 = 4r_1r_2$, од каде го добиваме бараното равенство.

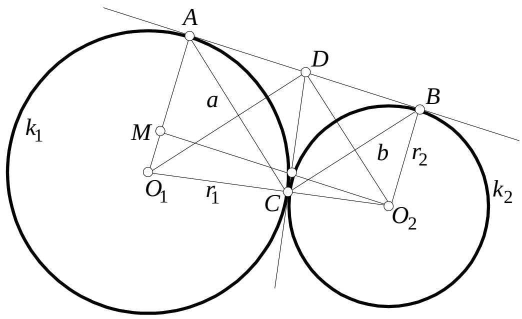
Значи $\overline{A_1A_3} = 2\sqrt{r_1r_3}$, $\overline{A_1A_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ и $\overline{A_2A_3} = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Бидејќи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_3}$, имаме

$$\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$$

што требаше да се докаже.

19. Две кружници k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 соодветно се допираат во точката C, а AB е нивна заедничка тангента ($A \in k_1$, $B \in k_2$). Определи ги должините на радиусите r_1 и r_2 на k_1 и k_2 соодветно, ако $\overline{AC} = a$ и $\overline{BC} = b$.



Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1 > r_2$. Нека $D \in AB$ е таква што CD е заедничка тангента на k_1 и k_2. Не е тешко да се провери дека триаголникот ABC е правоаголен со теме на правиот агол во точката C. Тогаш $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Нека $M \in O_1 A$ таква што $O_2 M \perp O_1 A$. Според Питагоровата теорема за триаголникот $O_1 O_2 M$, имаме

$$\overline{O_2 M}^2 = \overline{O_2 O_1}^2 - \overline{O_1 M}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 = 4 r_1 r_2 .$$

Бидејќи MO_2BA е правоаголник, имаме $\overline{AB} = \overline{O_2 M}$, па добиваме

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{4} = r_1 r_2 . \qquad (1)$$

Триаголниците CDA и BDC се рамнокраки со основи AC и BC, па според тоа

$$\overline{CD} = \overline{DA} = \overline{DB} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} .$$

Не е тешко да се провери дека $\Delta O_1 D O_2$ и ΔACB се слични(користиме: агли со заемно нормални краци, дијагоналите на делтоид се заемно нормални и ги половат аглите зафатени со еднаквите страни, и агол меѓу тангента и тетива). Според тоа

$$\frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{h_{AB}} . \qquad (2)$$

Бидејќи $h_{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (висина кон хипотенуза во правоаголен триаголник со катети a и b), од (2) добиваме

$$\frac{r_1+r_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{a^2+b^2}{2ab} ,$$

односно

$$r_1 + r_2 = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab}$$

Значи, r_1 и r_2 се корени на квадратната равенка

$$r^2 - \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab} r + \frac{a^2+b^2}{4} = 0$$

од каде добиваме $r_1 = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2+b^2}$ и $r_2 = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2+b^2}$.

20. Нека отсечката AB е дијаметар на кружницата γ и $C \in \gamma$ е таква што $C \not\equiv A$ и $C \not\equiv B$. Точката D е ортогонална проекција на точката C врз отсечката AB. Трите кружници γ_1, γ_2 и γ_3 ја допираат AB така што γ_1 е впишана во триаголникот ABC, а γ_2 и γ_3 ја допираат отсечката CD и кружницата γ. Докажи дека γ_1, γ_2 и γ_3 имаат и друга заедничка тангента.

Решение. Нека O_2 е центар на γ_2, $O_2H_2 \perp AB$ и H_2 е меѓу B и D. Радиусот на γ нека е R. Ако воведеме ознаки $\overline{AD} = x$ и $\overline{O_2H_2} = r$ добиваме $\overline{AH_2} = r + x$ и

$$\overline{OO_2} = \sqrt{\overline{OH_2}^2 + r^2} = \sqrt{(x+r-R)^2 + r^2}.$$

Но, γ и γ_2 се допираат па е $\overline{OO_2} + \overline{O_2K} = R$, односно

$$\sqrt{(x+r-R)^2 + r^2} = R - r \text{, т.е. } (x+r-R)^2 = R^2 - 2Rr$$

и според тоа

$$\overline{AH_2}^2 = (x+r)^2 = [(x+r-R)+R]^2 = 2Rx .$$

Понатаму, од $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 2Rx = \overline{AH_2}^2$, добиваме $\overline{AC} = \overline{AH_2}$.

Ако со O_3 го означиме центарот на γ_3 и $O_3H_3 \perp AB$, тогаш аналогно се докажува дека $\overline{BC} = \overline{BH_3}$. Нека O_1 е средина на отсечката O_3O_2, $O_1H_1 \perp AB$. Ќе покажеме дека O_1 е центар на γ_1. Бидејќи O_1H_1 е средна линија на трапезот $O_3H_3H_2O_2$, точно е равенството $\overline{O_1H_1} = \frac{1}{2}(\overline{O_3H_3} + \overline{O_2H_2})$.

Понатаму, $\overline{O_3H_3} = \overline{H_3D}$, CD е тангента на γ_2 и γ_3, $\overline{O_2H_2} = \overline{H_2D} = r$. Според тоа

$$\overline{O_1H_1} = \frac{\overline{O_3H_3}+\overline{O_2H_2}}{2} = \frac{\overline{H_3D}+\overline{H_2D}}{2} = \frac{\overline{H_3H_2}}{2} = \frac{\overline{AH_2}+\overline{BH_3}-\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$$

$$\overline{AH_1} = \frac{\overline{AH_3}+\overline{AH_2}}{2} = \frac{\overline{AH_2}+\overline{AB}-\overline{BH_3}}{2} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2} .$$

Нека O'_1 е центар на γ_1, $O'_1H'_1 \perp AB$, $O'_1M \perp AC$, $O'_1N \perp BC$ и H'_1, M, N се допирни точки на ΔABC и γ_1. Тогаш

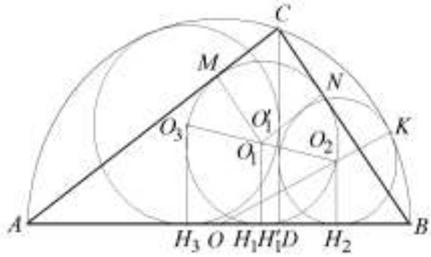
$$\overline{AH'_1} + \overline{AM} = (\overline{AB} - \overline{BH'_1}) + (\overline{AC} - \overline{MC}) = \overline{AC} + \overline{AB} - (\overline{MC} + \overline{BH'_1})$$
$$= \overline{AC} + \overline{BC} - (\overline{CN} + \overline{BN}) = \overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}.$$

бидејќи $\overline{MC} = \overline{CN}$ и $\overline{BH'_1} = \overline{BN}$ (разгледај ги тангентите од точките B и C кон кружницата). Според тоа

$$\overline{O'_1H'_1} = \overline{O'_1M} = \overline{CM} = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2} = \overline{O_1H_1} .$$

Ако триаголникот ABC не е рамнокрак тогаш $O_2O_3 \not\parallel AB$, од што следува дека точките O_1 и O'_1 се совпаѓаат. Ако триаголникот ABC е рамнокрак, тогаш радиусите на γ_1, γ_2 и γ_3 се еднакви на $(\sqrt{2}-1)R$.

Докажавме дека O_1, O_2 и O_3 лежат на една права. Понатаму, правата која е симетрична на тангентата на кружница во однос на правата која минува низ центарот повторно е тангента на кружницата. Според тоа, правата симетрична со AB во однос на правата $O_1O_2 \equiv O_2O_3$ е бараната втора тангента.



21. Дадена е кружница C и точка P надвор од кружницата. Отсечките PA и PB се тангенти на кружницата C и K е произволна точка од отсечката AB. Опишаната кружница околу $\triangle PBK$ по вторпат ја сече C во точка T . Ако точката P' е симетрична на P во однос на A, докажи дека $\measuredangle PBT = \measuredangle P'KA$.

Решение. Бидејќи четириаголникот $KTPB$ е тетивен, важи $\measuredangle AKT = \measuredangle BPT$. Оттука и од

$$\measuredangle TAK = \frac{\overset{\frown}{TB}}{2} = \measuredangle TBP$$

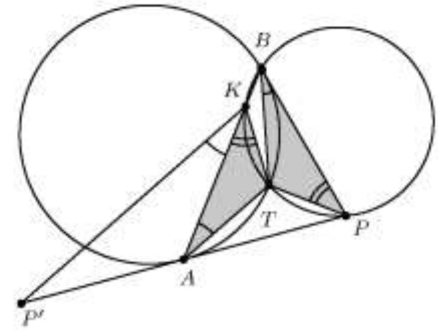
следува дека $\triangle TAK \sim \triangle TBP$. Затоа

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AP'}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{TA}} .$$

Горните равенства и

$$\measuredangle P'AK = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \measuredangle BTA$$

означуваат дека $\triangle P'AK \cong \triangle BTA$. Според тоа, $\measuredangle P'AK = \measuredangle BAT = \measuredangle PBT$, со што доказот е завршен.

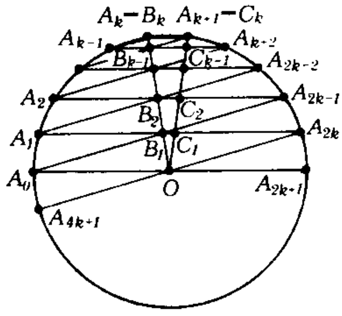


22. Даден е правилен $(4k+2)-$аголник $A_0A_1...A_{4k+1}$ со центар O. Докажи дека збирот на отсечките што ги отсекуваат краците на аголот A_kOA_{k+1} на правите $A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1},..., A_kA_{k+1}$ е еднаков на радиусот OA_0 на опишаната кружница на $(4k+2)-$аголникот.

Решение. Да ги означиме разгледуваните отсечки на тетивите со $B_iC_i, i = 1,2,...,k$ ($B_k = A_k$, $C_k = A_{k+1}$, цртеж лево). Бидејќи точките A_{k-i} и A_{k+i} , $i = 1,2,...,k$, а исто така и точките A_{4k+1} и A_{2k} се симетрични во однос на правата OA_k добиваме дека тетивите

$$A_{4k+1}A_{2k},\ A_0A_{2k-1}, A_1A_{2k-2}, ..., A_{k-1}A_{k+1}$$

се симетрични на тетивите



$$A_0A_{2k+1},\ A_1A_{2k},\ A_2A_{2k-1},\ ...,\ A_kA_{k+1}$$

во однос на правата OA_k, соодветно, и затоа тие се сечат во точките $O, B_1, B_2, ..., B_k$ и се паралелни меѓу себе. Според тоа, четириаголниците

$$OA_0B_1A_{2k},\ B_1A_1B_2A_{2k-1}, ..., B_{k-1}A_{k-1}B_kA_{k+1}$$

се паралелграми и за радиусот на дадената кружница добиваме

$$\begin{aligned}\overline{OA_0} &= \overline{B_1A_{2k}} = \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_{2k}} = \overline{B_1C_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} + \overline{B_2A_{2k-1}}\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{A_2B_2} = \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{B_3A_{2k-2}} = ...\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + ... + \overline{B_{k-2}C_{k-2}} + \overline{B_{k-1}A_{k+2}}\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + ... + \overline{B_{k-2}C_{k-2}} + \overline{B_{k-1}C_{k-1}} + \overline{B_kC_k}\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. ПЛОШТИНИ НА РАМНИНСКИ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

1. Од сите точки P кои лежат на страните AB, BC или CA на правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$) најди ја онаа за која збирот $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ е најмал.

Решение. Ако точката P е на катетата BC тогаш $\overline{BP} + \overline{CP} = a$. Тогаш $\overline{AP} + a$ е најмал ако $\overline{AP} = b$. Слично, ако P е на катетата AC збирот има најмала вредност кога е еднаков на збирот на катетите $a+b$. Нека P е на хипотенузата AC. Тогаш $\overline{BP} + \overline{AP} = c$, а $\overline{CP} + c$ има најмала вредност ако $\overline{CP} = h_c$. Останува да ги споредиме збировите $a+b$ и $c+h_c$. Од $c^2 = a^2 + b^2$ и $h_c > 0$ следува $c^2 + h_c^2 > a^2 + b^2$. Бидејќи $ch_c = ab$, добиваме $c^2 + 2ch_c + h_c^2 > a^2 + 2ab + b^2$, $(c+h_c)^2 > (a+b)^2$ и затоа $a+b < c+h_c$. Значи, најмалата вредност на збирот $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ е $a+b$, а тогаш $P \equiv C$.

2. Права која минува низ центарот на впишаната кружница во триаголник, го дели триаголникот на два дела така, што односнот на нивните плоштини е еднаков на односот на нивните периметри. Докажи, дека тој однос е еднаков на 1.

Решение. Можеме да сметаме дека правата ги сече страните AB и BC на $\triangle ABC$ соодветно во точките D и E (направи цртеж). Ако со I и r соодветно ги означиме центарот и радиусот на впишаната кружница, тогаш од условот на задачата следува

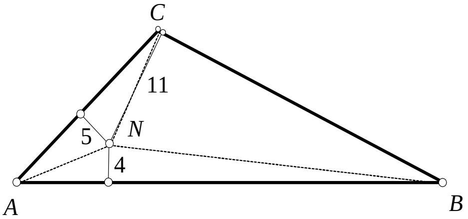
$$P_{CDE} = P_{CDI} + P_{CEI} = \frac{r(\overline{CD}+\overline{CE})}{2},$$

па затоа $\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{CD}+\overline{CE}}{L_{ABC}}$. Тогаш

$$\frac{L_{CDE}}{L_{ABED}} = \frac{P_{CDE}}{P_{ABED}} = \frac{L_{CDE} - \overline{DE}}{L_{ABED} - \overline{DE}},$$

од каде $L_{CDE} = L_{ABDE}$.

3. Во внатрешноста на триаголникот ABC се избрани две точки M и N. Растојанијата на точките M и N до страните AB, BC, CA се $1,15,3$ и $4,11,5$ соодветно. Определи го радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC.



Решение. Нека должините на страните на триаголникот се a,b,c. За плоштините на триаголниците ANB, BNC и CNA имаме: $2P_{ANB} = 4c$, $2P_{BNC} = 11a$ и $2P_{CNA} = 5b$, па затоа

$$2P_{ABC} = 2P_{ANB} + 2P_{BNC} + 2P_{CNA} = 4c + 11a + 5b\,. \qquad (1)$$

Потполно аналогно,

$$2P_{ABC} = 2P_{AMB} + 2P_{BMC} + 2P_{CMA} = c + 15a + 3b \qquad (2)$$

Ако (2) го помножиме со 2 и го одземеме (1), добиваме $2P_{ABC} = 7c + 7a + 7b$, т.е.

$$\frac{2P_{ABC}}{a+b+c} = 7\,. \qquad (3)$$

Од друга страна, знаеме дека во секој триаголник ABC, ако r е радиусот на впишаната кружница, а a,b,c се должини на страните на триаголникот, тогаш

$$r = \frac{2P_{ABC}}{a+b+c}\,.$$

Од последното равенство и (3), добиваме $r = 7$.

4. Нека должините на страните на еден правоаголен триаголник се a,b,c (c е должината на хипотенузата), при што

$$\frac{12}{a} + \frac{12}{b} = \frac{35}{c}\,.$$

Докажи дека тој е египетски, т.е. односот на неговите страни е $3:4:5$.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во видот

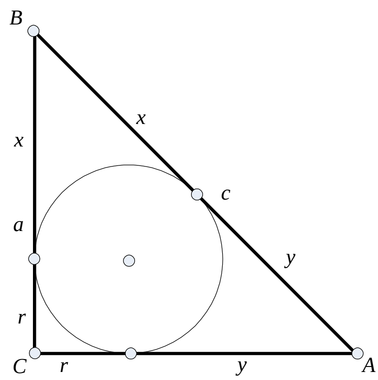
$$\frac{c(a+b)}{ab} = \frac{35}{12}\,. \qquad (*)$$

За должините на катетите a и b, должината на хипотнузата c и радиусот на впишаната кружница r е исполнето равенството

$$a + b = c + 2r\,, \qquad (1)$$

и неговата плоштина е $P = \frac{1}{2}ab$, односно $ab = 2P$. Исто така $2P = r(a+b+c)$, па според тоа,

$$ab = 2P = r(a+b+c) = r(2c+2r)\,. \qquad (2)$$



$c + 2r = (x+r) + (y+r) = a + b$

Ако (1) и (2) ги замениме во (*), добиваме

$$\frac{c(c+2r)}{r(2c+2r)} = \frac{35}{12} \qquad (3)$$

Равенката (3) можеме да ја запишеме во облик

$$6c^2 - 23cr - 35r^2 = 0$$

$$(c-5r)(6c+7r)=0\ .$$

Од тоа што $c,r>0$, решение на последната равенка е $c=5r$. Ако сега замениме во (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases} a+b=7r, \\ ab=12r^2. \end{cases}$$

Решенијата за a и b се решенија на равенката

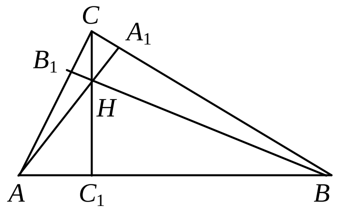
$$t^2-7rt+12r^2=0$$
$$(t-3r)(t-4r)=0\ .$$

Значи, страните на триаголникот се $3r,4r$ и $5r$ и тие го исполнуваат условот на задачата.

5. Нека H е ортоцентарот во $\triangle ABC$ и нека A_1,B_1,C_1 се подножјата на висините спуштени од A,B,C соодветно. Нека $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}=2008$. Пресметај го производот $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}\cdot\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}$.

Решение. Имаме,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+1=\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{HA_1}}{\overline{HA_1}}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{HA_1}}=\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta HBC}}\ .$$



Слично,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+1=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle HCA}} \text{ и } \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}+1=\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle HAB}}\ .$$

Да означиме со $x=P_{\triangle HBC}$, $y=P_{\triangle HCA}$, $z=P_{\triangle HAB}$, тогаш $P_{\triangle ABC}=x+y+z$. Со овие ознаки и претходните трансформации, равенството $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}=2008$ преминува во

$$\frac{x+y+z}{x}-1+\frac{x+y+z}{y}-1+\frac{x+y+z}{z}-1=2008\ ,$$

што е еквивалентно со

$$(x+y+z)(yz+xz+xy)=2011xyz\ . \qquad (1)$$

Производот што треба да се пресмета е

$$\left(\frac{x+y+z}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{y}-1\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{z}-1\right)=\frac{y+z}{x}\cdot\frac{x+z}{y}\cdot\frac{x+y}{z}=\frac{(y+z)\cdot(x+z)\cdot(x+y)}{xyz}$$
$$=\frac{(x+y+z)\cdot(yz+xz+xy)-xyz}{xyz}=\frac{2011xyz-xyz}{xyz}=2010.$$

6. Користејќи го фактот дека питагорините тројки го имаат обликот

$$(xy,\frac{x^2-y^2}{2},\frac{x^2+y^2}{2})\ ,\ x>y\ ,$$

каде што x и y се природни броеви со иста парност, да се одреди кој правоаголен триаголник со целобројни страни и катета 1000 има:

а) најголем периметар;

б) најмала плоштина.

Решение. Од $1000 = pq$ добиваме дека $p = 2^a 5^b$ и $q = 2^{3-a} 5^{3-b}$, каде што $a \in \{1,2\}$ и $b \in \{0,1,2,3\}$. Значи, страните на триаголникот се

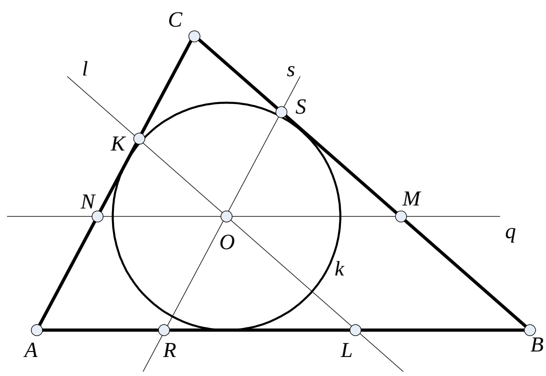
$$x = 1000,\ y = 2^{2a-1}5^{2b} - 2^{5-2a}5^{6-2b},\ z = 2^{2a-1}5^{2b} + 2^{5-2a}5^{6-2b}$$

а) Периметарот $L = x + y + z = 1000 + 2^{2a}5^{2b}$ ќе прима најголем авредност за најголемите вредности дозволени вредности на a и b, т.е. за $a = 2$ и $b = 3$. Следствено, $x = 1000$, $y = 124998$, $z = 125002$ и $L = 251000$.

б) Плоштината на триаголникот ќе биде најмала за оние вредности на a и b за кои $y = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ ќе прими најмала позитивна вредност. Со непосредна провер-ка се добива дека тоа се постигнува за $a = 1$ и $b = 2$. Следствено $x = 1000$, $y = 1050$, $z = 1450$ и $P = 525000$.

7. Нека m, n и p се должините на отсечките кои ги отсекуваат страните триаголникот ABC од правите кои минуваат низ центарот на впишаната кружница и се паралелни со BC, CA и AB соодветно. Докажи дека $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2$, каде $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ и $c = \overline{AB}$.

Решение. Нека k е впишаната кружница во триаголникот ABC со центар O и радиус r. Правите q, s и l минуваат низ точката O и се паралелни со AB, AC и BC соодветно. Точките M и N се пресеци на q со BC и AC, R и S се пресеци на s со AB и CB, а K и L се пресеци на l со AC и AB соодветно. Тогаш $\overline{KL} = m$, $\overline{RS} = n$ и $\overline{MN} = p$.



Нека h_a, h_b, h_c се стандардни ознаки за висините на триаголникот а $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$ се стандардни ознаки за должините на страните.

Паровите триаголници ABC и NMC, ABC и RBS, ABC и ALK се слични. Висините на триаголниците NMC, RBS и ALK од точките C, B и A се еднакви на $h_c - r$, $h_b - r$ и $h_a - r$ соодветно. Според тоа

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{h_c - r}{h_c}, \quad \frac{\overline{RS}}{\overline{AC}} = \frac{h_b - r}{h_b}, \quad \frac{\overline{KL}}{\overline{BC}} = \frac{h_a - r}{h_a},$$

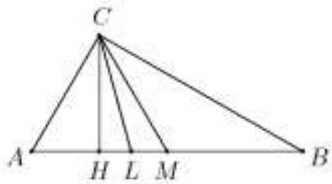
односно

$$\frac{p}{c} = 1 - \frac{r}{h_c}, \quad \frac{n}{b} = 1 - \frac{r}{h_b}, \quad \frac{m}{a} = 1 - \frac{r}{h_a}.$$

Сега

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 3 - r(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) = 3 - r(\frac{a}{2P} + \frac{b}{2P} + \frac{c}{2P}) = 3 - r\frac{a+b+c}{2P} = 3 - r\frac{1}{r} = 3 - 1 = 2.$$

8. Нека CH, CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ соодветно се $\frac{1}{4}$ и $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

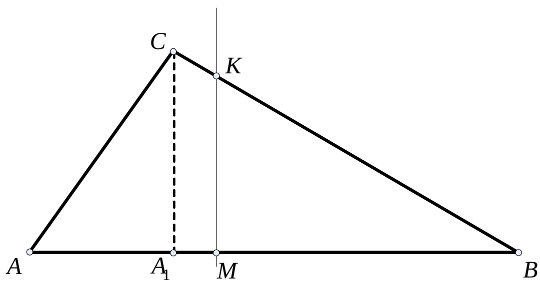


Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle BAC \geq \measuredangle ABC$. Тогаш точките A, H, L, M и B на AB се распоредени според овој редослед (цртеж десно). Од $4P_{HMC} = P_{ABC}$ следува дека $4\overline{HM} = \overline{AB}$, т.е. H е средина на AM. Од $P_{HMC} = (1-\frac{\sqrt{3}}{2})P_{ABC}$ следува дека $\frac{\overline{LM}}{2\overline{AB}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $\frac{\overline{AM}-\overline{LM}}{\overline{AM}+\overline{LM}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Го изразуваме $\overline{CH}^2$ на два начина, преку Питагоровата теорема за $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ и добиваме $\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} = 3\overline{AC}^2 - \frac{9\overline{AB}^2}{4}$, од каде добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Тогаш $\overline{AB} = 2\overline{CM}$, што значи дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Оттука и од $\overline{BC} = \sqrt{3}\overline{AC}$ заклучуваме дека $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$.

Кога $\measuredangle BAC \leq \measuredangle ABC$, аналогно се добива дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$.

9. Во триаголникот ABC, висината h_c ја дели страната AB на делови p и q. На страната AB е повлечена нормала, којашто го дели триаголникот ABC на два дела со еднакви плоштини. Нека M е пресечна точка на таа нормала со AB. Да се најде $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$.

Решение. Од условот на задачата следува $\triangle C_1BC \sim \triangle MBK$ (види цртеж). Навистина и двата триаголници се правоаголни и имаат еден заеднички агол, кај темето B.



Од сличноста на триаголниците се добива следната пропорција

$$\overline{CC_1} : \overline{KM} = \overline{C_1B} : \overline{MB},$$

од каде што се добива

$$\overline{KM} = \frac{h_c \overline{MB}}{q}. \qquad (1)$$

Бидејќи плоштината на четириаголникот $AMKC$ е еднаква нап лоштината на триаголникот MBK, добиваме дека плоштината P на триаголникот ABC е

$$P = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{MB} \cdot \overline{KM} = \overline{MB} \cdot \overline{KM}. \qquad (2)$$

Од друга страна за плоштината P на триаголникот ABC важи

$$P=\frac{1}{2}(p+q)h_c \tag{3}$$

Равенствата (1), (2) и (3) го даваат следното равенство

$$\frac{1}{2}(p+q)h_c=\overline{MB}\frac{h_c\overline{MB}}{q}. \tag{4}$$

Користејќи го равенството (4) и очигледното равенство $\overline{AM}=\overline{AB}-\overline{MB}$, се добива

$$\overline{AM}=p+q-\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}.$$

10. За $\triangle ABC$ познати се страната a и плоштината P. Пресметај ги страните b и c, ако $b=3c$.

Решение. Во Хероновата формула $P^2=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}$ ставаме $b=3c$, и по средување на изразот ја добиваме равенката

$$64c^4-20a^2c^2+a^4+16P^2=0. \tag{1}$$

Страните на триаголникот мора да ги задоволуваат условот $b-c<a<b+c$ и како $b=3c$ добиваме $2c<a<4c$, односно $4c^2<a^2<16c^2$, од што следува $\frac{a^2}{16}<c^2<\frac{a^2}{4}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(t)=64t^2-20a^2t+a^4+16P^2.$$

Задачата има едно решение ако $f(\frac{a^2}{16})f(\frac{a^2}{4})<0$, што не е можно бидејќи $f(\frac{a^2}{16})=f(\frac{a^2}{4})=16P^2$.

Бидејќи $64f(\frac{a^2}{16})>0$ и $64f(\frac{a^2}{4})>0$ задачата има две решенија ако

$$D=16(9a^4-256P^2)\geq 0 \text{ и } \frac{a^2}{16}<\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{20a^2}{256}<\frac{a^2}{4}.$$

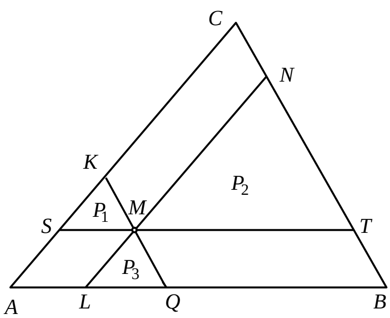
Бидејќи вториот услов е секогаш исполнет заклучуваме дека задачата има две решенија ако $P\leq\frac{3a^2}{16}$. Конечно, за да ги определиме страните b и c останува да ја решиме биквадратната равенка (1).

11. Во внатрешноста на триаголникот ABC е избрана точка M и низ неа се повлечени три прави кои се паралелни со страните на триаголникот. Тие прави го разделуваат триаголникот ABC на шест дела од кои три се триаголници. Плоштините на тие триаголници се P_1, P_2 и P_3.

Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Ако воведеме ознаки $\overline{AL}=m$, $\overline{LQ}=n$ и $\overline{QB}=p$, тогаш $\overline{AB}=m+n+p$. Бидејќи $LN\parallel AC$, $ST\parallel AB$ и $KQ\parallel BC$, триаголниците SMK, LQM, MTN и ABC се слични меѓу себе (попарно, со различни коефициентни на сличност). Бидејќи $\triangle SMK\sim\triangle ABC$ со коефициент на сличност

$$k=m:(m+n+p)=\frac{m}{m+n+p},$$



ако висината спуштена од темето K кон страната SM во триаголникот SMK е h_1 а h е должина на висната во триаголникот ABC спуштена од темето C кон страната AB, тогаш $h_1 : h = k = m:(m+n+p)$. Значи $h_1 = \frac{m}{m+n+p}h$. Конечно, ако плоштината на триаголникот ABC е P, тогаш

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{mh_1}{2}}{\frac{(m+n+p)h}{2}} = \frac{m\frac{m}{m+n+p}h}{(m+n+p)h} = \frac{m^2}{(m+n+p)^2},$$

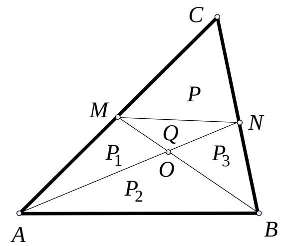
Од равенството $\frac{P_1}{P} = \frac{m^2}{(m+n+p)^2}$, добиваме $\frac{m}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}}$.

На сличен начин, заради сличноста на триаголниците LQM и ABC, добиваме $\frac{n}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}$, а од сличноста на триаголниците MTN и ABC добиваме $\frac{p}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}}$. Од равенствата $\frac{m}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}}$, $\frac{n}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}$ и $\frac{p}{m+n+p} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}}$, добиваме

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{m}{m+n+p} + \frac{n}{m+n+p} + \frac{p}{m+n+p} = 1,$$

т.е. $\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}$, па затоа $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$.

12. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките AN и BM се сечат во точката O. Плоштините на триаголниците AMO, ABO, BNO се еднакви на P_1, P_2, P_3 соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот CMN.



Решение. Плоштината на триаголникот CMN ќе ја означиме со P а плоштината на триаголникот MON ќе ја означиме со Q.

Триаголниците AMO и MON имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, и триаголниците AOB и NOB имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, па затоа $\frac{P_1}{Q} = \frac{\overline{AO}}{\overline{ON}} = \frac{P_2}{P_3}$. Од последното равенство добиваме $Q = \frac{P_1P_3}{P_2}$. Од парот триаголници CMN и BMN, и парот триаголници ANC и ANB, (секој пар има еднакви висини спуштени кон CN и NB, соодветно), добиваме: $\frac{P}{Q+P_3} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{P_1+Q+P}{P_2+P_3}$. Според тоа,

$$P(P_2 - Q) = Q^2 + QP_1 + QP_2 + P_1P_3, \text{ т.е. } P = \frac{Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3}{P_2-Q},$$

и ако во последното равенство замениме $Q = \frac{P_1P_3}{P_2}$, добиваме

$$P = \frac{(\frac{P_1P_3}{P_2})^2 + \frac{P_1P_3}{P_2}P_1 + \frac{P_1P_3}{P_2}P_3 + P_1P_3}{P_2 - \frac{P_1P_3}{P_2}} = \frac{P_1P_3(P_1+P_2)(P_2+P_3)}{P_2(P_2^2-P_1P_3)}.$$

13. Даден е триаголник ABC. На полуправите BA, CB и AC определени се точки A_1, B_1 и C_1 соодветно, такви што

$$\overline{BA_1} = (1+n)\overline{AB}\ ,\ \overline{CB_1} = (1+n)\overline{CB}\ ,\ \overline{AC_1} = (1+n)\overline{AC}\ .$$

Определи го односот на плоштините на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение. Ставаме $\overline{BA} = c$, $\overline{CB} = a$ и $\overline{AC} = b$, и добиваме

$$\overline{AA_1} = nc\ ,\ \overline{BB_1} = na\ ,\ \overline{CC_1} = nb\ .$$

Триаголниците C_1B_1B и C_1BC имаат еднакви висини спуштени на основите CB и BB_1, па затоа

$$\frac{P_{C_1B_1B}}{P_{C_1BC}} = \frac{na}{a} = n\ . \tag{1}$$

Аналогно,

$$\frac{P_{C_1BC}}{P_{ABC}} = \frac{nb}{b} = n\ . \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $P_{C_1B_1B} = n^2 P_{ABC}$. Значи, $P_{B_1C_1C} = (n^2+n)P_{ABC}$. Аналогно, $P_{A_1B_1B} = (n^2+n)P_{ABC}$ и $P_{C_1A_1A} = (n^2+n)P_{ABC}$. Конечно,

$$P_{A_1B_1C_1} = P_{ABC} + P_{A_1B_1B} + P_{B_1C_1C} + P_{C_1A_1A} = (3n^2+3n+1)P_{ABC}\ ,$$

т.е.

$$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = 3n^2+3n+1\ .$$

14. На страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$ се земени точки M, N и P, соодветно. Правата низ M и паралелна на BC, правата низ N и паралелна со AC, како и правата низ P и паралелна со AB се сечат во една точка T. Докажи, дека ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$, тогаш T се совпаѓа со тежиштето на $\triangle ABC$.

Решение. а) Нека $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = x, \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = y$ и $\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = z$, $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$, h_C е висината во $\triangle ABC$ низ темето C и h_P е должината на нормалата повлечена од точката P кон правата AB. Ќе искористиме дека збирот на плоштините на трапезите $AMTP, BMTN$ и $CNTP$ е еднаков на P_{ABC}. Нека правата NT ја сече AB во точка N_1, направи цртеж. Имаме $\frac{\overline{AN_1}}{\overline{BN_1}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{1}{y}$ од каде следува дека $\overline{PT} = \overline{AN_1} = \frac{c}{y+1}$. Аналогно, $\frac{h_P}{h_C} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{1}{z+1}$, т.е. $h_P = \frac{h_C}{z+1}$. Освен тоа, од $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = x$ следува дека $\overline{AM} = \frac{cx}{x+1}$. Тогаш

$$P_{AMTP} = \tfrac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{PT})h_P = \tfrac{1}{2}(\tfrac{x}{x+1} + \tfrac{1}{y+1})\tfrac{ch_c}{z+1}\ ,$$

па затоа $\frac{P_{AMTP}}{P_{ABC}} = (\frac{x}{x+1} + \frac{1}{y+1})\frac{1}{z+1}$. Аналогно,

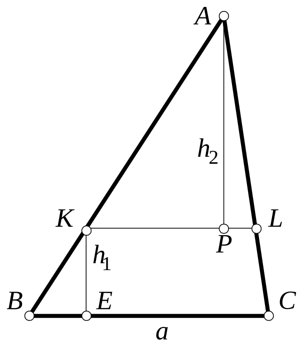
$$\frac{P_{BMTN}}{P_{ABC}} = (\tfrac{y}{y+1} + \tfrac{1}{z+1})\tfrac{1}{x+1} \text{ и } \frac{P_{CNTP}}{P_{ABC}} = (\tfrac{z}{z+1} + \tfrac{1}{x+1})\tfrac{1}{y+1}\ .$$

После собирањето на последните три равенства и средувањето на изразите добиваме

$$xyz = x + y + z + 2\,. \qquad (1)$$

Од (1) за $x = y = z$ добиваме $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 = 0$ и затоа $x = 2$. Оттука $h_P = \frac{1}{3}h_C$, што покажува дека точката T е на растојание $\frac{1}{3}h_C$ од AB. Аналогно се добива за растојанијата на T до другите две страни на $\triangle ABC$. Единствена внатрешна точка со тоа својство е тежиштето.

15. Основата на триаголникот има должина a. Пресметај ја должината на отсечката од правата која е паралелна на основата, има крајни точки на страните на триаголникот и ја дели плоштината на триаголникот на два еднакви дела.



Решение. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC} = a$ и нека KL е отсечка паралелна со BC, при што $K \in AB$ и $L \in AC$. Отсечката AP е висина во триаголникот AKL, а отсечката KE е висина во четириаголникот $KBCL$, и нека воведеме ознаки $\overline{AP} = h_2$, $\overline{KE} = h_1$ (должините на овие отсечки не ни се дадени). Нека должината на отсечката KL ја означиме со x.

Плоштината на триаголникот AKL е еднаква на $P_{\triangle AKL} = \frac{1}{2}xh_2$ а плоштината на трапезот $KBCL$ е еднаква на $P_{KBCL} = \frac{1}{2}(a+x)h_1$. Од условот на задачата $P_{\triangle AKL} = P_{KBCL}$, добиваме $\frac{1}{2}xh_2 = \frac{1}{2}(a+x)h_1$, па според тоа

$$x = \frac{ah_1}{h_2 - h_1}\,. \qquad (1)$$

Триаголниците ABC и AKL се слични. Ако $h = \overline{AQ}$ е должина на висината на триаголникот спуштена од темето A (Q е подножје на висината, види црт.), тогаш $h = h_1 + h_2$. Од сличноста на триаголниците добиваме $\frac{\overline{AP}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{BC}}$, $\frac{h_2}{h} = \frac{x}{a}$, односно

$$x = \frac{ah_2}{h} = \frac{ah_2}{h_1 + h_2}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) ја добиваме равенката $\frac{ah_1}{h_2 - h_1} = \frac{ah_2}{h_1 + h_2}$, која можеме да ја запишеме во облик $h_2^2 - 2h_1h_2 - h_1^2 = 0$, т. е. $(\frac{h_2}{h_1})^2 - 2\frac{h_2}{h_1} - 1 = 0$. Бидејќи позитивно решение на равенката $t^2 - 2t - 1 = 0$ е $t = 1 + \sqrt{2}$ (другото е негативно) , добиваме $\frac{h_2}{h_1} = 1 + \sqrt{2}$, па според тоа

$$x = \frac{ah_1}{h_2 - h_1} = \frac{a}{\frac{h_2}{h_1} - 1} = \frac{a}{1 + \sqrt{2} - 1} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

16. Нека ABC е триаголник при што точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно. Нека P е точка од опишаната кружница k околу триаголникот ABC. Правите PA_1, PB_1 и PC_1 ја сечат по вторпат кружницата k во точките A', B', C' соодветно. Нека точките A, B, C, A', B', C' се попарно различни, и правите AA', BB' и CC' формираат триаголник. Докажи дека плоштината на тој триаголник не зависи од изборот на точката P.

Решение. Нека A_0, B_0, C_0 се точки на пресек на правите AA', BB' и CC' (види цртеж). Ќе покажеме дека

$$P_{A_0B_0C_0} = \tfrac{1}{2} P_{ABC}.$$

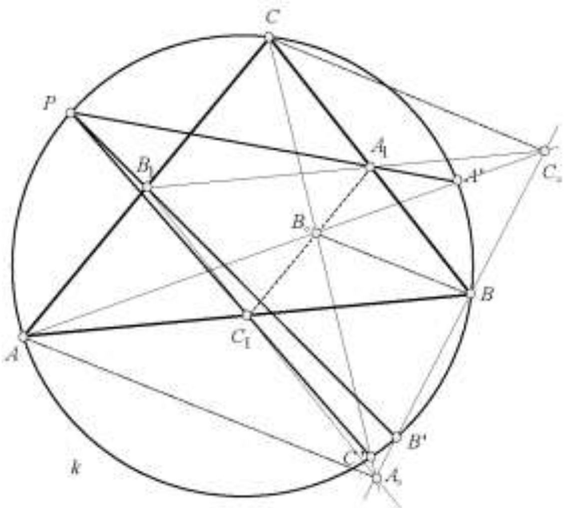
Ќе го разгледаме шестоаголникот $ABCC'PA'$. Според теоремата на Паскал, пресеците на спротивните страни се сечат во точки кои припаѓаат на една права. Според тоа, точките

$AB \cap C'P = C_1$,

$BC \cap PA' = A_1$ и

$CC' \cap AA' = B_0$

лежат на една права. Според тоа, точката B_0 лежи на средната линија на A_1C_1 на триаголникот ABC. Аналогно, точката A_0 припаѓа на средната линија B_1C_1 и C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC (види цртеж).



Отсечките AC и A_1C_1 се паралелни, па според тоа, триаголниците $B_0C_0A_1$ и AC_0B_1 се слични. Од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}} = \frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}}. \qquad (1)$$

Аналогно, од тоа што $BC \parallel B_1C_1$, добиваме дека триаголниците $B_1A_0C_0$ и A_1BC_0 се слични. Според тоа, од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}} = \frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}} = \frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}}$, кое е еквивалентно со равенството:

$$\overline{B_0C_0} \cdot \overline{A_0C_0} = \overline{AC_0} \cdot \overline{BC_0}.$$

Според тоа,

$$P_{A_0B_0C_0} = \tfrac{1}{2}\overline{B_0C_0} \cdot \overline{A_0C_0} \sin\measuredangle A_0B_0C_0 = \tfrac{1}{2}\overline{AC_0} \cdot \overline{BC_0} \sin\measuredangle AC_0B = P_{ABC_0}.$$

Точката C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC од каде што добиваме дека

$$d(C_0, AB) = \frac{1}{2} d(C, AB)$$

(со $d(X, YZ)$ е означено растојанието од точката X до правата YZ). Тогаш

$$P_{A_0B_0C_0} = P_{ABC_0} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot d(C_0, AB) = \frac{1}{4}\overline{AB}\cdot d(C, AB) = \frac{1}{2}P_{ABC}.$$

Десната страна на последното равенство не е во зависност од точката P. Значи, независност од изборот на точката P имаме $P_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{2}P_{ABC}$.

17. Во остроаголниот $\triangle ABC$ отсечките AA_1 $(A_1 \in BC)$, BB_1 $(B_1 \in AC)$ се висини, а точката M е средина на страната AB. Триаголникот A_1B_1M е правоаголен и има плоштина еднаква на 2.

а) Определи ја должината на страната AB и големината на $\measuredangle ACB$.

б) Определи ја должината на радиусот на кружницата опишана околу $\triangle A_1B_1C$.

Решение. а) Бидејќи A_1M и B_1M се тежишни линии кон хипотенузата AB во $\triangle AA_1B$ и $\triangle BB_1A$, добиваме $\overline{A_1M} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{B_1M}$ (направи цртеж). Сега, од условот следува дека $\measuredangle A_1MB_1 = 90^\circ$. Освен тоа, $\measuredangle AB_1M = \measuredangle B_1AM = \alpha$ и $\measuredangle BA_1M = \measuredangle A_1BM = \beta$.

Имаме

$$2 = P_{A_1B_1M} = \frac{\overline{A_1M}\cdot\overline{B_1M}}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{8}$$

и затоа $\overline{AB} = 4$. Освен тоа, $\measuredangle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha$ и $\measuredangle BMA_1 = 180^\circ - 2\beta$, па затоа $90^\circ = \measuredangle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 135^\circ$ и затоа $\gamma = 45^\circ$.

б) Нека O и R се соодветно центарот и радиусот на опишаната кружнца околу $\triangle A_1B_1C$. Тогаш $\measuredangle A_1OB_1 = 2\measuredangle A_1CB_1 = 90^\circ$. Значи, $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle A_1MB_1$ се рамнокраки правоаголни со заедничка хипотенуза A_1B_1. Според тоа, овие триаголници се складни, па затоа $R = \overline{A_1O} = \overline{A_1M} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2$.

18. Од остроаголен триаголник ABC да се отсечат 2003 правоаголници секој од кои има страна паралелна на AB и збирот на плоштините да е максимален.

Решение. Не е тешко да се заклучи дека збирот на плоштините е максимален ако правоаголниците имаат заеднички страни, страната на најдолниот правоаголник лежи на AB и секој има по едно теме на страните AC и BC.

Со индукција ќе докажеме дека максимален збир на плоштините при n правоаголници се достигнува кога страната AC е поделена на $n+1$ еднакви делови од темињата на правоаголниците кои лежат на неа. Оттука ќе следува дека максималната сума е $\frac{n}{n+1}P_{ABC}$.

За $n = 1$ бараме правоаголник $MNPQ, M, N \in AB, P \in BC, Q \in AC$ со максимална плоштина. Ако означиме $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = x$, тогаш лесно се пресметува дека $P_{MNPQ} = 2x(1-x)P_{ABC}$. Затоа P_{MNPQ} е максимална ако $x = \frac{1}{2}$, т.е. Q е средината на AC. Нека претпоставиме дека дека тврдењето важи за k правоаголници и да разгледаме $k+1$ правоаголници $M_iN_iP_iQ_i$, каде $M_iN_i \in P_{i-1}Q_{i-1}, (P_0 \equiv A, Q_0 \equiv B)$ и $P_i \in BC, Q_i \in AC, i=1,2,...,k+1$. Ако $\frac{\overline{CQ_1}}{\overline{AC}} = x$, тогаш $P_{M_1N_1P_1Q_1} = 2x(1-x)P_{ABC}$.

Од индуктивната претпоставка следува дека $\sum_{i=2}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i}$ е максимална кога $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = ... = \overline{Q_kQ_{k+1}} = \overline{Q_{k+1}C}$ и затоа

$$\sum_{i=2}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i} \le \frac{kP_{Q_1P_1C}}{k+1} = \frac{kx^2P_{ABC}}{k+1}.$$

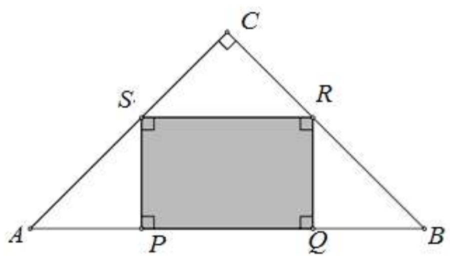
Тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} P_{M_iN_iP_iQ_i} &\le (2x(1-x) + \tfrac{kx^2}{k+1})P_{ABC} \\ &= [\tfrac{k+1}{k+2} - \tfrac{k+1}{k+2}(x - \tfrac{k+1}{k+2})^2]P_{ABC} \\ &\le \tfrac{k+1}{k+2}P_{ABC}\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако $x = \frac{k+1}{k+2}$, т.е. ако точките $Q_i, i=1,2,...,k+1$ ја делат страната AC на еднакви делови.

19. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник чии катети се со должина 10. Определи ја најголемата можна плоштина на правоаголникот чија една страна лежи на хипотенузата, а темињата на спротивната страна припаѓаат на катетите.

Решение. Нека правоаголникот $PQRS$ е впишан во $\triangle ABC$ на зададениот начин (види цртеж). Од Питагоровата теорема следува дека $\overline{AB} = 10\sqrt{2}$. Да означиме $\overline{QR} = x$ и $\overline{PQ} = y$. Триаголниците BRQ и APS се рамнокраки, па затоа $\overline{AP} = x$ и $\overline{BQ} = x$. Од овде следува дека $2x + y = 10\sqrt{2}$ и за плоштината на правоаголникот добиваме



$$P(x) = xy = x(10\sqrt{2} - 2x) = 2x(5\sqrt{2} - x).$$

Функцијата $P(x)$ е квадратна, а нејзиниот максимум се достигнува во апсциса со теме $x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Според тоа, најголемата можна плоштина е еднаква на $P(\frac{5}{2}\sqrt{2}) = 25$.

20. Докажи, дека постојат бесконечно многу триаголници T кои не се складни и за кои:

а) должините на страните a,b,c на T се заемно прости природни броеви, т.е. најголемиот заеднички делител на a,b,c е 1,

б) плоштината на T е природен број,

в) должините на висините на T не се природни броеви.

Решение. Триаголниците со страни

$$a = 4n^2 + 1, b = 4n^4 + 1, c = 4n^2(n^2 + 1) \; ,$$

каде $n \geq 2$ е природен број, го имаат саканите својства. Доказот непосредно следува од равенствата $s - a = 4n^4$, $s - b = 4n^2$, $s - c = 1$ и Хероновата формула.

Триаголниците со страни

$$a = (n+1)^2(n^2+1), b = n^2(n^2+n-2), c = 2n^4 + 2n^2 + 1 \; ,$$

каде $n \geq 5$ е непарен природен број ги имаат саканите својства. Докажи!

21. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштините на четири од нив се $8, 10, 5, 12$ како што е прикажано на цртежот.

8	10	
	5	
		12

Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Со a, b, c ќе ги означиме ширините на вертикалните правоаголници кои го разделуваат правоаголникот $ABCD$, а со x, y, z висините на хоризонталните правоаголници на кои е разделен правоаголникот $ABCD$ (види цртеж). Тогаш според дадените податоци имаме $ax = 8$, $bx = 10$, $by = 5$ и $cz = 12$. Од последните равенства добиваме

$$a = \tfrac{8}{x}, \; b = \tfrac{10}{x}, \; c = \tfrac{12}{z}, \; y = \tfrac{x}{2}.$$

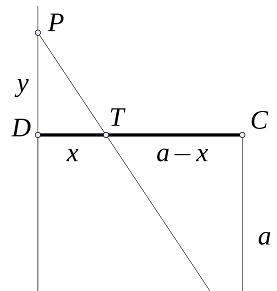
	a	b	c
x	8	10	
y		5	
z			12

Со P ќе ја означиме плоштината на правоаголникот. Тогаш

$$\begin{aligned} P &= 8 + 10 + 5 + 12 + az + ay + bz + cy + cz \\ &= 35 + \tfrac{8}{x}z + \tfrac{8}{x}\tfrac{x}{2} + \tfrac{10}{x}z + \tfrac{12}{z}\tfrac{x}{2} + \tfrac{12}{z}x \\ &= 39 + 18(\tfrac{x}{z} + \tfrac{z}{x}). \end{aligned}$$

Изразот $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$ добива најмала вредност $2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 2$ и таа се достигнува за $\frac{x}{z} = \frac{z}{x}$, т.е. $x^2 = z^2$. Бидејќи $x, z > 0$ добиваме $x = z$. Во тој случај плоштината е $P = 75$. Притоа $x = z = 2y$.

22. Даден е квадрат $ABCD$. Точката P припаѓа на правата AD при што BP ја сече отсечката CD во точката T. Ако збирот на плоштините на триаголниците PDT и BCT е минимален, докажи дека $\overline{AP} = \overline{BD}$.



Решение. Според ознаките на цртежот триаголниците ΔBCT и ΔPDT се слични, па според тоа

$$a : x = y : (a - x) \text{, т.е. } y = \tfrac{a}{x}(a - x).$$

Но, тогаш

$$P_{\Delta PDT}+P_{\Delta CBT}=\frac{1}{2}[y(a-x)+ax]=\frac{1}{2}[\frac{a}{x}(a-x)^2+ax]$$
$$=\frac{a}{2}(\frac{a^2}{x}+2x-2a)\overset{AG}{\geq}\frac{a}{2}(2\sqrt{2}a-2a)$$
$$=a(\sqrt{2}-1).$$

Максимум се достигнува ако $\frac{a^2}{x}=2x$, т.е. $a=x\sqrt{2}$. Тогаш

$$\overline{AP}=a+\frac{a}{x}(a-x)=2x \text{ и } \overline{BD}=a\sqrt{2}=2x \text{, т.е. } \overline{AP}=\overline{BD}.$$

23. Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на p, ($p<1$).

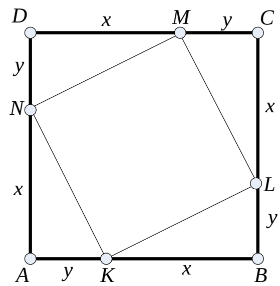
Решение. Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што K,L,M и N припаѓаат на страните AB,BC,CD и DA соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL}=y$, $\overline{KB}=x$, $\overline{KL}=b$ и $\overline{AB}=a$, при што можеме да претпоставиме $x>y$. Тогаш

$$P_1=P_{ABCD}=a^2=(x+y)^2,$$

а според Питагорината теорема $b^2=x^2+y^2$, па затоа

$$P_2=P_{KLMN}=b^2=x^2+y^2.$$

Од условот на задачата $\frac{P_2}{P_1}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$, каде $0<p<1$. Равенството $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$ можеме да го запишеме во облик



$$(1-p)x^2-2pxy+(1-p)y^2=0 \qquad /:y^2$$
$$(1-p)(\frac{x}{y})^2-2p\frac{x}{y}+(1-p)=0.$$

Ако воведеме ознака $\frac{x}{y}=t$ добиваме

$$(1-p)t^2-2pt+(1-p)=0. \qquad (1)$$

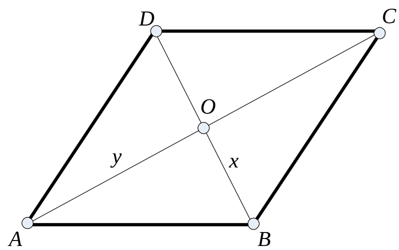
Решенија на равенката (1) се

$$t_1=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}, \qquad t_1=\frac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}.$$

Јасно е дека $\frac{x}{y}=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

24. Периметарот на еден ромб е $2p$, а збирот на неговите дијагонали е m. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб и O е пресек на неговите дијагонали AC и BD. Ќе воведеме ознаки $\overline{AO}=y$ и $\overline{BO}=x$ (види цртеж). Тогаш



$$x+y=\frac{1}{2}(2x+2y)=\frac{1}{2}m. \qquad (1)$$

Ако a е должина на страната на ромбот, тогаш $a=\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$.

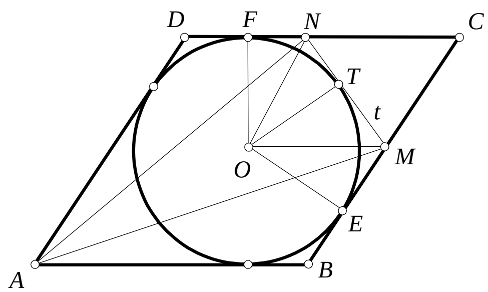
Бидејќи дијагоналите на ромбот се заемно нормални, од правоаголниот триаголник BOA добиваме $x^2+y^2=\frac{p^2}{4}$. Ако равенството (1) го квадрираме, добиваме $(x+y)^2=\frac{m^2}{4}$, т.е. $x^2+y^2+2xy=\frac{m^2}{4}$,па затоа

$$2xy=\frac{m^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\frac{m^2-p^2}{4}.$$

Бидејќи $P=4\frac{1}{2}xu=2xy$, добиваме $P=\frac{m^2-p^2}{4}$.

25. Во ромбот $ABCD$ е впишана кружница. Произволна тангента t на вписаната кружница ги сече страните BC и CD во внатрешни точки M и N соодветно. Докажи дека плоштината на триаголникот AMN е константна.

Решение. Нека O е центарот на кругот и нека кругот ги допира BC и CD во E и F соодветно. Нека T е точката во која тангентата MN го допира кругот. Бидејќи $\overline{NF}=\overline{NT}$ и $\measuredangle OFN=\measuredangle OTN$ триаголниците $\triangle ONF$ и $\triangle ONT$ се складни. Па



$$P_{\triangle ONF}=P_{\triangle ONT}.$$

Сега

$$P_{\triangle ANF}=2P_{\triangle ONF},$$

бидејќи имаат иста основа NF но висината на $\triangle ANF$ кон NF е дијаметарот на кругот, а висината на $\triangle ONF$ кон NF е OF, радиус на кругот. Според тоа $P_{\triangle ANF}=P_{OTNF}$ и аналогно $P_{\triangle AME}=P_{OTME}$.

Сега

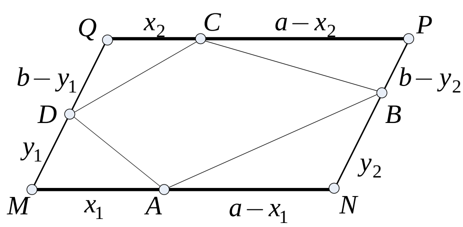
$$P_{\triangle AMN}=P_{AEMNF}-P_{\triangle AEM}-P_{\triangle AFN}=P_{AEMNF}-P_{OTME}-P_{OTNF}=P_{AEOF}.$$

Значи $P_{\triangle AMN}$ не зависи од MN.

26. Даден е паралелограм $MNPQ$. На неговите страни MN, NP, PQ, QM се избрани точки A, B, C, D соодветно, така што плоштината на четириаголникот $ABCD$ е половина од плоштината на паралелограмот $MNPQ$. Докажи дека барем една дијагонала на четириаголникот $ABCD$ е паралелна со барем една страна на паралелограмот $MNPQ$.

Решение. Ќе воведеме ознаки

$\overline{MN}=\overline{PQ}=a$, $\overline{NP}=\overline{QM}=b$, $\overline{MA}=x_1$, $\overline{QC}=x_2$, $\overline{MD}=y_1$, $\overline{NB}=y_2$ (види цртеж). Нека $S_1=P_{ABCD}$ и $S=P_{MNPQ}$ се плоштините на четириаголниците $ABCD$ и $MNPQ$. Тогаш

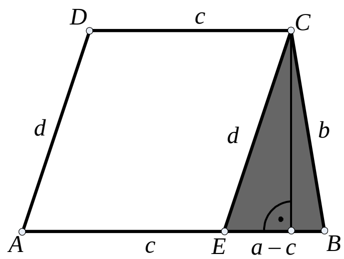


$$\frac{S_1}{S}=\frac{P_{ABCD}}{P_{MNPQ}}=\frac{P_{MNPQ}-(P_{\Delta MAD}+P_{\Delta QCD})-(P_{\Delta NAB}+P_{\Delta PBC})}{P_{MNPQ}}$$
$$=1-\frac{P_{\Delta MAD}+P_{\Delta QCD}}{P_{MNPQ}}-\frac{P_{\Delta NAB}+P_{\Delta PBC}}{P_{MNPQ}}$$
$$=1-\frac{x_1y_1+x_2(b-y_1)}{2ab}-\frac{(a-x_2)(b-y_2)+(a-x_1)y_2}{2ab}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{2ab}.$$

Сега, добиваме дека $\frac{S_1}{S}=\frac{1}{2}$ ако и само ако $\frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{2ab}=0$. Последното равенство е можно ако и само ако $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$, кое е еквивалетно со $AC\,||\,MQ$ или $BD\,||\,MN$, што требаше да се докаже.

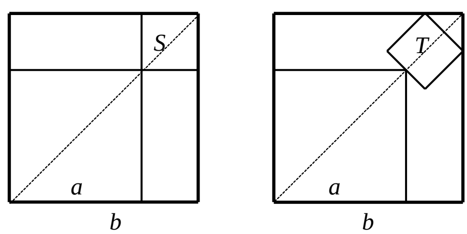
27. Определи ја плоштината на трапез на кој должините на страните му се a,b,c и d.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD при што $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$. Нека $E\in AB$ е таква што $AD\,||\,CE$. Тогаш $P_{\triangle EBC}=\frac{(a-c)h}{2}$, каде h е висината на трапезот. Ако s' е полупериметарот на триаголникот EBC, тогаш $s'=\frac{a-c+b+d}{2}$.



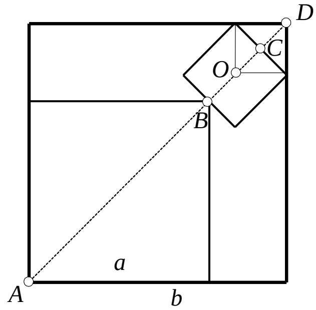
Според Хероновата формула имаме
$$P_{\triangle EBC}=\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$
од каде добиваме
$$\frac{(a-c)h}{2}=\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$
$$h=\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}\,.$$
Сега, површината на трапезот е
$$P=\frac{a+c}{2}h=\frac{a+c}{2}\,\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}=$$
$$=\frac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(a-b-c+d)(a-c+b-d)(-a+b+c+d)}.$$
Ако воведеме ознака $s=\frac{a+b+c+d}{2}$, добиваме
$$P=\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)}\,.$$

28. Квадратите S и T се во надворешноста од квадратот со страна a и во внатрешноста на квадратот со страна b како што е прикажано на цртежот. Страните на квадратот S се паралелни со страните на квадратите со страни a и b, а страните на квадратот T се паралелни со нивните



дијагонали. Определи го односот $P_S : P_T$.

Решение. Јасно е дека плоштината на квадратот S е еднаква на $(b-a)^2$. Нека должината на страната на квадратот T е $2x$. Ќе ја разгледаме дијагоналата AD на квадратот со страна b , како што е прикажанон а цртежот.



Оваа дијагонала има три дела, дијагоналата AB на квадратот со страна a , отсечка BC која е еднаква на должината на страната на квадратот T , и висината CD на малиот триаголник. Малиот триаголник е складен со четвртина од квадратот T , означена со испрекината линија.

Притоа $\overline{AD} = b\sqrt{2}$ и $\overline{AB} = a\sqrt{2}$ бидејќи се дијагонали на квадрати со страни b и a соодветно. Исто така, $\overline{BC} = 2x$ а $\overline{CD} = \overline{CO} = x$, бидејќи O е средина на квадратот T .

Но, $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ од каде што добиваме $b\sqrt{2} = a\sqrt{2} + 2x + x$, т.е. $x = \frac{1}{3}\sqrt{2}(b-a)$. Тогаш плоштината на квадратот T е

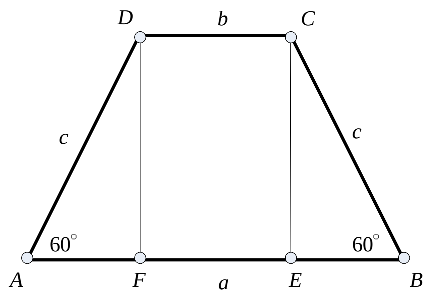
$$P_T = (2x)^2 = 4x^2 = \tfrac{8}{9}(b-a)^2 ,$$

од каде добиваме

$$P_S : P_T = (b-a)^2 : \tfrac{8}{9}(b-a)^2 = \tfrac{9}{8} .$$

29. Аглите при поголемата основа на трапезот имаат 60° , а неговиот периметар е $4p$ ($p > 0$). Определи ја должината на неговите страни за да неговата плоштина е најголема.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез во кој аглите при поголемата основа имаат по 60° . Нека основите се $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$, а краците $\overline{BC} = \overline{DA} = c$. Отсечките DF и CE се висини на трапезот (види цртеж). Триаголниците AFD и CEB се правоаголни во кои едниот остар агол е еднаков на 60° . Според тоа



$$\overline{EB} = \overline{AF} = \tfrac{1}{2}\overline{AD} = \tfrac{1}{2}\overline{CB} = \tfrac{c}{2} .$$

Бидејќи $\overline{AF} = \overline{EB} = \frac{a-b}{2}$, добиваме дека $c = a-b$. Ако замениме $c = a-b$ во $a+b+2c = 4p$ добиваме

$$a+b+2(a-b) = 4p$$
$$3a-b = 4p .$$

Од последното равенство имаме

$$\begin{cases} a+b = 4a-4p \\ a-b = 4p-2a \end{cases} .$$

Висината на трапезот е еднаква на

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)=\frac{\sqrt{3}}{2}(4p-2a)=(2p-a)\sqrt{3}.$$

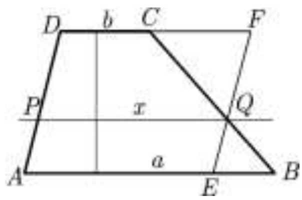
За плоштината на трапезот имаме

$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{4a-4p}{2}(2p-a)\sqrt{3}=2\sqrt{3}(a-p)(2p-a)$$

$$=2\sqrt{3}(-a^2+3pa-2p^2)=2\sqrt{3}(\frac{p^2}{4}-(a-\frac{3p}{2})^2).$$

Сега, јасно е дека $P_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{4}p^2$ и се добива за $a=\frac{3p}{2}, b=\frac{p}{2}, c=p$.

30. Броевите a и b се должини на основите на еден трапез. Определи ја должината на отсечката која е паралелна со основите, краевите и се на краците и трапезот го дели на два дела со еднакви плоштини.

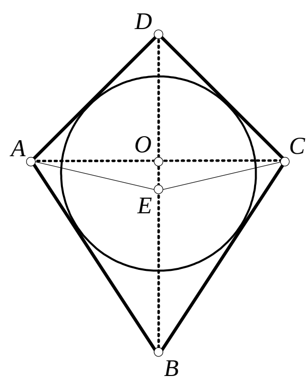


Решение. Нека PQ е отсечката која е паралелна со основите на трапезот, го дели треапезот на два трапези $ABPQ$ и $PQCD$ со еднакви плоштини, и има должина x. Отсечката EF е паралелна со бочната страна AD, крајните точки припаѓаат на правите на кои што лежат основите на трапезот и минува низ точката Q. Ако висината на трапезот $ABPQ$ е h_1, висината на трапезот $PQCD$ е h_2, и висината на $ABCD$ е h, тогаш $h_1+h_2=h$. Од условот на задачата $P_{ABQP}=P_{PQCD}$, па според тоа $\frac{a+x}{2}h_1=\frac{b+x}{2}h_2$, па според тоа $\frac{a+x}{b+x}=\frac{h_2}{h_1}$. Триаголниците BEQ и CFQ се слични триаголници (имаат еднакви агли). Бидејќи $\overline{EB}=a-x$ и $\overline{CF}=x-b$, добиваме $\frac{a-x}{x-b}=\frac{h_1}{h_2}$, т.е. $\frac{h_2}{h_1}=\frac{x-b}{a-x}$. Според тоа, $\frac{x-b}{a-x}=\frac{a+x}{b+x}$. Од последното равенство имаме

$$(x-b)(b+x)=(a+x)(a-x), \text{ т.е. } a^2-x^2=x^2-b^2.$$

Значи, $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

31. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O и се заемно нормални. Плоштините на триаголниците AOB, BOC, COD и DOA се прости броеви. Докажи дека $ABCD$ е тангентен.



Решение. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник во кој дијагоналитте AC и BD се сечат во точката O, а

$$P_{AOB}=m,\ P_{BOC}=n,\ P_{COD}=p \text{ и } P_{DOA}=q$$

при што m, n, p и q се прости броеви. Бидејќи дијагоналите се заемно нормални, имаме

$$P_{AOB}=\frac{1}{2}\overline{AO}\cdot\overline{BO}=m,\ P_{BOC}=\frac{1}{2}\overline{BO}\cdot\overline{CO}=n,$$

од каде добиваме

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{\overline{CO}\cdot\overline{BO}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{\frac{1}{2}\overline{CO}\cdot\overline{BO}}=\frac{m}{n}.$$

Од друга страна

$$P_{COD}=\tfrac{1}{2}\overline{CO}\cdot\overline{DO}=p,\ P_{DOA}=\tfrac{1}{2}\overline{DO}\cdot\overline{AO}=q,$$

од каде добиваме

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{DO}}{\overline{CO}\cdot\overline{DO}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AO}\cdot\overline{DO}}{\frac{1}{2}\overline{CO}\cdot\overline{DO}}=\frac{p}{q}.$$

Според тоа $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ и од тоа што m, n, p и q се прости броеви ги имаме следните можности:

а) $m=n$, $p=q$ заради што $\overline{AO}=\overline{OC}$ и $\triangle ABD\cong\triangle CBD$

б) $m=q$, $n=p$ заради што $\overline{BO}=\overline{DO}$ и $\triangle BAC\cong\triangle DAC$

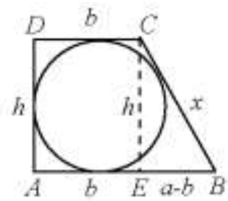
Во првиот случај, случајот а), симетралите на аглите $\measuredangle A$ и $\measuredangle C$ се сечат во точката E која припаѓа на дијагоналата BD. Дијагоналата BD е симетрала на $\measuredangle B$ и $\measuredangle D$. Точката E е еднакво оддалечена од сите страни на четириаголникот, па е центар на впишаната кружница во него.

Вториот случај се разгл;едува аналогно, со тоа што оска на симетрија е другата дијагонала AC, која е симетрала на $\measuredangle A$ и $\measuredangle C$. Симетралите на $\measuredangle B$ и $\measuredangle D$ се сечат во точка дијагоналата AC која е центар на впишана кружница во $ABCD$.

32. Основите на правоаголен тангентен трапез се a и b. Пресметај ја плоштината на овој трапез.

Решение. Нека $AB\parallel CD$, $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{BC}=x$, $\overline{AD}=h$, $AD\perp AB$ и нека $E\in AB$, $CE\perp AB$, тогаш $\overline{CE}=h$ и $\overline{EB}=a-b$. Од $ABCD$ тангентен трапез, следи дека

$$x+h=a+b. \qquad (1)$$



Од CEB правоаголен триаголник, следи дека

$$x^2-h^2=(a-b)^2 \qquad (2)$$

па со замена на (1) во (2) се добива

$(x-h)(a+b)=(a-b)^2$, односно

$$x=h+\frac{(a-b)^2}{a+b}. \qquad (3)$$

Со замена на (3) во (1) се добива $h=a+b-x=\frac{1}{2}(a+b-\frac{(a-b)^2}{a+b})=\frac{2ab}{a+b}$, па $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=ab$.

33. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е произволна внатрешна точка пд страната AB, а M и N се подножјата на нормалите спуштени од D кон страните BC и AC. Нека H_1 и H_2 се соодветно ортоцентрите на триаголниците MNC и MND. Докажи, дека плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 не зависи од положбата на точката D на страната AB.

Решение. Ќе ја искористиме следнава лема:

Лема. Ако права l ги сече правите определени од страните на паралелограм, тогаш збирот на растојанијата до l од две спротивни темиња на паралелограмот е еднаква на збирот на растојанијата до l од другите две спротивни темиња спротивни темиња и на растојанието до l од пресекот на дијагоналите на паралелограмот. (Сите растојанија се земаат со знак + или со знак – во зависност од тоа на која страна на l се наоѓаат.) □

Ако горната лема ја примениме на паралелограмите NH_1MD и MH_2NC и правата AB го добиваме равенството

$$d(M,AB)+d(N,AB)=d(D,AB)+d(H_1,AB)$$
$$d(M,AB)+d(N,AB)=d(C,AB)-d(H_2,AB).$$

Според тоа, $d(C,AB)=d(H_1,AB)+d(H_2,AB)$, од каде лесно се добива дека $P_{AH_1BH_2}=P_{ABC}$.

34. Продолженијата на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точка W. Ако X и Y се средините на дијагоналите AC и BD, соодветно, тогаш плоштината на триаголникот XYW е четири пати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи!

Решение. Нека U е средина на AD и V е средина на BE. Значи XV е средна линија на ΔABC и $\overline{XV}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Бидејќи C и W се на исто растојание од XV добиваме

$$P_{XWV}=P_{XVC}=\tfrac{1}{4}P_{ABC} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{YVW}=P_{YBV}=\tfrac{1}{4}P_{DBC}. \qquad (2)$$

Јасно четириаголникот $XVYU$ е параллелограм и важи $P_{XVY}=\frac{1}{2}P_{XVYU}$. Нека $UX\cap AB=\{X'\}$, $YV\cap AB=\{V'\}$. Паралелограмот $X'V'YU$ има страна $\frac{1}{2}\overline{AB}$ и висина половина од висината $h_\circ$ на ΔABD па затоа $\frac{1}{2}P_{ABD}=P_{X'V'YU}$. Слично $P_{X'V'YX}=\frac{1}{2}P_{ABC}$. Затоа

$$P_{XVY}+\tfrac{1}{2}P_{XVYU}=\tfrac{1}{2}\left(P_{X'V'YU}-P_{X'V'VX}\right)=\tfrac{1}{4}(P_{ABD}-P_{ABC}). \qquad (3)$$

Со собирање на (1), (2) и (3) следува

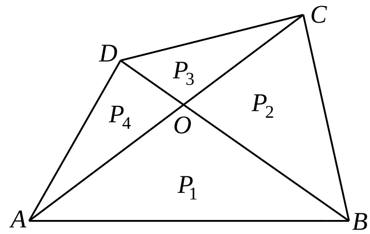
$$P_{VWY}=P_{XWV}+P_{YVW}+P_{XVY}=\tfrac{1}{4}\left(P_{ABC}+P_{DBC}+P_{ABD}-P_{ABC}\right)=\tfrac{1}{4}P_{ABCD},$$

односно $P_{ABCD}=4P_{XWY}$.

35. Ако производот на плоштините на триаголниците, на кои еден конвексен четириаголник е разбиен со една од своите дијагонали, е еднаков на производот од плоштините на триаголниците, кои се добиваат со разбивање на другата дијагонала, тогаш четириаголникот е трапез или е паралелограм. Докажи!

Решение. Нека дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и нека

$$P_1=P_{ABO},\ P_2=P_{BCO},\ P_3=P_{CDO},\ P_4=P_{ADO}.$$



Од условот на задачата имаме:

$$(P_1+P_2)(P_3+P_4)=(P_1+P_4)(P_2+P_3)\ .$$

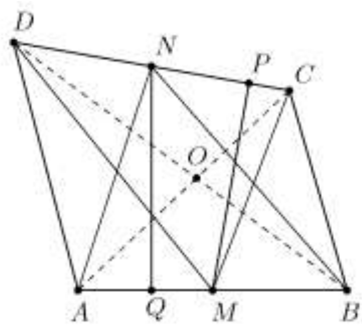
Оттука добиваме $(P_1-P_3)(P_2-P_4)=0$, па следува:

(i) Ако $P_1=P_3$, тогаш $P_1+P_4=P_3+P_4$, т.е. $P_{ABD}=P_{ACD}$. Но, триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, следува дека висините кон оваа страна имаат еднаква должина, т.е. точките B и C се еднакво оддалечени од AD. Значи $AD\,||\,BC$, па овој четириаголник е трапез.

(ii) Ако $P_2=P_4$, тогаш $P_{ABC}=P_{ABD}$, па аналогно заклучуваме дека $AB\,||\,CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е трапез.

(iii) Ако $P_1=P_3$ и $P_2=P_4$, следува дека $AD\,||\,BC$ и $AB\,||\,CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

36. Точките M и N соодветно се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Точката P од страната CD е таква што $MP\perp CD$, а точката Q од правата AB е таква што $NQ\perp AB$. Докажи дека $AD\,||\,BC$ ако и само ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NQ}}$.



Решение. Имаме

$$P_{ABCD}=P_{ADM}+P_{DMC}+P_{MCB}$$
$$=\tfrac{1}{2}P_{ABD}+\tfrac{\overline{CD}\cdot\overline{MP}}{2}+\tfrac{1}{2}P_{ABC},$$
$$P_{ABCD}=P_{ADN}+P_{ANB}+P_{NBC}$$
$$=\tfrac{1}{2}P_{ADC}+\tfrac{\overline{AB}\cdot\overline{NQ}}{2}+\tfrac{1}{2}P_{BCD}.$$

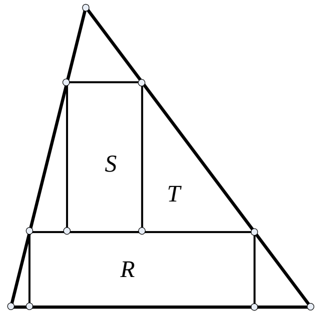
Според тоа,

$$\overline{CD}\cdot\overline{MP}-\overline{AB}\cdot\overline{NQ}=P_{ADC}+P_{BCD}-P_{ABD}-P_{ABC}$$
$$=P_{ABCD}+P_{DOC}-P_{AOB}-(P_{ABCD}+P_{AOB}-P_{DOC})$$
$$=2(P_{DOC}-P_{AOB})=2(P_{ADC}-P_{ADB}),$$

т.е. $\overline{CD}\cdot\overline{MP}=\overline{AB}\cdot\overline{NQ}$ ако и само ако $P_{ADC}=P_{ADB}$. Оттука $AD\,||\,BC$ ако и само ако $P_{ADC}=P_{ADB}$ ако и само ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{NQ}}$.

37. Во триаголник со плоштина T се впишани два правоаголника со плоштини R и S (види цртеж). Најди ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{R+S}{T}$.

Решение. Нека Q е фигурата која што е составена од петте триаголници кои се во внатрешноста на триаголникот, а надвор од правоаголниците. Од двата триаголника кои што имаат заедничка страна со правоаголникот со плоштина R може да се состави нов триаголник T_1 кој што е сличен со дадениот триаголник. Истото може да се направи и со триаголниците кои што имаат иста страна со правоаголникот со плоштина S. Со нивно составување го добиваме триаголникот T_2 кој што е сличен со дадениот триаголник. Триаголникот над правоаголникот S го означуваме со T_3 и тој е сличен со дадениот триаголник. Нека a, b, c се висините во триаголниците T_1, T_2, T_3 соодветно, кои што се нормални на по две страни од правоаголниците. Тогаш $a+b+c$ е должина на висината на дадениот триаголник. Бидејќи T_1, T_2, T_3 се слични со дадениот триаголник, следува



$$\frac{P_{T_1}}{T}=\frac{a^2}{(a+b+c)^2},\ \frac{P_{T_2}}{T}=\frac{b^2}{(a+b+c)^2},\ \frac{P_{T_3}}{T}=\frac{c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{R+S}{T}=\frac{T-P_Q}{T}=1-\frac{P_{T_1}+P_{T_2}+P_{T_2}}{T}=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\leq\frac{2}{3}$$

Нравенството е исполнето бидејќи

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^{\,2}\geq ab+bc+ca \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geq 3ab+3bc+3ac \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca).$$

38. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ и повлечени се две прави, коишто страните AB и CD ги делат на три еднакви делови. Да се докаже дека плоштината на делот од четириаголникот $ABCD$ што се наоѓа меѓу тие две прави е третина од плоштината на целиот четириаголник.

Решение. Нека l и m се правите што ги делат страните AB и CD на три еднакви делови и при тоа $AB\cap l=\{L_1\}$, $AB\cap m=\{M_1\}$, $CD\cap l=\{L_2\}$ и $CD\cap m=\{M_2\}$. Нека $P_{AL_1D}=x$ и $P_{M_1M_2B}=y$. Тогаш

$$P_{L_2L_1M_1}=\frac{x+y}{2}, \tag{1}$$

Навистина.

$$P_{AL_1D}=\frac{\overline{AL_1}\cdot h_1}{2}=x,\ P_{M_1M_2B}=\frac{\overline{M_1B}\cdot h_3}{2}=y \text{ и } \quad P_{L_2L_1M_1}=\frac{\overline{L_1M_1}\cdot h_2}{2}.$$

Висината h_2 е средна линија на трапезот со основи h_1 и h_3, па за неа важи $h_2=\frac{h_1+h_3}{2}$. Со оглед на ова и фактот што $\overline{AL_1}=\overline{M_1B}=\overline{L_1M_1}$ се добива (1). Аналогно на ова, ако означиме $P_{DL_1L_2}=z$ и $P_{CM_2B}=u$, добиваме

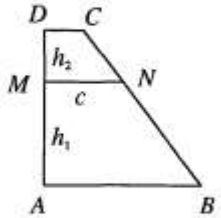
$$P_{L_2M_2M_1}=\frac{z+u}{2} \tag{2}$$

Нека P е плоштина на четираголникот $ABCD$, а P_1 е плоштоината на четириаголникот меѓу правите l и m. Со оглед на (1), (2) и воведените ознаки, добиваме

$$P = 3\frac{x+y+z+u}{2} \text{ и } P_1 = \frac{x+y+z+u}{2},$$

од каде што веднаш следува дека $P = 3 \cdot P_1$.

39. Правоаголен трапез со плоштина 10 и висина 4 е поделен со права паралелна на основите на два трапези во кои може да се впишат кружници. Определи ги радиусите на тие кружници.

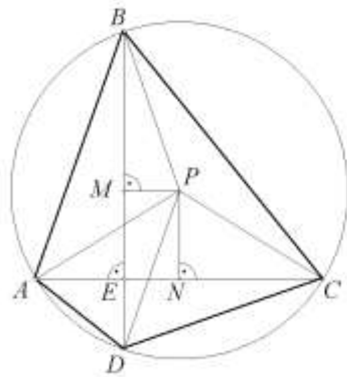


Решение. Нека $ABCD$ е правоаголен трапез со плоштина 10 и карак $\overline{AD} = 4$ нормален на основите $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b, a > b$. Нека правата $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BC$ го дели трапезот на два трапези во кои може да се впишат кружници. Означуваме $\overline{MN} = c, \overline{AM} = h_1$ и $\overline{DM} = h_2$. Тогаш

$$h_1^2 - (a-c)^2 = (a+c-h_1)^2 \text{, т.е. } h_1 = \frac{2ac}{a+c}.$$

Аналогно $h_2 = \frac{2bc}{b+c}$, па затоа $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)}$. Од друга страна $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a-c}{c-b}$ и затоа $(a+b)(ab-c^2) = 0$. Значи, $c^2 = ab$, $h_1 = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $h_2 = \frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и $h_1 + h_2 = 2\sqrt{ab}$. Од условот добиваме $\sqrt{ab} = 2, a+b = 5$, што значи дека a и b се корени на равенката $x^2 - 5x + 4 = 0$. Значи, $a = 4, b = 1$ и бараните радиуси се еднакви на $\frac{h_1}{2} = \frac{4}{3}$ и $\frac{h_2}{2} = \frac{2}{3}$.

40. Во конвексен четириаголник *ABCD* дијагоналите *AC* и *BD* се нормални, а спротивните страни *AB* и *CD* не се паралелни. Пресечната точка *P* на симетралите на станите *AB* и *CD* лежи во внатрешноста на четириаголникот *ABCD*. Докажи дека околу четириаголникот може да се опише кружница ако и само ако триаголниците *ABP* и *CDP* имаат еднакви плоштини.



Решение. Нека *E* е пресечната точка на *AC* и *BD*. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека точката *P* лежи во триаголникот *ABE*. Со *M* и *N* ги означуваме подножјата на нормалите спуштени од *P* кон *AC* и *BD*. Тогаш

$$\begin{aligned} 2S_{ABP} &= 2S_{ABE} - 2S_{PAE} - 2S_{PBE} \\ &= (\overline{AM} + \overline{PN})(\overline{BN} + \overline{PM}) - (\overline{AM} + \overline{PN})\overline{PM} - (\overline{BN} + \overline{PM})\overline{PN} \\ &= \overline{AM} \cdot \overline{BN} - \overline{PM} \cdot \overline{PN}. \end{aligned}$$

Аналогно

$$2S_{CDP} = \overline{CM} \cdot \overline{DN} - \overline{PM} \cdot \overline{PN}.$$

Од условот $AC \perp BD$ следува дека

$$2(S_{ABP}-S_{CDP})=\overline{AM}\cdot\overline{BN}-\overline{CM}\cdot\overline{DN} \qquad (1)$$

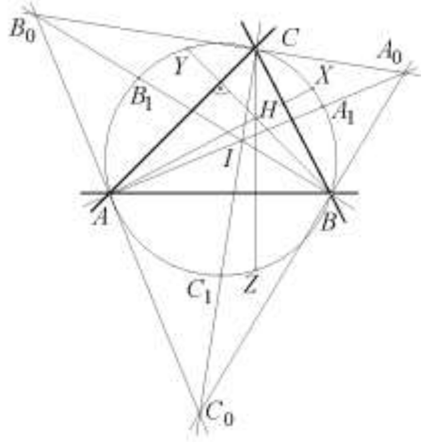
Да претпоставиме дека $\overline{PA}=\overline{PB}$ и $\overline{PC}=\overline{PD}$. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник, тогаш P е центар на опишаната кружница и $\overline{AM}=\overline{CM}$, $\overline{BN}=\overline{DN}$. Од (1) заклучуваме дека $S_{ABP}=S_{CDP}$. Обратно, нека $S_{ABP}=S_{CDP}$ и да претпоставиме дека , на пример, $\overline{PA}>\overline{PC}$. Тогаш $\overline{AM}>\overline{CM}$, $\overline{BN}>\overline{DN}$, т.е. $\overline{AM}\cdot\overline{BN}>\overline{CM}\cdot\overline{DN}$ што противречи на равенството (1).

41. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој симетралите на внатрешните агли во темињата A,B,C ја сечат опишаната кружница и во точки A_1,B_1,C_1, соодветно. Нека A_0 е пресечна точка на правата AA_1 со симетралите на надворешните агли кај темињата B и C. Точките B_o и C_o се одредени аналогно. Докажи дека

(a) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е два пати поголема од плоштината на шестаголникот $AC_1BA_1CB_1$;

(b) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е четири пати поголема од плоштината на триаголникот ABC.

Решение. а) Нека I е пресек на симетралите на внатрешните агли. Прво треба да докажеме дека $\overline{IA_1}=\overline{A_1A_0}$. Од овде ќе следува дека триаголниците IA_1B и A_0A_1B имаат иста плоштина. Аналогно ги разгледуваме и останатите пет пара триаголници и ако ги собереме овие равенства го добиваме бараното равенство.



б) Ги повлекуваме висините на триаголникот ABC, а неговиот ортоцентар го означуваме со H. Со X,Y,Z ги означуваме осно симетричните слики на H во однос на правите BC, AC и AB. Тогаш X,Y,Z лежат на кружницата опишана околу триаголникот ABC. Бидејќи A_1 е средина на лакот BC, имаме $P_{BA_1C}\geq P_{BXC}$. Според тоа,

$$P_{AC_1BA_1CB_1}\geq P_{AZBXCY}=2(P_{BHC}+P_{CHA}+P_{AHB})=2\cdot P_{ABC},$$

што и требаше да се докаже.

42. Нека A,B и C се три колинеарни точки, такви што B е меѓу A и C. Од иста страна на правата AC конструирани се три полукружници со дијаметри AB, BC и AC. Заедничката тангента на првите две полукружници во точката B ја сечат третата полукружница во точка E. Нека U и V се точки во кои заедничката надворешна тангента ги допира првите две полукружници. Пресметај го количникот $\frac{P_{EUV}}{P_{EAC}}$, во функција од $r_1=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $r_2=\frac{1}{2}\overline{BC}$.

Решение. Од $\overline{BE}^2 = 2r_1 \cdot 2r_2$ добиваме $\overline{BE} = 2\sqrt{r_1 r_2}$. Од друга страна

$$\overline{UV}^2 = \overline{MN}^2 - (\overline{MU} - \overline{NV})^2 = 4r_1 r_2$$

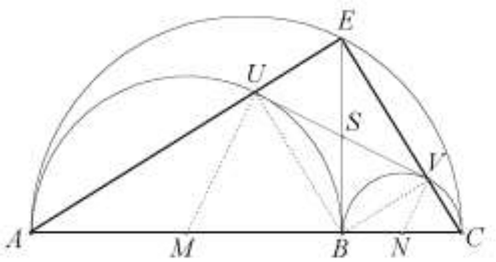
(M и N се центри на полукружниците), а од овде добиваме

$$\overline{UV} = 2\sqrt{r_1 r_2} = \overline{BE}.$$

Понатаму,

$$\overline{SU} = \overline{SB} = \overline{SV} = \tfrac{1}{2}\overline{UV} = \sqrt{r_1 r_2} = \overline{ES},$$

па според тоа четириаголникот $BVEU$ е правоаголник, бидејќи дијагоналите му се еднакви и се полoват. Бидејќи аглите $\angle BUA$ и $\angle EUB$ се прави, точките A, U, E се колинеарни. Слично се докажува дека истото е исполнето и за точките E, V, C. Триаголникот EUV е складен со триаголникот UEB кој е



сличен со ΔECA. Затоа ΔEUV и ΔECA се слични со коефициент на сличност $k = \frac{\overline{UV}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}$. Според тоа

$$\frac{P_{EUV}}{P_{ECA}} = k^2 = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

43. Во $\triangle ABC$ со должина на страните a, b и c вишана е кружница и на неа се повлечени тангенти паралелни со страните на триаголникот, кои од ΔABC отсекуваат три нови триаголници во кои се вписани кружници. Пресметај го збирот на плоштините на четирите кружници!

Решение. Со r да го означиме радиусот на кругот вишан во ΔABC, а со r_a, r_b, r_c радиусите на круговите вишани во триаголниците добиени со конструирање на тангентите на впишаниот круг. Нека P е плоштина на $\triangle ABC$, а $s = \frac{a+b+c}{2}$ неговиот полупериметар. Според ознаките на црт. 6.1 триаголниците AB_aC_a и ABC се слични, па радиусите на впишаните кругови се однесуваат како висините h_a' и h_a кои соодветствуваат на страните $\overline{B_aC_a}$ и $\overline{BC}$. Значи,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{h_a}{h_a'}$$

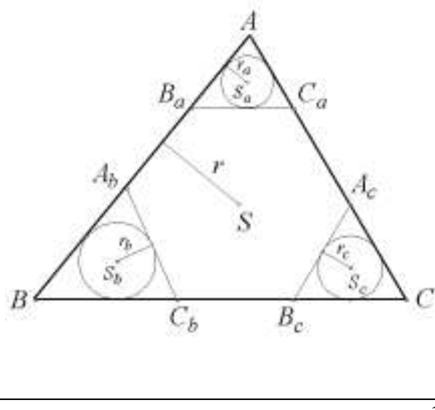
Бидејќи $h_a' = h_a - 2r$, добиваме

$$r_a = \frac{h_a - 2r}{h_a} r.$$

Аналогно,

$$r_i = \frac{h_i - 2r}{h_i} r, \quad i = b, c.$$

Бидејќи $r = \frac{P}{s}$ и $h_i = \frac{2P}{i}$, од претходните равенства добиваме

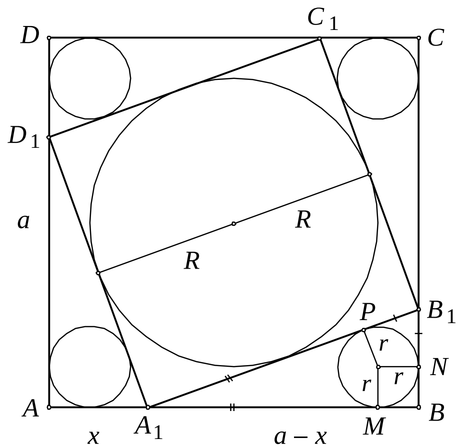


$$r_i = \frac{P(s-i)}{s^2}, \quad i = a, b, c.$$

Ако искористиме дека $a+b+c=2s$ и $P^2=(s-a)(s-b)(s-c)s$, добиваме дека

$$S = r^2\pi + r_a^2\pi + r_b^2\pi + r_c^2\pi = \frac{P^2}{s^4}[s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2]\pi$$
$$= \frac{P^2}{s^4}[4s^2+a^2+b^2+c^2-2s(a+b+c)]\pi$$
$$= \frac{1}{s^4}(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)s\pi$$
$$= \frac{1}{(a+b+c)^3}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)\pi.$$

44. Даден е квадрат Q со страна a во кој е впишан квадрат Q_1, така што темињата на квадратот Q_1 припаѓаат на страните на квадратот Q. Во квадратот Q_1 и во четирите добиени триаголници се впишани кружници. Најди ја страната на квадратот Q_1 така што збирот од плоштините на впишаните кругови биде најмал.



Решение. Нека

$$x = \overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1},$$

R-радиус на впишаната кружница во квадратот Q_1, а r-радиус на впишаните кружници во $\triangle A_1BB_1$, $\triangle B_1CC_1$, $\triangle C_1DD_1$ и $\triangle D_1AA_1$. Тогаш $\overline{A_1B_1} = 2R$ и

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{\overline{A_1B}^2 + \overline{BB_1}^2} = \sqrt{(a-x)^2+x^2},$$

т.е.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2}. \qquad (1)$$

Непосредно според ознаките на цртежот имаме

$$2r+2R = (\overline{MB}+\overline{BN}) + \overline{A_1B_1} = (\overline{MB}+\overline{BN}) + (\overline{A_1P}+\overline{PB_1})$$
$$= (\overline{MB}+\overline{BN}) + (\overline{A_1M}+\overline{B_1N})$$
$$= (\overline{A_1M}+\overline{MB}) + (\overline{BN}+\overline{B_1N}) = \overline{A_1B}+\overline{B_1B} = a$$

Според тоа $r = \frac{a}{2} - R$ или $R = \frac{a}{2} - r$.

Збирот на плоштините на сите пет впишани кругови е

$$R^2\pi + 4r^2\pi = \pi[R^2+(a-2R)^2] = \pi(5R^2-4aR+a^2)$$
$$= \pi[5(R-\tfrac{2}{5}a)^2 + a^2 - \tfrac{4}{25}a^2] = \pi[5(R-\tfrac{2}{5}a)^2 + \tfrac{21}{25}a^2]$$

Збирот ќе биде минимален за $R = \frac{2a}{5}$. Од (1) добиваме $\frac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2} = \frac{2a}{5}$ од каде $x = \frac{5\pm\sqrt{7}}{10}a$.

И двете добиени вредности се помали од a и уште нивниот збир е еднаков на a. Според тоа за секоја вредност на x која ја добивме имаме по едно решение, при што добиените квадрати се складни.

Непосредно се наоѓа страната на впишаниот квадрат.

45. Нека k_1, k_2 и k_3 се три кружници со центри во O_1, O_2 и O_3 соодветно, такви што ниту еден од центрите не се наоѓа во внатрешноста на другите две кружници. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во A и P, k_1 и k_3 се сечат во C и P и k_2 и k_3 се сечат во B и P. Нека X е точка на k_1 таква што пресекот на правата XA со кружницата k_2 е Y и пресекот на правата XC со k_3 е Z и притоа Y не припаѓа во внатрешноста ниту на k_1 ниту на k_3 и Z не припаѓа во внатрешноста ниту на k_1 ниту на k_2.

а) Докажи дека триаголниците XYZ и $O_1O_2O_3$ се слични меѓу себе.

б) Докажи дека плоштината на триаголникот XYZ не е поголема од четири пати по плоштината на триаголникот $O_1O_2O_3$. Дали се достигнува максимумот?

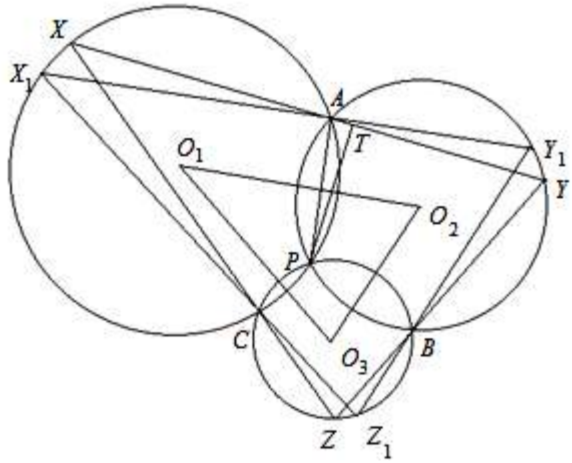
Решение. Прво ќе докажеме дека точките Y, B и Z се колинеарни. Бидејќи четириаголникот $BYAP$ е тетивен имаме $\measuredangle PBY = \measuredangle PAX$. Бидејќи четириаголникот $AXCP$ е тетивен $\measuredangle PAX = \measuredangle PCZ$. Бидејќи четириаголникот $CPBZ$ е тетивен добиваме $\measuredangle PBZ + \measuredangle PCZ = 180^\circ$. Значи,

$$\measuredangle YBZ = \measuredangle YBP + \measuredangle PBZ = 180^\circ.$$

Да забележиме дека $\measuredangle CO_1O_3 = \measuredangle PO_1O_3$ и $\measuredangle AO_1O_2 = \measuredangle PO_1O_2$, од каде следува

$$\measuredangle O_2O_1O_3 = \tfrac{1}{2}\measuredangle AO_1C = \measuredangle AXC.$$

Слично $\measuredangle O_1O_2O_3 = \measuredangle AYB$ и $\measuredangle O_1O_3O_2 = \measuredangle CZB$. Од досега изнесеното следува дека $\triangle XYZ \sim \triangle O_1O_2O_3$, со што го докажавме тврдењето под а).



Нека правата X_1Y_1 е паралелна со O_1O_2 и минува низ A, каде X_1 лежи на k_1 и Y_1 лежи на k_2. Нека Z_1 е пресечната точка на правата X_1C со кружницата k_3. Од претходно докажаното точките Y_1, B и Z_1 се колинеарни и $\triangle X_1Y_1Z_1 \sim \triangle O_1O_2O_3$. Уште повеќе, $\measuredangle PXA = \measuredangle PX_1A$ и $\measuredangle PYA = \measuredangle PY_1A$. Затоа $\triangle PXY \sim \triangle PX_1Y_1$. Нека PT е висината спуштена од темето P кон страната XY. PA е висината на триаголникот PX_1Y_1. Бидејќи PA е хипотенуза во правоаголниот триаголник PAT

добиваме $\overline{PT} \le \overline{PA}$. Па $P_{PXY} \le P_{PX_1Y_1}$ и аналогно $P_{PYZ} \le P_{PY_1Z_1}$ и $P_{PXZ} \le P_{PX_1Z_1}$. Од ова добиваме $P_{XYZ} \le P_{X_1Y_1Z_1}$. Точките P, O_1 и X_1 се колинеарни затоа што $\measuredangle PAX_1 = 90^\circ$. Слично P, O_2 и Y_1 се колинеарни и P, O_3 и Z_1 се колинеарни. Добиваме дека O_1O_2, O_1O_3 и O_2O_3 се средни линии во триаголниците X_1Y_1P, X_1Z_1P и Y_1Z_1P соодветно, па $P_{X_1Y_1Z_1} = 4P_{O_1O_2O_3}$. Од ова се добива бараното неравенство. Равенство се достигнува кога точките X и X_1 се соовпаѓаата, а со тоа и точите Y и Y_1 се соовпаѓаат и точките Z и Z_1 се соовпаѓаат.

46. За три точки P, Q и R бројот $m(PQR)$ е еднаков на најмалата должина од висините на триаголникот PQR (при што $m(PQR) = 0$ ако P, Q и R се колинеарни).

Нека A, B и C се дадени точки во рамнината π. Докажи дека за секоја точка $X \in \pi$ важи:

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

Решение. Ќе разгледаме три случаи.

а) Точката X лежи во внатрешноста или на страните на ΔABC. При ознаки $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$ важи $\overline{CX} \le \max\{a,b\}$.

Заради симетрија можеме да земеме дека точката X' лежи меѓу подножната точка H_c на висината повлечена од темето C и темето A. Понатаму,

$$\overline{CX} \le \overline{CX'} \le \overline{CA} \text{ и } \overline{CX} \le \max\{a,b,c\}.$$

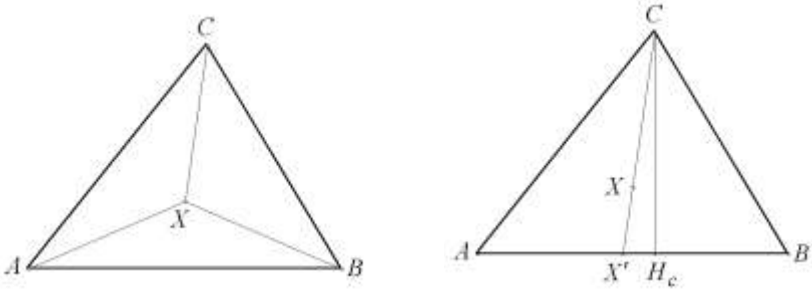
Според тоа, во секој од триаголниците ABX, BCX и ACX најголемата страна е помала или еднаква на $\max\{a,b,c\}$.

Од $h_c c = h_a a = h_b b = 2P = 2P_{\Delta ABC}$ следува $m(ABC) = \frac{2P}{\max\{a,b,c\}}$. Сега

$$P_{\triangle ABX} + P_{\triangle ACX} + P_{\triangle BCX} = P_{\triangle ABC},$$

па затоа

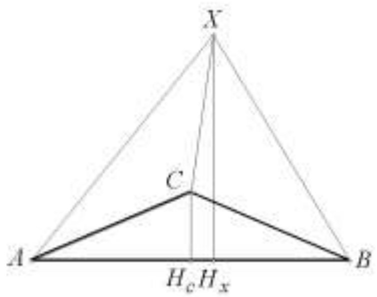
$$\begin{aligned} m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) &\ge \frac{2P_{\triangle ABX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle ACX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle BCX}}{\max\{a,b,c\}} \\ &= \frac{2P_{\triangle ABC}}{\max\{a,b,c\}} = m(ABC) \end{aligned}.$$

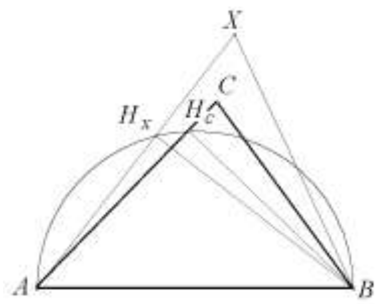


b) X е надвор од $\triangle ABC$ и ниедна од полуправите AX, BX и CX не сече ниедна од страните на $\triangle ABC$. Еден од триаголниците ABX, ACX, BCX го содржи

$\triangle ABC$ и најмалата висина во $\triangle ABC$ е помала или еднаква на најмалата висина во тој триаголник. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека темето C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни.

Ако $m(ABX)$ е висината над страната AB, тогаш



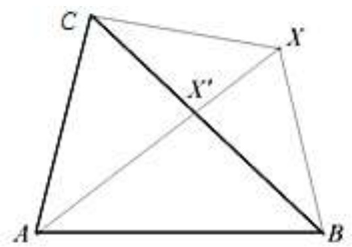


$$m(ABX) \geq \overline{XH}_X \geq \overline{CH}_C \geq m(ABC).$$

Ако $m(ABX)$ е висина на страната AX, тогаш $\measuredangle ABX \geq \measuredangle XAB$, бидејќи

$$2\measuredangle XAB \leq \measuredangle XAB + \measuredangle ABX < 180^0$$

и $\measuredangle XAB$ е остар. Бидејќи C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни и $\measuredangle XAB \geq \measuredangle CAB$ добиваме $\overline{BH}_X \geq \overline{BH}_C$, ($\measuredangle BH_X A = \measuredangle BH_C A = 90^\circ$ и $\overline{BH}_X$ е тетива над поголем периферен агол). Според тоа,



$$m(ABX) = \overline{BH}_X \geq \overline{BH}_C \geq m(ABC)$$

и ако земеме предвид дека $m(ACX) \geq 0$ и $m(BCX) \geq 0$ добиваме:

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABC),$$

c) Една од полуправите AX, BX и CX сече некоја од страните на ΔABC. Од b) следува дека $m(ABX) \geq m(ABX')$ и $m(ACX) \geq m(ACX')$. Понатаму, од а) следува дека $m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \geq m(ABC)$. Од $m(BCX') \geq 0$ добиваме

$$m(BCX) \geq m(BCX').$$

Од досега изнесеното следува дека

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \geq m(ABC).$$

6. СТЕПЕН НА ТОЧКА ВО ОДНОС НА КРУЖНИЦА. РАДИКАЛНА ОСКА И РАДИКАЛЕН ЦЕНТАР

1. (Степен на точка во однос на кружница). Дадена е кружница $k(O,r)$ и точка M во рамнината на кружницата. Нека a е произволна права низ точката M која ја сече кружницата $k(O,r)$ во точките A и B. Докажи дека производот $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ не зависи од изборот на правата a.

Решение. Со D да ја означиме средината на отсечката AB (направи цртеж). Бидејќи $\overline{AD}=\overline{DB}$ добиваме

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=(\overline{MD}-\overline{AD})(\overline{MD}+\overline{DB})=(\overline{MD}-\overline{AD})(\overline{MD}+\overline{AD})$$
$$=\overline{MD}^2-\overline{AD}^2=\overline{MO}^2-\overline{OD}^2-\overline{AD}^2=\overline{MO}^2-r^2,$$

што и требаше да се докаже.

Забелешка. а) Производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MO}^2-r^2$ го нарекуваме *степен* на точката M во однос на кружницата $k(O,r)$. За отсечките MA и MB ќе сметаме дека се еднакво ориентирани ако векторите $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ имаат иста насока. Ако вектроите $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ имаат спротивна насока, тогаш за отсечките MA и MB ќе велиме дека се спротивно ориентирани.

б) Степенот на точката M во однос на кружницата k е позитивен ако M лежи надвор од кружницата k, е еднаков на нула ако M лежи на кружницата k и е негативен ако M е во внатрешноста на кружницата k.

2. Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен и правите AB и CD се сечат во точката M. Докажи дека $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$.

Решение. Непосредно следува од задача 1. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

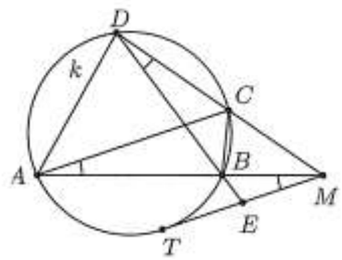
3. Нека правите AB и CD се сечат во точката M и нека $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}$. Докажи дека точките A,B,C,D припаѓаат на иста кружница.

Решение. Нека опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ја сече правата BD во точките B и D'. Тогаш $\overline{MC}\cdot\overline{MD}=\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD'}$, па затоа $\overline{MD}=\overline{MD'}$ како ориентирани отсечки, што значи дека $D\equiv D'$, т.е. точките A,B,C,D припаѓаат на иста кружница.

4. Даден е четириаголник $ABCD$ вписан во кружница k, чии продолженија на страните AB и CD се сечат во точката M. Нека MT е тангента на $k, T\in k$ и правата BD ја сече отсечката MT во точката E. Ако MT е паралелна со дијагоналата AC, определи го односот $\overline{EM}:\overline{ET}$.

Решение. Од $MT \parallel AC$ следува дека $\measuredangle EMB=\measuredangle BAC$. Но, $\measuredangle BAC=\measuredangle BDC$, па затоа $\triangle EMB\sim\triangle EDM$, што значи дека

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EM}}=\frac{\overline{EM}}{\overline{ED}}\text{, т.е. }\overline{EM}^2=\overline{EB}\cdot\overline{ED}.$$

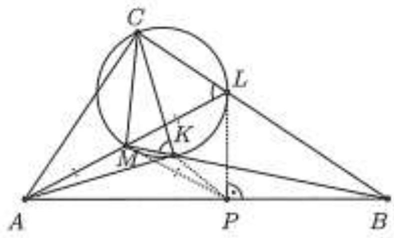


Од друга страна од степенот на точката E во однос на кружницата k следува $\overline{ET}^2=\overline{EB}\cdot\overline{ED}$. Според тоа, $\overline{ET}=\overline{EM}$, што значи дека бараниот однос е еднаков на 1.

5. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е средината на симетралата AL на аголот при темето $A, (L\in BC)$. Опишаната кружница околу $\triangle CLM$ ја сече отсечката BM во точка K. Докажи, дека ако $\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle AKC$, тогаш $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

Решение. Нека P е подножјето на нормалата повлечена од L кон AB. Тогаш PM е тежишна линија во правоаголен триаголник, па затоа

$$\measuredangle APM = \measuredangle PAM = \tfrac{\alpha}{2} = \measuredangle AKM .$$



Според тоа, четириаголникот $APKM$ е тетивен, па затоа

$$\overline{BP} \cdot \overline{BA} = \overline{BK} \cdot \overline{BM} = \overline{BL} \cdot \overline{BC},$$

што значи дека и четириаголникот $APLC$ исто така е тетивен. Значи,

$$\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle APL = 90^\circ .$$

6. Впишаната кружница k во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните BC, CA и AB соодветно во точките A_1, B_1 и C_1. Отсечката BI ја сече k во точка D, а правата низ D и средината на B_1C_1 по втор пат ја сече k во точка E. Докажи дека точките A, D, I и E лежат на иста кружница.

Решение. Со M да ја означиме средината на B_1C_1 (направи цртеж). Тогаш $\overline{EM} \cdot \overline{MD} = \overline{MB_1} \cdot \overline{MC_1} = \overline{MC_1}^2$. Од друга страна, точката M лежи и на отсечката AI и $\measuredangle AMC_1 = 90^\circ$, од рамнокракиот $\triangle AC_1B_1$. Сега, од правоаголниот $\triangle AC_1I$ со висина C_1M имаме $\overline{MC_1}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MI}$. Значи, $\overline{AM} \cdot \overline{MI} = \overline{EM} \cdot \overline{MD}$, од каде следува тврдењето на задачата.

7. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I и центар на опишаната кружница O. Симетралата $CL, (L \in AB)$ на $\measuredangle ACB$ ја сече опишаната кружница во точката D. Нека P е симетричната точка на D во однос на правата AB. Докажи, дека

а) точките C, L, P и O лежат на една кружница,

б) $\measuredangle CPI = \measuredangle LOI$.

Решение. Ќе го разгледаме случајот кога точката P е меѓу точките O и D, направи цртеж (случајот кога O е меѓу P и D се разгледува аналогно). Нека T е средината на AB, а K е дијаметрално спротивната точка на D. Имаме

$$\overline{DI}^2 = \overline{DA}^2 = \overline{DL} \cdot \overline{DC} = \overline{DT} \cdot \overline{DK} = \overline{DP} \cdot \overline{DO} .$$

Првото равенство следува од познатиот факт дека $\overline{DI} = \overline{DA} = \overline{DB}$. Второто равенство следува од сличноста на триаголниците DAC и DLA. Третото равенство е точно бидејќи четириаголникот $CLTK$ е тетивен ($\measuredangle LCK = \measuredangle LTK = 90^\circ$), а четвртото од $\overline{DP} = 2\overline{DT}$ и $\overline{DK} = 2\overline{DO}$.

а) Од $\overline{DL} \cdot \overline{DC} = \overline{DP} \cdot \overline{DO}$ следува дека точките C, L, P и O лежат на една кружница.

б) Од $\overline{DI}^2 = \overline{DP} \cdot \overline{DO}$ следува дека триаголниците DIO и DPI се слични, па затоа $\measuredangle CIO = \measuredangle IPO$. Од а) следува дека $\measuredangle ILO = \measuredangle CPO$. Од последните две равенства добиваме

$$\measuredangle CPI = \measuredangle IPO - \measuredangle CPO = \measuredangle CIO - \measuredangle ILO = \measuredangle IOL .$$

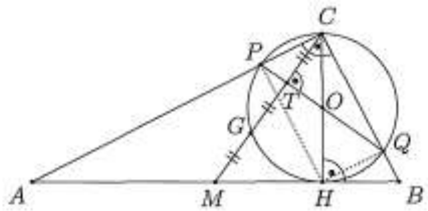
8. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\overline{AC} > \overline{BC}$) со висина CH и тежиште G. Кружницата k со дијаметар CH ги сече катетите AC и BC соодветно во точките P и Q. Ако PQ ја полови отсечката CG, тогаш

а) докажи, дека G лежи на кружницата k,

б) пресметај го односот $\overline{AH} : \overline{BH}$.

Решение. а) Нека M е средината на AB, а O е центарот на k. Бидејќи $\measuredangle ACB = 90^\circ$, добиваме дека PQ е дијаметар на k. Понатаму,

$$\measuredangle CQP = \measuredangle CHP = \measuredangle BAC = \alpha ,$$



па затоа $\triangle QPC \sim \triangle ABC$. Значи, CO и CM се тежишни линии во слични триаголници, а CT и CH се соодветно висините, каде T е пресечната точка на CM и PQ. Според тоа, $PQ \perp CG$. Но, по услов PQ ја полови CG, т.е. PQ е симетрала на CG и $G \in k$.

б) *Прв начин*. Од својствата на сличните триаголници добиваме

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} \;\Leftrightarrow\; \frac{c}{6h} = \frac{h}{c} \;\Leftrightarrow\; c = h\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow\; a^2 - ba\sqrt{6} + b^2 = 0.$$

Конечно, добиваме

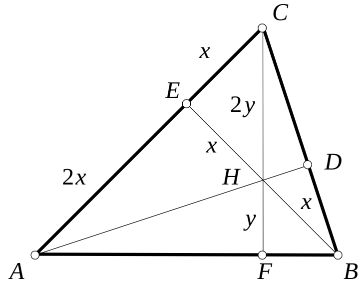
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} .$$

Втор начин. Имаме $\overline{MH}^2 = \overline{MG} \cdot \overline{MC}$, па затоа

$$\overline{MH}^2 = \frac{1}{3}\overline{MC}^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AH} - \overline{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{MC} \;\Leftrightarrow\; \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}+3}{6}\overline{AB} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = 2 + \sqrt{3} .$$

9. Висините во остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката H, која едната од нив ја дели на половина, другата во однос $2:1$. Во кој однос ортоцентарот H ја дели третата висина?

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник во кој висините AD, BE и CF се сечат во точката H. Нека, $\overline{BH} = \overline{HE} = x$, $\overline{CH} = 2y$ и $\overline{HF} = y$. Бидејќи $\measuredangle BEC = \measuredangle CFB = 90^\circ$, точките C, F, E, B лежат на кружницата чиј дијаметар е CB. Според тоа, $\overline{EH} \cdot \overline{HB} = \overline{CH} \cdot \overline{HF}$, т.е. $x^2 = 2y^2$, па затоа $x = y\sqrt{2}$.



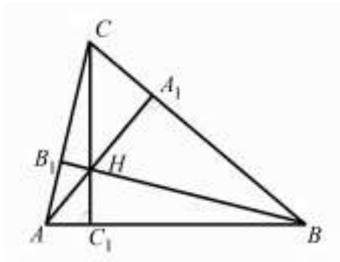
Од последното равенство добиваме дека триаголниците HFB и CEH се рамнокраки правоаголни триаголници. Значи, $\overline{FB} = \overline{HF} = y$ и $\overline{EC} = \overline{HE} = x$. Триаголникот BEA е рамнокрак, во кој $\measuredangle ABE = \measuredangle EAB = 45^\circ$, па затоа $\overline{AE} = \overline{EB} = 2x$. Според тоа, од триаголникот HEA имаме $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = x\sqrt{5}$. Триаголниците ADC и AHE се сли чни (имаат исти агли), и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}}$, од каде следува $\overline{AD} = \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{3x \cdot 2x}{x\sqrt{5}} = \frac{6x}{\sqrt{5}}$. Сега, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{6x\sqrt{5}}{5}}{x\sqrt{5}} = \frac{6}{5}$.

Од последното равенството добиваме $\overline{AH} : \overline{DH} = 5:1$.

10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H, должини на страни a,b,c и должини на соодветните висини h_a, h_b, h_c. Докажи, дека

$$\overline{AH} \cdot h_a + \overline{AB} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \qquad (*)$$

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C кон страните BC, CA, AB, соодветно. Четириаголниците AC_1HB_1, BA_1HC_1, CB_1HA_1 се тетивни. Од степенот на точка во однос на кружниците опишани околу овие четириаголници добиваме:



$$\overline{AH} \cdot \overline{AA_1} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AB}, \quad \overline{AH} \cdot \overline{AA_1} = \overline{AB_1} \cdot \overline{AC},$$
$$\overline{BH} \cdot \overline{BB_1} = \overline{BC_1} \cdot \overline{AB}, \quad \overline{BH} \cdot \overline{BB_1} = \overline{BA_1} \cdot \overline{BC},$$
$$\overline{CH} \cdot \overline{CC_1} = \overline{CA_1} \cdot \overline{BC}, \quad \overline{CH} \cdot \overline{CC_1} = \overline{CB_1} \cdot \overline{AC}.$$

Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$$2(\overline{AH} \cdot \overline{AA_1} + \overline{BH} \cdot \overline{BB_1} + \overline{CH} \cdot \overline{CC_1}) = (\overline{AC_1} + \overline{BC_1}) \cdot \overline{AB} + (\overline{BA_1} + \overline{CA_1}) \cdot \overline{AC}$$
$$+ (\overline{AB_1} + \overline{CB_1}) \cdot \overline{AC}$$

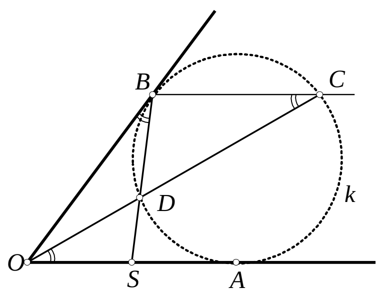
од каде следува бараното равенство (*).

11. Кружницата k ги допира краците на агол со теме O во точките A и B. Правата низ B што е паралелна со кракот OA, ја сече кружницата во точката C, а отсечката OC ја сече кружницата во точката D.

Докажи дека правата BD ја полови отсечката OA.

Решение. Ќе докажеме дека $\triangle OBS \sim \triangle DOS$ (види цртеж). Јасно, $\measuredangle OBS = \measuredangle BCD$ како агли меѓу тангента и тетива, $\measuredangle BCD = \measuredangle DOS$ како наизменични агли. Значи, $\measuredangle OBS = \measuredangle DOS$, а аголот кај темето S е заеднички, па значи триаголниците OBS и DOS се слични. Тогаш

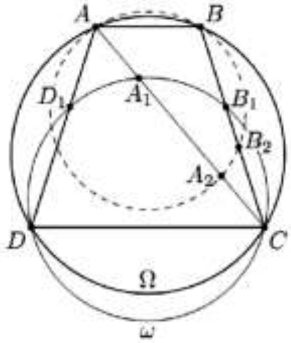
$$\overline{OS} : \overline{SB} = \overline{DS} : \overline{SO}, \quad \text{т.е.} \quad \overline{OS}^2 = \overline{SD} \cdot \overline{SB}$$



Но $\overline{SA}^2 = \overline{SD} \cdot \overline{SB}$ (степен на точката S во однос на кружницата k), па следува дека

$\overline{OS} = \overline{SA}$, т.е. точката S ја располовува отсечката OA.

12. Трапез $ABCD$ со основи AB и CD е впишан во кружница Ω. Кружницата ω минува низ точките C и D и ги сече отсечките CA и CB соодветно во точките A_1 и B_1. Точките A_2 и B_2 се симетрични на точките A_1 и B_1 во однос на средините на отсечките CA и CB, соодветно. Докажи дека точките A, B, A_2 и B_2 лежат на една кружница.

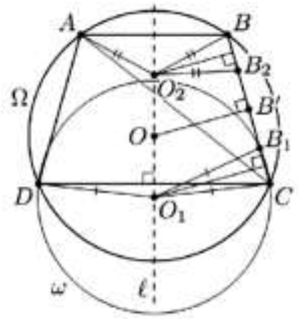


Решение. *Прв начин.* Тврдењето на задачата е еквивалентно на равенството

$$\overline{CA_2}\cdot\overline{CA} = \overline{CB_2}\cdot\overline{CB}.$$

Бидејќи $\overline{AA_1} = \overline{CA_2}$ и $\overline{BB_1} = \overline{CB_2}$, доволно е да докажеме дека $\overline{AA_1}\cdot\overline{AC} = \overline{BB_1}\cdot\overline{BC}$. Нека D_1 е втората пресечна точка на ω и AD (цртеж десно). Тогаш, заради симетријата имаме $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\overline{AD_1} = \overline{BB_1}$. Затоа

$$\overline{AA_1}\cdot\overline{AC} = \overline{AD_1}\cdot\overline{AC} = \overline{BB_1}\cdot\overline{BC}.$$



Втор начин. Со O_1 и O соодветно да ги означиме центрите на кружниците ω и Ω. Овие центри лежат на заедничката симетрала l на основите на трапезот. Нека точката O е симетрична на O_1 во однос на O (цртеж десно). Тогаш O_2 лежи на l и важи $\overline{O_2A} = \overline{O_2B}$. Понатаму, проекциите на точките O_2 и O_1 на BC се симетрични во однос на проекцијата на O, т.е. во однос на средината B' на отсечката BC. Бидејќи проекцијата на O_1 се совпаѓа со средината на отсечката CB_1, од симетријата во однос на B' добиваме, дека проекцијата на O_2 се совпаѓа со средината на отсечката BB_2. Значи, $\overline{B_2O_2} = \overline{BO_2}$.

Аналогно се докажува дека $\overline{A_2O_2} = \overline{AO_2} = \overline{BO_2} = \overline{B_2O_2}$, т.е. точките A, B, A_2 и B лежат на кружница со центар O_2.

13. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките M и N. Нека правата AB ги допира кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките A и B соодветно, така што точката M е поблиску до правата AB од точката N. Нека правата која минува низ точката M и е паралелна со правата AB по втор пат ги сече кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките C и D соодветно. Правите CA и DB се сечат во точката E, правите AN и CD во точката P, а правите BN и CD во точката Q. Докажи дека $\overline{EP} = \overline{EQ}$.

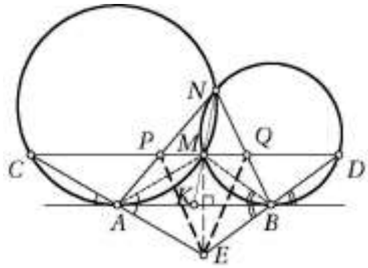
Решение. Нека правите MN и AB се сечат во точката K. Од степенот на точка во однос на кружница следува

$$\overline{KA}^2=\overline{KM}\cdot\overline{KN}=\overline{KB}^2,$$

т.е. K е средина на отсечката AB, па затоа и M е средина на отсечката PQ. Бидејќи

$$\measuredangle BAM=\measuredangle ACM=\measuredangle EAB$$

и слично $\measuredangle ABM=\measuredangle EBA$, добиваме дека точките E и M се симетрични во однос на правата AB, па затоа $EM\perp AB\parallel PQ$. Според тоа, триаголниците EMP и EMQ се складни, па затоа $\overline{EP}=\overline{EQ}$.



14. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето A. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A кон страната BC. Продолжението на тежишната линија од темето C на $\triangle ABC$ ја сече опишаната околу него кружница во точка K. Докажи, дека точките K,H,C и D лежат на една кружница.

Решение. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од точката B на правата AD. Тогаш четириаголникот $AHBE$ е правоаголник. Според тоа,

$$\measuredangle HED=\measuredangle ABC=180^\circ-\measuredangle BCD,$$

т.е. точките D,C,H,E лежат на една кружница ω.

Ако M е пресечната точка на дијагоналите на правоаголникот $AHBE$, тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MH}=\overline{ME}$ (по услов точката M лежи на CK). Бидејќи точките $A,K,$ B,C лежат на една кружница имаме

$$\overline{MK}\cdot\overline{MC}=\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MH}\cdot\overline{ME}.$$

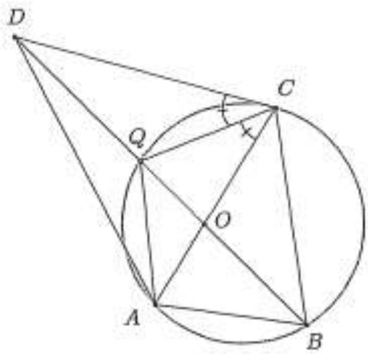
Од последното равенство следува, дека точките C,K,H,E лежат на една кружница и тоа е кружницата опишана околу $\triangle CHE$, т.е. таа се совпаѓа со ω. Според тоа, точките K,H,C и D лежат на една кружница.

15. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\overline{OA}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OD}}{\overline{OC}+\overline{CD}}$, каде O е пресекот на дијагоналите на четириаголникот $ABCD$. Точката Q е втората пресечна точка на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и правата BD. Докажи дека CQ е симетрала на $\measuredangle DCA$.

Решение. Според теоремата за симетралата на агол доволное да докажеме дека $\overline{DQ}:\overline{OQ}=\overline{CD}:\overline{OC}$, односно

$$\overline{CD}\cdot\overline{OQ}=\overline{OC}\cdot\overline{DQ}.$$

Имаме $\overline{DQ}=\overline{OD}-\overline{OQ}$, па затоа треба да докажеме дека $\overline{CD}\cdot\overline{OQ}=\overline{OC}\cdot(\overline{OD}-\overline{OQ})$, односно $\overline{OQ}\cdot(\overline{CD}+\overline{OC})=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$. Од степенот на точка во однос на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ следува $\overline{OB}\cdot\overline{OQ}=\overline{OC}\cdot\overline{OA}$, па затоа треба да докажеме дека



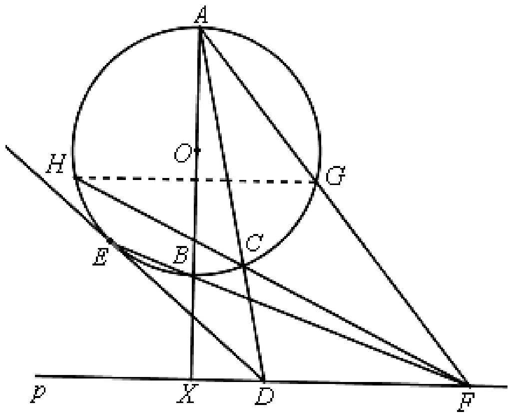
$$\frac{\overline{OC}\cdot\overline{OA}}{\overline{OB}}\cdot(\overline{CD}+\overline{OC})=\overline{OC}\cdot\overline{OD}.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството $\overline{OA}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OD}}{\overline{OC}+\overline{CD}}$, кое е точно според условот на задачата.

16. Кружницата $k(O,r)$ и правата p не се сечат. Нека AB е дијаметарот на k којшто е нормален на p (B е поблиску до p). Нека C е произволна точка од k, различна од A и B и нека AC ја сече p во D. Правата DE ја допира k во E, така што B и E се на иста страна од правата AC. Нека BE ја сече p во F, и нека AF ја сече k во $G\neq A$. Ако G' е точката која е осно симетрична на точката G во однос на правата AB, докажи дека G', C и F се колинеарни точки.

Решение. Нека $AB\cap p=\{X\}$ и нека правата CF ја сече кружницата во H. Од $\measuredangle AEF=\measuredangle AEB=90^\circ$ и $\measuredangle AXF=90^\circ$, следува дека $EXFA$ е тетивен четириаголник. Тогаш

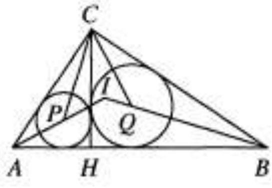
$$\measuredangle DEF=\measuredangle DEB=\measuredangle EAB=\measuredangle EAX$$
$$=\measuredangle EFX=\measuredangle EFD$$



па триаголникот FED е рамнокрак, односно $\overline{DE}=\overline{DF}$. Од степенот на точката D во однос на кружницата $k(O,r)$, имаме $\overline{DE}^2=\overline{DC}\cdot\overline{DA}$. Тогаш $\overline{DF}^2=\overline{DC}\cdot\overline{DA}$ и затоа важи $\frac{\overline{DC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}}$, а бидејќи важи $\measuredangle CDF=\measuredangle FDA$ следува дека $\Delta CDF\cong\Delta FDA$. Затоа $\measuredangle DCF=\measuredangle DFA$ и тогаш $\measuredangle DFA=\measuredangle DCF=\measuredangle HCA=\measuredangle HGA$, од каде што следува дека $DF\parallel HG$, односно HG и AB се заемно нормални прави. Тогаш $H\equiv G'$, па G', C и F се колинеарни точки.

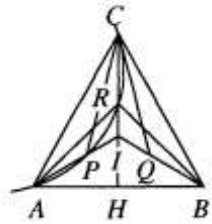
17. Во $\triangle ABC$ е повлечена висината CH кон страната AB, при што точката H е внатрешна за AB. Со P и Q се означени центрите на кружниците впишани во $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $ABQP$ е тетивен ако и само ако $\overline{AC}=\overline{BC}$ или $\measuredangle ACB=90^\circ$.

Решение. Ако $\overline{AC}=\overline{BC}$, тогаш четириаголникот $ABQP$ е рамнокрак трапез, што значи дека тој е тетивен. Ако $\measuredangle ACB=90^\circ$, тогаш $\measuredangle ACI=\measuredangle BCI=45^\circ$, каде I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме $\measuredangle APC=\measuredangle BQC=135^\circ$, т.е. $\measuredangle IPC=\measuredangle IQC=45^\circ$. Според тоа, $\triangle IPC\sim\triangle ICA$ и $\triangle IQC\sim\triangle ICB$. Оттука



$\overline{IP}\cdot\overline{IA}=\overline{IC}^2=\overline{IQ}\cdot\overline{IB}$, па затоа четириаголникот $ABQP$ е тетивен.

Да ја разгледаме кружницата опишана околу $\triangle APC$. Ако таа се допира до CI во точката C, тогаш $\measuredangle ACI=\measuredangle IPC$ $=45^\circ$, па затоа $\measuredangle ACB=90^\circ$. Нека оваа кружница ја сече по вторпат CI во точка R. Тогаш

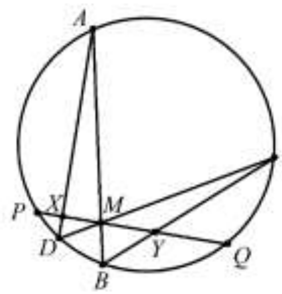


$$\overline{IP}\cdot\overline{IA}=\overline{IR}\cdot\overline{IC} \text{ и } \overline{IP}\cdot\overline{IA}=\overline{IQ}\cdot\overline{IB}.$$

Затоа $\overline{IQ}\cdot\overline{IB}=\overline{IR}\cdot\overline{IC}$ и четириаголникот $BCRQ$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle BRC=\measuredangle BQC=135^\circ=\measuredangle APC=\measuredangle ARC,\ \triangle ARC\cong\triangle BRC \text{ и } \overline{AC}=\overline{BC}.$$

18. Во кружница со радиус 10 земена е тетива PQ и точка M на неа таква што $\overline{PM}=5$ и $\overline{MQ}=10$. Низ точката M се повлечени тетиви AB и CD и точките X и Y се пресечните точки на тетивите AD и BC со тетивата PQ, соодветно (види цртеж). Ако е познато дека $\overline{XM}=3$, определи ја должината на отсечката MY.

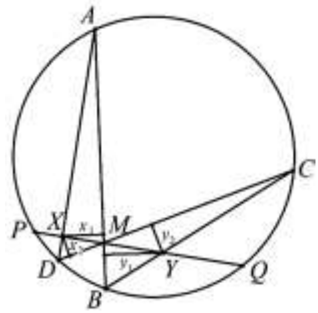


Решение. На почетокот да забележиме дека

$$\measuredangle BAD=\measuredangle BCD \text{ и } \measuredangle ABC=\measuredangle ADC,$$

како парови агли на исти кружни лаци. Повлекуваме нормали од точките X и Y на тетивите AB и CD, соодвено. Користејќи дека $\overline{XM}=3$ и $\overline{MY}=y$, од сличноста на триаголниците следува дека

$$\frac{3}{y}=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_1}{y_2}=\frac{\overline{AX}}{\overline{CY}} \text{ и } \frac{x_2}{y_1}=\frac{\overline{DX}}{\overline{BY}}.$$



Оттука следува дека

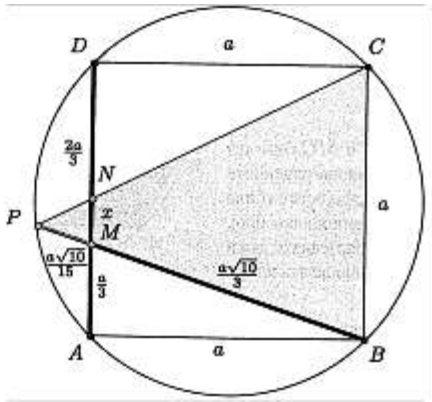
$$\frac{9}{y^2}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}=\frac{\overline{AX}\cdot\overline{DX}}{\overline{BY}\cdot\overline{CY}}.$$

Од степените на точките X и Y во однос на кружницата следува дека

$$\overline{AX}\cdot\overline{DX}=\overline{PX}\cdot\overline{QX},\ \overline{BY}\cdot\overline{CY}=\overline{PY}\cdot\overline{QY},$$

па затоа $\frac{9}{y^2}=\frac{\overline{PX}\cdot\overline{QX}}{\overline{PY}\cdot\overline{QY}}$. Ако искористимедека $\overline{XM}=3$ и $\overline{MY}=y$, од последното равенство го добиваме равенството $\frac{9}{y^2}=\frac{2\cdot 13}{(5+y)(10-y)}$, кое е еквивалентно со равенството: $5(7-30y)(y+3)=0$. Конечно, од последното равенство добиваме $\overline{MY}=y=\frac{30}{7}$.

19. Даден е квадрат $ABCD$ и точка M на AD таква што $\overline{MD}=2\overline{AM}$. Нека P е втората пресечна точка на BM со опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Докажи дека правата PC минува низ средината на отсечката AD.



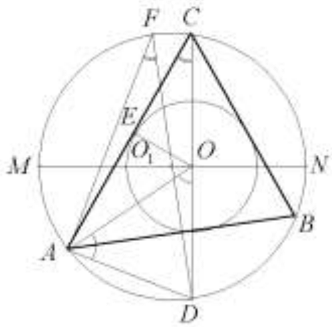
Решение. Нека N е пресечната точка на правите AD и CP, должината на страната на квадратот е a и нека $\overline{MN} = x$. Доволно е да докажеме дека $x = \frac{a}{6}$.

Од Питагоровата теорема за $\triangle BAM$ следува $\overline{BM} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$. Понатаму, од степенот на точката M во однос на кружницата опишана околу квадратот следува $\overline{MP} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MD}$, т.е. $\overline{MP} = \frac{a\sqrt{10}}{15}$. Според тоа,

$$\overline{BP} = \overline{BM} + \overline{MP} = \frac{a\sqrt{10}}{3} + \frac{a\sqrt{10}}{15} = \frac{6a\sqrt{10}}{15}.$$

Сега од Талесовата теорема следува $\overline{MP} : \overline{MN} = \overline{MB} : \overline{BC}$, т.е. $\frac{a\sqrt{10}}{15} : x = \frac{6a\sqrt{10}}{15} : a$, од каде следува $x = \frac{a}{6}$.

20. Даден е рамнокрак триаголник ABC, со радиуси на опишана и впишана кружница r и ρ, соодветно. Докажи дека растојанието d меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница е $d = \sqrt{r(r-2\rho)}$.



Решение. Ќе докажеме дека оваа формула важи за секој триаголник ABC. Нека O_1 и O се центри на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC, D е средна точка на лакот AB, кој не го содржи темето C. Секој од аглите $\measuredangle OAD$ и $\measuredangle DOA$ е еднаков на половината од збирот на аглите кај темињата A и C во триаголникот ABC. Според тоа $\overline{OD} = \overline{AD}$.

Од степенот на точка во однос на кружница за опишаната кружница и точката O добиваме

$$\overline{MO} \cdot \overline{ON} = \overline{CO} \cdot \overline{OD}.$$

Бидејќи $OE \perp AB$ и FD е дијаметар на опишаната кружница, триаголниците COE и FDA се слични, па според тоа

$$\overline{CO} : \overline{OE} = \overline{FD} : \overline{AD},$$

од каде што добиваме

$$\overline{CO} \cdot \overline{AD} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

Бидејќи $\overline{OD} = \overline{AD}$, добиваме

$$\overline{CO} \cdot \overline{OD} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

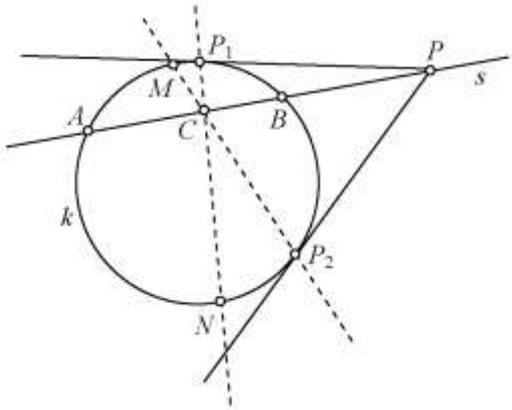
Конечно,

$$\overline{MO} \cdot \overline{ON} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

Ако во ова равенство ставиме $\overline{MO}=r+d$, $\overline{ON}=r-d$, $\overline{OE}=\rho$ и $\overline{FD}=2r$, добиваме $r^2-d^2=2r\rho$, што и требаше да докажеме.

21. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која минува низ P ја сече k во точките A и B. Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B, а C е точка на отсечката AB, таква што $\overline{PC}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$. Докажи дека $\measuredangle MCN$ не зависи од положбата на правата s.

Решение. Нека PP_1 и PP_2 се тангенти на кружницата k, каде P_1 и P_2 се точки кои припаѓаат на лаците кои ги содржат точките M и N соодветно. Ќе покажеме дека точките P_1, C и N се колинеарни.



Триаголникот PP_1C е рамнокрак ($\overline{PC}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PP_1}^2$ - степен на точката P во однос на кружницата k) и $\triangle PP_1A\sim\triangle PBP_1$, од каде

$$\measuredangle PP_1C=\frac{\pi-\measuredangle P_1PB}{2}=\frac{\measuredangle PBP_1+\measuredangle PP_1B}{2}=\frac{\measuredangle PP_1A+\measuredangle PP_1B}{2}=\measuredangle PP_1N$$

од што следува бараната колинеарност.

Аналогно, докажуваме дека P_2, C и M се колинеарни. Оттука

$$\measuredangle MCN=\measuredangle P_1CP_2=\pi-\tfrac{1}{2}\measuredangle P_1PP_2$$

(затоа што P_1, C и P_2 припаѓаат на кружница со центар P), од каде следува тврдењето на задачата.

22. Нека D е произволна точка на страната AB на $\triangle ABC$. Кружниците опишани околу триаголниците BCD и ACD ги сечат соодветно ги сечат страните AC и BC во точките E и F. Симетралата на отсечката EF ја сече AB во точката M, а нормалата на AB во точката D во точката N. Правите AB и EF се сечат во точката T, а втората пресечна точка на кружницата опишана околу $\triangle CDM$ и правата TC е U. Докажи дека $\overline{NC}=\overline{NU}$.

Решение. Од тетивните четириаголници $BCFD$ и $ADEC$ следува

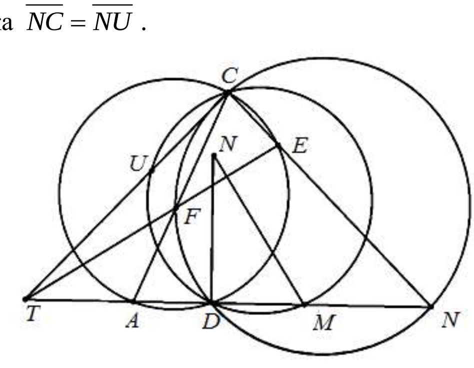
$\measuredangle FDA=180^\circ-\measuredangle FDB=\measuredangle ACB$ и

$\measuredangle EDB=180^\circ-\measuredangle EDA=\measuredangle ACB$,

па затоа

$\measuredangle FDN=90^\circ-\measuredangle ABC=\measuredangle EDN$,

т.е. DN е симетрала на $\measuredangle FDE$.



Да го разгледаме триаголникот FDE. Во него точката N е пресек на симетрала на агол и симетрала на спротивна страна, па затоа се наоѓа на опишаната кружница на тој триаголник, т.е. четириаголникот $FDEN$ е тетивен. Затоа

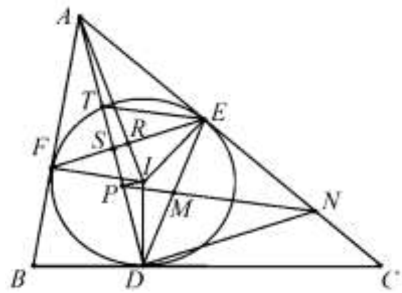
$$\measuredangle FNE = 180^\circ - \measuredangle EFD = 180^\circ - (180^\circ - 2\measuredangle ACB) = 2\measuredangle ACB .$$

Покрај тоа важи $\overline{NF} = \overline{NE}$, што значи дека N е центар на опишаната кружница на $\triangle FEC$.

За да докажеме дека $\overline{NC} = \overline{NU}$, доволно е да докажеме дека четириаголникот $UFEC$ е тетиве (во тој случај N е центар на опишаната кружница околу тој четириаголник, па ќе важи $\overline{NC} = \overline{NU}$). Последното ќе го докажеме ако докажеме дека $\overline{TU} \cdot \overline{TC} = \overline{TF} \cdot \overline{TE}$. Но, од степенот на точката T имаме $\overline{TU} \cdot \overline{TC} = \overline{TD} \cdot \overline{TM}$, па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{TD} \cdot \overline{TM} = \overline{TF} \cdot \overline{TE}$, т.е. доволно е да докажеме дека четириаголникот $DMEF$ е тетивен.

Ќе докажеме дека NM е дијаметар на кружницата опишана околу четириаголникот $FDEN$. Нека NM' е дијаметар на таа кружница. Од една страна, точката M' припаѓа на правата NM (тоа е симетрала на отсечката EF), а од друга страна $\measuredangle NDM' = 90^\circ$, што значи дека $M = M'$. Значи и точката M припаѓа на кружницата опишана околу четириаголникот $FDEN$, па затоа четириаголникот $DMEF$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

23. Нека D, E, F се точки во кои вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA, AB, соодветно, и нека I е центарот на таа кружница. Понатаму, нека P е подножната точка на нормалата спуштена од точката I на правата AD и нека M е средина на отсечката DE. Ако $N = PM \cap AC$, докажи дека $DN \parallel EF$.



Решение. Нека R и S се пресечните точки на отсечката EF со AI и AD, соодветно и нека T е втората пресечна точка на вписаната кружница со правата AD. Од $\overline{IT} = \overline{ID}$, следува дека P е средина на TD, па затоа PM е средна линија на $\triangle DTE$, од каде следува $PM \parallel TE$, т.е. $PN \parallel TE$. Сега, од Талесовата теорема добиваме дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AP}}$. Од друга страна, за да важи $DN \parallel EF$, доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}}$, па всушност доволно е да се докаже дека дека важи $\frac{\overline{AT}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}}$, т.е. $\overline{AS} \cdot \overline{AP} = \overline{AT} \cdot \overline{AD}$. Но, четириаголникот $PIRS$ е тетивен ($\measuredangle IPS = \measuredangle IRS = 90^\circ$), па затоа од степенот на точката A имаме $\overline{AS} \cdot \overline{AP} = \overline{AR} \cdot \overline{AI}$. Понатаму, од сличноста на триаголниците ARE и AIE (заеднички агол при темето A и прав агол), добиваме $\overline{AE}^2 = \overline{AR} \cdot \overline{AI}$. Значи, $\overline{AS} \cdot \overline{AP} = \overline{AE}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{AD}$, при што последното равенство важи од степенот на точката A на вписаната кружница.

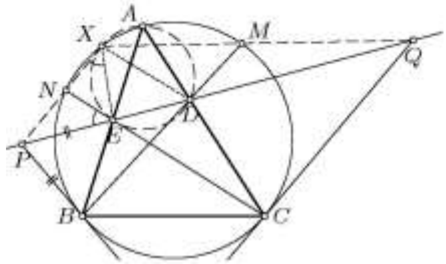
24. Нека ω е опишаната кружница остроаголниот троаголник *ABC*. На страните *AB* и *AC* на овој триаголник се изабрани точки *E* и *D*, соодветно, такви што $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE$. Правите *BD* и *CE* ја сечат кружницата ω во точките *M* и *N* ($M \neq B$ и $N \neq C$), соодветно, а тангентите во точките *B* и *C* на кружницата ω ја сечат правата *DE* во точките *P* и *Q*, соодветно. Докажи дека пресечната точка на правите *PN* и *QM* припаѓа на кружницата ω.

Решение. Четириаголникот *BCDE* е тетивен, па затоа

$$\measuredangle BEP = \measuredangle BCD = \measuredangle BCA = \measuredangle PBA,$$

т.е. во триаголникот *BPE* важи $\overline{PB} = \overline{PE}$. Нека правата *PN* повторно ја сече кружницата ω во во тачката *X*. Бидејќи

$$\overline{PN} \cdot \overline{PX} = \overline{PB}^2 = \overline{PE}^2,$$



триаголниците *PNE* и *PEX* се слични. Така во ориентираните агли имаме

$$\measuredangle AXE = \measuredangle AXN - \measuredangle EXN = \measuredangle ACN - \measuredangle PEN = \measuredangle DCE - \measuredangle DEC = \measuredangle ADE,$$

па точката *X* лежи на опишаната кружница *k* на триаголникот *ADE*. Слично, точката *X′* во која правата *QM* повторно ја сече сече ω исто така припаѓа на кружницата *k*. Да забележиме дека во случај кога $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ важи $X \neq A$ (и слично $X' \neq A$) бидејќи

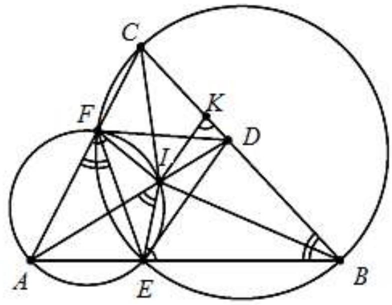
$$\measuredangle NXE - \measuredangle NAE = \measuredangle CED - \measuredangle NAB = \measuredangle CBD - \measuredangle ECB = \measuredangle CBA - \measuredangle ACB \neq 0,$$

па е $X \equiv X'$ втората точка на пресекот на *k* и ω. Од друга страна ако $\overline{AB} = \overline{AC}$, тогаш k и ω се додираат во *A*, па затоа $X \equiv X' \equiv A$.

25. Во остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{AC}$, симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D. Точките E и F соодветно од страните AB и AC се такви, што B, C, E и F лежат на една кружница. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle DEF$ се совпаѓа со центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако $\overline{BE} + \overline{CF} = \overline{BC}$.

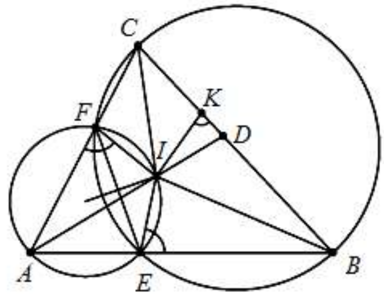
Решение. Со I да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Нека претпоставиме дека $\overline{BE} + \overline{CF} = \overline{BC}$. Нека K е точка на BC таква што $\overline{BK} = \overline{BE}$ и тогаш $\overline{CK} = \overline{CF}$. Бидејќи BI и CI се симетрали на агли, од овие равенства следува

$$\measuredangle BEI = \measuredangle BKI = \pi - \measuredangle CKI$$
$$= \pi - \measuredangle CFI = \measuredangle AFI,$$



т.е. точките A, E, I и F лежат на една кружница. Но, точките B, C, F и E лежат на една кружница, па затоа $\measuredangle AIE = \measuredangle AFE = \measuredangle ABC$, што значи дека точките B, E, I и D лежат на една кружница.

За тетивниот четириаголник $AEIF$ правата AI е симетрала на $\measuredangle EAF$, па затоа $\overline{IF} = \overline{IE}$. Аналогно, за тетивниот четириаголник $BDIE$ правата BI е симетрала на агол и затоа $\overline{IE}=\overline{ID}$. Според тоа, $\overline{IF}=\overline{IE}=\overline{ID}$, што значи дека I е центар на опишаната кружница околу $\triangle DEF$.



Обратно, нека I е центар на опишаната кружница околу $\triangle DEF$. Бидејќи точките B,E,F и C лежат на една кружница, добиваме дека

$$\overline{AE}\cdot\overline{AB}=\overline{AF}\cdot\overline{AC}$$

и како $\overline{AB}>\overline{AC}$, од последното равенство следува дека $\overline{AE}<\overline{AF}$. Освен тоа, симетралата на $\measuredangle EAF$ и симетралата на отсечката EF се сечат во точка I која припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle AEF$.

Нека K е симетричната точка на точката E во однос на правата BI. Тогаш

$$\measuredangle BKI=\measuredangle BEI=\measuredangle AFI>\measuredangle ACI=\measuredangle BCI,$$

па затоа точката K припаѓа на отсечката BC. Тогаш

$$\measuredangle IKC=\measuredangle IFC, \measuredangle ICK=\measuredangle ICF,$$

т.е. $\triangle IKC\cong\triangle IFC$. Оттука, $\overline{BC}=\overline{BK}+\overline{CK}=\overline{BE}+\overline{CF}$.

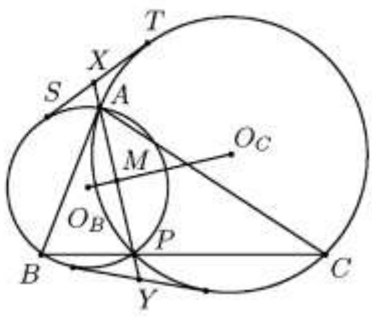
26. Даден е $\triangle ABC$. Определи ги сите точки P од страната BC, кои го имаат следново својство: ако X и Y се пресечните точки на правата PA со заедничките надворешни тангенти на опишаните кружници околу $\triangle PAB$ и $\triangle PAC$, тогаш

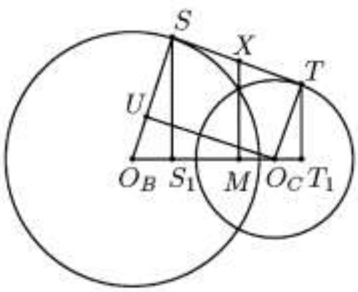
$$(\frac{\overline{PA}}{\overline{XY}})^2+\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=1.$$

Решение. Нека ω_B и O_B (соодветно ω_C и O_C) се кружницата, опишана околу $\triangle ABP$ (соодветно $\triangle ACP$) и нејзиниот центар; правата $ST, S\in\omega_B, T\in\omega_C$, е едната заедничка тангента на ω_B и ω_C, $X\in ST$ и Y лежи на другата заедничка тангента.

Ќе користиме два добро познати геометриски факти. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$.

Прво, ако $M=O_BO_C\cap XY$, тогаш M е средина и на AP и на XY, а правата O_BO_C е симетрала на овие отсечки. Освен тоа X е средина на ST (од степените на X во однос на двете кружици имаме $\overline{XS}^2=\overline{XA}\cdot\overline{XP}=\overline{XT}^2$).





Второ, триаголниците ABC и AO_BO_C са слични. Навистина, имаме

$$\measuredangle ABC = \measuredangle MO_BO_C = \measuredangle O_CO_BA = \frac{AP}{2}$$

(во ω_B) и аналогно $\measuredangle ACB = \measuredangle O_BO_CA$. Од оваа сличност следуваат равенствата

$$\frac{c}{\overline{AO_B}} = \frac{a}{\overline{O_BO_C}} = \frac{b}{\overline{O_CA}}.$$

Ќе докажеме, дека е точно равенството

$$1-\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{XY}}\right)^2 = \frac{a^2}{(b+c)^2}. \qquad (1)$$

Од последното равенство и од условот на задачата добиваме $\overline{PB}\cdot\overline{PC} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Постојат две точки P_1 и P_2 на BC, за кои важи последното равенство – пресечната точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ и BC и нејзината симетрична точка во однос на средината на BC (Провери!). Од друга страна, условот

$$\overline{PB}\cdot(a-\overline{PB}) = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

е квадратна равенка во однос на $\overline{PB}$ и не може да има повеќе од две решенија.
Останува да го докажеме равенството (1). Имаме

$$1-\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{XY}}\right)^2 = \frac{\overline{XY}^2-\overline{PA}^2}{\overline{XY}^2} = \frac{(\overline{XY}+\overline{PA})(\overline{XY}-\overline{PA})}{\overline{XY}^2} = \frac{4\overline{XA}\cdot\overline{XP}}{\overline{XY}^2} = \frac{4\overline{XS}^2}{\overline{XY}^2} = \frac{\overline{ST}^2}{\overline{XY}^2}. \qquad (2)$$

Нека S_1 и T_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките S и T кон правата O_BO_C, соодветно, а U е подножјето на нормалата повлечена од O_C кон O_BS. Тогаш правоаголните триаголници O_BSS_1, O_CTT_1 и O_BO_CU сс слични, а XM е средна отсечка во правоаголниот трапез S_1STT_1. Според тоа,

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{O_BO_C}} = \frac{\overline{UO_C}}{\overline{O_BO_C}} = \frac{\overline{S_1S}}{\overline{O_BS}} = \frac{\overline{T_1T}}{\overline{O_CT}} = \frac{\overline{S_1S}+\overline{T_1T}}{\overline{O_BS}+\overline{O_CT}} = \frac{2\overline{XM}}{\overline{O_BS}+\overline{O_CT}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{O_BS}+\overline{O_CT}},$$

од каде заради сличноста на триаголниците ABC и AO_BO_C следува

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{O_BO_C}}{\overline{O_BS}+\overline{O_CT}} = \frac{\overline{O_BO_C}}{\overline{O_BA}+\overline{O_CA}} = \frac{a}{b+c}. \qquad (3)$$

Конечно, од (2) и (3) следува равенството (1).

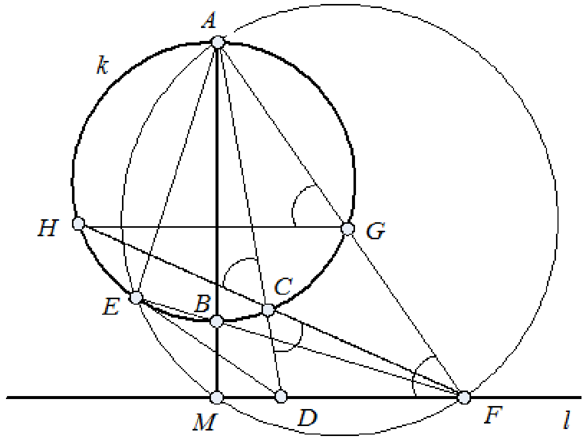
27. Нека кружницата k и правата l не се сечат и AB е дијаметар на кружницата k кој е нормален на правата l при што B е поблиску до l од A. Избрана е точка $C \neq A, B$ која припаѓа на кружницата k. Правата AC ја сече l во точката D. Точката E припаѓа на k така што DE е тангента на k и B и E се на иста страна од AC.Правата BE ја сече правата l во точка F, а AF ја сече k во точка $G \neq A$. Да с едокаже дека симетричната точка G во однос на AB припаѓа на CF.

Решение. Пресекот на дијаметарот AB со правата l ќе го означиме со M и нека H е симетричната точка на G во однос на AB. Јасно е дека $H \in k$. Бидејќи AB е дијаметар на кругот k добиваме дека $\measuredangle BEA = 90^\circ$. Според конструкцијата $\measuredangle FEA = 90^\circ$. Бидејќи $\measuredangle FMA = 90^\circ$ добиваме дека точките F, A, E, M припаѓаат на една кружница со дијаметар AF. Значи, четириаголникот $FAEM$ е тетивен.

Аглите $\measuredangle DFE = \measuredangle MFE$ и $\measuredangle BAE = \measuredangle MAE$ се еднакви како агли над ист кружен лак во кружницата опишана над четириаголникот $MFAD$. Бидејќи DE е тангента на k, добиваме дека

$\measuredangle DEF = \measuredangle BAE = \measuredangle MAE$.

Според тоа во триаголникот EDF имаме два ист агли, $\measuredangle DEF = \measuredangle DFE$, па затоа $\overline{DE} = \overline{DF}$.



Од степенот на точка во однос на кружница, и последното равенство добиваме $\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{DA}$. Заради последното равенство имаме

$$\measuredangle DCF = \measuredangle DFA = \measuredangle HGA = \measuredangle HCA.$$

Бидејќи D, C, A се колинеарни и од равенството $\measuredangle DCF = \measuredangle HCA$ добиваме дека H, C, F се колинеарни, т.е. $H \in CF$.

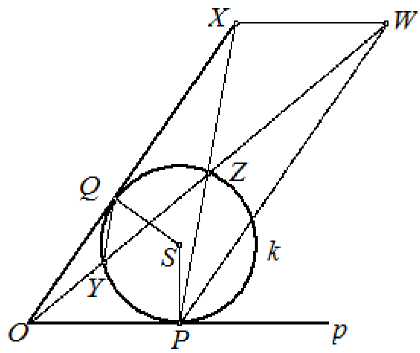
28. Кружницата k ги допира краците Op и Oq на аголот $\measuredangle pOq$ во точките P и Q соодветно. Точката X припаѓа на полуправата Oq при што $k \cap PX = Z \neq P$ ја полови отсечката PX. Докажи дека $PX \parallel QY$ каде $k \cap OZ = Y \neq Z$.

Решение. Точката W е таква што $OPWX$ е паралелограм (види цртеж). Од равенството на паралелограм имаме

$$\overline{OW}^2 + \overline{PX}^2 = 2\overline{OX}^2 + 2\overline{OP}^2,$$

од каде заради равенствата $\overline{OZ} = \overline{ZW}$ и $\overline{ZX} = \overline{ZP}$ добиваме

$$2\overline{ZX}^2 + 2\overline{OZ}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OP}^2.$$



Од условите на задачата имаме

$$\overline{OX} = \overline{OQ} + \overline{QX}, \ \overline{QX}^2 = \overline{XZ} \cdot \overline{ZP} = 2\overline{XZ}^2$$

(степен на точка во однос на k), $\overline{OP} = \overline{OQ}$ (тангенти кон кружница k од иста точка O).

Од претходните равенства добиваме

$$\begin{aligned} 2\overline{ZX}^2 + 2\overline{OZ}^2 &= \overline{OX}^2 + \overline{OP}^2 = (\overline{OQ} + \overline{QX})^2 + \overline{OP}^2 \\ &= \overline{OQ}^2 + 2\overline{OQ} \cdot \overline{QX} + \overline{QX}^2 + \overline{OP}^2 \\ &= 2\overline{OQ}^2 + 2\overline{OQ} \cdot \overline{QX} + 2\overline{XZ}^2, \end{aligned}$$

од каде добиваме

$$\overline{OZ}^2 = \overline{QO}(\overline{QO} + \overline{QX}) = \overline{OQ} \cdot \overline{OX}\ ,\ \frac{\overline{OZ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}}\ .$$

Од последното равенство добиваме дека $\Delta OQZ \sim \Delta OZX$, па според тоа

$$\measuredangle OQZ = \measuredangle OXZ \tag{1}$$

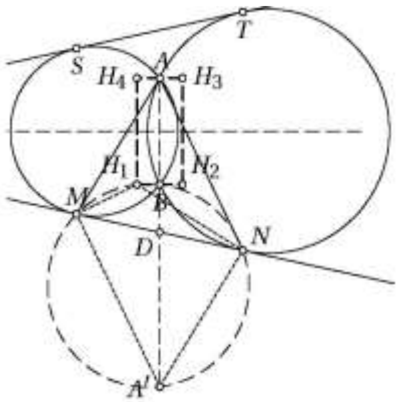
Како периферен агол над кружен лак и агол меѓу тангента и тетива имаме

$$\measuredangle OXZ = \measuredangle OQY\ , \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $PX \parallel QY$.

29. Кружниците C_1 и C_2 имаат различни радиуси и се сечат во точките A и B . Нека MN и ST , ($M, S \in C_1, N, T \in C_2$) се заедничките тангенти на C_1 и C_2 . Докажи, дека ортоцентрите на триаголниците AMN, AST, BMN и BST се темиња на правоаголник.

Решение. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме центрите на триаголниците $AMN,\ AST, BMN, BST$. Точките H_3 и H_4 се соодветно симетрични на точките H_2 и H_1 во однос на правата l која минува низ центрите на кружниците C_1 и C_2 . Затоа доволно е да се докаже дека $H_1H_2 \perp AB$.



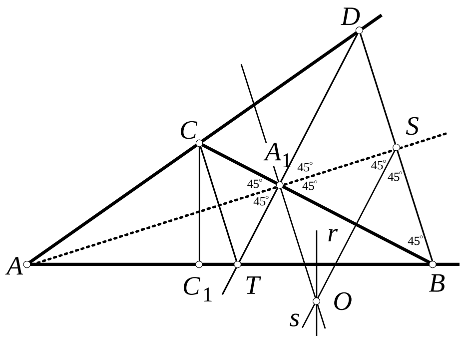
Точката $D = AB \cap MN$ е средина на отсечката MN бидејќи

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DN}^2$$

(степен на точка во однос на дадените кружници). Ако A' е точка таква што $AMA'N$ е паралелограм, тогаш $\measuredangle H_1MA' = \measuredangle H_1NA' = 90^\circ$, т.е. точките M и N лежат на кружница γ со дијаметар H_1A' . Понатаму, и точката B лежи на γ бидејќи $\overline{DB} \cdot \overline{DA'} = \overline{DB} \cdot \overline{DA} = \overline{DM} \cdot \overline{DN}$. Оттука следува дека $\measuredangle H_1BA' = 90^\circ$. Аналогно, $\measuredangle H_2BA' = 90^\circ$, па затоа $B \in H_1H_2 \perp AB$.

30. Во триаголникот ABC се повлечени бисектрисата AA_1 и висината CC_1 . Ако $\measuredangle AA_1C = 45^\circ$, тогаш правата AA_1 е тангента на кружницата опишана околу триаголникот C_1BA_1 . Докажи!

Решение. Нека s е симетрала на A_1B , а r е симетрала на C_1B , т.е. $\{O\} = s \cap r$ е центар на опишаната кружница околу $\triangle C_1BA_1$ и нека $\{D\} = BS \cap AC$, $\{T\} = DA_1 \cap AB$ и $\{S\} = s \cap AA_1$. Правата OS е симе-



трала на A_1B, па $\triangle ASB$ е рамнокрак. Од $\angle BA_1S = 45^\circ$ следува дека

$$\measuredangle A_1SO = \measuredangle OSB = \measuredangle SBO = 45^\circ .$$

Натаму AS е симетрала на $\measuredangle DAB$ и $AS \perp BD$, па $\triangle ABD$ е рамнокрак. Од тоа следува дека $\triangle BDA_1$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle A_1DB = \measuredangle A_1BD = 45^\circ$. Според тоа, $\measuredangle ADA_1 = \measuredangle ABA_1 = \beta$ и $\measuredangle SA_1D = \measuredangle SA_1B = 45^\circ$. Значи $\measuredangle CA_1D = \measuredangle TA_1B = 90^\circ$. Од равенствата $\measuredangle ADA_1 = \measuredangle ABA_1 = \beta$, $\measuredangle CA_1D = \measuredangle TA_1B = 90^\circ$ и $\overline{A_1D} = \overline{A_1B}$ следува дека $\triangle CA_1D \cong \triangle TA_1B$, па затоа $\measuredangle A_1CD = \measuredangle A_1TB = 90^\circ - \beta$ и $\overline{CA_1} = \overline{TA_1}$. Бидејќи $\measuredangle CAT = 90^\circ$ и $\overline{CA_1} = \overline{TA_1}$ следува $\measuredangle TCA_1 = \measuredangle CTA_1 = 45^\circ$. Четириаголникот C_1TA_1C е тетивен ($\measuredangle CC_1T = \measuredangle CA_1T = 90^\circ$), па $\measuredangle C_1CT = \measuredangle C_1A_1T$. Триаголникот C_1BC е правоаголен, па $\measuredangle C_1CB = 90^\circ - \beta$. Тогаш

$$\measuredangle C_1TC = 180^\circ - (\measuredangle CTA_1 + \measuredangle A_1TB) = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ + \beta = 45^\circ + \beta ,$$

па $\measuredangle C_1CT = 90^\circ - \measuredangle C_1TC = 45^\circ - \beta$. Значи $\measuredangle C_1A_1T = \measuredangle C_1CT = 45^\circ - \beta$, па следува

$$\measuredangle AA_1C_1 = \measuredangle AA_1T - \measuredangle C_1A_1T = 45^\circ - (45^\circ - \beta) = \beta .$$

Значи важи $\measuredangle A_1BA = \measuredangle C_1A_1A = \beta$, па $\Delta AC_1A_1 \sim \Delta AA_1B$ (аголот A_1AB е заеднички). Оттука $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AA_1}}$, односно $\overline{AA_1}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC_1}$. Бидејќи $A_1, C_1B \in k\,(O, \overline{OB})$, $\overline{AC_1} \cdot \overline{AB}$ е степен на точката A во однос на кружницата k и од $\overline{AA_1}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC_1}$ следува дека AA_1 е тангента на кружницата k.

31. Кружниците k_1 и k_2 со различни радиуси се сечат во точките A и B. Точките C и D соодветно од k_1 и k_2 се такви, што A е средина на отсечката CD. Правата DB ја сече k_1 по втор пат во точката E, а правата CB ја сече k_2 по втор пат во точката E. Нека l_1 и l_2 се соодветно симетралите на отсечките CD и EF.

а) Докажи, дека l_1 и l_2 имаат единствена заеднничка точка P.

б) Докажи, дека должините на отсечките CA, AP и PE се должини на страни на правоаголен триаголник.

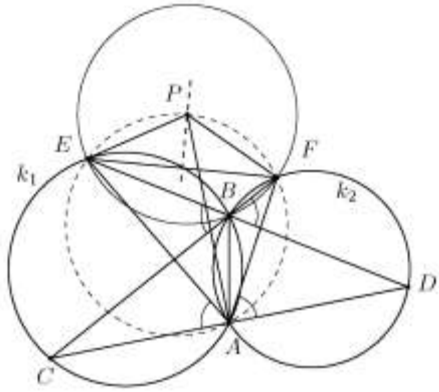
Решение. а) Од условот на задачата следува, дека

$$\overline{CB} \cdot \overline{CF} = \overline{CA} \cdot \overline{CD} = \overline{DA} \cdot \overline{DC} = \overline{DB} \cdot \overline{DE}.$$

Да претпоставиме дека $l_1 \| l_2$. Тогаш $CD \| EF$ и затоа $\frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}}$. Од последните равенства следува $\overline{CB} = \overline{DB}$, па затоа $BA \perp CD$. Добивме дека еднаквите отсечки CB и BD се дијаметри на кружниците k_1 и k_2, што противречи на условот, дека k_1 и k_2 имаат различни радиуси.

б) Имаме $\measuredangle CAE = \measuredangle CBE = \measuredangle DBF = \measuredangle DAF$. Бидејќи $AP \perp CD$, AP е симетрала на $\measuredangle EAF$. Бидејќи точката P лежи на симетралата на EF, таа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AEF$. Имаме

$$\measuredangle EPF = 180^\circ - \measuredangle EAF = \measuredangle CAE + \measuredangle DAF$$
$$= 2\measuredangle CAE = 2\measuredangle CBE.$$



Тоа значи, дека B лежи на кружницата со центар P и радиус $\overline{PE} = R$. Од степените на точки во однос на таа кружница добиваме

$$2\overline{CA}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CD} = \overline{CB} \cdot \overline{CF} = \overline{CP}^2 - R^2.$$

Следствено,

$$\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 = (2\overline{CA}^2 + R^2) - \overline{CP}^2$$
$$= \overline{CP}^2 + \overline{PE}^2,$$

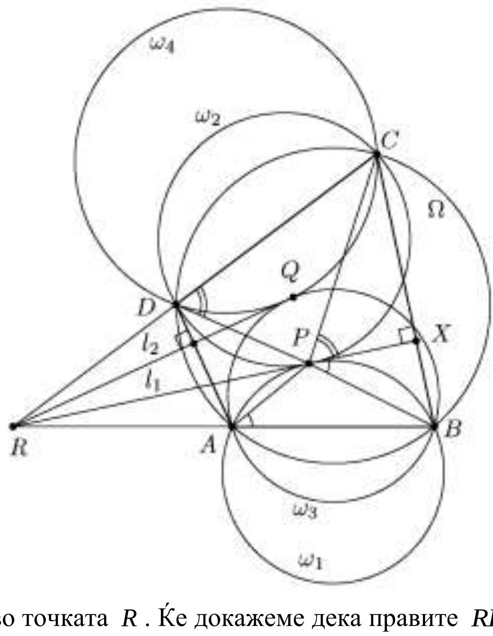
од што следува бараното тврдење.

32. Во внатрешноста на тетивен четириаголник $ABCD$ се дадени точки P и Q такви што

$$\measuredangle PDC + \measuredangle PCB = \measuredangle PAB + \measuredangle PBC = \measuredangle QCD + \measuredangle QDA = \measuredangle QBA + \measuredangle QAD = 90^\circ.$$

Докажи, дека правата PQ зафаќа исти агли со правите AD и BC.

Решение. Кружниците опишани околу $ABCD$ и триаголниците ABP, CDP, ABQ и CDQ да ги означиме соодветно со $\Omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4. Нека X е проекцијата на P врз BC и правата PX да ја означиме со l_1. Тогаш



$$\measuredangle BPX = 90^\circ - \measuredangle PBC = \measuredangle PAB,$$

па значи правата l_1 се допира до кружницата ω_1. Аналогно l_1 се допира и до ω_2. Според тоа, l_1, ω_1 и ω_2 се допираат во точката P. Аналогно се докажува, дека правата l_2 која минува низ Q и е нормална на AD, и кружниците ω_3 и ω_4 се допираат во точката Q.

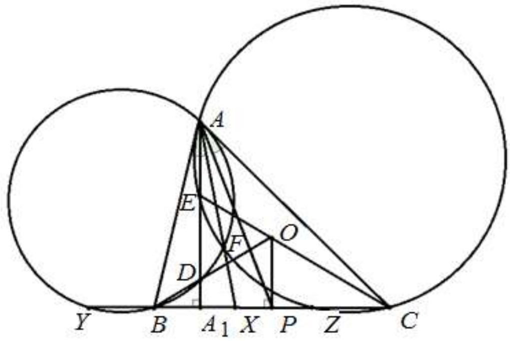
Нека правите AB и CD се сечат во точката R. Ќе докажеме дека правите RP и l_1 се совпаѓаат. Со P_1 и P_2 да ги означиме вторите пресечни точки на RP соодветно со ω_1 и ω_2 (притоа $P_1 = P$, ако RP ја допира ω_1 и аналогно за P_2). Тогаш $\overline{RP_1} \cdot \overline{RP} = \overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RD} \cdot \overline{RC} = \overline{RP_2} \cdot \overline{RP}$, т.е. $P_1 = P_2$. Сега, бидејќи P е единствена заедничка точка на ω_1 и ω_2, важи $P_1 = P_2 = P$. Значи, RP се совпаѓа со l_1, па затоа $\overline{RP}^2 = \overline{RA} \cdot \overline{RB}$.

Аналогно се добива, дека RQ се совпаѓа со l_2 и $\overline{RQ}^2 = \overline{RA} \cdot \overline{RB}$. Според тоа, $\overline{RP}^2 = \overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RQ}^2$, т.е. $\triangle PQR$ е рамнокрак и неговата основа зафаќа еднакви агли со правите QR и PR, што значи и со нивните нормални прави AD и BC.

Останува да го разгледаме случајот, кога правите AB и CD се паралелни. Тогаш $ABCD$ е рамнокрак трапез или правоаголник. Во двата случаи $ABCD$ и сите разгледувани кружници се симетрични во однос на заедничката симетрала на AB и CD. Според тоа, точките P и Q лежат на таа симетрала, која очигледно зафаќа еднакви агли со правите AD и BC.

33. Нека O е центар на опишаната кружница околу остроаголниот триаголник ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$). Нека A_1 и P се подножјата на нормалите повлечени од A и O кон страната BC, соодветно. Правите BO и CO се сечат со правата AA_1 во точките D и E, соодветно. Втората пресечна точка на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACE е точката F. Докажи дека симетралата на $\measuredangle FAP$ минува низ центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\measuredangle BAF = \measuredangle CAP$. Бидејќи OP е нормална на BC и O е центарот на опишаната кружница, заклучуваме дека P е средина на BC. Според тоа, AP е медијана на триаголникот од темето A, па затоа доволно е да докажеме дека AF е симедијана од A.



Нека правата AF ја сече страната BC во X и нека опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACE по вторпат ја сечат правата BC во точките Y и Z, соодветно. Тогаш од степенот на точка во однос на кружница следува

$$\overline{XB} \cdot \overline{XY} = \overline{XF} \cdot \overline{XA} = \overline{XZ} \cdot \overline{XC}$$

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{XB}+\overline{XZ}}{\overline{XC}+\overline{XY}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}}. \tag{1}$$

$$\measuredangle ACE = \measuredangle ACO = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle AOC) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\measuredangle ABC) = 90^\circ - \measuredangle ABC$$

$$= 90^\circ - \measuredangle ABA_1 = \measuredangle BAA_1 = \measuredangle BAE,$$

што значи дека BA е тангента на опишаната кружница околу триаголникот ACE. Слично, CA е тангента на опишаната кружница околу триаголникот ABD. Повторно од степенот на точка во однос на кружница следува

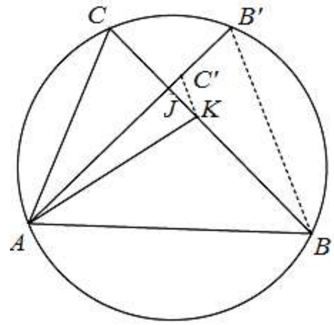
$$\overline{BA}^2 = \overline{BZ} \cdot \overline{BC}, \ \overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CY}$$

Ако ги поделиме ови две равенства и го искористиме равенството (1) добиваме

$$\frac{\overline{BA}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}.$$

Според тоа, $AX \equiv AF$ е симедијаната на $\triangle ABC$ повлечена од темето A.

34. Даден е $\triangle ABC$. Точката K е пресек на симетралата на аголот во темето A и страната BC, а точката $J \in BC$ е таква што $\measuredangle BAC = 3\measuredangle JAC$. Точките B' и C' од правата AJ се надворешни за отсечката AJ и важи $\overline{AC} = \overline{AC'}$ и $\overline{AB} = \overline{AB'}$. Докажи дека четириаголникот $ACB'B$ е тетивен ако и само ако $C'K \parallel BB'$.



Решение. Нека $C'K \parallel BB'$ и да означиме

$$\measuredangle AB'B = \measuredangle AC'K = x \text{ и } \measuredangle AC'C = y.$$

Имаме $\measuredangle KC'C = x + y$. Од $\triangle ABB', \triangle ACC'$ и симетралата AK добиваме

$$\measuredangle CAK = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \tfrac{1}{2}(\measuredangle CAC' + \measuredangle BAB')$$

$$= \tfrac{1}{2}((180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y))$$

$$= 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - \measuredangle KC'C$$

што значи дека четириаголникот $AKC'C$ е тетивен. Сега од Талесовата теорема следува

$$\overline{JC'} : \overline{JB'} = \overline{JK} : \overline{JB}, \text{ т.е. } \overline{JC'} \cdot \overline{JB} = \overline{JK} \cdot \overline{JB'},$$

а од тетивноста на четириаголникот $AKC'C$ добиваме $\overline{JA} \cdot \overline{JC'} = \overline{JC} \cdot \overline{JK}$. Сега, ако ги поделиме последните две равенства добиваме $\frac{\overline{JB}}{\overline{JA}} = \frac{\overline{JB'}}{\overline{JC}}$, односно $\overline{JB} \cdot \overline{JC} = \overline{JA} \cdot \overline{JB'}$, што значи дека четириаголникот $ACB'B$ е тетивен.

Обратно, нека четириаголникот $ACB'B$ е тетивен и да означиме $\measuredangle ACK = \gamma$, $\measuredangle KCB' = \beta$. Тоа значи $\measuredangle AB'B = \measuredangle ACK = \gamma$ (агли над ист лак), а од рамнокраките триаголници следува

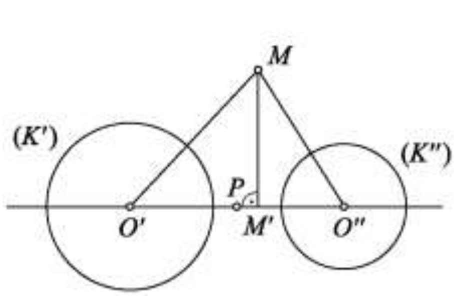
$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAC' + \measuredangle BAB' = 360^\circ - 2\beta - 4\gamma.$$

Оттука

$$\measuredangle ABC = 2\beta + 3\gamma - 180^\circ \text{ и } \measuredangle AKC = \measuredangle ABC + \measuredangle KAB = \beta + \gamma.$$

Но, од $\overline{AC} = \overline{AC'}$ имаме $\measuredangle AC'C = \measuredangle ACC' = \beta + \gamma = \measuredangle AKC$, па затоа четириаголникот $AKC'C$ е тетивен. Од тетивноста на четириаголникот $AKC'C$ добиваме $\overline{JA} \cdot \overline{JC'} = \overline{JC} \cdot \overline{JK}$, а од тетивноста на четириаголникот $ACB'B$ следува $\overline{JA} \cdot \overline{JB'} = \overline{JB} \cdot \overline{JC}$. Ако ги поделиме последните две равенства добиваме $\frac{\overline{JC'}}{\overline{JB'}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{JB}}$, па од Талесовата теорема следува дека $C'K \parallel BB'$.

35. Геометриското местои на точки кои имаат еднаков степен на точка во однос на две неконцентрични кружници $K'(O', r')$ и $K''(O'', r'')$ е права која е нормална на правата $O'O''$. Докажи!



Решение. Нека M е точка од бараното геометриско место и M' е подножјето на нормалата повлечена од M на правата $O'O''$. Точката M има еднаков степен на точка во однос на кружниците K' и K'' ако и само ако

$$0=\overline{O'M}^2-r'^2-(\overline{O''M}^2-r''^2)=(\overline{O'M}-\overline{O''M})(\overline{O'M}+\overline{O''M})-(r'^2-r''^2)$$
$$=\overline{O'O''}(2\overline{O'M'}-\overline{O'O''})-(r'^2-r''^2),$$

т.е. ако и само ако

$$\overline{O'M'}=\frac{1}{2}\left(\frac{r'^2-r''^2}{\overline{O'O''}}+\overline{O'O''}\right). \qquad (1)$$

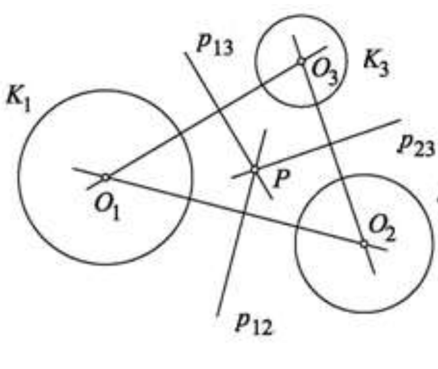
Последното значи дека сите точки од бараното геометриско место се проектираат во иста точка M' која е определена со (1), па затоа точката M припаѓа на правата која минува низ M' и е нормална на $O'O''$. Лесно се покажува дека секоја точка од оваа права има еднаков степен на точка во однос на двете кружници K' и K'', со што задачата е решена.

Забелешка. Правата од претходната задача чии сите точки имаат еднаков степен на точка во однос на две неконцентрични кружници K' и K'' ја нарекуваме *радикална оска* на кружниците K' и K''. Јасно, ако кружниците K' и K'' се сечат (или допираат), тогаш нивната радикална оска е определена со нивната заедничка тетива (односно тангента).

36. Нека $K_i(O_i,R_i)$, $i=1,2,3$ се по парови неконцентрични кружници. Тогаш радикалните оски на кружниците K_1 и K_2, K_2 и K_3, K_3 и K_1 или се сечат во една точка или се паралелни или се совпаѓаат. Докажи!

Решение. Нека се дадени три кружници $K_i(O_i,R_i)$, $i=1,2,3$. Ќе го определиме геометрискотo место точки во рамнината кои имаат ист степен во однос на трите кружници. Со p_{12}, p_{23}, p_{13} да ги означиме радикалните оски на K_1 и K_2, K_2 и K_3, K_3 и K_1, соодветно. Значи, ако постои точка P која има ист степен во однос на K_1, K_2 и K_3, тогаш таа мора да припаѓа на радикалните оски p_{12} и p_{23}. Можни се два случаи.

а) Ако центрите O_i, $i=1,2,3$ на кружниците не се колинеарни (цртеж десно), тогаш радикалните оски p_{12} и p_{23} се сечат. Точката $P=p_{12}\cap p_{23}$ ќе има ист степен во однос на кружниците K_i, $i=1,2,3$ па затоа радикалната оска p_{13} ќе минува низ P која има ист степен во однос на кружниците K_i, $i=1,2,3$ и оваа точка ја нарекуваме *радикален центар* на K_i, $i=1,2,3$.

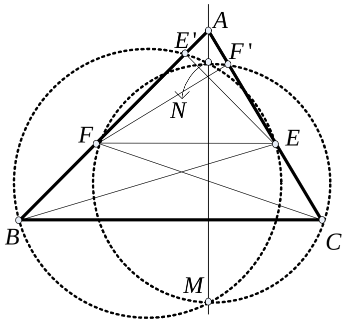


б) Ако центрите O_i, $i=1,2,3$ на кружниците се колинеарни, тогаш радикалните оски се меѓусебно паралелни и, притоа, или се сите три различни или се совпаѓаат. Во првиот случај не постои точка со бараното својство, а во вториот случај бараното геометриско место е права.

37. Нека E е F се точки кои припаѓаат на страните AC и AB на триаголникот ABC соодветно, при што $EF \parallel BC$. Докажи дека пресечните точки на кружниците со дијаметри BE и CF припаѓаат на висината на триаголникот повлечена од темето A.

Решение. Од точките E и F ќе повлечиме нормали на страните AB и AC соодветно, а нивните подножја ќе ги означиме со E' и F'. Четириаголникот $EF'E'F$ е тетивен, па според тоа

$$\overline{AF'} \cdot \overline{AE} = \overline{AE'} \cdot \overline{AE}. \qquad (1)$$



Од сличноста на триаголниците ABC и AFE имаме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

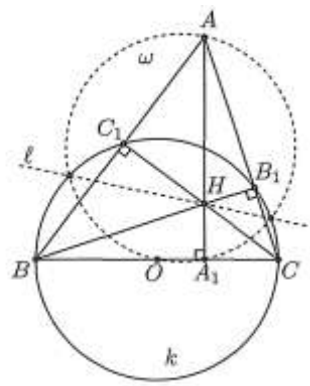
$$\overline{AF'} \cdot \overline{AC} = \overline{AF'} \cdot \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \overline{AE'} \cdot \overline{AF} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$
$$= \overline{AE'} \cdot \overline{AB}.$$

Значи, точката A припаѓа на радикалната оска на кружниците со дијаметри BE и CF. Затоа, точките A, M, N се колинеарни, каде M и N се пресек на двете кружници.

Тетивата MN е нормална на отсечката што ги сврзува центрите на двете кружници, односно на средната линија на трапезот $BCEF$, па е нормална и на BC (средната линија на трапезот е парлалена со неговите основи).

38. Дадени се кружница k и фиксирана точка A надвор од неа. Отсечката BC е дијаметар на k. Определи го геометриското место на ортоцентарот на $\triangle ABC$, во зависност од менувањето на BC.

Решение. Нека O е центар на k и ω е кружницата со дијаметар AO. Понатаму, нека AA_1 и BB_1 се висините на $\triangle ABC$ и H е неговиот ортоцентар. Тогаш степенот на H во однос на ω е еднаков на $\overline{AH} \cdot \overline{HA_1}$, а степенот на H во однос на k е еднаков на $\overline{BH} \cdot \overline{HB_1}$. Бидејќи овие степени се еднакви (зошто?), заклучуваме дека H лежи на радикалната оска l на k и ω. Обратно, лесно се докажува дека секоја точка од l е ортоцентар на некој триаголник од саканиот вид.



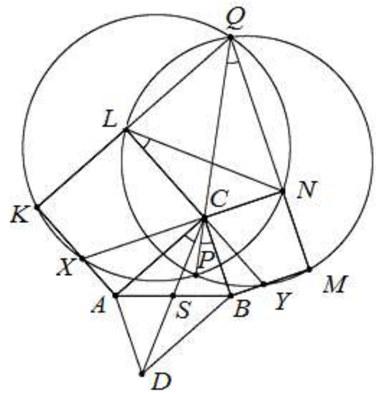
39. Во разностран $\triangle ABC$ точката M е средина на страната BC, а точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата C и B, соодветно. Нека L и K се средините на отсечките MD и ME, соодветно, а точката $T \in LK$ е таква што $AT \parallel BC$. Докажи, дека $\overline{TA} = \overline{TM}$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и ω е кружницата со дијаметар AH, (направи цртеж). Од $TA \perp AH$ следува дека TA ја допира ω во точката A. Од друга страна имаме $\overline{BM} = \overline{EM}$, па затоа

$$\measuredangle MEB = \measuredangle MBE = 90^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle HAC = \frac{EH}{2}$$

(лакот е од ω). Тогаш ME и MD се тангенти на ω. Според тоа, правата LK е радикална оска на M и ω, што значи дека степените на T во однос на M и ω се еднакви, т.е. $\overline{TM}^2 = \overline{TA}^2$, од каде следува $\overline{TA} = \overline{TM}$.

40. Надвор од остроаголниот $\triangle ABC$ се конструирани квадрати $CAKL$ и $CBMN$. Правата CN ја сече отсечката AK во точка X, а правата CL ја сече отсечката BM во точка Y. Точката P, која лежи во внатрешноста на $\triangle ABC$ е пресек меѓу кружниците опишани околу триаголниците KXN и LYM. Точката S е средина на отсечката AB. Докажи дека $\measuredangle ACS = \measuredangle BCP$.



Решение. Нека Q е пресечната точка на правите KL и MN. Од $\measuredangle QLC = \measuredangle NMY = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $QLYM$ е тетивен. Аналогно се покажува дека четириаголникот $QNXK$ е тетивен. Според тоа, Q втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2, опишани соодветно околу $\triangle KCN$ и $\triangle LYM$.

Ќе докажеме, дека точката C лежи на правата PQ. Правоаголните триаголници CAX и CBY се слични, бидејќи

$$\measuredangle XCA = 90^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle YCB.$$

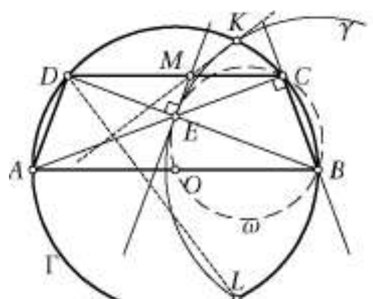
Оттука $\overline{XC} \cdot \overline{CB} = \overline{YC} \cdot \overline{CA}$ или $\overline{XC} \cdot \overline{CN} = \overline{YC} \cdot \overline{CL}$, што значи, дека степените на C во однос на ω_1 и ω_2 се еднакви, па значи C лежи на нивната радикална оска PQ.

Да ја продолжиме тежишната линија CS така што ќе го дополниме $\triangle ABC$ до паралелограм $ACBD$. Бидејќи $\measuredangle CAD = 180^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle LCN$, $\overline{CA} = \overline{CL}$ и $\overline{AD} = \overline{CB} = \overline{CN}$, добиваме дека $\triangle CAD \cong \triangle LCN$. Тогаш $\measuredangle ACS = \measuredangle ACD = \measuredangle CLN$.

Од $\measuredangle QLC = \measuredangle QNC = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $QLCN$ е тетивен и како $BC \parallel MN$ добиваме $\measuredangle CLN = \measuredangle CQN = \measuredangle PBC$. Според тоа,

$$\measuredangle ACS = \measuredangle CLN = \measuredangle BCP.$$

41. Нека $ABCD$ е трапез впишан во кружница Γ со дијаметар AB и нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на трапезот. Кружницата со центар во точката B и радиус BE ја сече кружницата Γ во точките K и L, при што точката K е од иста страна на правата AB како и точката C. Ако нормалата повлечена од точката E на правата BD ја сече правата CD во точката M, докажи дека правите KM и DL се заемно нормални.



Решение. Нека O е центарот на кружницата Γ. Точките O, B, C и E лежат на кружницата ω со дијаметар BE, која ги допира правата EM и кружницата $\gamma(B, \overline{BE})$. Радикалните оски на паровите кружници $(\Gamma, \gamma), (\Gamma, \omega)$, (γ, ω) се правите KL, BC и EM, соодветно, па затоа овие прави се паралелни или се сечат во една точка. Одтука следува дека KL е симетрала на отсечката CM, т.е. $\overline{KM} = \overline{KC}$. Сега

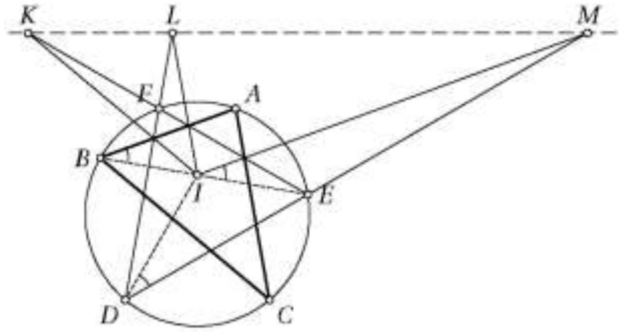
$$\measuredangle KMC + \measuredangle LDC = \measuredangle KCM + \measuredangle LDB + \measuredangle BDC = \measuredangle KCD + \measuredangle KDB + \measuredangle BDC$$

$$= \measuredangle KCD + \measuredangle KDC + 2\measuredangle BDC = \measuredangle CBD + \measuredangle BEC = 90^\circ,$$

па затоа $KM \perp DL$.

42. Даден е разностран триаголник ABC, со опишана околу него кружница ω со центар I. Правите AI, BI и CI ја сечат соодветно ω во точките D, E и F, различни од A, B и C. Правите низ точката I паралелни со правите BC, CA и AB соодветно ги сечат правите EF, FD и DE во точките K, L и M. Докажи, дека точките K, L и M се колинеарни.

Решение. Ако го разгледаме распоредот $D-E-M$ забележуваме дека $\measuredangle EIM = \measuredangle EBA = \measuredangle EDI$, па затоа правата IM е тангента на кружницата DEI и $\overline{MI}^2 = \overline{MD} \cdot \overline{ME}$. Тоа значи дека точката M припаѓа на радикалната оска s на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и дегенираната кружница $(I, 0)$.

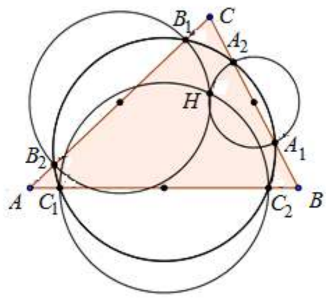


Аналогно и точките K и L припаѓаат на s, т.е. точките K, L и M се колинеарни

43. Даден е триаголник ABC. Точките A_1 и A_2 припаѓаат на страната BC, точките B_1 и B_2 припаѓѓат на страната CA и точките C_1 и C_2 припаѓаат на страната AB. Ако точките A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на една кружница, точките B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на една кружница и точките C_1, C_2, A_1, A_2 лежат на една кружница, тогаш сите шест точки лежат на една кружница. Докажи!

Решение. Со k_c, k_a, k_b да ги означиме кружниците $A_1\,A_2\,B_1\,B_2$, $B_1\,B_2\,C_1\,C_2$ и $C_1\,C_2\,A_1\,A_2$, соодветно. Ако овие кружници не се совпаѓаат, тогаш радикалните оски на паровите кружници (k_a, k_b), (k_b, k_c) и (k_c, k_a) се правите $C_1\,C_2$, $A_1\,A_2$ и $B_1\,B_2$, соодветно и тоа се страните на триаголникот ABC. Според задача 36 тие се сечат во една точка или се совпаѓаат или се паралелни, што е противречност. Од добиената противречност следува дека сите шест точки лежат на една кружница.

44. Нека H е пресекот на висините во остроаголен триаголник $\triangle ABC$. Кружницата k_1 со центар во средината на страната BC и која што минува низ точката H, ја сече правата BC во точките A_1 и A_2. Слично, кружницата k_2 со центар во средината на страната CA и која што минува низ точката H, ја сече правата AC во точките B_1 и B_2, и кружницата k_3 со центар во средината на страната AB и која што минува низ точката H, ја сече правата AB во точките C_1 и C_2. Докажи дека точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 припаѓаат на една кружница.



Решение. Радикалната оска на k_1 и k_2 е нормална на AB. Бидејќи и двете кружници минуваат низ H, нивната радикална оска минува низ точката C. Тоа значи дека

$$\overline{CA_1}\cdot\overline{CA_2}=\overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2},$$

па A_1, A_2, B_1 и B_2 лежат на иста кружница. На ист начин заклучуваме дека B_1, B_2, C_1 и C_2, лежат на иста кружница, како и A_1, A_2, C_1 и C_2 лежат на иста кружница.

Сега тврдењето на задачата следува од задача 43.

45. Нека кружниците $K(O,r)$ и $K^*(O^*,r^*)$ се сечат во точките M и N. Ако во точката M повлечеме тангенти t_1 и t_2 на кружниците K и K^* и со α го означиме помалиот агол меѓу правите t_1 и t_2, тогаш ќе велиме дека кружниците K и K^* *се сечат под агол* α. За кружницата K ќе велиме дека *ортогонално* ја сече кружницата K^* ако K и K^* се сечат под агол од $\frac{\pi}{2}$. Притоа ќе велиме дека K и K^* се *ортогонални*.

Докажи дека геометриското место на центрите на кружниците кои се ортогонални на кружниците $K(O,r)$ и $K^*(O^*,r^*)$, $O\not\equiv O^*$ е радикалната оска на K и K^*.

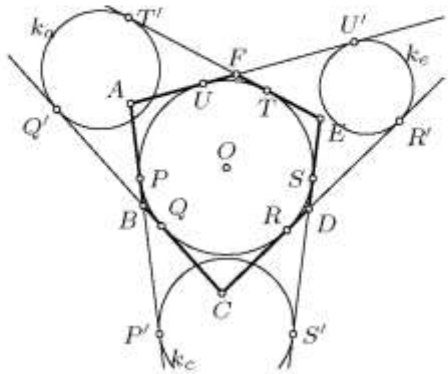
Решение. Нека се дадени кружниците $K(O,r)$ и $K^*(O^*,r^*)$, $O\not\equiv O^*$. Ја разгледуваме кружницата $K'(O',r')$ која пртогонално ги сече K и K^*, при што K ја сече во A' и B', а K^* ја сече во A'' и B''. Аголот $O'A'O$ е прав, па затоа степенот на точката O' во однос на кружницата K е еднаков на $\overline{OO'}^2-r^2=r'^2$. Аналогно се докажува дека степенот на точката O' во однос на кружницата K^* е еднаков на $\overline{O^*O'}^2-r^{*2}=r'^2$, што значи дека точката O' припаѓа на радикалната оска на кружниците K и K^*. Лесно се докажува дека секоја точка од радикалната оска на кружниците K и K^* е центар на кружница која ортогонално ги сече кружниците K и K^*. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

46. Ако центрите на три кружници не лежат на една права, тогаш постои точно една кружница која ортогонално ги сече сите три кружници и нејзиниот центар е радикалниот центар на трите кружници. Докажи!

Решение. Непосредно следува од задача 45. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

47. (Бријаншонова теорема). Во тангентен шестаголник $ABCDEF$ дијагоналите AD, BE и CF се сечат во една точка. Докажи!

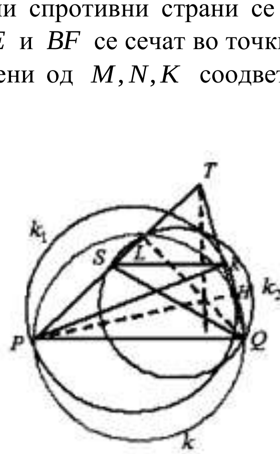
Решение. Нека вписаната кружница ги допира правите AB, BC, CD, DE, EF, FA во точките P, Q, R, S, T, U, соодветно. На полуправите PB, QB, RD, SD, TF, UF земаме точки P', Q', R', S', T', U', соодветно такви што $\overline{PP'} = \overline{QQ'} = \overline{RR'} = \overline{SS'} = \overline{TT'} = \overline{UU'} = m$. Ги разгледуваме кружниците k_a, k_c, k_e такви што k_a ги допира правите EF и BC во T' и Q' соодветно, k_c ги допира правите AB и DE во P' и S' соодветно, k_e ги допира правите CD и FA во R' и U' соодветно.



Точките A и D имаат еднакви степени во однос на k_c и k_e бидејќи $\overline{AP'} = \overline{AP} + m = \overline{AU} + m = \overline{AU'}$ и $\overline{DS'} = m - \overline{DS} = m - \overline{DR} = \overline{DR'}$. Затоа AD е радикална оска на k_c и k_e. Аналогно, BE е радикална оска на k_c и k_e, а CF е радикална оска на k_c и k_a. Според тоа, правите AD, BE и CF се сечат во радикалниот центар на кружниците k_a, k_c, k_e.

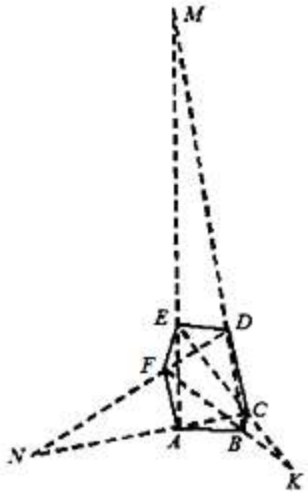
48. Даден е конвексен шестаголник $ABCDEF$ чии спротивни страни се по парови паралелни. Правите BD и AE, AC и DF, CE и BF се сечат во точките M, N, K, соодветно. Докажи дека нормалите повлечени од M, N, K соодветно кон правите AB, CD, EF се сечат во една точка.

Решение. *Лема*. Нека T е пресечната точка на краците PS и QR на трапезот $PQRS$. Докажи дека висината на $\triangle PQT$ повлечена од темето T лежи на радикалната оска на кружниците со дијаметри RQ и QS, т.е. со дијаметри дијагоналите на трапезот.



Доказ. Нека k_1 и k_2 се кружницте со дијаметри PR и QS, а k е кржницата со дијаметар PQ. Со PH да ја означиме заедничката тетива на k_1 и k. Од $\measuredangle PHR = \measuredangle PHQ = 90^\circ$ следува дека точката H

лежи на QR и PH е висина во $\triangle PQT$. Аналогно, ако QL е заедничката тетива на k_2 и k , тогаш $\measuredangle QLS = \measuredangle QLP = 90^\circ$, што значи дека L припаѓа на PT и QL е визина во $\triangle PQT$. Јасно, пресечната точка на PH и QL е ортоцентар на $\triangle PQT$, кој има еднакви степени во однос на кружниците k_1 и k_2 , па затоа лежи на нивната радикална оска. На ист начин следува дека на таа радикална оска лежи и ортоцентарот на $\triangle SRT$. Бидејќи нормалната права низ T кон PQ минува и низ двата ортоцентри, заклучуваме дека оваа права е радикална оска на k_1 и k_2 . ■



Сега за да ја решиме дадената задача три пати за трапезите $ABDE$, $CDFA$ и $EFBC$ ќе ја примениме горната лема. Нормалите од M, N и K повлечени соодветно кон правите AB, CD и EF се радикални оски на кружниците со дијаметри BE и AD, AD и CF , CF и BE . Според тоа, овие три нормали се сечат во радикалниот центар на кружниците со дијаметри BE , AD и CF , што и требаше да се докаже.

49. Во $\triangle ABC$ точките B', C' се допирни точки на надворешно припишаните кружници на страните CA, AB , соодветно. Докажи дека опишаните кружници на триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точка која припаѓа на симетралата на $\measuredangle CAB$, која точка е различна од A .

Решение. *Прв начин*. Нека a, b, c се должините на страните BC, CA, AB , соодветно на $\triangle ABC$ и нека $s = \frac{a+b+c}{2}$. Нека E и F се допирните точки на надворешно припишаната кружница спроти темето A со правите AB и AC , соодветно. Од еднаквоста на тангентните отсечки следува

$$\overline{AE} = \overline{AF},\ \overline{CF} = \overline{CA'} \text{ и } \overline{BE} = \overline{BA'},$$

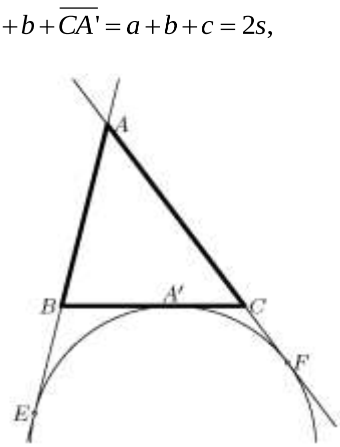
па затоа

$$2\overline{AE} = \overline{AE} + \overline{AF} = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{AC} + \overline{CF} = c + \overline{BA'} + b + \overline{CA'} = a + b + c = 2s,$$

т.е. $\overline{AE} = \overline{AF} = s$, од каде добиваме

$$\overline{CA'} = \overline{AF} - \overline{AC} = s - b,$$

$$\overline{BA'} = \overline{AE} - \overline{AB} = s - c.$$



Аналогно се добиваат должините на AB', AC', BC', CB'.

Нека P е втората пресечна точка на опишаните кружници околу $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$. Четириаголникот $AC'PC$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle PC'B = \measuredangle ACP . \qquad (1)$$

Аналогно четириаголникот $ABPB'$ е тетивен, па затоа важи

$$\measuredangle CB'P = \measuredangle PBC'. \qquad (2)$$

Исто така

$$\measuredangle PAB' = \measuredangle PBB', \quad \measuredangle PAB = \measuredangle PB'B. \qquad (3)$$

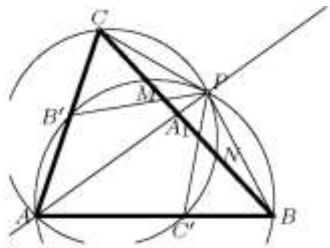
Бидејќи $\overline{BC'} = \overline{B'C} = s-a$ $\triangle PC'B \cong \triangle PB'C$, па затоа $\overline{PB} = \overline{PB'}$. Значи $\triangle PBB'$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle PB'B = \measuredangle B'BP$. Користејќи ја (3) добиваме

$$\measuredangle PAB' = \measuredangle PBB' = \measuredangle PB'B = \measuredangle PAB,$$

т.е. точката P припаѓа на симетралата на $\measuredangle BAB'$, односно на $\measuredangle BAC$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека опишаната кружница k_B околу $\triangle ABB'$ освен во B ја сече BC во точката M, а опишаната кружница k_C околу $\triangle ACC'$ освен во C ја сече BC во точката N (цртеж десно). Од степенот на точката C во однос на k_B следува $\overline{CM}\cdot\overline{CB} = \overline{CB'}\cdot\overline{CA}$, т.е.

$$\overline{CM} = \overline{CB'}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}, \qquad (1)$$



а од степенот на точката B во однос на k_C следува $\overline{BN}\cdot\overline{BC} = \overline{BC'}\cdot\overline{BA}$, т.е.

$$\overline{BN} = \overline{BC'}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}. \qquad (2)$$

За да го докажеме тврдењето на задачата доволно е да докажеме дека пресечната точка A_1 на страната AB и симетралата на $\measuredangle BAC$ припаѓа на радикалната оска на кружниците опишани околу $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$, т.е. дека

$$\overrightarrow{A_1N}\cdot\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{A_1B}$$
$$(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA_1})\cdot\overrightarrow{A_1C} = (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA_1})\cdot\overrightarrow{A_1B}$$
$$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{A_1B},$$

а како A_1, M, N се меѓу B и C, последното равенство е еквивалентно со равенството $\overline{BN}\cdot\overline{A_1C} = \overline{CM}\cdot\overline{A_1B}$. Но,од (1), (2) и $\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ (односот во кој симетралата на аголот ја дели спротивната страна) следува

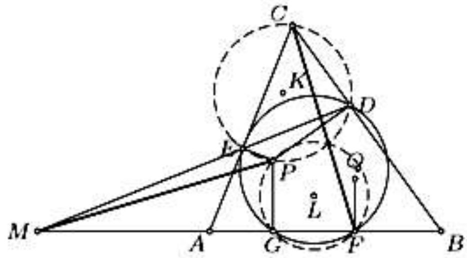
$$\overline{BN}\cdot\overline{A_1C} = \overline{CM}\cdot\overline{A_1B}$$
$$\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BN}}{\overline{CM}} = 1$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BC'}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}}{\overline{CB'}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}} = 1$$
$$\overline{BC'} = \overline{CB'}$$

а последнот равенство е точно, во што се убедивме во првиот начин на решавање на задачата.

50. Точките P и Q се во внатрешноста на $\triangle ABC$ се такви што $\measuredangle PAC = \measuredangle QAB$ и $\measuredangle PBC = \measuredangle QBA$.

а) Докажи, дека подножјата на нормалите од P и Q повлечени кон страните од триаголникот лежат на една кружница.

б) Нека D и E се подножјата на нормалите повлечени од точката P кон страните BC и AC, а F е подножјето на нормалата повлечена од точката Q кон страната AB. Правите DE и AB се сечат во точката M. Докажи дека $MP \perp CF$.



Решение. а) Нека G е подножјето на нормалата повлечена од точката P кон страната AB, а H и I се подножјата на нормалите повлечени од точката Q кон страните CB и CA, соодветно. Четириаголниците $AEPG$ и $AFQI$ се слични, па затоа важи $\measuredangle AEG = \measuredangle AFI$, што значи дека точките E, F, G, I лежат на некоја кружница k. Аналогно точките D, E, I, H лежат на некоја кружница k_1, а точките D, H, F, G на некоја кружница k_2. Ако кружниците k, k_1, k_2 се различни, тогаш радикалните оски на две по две од овие кружници се правите AB, BC, CA, што не е можно, бидејќи радикалните оски припаѓаат на ист прамен. Според тоа, $k \equiv k_1 \equiv k_2$, што значи дека точките D, E, F, G, H, I лежат на една кружница.

б) Нека K и L се центрите на кружниците $CDPE$ и PFG. Бидејќи $\overline{MD} \cdot \overline{ME} = \overline{MF} \cdot \overline{MG}$, правата MP е радикална оска на овие две кружници и затоа е нормална на правата KL која минува низ нивните центри. Бидејќи K и L се средини на отсечките PC и PF, правите KL и CF се паралелни, па затоа $MP \perp CF$.

7. ХОМОТЕТИЈА

1. Нека O е точка во рамнината и k е реален број различен од нула. Трансформацијата со која произволна точка X се пресликува во точка X' таква што $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ ја нарекуваме *хомотетија*, во ознака $H_{O,k}$, со центар во O и коефициет k. За две фигури ќе велиме дека се *хомотетични* ако постои хомотетија која едната фигура ја пресликува во другата.

Ако $k > 0$, тогаш за хомотетијата $H_{O,k}$ велиме дека е позитивна, а ако $k < 0$, тогаш велиме дека таа е негативна. Јасно, ако хомотетијата со центар O ја пресликува точката X во точката X', тогаш точките O, X, X' се колинеарни. Понатаму, од дефиницијата на хомотетијата непосредно следува дека ова пресликување е биекција и дека хомотетијата еднозначно е определена со својот центар O и коефициент k. Докажи дека:

а) Хомотетија со произволен центар и коефициент $k = 1$ е идентичното пресликување.

б) Хомотетија со центар O и коефициент $k = -1$ е централна симетрија со центар O.

Решение. Непосредно следува од дефиницијата на хомотетијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Нека се $\mathrm{H}_{O,k}$ и $\mathrm{H}_{O,k'}$ хомотетии со ист центар. Докажи дека

а) $\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k} = \mathrm{H}_{O,kk'}$.

б) $\mathrm{H}_{O,k} \circ \mathrm{H}_{O,k'} = \mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k}$.

в) $(\mathrm{H}_{O,k})^{-1} = \mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}$.

Решение.. а) Нека X е произволна точка. Тогаш од $\mathrm{H}_{O,k}(X) = X'$ следува $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, а од $\mathrm{H}_{O,k'}(X') = X''$ следува $\overrightarrow{OX''} = k'\overrightarrow{OX'}$. Според тоа,

$$(\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k})(X) = \mathrm{H}_{O,k'}(\mathrm{H}_{O,k}(X)) = \mathrm{H}_{O,k'}(X') = X''$$

и притоа важи $\overrightarrow{OX''} = k'\overrightarrow{OX'} = k'k\overrightarrow{OX}$, т.е. $X'' = \mathrm{H}_{O,kk'}(X)$. Конечно, од произволноста на точката X следува $\mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k} = \mathrm{H}_{O,kk'}$.

б) Од тврдењето под а) следува $\mathrm{H}_{O,k} \circ \mathrm{H}_{O,k'} = \mathrm{H}_{O,kk'} = \mathrm{H}_{O,k'k} = \mathrm{H}_{O,k'} \circ \mathrm{H}_{O,k}$.

в) Непосредно следува од задача 1 а) и тврдењето под б).

3. За точките A, B и нивните слики A', B' при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$ важи $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Докажи!

Решение. Од $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ следува $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$, па затоа $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$.

4. Докажи:

а) Со хомотетија секоја права се пресликува во паралелна права.

б) Секои две паралелни прави се хомотетични.

в) Единствени прави при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$, $k \neq 1$ кои се пресликуваат во самите себе се правите кои минуваат низ центарот на хомотетијата.

г) Агол при хомотетија $\mathrm{H}_{O,k}$ се пресликува во складен агол.

Решение. а) Непосредно следува од задача 3.

г) непосредно следува од тврдењето под а) и својствата на агли со паралелни краци.

Доказите на тврдењата под б) и в) ги оставаме на читателот за вежба.

1. Нека *M*, *N*, *P* се средините на страните BC, CA, AB на триаголникот *ABC,* соодветно, и нека *G* е тежиштето на триаголникот *ABC.* Докажи дека ако $\overline{BN} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}$, и ако четириаголникот *BMGP* е тетивен, тогаш триаголникот ABC е рамностран.

Решение. Да ја означиме со k_1 кружницата опишана околу четириаголникот $BMGP$, а со k кружницата опишана околу триаголникот ABC. Нека D е пресечна точка на BN и k. Кружницата k е слика на k_1 при хомотетија со центар B и коефициент 2. Значи D е слика на G и $\overline{ND} = \frac{1}{3}\overline{BN}$. Од $\overline{BN} \cdot \overline{ND} = \overline{AN} \cdot \overline{NC}$ добиваме $\overline{BN} = \frac{\overline{AC}\sqrt{3}}{2}$. Од тоа следува дека $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $AM \perp BC$, $CP \perp AB$. Значи, триаголникот ABC е рамностран.

5. Докажи:
а) Кружница при хомотетија се пресликува во кружница.
б) Секои две кружници се хомотетични.

Доказ. а) Нека е дадена хомотетијата $\mathrm{H}_{O,k}$ и кружницата $\omega(A,r)$. Ако M е произволна точка од кружницата K и $A'=\mathrm{H}_{O,k}(A)$, тогаш од теорема 2 следува $\overrightarrow{A'M'}=k\overrightarrow{AM}$, па затоа $\overline{A'M'}=k\overline{AM}$, што значи дека $M'\in\omega'(A',kr)$. Според тоа, $\mathrm{H}_{O,k}(\omega)\subseteq\omega'$. Аналогно се докажува дека $\mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}(\omega')\subseteq\omega$ и како $\mathrm{H}_{O,k}$ и $\mathrm{H}_{O,\frac{1}{k}}$ се биекции заклучуваме дека $\mathrm{H}_{O,k}(\omega)=\omega'$.

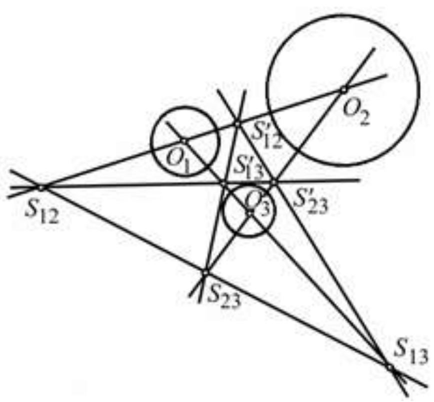
б) Ако кружниците $\omega(A,r)$ и $\omega'(A,r')$, $r\neq r'$ се концентрични, тогаш бараната хомотетија е, на пример, $\mathrm{H}_{A,\frac{r}{r'}}$. Ако кружниците $\omega(A,r)$ и $\omega'(A',r')$ не се концентрични, тогаш постои единствена точка O таква што $\overrightarrow{AO}=\frac{r}{r+r'}\overrightarrow{AA'}$ и притоа важи $\mathrm{H}_{O,-\frac{r'}{r}}(\omega)=\omega'$.

Забелешка. Во случај кога круговите се дисјунктни, тогаш пресекот на нивните надворешни тангенти O е центар на хомотетија $\mathrm{H}_{O,\frac{r}{r'}}$ таква што $\mathrm{H}_{O,\frac{r'}{r}}(\omega)=\omega'$, а додека пресекот на низвните внатрешни тангенти O' е центар на хомотетија $\mathrm{H}_{O',-\frac{r'}{r}}$ таква што $\mathrm{H}_{O,-\frac{r'}{r}}(\omega)=\omega'$. Обиди се самостојно да го докажеш ова тврдење.

6. Ако H_1 и H_2 се хомотетии со центри O_1 и O_2 и $\mathrm{H}=\mathrm{H}_2\circ\mathrm{H}_1$ е хомотетија со центар во O, тогаш точките O,O_1 и O_2 се колинеарни.

Доказ. Со k_1 и k_2 да ги означиме коефициентите на хомотетиите H_1 и H_2, соодветно. Нека A е произволна точка во рамнината, $B=\mathrm{H}_1(A)$ и $C=\mathrm{H}_2(B)$ $=\mathrm{H}(A)$. Точките O,O_1 и O_2 припаѓаат на страните AB,BC и AC на $\triangle ABC$, соодветно. Притоа важи $\frac{\overrightarrow{AO_1}}{\overrightarrow{O_1B}}=-k_1, \frac{\overrightarrow{BO_2}}{\overrightarrow{O_2C}}=-k_2$ и $\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OA}}=-\frac{1}{k_1k_2}$, па затоа од теоремата на Менелај следува дека точките O,O_1 и O_2 се колинеарни.

7 (Монжова теорема). а) Ако центрите на кружниците $\omega_i, i=1,2,3$ се неколинеарни и нивните радиуси се меѓусебно различни, тогаш нивните центри на хомотетија S_{12},S_{23},S_{13}, S_{12}',S_{23}',S_{13}', цртеж десно, лежат на четири прави, така што на секоја од нив лежат по три центри на хомотетија. Докажи!



б) Нека кружиците ω_1 и ω_2 од внатре ја допираат кружницата ω во точките A и B. Тогаш надворешните тангенти на кружниците ω_1 и ω_2 се сечат на правата AB.

Доказ. а) Нека H_1 и H_2 се хомотетии со центри во точките S_{12} и S_{23} кои ги пресликуваат ω_1 во ω_2 и ω_2 во ω_3, соодветно. Хомотетијата $\mathrm{H}=\mathrm{H}_2\circ\mathrm{H}_1$ која ја пресликува ω_1 во ω_3 има центар S_{13}. Конечно од теорема 7 следува дека точките S_{12}, S_{23} и S_{13} се колинеарни.

б) Непосредно следува од Монжовата теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. Ако триаголниците ABC и $A'B'C'$ се такви што $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ и $CA \parallel C'A'$, тогаш тие се складни или се хомотетични. Докажи!

Доказ. Ако никои две од правите AA', BB' и CC' не се сечат, тогаш јасно $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ и $\overline{CA}=\overline{C'A'}$, што значи дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

Нека претпоставиме дека две од правите AA', BB' и CC'. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека правите AA' и BB' се сечат во точка O. Хомотетијата со центар во O која ги пресликува точките A и B во точките A' и B' ја пресликува точката C во точка C_1 така да важи $B'C_1 \parallel BC$ и $A'C_1 \parallel AC$, па затоа $C_1 \equiv C'$, што и требаше да се докаже.

9. Во триаголник ABC ортоцентарот H, тежиштето T и центарот на опишаната кружница O лежат на една права (*Ојлерова права*) и притоа важи $\overline{HT}=2\overline{OT}$. Докажи!

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Од $BC \parallel B_1C_1$ и $OA_1 \perp BC$ следува $OA_1 \perp B_1C_1$. На потполно ист начин се докажува дека $OB_1 \perp A_1C_1$ и $OC_1 \perp B_1A_1$. Според тоа, точката O е ортоцентар на триаголникот $A_1B_1C_1$. Хомотетијата $\mathrm{H}_{T,-\frac{1}{2}}$ го пресликува триаголникот ABC во триаголникот $A_1B_1C_1$, па затоа слика на ортоцентарот H на триаголникот ABC е ортоцентарот O на триаголникот $A_1B_1C_1$. Според тоа, $\overrightarrow{HT}=2\overrightarrow{TO}$, што значи дека точките H, T и O лежат на една права и притоа важи $\overline{HT}=2\overline{OT}$.

10. Нека I е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$. На отсечките IA, IB, IC соодветно се избрани точки P, Q, R такви што важи

$$\overline{IP}\cdot\overline{IA}=\overline{IQ}\cdot\overline{IB}=\overline{IR}\cdot\overline{IC}.$$

Докажи дека Ојлеровата права за $\triangle PQR$ ги содржи точките I и O, каде O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Од условот на задачата $\frac{\overline{IP}}{\overline{IB}}=\frac{\overline{IQ}}{\overline{IA}}$ следува $\triangle IPQ \sim \triangle IBA$, а оттука следува дека четириаголникот $ABQP$ е тетивен, па затоа $\measuredangle IPQ=\frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle IQP=\frac{\alpha}{2}$.

Аналогно добиваме дека четириаголниците $BCRQ$ и $ACRP$ се тетивни (направи цртеж). Според тоа, аглите на $\triangle PQR$ се

$$\measuredangle RPQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \measuredangle PQR = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \text{ и } \measuredangle QRP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

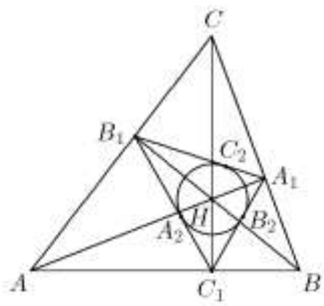
Од равенството $\measuredangle IPQ + \measuredangle PQR = 90^\circ$, следува дека $PI \perp RQ$, па затоа точката I е ортоцентар на $\triangle PQR$. Нека S е средината на опишаната кружница на $\triangle PQR$ и C', B', A' се соодветно центрите на опишаните кружници околу четириаголниците $ABQP, ACRP, BCRQ$. Бидејќи точките A' и B' лежат на симетралата на отсечката CR следува дека $A'B' \parallel PQ$. Слично имаме $B'C' \parallel RQ$ и $A'C' \parallel PR$. Сега имаме

$$\measuredangle OB'C' = \measuredangle IAC = \frac{\alpha}{2} \text{ и } \measuredangle OC'B' = \measuredangle IAB = \frac{\alpha}{2},$$

како агли со нормални краци. Според тоа, O е центар на опишаната кружница околу $\triangle A'B'C'$. Триаголниците $A'B'C'$ и PQR се хомотетични, со центар на хомотетија во пресекот на правите $A'P, B'Q, C'R$. Точката S е ортоцентар на $\triangle A'B'C'$ и центар на опишаната кружница околу $\triangle PQR$. Значи, центарот на хомотетија лежи во пресекот на правите SI и OS, што значи дека точките S, I и O се колинеарни.

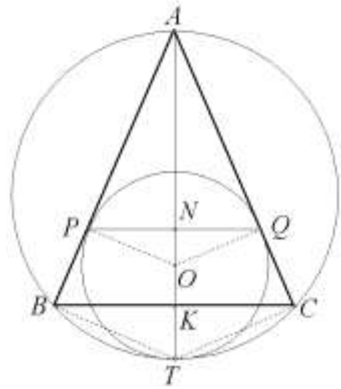
11. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнострам. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени соодветно од темињата A, B, C и нека A_2, B_2, C_2 се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$ со неговите страни. Докажи дека Ојлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се совпаѓаат.

Решение. Ќе го користиме фактот дека висините на $\triangle ABC$ се симетрали на аглите на $\triangle A_1B_1C_1$. Според тоа, ортоцентарот H на $\triangle ABC$ е центар на впишаната кружница k во $\triangle A_1B_1C_1$, која истовремено е опишана кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$. Значи, Ојлеровите прави l и l_2 соодветни на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имаат заедничка точка H. Од рамнокракиот $\triangle B_2C_2A_1$ следува дека $AA_1 \perp B_2C_2$, па затоа $B_2C_2 \parallel BC$. Аналогно се докажува дека $A_2B_2 \parallel AB$ и $A_2C_2 \parallel AC$. Според тоа, $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се слични, па затоа постои хомотетија h која $\triangle ABC$ го пресликува еден во друг. Но, тоа значи дека $h(l) = l_2$, од каде следува $l \parallel l_2$. Но, правите l и l_2 имаат заедничка точка H, па затоа тие се совпаѓаат.



12. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Кружницата, која одвнатре ја допира опишаната кружница околу $\triangle ABC$, ги допира страните AB и AC во точки P и Q. Докажи дека средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центар на дадената кружница, а T е нејзина допирна точка со опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Целата слика е симетрична во однос на правата која што минува низ A, O, T и средината K на отсечката BC при што таа е нормална на BC. Хомотетија со центар во точката A која ја пресликува T во K, ја пресликува дадената кружница во впишаната кружница на $\triangle ABC$, па значи точката O ја пресликува во центарот U на таа кружница.



Центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$ е исто така на споменатата права, па затоа $\measuredangle ABT = \measuredangle ACT = 90^\circ$. Четириаголниците $ABTC$ и $APOQ$ се слични, што значи дека со оваа хомотетија точката O се пресликува во средината на отсечката PQ. Според тоа, средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$.

13. Кружниците ω_1 и ω_2 со центри O_1 и O_2, соодветно, се сечат во точките K и K'. Едната заедничка тангента ги допира ω_1 и ω_2 во точките P_1 и P_2, а другата во точките Q_1 и Q_2. Нека M_1 и M_2 се средините на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Докажи дека $\measuredangle O_1KO_2 = \measuredangle M_1KM_2$.

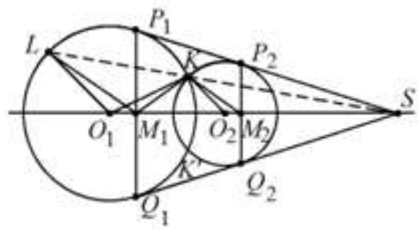
Решение. Прво да забележиме дека условот

$$\measuredangle O_1KO_2 = \measuredangle M_1KM_2$$

е еквивалентен со условот

$$\measuredangle O_1KM_1 = \measuredangle O_2KM_2 .$$

Нека S е пресекот на заедничките тангенти. Хомотетијата со центар во S која ја пресликува ω_1 во ω_2 ја пресликува точката K во точката L, цртеж 2. Од $\triangle SO_1P_1 \sim \triangle SP_1M_1$ следува



$$\overline{SK} \cdot \overline{SL} = \overline{SP}_1^2 = \overline{SO_1} \cdot \overline{SM_1},$$

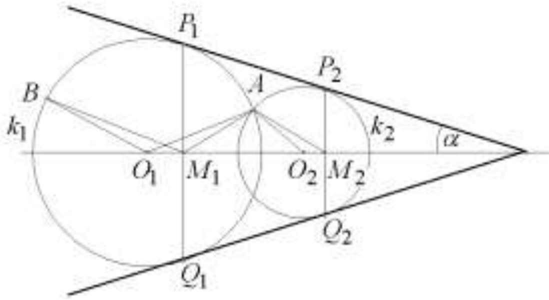
што значи дека точките K, L, O_1, M_1 се коциклични (лежат на иста кружница). Затоа, $\measuredangle O_1KM_1 = \measuredangle O_1LM_1 = \measuredangle O_2KM_2$, што и требаше да се докаже.

14. Во рамнина се дадени две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси и центри O_1 и O_2. Кружниците k_1 и k_2 се сечат и нека A е една нивна пресечна точка. Една од заедничките тангенти ја допира k_1 во P_1 и k_2 во P_2, а другата заедничка тангента ја допира k_1 во Q_1 и k_2 во Q_2. Нека M_1 и M_2 се средини на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Да се докаже дека $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

Решение. Доволно е да докажеме дека

$$\angle O_1AM_1 = \angle O_2AM_2 .$$

Нека S е пресекот на заедничките тангенти на кружниците k_1 и k_2 и нека правата SA ја сече кружницата k_1 во уште една точка B. Бидејќи кружниците k_1 и k_2 се хомотетични во однос на S, важи



$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle O_1BM_1 .$$

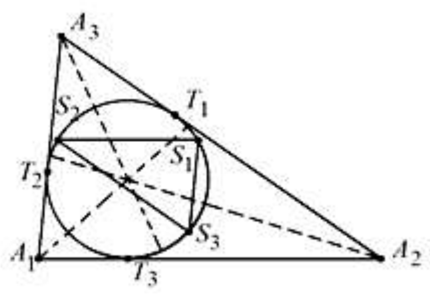
Значи, останува да докажеме дека $\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_1BM_1$, а за тоа доволно е да докажеме дека точките A, B, O_1 и M_1 се наоѓаат на една кружница. Последниот услов е исполнет бидејќи

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SP_1}\cdot\overline{SP_1} = \overline{SO_1}\cos\alpha\frac{\overline{SM_1}}{\cos\alpha} = \overline{SO_1}\cdot\overline{SM_1}$$

каде што $\alpha = \measuredangle P_1SO_1$.

15. Во нерамнокрак триаголник $A_1A_2A_3$ со a_i е означена страната наспроти темето A_i. За $i = 1,2,3$ нека M_i, е средината на страната a_i, T_i е допирната точка на страната a_i со впишаната кружница во триаголникот $A_1A_2A_3$ и S_i е точката симетрична на точката T_i во однос на симетралата на аголот во темето A_i. Докажи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се сечат во една точка.

Решение. Точките $S_i, i = 1,2,3$ лежат на впишаната кружница. Со XY да го означиме ориентираниот лак XY. Лаците T_2S_1 и T_1T_3 се еднакви бидејќи се симетрични во однос на симетралата на $\measuredangle A_1$. Аналогно $T_3T_2 = S_2T_1$. Оттука следува



$$T_3S_1 = T_3T_2 + T_2S_1 = S_2T_1 + T_1T_3 = S_2T_3 ,$$

па затоа правата S_1S_2 е паралелна со правата A_1A_2, што значи и со правата M_1M_2. Слично, $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Но, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ немаат исти радиуси на опишани кружници, што значи дека тие не се складни, па затоа тие се хомотетични. Но, тоа значи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 минуваат низ центарот на хомотетија, т.е. се сечат во една точка.

16. Дадени се три кружници со еднакви радиуси и со заедничка точка O, кои што лежат во $\triangle ABC$. Секоја од овие кружници допира две страни од $\triangle ABC$. Докажи дека точката O и центрите на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на иста права.

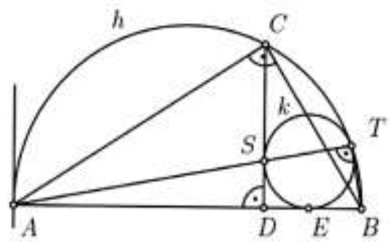
Решение. Нека S_A, S_B, S_C се центрите на дадените кружници, така што S_A лежи на симетралата на аголот A од $\triangle ABC$, итн. Тогаш, $S_A S_B \parallel AB$, $S_B S_C \parallel BC$, $S_C S_A \parallel CA$ и симетралите на аглите на $\triangle ABC$ се воедно симетрали и на аглите на $\triangle S_A S_B S_C$. Овие два триаголника имаат ист центар на впишана кружница, кој го означуваме со S. Точката S е центар на хомотетија h која го пресликува $\triangle S_A S_B S_C$ во $\triangle ABC$.

Точката O е подеднакво оддалечена од S_A, S_B, S_C, т.е. таа е центар на кружницата опишана околу триаголникот $\triangle S_A S_B S_C$. Хомотетијата h ја пресликува точката O во центарот S на кружницата опишана околу на триаголникот ABC. Затоа точката O, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежат на една права.

17. Дадена е полукружница h со дијаметар AB. Нека точката C, различна од A и B, припаѓа на полукружницата h и нека D е подножјето на нормалата повлечена од C на дијаметарот AB. Кружницата k е надвор од триаголникот ADC и истовремено во точките T, E и S ги допира полукружницата h и отсечките AB и CD, соодветно.

а) Докажи, дека точките A, S и T се колинеарни.

б) Докажи, дека $\overline{AC} = \overline{AE}$.



Решение. а) Хомотетија со центар во точката T која кружницата што ја содржи полукружницата h ја пресликува на кружницата k, ја пресликува точката A во точка S' која лежи на кружницата k. Бидејќи хомотетијата ги запазува аглите, добиваме дека тангентата на k во S' е паралелна на тангентата на h во точката A, што значи дека е нормална на AB. Значи, тангентата во S' е паралелна со CD и како CD е тангента, добиваме дека $S \equiv S'$, со што докажавме дека точките A, S и T се колинеарни.

б) Од правоаголниот $\triangle ABC$ добиваме $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$. Понатаму, од степенот на точка во однос на кружница следува $\overline{AS}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{AT}$. Триаголниците ADS и ATB се слични, како правоаголни триаголници со заеднички остар агол, па затоа

$\overline{AS}:\overline{AD}=\overline{AB}:\overline{AT}$, односно $\overline{AS}\cdot\overline{AT}=\overline{AD}\cdot\overline{AB}$. Конечно, од последните три равенства следува $\overline{AS}=\overline{AC}$, со што тврдењето е докажано.

18. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник, за кој правата CD е тангента на кружница со дијаметар AB. Докажи дека правата AB е тангента на кружница со дијаметар CD ако и само ако правите BC и AD се паралелни.

Решение. Нека правите AB и CD се сечат во точката O. На правата CD определуваме точки A' и B', така што $\overline{OA}=\overline{OA'}$ и $\overline{OB}=\overline{OB'}$.

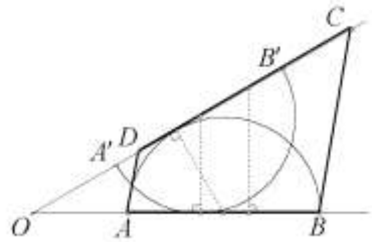
Заради симетрија, правата AB ја допира кружницата со дијаметар $A'B'$. Затоа е исполнето:

- правата AB е тангента на кружницата со дијаметар CD

$\Leftrightarrow$ постои хомотетија таква што

$\overline{OD}=k\cdot\overline{OA'}$ и $\overline{OC}=k\cdot\overline{OB'}$

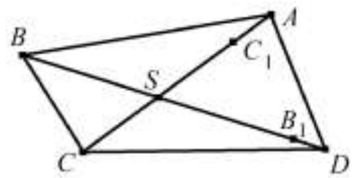
$\Leftrightarrow$ $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB'}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ $\Leftrightarrow$ $AD \parallel BC$.



Во случај кога правите AB и CD се паралелни, четириаголникот е паралелограм.

19. Нека S е пресечната точка на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$. Ако радиусите на кружниците впишани во $\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSD$ и $\triangle DSA$ се еднакви, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е ромб.

Решение. Без ограничување на општоста може да сметаме дека $\overline{AS}\geq\overline{SC}$ и $\overline{DS}\geq\overline{SB}$. Нека точките B_1 и C_1 се централно симетрични на точките B и C во однос на точката S, соодветно. Тогаш $\triangle BSC \cong \triangle B_1SC_1$ и кружницата впишана во $\triangle B_1SC_1$ се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ASD$. Ако



претпоставиме дека отсечките B_1C_1 и AD не се совпаѓаат, тогаш $\triangle ASD$ и $\triangle B_1SC_1$ имаат различни впишани кружници. Но, впишаната кружница во $\triangle B_1SC_1$ е хомотетична со впишаната кружница во $\triangle ASD$ со центар на хомотетија во точката S и коефициент $k>1$. Оттука следува дека $r_{\triangle BSC}=r_{\triangle B_1SC_1}<r_{\triangle ASD}$, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $\overline{B_1C_1}=\overline{AD}$, што значи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм Сега

$$\frac{r(\overline{AS}+\overline{SD}+\overline{DA})}{2}=P_{\triangle ASD}=P_{\triangle CDS}=\frac{r(\overline{CD}+\overline{SD}+\overline{SC})}{2}, \text{ т.е. } \overline{CD}=\overline{AD},$$

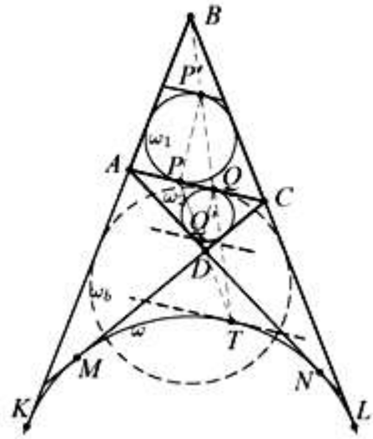
што значи дека четириаголникот $ABCD$ е ромб.

20. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{BA}\neq\overline{BC}$. Нека ω_1 и ω_2 се впишаните кружници во триаголниците ABC и ADC, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница ω која ја допира полуправата BA после точката

A и ја допира полуправата BC после точката C, а која истовремено ги допира и правите AD и CD. Докажи дека надворешните заеднички тангенти на ω_1 и ω_2 се сечат на ω.

Решение. Нека ω ги допира правите AB, BC, CD, DA во точките K, L, M, N, соодветно. Тогаш

$$\overline{BA}+\overline{AD}=\overline{BA}+\overline{AN}-\overline{DN}=\overline{BK}-\overline{DN}$$
$$=\overline{BL}-\overline{DM}=\overline{BC}+\overline{CM}-\overline{DM}\ .$$
$$=\overline{BC}+\overline{CD}$$



Тоа значи дека, ако со P и Q ги означиме допирните точки на ω_1 и ω_2 со AC, соодветно, тогаш

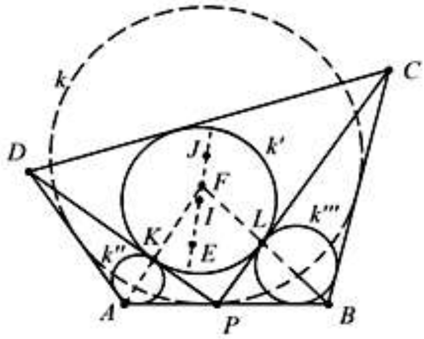
$$\overline{AP}=\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}=\overline{CQ}\ .$$

Со други зборови, припишаната кружница ω_b наспроти темето B во триаголникот ABC ја допира страната AC во точката Q.

Да ја разгледаме хомотетијата Н со центар во B која ја пресликува ω_b во ω и да ставиме $T=\mathrm{H}(Q)$.Понатаму, точката P' дијаметрално спротивна на точката P на ω_1 лежи на правата AC, а точката Q' дијаметрално спротивно на точката Q на ω_2 лежи на правата DP. Тангентите во P', Q', T на $\omega_1, \omega_2, \omega$, соодветно се паралелни со правата AC. Според тоа, хомотетијата со центар во D која ја пресликува ω_2 во ω ја пресликува точката Q' во T, па затоа точките T, D, Q', P се колинеарни. Значи, правите $P'Q$ и $Q'P$ се сечат во точката T, па како е $PP' \parallel QQ'$, точката T е центар на хомотетијата која ω_1 ја пресликува во ω_2, од каде следува тврдењето.

21. Нека P е точка на страната AB на конвексниот четириаголник $ABCD$. Нека k' е вписаната кружница во $\triangle CPD$ и I е неговиот центар. Да претпоставиме дека k' ги допира вписаните кружници во триаголниците APD и BPC во точките K и L, соодветно. Нека дијагоналите AC и BD се сечат во точката E, а правите AK и BL во точката F. Докажи дека точките E, I и F се колинеарни.

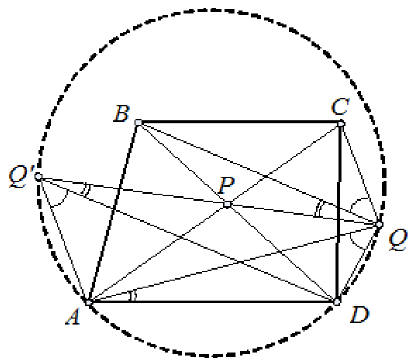
Решение. Со J да го означиме центарот на кругот k кој во полурамнината определена со правата AB ги допира правите DA, AB и BC и со k'' и k''' да ги означиме кружниците вписани во $\triangle ADP$ и $\triangle BCP$, соодветно. Нека F' е центарот на негативната хомотетија која ја пресликува k' во k. Центрите на негативната и позитивната хомотетија кои ја пресликуваат k'' во k' и k се K и A, соодветно. Сега, имаме три хомотетии, од кои едната е композиција на останатите две, па затоа нивните центри се колинеарни, т.е. $F' \in AK$ и аналогно $F' \in BL$. Но, тоа значи дека $F' \in AK \cap BL = \{F\}$, т.е. $F' \equiv F$. Според тоа, правата IJ која минува низ центрите на k и k' ја содржи точката F.



Од условот дека тангентните отсечки повлечени од P на k' и k'' се еднакви добивае дека $\overline{AP} - \overline{AD} = \overline{CP} - \overline{CD}$, што значи дека во четириаголникот $APCD$ може да се впише кружница k^*. Нека X е центарот на хомотетијата оја ја пресликува k^* во k'. Сега од теорема 7, применета на кружниците k'', k^*, k' следува дека точката X лежи на правата AC. Од друга страна, повторно од теорема 7 применета на кружниците k'', k', k следува колинеарноста на точките X, A, E', каде E' е центарот на позитивната хомотетија која k' ја пресликува во k. Оттука $E' \in AC$ и аналогно $E' \in BD$, па затоа $E \equiv E'$. Конечно, правата IJ ја содржи и точката E, со што доказот е завршен.

22. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се сечат во точката P. Точката Q се наоѓа помеѓу паралелните прави BC и AD, така што $\measuredangle AQD = \measuredangle CQB$ и правата CD ги раздвојува точките P и Q. Докажи дека $\measuredangle BQP = \measuredangle DAQ$.

Решение. Нека $t = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$ (види цртеж). Ќе разгледаме хомотетија h со центар во точката P и коефициент $-t$. Триаголникот PDA е сличен со триаголникот PBC со коефициент на сличност t, па според тоа $h(B) = D$ и $h(C) = A$.



Со Q' ќе ја означиме сликата на Q со h, т.е. $Q' = h(Q)$. Од конструкцијата е јасно дека Q, P и Q' се колинеарни точки.

Точки P и Q припаѓаат на иста страна од AD па според тие ќе припаѓаат на иста страна од BC. Според тоа Q' и P ќе припаѓаат од иста страна од $h(BC) = AD$. Значи, Q и Q' се наоѓаат на иста страна од AD. Точките Q и C се на иста страна од BD па според тоа Q' и A се на спротивна страна од BD.

Од конструкцијата имаме $\measuredangle AQ'D = \measuredangle CQB$ ($h(BCD) = DAQ$), а од условот на задачата имаме $\measuredangle AQD = \measuredangle CQB$. Значи, од точките Q и Q' отсечката AD се гледа под ист агол. Според тоа A, Q', Q, D припаѓаат на една иста кружница и заради тоа $AQ'QD$ е тетивен четириаголник.

Според $h(PBQ)=PDQ'$ и бидејќи $AQ'QD$ е тетивен четириаголник, добиваме

$$\measuredangle DAQ=\measuredangle DQ'Q=\measuredangle PQB,$$

(првото равенство е заради агли над ист кружен лак а второто равенство е од сличност на хомотетични фигури).

23. Даден е $\triangle OAB$ со $\measuredangle BOA=\alpha$ ($\alpha<90^\circ$). Низ точка $M\neq O$, се повлечени нормали MP на OA и MQ на OB. Нека H е ортоцентар на триаголникот OPQ. Најди го геометриското место на H ако

а) M припаѓа на страната AB,

б) M лежи внатре во $\triangle OAB$.

Решение. а) Нека точките $A_1, B_1, P, Q, P_1, Q_1, A_2, B_2$ се како на црт. 7.2, при што се исполнети условите:

$$MQ \parallel AA_1 \parallel PP_1 \parallel BB_1 \perp OB,\ MP \parallel BB_1 \parallel QQ_1 \parallel AA_1 \perp OA$$

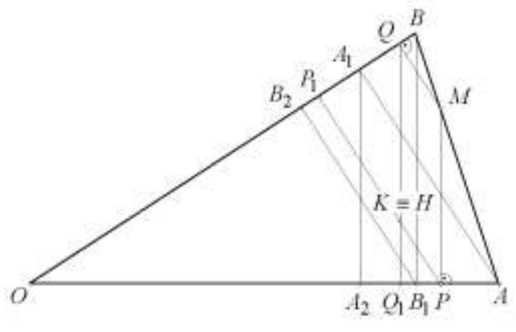
Од Талесовата теорема следува:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB_1}}=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{A_1Q}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}. \qquad (*)$$

Ќе докажеме дека ортоцентарот H на триаголникот OPQ (т.е. пресекот на висините PP_1 и QQ_1) се наоѓа на отсечката A_1B_1. Нека K е пресек на висината PP_1 и правата A_1B_1. Од сличноста $\triangle B_1A_1B_2 \sim \triangle KA_1P_1$ и (*) се добива

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_2}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}} \text{ и } \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{Q_1B_1}}=\frac{\overline{A_1K}}{\overline{KB_1}}.$$

Од последните две равенства следува дека $\triangle A_1A_2B_1 \sim \triangle KQ_1B_1$, па затоа $KQ_1 \perp OA$, т.е. точката K се наоѓа на висината Q_1Q, што значи дека K се совпаѓа со ортоцентарот H, т.е. ортоцентарот H припаѓа на A_1B_1.

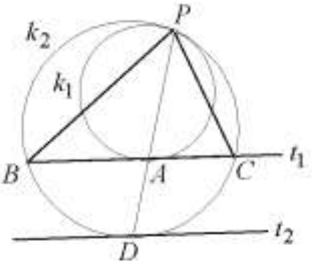


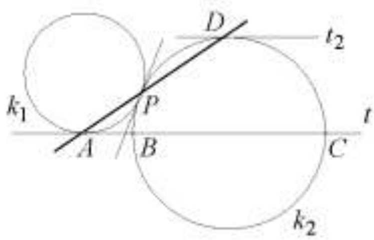
Сега не е тешко да се види дека за секоја точка K од отсечката A_1B_1 (и само за тие точки) постои точка M на AB таква што K е ортоцентар на $\triangle OPQ$, за $MP \perp OA$ и $MQ \perp OB$.

б) Ако точката M е во внатрешноста на $\triangle OAB$, тогаш постои отсечка $A'B' \parallel AB$ таква што M припаѓа на $A'B'$. Од сличноста на триаголниците $OA'B'$ и OAB, следува дека ортоцентарот H на триаголникот $OP'Q'$ ($MP' \perp OA'$, $MQ' \perp OB'$) е на отсечката $A_1'B_1'$ која се пресликува во отсечката A_1B_1, со хомотетија со центар во точката O и коефициент $k=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Сега од својствата на хомотетијата, следува дека бараното геометриско место за точката H е внатрешноста на $\triangle OA_1B_1$.

24. Две кружници се допираат (одвнатре или однадвор) во точка P . Правата t ја допира едната од кружниците во точка A и ја сече другата кружница во точки B и C . Докажи дека правата PA е симетрала на еден од аглите меѓу правите PB и PC .

Решение. Разгледуваме хомотетија со центар во P која кружницата k_1 ја пресликува во кружницата k_2 . Оваа хомотетија ја пресликува точката A во точката $D = PA \cap k_2$, а тангентата t_1 на кружницата k_1 во тангента t_2 на кружницата k_2 , која е паралелна со t .



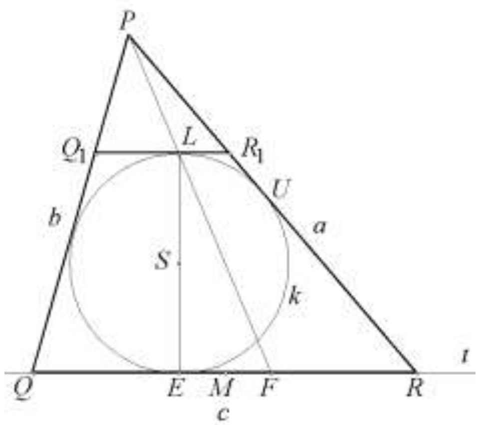


Затоа точката D е средина на лакот BC од кружницата k_2 , од што следува дека PD е симетрала на внатрешниот или надворешниот агол кај точката P на триаголникот CPB .

25. Нека t е тангента на кружницата k и точката M припаѓа на t . Најди го геометриското место на точки P за кои, постојат точки Q и R на t такви што M е средина на отсечката QR , а кружницата k е впишана во триаголникот PQR .

Решение. Нека E е допирната точка на тангентата t со кружницата k , чијшто центар е S , а EL е дијаметарот на кружницата.

Земаме точка P и соодветно точки Q и R на тангентите, така да кружницата биде впишана во триаголникот PQR . Триаголниците PFR и PLR_1 се хомотетични со коефициент на хомотетија $k = \frac{\nu_c}{\nu_c - 2r} = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{c} - \frac{2P}{s}} = \frac{s}{s-c}$, (P е плоштината на триаголникот PQR $s = \frac{a+b+c}{2}$, r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот PQR) и $\overline{QE} = s - a$.



Правата PL ја сече тангентата во точка F , па имаме

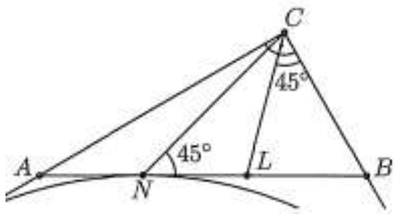
$$\begin{aligned} \overline{FR} &= k\overline{LR_1} = k\overline{R_1U} = k(\overline{PR} - \overline{PR_1} - \overline{UR}) \\ &= k\overline{PR} - \overline{PR} - k(s-b) \\ &= (k-1)\overline{PR} - k(s-b) \\ &= \frac{c}{s-c}a - \frac{s}{s-c}(s-b) = s - a = \overline{QE} \end{aligned}$$

Значи, важи $\overline{QE} = \overline{FR}$. Точката P припаѓа на бараното множество ако и само ако M е средина на отсечкта EF , т.е.

ако и само ако точката F е симетрична со точката E во однос на точката M. Бараното множество точки е полуправата LP.

26. Даден е $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 90^\circ$, во кој припишаната кружница кон страната AB ја допира AB во точка N. Определи ја големината на $\measuredangle BAC$ ако $\measuredangle BNC = 45^\circ$.

Решение. *Прв начин*. Нека CL е симетралата на $\measuredangle ACB (L \in AB)$. Тогаш $\measuredangle BCL = 45^\circ = \measuredangle BNC$, т.е. $\triangle BNC \sim \triangle BCL$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}$ и затоа $\overline{BC}^2 = \overline{BL} \cdot \overline{BN}$.



При стандардните ознаки за $\triangle ABC$ имаме $\overline{BN} = s-a, \overline{BL} = \frac{ac}{a+b}$. Според тоа,

$$a^2 = (s-a) \cdot \frac{ac}{a+b}, \text{ т.е. } ab = (b-a)s.$$

Од друга страна, $ab = 2P_{\triangle ABC} = 2sr = 2s(s-c)$ и ако замениме во гормото равенство, добиваме $b-a = 2(s-c)$, т.е. $c = 2a$, па затоа $\measuredangle BAC = 30^\circ$.

Втор начин. Нека вписаната кружница k во $\triangle ABC$ се допира до страната AB во точка P (направи цртеж). Ако со Q ја означиме дијаметрално спротивната точка на P во k, тогаш знаеме дека точките C, Q и N се колинеарни (тврдењето се докажува со хомотетија со центар C која k ја пресликува во припишаната кружница). Од $\measuredangle BNC = 45^\circ$ следува, дека $\overline{NP} = \overline{PQ}$, т.е. $b-1 = 2r = 2(p-c), c = 2a$ и $\measuredangle BAC = 30^\circ$.

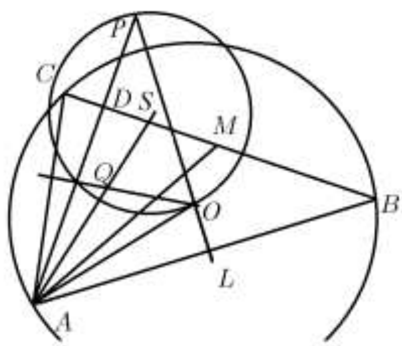
27. Низ центарот O на опишаната кружница околу разностраниот остроаголен $\triangle ABC$ се повлечени прави нормални на страните AB и AC, кои висината AD на $\triangle ABC$ ја сечат во точките P и Q, соодветно. Точката M е средина на страната BC, а точката S е центар на опишаната кружница околу $\triangle OPQ$. Докажи, дека $\measuredangle BAS = \measuredangle CAM$.

Решение. За определеност нека земеме дека $\overline{AB} > \overline{AC}$ (види цртеж). Со L да ја означиме средината на отсечката AB. Имаме

$$\measuredangle AOL = \tfrac{1}{2} \measuredangle AOB = \measuredangle ACB,$$

па затоа

$$\begin{aligned} \measuredangle BAO &= 90^\circ - \measuredangle AOL \\ &= 90^\circ - \measuredangle ACB = \measuredangle CAD. \end{aligned}$$



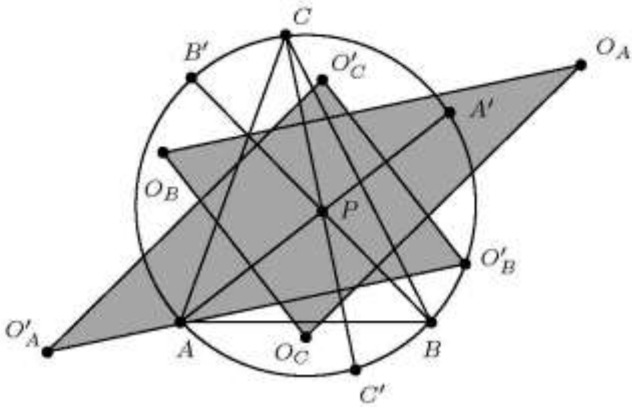
Бидејќи страните на $\triangle OPQ$ се нормални на соодветни страни на $\triangle ABC$, важи $\triangle ABC \sim \triangle OPQ$, при што триаголникот

$\triangle OPQ$ се добива од $\triangle ABC$ со ротација за агол од 90° и хомотетија со коефициент k. Понатаму, OA и OS се соодветни во $\triangle ABC$ и $\triangle OPQ$, па затоа $OS \perp AO$ и $\overline{OS} = k\overline{AO}$. Освен тоа, должината на отсечката MD е еднаква на должината на висината на $\triangle OPQ$ повлечена кон страната PQ, па затоа $\overline{MD} = k\overline{AD}$. Според тоа, правоаголните триаголници AOS и ADM се слични, од што следува $\measuredangle SAO = \measuredangle MAD$. Конечно,

$$\measuredangle BAS = \measuredangle BAO + \measuredangle SAO = \measuredangle CAD + \measuredangle MAD = \measuredangle CAM .$$

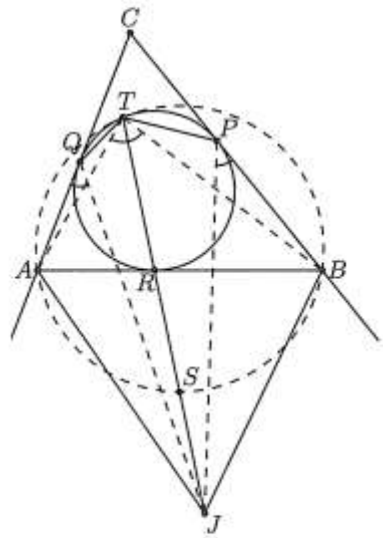
28. Нека P е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правата AP по вторпат ја сече кружницата опишана околу $\triangle ABC$ во точката A'. Аналогно се дефинираат точките B' и C'. Нека O_A е центарот на кружницата опишана околу $\triangle BCP$. Аналогно се дефинираат точките O_B и O_C. Нека $O_A^{'}$ е центарот на кружницата опишана околу $\triangle B'C'P$. Аналогно се дефинираат точките $O_B^{'}$ и $O_C^{'}$. Докажи дека правите $O_AO_A^{'}, O_BO_B^{'}$ и $O_CO_C^{'}$ се сечат во една точка.

Решение. Правите O_BO_C и $O_B^{'}O_C^{'}$ се симетрали на отсечките PA и PA', соодветно, па затоа тие се паралелни. Оттука и од аналогните парови паралелни



прави следува, дека триаголниците $O_AO_BO_C$ и $O_A^{'}O_B^{'}O_C^{'}$ се слични и имаат паралелни страни. Освен тоа, во сите случаи точката P е меѓу соодветните страни, што значи дека двата триаголника се хомотетични со негативен коефициент на хомотетија. Но, тоа значи дека правите $O_AO_A^{'}, O_BO_B^{'}$ и $O_CO_C^{'}$ минуваат низ центарот на хомотетијата, т.е. тие се сечат во една точка.

29. Даден е $\triangle ABC$ и нека впишаната во него кружница k ги допира страните BC и CA во точките P и Q, соодветно. Со J да го означиме центарот на припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB, а со T втората пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle JBP$ и $\triangle JAQ$. Докажи, дека кружницата опишана околу $\triangle ABT$ се допира до k.



Решение. Нека R е допирната точка на k со страната AB. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Од условот следува дека

$$\measuredangle PTJ = 180^\circ - \measuredangle PBJ$$
$$= 90^\circ - \tfrac{\beta}{2} = \measuredangle PRB$$

и

$$\measuredangle QTJ = 180^\circ - \measuredangle QAJ$$
$$= 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2} = \measuredangle QRA.$$

Тогаш

$$\measuredangle PTQ = \measuredangle PTJ + \measuredangle QTJ$$
$$= 180^\circ - (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2})$$
$$= 180^\circ - \measuredangle PRQ$$

и затоа $T \in k$ и $R \in TJ$.

Нека ω е кружницата опишана околу $\triangle ABT$ и S е пресечната точка на полуправата TR и ω. Од $\triangle CPJ \cong \triangle CQJ$ следува дека

$$\measuredangle ATJ = \measuredangle AQJ = \measuredangle BPJ = \measuredangle BTJ,$$

т.е. S е средина на AB.

Останува да забележиме, дека при хомотетија $h(T, R \to S)$ кружницата k се пресликува во кружницата ω и затоа двете кружници се допираат во T.

30. Во рамнината се дадени n конвексни $k-$аголници, такви што секои два од нив имаат заедничка внатрешна точка. Познато е дека секој од $k-$аголниците може да се преслика во секој друг $k-$аголник со хомотетија со позитивен коефициент. Докажи, дека во рамнината постои точка која припаѓа барем на $1+\frac{n-1}{2k}$ од тие $k-$аголници.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако два конвексни многуаголници со заедничка внатрешна точка се пресликуваат еден во друг при хомотетија со позитивен коефициент, тогаш некое од темињата на едниот многуаголник е внатрешна точка за другиот многуаголник.

Доказ. Нека двата многуаголници се P и P'. Ако едниот од нив лежи во другиот, тогаш нема што да се докажува. Во спротивно, постои страна AB на P, која ја сече контурата на P'. Ако P' содржи една од точките A или B, тогаш тврдењето е докажано.

Останува да го разгледаме случајот кога P' ја сече AB по отсечка, која лежи во внатрешноста на AB. Јасно, P' има темиња и од двете страни на правата AB. Да ги разгледаме страната $A'B'$ на P' која при хомотетијата е соодветна на AB и произволно теме C' на P', такво што $A'B'$ и C' се во различни полурамнини во однос на AB. Нека C е во P соодветното теме на C'. Тогаш C' лежи во внатрешноста на $\triangle ABC$, бидејќи се наоѓа во една иста полурамнина во однос на AB, BC и AC со тој триаголник. Во случајов C' припаѓа на P, со што доказот е завршен. ■

Нека $P_1, P_2, ..., P_n$ се дадените $k-$аголници и да означиме $P_i = A_{i,1}...A_{i,k}$, за $i = 1, 2, ..., n$. За секое теме $A_{i,j}$ со $a_{i,j}$ да го означиме бројот на многуаголниците P_s, $s \neq i$, за кои $A_{i,j}$ е внатрешна точка. Од лемата следува, дека секој пар $k-$аголници е броен барем еднаш при наоѓање на броевите $a_{i,j}$. Затоа

$$a_{1,1} + ... + a_{1,k} + ... + a_{i,1} ... + a_{i,k} + ... + a_{n,1} + ... + a_{n,k} \geq \frac{n(n-1)}{2} .$$

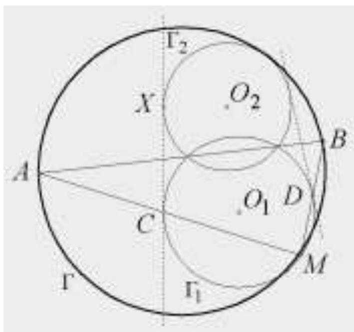
Оттука следува, дека барем еден од броевите $a_{i,j}$ не е помал од $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Бидејќи темето $A_{i,j}$ лежи во P_i и уште $a_{i,j}$ други $k-$аголници, добиваме дека тоа припаѓа на $1 + \frac{n-1}{2k}$ од $k-$аголниците, т.е. го има саканото својство.

31. Две кружници Γ_1 и Γ_2 се содржани во кружницата Γ и ја допираат во две различни точки M и N, соодветно. Кружницата Γ_1 минува низ центарот на кружницата Γ_2. Правата која минува низ двете пресечни точки на Γ_1 и Γ_2 ја сече Γ во точките A и B. Правите MA и MB ја сечат Γ_1, соодветно во точките C и D. Да се докаже дека CD е тангента на Γ_2.

Решение. Лема. Кружницата k_1 од внатре ја допира кружницата k во точката A и допира една од тетивите MN на k во точката B. Нека C е средната точка на лакот MN што не ја содржи точката A. Тогаш точките A, B, C се колинеарни и $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2$.

Доказ. Хомотетијата со центар во точката A која што ја пресликува кружницата k_1 во k, ја пресликува MN во тангента на A паралелна со MN, т.е. во тангента во точката C, па така точките A, B, C се колинеарни.

Исто така следува дека $\measuredangle NMC = \measuredangle CAM$, па триаголниците ACM и MCB се слични. Оттука следува $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2$. ♦



Нека O_1 и O_2 се центрите на кружниците Γ_1 и Γ_2, соодветно и t_1 и t_2 се нивните заеднички тангенти (цртеж десно) и α и β се лаците отсечени од кружницата Γ со тангентите t_1 и t_2 со положба како во лемата.

Нивните средни точки, во согласност со лемата, имаат еднаков степен во однос на Γ_1 и Γ_2, па лежат на радикалната оска за двете кружници. Така, точките A и B се средини на лаците α и β. Од лемата следува дека C и D се точки во кои тангентите ја допираат кружницата Γ_1. Ако H е хомотетија со центар во M која ја пресликува кружницата Γ_1 во Γ_2, тогаш H ја пресликува AB во CD, па $AB \| CD$. Следува $CD \perp O_1O_2$, па O_2 е средина на лакот CD од кружницата Γ_2.

Нека X е точката во која t_1 ја допира Γ_2. Добиваме

$$\measuredangle XCO_2 = \tfrac{1}{2}\angle CO_1O_2 = \measuredangle DCO_2,$$

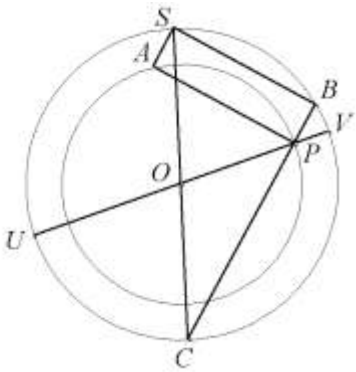
па O_2 лежи на симетралата на аголот XCD, а CD е тангента на кружницата Γ_2.

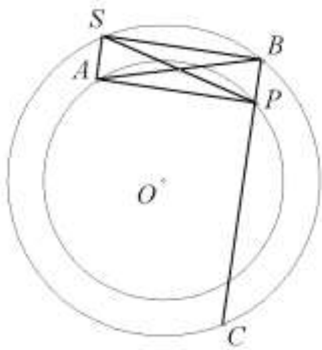
32. Во рамнина дадени се две кружници со радиуси R и r ($R > r$) со заеднички центар. Нека P е фиксна точка на помалата кружница, а точката B се движи по поголемата кружница. Правата BP повторно ја сече поголемата кружница во точката C. Нормалата l на BP во P, повторно ја сече помалата кружница во A, (ако l е тангента на кружницата во точката P, тогаш $A = P$).

(a) Најди го множеството вредности на изразот $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

(b) Најди го геометриското место на точки на средините на отсечката AB.

Решение. Прво ќе го решиме вториот дел од задачата. Го дополнуваме триаголникот APB до правоаголник $APBS$ (цртеж лево). Ако разгледаме осната симетрија со оска, симетралата на отсечката AP, добиваме дека точката S лежи на поголемата кружница. Во специјален случај, кога $A \equiv P$, земаме $S \equiv B$.





Во секој случај средината на отсечката AB се совпаѓа со средината на отсечката SP, и кога точката B минува низ сите точки од големата кружница, истото важи и за точката S, и обратно. Значи, бараното множество точки е еднакво на множеството од сите средини на отсечките PS, кога S се движи по големата кружница. Со други зборови, тоа е слика на големата кружница при хомотетија со центар P и коефициент $\frac{1}{2}$, а тоа е кружница со центар во средината на отсечката OP и радиус $\frac{R}{2}$.

За да го решиме првиот дел од задачата, ќе го користиме истиот правоаголник. Забележуваме дека OC е радиус на поголемата кружница, бидејќи аголот CBS е прав (цртеж десно). Затоа

$$\overline{AP}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{BC}^2 = 4R^2 - \overline{BC}^2,$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2.$$

Од добиените равенства и степенот на точка во однос на кружница, добиваме

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{BC}^2=8R^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-\overline{BC}^2$$
$$=8R^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-(\overline{BP}+\overline{CP})^2=8R^2-2\overline{BP}\cdot\overline{CP}$$
$$=8R^2-2\overline{UP}\cdot\overline{VP}=8R^2-2(R+r)(R-r)=6R^2+2r^2$$

Значи, бараното множество е $\{6R^2+2r^2\}$.

33. Четирите темиња на квадрат со страна x лежат на страни на триаголник. Докажи дека

$$2r>x>r\sqrt{2}\,,$$

каде r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот.

Решение. Нека темињата на квадратот Q лежат на страните на триаголникот ABC, при што страна на квадратот лежи на страната AB (направи цртеж). Кружницата впишана во квадратот Q лежи во триаголникот и нема заедничка точка барем со една од страните AC и BC (еден од аглите A и B може да е прав агол, но ниеден од нив не може да е тап агол). Значи, радиусот $\frac{x}{2}$ е помал од радиусот r впишана во триаголникот, т.е. $x<2r$.

Сега , нека во впишаната кружница во ΔABC впишеме квадрат Q_1 при што една негова страна е паралелна со AB. Q_1 е внатре во триаголникот и може да се транслира така што темињата на најблиската страна до AB се совпаѓаат со своите проекции на AB. Новата положба Q_2 на Q_1 повторно е внатре во $\triangle ABC$ и Q_2 може да се преслика (хомотетија и транслација) во Q. Значи страната $y=r\sqrt{2}$ на Q_1 е помала од страната x на Q, $x>r\sqrt{2}$.

34. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник т.ш. $\overline{BA}\neq\overline{BC}$. Нека впишаните кружници на триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ ги означиме со k_1 и k_2 соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница k што ги допира полуправата BA во точка после A, и полуправата BC после точката C, која исто така ги допира правите AD и CD. Докажи дека заедничките надворешни тангенти на k_1 и k_2 се сечат на k.

Решение. Нека AB, CD се сечат во точката X, а AD, BC во точката Y, и нека k ги допира AB, DC, AD, BC соодветно во точките P, Q, R, S. Користејќи ги својствата на тангентите на k добиваме:

$$\overline{BA}+\overline{AD}=\overline{BA}+\overline{AR}-\overline{DR}=\overline{BP}-\overline{DR}=\overline{BS}-\overline{DQ}=\overline{BC}+\overline{CQ}-\overline{DQ}=\overline{BC}+\overline{CD}.$$

Нека k_1 и k_2 ја допираат AC во J и L соодветно. Користејќи ги впишаните кружници имаме:

$$\overline{AB}+\overline{JC}=\overline{BC}+\overline{AJ} \text{ и } \overline{DA}+\overline{LC}=\overline{DC}+\overline{LA}$$

Ако ги собереме притоа користејќи дека $\overline{BA}+\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{CD}$ добиваме

$$\overline{JC}+\overline{LC}=\overline{AL}+\overline{AJ}$$

од каде $\overline{AL}=\overline{JC}$.

Нека припишаната кружница на $\triangle ABC$ на страната AC е k_3, а припишаната кружница на $\triangle ADC$ на страната AC е k_4. Значи, k_3 и k_4 ја допираат AC во L и J. Сега да ја конструираме тангентата на k која е паралелна на AC (и на истата страна на k како и AC).

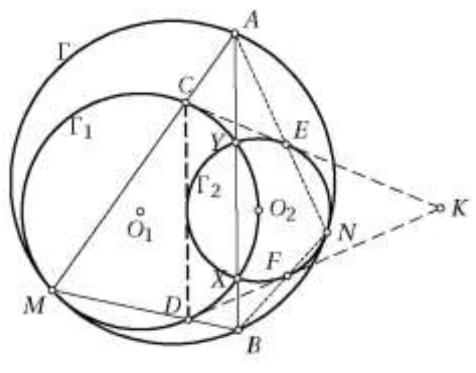
Нека тангентата ја допира k во Z. Хомотетија во точката B ја носи k_3 во k и L во Z. Хомотетија во точката D ја носи k_4 во k и J во Z. Значи, BL и DJ се сечат во Z.

Конечно, да ја конструираме тангентата која недостига кон k_1 и k_2, и нека допирните точки се M и N соодветно. Повторно со хомотетија покажуваме дека B, M, L, Z се колинеарни и D, N, J, Z се колинеарни.

Бидејќи JM и LN се паралелни и се дијаметри на k_1 и k_2, JN и LM се допираат во центарот на хомотетија која ја пресликува k_1 во k_2, а тоа е точката Z. Значи Z е точката на пресек на надворешните заеднички тангенти, а од конструкцијата, Z лежи на k.

35. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се наоѓаат во внатрешноста на кружницата Γ и ја допираат Γ во различни точки M и N, соодветно. Кружницата Γ_1 минува низ центарот на кружницата Γ_2. Правата која минува низ пресечните точки на кружниците Γ_1 и Γ_2 ја сече кружницата Γ во точките A и B. Правите MA и MB ја сечат Γ_1 во тоќките C и D, соодветно. Докажи, дека правата CD е тангента на кружницата Γ_2.

Решение. *Прв начин.* Нека кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, а правите NA и NB ги сечат кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките E и F, соодветно (види цреж). При хомотетија со центар M која Γ_1 ја пресликува во Γ точките C и D се пресликуваат во точките A и B соодветно, па затоа $CD \parallel AB$. Од



$$\overline{AC} \cdot \overline{AM} = \overline{AX} \cdot \overline{AY} = \overline{AE} \cdot \overline{AN}$$

следува дека точките C, E, M, N лежат на една кружница, па затоа

$$\measuredangle ACE = \measuredangle ANM = \measuredangle ABM = \measuredangle CDM.$$

Оттука следува дека правата CE е тангента на кружницата Γ_1. Аналогно CE е тангента на Γ_2, а правата DF е тангента на кружниците Γ_1 и Γ_2.

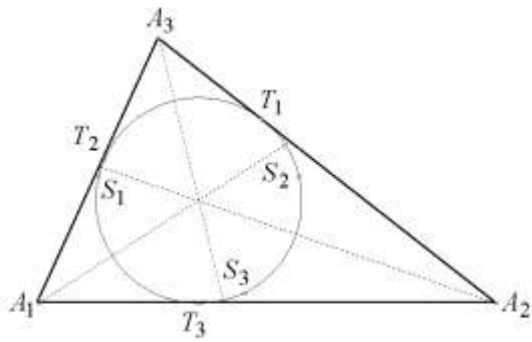
Со K да ја означиме пресечната точка на правите CE и DF, а со O_1 и O_2 центрите на кружниците Γ_1 и Γ_2. Точката O_1 е средина на помалиот лак CD на кружницата опишана околу триаголникот CDK. Бидејќи точката O_2 припаѓа на симетралата на $\measuredangle CDK$ и $\overline{O_1C} = \overline{O_1D} = \overline{O_1O_2}$, добиваме дека O_2 е центар на вписаната кружница во триаголникот CDK (т.е. Γ_2 е вписаната кружница) или центар на припишаната кружница наспроти темето K. Во двата случаја Γ_2 ја допира правата CD.

36. Триаголник е поделен на хомотетични на него триаголници, при што коефициентите на хомотетија се броеви меѓу -1 и 1. Докажи, дека збирот на сите коефициенти на хомотетија е еднаков на 1.

Решение. Нека една од страните на големиот триаголник е хоризонтална, на пример a. Разгледуваниот збир е еднаков на збирот S на количниците на хоризонталните страни на малите триаголници и страната a, земени со соодветен знак. Хоризонтална страна, која не лежи на a, во збирот S се појавува двапати, при што количникот кој соодветствува на поблискиот до a триаголник е позитивен, а другиот е спротивен на него. Според тоа, збирот S е еднаков на збирот на количниците кои соодветствуваат на страните кои лежат на a и кој очигледно е еднаков на 1.

37. Даден е разностран $\Delta A_1A_2A_3$ со должина на страните a_1, a_2, a_3 (a_i е должина на страна спроти темето A_i). Нека M_i е средината на страната a_i, T_i е точка во која вписаната кружница во триаголникот ја допира страната a_i, а S_i е симетрична точка на точката T_i во однос на симетралата на внатрешниот агол кај темето A_i $(i=1,2,3)$. Докажи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин.* Точките S_1, S_2 и S_3 припаѓаат на вписаната кружница. Осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_1 го пресликува лакот T_3S_1 на вписаната кружница во лакот T_2T_1, а осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_2 лакот T_3S_2 го пресликува во лакот T_1T_2. Затоа



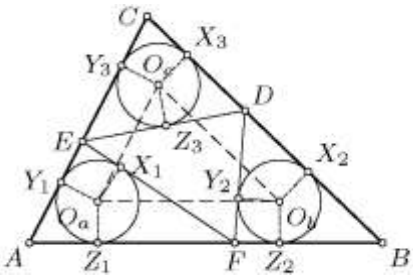
$$T_3S_1 = -T_2T_1 = T_1T_2 = -T_3S_2$$

(при што ознаките $T_3S_1, -T_2T_1, T_1T_2, -T_3S_2, \dots$ се ознаки за ориентирани лаци на вписаната кружница). Од овде следува дека $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ и заради тоа $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. На сличен начин се докажува дека $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Значи, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ имаат паралелни страни па затоа постои хомотетија или транслација со која едниот се пресликува во другиот. Транслација не постои бидејќи опишаната кружница околу $\Delta M_1M_2M_3$ има поголем радиус од опишаната кружница околу $\Delta S_1S_2S_3$ (т.е. вписаната кружница на $\Delta A_1A_2A_3$, бидејќи $\Delta A_1A_2A_3$ е разностран). Затоа постои хомотетија и нејзин центар е заедничката точка на правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3. (Овие прави постојат бидејќи $M_i \neq S_i$, а триаголникот $\Delta A_1A_2A_3$ е разностран).

Втор начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот O на кружницата впишана во $\Delta A_1A_2A_3$, а радиусот на впишаната кружница да е еднаков на 1. Со мали букви ги означуваме комплексните броеви кои соодветствуваат на дадените точки означени со големи букви. Точни се равенствата $t_1\overline{t_1} = t_2\overline{t_2} = t_3\overline{t_3} = 1$. Тетивите $\overline{T_2T_3}$ и $\overline{T_1S_1}$ на дадената кружница се паралелни, бидејќи и двете се нормални на симетралата на аголот A_1, па затоа $t_2t_3 = t_1s_1$, односно $s_1 = t_2t_3\overline{t_1}$. Аналогно, $s_2 = t_1t_3\overline{t_2}$ и $s_3 = t_1t_2\overline{t_3}$. Според тоа, $s_3 - s_2 = t_1(t_2\overline{t_3} - t_3\overline{t_2})$. Бројот во заградата е имагинарен, како разлика на два коњугирано комплексни броеви, што значи $OT_1 \perp S_2S_3$ па затоа правите A_2A_3 и S_2S_3 се паралелни. Понатаму решавањето е исто како и во првиот начин.

38. Нека r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC. На страните BC, CA и AB се избрани точки D, E, F, соодветно, така што радиусите на впишаите кружници во триаголниците AEF, BFD и CDE се еднакви на ρ. Ако r' е радиусот на впишаната кружница во триаголникот DEF, докажи дека $\rho = r - r'$.

Решение. Плоштината на триаголникот DEF е еднаква на



$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD})r' &= P_{DEF}\\ &= P_{ABC} - P_{AEF} - P_{BDF} - P_{CDE}\\ &= \frac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})r}{2} - \frac{(\overline{AE}+\overline{AF}+\overline{EF})\rho}{2}\\ &\quad - \frac{(\overline{BD}+\overline{BF}+\overline{DF})\rho}{2} - \frac{(\overline{CD}+\overline{CE}+\overline{DE})\rho}{2}\\ &= \frac{(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})(r-\rho)}{2} - \frac{(\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD})\rho}{2}.\end{aligned}$$

Следува дека $\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD}} = \frac{r'+\rho}{r-\rho}$. Да ги означиме со O_1, O_2, O_3 соодветно центрите на впишаните кружници k_a, k_b, k_c во триаголниците AEF, BDF и CDE. Кружницата k_a ги допира страните EF, CA, AB во точките X_1, Y_1, Z_1 соодветно, кружницата k_b ги допира BC, DE, AB во X_2, Y_2, Z_2 соодветно, и k_c ги допира BC, CA, DE во X_3, Y_3, Z_3 соодветно. Тогаш

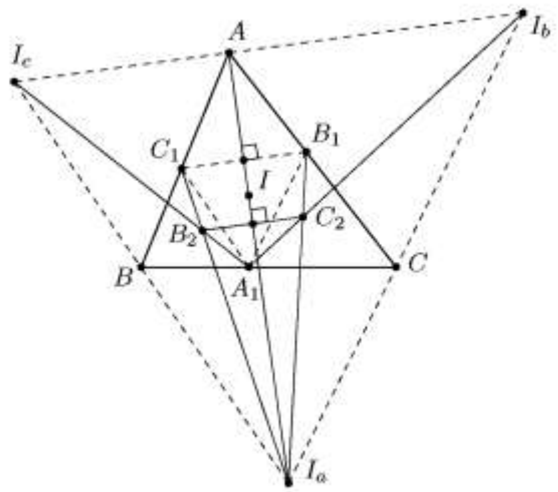
$$\begin{aligned}\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FD} &= (\overline{DZ_3}+\overline{EZ_3}) + (\overline{EX_1}+\overline{FX_1}) + (\overline{FY_2}+\overline{DY_2})\\ &= (\overline{DX_3}+\overline{EY_3}) + (\overline{EY_1}+\overline{FZ_1}) + (\overline{FZ_2}+\overline{DX_2})\\ &= \overline{X_2X_3}+\overline{Y_3Y_1}+\overline{Z_1Z_2} = \overline{O_bO_c}+\overline{O_cO_a}+\overline{O_aO_b}.\end{aligned}$$

Меѓутоа, триаголниците ABC и $O_aO_bO_c$ се хомотетични со центар на хомотетија во заедничкиот центар на впишаните кружници, а нивните радиуси на впишаните кружници се r и $r-\rho$, па оттука имаме $\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\overline{O_bO_c}+\overline{O_cO_a}+\overline{O_aO_b}} = \frac{r}{r-\rho}$.

Значи, $\frac{r'+\rho}{r-\rho}=\frac{r}{r-\rho}$, т.е. $\rho=r-r'$.

39. Кружница со центар I е впишана во $\triangle ABC$ и страните BC, CA, AB ги допира соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Нека I_a, I_b, I_c се центрите на припишаните кружници на $\triangle ABC$ кои соодветно се допираат до страните BC, CA, AB. Отсечките I_aB_1 и I_bA_1 се сечат во точката C_2, отсечките I_bC_1 и I_cB_1 се сечат во точката A_2 и I_cA_1 и I_aC_1 се сечат во точката B_2. Докажи дека I е центар на кружницата опишана околу $\triangle A_2B_2C_2$.

Решение. Правите B_1C_1 и I_bI_c се паралелни, бидејќи се нормални на симетралата AI на $\measuredangle BAC$. Аналогно $A_1C_1 \parallel I_aI_c$ и $A_1B_1 \parallel I_aI_b$. Според тоа, триаголниците $A_1B_1C_1$ и $I_aI_bI_c$ се хомотетични.



Триаголниците $A_1C_1B_2$ и $I_cI_aB_2$ се слични, бидејќи соодветните страни им се паралелни. Аналогно имаме $\triangle A_1B_1C_2 \sim \triangle I_bI_aC_2$. Од овие сличности следуваат равенствата $\frac{\overline{I_aB_2}}{\overline{C_1B_2}}=\frac{\overline{I_aI_c}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{I_aI_b}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{I_aC_2}}{\overline{B_1C_2}}$. Точките B_1 и C_1 се симетрични во однос на правата AI_a, од $\frac{\overline{I_aB_2}}{\overline{C_1B_2}}=\frac{\overline{I_aC_2}}{\overline{B_1C_2}}$ следува, дека точките B_2 и C_2 се симетрични во однос на истата права и $\overline{IB_2}=\overline{IC_2}$. Аналогно добиваме $\overline{IB_2}=\overline{IA_2}$, па затоа I е центар на кружницата опишана околу $\triangle A_2B_2C_2$.

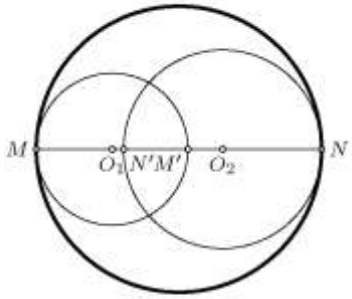
40. Конечно многу кругови покриваат остроаголен триаголник. Докажи дека збирот на нивните радиуси не е помал од радиусот на опишаната кружница околу тој триаголник.

Решение. Нека круговите чии радиуси се $r_1, r_2, ..., r_n$ го покриваат $\triangle ABC$. Тогаш тие не може да се заемно дисјунктни, т.е. барем два имаат заедничка точка (нека се тоа круговите чии радиуси се r_i и r_j). Ако едниот круг е содржан во другиот, тогаш со негово отфрлање се добива покривање со $n-1$ кругови, а збирот на радиусите се намалува.

Во спротивно нека правата која ги поврзува центрите на овие кругови го сече првиот круг во точките M и N, а вториот круг во точките N и N', така што тоќката M е на поголемо растојание од вториот круг отколку точката M', а точката N е на поголемо растојание од првиот круг отколку точката N' ($M' \equiv N'$ соодветствува на случајот кога круговите се допираат). Кругот чиј дијаметар е MN ги содржи двата круга (цртеж десно) и за неговиот радиус r' важи

$$r' = \frac{\overline{MN}}{2} = \frac{\overline{MN'}+\overline{N'M'}+\overline{M'N}}{2} \leq \frac{\overline{MN'}+2\overline{N'M'}+\overline{M'N}}{2}$$

$$= \frac{\overline{MN'}+\overline{N'M'}+\overline{N'M'}+\overline{M'N}}{2} = \frac{2r_i+2r_j}{2} = r_i + r_j,$$

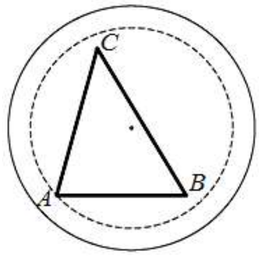


Па со изоставување на воочените кругови и додавање на кругот со дијаметар MN се добива множество од $n-1$ кругови кои го покриваат триаголникот и чиј збир на радиуси е

$$r_1 + r_2 + ... + r_n - r_i - r_j + r' \leq r_1 + r_2 + ... + r_n$$

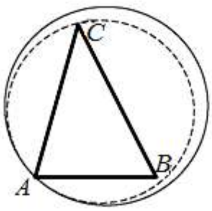
т.е. е помал одколку во почетната ситуација.

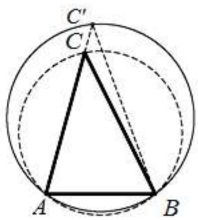
За да го комплетираме доказот, доволно е да докажеме дека круг кој содржи остроаголен $\triangle ABC$ има радиус поголем или еднаков од радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.



Нека x е радиусот на кружницата k која го содржи $\triangle ABC$. Тогаш k содржи барем едно теме на триаголникот, бидејќи во спротивно со хомотетија со центар во центарот на k може да се добие помала кружница со истото својство (цртеж десно).

Слично, k мора да содржи барем две темиња, бидејќи ако на пример го содржи само темето A, тогаш со хомотетија во A и погодно избран коефициент на хомотетија се добива кружница со помал радиус која го содржи $\triangle ABC$ (цртеж долу лево).





Конечно, нека $\triangle ABC$ е остроаголен и кружницата со наведените својства ги содржи точките A и B, а не ја содржи точката C. Бидејќи точката C припаѓа на кругот, правата AC ја сече кружницата во точката C', така што C е меѓу A и C'.

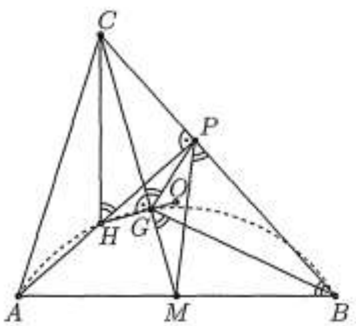
Триаголникот ABC припаѓа и на кругот со радиус x и на опишаниот круг околу $\triangle ABC$ (со радиус R). Бидејќи $\measuredangle ACB$ е надворешен во $\triangle CBC'$ важи $\frac{\pi}{2} > \measuredangle ACB > \measuredangle AC'B$, па затоа $R = \frac{\overline{AB}}{\sin \measuredangle ACB} < \frac{\overline{AB}}{\sin \measuredangle AC'B} = x$, што и требаше да се докаже.

41. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и тежиште G. Нека тежиштето G припаѓа на кружницата со дијаметар CH.

а) Докажи, дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

б) Определи ја максимално можната вредност на $\measuredangle ACB$.

Решение. а) Очигледно $\triangle ABC$ е остроаголен, H е внатрешна точка и ќе го разгледаме нетривијалниот случај, кога $G \not\equiv H$. Ако $CG \cap AB = M$ и $AH \cap BC = P$, тогаш M е средина на AB и P и G лежат на кружницата со дијаметар CH. Така добиваме



$$\measuredangle PGC = \measuredangle PHC = 180^\circ - \measuredangle AHC = \measuredangle ABC$$

и затоа четириаголникот $MBPG$ е тетивен. Затоа $\measuredangle BGM = \measuredangle BPM = \measuredangle ABC$ и

$$\measuredangle BAH + \measuredangle BGH = \measuredangle BAH + 90^\circ + \measuredangle ABC = 180^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

б) Ако $G \equiv H$, тогаш $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Нека $G \not\equiv H$ и O е центарот а опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш точките H, G и O лежат на Ојлеровата права и G ја дели HO во однос $2:1$. Во случајот O е надворешна точка за отсечката HG, т.е. O р надворешна точка за кружницата опишана околу четириаголникот $ABGH$. Тогаш

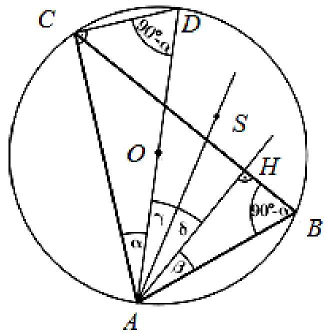
$$\measuredangle AOB < \measuredangle AHB = 2\measuredangle ACB < 180^\circ - \measuredangle ACB \text{, т.е. } \measuredangle ACB < 60^\circ.$$

Според тоа, бараната максимална вредност за $\measuredangle ACB$ е 60° и се достигнува единствено кај рамностраниот триаголник.

8. ИЗОГОНАЛНИ ПРАВИ И ИЗОГОНАЛНИ ТОЧКИ

1. Правите кои се симетрични во однос на симетралата на даден агол и кои минуваат низ неговото теме се нарекуваат *изогонални* прави во однос на тој агол.

Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC, а AH е висина во тој триаголник. Тогаш правите AO и OH се изогонални во однос на аголот BAC. Докажи!



Решение. Нека AS е симетралата на аголот BAC (цртеж десно). Нека $\measuredangle CAO = \alpha$ и $\measuredangle HAB = \beta$. Треба да докажеме дека $\gamma = \angle OAS = \measuredangle SAH = \delta$ и од тоа ќе следува симетричноста на правите AO и OH во однос на правата AS. Бидејќи AS е симетрала на аголот BAC имаме $\gamma = \delta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Значи доволно е да докажеме дека $\alpha = \beta$. Аголот ACD е периферен над дијаметарот AD, па затоа важи $\measuredangle ACD = 90^\circ$. Значи $\measuredangle CDA = 90^\circ - \alpha$. Но $\measuredangle CDA$ и $\measuredangle CBA$ се периферни над тетивата AC, па затоа $\measuredangle CBA = \measuredangle CDA = 90^\circ - \alpha$. Конечно, триаголникот AHB е правоаголен, па затоа $\beta = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, што и требаше да се докаже.

2. Нека P е произволна точка од рамнината на триаголникот ABC, а A_1, B_1 и C_1 се подножја на нормалите повлечени од P кон правите BC, CA и AB, соодветно. Триаголникот $A_1B_1C_1$ го нарекуваме *подножен триаголник* на точката P во однос на триаголникот ABC. Подножниот триаголник на ортоцентарот ќе го нарекуваме *ортоцентричен* триаголник.

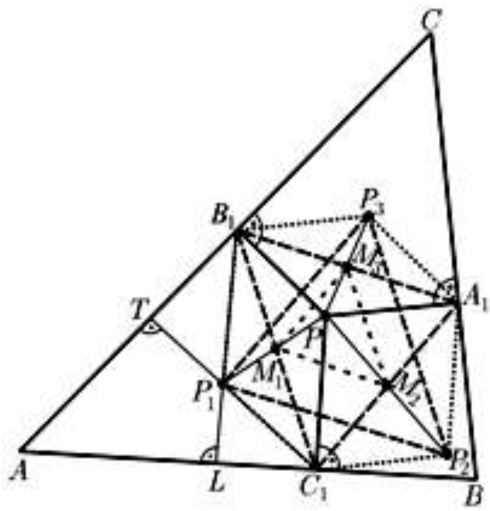
Нека $A_1B_1C_1$ е подножниот триаголник на точката P во однос на триаголникот ABC, и нека M_1, M_2, M_3 се, соодветно, средините на страните B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, а P_1, P_2, P_3 се точките симетрични на P во однос на точките M_1, M_2, M_3, соодветно. Докажи дека:

а) P_1, P_2, P_3 се ортоцентри на триаголниците AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, соодветно;

б) Триаголниците $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ се складни;

в) $P_1P_2 \parallel A_1B_1$, $P_2P_3 \parallel B_1C_1$, $P_3P_1 \parallel C_1A_1$.

Решение. а) Бидејќи M_1 е средина на B_1C_1 и на PP_1 следува дека четириаголникот $PC_1P_1B_1$ е паралелограм (цртеж десно). Значи, $B_1P_1 \parallel PC_1$. Но $PC_1 \perp AB$, па затоа $B_1P_1 \perp AB$. Според тоа B_1L е висина во триаголникот AB_1C_1. Исто така и $P_1C_1 \parallel B_1P$ и $B_1P \perp AC$, па $P_1C_1 \perp AC$. Одовде C_1T е висина во $\triangle AB_1C_1$. Пресечната точка на овие две висини е P_1, па таа е ортоцентар на $\triangle AB_1C_1$.



Слично се докажува дека P_2 е ортоцентар на $\triangle BA_1C_1$ и P_3 е ортоцентар на $\triangle CB_1A_1$.

б) Точките M_1 и M_3 се средини на PP_1 и PP_3, соодветно, па затоа $\overline{P_1P_3} : \overline{M_1M_3} = 2:1$. Од друга страна M_1 и M_3 се средини на B_1C_1 и B_1A_1, соодветно, па затоа $\overline{A_1C_1} : \overline{M_1M_3} = 2:1$. Оттука добиваме дека $\overline{A_1C_1} = \overline{P_1P_3}$. Слично се докажува дека $\overline{B_1C_1} = \overline{P_2P_3}$ и $\overline{B_1A_1} = \overline{P_1P_2}$. Значи триаголниците $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ се складни.

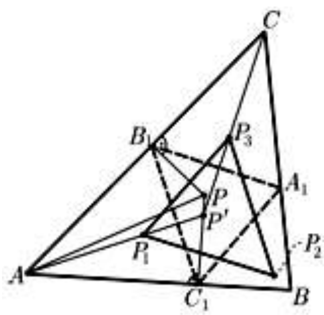
в) Од **а)** следува дека $A_1P_3 \parallel P_1C_1$ (двете се нормални на AC). Од б) добиваме дека $\overline{A_1C_1} = \overline{P_1P_3}$, па четириаголникот $P_1P_3A_1C_1$ е паралелограм, од што следува бараното тврдење.

3. Нека $A_1B_1C_1$ е подножен триаголник на точката P во однос на триаголникот ABC и O_A, O_B, O_C се ортоцентрите на триаголниците AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соодветно. Докажи дека $\triangle O_AO_BO_C \cong \triangle A_1B_1C_1$ и нивните соодветни страни се паралелни.

Решение. Тврдењето непосредно следува од задача 2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

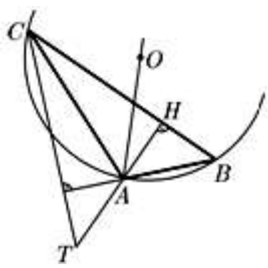
4. Нека P е точка која не лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и нека $A_1B_1C_1$ е подножниот триаголник на точката P во однос на $\triangle ABC$. Тогаш правите кои се изогонални на PA, PB, PC во однос на $\measuredangle CAB, \measuredangle ABC, \measuredangle BCA$, соодветно, минуваат низ иста точка P'. Докажи!

За точките P и P' ќе велиме дека се *изогонално коњугирани.*



Решение. Од $\measuredangle AC_1P = \measuredangle AB_1P = 90^\circ$ (цртеж десно) следува дека четириаголникот AB_1PC_1 е тетивен и AP е дијаметар на кружницата опишана околу него. Од задача 2 следува дека P_1 е ортоцентар на триаголникот AB_1C_1. Понатаму, според задача 1 правите AP и AP_1 се изогонални во однос на аголот C_1AB_1. Исто така од задача 2 следува дека $B_1C_1 \parallel P_3P_2$. Но, $AP_1 \perp B_1C_1$, па затоа и $AP_1 \perp P_3P_3$. Значи висината на $\triangle P_1P_2P_3$ повлечена од P_1 е отсечка од правата AP_1, која е изогонална на правата AP во однос на $\measuredangle B_1AC_1$. Аналогно, висините на $\triangle P_1P_2P_3$ повлечени од P_3 и P_2 се отсечки од правите CP_3 и BP_2, соодветно. Правата CP_3 е изогонална на CP во однос на $\measuredangle B_1CA_1$ и правата BP_2 е изогонална на BP во однос на $\measuredangle C_1BA_1$ (доказот е аналоген на доказот за AP и AP_1). Висините во $\triangle P_1P_2P_3$ се сечат во една точка, па затоа правите AP_1, BP_2 и CP_3 се сечат во една точка која е ортоцентар на $\triangle P_1P_2P_3$ и тоа е бараната точка P'.

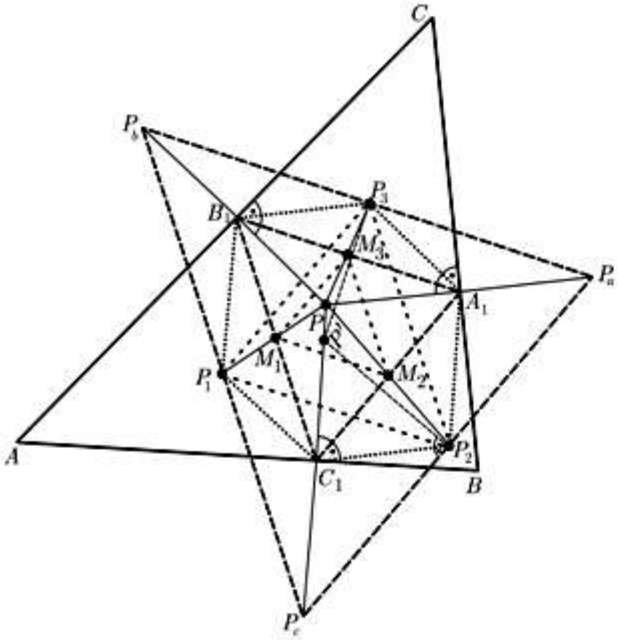
5. Во произволен $\triangle ABC$ центарот на опишаната кружница и неговиот ортоцентар се изогонално коњугирани во однос на $\triangle ABC$. Докажи!



Решение. Ако $P \equiv O$ (O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$), тогаш нејзината коњугирана изогонална точка е пресекот на изогоналните прави на правите AO, BO и CO во однос на $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$, соодветно. Но, според задача 1 изогоналната права на AO во однос на $\measuredangle CAB$ е AT (T е ортоцентарот на $\triangle ABC$), а изогонална на AO во однос $\measuredangle ACB$ е AT. Значи овие изогонални прави се сечат во ортоцентарот T, т.е. $P' = T$.

6. Подножните триаголници на изогоналните точки P и P' во однос на $\triangle ABC$ имаат заедничка опишана кружница со центар во средината на отсечката PP'. Докажи!

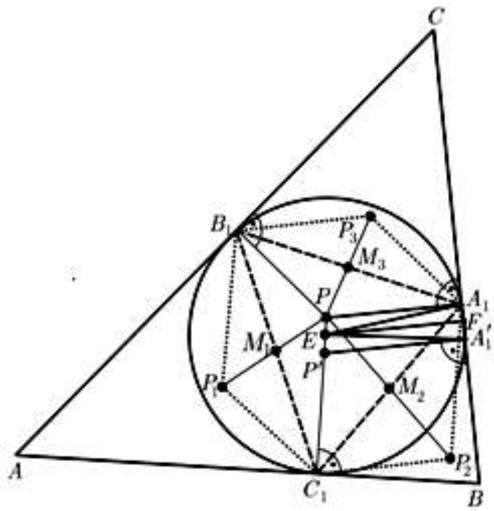
Решение. Нека P и P' се изогонални во однос на $\triangle ABC$ (види цртеж). Да разгледаме хомотетија со центар во P и коефициент 2 со која $\triangle A_1B_1C_1$ се пресликува во $\triangle P_aP_bP_c$. Точките $M_1, M_2,\ M_3$ се средини на страните на $\triangle A_1B_1C_1$, па тие преминуваат во средините на страните на $\triangle P_aP_bP_c$, а тоа се P_1, P_2, P_3, соодветно. Според задача 4 P' е ортоцентар на $\triangle P_1P_2P_3$, па затоа $P'P_2 \perp P_1P_3$. Но $P_1P_3 \parallel A_1C_1 \parallel P_aP_c$, па $P'P_2 \perp P_aP_c$. Аналогно се докажува дека $P'P_3 \perp P_aP_b$.



Бидејќи P_1, P_2, P_3 се средини на страните на $\triangle P_aP_bP_c$ следува дека P' е центарот на опишаната кружница околу $\triangle P_aP_bP_c$. Сега да разгледаме хомотетијата со центар во P и коефициент $\frac{1}{2}$, со која $\triangle P_aP_bP_c$ преминува во $\triangle A_1B_1C_1$, а точката P' во средината E на отсечката PP'. Тогаш и опишаната кружница околу $\triangle P_aP_bP_c$ преминува во опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C_1$. Значи E е центар на опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C_1$. Аналогно се докажува дека E е центар и на опишаната кружница околу $\triangle A_1'B_1'C_1'$ - подножниот триаголник на P' во однос на $\triangle ABC$. Останува да докажеме дека овие две кружници имаат еднакви радиуси од што ќе следува дека и опишаните кружници се еднакви. Нека $F \in A_1A_1'$ е таква што $EF \parallel PA_1$. Уште важи $PA_1 \parallel P'A_1'$ и $PA_1 \perp A_1A_1'$, па $EF \perp A_1A_1'$ и F е средина на отсечката A_1A_1'. Значи триаголниците A_1FE и $A_1'FE$ се правоаголни (со прави агли кај F), $\overline{A_1F} = \overline{A_1'F}$ и страната EF е заедничка, па $\triangle A_1FE \cong \triangle A_1'FE$.

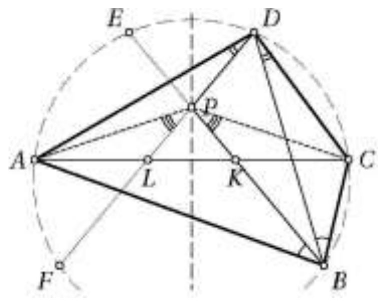
Оттука $\overline{EA_1} = \overline{EA_1'}$, па радиусите на опишаните кружници околу $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_1'B_1'C_1'$ се еднакви.

7. Средините на страните на триаголникот и подножјата на неговите висини лежат на една кружница со центар во средината на отсечката што ги сврзува центарот на опишаната кружница во триаголникот и неговиот ортоцентар. Докажи!



Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница и H ортоцентарот на триаголникот ABC (цртеж десно). Од задача 5 следува дека центарот на опишаната кружница и ортоцентарот на триаголникот се изогонални, па од задача 6 нивните подножни триаголници имаат заедничка опишана кружница со центар во средината на отсечката OH .

8. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналата BD не е симетрала ниту на аголот $\measuredangle ABC$ ниту на аголот $\measuredangle CDA$. За точката P која припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle PBC = \measuredangle DBA$ и $\measuredangle PDC = \measuredangle BDA$. Докажи, дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overline{AP} = \overline{CP}$.

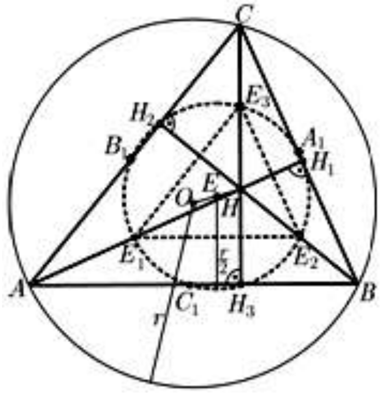


Решение. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека правите BP и DP повторно ја сечат опишаната околу него кружница во точките E и F, соодветно. Тогаш $AF = BC$ и $AE = CD$, па затоа $BF \parallel AC \parallel DE$. Според тоа, четириаголникот $BDEF$ е рамнокрак трапез и $P = BE \cap DF$ лежи на заедничката симетрала на отсечките BF, ED, AC, па затоа $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Нека претпоставиме дека $\overline{AP} = \overline{CP}$. Понатаму, нека правите BP и DP ја сечат AC во точките K и L, соодветно. Точките A и C се изогонално коњугирани во $\triangle BDP$, па затоа $\measuredangle APL = \measuredangle CPK$, од каде следува дека точките K и L се симетрични во однос на симетралата p на отсечката AC. Тогаш симетричната точка E на точката D во однос на правата p лежи на правата LP, па затоа $\triangle APD \cong \triangle CPE$. Оттука следува дека $\measuredangle BDC = \measuredangle ADP = \measuredangle BEC$, што значи дека точката B припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$. Конечно, бидејќи и точката A припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$ заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

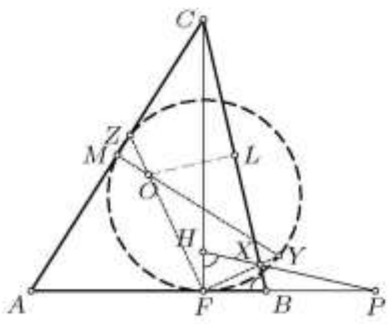
9. ОЈЛЕРОВА КРУЖНИЦА

1. Средините на страните на триаголникот ABC, подножјата на неговите висини AH_1, BH_2, CH_3 и средините на отсечките AH, BH, CH (H е ортоцентарот на триаголникот) припаѓаат на една кружница. Докажи!



Решение. Нека r е радиусот на опишаната кружница, O е нејзиниот центар и H е ортоцентарот на триаголникот ABC (цртеж десно). Понатаму, нека E_1, E_2, E_3 се средини на отсечките AH, BH, CH, соодветно. Хомотетијата со центар H и коефициент $\frac{1}{2}$ го пресликува $\triangle ABC$ во $\triangle E_1E_2E_3$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се пресликува во опишаната кружница околу $\triangle E_1E_2E_3$ со радиус $\frac{r}{2}$. Центарот O се пресликува во средината E на отсечката OH. Радиусот на опишаната кружница околу триаголникот формиран од средините на страните A_1, B_1, C_1 на триаголникот ABC е еднаков на $\frac{r}{2}$ (таа кружница е слика на кружницата околу $\triangle ABC$ при хомотетија со центар во O и коефициент $\frac{1}{2}$). Значи A_1, B_1, C_1, E_1, E_2 и E_3 лежат на кружница со центар во E и радиус $\frac{r}{2}$. Од задача 5 од претходниот поараграф следува дека центарот на опишаната кружница и ортоцентарот на триаголникот се изогонални, и од задача 6 од претходниот параграф следува дека $A_1, B_1, C_1, H_1, H_2, H_3$ лежат на кружницата со центар E и радиус $\frac{r}{2}$. Конечно, од изнесеното следува дека A_1, B_1, C_1, $H_1, H_2, H_3, E_1, E_2, E_3$ лежат на кружницата со центар во средината на отсечката OH и радиус $\frac{r}{2}$.

Кружницата од претходната задача ја нарекуваме *Ојлерова кружница* (*кружница на девет точки на триаголникот*). Нејзиниот центар е средината на OH (O е центарот на опишаната кружница), а радиусот е еднаков на половина од радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

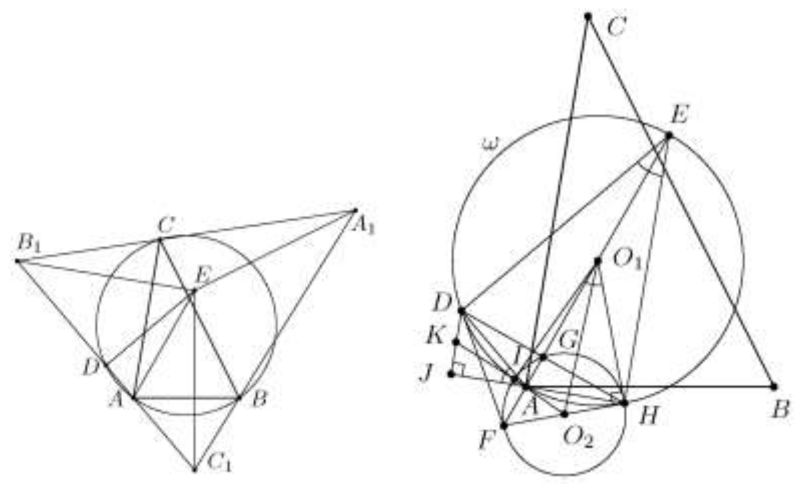


2. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. На правата AB е избрана точка P, различна од A, таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC. Нека X е пресекот на правите PH и BC, Y е пресекот на правите OM и FX, а Z е пресекот на правите OF и AC. Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

Решение. Бидејќи $\measuredangle ZMY = 90^\circ$, доволно е да докажеме дека
$$\measuredangle ZFY = \measuredangle OFX = 90^\circ .$$
Нека X' е точка на страната BC таква што $\measuredangle OFX' = 90^\circ$ и нека L е средина на страната BC. Точките F и L се наоѓаат на кружницата k над дијаметар OX', а исто така и двете лежат на Ојлеровата кружница ω на триаголникот ABC, чиј центар K е средина на отсечката OH. Затоа FL како заедничка тетива на кружниците k и ω е нормална на JK, каде J е средината на OX'. Од $JK \parallel HX'$ следува дека $FL \perp HX'$. Оттука следува
$$\measuredangle FHX' = 90^\circ - \measuredangle CFL = 90^\circ - \measuredangle FCL = \measuredangle ABC = \measuredangle AHF = \measuredangle FHX ,$$
па затоа $X \equiv X'$.

3. Даден е $\triangle ABC$, за кој точките B_1 и C_1 се центри на припишаните кружници соодветно кон страните AC и AB. Правата B_1C_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката $D, D \neq A$. Нека E е пресечната точка на нормалите повлечени од B_1 кон CA и C_1 кон AB. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Тангентата на ω во точката D ја сече правата AE во точка F. Нормалата повлечена од D на AE ја сече AE во точката G и таа права ја сече ω во точка $H, H \neq D$. Кружницата опишана околу $\triangle HGF$ ја сече ω во точка $I, I \neq H$. Нека J е подножјето на нормалата повлечена од D на AH. Докажи, дека правата AI минува низ средината на отсечката DJ.

Решение. Прво ќе докажеме, дека $\measuredangle ADE = 90^\circ$. Имаме
$$\measuredangle EB_1C_1 = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \measuredangle EC_1B_1 ,$$
па затоа важи $\overline{B_1E} = \overline{C_1E}$. Аналогно се докажува дека $\overline{B_1E} = \overline{A_1E}$ (A_1 е третиот центар на припишаните кружници), па затоа E е центар на опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C_1$.



Од друга страна, знаеме дека точките A, B и C се подножјата на висините на $\triangle A_1B_1C_1$. Според тоа, кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е Ојлеровата кружница за $\triangle A_1B_1C_1$. Тоа значи дека точката D е средина на отсечката B_1C_1, што значи дека $\measuredangle ADE = 90^\circ$.

Бидејќи AE е дијаметар на ω и точката H е симетрична на D во однос на AE, следува дека правата HF исто така е тангента на ω. Нека O_1 и O_2 се соодветно центрите на ω и на кружницата опишана околу $\triangle HGF$. Тогаш O_2 е средина на HF. Бидејќи

$$\measuredangle HO_1F = \measuredangle FO_1D = \measuredangle HED = \measuredangle JAD,$$

Добиваме дека $\triangle HO_1F \sim \triangle JAD$. Затоа

$$\measuredangle HO_1O_2 = \tfrac{1}{2}\measuredangle HO_1I = \measuredangle HAI = \measuredangle JAK,$$

каде $\{K\} = DJ \cap AI$. Бидејќи $\overline{O_2H} = \overline{O_2F}$ во $\triangle HO_1F$ имаме $\overline{JK} = \overline{KD}$ во $\triangle JAD$.

4. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB > 90^\circ$. Впишаната кружница со центар I ги допира страните AB, BC, CA во точките D, E, F, соодветно. Правите AI и BI ја сечат отсечката EF во точките M и N, соодветно. Ако G е средината на AB, докажи дека точките M, N, D и G припаѓаат на иста кружница.

Решение. Да забележиме дека M и N се надворешни за $\triangle ABC$. При стандардните ознаки за триаголник имаме

$$\measuredangle MEB = \measuredangle CEF = 90^\circ - \tfrac{\gamma}{2} = \measuredangle MIB$$

и затоа четириаголникот $IBME$ е тетивен и $\measuredangle AMB = 90^\circ$. Аналогно четириаголникот $AIFN$ е тетивен и $\measuredangle ANB = 90^\circ$. Според тоа, четириаголникот $ABMN$ е тетивен со центар G.

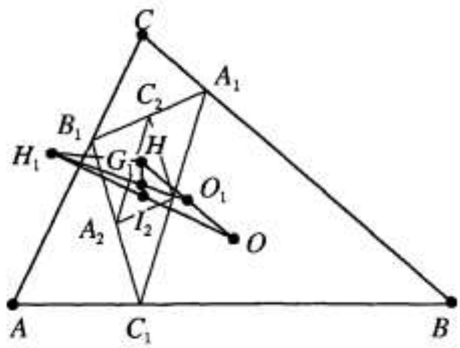
Сега од радикалните оски на кружницит $MBDI, NADI$ и $ABMN$ добиваме дека пресечната точка X на AN и BM лежи на DI. Значи за $\triangle ABX$ точките M, N, D се подножја на неговите висини. Според тоа, опишаната кружница околу $\triangle MND$ е Ојлеровата кружница за $\triangle ABX$, која минува низ средината на AB. Значи, точките M, N, D и G лежат на Ојлеровата кружница за $\triangle ABX$, со што задачата е решена.

4. Во остроаголен $\triangle ABC$ точките A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени од A, B, C, соодветно. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а H_1 е ортоцентарот на $\triangle A_1B_1C_1$, докажи дека средината на отсечката OH_1 се совпаѓа со центарот на впишаната кружница на триаголникот чиитемиња се средините на страните на $\triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Со H да го означиме ортоцентарот на $\triangle ABC$, со G_1 - тежиштето на $\triangle A_1B_1C_1$ и со O_1 - средината на OH.

Точката O_1 е центарот на Ојлеровата кружница на која лежат A_1, B_1, C_1, а H е центарот на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$. Бидејќи H_1, G_1 и O_1 се ортоцентарот, тежиштето и центарот на опишаната кружница за O_1, тие лежат на една права во тој редослед и важи $\overline{H_1G_1} : \overline{G_1O_1} = 2:1$.

Да разгледаме хомотетија со центар G_1 и коефициент $-\frac{1}{2}$. Бидејќи $\triangle A_1B_1C_1$ се пресликува во $\triangle A_2B_2C_2$ формиран од средините на B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, заклучуваме дека точката H се пресликува во центарот I_2 на кружницата впишана во $\triangle A_2B_2C_2$. Бидејќи G_1 е тежиште на $\triangle OHH_1$ закчучуваме дека I_1 е средина на OH_1.



5. Даден е разностран $\triangle ABC$. Нека AD, BE, CF се симетралите на аглите на $\triangle ABC$ ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Нека K_a, K_b, K_c се точки на впишаната кружница во $\triangle ABC$ такви што DK_a, EK_b, FK_c се тангенти на впишаната кружница и $K_a \notin BC, K_b \notin AC$, $K_c \notin AB$. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи, дека правите A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c се сечат на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. *Прв начин.* Ќе докажеме дека триаголниците $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ се хомотетични. За ова да го докажеме доволно е да докажеме дека $K_aK_b \parallel A_1B_1$, односно $K_aK_b \parallel AB$ (аналогно ќе следува и за другите парови страни).

Нека $M = K_aK_b \cap BC$, со S да го означиме центарот на впишаната кружница и нека T е произволна точка на впишаната кружница. Да означиме

$$\alpha = \measuredangle BAS, \beta = \measuredangle CBS, \gamma = \measuredangle ACS .$$

Користејќи ориентирани агли (по модул 180°) добиваме $\measuredangle B'EB = \beta + 2\gamma$ и аналогно $\measuredangle A'DA = \alpha + 2\beta$, па оттука добиваме $\measuredangle A'DK_a = 2\alpha + 4\beta$. Потоа

$$\measuredangle B'TK_b = \measuredangle B'SE = 90^\circ + \measuredangle B'ES = \gamma - \alpha$$

и аналогно $\measuredangle A'TK_a = \beta - \gamma$. Потоа,

$$\measuredangle A'TB' = \measuredangle A'SC = 90^\circ + \measuredangle A'CS = \alpha + \beta$$

и на крајот добиваме

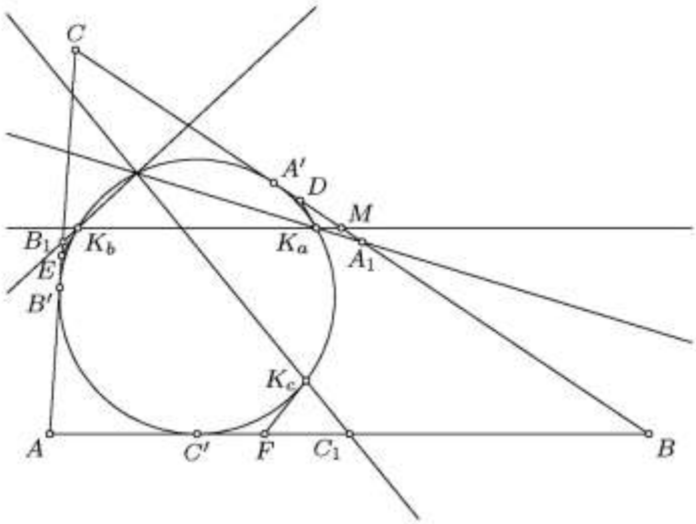
$$\measuredangle K_aTK_b = \measuredangle K_aTA' + \measuredangle A'TB' + \measuredangle B'TK_b = 2\gamma .$$

Исто така, од триаголникот DK_aM добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle CMK_a &= \measuredangle CDK_a + \measuredangle DK_aM \\ &= \measuredangle A'DK_a + \measuredangle DK_aK_b \\ &= (2\alpha + 4\beta) + \measuredangle K_aTK_b \\ &= (2\alpha + 4\beta) + 2\gamma = 2\beta.\end{aligned}$$

Значи, $\measuredangle CMK_a = \measuredangle CBA$, од каде следува $K_aK_b \parallel AB$, што и требаше да се докаже. Според тоа, триаголниците $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ се хомотетични.

Да забележиме дека коефициентот на хомотетија е позитивен, бидејќи ако е негативен, тогаш отсечките K_aA_1, K_bB_1, K_cC_1 треба да се сечат во една точка. Ако $\alpha > \beta$, тогаш точките C_1 и K_c, т.е. целата отсечка C_1K_c, се наоѓаат внатре во четириаголникот $SFDB$. Затоа, ако без ограничување на општоста претпоставиме дека $\alpha > \beta > \gamma$, тогаш $C_1K_c \subset SFDB$, но $A_1K_a \subset SDCE$, па затоа овие отсечки се дисјунктни.



Бидејќи триаголниците $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ се хомотетични, нивните опишани кружници исто така се хомотетични. Но, тоа се Ојлеровата и вписаната кружница за триаголникот ABC, соодветно, а познато е дека овие две кружници внатрешно се допираат точката на Фоербах за триаголникот ABC. Затоа, бидејќи коефициентот на хомотетија е позитивен, центарот на хомотетија е точно точката на Фоербах. Оттука следува дека A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c се сечат во точката на Фоербах за триаголникот ABC, која припаѓа на вписаната кружница во триаголникот ABC, со што тврдењето е докажано.

Втор начин. Нека вписаната кружница на триаголникот ABC е единичната кружница во комплексната рамнина. Тогаш

$$a = \frac{2b'c'}{b'+c'},\ b = \frac{2c'a'}{c'+a'},\ c = \frac{2a'b'}{a'+b'}.$$

Понатаму,

$$a_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{a'^2b'+a'^2c'+2a'b'c'}{(a'+b')(a'+c')}.$$

Афиксот k_a го наоѓаме од условот $\frac{k_a}{a} = \overline{\left(\frac{a'}{a}\right)}$, од каде имаме

$$k_a = \frac{1}{a'}\frac{a}{\overline{a}} = \frac{b'c'}{a'}.$$

Сега ја определуваме пресечната точка z на вписаната кружница чија равенка е $|z|=1$ и правата K_aA_1 чија равенка е

$$\frac{z-k_a}{a_1-k_a} = \overline{\left(\frac{z-k_a}{a_1-k_a}\right)},$$

која е еквивалентна со равенката

$$\overline{(a_1-k_a)}(z-k_a)=(\tfrac{1}{z}-\tfrac{1}{k_a})(a_1-k_a)\,,$$

т.е. со равенката

$$\overline{a_1-k_a}=-\tfrac{1}{zk_a}(a_1-k_a)\,,$$

од каде добиваме

$$z=-\frac{1}{k_a}\frac{a_1-k_a}{\overline{a_1-k_a}}=-\frac{(a'^2-b'c')(a'b'+b'c'+c'a')}{(b'c'-a'^2)(a'+b'+c')}=\frac{a'b'+b'c'+c'a'}{a'+b'+c'}\,.$$

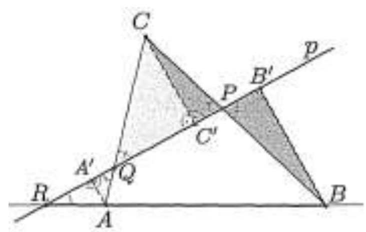
Бидејќи добиениот израз е симетричен во однос на a',b',c' аналогно се докажува дека и правите B_1K_b и C_1K_c ја сечат вписаната кружница во истата точка, со што тврдењето е докажано.

10. ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

1. (теорема на Менелај). Нека P,Q,R се точки кои припаѓаат на правите определени со страните BC,CA,AB на $\triangle ABC$. Докажи дека точките P,Q,R се колинеарни ако и само ако

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1\,.$$

Решение. Нека точките P,Q,R се колинеарни, p е правата која минува низ нив и точките A',B',C' се подножјата на нормалите повлечени од точките A,B,C на правата p. Имаме, $\measuredangle BPB'=\measuredangle CPC'$, па затоа правоаголните триаголници CPC' и BPB' се слични. Затоа



$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}\,.$$

Аналогно се докажува дека $\triangle CQC'\sim\triangle AQA'$ и $\triangle ARA'\sim\triangle BRB'$, па затоа

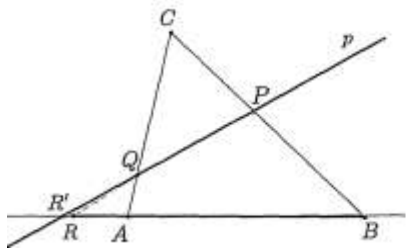
$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}\ \text{ и }\ \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=-\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

(знакот $-$ е бидејќи векторите $\overrightarrow{AR}$ и $\overrightarrow{RB}$ се спротивно насочени). Последните три равенства ги множиме и добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}\cdot\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}=-1\,.$$

Обратно, нека точките P,Q,R се такви што

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1\,.$$



Нека p е правата која минува низ точките

P и Q и нека правите p и AB се сечат во точката R'. Тогаш точките P,Q,R' припаѓаат на страните BC,CA,AB и тие се колинеарни, па затоа од претходно докажаното следува дека $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}=-1$. Од последните две равенства добиваме $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}$. Но на правата AB не може да постојат две различни точки R и R' кои отсечката AB ќе ја делат во ист однос, па затоа $R\equiv R'$, што значи дека точките P,Q,R се колинеарни.

2. Даден е $\triangle ABC$, за кој $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AB}$. Докажи, дека допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната BC, средината на страната AB и средината на симетралата на аголот во темето C лежат на една права.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека $CL,\ L\in AB$ е симетралата на $\measuredangle ACB$, а P и Q се средините на AB и CL, соодветно. Бидејќи $a^2+b^2=bc<b(a+b)$, заклучуваме дека $a<b$, што значи дека $\overline{AL}>\overline{BL}$, т.е. точката P е меѓу A и L (направи цртеж). Според тоа, $\overline{PL}=\frac{c}{2}-\frac{ac}{a+b}=\frac{c(b-a)}{2(a+b)}$. Нека правата PQ ја сече страната BC во точка X. Од теоремата на Менелај за $\triangle LBC$ и правата PQ имаме

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PL}}\cdot\frac{\overline{LQ}}{\overline{QC}}\cdot\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}=1,$$

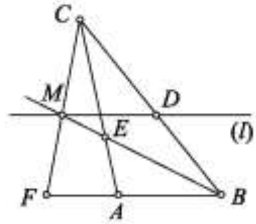
па затоа $\frac{\overline{XB}}{\overline{CX}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{PL}}=\frac{b+a}{b-a}$. Од $\overline{CX}+\overline{XB}=a$ добиваме $\overline{CX}=\frac{a(b-a)}{2b}$.

Ако T е допирната точка на впишаната кружница со страната BC, тогаш $\overline{CT}=\frac{a+b-c}{2}$. Равенството $\overline{CX}=\overline{CT}$ е еквивалентно со равенството $\frac{a(b-a)}{2b}=\frac{a+b-c}{2}$, т.е. со равенството $a^2+b^2=bc$.

3. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E на страните BC и CA, соодветно, такви, што $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$. Низ точката D повлекуваме права (l) паралелна на AB. Ако $M=(l)\cap BE$ и $F=CM\cap AB$, тогаш $\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}$. Докажи!

Решение. Да го разгледаме $\triangle ACF$ (види цртеж). Точките E,M и B се точки на Менелај за страните AC,CF и AF, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1,$$



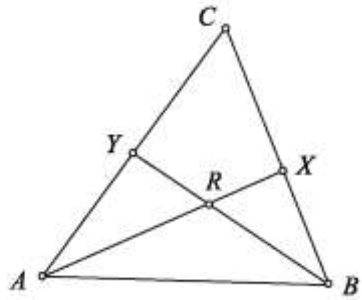
од што следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1.$$

Бидејќи $DM\parallel BF$ добиваме $\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$ и како $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AB}$ добиваме $\overline{AB}^3 = \overline{AE} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{CD}$.

4. Даден е $\triangle ABC$ и точки X и Y на страните BC и CA, соодветно. Нека $R = AX \cap BY$ и $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YP}} = p, \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}} = q$, каде $0 < p < q$. Пресметајте го односот $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$.

Решение. Да го разгледаме $\triangle AXC$. Точките B, R и Y се точки на Менелеј за страните CX, AX и AC, соодветно и по услов се колинеарни (цртеж десно). Според теоремата на Менелај имаме



$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1.$$

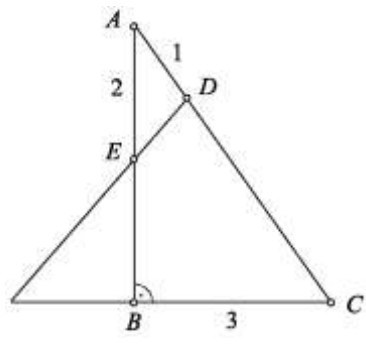
Значи,

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{XB}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -\frac{q}{p}$$

и како $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB} = -\overrightarrow{BX}$ со замена во последното равенство добиваме $\frac{\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{BX}} = \frac{q}{p}$ односно $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{p}{q-p}$.

5. Даден е правоаголен ΔABC со прав агол во темето B и страни $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 3$. Точката E е средина на страната AB, а точката D лежи на страната AC и $\overline{DA} = 1$. Нека $F = DE \cap BC$. Најдете ја должината на отсечката BF.

Решение. Да го разгледаме $\triangle ABC$ (цртеж десно). Точките D, E и F се точки на Менелај за страните CA, AB и BC, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1. \qquad (1)$$

Од условот на задачата наоѓаме

$$\overline{FC} = \overline{FB} + \overline{CB} = \overline{FB} + 3,$$

$$\overline{DA} = 1 \text{ и } \overline{AE} = \overline{EB} = 2.$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува

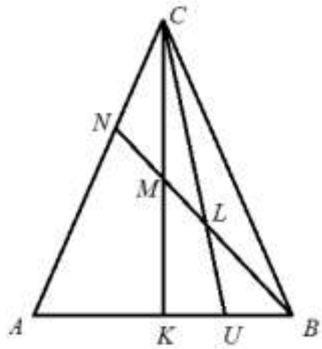
$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = 5.$$

Според тоа, $\overline{CD} = \overline{CA} - \overline{DA} = 4$ и ако замениме во (1) после средувањето наоѓаме $\overline{FB} = 1$.

6. Дадена е отсечка AB и нејзината средна точка K. На нормалата на AB повлечена низ K избрана е произволна точка C, различна од K. Нека N е пресечната точка на AC со правата што минува низ B и средината на отсечката CK. Нека U е пресечната точка на AB со правата што минува низ C и средината L на отсечката BN. Докажи дека односот на плоштините на триаголниците CNL и BUL не зависи од изборот на точката C.

Решение. Нека ја означиме со M средината на отсечката CK. Од теорема на Менелај за триаголникот AKC и правата BN имаме

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{BK}}\cdot\frac{\overline{KM}}{\overline{MC}}=1.$$



Од ова добиваме $\overline{NA}=2\overline{NC}$, од што следи дека $\overline{AC}=3\overline{NC}$. Следува $P_{BNC}=\frac{1}{3}P_{ABC}$. Од теоремата на Менелај за триаголникот ABN и правата CU имаме

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}}\cdot\frac{\overline{BL}}{\overline{LN}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{CA}}=1.$$

Па добиваме $\overline{AU}=3\overline{UB}$. Значи U е средина на отсечката BK. Следува дека $P_{BUC}=\frac{1}{4}P_{ABC}$. Нека $x=P_{CNL}$ и $y=P_{BLU}$. Бидејќи L е средина на BN, имаме $P_{BLC}=x$. Сега

$$x+y=P_{BLC}+P_{BLU}=P_{BUC}=\frac{1}{4}P_{ABC},$$

од друга страна

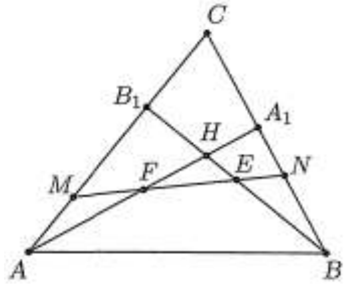
$$2x=P_{CNL}+P_{BLC}=P_{BNC}=\frac{1}{3}P_{ABC}.$$

Ако ги поделиме овие две равенства, добиваме $\frac{1}{2}+\frac{y}{2x}=\frac{3}{4}$, од каде $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$, од што се добива бараното тврдење.

7. Даден е $\triangle ABC$. Низ средините F и E на висините AA_1 и BB_1 е повлечена права, која ги сече правите AC и BC во точките M и N, соодветно. Докажи, дека правата низ темето C и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ја полови отсечката MN.

Решение. Доволно е да докажеме дека $P_{MOC}=P_{NOC}$. Имаме

$$P_{MOC}:P_{NOC}=\frac{\frac{\overline{CM}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BH}}{4}}{\frac{\overline{CN}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AH}}{4}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}.$$



Од друга страна од теоремата на Менелај за $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ добиваме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NA_1}}\cdot\frac{\overline{A_1F}}{\overline{FA}}=1 \text{ и } \frac{\overline{B_1M}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EB_1}}=1,$$

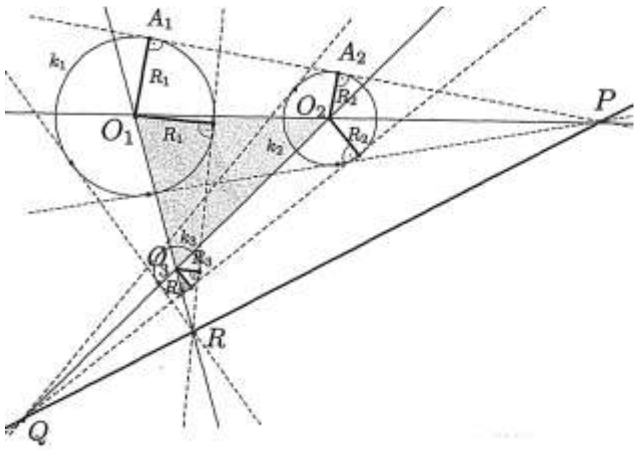
т.е. $\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{A_1N}}{\overline{AM}}$ и $\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{B_1M}}$, соодветно. Според тоа,

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{A_1N}+\overline{BN}}{\overline{B_1M}+\overline{AM}}=\frac{\overline{A_1B}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}},$$

од каде следува дека $P_{MOC}=P_{NOC}$.

8. Во рамнината се дадени кружници k_1,k_2,k_3. Надворешните заеднички тангенти на k_1 и k_2 се сечат во точката P, на k_2 и k_3 се сечат во точката Q и на k_3 и k_1 се сечат во точката R. Докажи, дека точките P,Q,R се колинеарни.

Решение. Нека O_1,O_2,O_3 се центрите на кружниците k_1,k_2,k_3, соодветно. Правата O_1O_2 ја содржи точката P бидејќи е симетрала на аголот кој го формираат заедничките танегенти на кружниците k_1 и k_2. Аналогно правата O_2O_3 ја содржи точката Q и правата O_1O_3 ја содржи точката R. Нека едната од заедничките тангенти на кружниците k_1 и k_2 ги допира овие кружници во точките A_1 и A_2, соодветно. Триаголниците PA_1O_1 и PA_2O_2 се слични, бидејќи се правоаголни и имаат еден заеднички остар агол. Од сличноста следува $\frac{\overrightarrow{O_1P}}{\overrightarrow{PO_2}}=-\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_2A_2}}=-\frac{R_1}{R_2}$, каде R_1 и R_2 се радиусите на пружниците k_1 и k_2, соодветно.



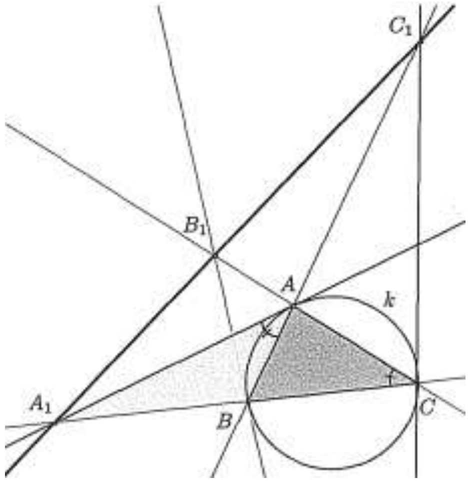
Аналогно се докажува дека $\frac{\overrightarrow{O_2Q}}{\overrightarrow{QO_3}}=-\frac{R_2}{R_3}$ и $\frac{\overrightarrow{O_3R}}{\overrightarrow{RO_1}}=-\frac{R_3}{R_1}$. Ако ги помножиме последните три равенства, добиваме

$$\frac{\overrightarrow{O_1P}}{\overrightarrow{PO_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{O_2Q}}{\overrightarrow{QO_3}}\cdot\frac{\overrightarrow{O_3R}}{\overrightarrow{RO_1}}=(-\frac{R_1}{R_2})\cdot(-\frac{R_2}{R_3})\cdot(-\frac{R_3}{R_1})=-1,$$

па од теоремата на Менелај применета на $\triangle O_1O_2O_3$ и точките P,Q,R, следува дека точките P,Q и R се колинеарни.

9. Тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ повлечена во темето A ја сече правата BC во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1. Докажи, дека точките A_1,B_1,C_1 се колинеарни.

Решение. Имаме $\measuredangle A_1AB = \measuredangle ACB$ како тангентен агол и периферен агол над тетивата AB. Според тоа, $\triangle A_1AB \sim \triangle A_1CA$ ($\measuredangle A_1AB = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle AA_1B = \measuredangle AA_1C$). Од оваа сличност следува



$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AC}} \text{ и } \frac{\overline{A_1C}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}} .$$

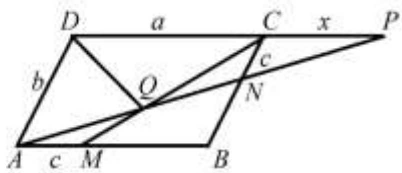
Ако ги поделиме последните две равенства добиваме $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$, па затоа $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = -\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Аналогно се докажува дека $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -\frac{\overline{CA}^2}{\overline{BC}^2}$ и $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{V_1B}} = -\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$. Ги множиме последните три равенства и добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{V_1B}} = (-\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}) \cdot (-\frac{\overline{CA}^2}{\overline{BC}^2}) \cdot (-\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}) = -1 .$$

Конечно, од теоремата на Менелај применета на $\triangle ABC$ и точките A_1, B_1, C_1 следува дека точките A_1, B_1, C_1 се колинеарни.

10. Во паралелограм $ABCD$ на страните AB и BC избрани се точки M и N соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{NC}$. Нека $Q = AN \cap MC$. Докажи, дека DQ е симетрала на $\measuredangle ADC$.

Решение. *Прв начин*. Нека точката P е пресек на правите CD и AN. Ако DQ е симетрала на $\measuredangle ADP$, тогаш DQ е симетрала на $\measuredangle ADC$. Затоа доволно е да се докаже дека DQ е симетрала на $\measuredangle ADP$.



Да ги воведеме ознаките

$$\overline{AB} = \overline{DC} = a, \overline{AD} = \overline{BC} = b , \ \overline{AM} = \overline{CN} = c , \ \overline{CP} = x .$$

Од $\measuredangle PAD = \measuredangle PNC$ и $\measuredangle ADP = \measuredangle NCP$ следува дека $\triangle APD \sim \triangle NPC$, па затоа $\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}$, т.е. $\frac{a+x}{b} = \frac{x}{c}$. Значи, $x = \frac{ac}{b-c}$. Понатаму, $\triangle AMQ \sim \triangle PCQ$, па затоа $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AM}}$, т.е. $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{x}{c} = \frac{a}{b-c}$. Сега,

$$\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = x + a = \frac{ac}{b-c} + a = \frac{ab}{b-c} ,$$

па затоа

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{ab}{b-c}}{b} = \frac{a}{b-c} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} .$$

Конечно, од последното равенство следува дека DQ е симетрала на $\measuredangle ADP$.

Втор начин. Да ја продолжиме DQ до пресекот со AB и нека тоа е точката T (направи цртеж). Од теоремата на Менелај применета на точките A, Q, N и $\triangle CMB$ следува

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{QC}} = 1 .$$

Бидејќи $\overline{AM} = \overline{NC}$, од последното равенство добиваме $\overline{NB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MQ}}{\overline{QC}}$. Бидејќи $AB \parallel DC$, важи $\measuredangle ATD = \measuredangle TDC$, па затоа доволно е да докажеме дека $\measuredangle ATD = \measuredangle ADT$, т.е. доволно е да докажеме дека $\triangle ATD$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AD} = \overline{AT} = \overline{BC}$, а бидејќи $\overline{AM} = \overline{NC}$ доволно е да докажеме дека $\overline{NB} = \overline{MT}$. Бидејќи $\measuredangle MTD = \measuredangle CDT$ и $\measuredangle TQM = \measuredangle DQC$ имаме $\triangle MQT \sim \triangle QDC$. Од сличноста следува $\frac{\overline{MT}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{QC}}$, па затоа

$$\overline{MT} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{MQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MQ}}{\overline{QC}} = \overline{NB} ,$$

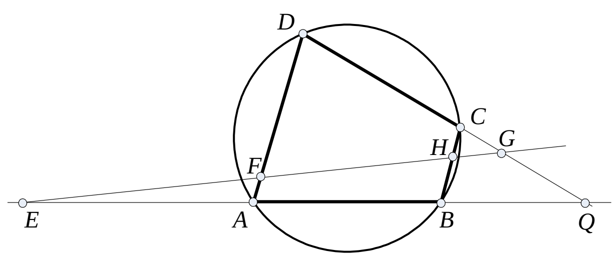
што и требаше да се докаже.

11. Нека е дадена фиксна кружница k и три колинеарни точки E, F и G така што E и G лежат надвор од кружницата и F лежи внатре во кружницата. Докажи дека ако $ABCD$ е произволен четириаголник, впишан во кружницата k таков што продолженијата на страните AB, AD и DC минуваат низ E, F и G соодветно, тогаш неговата страна BC минува низ фиксна точка, колинеарна со E, F и G, која што не зависи од четириаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $ABCD$ е таков четириаголник. Да забележиме дека, од условот на задачата, правата EG ја сечи страната BC во внатрешна точка. Да ја означиме таа точка со H. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Правите AB и CD не се паралелни.

Нека тие се сечат во точка Q. Од теоремата на Менелај за триаголникот EQG и правата CB и DA имаме



$$\frac{\overline{QC}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BQ}} = 1 ,$$

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{DG}} \cdot \frac{\overline{GF}}{\overline{FE}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{AQ}} = 1 .$$

Ако ги помножиме последните две равенства и искористеме дека

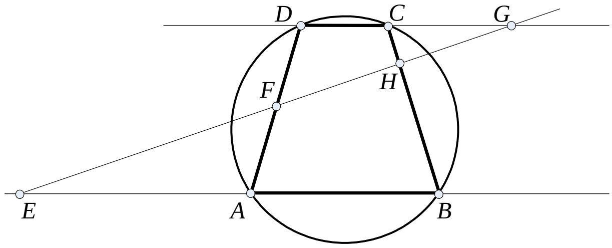
$$\overline{QC} \cdot \overline{QD} = \overline{BQ} \cdot \overline{AQ} ,$$

бидејќи тоа е степенот на точката Q во однос на кружницата k, добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{CG}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{HE}} \cdot \frac{\overline{GF}}{\overline{DG}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{FE}} = 1$. Односно

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{CG} \cdot \overline{DG}}{\overline{EB} \cdot \overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{GF}} \qquad (1)$$

Да забележиме дека $\overline{CG}\cdot\overline{DG}$ и $\overline{EB}\cdot\overline{EA}$ се степените на точките G и E во однос на кружницата k, соодветно и тие не зависат од изборот на четириаголникот $ABCD$. $\overline{FE}$ и $\overline{GF}$ јасно е дека не зависат од изборот на четириаголникот $ABCD$.

Случај 2. Правите AB и CD се паралелни.



Јасно, $\triangle GCH \sim \triangle EBH$ и $\triangle GFD \sim \triangle EFA$. Од сличноста, имаме

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{EH}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{EB}},\ \frac{\overline{EA}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}.$$

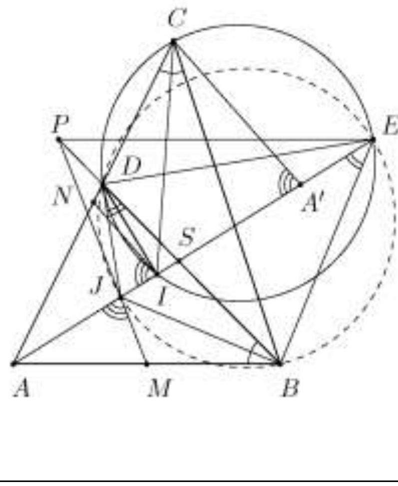
Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме $\frac{\overline{GH}}{\overline{EH}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{EB}}\cdot\frac{\overline{GD}}{\overline{GF}}$, односно

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{HE}}=\frac{\overline{CG}\cdot\overline{DG}}{\overline{EB}\cdot\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{GF}}, \tag{2}$$

што е во сушност, исто како во првиот случај.

Заклучуваме дека страната BC ја сечи правата EG во точка H за која важи (1) (што е исто со (2)). Бидејќи E и G лежат надвор од кружницата и F лежи внатре во кружницата и продолженијата на страните AB, AD и DC минуваат низ E, F и G соодветно, ако $ABCD$ е произволен четириаголник кој го исполнува условот на задачата, точката H што се добива како пресек на правата EG и страната BC мора да лежи помеѓу F и H. Од ова и (1) (односно (2)) следува дека точката H е единствена, односно не зависи од изборот на четириаголникот $ABCD$.

12. Даден е $\triangle ABC$, таков што $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и точка $D \in AC$ таква што $\measuredangle ABD = \measuredangle ACB$. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и E е втората пресечна точка на правата AI и кружницата опишана околу $\triangle CDI$. Нека P е пресечната точка на правата BD и правата низ E, паралелна на AB. Нека J е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABD$ и точката A' е симетрична на A во однос на I. Конечно, нека правите JP и $A'C$ се сечат во точка Q. Докажи, дека $\overline{QJ}=\overline{QA'}$.



Решение. Ќе докажеме, дека правата PJ минува низ средината на страната AB. Нека

$$PJ \cap AB = \{M\} \text{ и } BP \cap AI = \{S\}.$$

Од теоремата на Менелај за $\triangle ABS$ и правата PJ имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{PS}}\cdot\frac{\overline{SJ}}{\overline{JA}}=1.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PS}}\cdot\frac{\overline{SJ}}{\overline{JA}}=1.$$

Од својството на симетралата следува $\frac{\overline{BS}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SJ}}{\overline{JA}}$. Бидејќи $\measuredangle JBD=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$ и $\measuredangle DEI=\measuredangle DCI=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$, следува дека точките J,B,E и D лежат на една кружница. Тогаш

$$\measuredangle BEJ=\measuredangle BDJ=\frac{1}{2}\measuredangle ABC\,.$$

Но, $AB\,||\,PE$, па затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle BEP&=\measuredangle BEJ+\measuredangle PEA\\&=\measuredangle BEJ+\measuredangle EAB\\&=90^\circ-\frac{1}{2}\measuredangle ACB.\end{aligned}$$

Освен тоа, од $AB\,||\,PE$ и

$$\measuredangle EPB=\measuredangle PBA=\measuredangle ACB$$

следува

$$\measuredangle PBE=180^\circ-\measuredangle ACB-(90^\circ-\frac{1}{2}\measuredangle ACB)=90^\circ-\frac{1}{2}\measuredangle ACB\,.$$

Покажавме дека $\measuredangle PBE=\measuredangle PEB$, од каде следува дека $\overline{PB}=\overline{PE}$. Од последното равенство и од $AB\,||\,PE$ добиваме $\frac{\overline{BS}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{PE}}$. Оттука, и од претходно изнесеното следува дека $\overline{AM}=\overline{BM}$.

Нека N е средината на AC. Бидејќи $\triangle ABC\sim\triangle ADB$, имаме $\measuredangle AJM=\measuredangle AIN$. Но, $\measuredangle AIN=\measuredangle\measuredangle AA'Q$ и точките M,J,P и Q лежат на една права добиваме дека $\measuredangle QJA'=\measuredangle QA'J$, па затоа $\overline{QJ}=\overline{QA'}$.

13. Дадени се кружници k_1 и k_2 со центри O_1 и O_2 и радиуси R_1 и R_2 такви што $R_1=4, R_2=16$ и $\overline{O_1O_2}=25$. Кружницата k ја допира k_1 во точката A и ја допира k_2 во точката B, при што k_1 е внатрешна за k, а k_2 е надворешна за k.

а) Докажи дека отсечката AB минува низ постојана точка која не зависи од кружницата k.

б) Ако P и Q се пресечните точки на k_1 и k_2 со O_1O_2, при што O_1 е меѓу P и Q, а Q е меѓу O_1 и O_2, докажи дека точките P,A,Q и B лежат на една кружница.

в) Определи ја минималната можна вредност на $\overline{AB}$ кога кружницата k се менува.

Решение. а) Нека $O_1O_2\cap AB=S$, направи цртеж. Ќе докажеме дека S не зависи од изборот на k. Нека O_3 е центарот на k. Од теоремата на Менелај за $\triangle O_1O_2O_3$ и правата AB следува

$$\frac{\overline{O_3B}}{\overline{BO_2}}\cdot\frac{\overline{O_2S}}{\overline{SO_1}}\cdot\frac{\overline{O_1A}}{\overline{AO_3}}=1$$

и бидејќи $\overline{O_3B}=\overline{O_3A}$ добиваме

$$\frac{\overline{O_2S}}{\overline{SO_1}}=\frac{\overline{O_2B}}{\overline{AO_1}}=\frac{R_2}{R_1}=4\,.$$

Според тоа, S е постојана точка и од $\overline{O_1O_2} = 25 = \overline{O_1S} + \overline{SO_2}$ добиваме $\overline{O_1S} = 5$, $\overline{SO_2} = 20$.

б) Ако $\measuredangle O_1O_3O_2 = x$ и $\measuredangle O_1O_2O_3 = y$, тогаш $\measuredangle AO_1S = x + y$. Бидејќи $\triangle O_1AP$ е рамнокрак имаме $\measuredangle APS = \frac{x+y}{2}$. Од друга страна, бидејќи $\triangle AO_3B$ и $\triangle BO_2Q$ се рамнокраки, важи $\measuredangle SBO_3 = 90^\circ - \frac{x}{2}$ и $\measuredangle QBO_2 = 90^\circ - \frac{y}{2}$, па затоа $\measuredangle SBQ = \frac{x+y}{2}$. Оттука $\measuredangle APS = \measuredangle SBQ$, т.е. околу четириаголникот $PBQA$ може да сеопише кружница.

в) Отсечките PQ и AB се тетиви на иста кружница, па затоа $\overline{SP} \cdot \overline{SQ} = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Од друга страна $\overline{SP} \cdot \overline{SQ} = (\overline{SO_1} + R_1)(\overline{SO_2} - R_2) = 9 \cdot 4 = 36$. Од неравенството

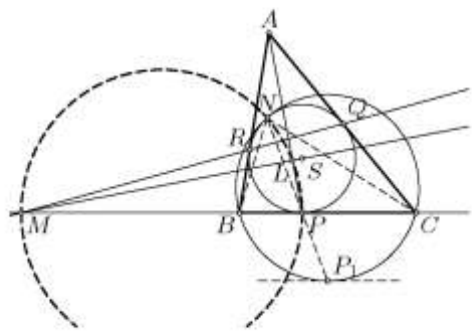
$$\overline{AB} = \overline{SA} + \overline{SB} \geq 2\sqrt{\overline{SA} \cdot \overline{SB}} = 2\sqrt{\overline{SP} \cdot \overline{SQ}} = 12,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\overline{SA} = \overline{SB}$) следува дека минималната вредност на $\overline{AB} = \overline{SA} + \overline{SB}$ е 12, при што знак за равенство важи ако и само ако $\overline{SA} = \overline{SB}$.

Останува да докажеме дека постои кружница за која $\overline{SA} = \overline{SB}$. Нека точката $A \in k_1$ е таква што $\overline{SA} = 6$. Бидејќи степенот на S во однос на k_1 е еднаков на $\overline{SO_1}^2 - R_1^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ и $\overline{SA}^2 = 36 > 9$, лесно се гледа дека постои кружница k која минува низ A и го задоволува условот на задачата. Тогаш $\overline{SB} = \sqrt{\overline{SP} \cdot \overline{SQ}} = \overline{SA}$.

14. Нека k е впишаната кружница во разностраниот триаголник ABC и S е нејзин центар. Кружницата k ги допира страните BC, CA, AB во точките P, Q, R, соодветно. Правата QR ја сече правата BC во точката M. Нека кружницата која минува низ точките B и C ја допира k во точката N. Опишаната кружница околу $\triangle MNP$ ја сече правата AP во точката L, различна од P. Докажи, дека точките S, L и M се колинеарни.

Решение. Разгледуваме хомотетија со центар N која кружницата k ја пресликува во кружницата BCN и нека притоа точката P се пресликува во точка P_1. Тангентата на кружницата BCN во точката P_1 е паралелна со тангентата на кружницата k во точката P, т.е. правата BC, што значи дека P_1 е средина на BC на кружницата BCN. Значи, NP е симетрала на $\measuredangle CNB$,



па затоа $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$. Уште повеќе, од теоремата на Менелај следува

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}},$$

па затоа NM е надворешна симетрала на $\measuredangle CNB$. Според тоа, N лежи на кружницата над дијаметарот MP, а L е подножје на нормалата повлечена од M на AP. Останува да докажеме дека $MS \perp AP$.

Условот $MS \perp AP$ е еквивалентен на равенството $\overline{MP}^2 + \overline{AS}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{PS}^2$. Последното равенство следува од низата равенства

$$\overline{MP}^2 + \overline{AS}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PS}^2 + \overline{AR}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{AQ}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AQ}^2$$
$$= \overline{MA}^2 + \overline{SQ}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{PS}^2,$$

при што во последното равенство искористивме дека $MQ \perp AS$.

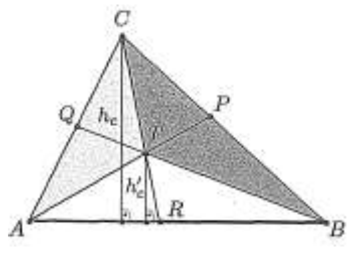
2. ТЕОРЕМА НА ЧЕВА

1. (Теорема на Чева). Нека P, Q, R се точки на правите BC, CA, AB определени со страните на триаголникот ABC. Докажи дека правите AP, BQ, CR се сечат во една точка ако и само ако

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1. \tag{1}$$

Решение. Нека правите AP, BQ, CR се сечат во точката T. Нека h_c и $h_c^{'}$ се должините на нормалите повлечени од точките C и T на правата AB, соодветно (цртеж десно). Имаме

$$P_{\vartriangle ACR} = \frac{\overline{AR} \cdot h_c}{2},\ P_{\vartriangle BCR} = \frac{\overline{BR} \cdot h_c}{2},$$
$$P_{\vartriangle ATR} = \frac{\overline{AR} \cdot h_c^{'}}{2},\ P_{\vartriangle BTR} = \frac{\overline{BR} \cdot h_c^{'}}{2}.$$



Според тоа,

$$P_{\vartriangle CAT} = P_{\vartriangle ACR} - P_{\vartriangle ATR} = \frac{\overline{AR} \cdot (h_c - h_c^{'})}{2} \text{ и}$$
$$P_{\vartriangle BCT} = P_{\vartriangle BCR} - P_{\vartriangle BTR} = \frac{\overline{BR} \cdot (h_c - h_c^{'})}{2}.$$

Бидејќи векторите $\overrightarrow{AR}$ и $\overrightarrow{RB}$ се колинеарни и истонасочени добиваме

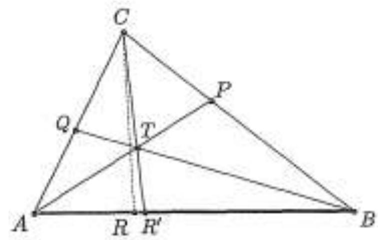
$$\frac{P_{\vartriangle CAT}}{P_{\vartriangle BCT}} = \frac{\frac{\overline{AR} \cdot (h_c - h_c^{'})}{2}}{\frac{\overline{BR} \cdot (h_c - h_c^{'})}{2}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}.$$

Аналогно се докажува дека $\frac{P_{\vartriangle ABT}}{P_{\vartriangle CAT}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ и $\frac{P_{\vartriangle BCT}}{P_{\vartriangle ABT}} = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}$. Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{P_{\triangle ABT}}{P_{\triangle CAT}}\cdot\frac{P_{\triangle BCT}}{P_{\triangle ABT}}\cdot\frac{P_{\triangle CAT}}{P_{\triangle BCT}}=1,$$

т.е. точно е равенството (1).

Обратно, нека P,Q,R на страните $BC,CA,$ AB се такви што важи (1). Нека праите AP и BQ се сечат во точката T и нека правата CT ја сече страната AB во точката R' (цртеж десно). Тогаш точките P,Q,R' припаѓаат на страните BC,CA,AB и се такви што правите $AP,$ BQ,CR' се сечат во точката T. Затоа од претходно докажаното следува дека $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}=1$. Од последното равенство и од (1) следува дека $\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}}=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Понатаму, на дадена отсечка постои единствена точка која таа отсечка ја дели во даден однос, па од последното равенство следува дека $R\equiv R'$, што значи дека правите AP,BQ,CR се сечат во една точка.



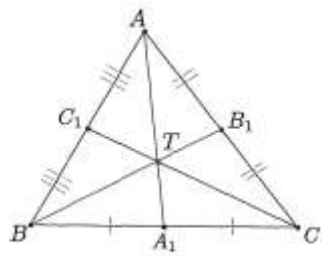
2. Тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка (тежиште на триаголникот). Докажи!

Решение. а) Нека A_1,B_1,C_1 се средините на страните BC,CA,AB на триаголникот ABC (цртеж десно). Тогаш

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}=1,\ \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=1,\ \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=1,$$

т.е.

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=1,$$

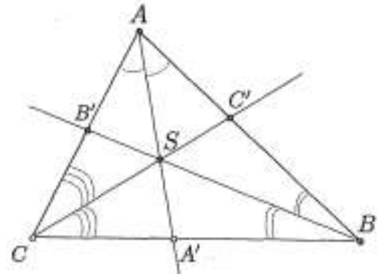


па од теоремата на Чева следува дека тежишните линии AA_1,BB_1,CC_1 се сечат во една точка.

3. Симетралите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една точка (центар на впишаната кружница во триаголникот). Докажи!

Решение. Нека A',B',C' се точките во кои симетралите на аглите во темињата A,B,C ги сечат страните BC,CA,AB (цртеж десно). Од теоремата за симетралата на агол следува

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}},\ \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},\ \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}.$$



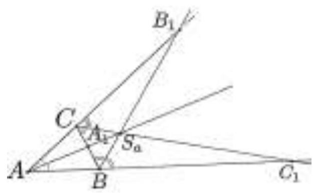
Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека симетралите на внатрешните агли на триаголникот се сечат во една точка.

4. Симетралата на еден внатрешен агол на триаголникот и симетралите на преостанатите два надворешни агли се сечат во една точка (центар на припишана кружница на триаголникот). Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да ја разгледуваме само симетралата на внатрешниот агол во темето A. Нека A_1, B_1, C_1 се пресечните точки на симетралите на внатрешниот агол во темето A и симетралите на надворешните агли во темињата B и C со правите BC, AC, AB (цртеж десно). Од



теоремата за симетралата на аголот во темето A следува $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$ и теоремата за сметралата на надворешен агол следува $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$, Ако ги помножиме последните три равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}=1.$$

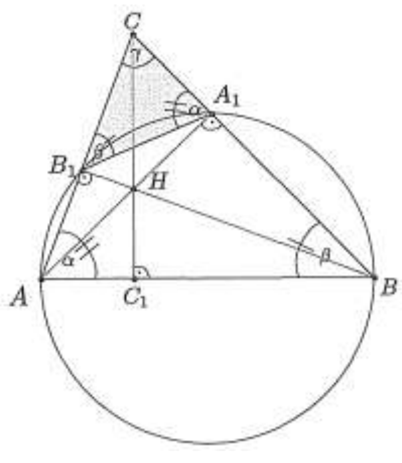
Конечно, од теоремата на Чева следува дека симетралата на внатрешниот агол и симетралите на другите два надворешни агли се сечат во една точка.

5. Висините на триаголникот се сечат во една точка (ортоцентар на триаголникот). Докажи!

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата A, B, C кон страните BC, CA, AB (цртеж десно). Од

$$\measuredangle AB_1B=\measuredangle AA_1B=90^\circ$$

следува дека четириаголникот BA_1B_1A е тетивен. Затоа $\measuredangle CB_1A_1=\measuredangle ABC$. Триаголниците ABC и A_1B_1C имаат еден заеднички агол и еден пар еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$. Аналогно се



докажува дека $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ и $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$. Ако ги искористиме претходните равенства добиваме

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=1.$$

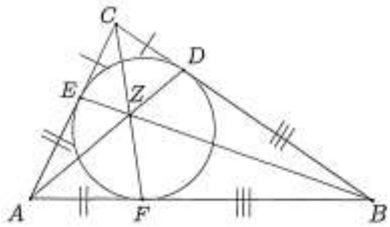
Конечно, од теоремата на Чева следува дека висините на триаголникот се сечат во една точка.

6. Ако вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно, тогаш правите AD, BE, CF се сечат во една точка (точка на Жергон на триаголник). Докажи!

Решение. Заради еднаквоста на тангентните отсечки на вписаната кружница важи $\overline{CD}=\overline{CE}, \overline{BD}=\overline{BF}, \overline{AF}=\overline{AE}$ (цртеж десно). Оттука следува

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{BD}}=1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека правите AD, BE, CF се сечат во една точка.



7. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ така што $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Нека V е пресекот на симетралата на аголот кај темето A со страната BC и D е подножјето на висината од спуштена од темето A кон страната BC. Ако E и F се пресечните точки на опишаната кружница на $\triangle AVD$ со страните CA и AB соодветно, докажи дека AD, BE и CF се сечат во иста точка.

Решение. Имаме $\measuredangle ADV=90^\circ$ па затоа точките A, D, V, E, F лежат на иста кружница и $\measuredangle BFV=180^\circ-\measuredangle AFV=90^\circ$, $\measuredangle CEV=180^\circ-\measuredangle AEV=90^\circ$. Значи, $\triangle BFV\sim\triangle BDA$ и $\triangle CEV\sim\triangle CDA$, од каде добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} \text{ и } \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \qquad (1)$$

Но,

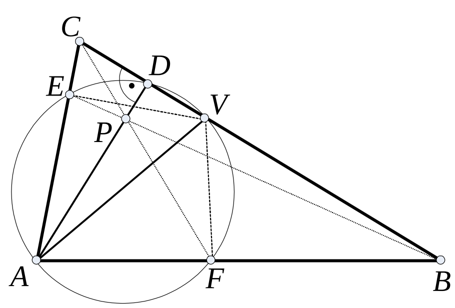
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{VC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

т.е.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \qquad (3)$$



Исто така $\measuredangle FAV=\measuredangle VAE$ па следува

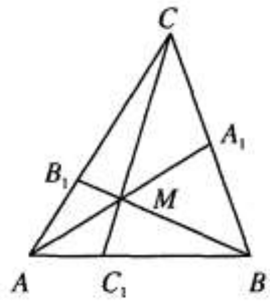
$$\overline{AE}=\overline{AF}\ . \tag{4}$$

Сега од (3) и (4) имаме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=1\,.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека AD, BE и CF се сечат во иста точка.

8. Нека M е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AM, BM, CM ги сечат страните BC, CA, AB во точките A_1, B_1, C_1, соодветно така што $P_{CB_1M}=2P_{AC_1M}$. Докажи дека точката A_1 е средина на страната BC ако и само ако $P_{BA_1M}=3P_{AC_1M}$.



Решение. Нека A_1 е средината на страната BC. Од теоремата на Чева следува дека $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=1$.

Оттука добиваме , т.е. $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{B_1A}}{\overline{CB_1}}$, т.е. $B_1C_1 \parallel BC$, па затоа

$$P_{BC_1M}=P_{CB_1M}=2P_{AC_1M} \text{ и } P_{AB_1M}=P_{AC_1M}\,.$$

Тогаш

$$\frac{1}{3}=\frac{P_{AC_1M}}{P_{AMC}}=\frac{\overline{C_1M}}{\overline{MC}}=\frac{P_{BC_1M}}{P_{BMC}}=\frac{2P_{AC_1M}}{2P_{BA_1M}}$$

па затоа $P_{BA_1M}=3P_{AC_1M}$.

Обратно, нека $P_{AC_1M}=1, P_{CB_1M}=2$ и $P_{BA_1M}=3$, $P_{BC_1M}=x$, $P_{CA_1M}=3y$ и $P_{AB_1M}=2z$. Треба да докажеме дека $y=1$. Имаме

$$\frac{1}{2(z+1)}=\frac{P_{AC_1M}}{P_{AMC}}=\frac{\overline{C_1M}}{\overline{MC}}=\frac{P_{BC_1M}}{P_{BMC}}=\frac{x}{3(y+1)}\ .$$

Аналогно

$$\frac{3}{x+1}=\frac{3y}{3(z+1)} \text{ и } \frac{2}{3(y+1)}=\frac{2z}{y+1}\,.$$

Ако ги помножиме овие неравенства добиваме $xyz=1$. Затоа $z=\frac{1}{xy}$ и од првото равенство следува дека

$$xy=\frac{3y^2+3y-2}{2}\,. \tag{1}$$

Аналогно од второто равенство добиваме дека

$$2(1+\tfrac{1}{xy})=xy+y\,. \tag{2}$$

Ако од (1) замениме во (2) го добиваме равенството

$$(3y^2+3y-2)^2+2y(3y^2+3y-2)-12y(y+1)=0\,,$$

кое е еквивалентно со равенството

$$(y-1)(3(y+2)(3y^2+3y+2)+6y^2-16)=0 .$$

Од (1) следува дека $3y^2+3y>2$ и како $y>0$ заклучуваме дека

$$3(y+2)(3y^2+3y+2)+6y^2-16>6(3y^2+3y-2)-16>8 .$$

Затоа $y=1, x=2$ и $z=\frac{1}{2}$, со што задачата е решена.

9. Три кружници $k_i(O_i,r_i), i=1,2,3, r_1<r_2<r_3$, кои не се сечат внатрешно ги допираат краците на даден агол. Едниот крак на аголот ги допира k_1 и k_3 во точките A и B соодветно, а другиот крак ја допира k_2 во точката C. Пресечните точки на AC со k_1 и k_2 се означени со K и L, соодветно, а пресечните точки на BC со k_2 и k_3 се означени со M и N, соодветно. Правите низ C кои минуваат низ $P=AM\cap BK$, $Q=AM\cap BL$, $R=AN\cap BK$ и $S=AN\cap BL$ ја сечат AB во точките X,Y,Z и T, соодветно. Докажи, дека $\overline{XZ}=\overline{YT}$.

Решение. Ако F и E се вторите допирни точки на k_1 и k_2 со краците на аголот, тогаш од

$$\overline{AF}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC}, \overline{CE}^2=\overline{CK}\cdot\overline{CA}$$

и $\overline{AF}=\overline{CE}$ следува дека $\overline{AL}=\overline{CK}$. Според тоа, $\overline{AK}=\overline{CL}$ и аналогно $\overline{CM}=\overline{BN}$. Од теоремата на Чева за точките P и S наоѓаме

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{AK}\cdot\overline{CM}}{\overline{KC}\cdot\overline{MB}} \text{ и } \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}=\frac{\overline{AL}\cdot\overline{CN}}{\overline{LC}\cdot\overline{NB}} .$$

Ако ги помножиме последните равенства добиваме $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{TB}}{\overline{AT}}$, па затоа

$$\frac{\overline{AX}+\overline{XB}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{TB}+\overline{AT}}{\overline{AT}}, \text{ т.е. } \overline{AT}=\overline{BX},$$

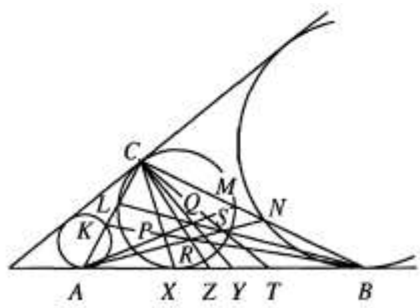
одкаде следува дека

$$\overline{AX}=\overline{BT} . \qquad (1)$$

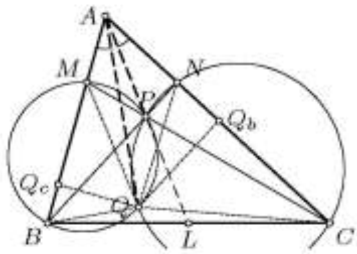
Аналогно, ако ја искористиме теоремата на Чева за точките Q и R, добиваме

$$\overline{AZ}=\overline{YB} . \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека $\overline{XZ}=\overline{YT}$.



10. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC такви, што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.



Решение. Нека правата AP ја сече BC во точка L. Од теоремата на Чева следува

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=1,$$

т.е. L е средина на страната BC. Нека L_b и Q_b (односно L_c и Q_c) се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од L и Q на AC (односно на AB).

Бидејќи $\measuredangle QBN=\measuredangle QPC=\measuredangle QNC$ и аналогно $\measuredangle QMB=\measuredangle QCN$, триаголниците BQM и NQC се слични. Од оваа сличност следува дека

$$\frac{\overline{QQ_b}}{\overline{QQ_c}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{LL_c}}{\overline{LL_b}},$$

па затоа $\triangle Q_bQQ_c\sim\triangle L_cLL_b$ и притоа важи

$$\measuredangle BAQ=\measuredangle Q_cAQ=\measuredangle Q_cQ_bQ=\measuredangle L_bL_cL=\measuredangle CAL=\measuredangle CAP.$$

11. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Кружницата k ги допира страните AD и BC соодветно во точките D и C. Кружницата k ја сече страната AB во точките K и L и притоа важи $\overline{DL}=\overline{CL}$. Нека E е средината на страната CD. Докажи, дека пресекот на дијагоналите AC и BD лежи на правата KE.

Решение. Нека E е средината на CD, O е пресекот на AC и BD, $X=AC\cap DK$ и $Y=BD\cap CK$. Од теоремата на Чева за $\triangle DKC$ следува, дека доволно е да го докажеме равенството

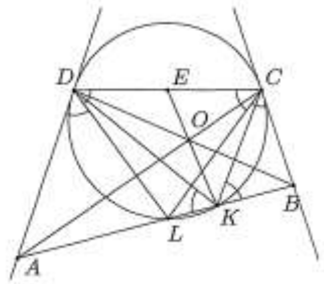
$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XK}}\cdot\frac{\overline{KY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}=1.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XK}}=\frac{\overline{YC}}{\overline{KY}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{P_{ACD}}{P_{AKC}}=\frac{P_{DCB}}{P_{DKB}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{P_{AKC}}{P_{DKB}}=\frac{P_{ACD}}{P_{DCB}}.$$

Ако искористиме, дека $\measuredangle ADC=\measuredangle BCD$ и $\measuredangle AKD=\measuredangle BKC$, последното равенство се сведува на равенството

$$\frac{\overline{AK}\cdot\overline{KC}}{\overline{DK}\cdot\overline{KB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}.\qquad(1)$$



Од $\triangle ALD\sim\triangle AKD$ следува

$$\frac{\overline{DL}}{\overline{DK}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}.\qquad(2)$$

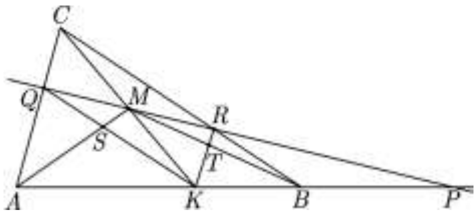
Од $\triangle BKC\sim\triangle BLC$ следува

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{CL}}=\frac{\overline{BK}}{\overline{BC}}.\qquad(3)$$

Ако ги помножиме (2) и (3) и искористиме, дека $\overline{DL}=\overline{CL}$, го добиваме равенството $\frac{\overline{KC}}{\overline{DK}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}\cdot\frac{\overline{BK}}{\overline{BC}}$, кое е еквивалентно на равенството (1).

12. Права p ги сече страните AC и BC и продолжението на страната AB од триаголник ABC соодветно во точките Q, R и P. Нека K и H се произволни точки од внатрешноста на страната AB, M и N се пресечните точки на правата p со KC и HC соодветно, а S и T се пресечните точки на отсечките AM и BN со отсечките QK и RH соодветно. Докажи дека точките S, T и P се колинеарни.

Решение. Прво ќе го докажеме случајот кога K и H се совпаѓаат. Во тој случај и M и N се совпаѓаат. Нека S' и T' се пресечните точки на CK соодветно со PS и PT. Од теоремата на Менелај за триаголникот PKM и правата AC се добива:



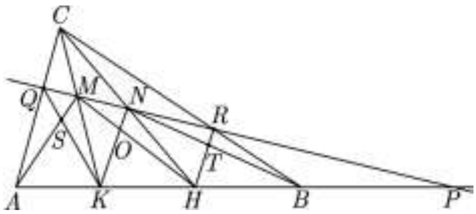
$$\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}\cdot\frac{\overline{MQ}}{\overline{QP}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{AK}}=-1\,.$$

Од теоремата на Чева за триаголникот PKM и точката S се добива: $\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}\cdot\frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{KA}}=-1$. Од овие две равенства се добива: $\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}$. Аналогно и $\frac{\overline{KC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}$. Од последните равенства се добива

$$\begin{array}{l}\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\overline{KS'}}{\overline{MS'}}-1=\frac{\overline{KT'}}{\overline{MT'}}-1\quad\Rightarrow\quad\frac{\overline{KS'}-\overline{MS'}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KT'}-\overline{MT'}}{\overline{MT'}}\quad\Rightarrow\\ \frac{\overline{KM}}{\overline{MS'}}=\frac{\overline{KM}}{\overline{MT'}}\quad\Rightarrow\overline{MS'}=\overline{MT'}\quad\Rightarrow\quad S'\equiv T'\end{array}.$$

Значи, точките S, T и P се колинеарни.

Нека, сега, точките K и H не се совпаѓаат, и нека O е пресечна точка на отсечките KN и HM. Претходно докажаното го применуваме на триаголниците KCB и ACH и добиваме дека точките S и T лежат на правата PO, па точките S, T и P се колинеарни.

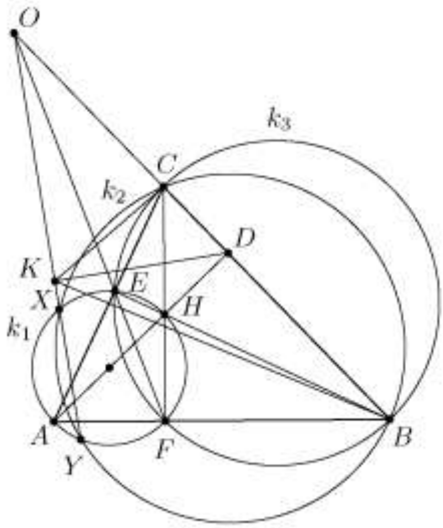


13. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Кружница која минува низ точките B и C ја сече кружницата со дијаметар AH во точките X и Y. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од A кон правата BC, а K е подножјето на нормалата повлечена од D кон правата XY. Докажи дека $\measuredangle BKD=\measuredangle CKD$.

Решение. Ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш центарот на кружницата која минува низ точките B и C и центарот на кружницата, за која AH е дијаметар лежат на симетралата на отсечката BC. Според тоа, правата XY и симетралата на отсечката BC се заемно нормални и нивната пресечна точка се совпаѓа со точката K. Освен тоа, точката D е средина на отсечката BC. Оттука $\measuredangle BKD=\measuredangle CKD$.

Нека $\overline{AB}\neq\overline{AC}$ и без ограничување на општоста можеме да земеме $\overline{AB}>\overline{AC}$. Нека E е пресечната точка на BH и AC, а F е пресечната точка на CH и AB. Бидејќи

$$\measuredangle AEH=\measuredangle AFH=90^\circ,$$



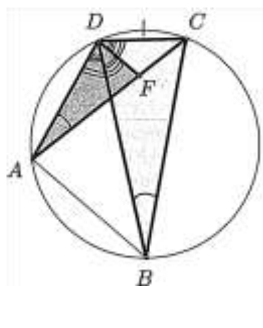
добиваме дека точките E и F лежат на кружницата k_1 со дијаметар AH. Точките X и Y исто така припаѓаат на k_1. Јасно, точките B, C, X и Y лежат на иста кружница, да ја означиме со k_2, и точките B, C, E и F лежат на иста кружница, да ја означиме со k_3. Ќе докажеме, дека правите XY, BC и EF се сешат во една точка. Навистина, ако O е пресечната точка на правите BC и EF, тогаш од степенот на точка во однос на кружницата k_3 следува $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=\overline{OF}\cdot\overline{OE}$, што значи дека O има ист степен во однос на кружниците k_1 и k_2. Според тоа, O лежи на радикалната оска XY на двете кружници.

Од теоремата на Чева следува $\frac{\overline{AF}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CE}}{\overline{FB}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{EA}}=1$, а од теоремата на Менелај следува $\frac{\overline{AF}\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CE}}{\overline{FB}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{EA}}=1$, па затоа $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}$. Нека точката C' од отсечката DO е таква што $\measuredangle BKD=\measuredangle C'KD$. Бидејќи KD е симетрала ма $\measuredangle BKC'$ и $\measuredangle DKO=90^\circ$, добиваме дека KO е симетрала на $\measuredangle EKO$. Следствено, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{KB}}{\overline{KC'}}$ и $\frac{\overline{BO}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{KB}}{\overline{KC'}}$, од каде наоѓаме $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC'}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OC'}}$. Од ова равенство и од $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}$ следува $\frac{\overline{OC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{DC'}}$. Бидејќи и двете точки се на отсечката DO, важи $C\equiv C'$. Според тоа, $\measuredangle BKD=\measuredangle CKD$.

12. ТЕОРЕМА НА ПТОЛОМЕЈ. НЕРАВЕНСТВО НА ПТОЛОМЕЈ

1. (Теорема на Птоломеј). Нека $ABCD$ тетивен четириаголник. Докажи дека

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$



Решение. Нека F е точка на дијагоналата AC таква што $\measuredangle ADB=\measuredangle FDC$. Имаме $\measuredangle ABD=\measuredangle ACD=\measuredangle FCD$ како перифериски агли над тетивата AD. Триаголниците ADB и FDC имаат два пара еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}}$, па затоа

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{CF}\cdot\overline{BD}. \qquad (1)$$

Понатаму, $\measuredangle DAF=\measuredangle DAC=\measuredangle DBC$ како перифериски агли над тетивата CD. Од друга страна од изборот на точката F следува

$$\measuredangle ADF = \measuredangle ADB + \measuredangle BDF = \measuredangle FDC + \measuredangle BDF = \measuredangle BDC.$$

Триаголниците ADF и BDC имаат два пара еднакви агли, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$, па затоа

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AF} \cdot \overline{BD}. \qquad (2)$$

Ако ги собереме (1) и (2) добиваме

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{CF} \cdot \overline{BD} + \overline{AF} \cdot \overline{BD} = (\overline{AF} + \overline{FC}) \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

што и требаше да се докаже.

2. Околу рамностраниот триаголник ABC е опишана кружница. Докажи дека за секоја точка M од лакот AB, кој не ја содржи точката C, важи $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$.

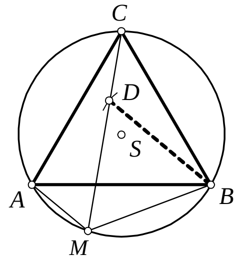
Решение. Од теоремата на Птоломеј, применета на тетивниот четириаголник $AMBC$ следува

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{MC}. \qquad (1)$$

Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$, од (1) имаме

$$a \cdot \overline{AM} + a \cdot \overline{BM} = a \cdot \overline{MC},$$

па ако поделиме со a добиваме $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$, што и требаше да се докаже.



3. Рамнокрак трапез $ABCD$ со должини на основи a и b е опишан околу кружница $K(O,r)$. Докажи, дека $2r = \sqrt{ab}$.

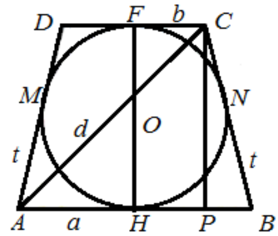
Решение. Од својствата на тангентните отсечки (види цртеж) следува

$$\overline{AM} = \overline{AH}, \overline{BN} = \overline{BH}, \overline{CN} = \overline{CF}, \overline{DF} = \overline{DM}$$

па затоа

$$2t = (\overline{BN} + \overline{CN}) + (\overline{AM} + \overline{DM})$$
$$= (\overline{BH} + \overline{AH}) + (\overline{CF} + \overline{DF}) = a + b,$$

т.е. $t = \frac{a+b}{2}$. Понатаму, околу рамнокрак трапез може



да се опише кружница, па од теоремата на Птоломеј следува дека $d^2 = t^2 + ab$. Од друга страна $\overline{AP} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, па од досега изнесеното и од Питагоровата теорема применета на $\triangle APC$ добиваме

$$(2r)^2 = d^2 - (\tfrac{a+b}{2})^2 = t^2 + ab - (\tfrac{a+b}{2})^2 = ab, \text{ т.е. } 2r = \sqrt{ab}.$$

4. Збирот на должините на катетите на правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C е еднаков на m. Над хипотенузата на $\triangle ABC$ е конструиран квадрат така што $\triangle ABC$ и квадратот се наоѓаат од различна страна на правата AB. Определи го растојанието од точката C до центарот на квадратот.

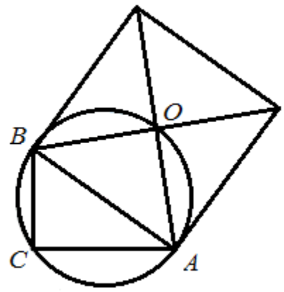
Решение. Нека O е центарот на квадратот. Бидејќи $\measuredangle AOB = 90^\circ = \measuredangle ACB$ добиваме дека четириаголникот $AOBC$ е тетивен. Од теоремата на Птоломеј следува дека

$$\overline{AB}\cdot\overline{CO}=\overline{AC}\cdot\overline{OB}+\overline{AO}\cdot\overline{CB}. \qquad (1)$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува $\overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$ и како $\overline{AO}=\overline{BO}$, добиваме дека $\overline{AO}=\overline{BO}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}$. Сега од равенството (1) следува

$$\overline{AB}\cdot\overline{CO}=\overline{AO}(\overline{AC}+\overline{CB})=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}(\overline{AC}+\overline{CB})=m\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}},$$

т.е. $\overline{CO}=\frac{m}{\sqrt{2}}$.



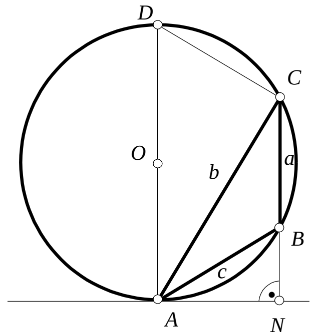
5. Тангентата на опишаната кружница околу триаголникот, повлечена во едно негово теме, е нормална на спротивната страна. Определи ја зависноста меѓу страните на тој триаголник.

Решение. Нека тангентата на опишаната кружница околу триаголникот ABC, повлечена во темето A е нормална на страната BC (цртеж десно). Нека AD е дијаметарот на кружницата. Очигледно, четириаголникот $ABCD$ е рамнокрак трапез, што значи дека $\overline{AB}=\overline{CD}=c$. Од правоаголниот триаголник ACD добиваме

$$b^2+c^2=4R^2 \qquad (1)$$

Ако за трапезот $ABCD$ ја примениме теоремата на Птоломеј добиваме

$$b^2=c^2+2aR \qquad (2)$$



Од (1) и (2) добиваме $R^2=\frac{b^2+c^2}{4}$ и $R=\frac{b^2-c^2}{2a}$, па затоа $\frac{b^2+c^2}{4}=\frac{(b^2-c^2)^2}{4a^2}$, т.е.

$$a^2(b^2+c^2)=(b^2-c^2)^2.$$

6. Даден е четириаголник $ABCD$,

$$\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{CD}=c,\ \ \overline{DA}=d,\ \overline{BD}=f,\ \overline{AC}=e$$

а) Докажи, дека $a^2+b^2+c^2+d^2\ge e^2+f^2$.

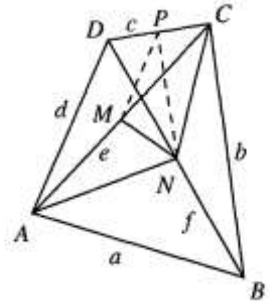
б) Ако четриаголникот $ABCD$ е тетивен, докажи дека $|a-c|\ge|e-f|$.

Решение. а) Средините на AC и BD да ги означиме со M и N, соодветно. Ако ја искористиме формулата за должината на тежишната линија, применета на $\triangle BMN$ добиваме

$$\overline{MN}^2=\frac{2\overline{MB}^2+2\overline{MD}^2-f^2}{4}.$$

Понатаму,

$$\overline{MB}^2=\frac{2a^2+2b^2-e^2}{4},\ \overline{MD}^2=\frac{2c^2+2d^2-e^2}{4}$$



и ако замениме во горното равенство добиваме

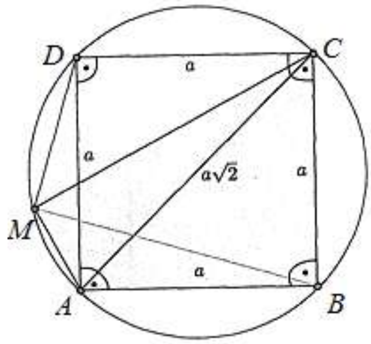
$$4\overline{MN}^2=a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\ge 0.$$

б) Од теоремата на Птоломеј имаме $ac+bd=ef$. Ако го искористиме последното равенство, тогаш равенството добиено под а) можеме да го запишеме во видот

$$(a-c)^2+(b-d)^2=(e-f)^2+4\overline{MN}^2 .$$

За да го докажеме саканото неравенство доволно е да докажеме дека $(b-d)^2 \le 4\overline{MN}^2$. Но, последното неравенство следува од неравенството на триаголник применето на $\triangle MNP$, каде P е средината на страната CD.

7. Нека точката M припаѓа на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$. Докажи дека должината на барем една од отсечките MA, MB, MC и MD е ирационален број.



Решение. Ако точката M е некое од темињата на квадратот, на пример A, тогаш тврдењето на задачата е тривијално бидејќи $\overline{AB}$ и $\overline{AC}=\overline{AB}\sqrt{2}$ не може истовремено да се рационални броеви, бидејќи тогаш и $\sqrt{2}$ би бил рационален број.

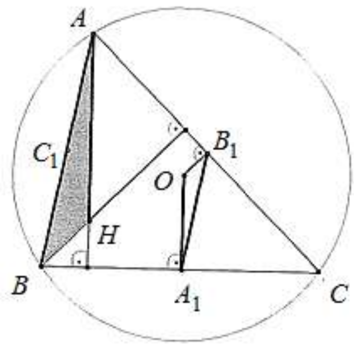
Нека претпоставиме дека точката M не е теме на квадратот. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката M припаѓа на лакот AD. Со примена на теоремата на Птоломеј на четириаголникот $ABCM$ добиваме

$$\overline{MA}\cdot\overline{BC}+\overline{MC}\cdot\overline{AB}=\overline{MB}\cdot\overline{AC} .$$

Од $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{AC}=\overline{AB}\sqrt{2}$ следува $\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB}\sqrt{2}$. Ако сите три броја $\overline{MA}, \overline{MC}$ и $\overline{MB}$ се рационални, тогаш бидејќи се различни од нула левата страна во последното равенство ќе биде рационален број, а десната стрна ќе биде ирационален број, што е противречност. Според тоа, барем една од должините $\overline{MA}, \overline{MC}$ и $\overline{MB}$ е ирационален број.

8. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и радиуси на опишаната и впишаната кружница R и r, соодветно. Докажи дека

$$\overline{AH}+\overline{BH}+\overline{CH}=2r+2R .$$



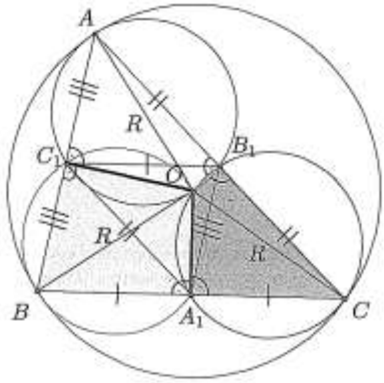
Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно и нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Отсечките AH и OA_1 се нормални на страната BC (првата е дел од висина, а втората е дел од симетрала на страна), па затоа $OA_1 \parallel AH$. Аналогно $OB_1 \parallel BH$ и $OC_1 \parallel CH$. Бидејќи $AB \parallel A_1B_1$ и $OB_1 \parallel BH$ следува $\measuredangle ABH=\measuredangle A_1B_1O$, а од $OA_1 \parallel AH$ и $AB \parallel A_1B_1$ следува $\measuredangle BAH=\measuredangle B_1A_1O$ (како агли со паралелни краци), па затоа $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1O$. Но, $\overline{AB} = 2\overline{A_1B_1}$, па затоа $\overline{BH} = 2\overline{B_1O}$. Аналогно се докажува дека $\triangle BCH \sim \triangle B_1C_1O$, од каде следува $\overline{CH} = 2\overline{C_1O}$.

Од $\measuredangle AC_1O = \measuredangle AB_1O = 90^\circ$ следува дека четириаголникот AC_1OB_1 е тетивен. Сега од теоремата на Птоломеј следува

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{OB_1} + \overline{AB_1} \cdot \overline{OC_1} = \overline{OA} \cdot \overline{B_1C_1},$$

па затоа

$$\frac{\overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{BH}}{2} + \frac{\overline{AC}}{2} \cdot \frac{\overline{CH}}{2} = R \cdot \frac{\overline{BC}}{2}. \qquad (1)$$



Аналогно и четириаголниците BA_1OC_1 и CB_1OA_1 се тетивни. Затоа од теоремата на Птоломеј на идентичен начин како погоере добиваме

$$\frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{CH}}{2} + \frac{\overline{BA}}{2} \cdot \frac{\overline{AH}}{2} = R \cdot \frac{\overline{AC}}{2} \qquad (2)$$

и

$$\frac{\overline{CA}}{2} \cdot \frac{\overline{AH}}{2} + \frac{\overline{CB}}{2} \cdot \frac{\overline{BH}}{2} = R \cdot \frac{\overline{AB}}{2}. \qquad (3)$$

Од

$$P_{\triangle ABC} = \left(\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2}\right) r$$

и

$$P_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \overline{OC_1} + \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \overline{OA_1} + \frac{\overline{CA}}{2} \cdot \overline{OB_1} = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{CH}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{AH}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} \cdot \frac{\overline{BH}}{2}$$

следува

$$\left(\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2}\right) r = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \frac{\overline{CH}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{AH}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} \cdot \frac{\overline{BH}}{2}. \qquad (4)$$

Ако ги собереме равенствата (1), (2), (3) и (4), по средувањето добиваме

$$\left(\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2}\right)(R + r) = \left(\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\overline{AH}}{2} + \frac{\overline{BH}}{2} + \frac{\overline{CH}}{2}\right),$$

па затоа $\overline{AH} + \overline{BH} + \overline{CH} = 2r + 2R$.

9. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник, таков што

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}, \quad \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} \text{ и}$$

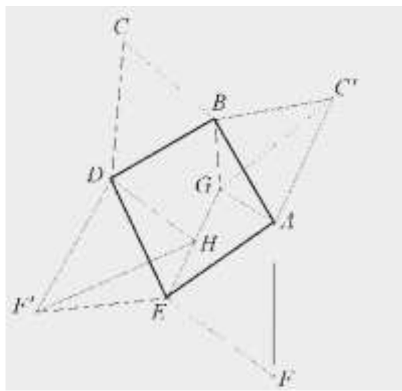
$$\measuredangle BCD = \angle EFA = 60^\circ,$$

и G и H се точки од внатрешноста на шестаголникот такви што

$$\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE} \geq \overline{CF}.$$



Решение. Забележуваме дека триаголниците BCD и EFA се рамнострани. Од $\overline{AB} = \overline{BD}$ и $\overline{AE} = \overline{ED}$ следува дека правата BE е оска на симетрија за четириаголникот $ABDE$.

Нека C' и F' се симетричните точки на C и F во однос на правата BE. Тогаш, $\triangle BCD \cong \triangle BC'A$ и $\Delta ADF' \cong \Delta EAF$. Четириаголникот $AGBC'$ е тетивен бидејќи

$$\measuredangle AGB + \measuredangle AC'B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ .$$

Од теоремата на Птоломеј добиваме дека $\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{GC'}$. Аналогно се добива дека $\overline{HE} + \overline{HD} = \overline{HF'}$. Од овде добиваме

$$\begin{aligned} \overline{CF} = \overline{C'F'} &\le \overline{C'G} + \overline{GH} + \overline{HF'} \\ &= \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE} \end{aligned} .$$

При тоа равенството важи ако и само ако точките G и H лежат на правата $C'F'$.

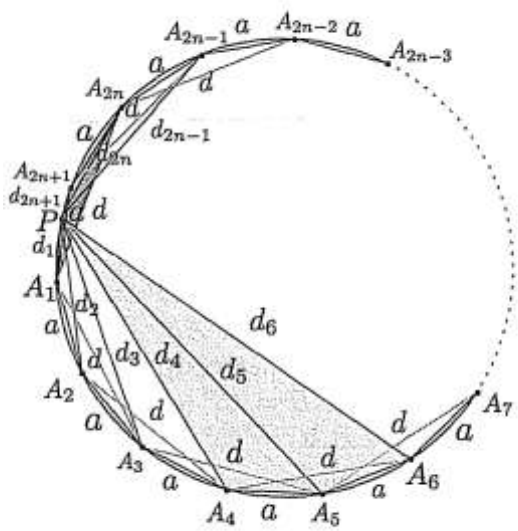
10. Нека P е произволна точка на помалиот лак A_1A_{2n+1} на правилен $(2n+1)-$аголник $A_1A_2A_3...A_{2n+1}$ и $d_1, d_2, d_3, ..., d_{2n+1}$ се растојанијата од точката P до темињата $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n+1}$, соодветно. Докажи дека

$$d_1 + d_3 + d_5 + ... + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + d_6 + ... + d_{2n} .$$

Решение. Нека должината на страната на $(2n+1)-$ аголникот е a, а d е должината на најкратката дијагонала на $(2n+1)-$ аголникот. Од теоремата на Птоломеј, применета на четириаголниците

$$PA_1A_2A_3,\ PA_2A_3A_4,\ ...,$$
$$PA_{2n+1}A_{2n}A_1,\ PA_{2n+1}A_2A_1$$

добиваме



$$d_1a + d_3a = d_2d$$
$$d_3d = d_2a + d_4a$$
$$d_3a + d_5a = d_4d$$
$$d_5d = d_4a + d_6a$$
$$.........................$$
$$d_{2n-1}a + d_{2n+1}a = d_{2n}d$$
$$d_1a + d_{2n+1}d = d_{2n}a$$
$$d_{2n+1}a + d_1d = d_2a$$

Ако ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$(a+d)(d_1 + d_3 + d_5 + ... + d_{2n+1}) = (a+d)(d_2 + d_4 + d_6 + ... + d_{2n}) ,$$

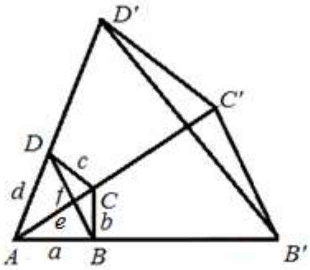
од каде следува

$$d_1 + d_3 + d_5 + ... + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + d_6 + ... + d_{2n} .$$

11 (неравенство на Птоломеј). Ако точките A, B, C и D се темиња на конвексен четириаголник, тогаш точно е неравенството

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \ge \overline{AC} \cdot \overline{BD} . \qquad (1)$$

Знак за равенство важи ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен.



Решение. *Прв начин*. Нека е даден четириаголникот $ABCD$ (цртеж десно). На полуправите AB, AC и AD соодветно избираме точки B',C и D' такви што

$$\overline{AB}\cdot\overline{AB'}=1, \overline{AC}\cdot\overline{AC'}=1 \text{ и } \overline{AD}\cdot\overline{AD'}=1.$$

Според тоа, $\overline{AB}\cdot\overline{AB'}=\overline{AC}\cdot\overline{AC'}$, односно

$$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB'}:\overline{AC'}.$$

Но, триаголниците ABC и $AB'C'$ имаат заеднички агол во темето A, па од последното равенство следува дека тие се слични. На потполно ист начин заклучуваме дека и триаголниците ADC и $AC'D'$ се слични. Затоа $\measuredangle ABC=\measuredangle AC'B'$ и $\overline{AC}:\overline{AB'}=\overline{BC}:\overline{C'B'}$. При ознаките на цртежот од последната пропорција и од $\overline{AB'}=\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{a}$ следува $\overline{C'B'}=\frac{b}{ae}$. На потполно аналоген начин докажуваме дека $\overline{C'D'}=\frac{c}{de}$ и $\overline{D'B'}=\frac{f}{ad}$. Конечно, од претходните три равенства и нареванството на триаголник применето за точките B',C' и D' добиваме $\overline{B'D'}\leq\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$, т.е. $\frac{f}{ad}\leq\frac{b}{ae}+\frac{c}{de}$, од каде следува $ef\leq ac+bd$, т.е. точно е неравенството (1).

Јасно, ако четириаголникот $ABCD$ е тетивен, тогаш од теоремата на Птоломеј следува дека во (1) важи знак за равенство.

Обратно, нека во (1) важи знак за равенство. Тоа значи дека за точките B',C' и D' важи $\overline{B'D'}=\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$, т.е. тие се колинеарни. Според тоа,

$$180^\circ=\measuredangle B'C'A+\measuredangle D'C'A=\measuredangle ADC+\measuredangle ABC,$$

од што следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

Втор начин. Нека a,b,c,d се комплексните броеви придружени во комплексната рамнина на точките A,B,C,D соодветно. Тогаш

$$(a-b)(c-d)+(b-c)(a-d)=(a-c)(b-d).$$

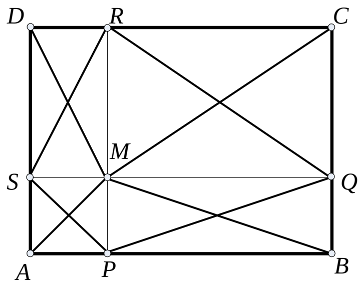
Од неравенството на триаголник за комплексни броеви го добиваме неравенството

$$|(a-b)(c-d)|+|(b-c)(a-d)|\geq|(a-c)(b-d)|,$$

т.е. неравенството

$$|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|a-d|\geq|a-c|\cdot|b-d|,$$

кое всушност е неравенството (1) запишано со помош на комплексните броеви придружени на точките $A,B,\ C,D$.



12. Нека $ABCD$ е правоаголник и M е точка од неговата внатрешност. Докажи дека

$$\overline{MA}\cdot\overline{MC}+\overline{MB}\cdot\overline{MD}\geq P_{ABCD}.$$

Решение. Низ точката M ги повлекуваме двете прави паралелни на страните на правоаголникот. Нека тие ги сечат AB,BC,CD,DA во точките P,Q,R,S, соодветно. Неравенството кое треба да се покаже е всушност неравенството на Птоломеј за четириаголникот $PQRS$.

13. Даден е $\triangle ABC$. За точката X од рамнината на триаголникот, различна од темињата на триаголникот, со A_X и B_X да ги означиме пресечните точки на симетралите на $\measuredangle AXC$ и $\measuredangle BXC$ со страните AC и BC, соодветно. За кои точки X изразот $\frac{1}{A_X C}+\frac{1}{B_X C}$ прима минимална вредност?

Решение. Од својството на симетралите и неравенството на Птоломеј следува

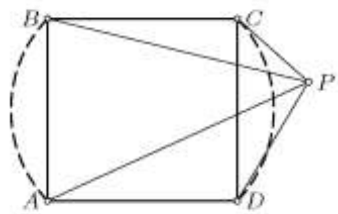
$$\frac{1}{A_X C}+\frac{1}{B_X C}=\frac{\overline{AX}+\overline{CX}}{\overline{AC}\cdot\overline{CX}}+\frac{\overline{BX}+\overline{CX}}{\overline{BC}\cdot\overline{CX}}=\frac{\overline{AX}\cdot\overline{BC}+\overline{BX}\cdot\overline{AC}+\overline{CX}\,(\overline{AC}+\overline{BC})}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CX}}$$

$$\geq\frac{\overline{CX}\cdot\overline{AB}+\overline{CX}\,(\overline{AC}+\overline{BC})}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CX}}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако X припаѓа на лакот од опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C.

14. Нека $ABCD$ е квадрат во рамнината $\mathfrak{R}$. Определи ги минималната и максималната вредност на функцијата $f:\mathfrak{R}\to\mathbb{R}$ зададена со

$$f(P)=\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{PC}+\overline{PD}}.$$



Решение. Од неравенството на Птоломеј за четириаголникот $BCPD$ следува

$$\overline{BC}\cdot\overline{PD}+\overline{BD}\cdot\overline{PC}\geq\overline{CD}\cdot\overline{PB},$$

т.е. $\overline{PD}+\overline{PC}\sqrt{2}\geq\overline{PB}$. Слично важи

$$\overline{PC}+\overline{PD}\sqrt{2}\geq\overline{PA}.$$

Со собирање на овие две неравенства добиваме $(\overline{PD}+\overline{PC})(1+\sqrt{2})\geq\overline{PA}+\overline{PB}$, т.е. $f(P)\leq 1+\sqrt{2}$. Оваа вредност се достигнува кога P е на помалиот лак CD на кружницата $ABCD$. Аналогно важи

$$(\overline{PA}+\overline{PB})(1+\sqrt{2})\geq\overline{PC}+\overline{PD},\text{ т.е. } f(P)\geq\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,$$

а оваа вредност се достигнува кога P е на помалиот лак AB на кружницата $ABCD$.

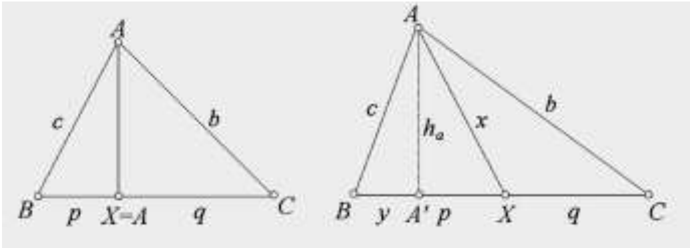
13. ТЕОРЕМА НА СТЈУАРТ

1. (Теорема на Стјуарт). Ако X е произволна точка од страната BC на триаголникот ABC, тогаш

$$\overline{AX}^2=\frac{\overline{CX}}{\overline{BC}}\overline{AB}^2+\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}\overline{AC}^2-\overline{BX}\cdot\overline{CX}.$$

Докажи!

Решение. Со a,b,c да ги означиме должините на соодветните страни, со p,q,x должините на отсечките BX,CX,AX соодветно и со A' подножјето на висината h_a од темето A. Нека претпоставиме дека A' е меѓу B и C.



Тврдењето прво ќе го докажеме во случај кога $X \equiv A'$ (цртеж лево). Од Питагоровата теорема следува $h_a^2 = b^2 - q^2$ и $h_a^2 = c^2 - p^2$. Ако првото равенство го помножиме со p, а второто со q и потоа ги собереме добиените равенства наоѓаме $h_a^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq$.

Сега нека $X \not\equiv A'$. Отсечката h_a е всина во триаголниците ABX и ABC. Без ограничување на општостра можеме да претпоставиме дека A' е меѓу B и X. Нека $\overline{BA'} = y$ (цртеж десно). Тогаш од претходно докажаното следува

$$h_a^2 = \frac{y}{p}x^2 + \frac{p-y}{p}c^2 - y(p-y) \text{ и } h_a^2 = \frac{y}{a}a^2 + \frac{a-y}{a}c^2 - y(a-y).$$

Со изедначување на десните страни на последните две равенства, по средувањето добиваме $x^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq$, што и требаше да се докаже.

Случајот кога A' не е меѓу B и C се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Нека t_A, t_B, t_C се должините на тежишните линии на $\triangle ABC$ повлечени од темињата A, B, C соодветно. Докажи, дека

$$t_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}, \quad t_B^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BA}^2}{2} - \frac{\overline{AC}^2}{4}, \quad t_C^2 = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}. \tag{1}$$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство во (1). Останатите две равенства се докажуваат аналогно.

Нека A' е средината на страната BC. Бидејќи

$$\overline{CA'} = \overline{BA'} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ и } t_A = \overline{AA'},$$

од теоремата на Стјуарт го добиваме равенството

$$t_A^2 \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{BC}}{2}$$

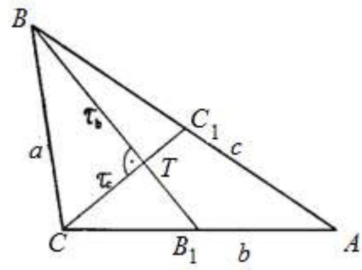
и ако скратиме со $\overline{BC}$ го добиваме равенството

$$t_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4},$$

кое требаше да го докажеме.

3. Даден е $\triangle ABC$ со страни $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$. Кој услов треба да го задоволуваат a, b и c за да тежишните линии на триаголникот повлечени од темињата B и C се заемно нормални.

Решение. За тежишните линии t_b и t_c на триаголникот важи



$4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ и $4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$.
Ако ги собереме претходните равенства добиваме

$$4(t_b^2 + t_c^2) = 4a^2 + b^2 + c^2 . \qquad (1)$$

Со τ_b и τ_c да ги означиме растојанијата од тежиштето T до темињата B и C , соодветно (цртеж десно). Тогаш,

$$t_b^2 = (\tfrac{3\tau_b}{2})^2 , t_c^2 = (\tfrac{3\tau_c}{2})^2$$

и ако замениме во равенството (1) добиваме:

$$9(\tau_b^2 + \tau_c^2) = 4a^2 + b^2 + c^2 . \qquad (2)$$

Но, $t_b \perp t_c$, па затоа $\tau_b^2 + \tau_c^2 = a^2$. Конечно, со замена во (2) наоѓаме $5a^2 = b^2 + c^2$.

4. Во триаголникот ABC $(\overline{AB} \neq \overline{BC})$ се повлечени тежишните линии AA_1, BB_1, CC_1, при што $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}}$. Докажи дека $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Нека $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $t_a = \overline{AA_1}$, $t_b = \overline{BB_1}$, $t_c = \overline{CC_1}$, тогаш, според условот на задачата важи $\frac{t_a}{c} = \frac{t_c}{a}$. Ако искористиме дека

$$t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} ,$$

добиваме:

$$\frac{t_a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b^2}{c^2} + 2 - \frac{a^2}{c^2}} , \ \frac{t_c}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}}$$

т.е.

$$\sqrt{\frac{2b^2}{c^2} + 2 - \frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{2 + \frac{2b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}} ,$$

од каде го добиваме равенството

$$(a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - 2b^2) = 0 .$$

Оттука $a^2 - c^2 = 0$ или $a^2 + c^2 - 2b^2 = 0$. Но, по услов $a \neq c$, па значи $a^2 + c^2 = 2b^2$
,
односно $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{3c^2}$, па имаме: $\frac{t_a}{c} = \frac{t_c}{a} = \frac{\sqrt{3c^2}}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Од друга страна важи:

$$\frac{\overline{BB_1}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{b} = \frac{\sqrt{3b^2}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Следствено

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е внатрешна точка на страната AB, r_1, r_2, r се радиуси на кружниците впишани во триаголниците AMC , BMC и ABC , соодветно, а ρ_1, ρ_2, ρ се радиуси на кружниците кои:

а) лежат во аголот BCA,

б) однадвор се впишани во триаголниците AMC, MBC и ABC.

Докажи дека

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{r}{\rho}.$$

Решение. Воведуваме ознаки: $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AM}=p$, $\overline{BM}=q$, $\overline{CM}=m$. Од формулите за плоштина на триаголник $P=\frac{a+b+c}{2}r$ и $P=\frac{a+b-c}{2}\rho$ добиваме

$$\frac{r}{\rho}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{r_1}{\rho_1}=\frac{b+m-p}{b+m+p} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{\rho_2}=\frac{a+m-q}{a+m+q}.$$

Според тоа, равенството кое треба да се докаже е еквивалентно на равенството

$$\frac{a+b-p-q}{a+b+p+q}=\frac{b+m-p}{b+m+p}\cdot\frac{a+m-q}{a+m+q}$$

кое може да се запише во обликот

$$pa^2+qb^2=p^2q+pq^2+pm^2+qm^2.$$

Ако замениме $p+q=c$, добиваме $pa^2+qb^2=c(pq+m^2)$, а тоа е теоремата на Стјуарт.

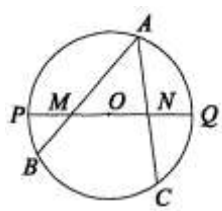
6. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ на еднакво растојание од нејзиниот центар O земени се точки M и N. Низ точката M е повлечена тетива AB, а низ точката N е повлечена тетива AC така што

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2}.$$

Определи го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N.

Решение. Нека PQ е дијаметар на кружницата на кој лежат точките M и N ($M\in PO, N\in QO$). Да означиме $x=\overline{MO}=\overline{NO}$, $0\le x\le\sqrt{5}$. Тогаш

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)=5-x^2.$$



Аналогно $\overline{NA}\cdot\overline{NB}=5-x^2$. Оттука наоѓаме

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(5-x^2)^2}.$$

Од формулата за тежишната линија AO во $\triangle MNA$ имаме

$$5=\overline{AO}^2=\frac{1}{4}(2(\overline{MA}^2+\overline{NA}^2)-4x^2), \text{ т.е.}$$

$$\overline{MA}^2+\overline{NA}^2=2(5+x^2).$$

Според тоа, бидејќи $\overline{MN}=2x$ добиваме дека

$$\frac{3}{3x^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2}=\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(5-x^2)^2}=\frac{2(5+x^2)}{(5-x^2)^2},$$

од каде наоѓаме $x^4+14x^2-15=0$, т.е. $x=1$.

7. Триаголникот ABC е таков што во рамнината постои точка P таква, што триаголниците PAB, PBC и PCA имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека

a) Ако P е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.

b) Ако P не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ да ја означиме со S.

а) Бидејќи P е внатрешна точка, од условот следува дека $P_{PAB} = \frac{S}{3}$. Според тоа, должината на висината повлечена од P во $\triangle PAB$ е еднаква на $\frac{1}{3}$ од должината на висината повлечена од C во $\triangle ABC$. Тоа значи дека P лежи на права која минува низ тежиштето G на $\triangle ABC$, која е паралелна на BC и затоа P се совпаѓа со G. Сега, од условот следува

$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) = c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a).$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$. Бидејќи

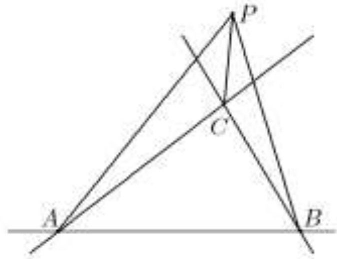
$$4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2,$$
$$4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2,$$
$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2,$$

добиваме дека $m_a \leq m_b \leq m_c$. Оттука следува

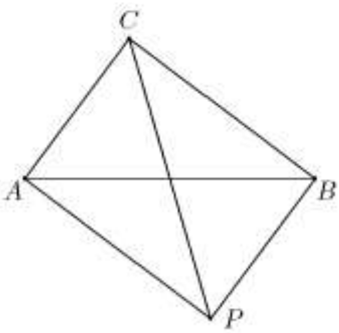
$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) \geq b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) \geq c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a),$$

при што равенства се можни само ако $a = b = c$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

b) Нека претпоставиме дека точката P лежи во некој од трите надворешни агли при темињата A, B и C (цртеж десно). Тогаш $\triangle PBC$ се содржи во $\triangle PAB$, што значи дека нивните плоштини не може да се еднакви.



Без ограничување на општоста можеме точката P да ја избереме како на цртежот лево. Ако $P_{PAB} = P_{PAC} = P_{PBC} = t$, тогаш

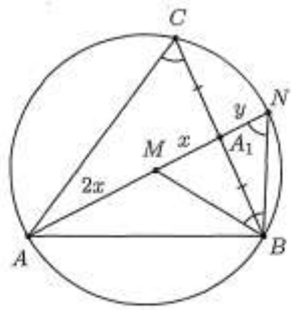


$$S = P_{PAC} + P_{PBC} - P_{PAB} = t,$$

па затоа $S = P_{PAC} = P_{PBC}$. Оттука добиваме дека висината во $\triangle ACP$ повлечена од темето P е еднаква на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B, т.е. BP е паралелна на AC. Аналогно $PA \| BC$, т.е. $PBCA$ е паралелограм. Сега од еднаквоста на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ добиваме $\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BP}$, од каде следува $\overline{PC} = \overline{AB}$, т.е. $PBCA$ е правоаголник. Според тоа, $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

8. Точката M е тежиште на $\triangle ABC$ и притоа важи $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB$. Докажи, дека

$$9\overline{AM}\cdot\overline{BM} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 .$$



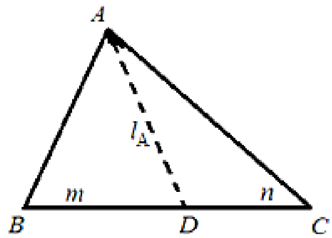
Решение. Нека M е втората пресечна точка на правата AM со кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тогаш $\measuredangle MNB = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle MBN = \measuredangle AMB - \measuredangle MNB = \measuredangle ACB$, т.е. $\overline{MB} = \overline{MN}$. Ако A_1 е средина на BC, $x = \overline{MA_1}$ и $y = \overline{A_1N}$, тогаш $\overline{AA_1}\cdot\overline{A_1N} = 3xy = \frac{\overline{BC}^2}{4}$, па затоа $xy = \frac{\overline{BC}^2}{12}$. Од формулата за тежишната линија имаме

$$9x^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)\text{, т.е. } x^2 = \frac{2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{36} .$$

Според тоа,

$$\overline{AM}\cdot\overline{BM} = 2x\cdot\overline{MN} = 2x(x+y) = 2x^2 + 2xy = \frac{2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{18} + \frac{\overline{BC}^2}{6} = \frac{a^2+b^2+c^2}{9} .$$

9. Изрази ги должините на симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ со помош на должините на неговите страни.



Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата l_A на аголот при темето A со страната BC. Знаеме дека

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} \text{ и } \overline{CD} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} .$$

Сега бидејќи $l_A = \overline{AD}$ од теоремата на Стјуарт следува

$$l_A^2\cdot\overline{BC} = \overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} + \overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} - \overline{BC}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$$

$$l_A^2 = \overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}+\overline{AB}} + \overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} - \overline{BC}^2\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$$

$$l_A^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC}(1-\frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AB}+\overline{AC})^2}.$$

Аналогно се докажува дека

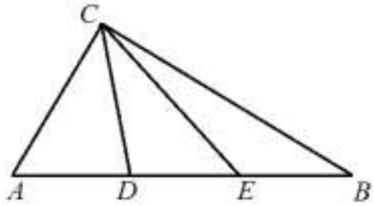
$$l_B^2 = \overline{AB}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AC}^2}{(\overline{AB}+\overline{BC})^2} \text{ и } l_C^2 = \overline{AC}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC}+\overline{BC})^2} .$$

10. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и точки D и E на хипотенузата AB такви што

$$\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB},$$

(цртеж десно). Докажи, дека

$$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 = \tfrac{2}{3}\overline{AB}^2 . \qquad (1)$$



Решение. Од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{CD}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{DB} - \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \text{ и}$$
$$\overline{CE}^2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AE} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{EB} - \overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB}.$$

Понатаму, од $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{DB} = \frac{2}{3}\overline{AB}, \overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{EB} = \frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ и од последните две равенства добиваме

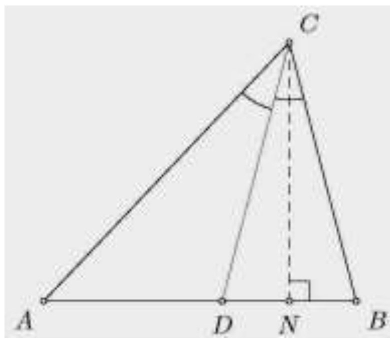
$$\overline{CD}^2 = \frac{1}{3}\overline{BC}^2 + \frac{2}{3}\overline{AC}^2 - \frac{2}{9}\overline{AB}^2 \text{ и } \overline{CE}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2 + \frac{1}{3}\overline{AC}^2 - \frac{2}{9}\overline{AB}^2.$$

Сега, ако прво ги собереме последните две равенства, потоа добиеното равенство го собереме со равенството $\overline{DE}^2 = \frac{1}{9}\overline{AB}^2$ и искористиме дека $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, го добиваме равенството (1).

11. Во триаголникот ABC иметралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на страната AC ако $\overline{CB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = 4$ и $\overline{DB} = 3$.

Решение. *Прв начин.* Од теоремата за симетралата на аголот следува дека $\overline{AC} : \overline{BC} = 4:3$, па затоа можеме да земеме $\overline{AC} = 4x$ и $\overline{BC} = 3x$. Ако N е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C, тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AC}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{CN}^2, \ \overline{BC}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{CN}^2$$



па затоа

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{BN}^2. \qquad (1)$$

Триаголникот BCD е рамнокрак и како CN е негова висина добиваме $\overline{DN} = \overline{BN} = \frac{3}{2}$. Понатаму,

$$\overline{AN} = \overline{AD} + \overline{DN} = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Со замена во (1) добиваме

$$(4x)^2 - (3x)^2 = (\tfrac{11}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2, \text{ т.е. } x = 2.$$

Конечно, $\overline{AC} = 4 \cdot 2 = 8$.

Втор начин. На потполно ист начин како при првиот начин наоѓаме $\overline{AC} = 4x$ и $\overline{BC} = 3x$. Сега, од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{BC}^2 \cdot \overline{AD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot (\overline{CD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{BD}),$$

од каде ја добиваме равенката $4 \cdot (3x)^2 + 3 \cdot (4x)^2 = 7 \cdot ((3x)^2 + 3 \cdot 4)$, чие решение е $x = 2$. Конечно, $\overline{AC} = 4 \cdot 2 = 8$.

Трет начин. Нека E е точка на полуправата CD таква што $\overline{CE} = \overline{CA}$. Тогаш

$$\measuredangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle ACE).$$

Бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACD$, важи $\measuredangle ACE = \measuredangle DCB$, па затоа

$$\measuredangle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DCB) = \measuredangle BDC = \measuredangle ADE.$$

Значи, и триаголникот AED е рамнокрак и важи $\overline{AE} = \overline{AD} = 4$. Според тоа, сите три триаголници $AED,\ AEC$ и DBC се рамнокраки и имаат исти агли, па затоа се по парови слични. Заради сличноста на триаголниците AEC и DBC важи

$$\overline{CD}:\overline{CE}=\overline{BD}:\overline{AE}=3:4.$$

Затоа важи

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CE}-\overline{CD}}{\overline{CE}}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Заради сличноста на триаголниците EDA и AEC заклучуваме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}$. Конечно,

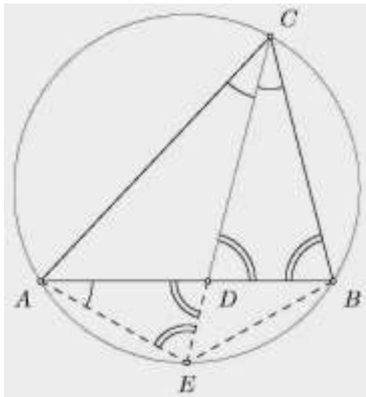
$$16=\overline{AE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{DE}=\overline{AC}^2\,\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}^2}{4},$$

па затоа $\overline{AC}=8$.

Четврт начин. Како во претходниот начин ја воведуваме точката E и докажуваме дека $\overline{AE}=4$. Исто така важи

$$\measuredangle AEC=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\measuredangle DCB)=\measuredangle CBD,$$

што значи дека четириаголникот $AEBC$ е тетивен. Сега над тетивите AE и BE аглите се еднакви, па затоа $\overline{BE}=\overline{AE}=4$. Сега, од теоремата на Птоломеј следува



$$\overline{AC}\cdot\overline{BE}+\overline{BC}\cdot\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{CE}$$

и како $\overline{BE}=\overline{AE}=4$, $\overline{AB}=7$ и $\overline{CE}=\overline{AC}$ од последното равенство добиваме

$$4\cdot\overline{AC}+4\cdot\overline{BC}=7\cdot\overline{AC},\text{ т.е. } 3\overline{AC}=4\overline{BC}.$$

Од степенот на точката D во однос на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ следува

$$\overline{CD}\cdot\overline{DE}=\overline{AD}\cdot\overline{BD}=3\cdot4=12.$$

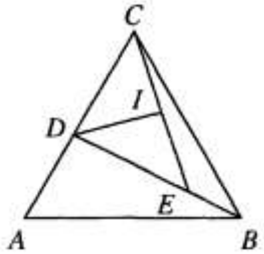
Но, $\overline{BC}=\overline{CD}$ и $\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{BC}$, па затоа $\overline{BC}\cdot(\overline{AC}-\overline{BC})=12$ и ако замениме $\overline{BC}=\frac{3}{4}\overline{AC}$, добиваме $\frac{3}{4}\overline{AC}\cdot(\overline{AC}-\frac{3}{4}\overline{AC})=12$, т.е. $\overline{AC}=8$.

12. На кракот AC на рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB е избрана точка D, а на отсечката BD е избрана точка E таква што $\overline{BD}=2\overline{AD}=4\overline{BE}$. Докажи дека $\measuredangle EDC=2\measuredangle CED$.

Решение. Да забележиме дека $\measuredangle EDC=2\measuredangle CED$ ако и само ако $\overline{DI}=\overline{EI}$, каде $DI,(I\in CE)$ е симетрала на $\measuredangle CDE$. Нека $\overline{BD}=2\overline{AD}=4\overline{BE}=4x$ и $\overline{AC}=\overline{BC}=y$. Тогаш

$$\overline{DI}=\frac{\sqrt{\overline{ED}\cdot\overline{CD}((\overline{ED}+\overline{CD})^2-\overline{CE}^2)}}{\overline{ED}+\overline{CD}}=\sqrt{\frac{3x(y-2x)((x+y)^2-\overline{CE}^2)}{x+y}},$$

$$\overline{EI}=\overline{CE}\,\frac{\overline{ED}}{\overline{ED}+\overline{CD}}=\overline{CE}\,\frac{3x}{x+y}.$$



Оттука, после идентични трансформации добиваме

$$\overline{DI}=\overline{EI} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{CE}^2=(x+y)(x-2y).$$

Последното равенство следува од теоремата на Стјуарт за $\triangle BCD$:

$$\overline{CE}^2=\frac{\overline{BC}^2\,\overline{DE}+\overline{CD}^2\,\overline{BE}}{\overline{BD}}-\overline{BE}\cdot\overline{DE}=\frac{3y^2+(y-2x)^2}{4}-3x^2=(x+y)(x-2y).$$

13. За страните a,b и c на $\triangle ABC$ важи $2a=b+c$. Најди ги должините на страните ако се познати должините на симетралата на аголот s_a и тежишната линија t_a повлечени од темето A.

Решение. Со замена во формулата за должината на симетралата на аголот $s_a=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$ наоѓаме $s_a=\frac{\sqrt{3bc}}{2}$, па затоа $bc=\frac{4s_a^2}{3}$. Од друга страна за тежишната линија имаме $4t_a^2=2b^2+2c^2-a^2$, односно

$$4t_a^2=2(b+c)^2-4bc-\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{7(b+c)^2}{4}-4bc,$$

и ако замениме за bc добиваме $b+c=\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{t_a^2+\frac{4s_a^2}{3}}$. Според тоа, b и c се корени на квадратната равенка

$$x^2-\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{t_a^2+\frac{4s_a^2}{3}}\,x+\frac{4s_a^2}{3}=0.$$

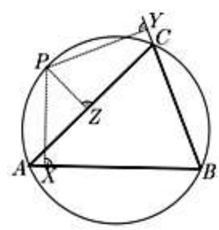
За да корените на оваа равенка се реални и позитивни треба дискриминантата на оваа равенка да е ненегативна, т.е $\frac{16}{7}(t_a^2+\frac{4s_a^2}{3})-\frac{16s_a^2}{3}\geq 0$, што значи дека треба да е $t_a\geq s_a$. Меѓутоа, ваков триаголник постои ако и само ако $(b-c)^2\leq a^2<(b+c)^2$. Второто неравенство е исполнето бидејќи $a=\frac{b+c}{2}$, а од $(b-c)^2\leq a^2$ добиваме $\frac{(b+c)^2}{4}\geq(b+c)^2-4bc$ т.е. $4bc\geq\frac{3(b+c)^2}{4}$, па затоа $\frac{s_a^2}{3}\geq\frac{3}{28}(t_a^2+\frac{4s_a^2}{3})$ т.е. $t_a\leq\frac{4}{3}s_a$ и како $t_a\geq s_a$ наоѓаме $s_a\leq t_a\leq\frac{4}{3}s_a$.

13. ТЕОРЕМА НА СИМСОН

1. (Теорема на Симпсон). Нека точката P припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ако X,Y,Z се подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите AB,BC,CA, соодветно, тогаш тие припаѓаат на една права, која ја нарекуваме Симпсонова права за точката P и $\triangle ABC$. Докажи!

Решение. Нека точката P припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и X,Y,Z се подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите AB,BC,CA, соодветно (цртеж десно). Четириаголникот $PZCY$ е тетивен (има два спротивни прави агли), па затоа

$$\measuredangle PYZ=\measuredangle PCZ=\measuredangle PCA.$$



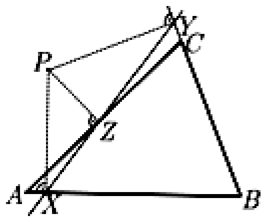
Слично, четириаголникот $PXBY$ е тетивен, па затоа $\measuredangle PYX=\measuredangle PBX=\measuredangle PBA$. Понатаму, според условот на задачата четириаголникот $ABCP$ е тетивен, па затоа важи $\measuredangle PCA=\measuredangle PBA$. Од горните равенства следува

$$\measuredangle PYZ=\measuredangle PCA=\measuredangle PBA=\measuredangle PYX\ ,$$

што значи дека точките X , Y и Z се колинеарни, т.е. припаѓаат на една права.

2. Нека подножјата X,Y,Z на нормалите повлечени од точката P соодветно кон правите AB,BC,CA на кои лежат страните на $\triangle ABC$ се колинеарни точки. Докажи дека точката P припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Нека точките X , Y и Z се колинеарни и се подножја на нормалите PX , PY и PZ , повлечени од точката P кон правите AB , BC и CA, соодветно (цртеж десно). Имаме, $\measuredangle PZA=\measuredangle PXA=90^\circ$, па затоа четириаголникот $PAXZ$ е тетивен. Според тоа,

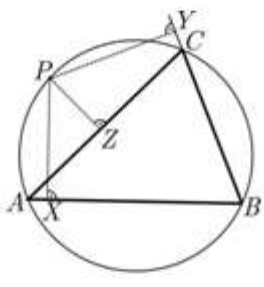


$$\measuredangle PAX=180^\circ-\measuredangle PZX\ .$$

Од колинеарноста на точките X , Y и Z следува $180^\circ-\measuredangle PZX=\measuredangle PZY$, што заедно со претходното равенство $\measuredangle PAX=\measuredangle PZY$. Слично, $\measuredangle PZC=\measuredangle PYC=90^\circ$, па затоа четириаголникот $PZCY$ е тетивен и на потополно идентичен начин се добива дека $\measuredangle PCY=\measuredangle PZY$. Значи $\measuredangle PAX=\measuredangle PCY$ или $\measuredangle PAB=180^\circ-\measuredangle PCB$, од каде што следува дека четириаголникот $ABCP$ е тетивен, односно точката P лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

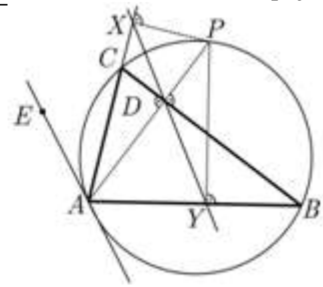
3. Од произволна точка P на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ги повлекуваме нормалите PX , PY и PZ на правите AB , BC и CA, соодветно, пришто X , Y и Z се на соодветните прави. Докажи дека $\overline{PA}\cdot\overline{PY}=\overline{PC}\cdot\overline{PX}$.

Решение. Бидејќи четириаголниците $AXZP$ и $PZCY$ се тетивни, имаме $\measuredangle PAZ=\measuredangle PXZ$ и $\measuredangle PYZ=\measuredangle PCZ$ (види цртеж). Според условот во задачата, точките X , Y и Z ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$. Од нивната колинеарност следува $\measuredangle PAC=\measuredangle PAZ=\measuredangle PXZ=\measuredangle PXY$ и слично, $\measuredangle PCA=\measuredangle PYX$. Тогаш триаголниците PAC и PXY се слични, па затоа важи $\frac{\overline{PC}}{\overline{PY}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PX}}$.



4. Висината AD на $\triangle ABC$ ја сече опишаната кружница околу триаголникот во точка P . Докажи дека Симсоновата права за P и ΔABC е паралелна со тангентата на опишаната кружница во темето A .

Решение. Нека висината AD ја сече страната BC на триаголникот ABC во точката D , а опишаната кружница околу триаголникот во точка P . Со X и Y ги означуваме подножјата на нормалите од P на CA и AB, соодветно, а тангентата во A нека е правата AE (види цртеж). Симсоновата права за P и $\triangle ABC$ е

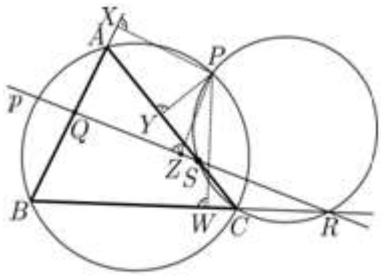


определена со точките X и D (и Y). Четириаголникот $DPXC$ е тетивен па $\measuredangle CXD = \measuredangle CPD$.

Тогаш важи $\measuredangle EAC = \measuredangle CPA = \measuredangle CPD = \measuredangle CXD$, т,е, $\measuredangle EAX = \measuredangle AXD$, од каде што добиваме дека правите AE и XD се паралелни.

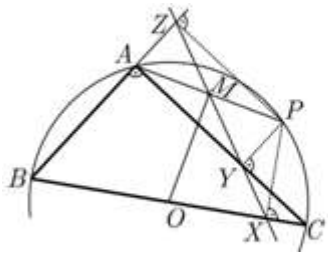
5. Правата p ги сече страните (или продолженијата на страните) AB, BC и CA на $\triangle ABC$ во точки Q, R и S, соодветно. Нека кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle SCR$ се сечат во точката P. Докажи дека четириаголникот $AQSP$ е тетивен.

Решение. Нека PX, PY, PZ и PW се нормалите од точката P на AB, CA, QR и BC, соодветно (види цртеж). Тогаш X, Y и W ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$, а Y, Z и W ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle SCR$. Значи, точките X, Y, Z и W се колинеарни. Бидејќи X, Y и Z се подножја на нормалите спуштени од P на AQ, AS и QS, според обратната теорема на Теоремата на Симсон следува дека P лежи на кружницата опишана околу триаголникот AQS, односно четириаголникот $AQSP$ е тетивен.



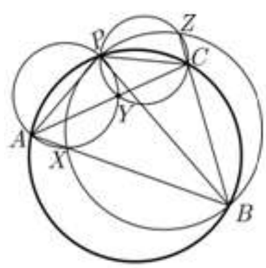
6. Правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол кај темето A е впишан во кружница. Нека Симсоновата права за точка P и $\triangle ABC$ ја сече тетивата PA во точка M. Докажи дека MO и PA се заемно нормални, ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Нека PX, PY и PZ се нормалите на BC, CA и AB, соодветно (види цртеж). Тогаш Симсоновата права за P и $\triangle ABC$ е правата XY ($= XZ$). Бидејќи аглите PZA, PYA и ZAY се прави, четириаголникот $AYPZ$ е правоаголник. Точката M е пресек на дијагоналите на правоаголникот, затоа таа е средина на отсечката PA. Тогаш MO и PA се заемно нормални.



7. Нека PA, PB и PC се три тетиви во произволна кружница. Докажи дека пресечните точки на кружниците со дијаметри PA, PB и PC, се колинеарни точки.

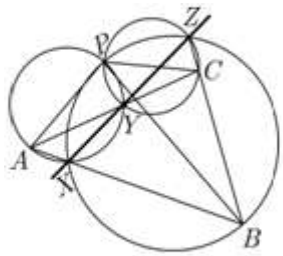
Решение. Со X ќе ја означиме втората пресечна точка на кружниците со дијаметри PA и PB, Y е пресечната точка на кружниците со дијаметри PA и PC и Z е пресечната точка на кружниците со дијаметри PB и PC (види цртеж). Бидејќи аглите AXP и PXB се агли над дијаметрите PA и PB, соодветно, тие се прави, а оттука точките A, X и B се колинеарни.



Слично, колинеарни се точките A, Y и C, како и точките B, C и Z. Значи PX, PY и PZ се нормалите од точката P, на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, на правите на кои лежат страните на триаголникот, па X, Y и Z ја определуваат Симсоновата права за точката P и $\triangle ABC$.

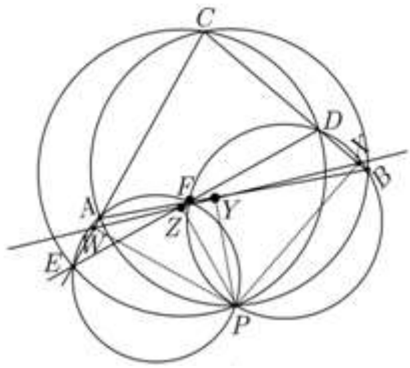
8. Ако три кружници со дијаметри PA, PB и PC се сечат, две по две, во колинеарни точки тогаш четириаголникот $ABCP$ е тетивен. Докажи.

Решение. Нека X е втората пресечната точка на кружниците со дијаметри PA и PB, Y е пресечната точка на кружниците со дијаметри PA и PC и Z е пресечната точка на кружниците со дијаметри $\overline{PB}$ и PC (види цртеж). Тогаш точките A, X и B; A, Y и C и B, C и Z се колинеарни и $PX \perp AB$, $PY \perp AC$, $PZ \perp BC$. Бидејќи X, Y и Z се колинеарни, од обратната теорема на Теоремата на Симсон следува дека четириаголникот $ABCP$ е тетивен.



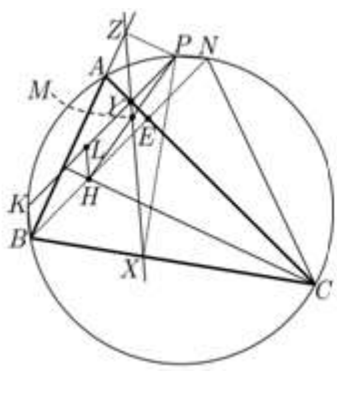
9. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и F на страните BC и AB, соодветно. Нека правите DF и AC се сечат во точка E. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците ABC, FBD, EFA и EDC се сечат во една иста точка.

Решение. Нека кружниците околу триаголниците ABC и FBD се сечат во точката P, а PX, PY, PZ и PW се нормалите повлечени од P на BC, AB, ED и EC, соодветно (види цртеж). Тогаш колинеарни се точките X, Y и W и точките X, Y и Z, односно сите четири точки лежат на иста права. Од колинеарноста на Y, Z и W и од обратната теорема на Теоремата на Симсон, следува дека P лежи на кружницата опишана околу $\triangle EFA$. Слично, P лежи и на кружницата опишана околу $\triangle EDC$.



10. Докажи дека Симсоновата права, за произволна точка P и $\triangle ABC$, ја полови отсечката чиишто крајни точки се ортоцентарот H и точката P.

Решение. Нека X, Y и Z се подножјата на нормалите од P на BC, AC и AB, соодветно, односно XY е Симсоновата права за P и ΔABC. Со K и N да ги означиме пресечните точки на опишаната кружница околу ΔABC со правите PY и BH, соодветно, E нека е пресечната точка на BH и AC, LH нека е права паралелна со KB, каде што $L \in PK$ и нека пресечната точка на HP и XY е M (види цртеж). Бидејќи PK е па-



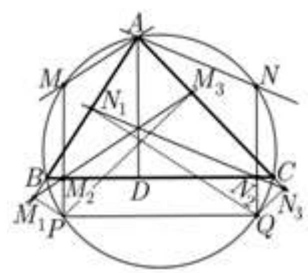
ралелна со NB и LH е паралелна со KB, следува дека четириаголникот $BHLK$ е паралелограм, односно $\overline{LH}=\overline{KB}$. Од $PK \parallel NB$ следува дека лаците PN и KB се еднакви, а оттука $\overline{PN}=\overline{KB}$. Значи четириаголникот $HNPL$ е рамнокрак трапез. Од

$$\measuredangle HCA = 90^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle NBA = \measuredangle NCA,$$

имаме $\measuredangle HCE = \measuredangle NCE$, а бидејќи $\measuredangle HEC = \measuredangle NEC = 90^\circ$ и страната EC е заедничка за триаголниците HCE и NCE следува дека $\Delta HCE \cong \Delta NCE$, па $\overline{HE}=\overline{NE}$. Тогаш E е средина на основата $\overline{HN}$ на рамнокракиот трапез $HNPL$ и $AC \perp HN$, па Y е средина на основата $\overline{LP}$. Од тетивноста на четириаголникот $AYPZ$ следува $\measuredangle KBA = \measuredangle KPA = \measuredangle YPA = \measuredangle YZA$, односно $\measuredangle KBZ = \measuredangle YZB$. Оттука следува паралелност на правите KB и YZ, односно паралелни се правите LH и YZ. Тогаш YZ минува низ средната линија за триаголникот LHP, па M е средина на $\overline{PH}$.

11. Тетивата PQ на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ е паралелна со страната BC. Докажи дека Симсоновите прави за P и Q и $\triangle ABC$ и висината AD минуваат низ една иста точка.

Решение. Нека M_1, M_2 и M_3 ја определуваат Симсоновата права за P и $\triangle ABC$, а точките N_1, N_2 и N_3 Симсоновата права за Q и ΔABC (види цртеж). Пресечната точка на кружницата и правата PM_2 ќе ја означиме со M, пресекот на кружницата и правата QN_2 со N, пресекот на правата M_1M_2 и висината AD со T и пресекот на N_1N_2 и AD со S. Од тетивноста на четириаголниците PM_2BM_1 и $AMBP$ имаме:

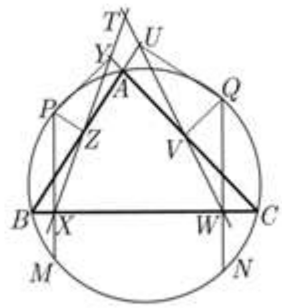


$$\measuredangle M_1M_2P = \measuredangle M_1BP = 180^\circ - \measuredangle ABP = 180^\circ - \measuredangle AMP$$

од каде што следува дека правите M_1M_2 и AM се паралелни. Слично, паралелни се и правите N_1N_2 и AN. Бидејќи $MM_2 \parallel AD \parallel NN_2$ следува дека четириаголниците M_2TAM и SN_2NA се паралелограми. Значи важі $\overline{MM_2}=\overline{AT}$ и $\overline{AS}=\overline{NN_2}$, а од паралелноста на PM и QN важи и $\overline{MN}=\overline{PQ}$. Од паралелноста на PQ и BC имаме дека MP и PQ се нормални, од каде што четириаголниците $PQNM$ и PQN_2M_2 се правоаголници. Оттука $\overline{MM_2}=\overline{NN_2}$, односно $\overline{AT}=\overline{AS}$. Значи висината ги сече Симсоновите прави во една иста точка.

12. Аголот меѓу двете Симсонови прави за дадените точки P и Q и ΔABC, е еднаков со периферниот агол над тетивата $\overline{PQ}$. Докажи.

Решение. Нека Симсоновата права за P и ΔABC е определена со точките X, Y и Z, а Симсоновата права за Q и ΔABC е определена со U, V и W (види цртеж) и нека правите се сечат во T. Со M ќе ја означиме пресечната точка на

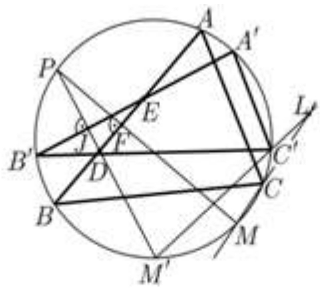


кружницата и правата PX , а со N , пресечната точка на кружницата и QW . Од претходната задача имаме дека $XZ \parallel AM$ и $VW \parallel AN$.

Значи $\measuredangle XTW = \measuredangle MAN$. Од паралелноста на PM и QN имаме $\overline{PQ} = \overline{MN}$, па $\measuredangle XTW = \measuredangle MAN = \measuredangle PBQ$, како периферни агли над еднакви тетиви.

13. Аголот меѓу Симсоновите прави за една иста точка и два триаголници кои се впишани во една иста кружница е константен. Докажи!

Решение. Симсоновата права за точката P и $\triangle ABC$ е паралелна со правата MC и минува низ точката F , која е подножје на нормалата од P кон страната AB , а M е пресечната точка на кружницата и правата PF (задача 11). Слично, Симсоновата права за точката P и $\triangle A'B'C'$ е паралелна со $M'C'$ и минува низ J , која е подножје на нормалата од P кон страната $A'B'$, а M' е пресечната точка на кружницата и PJ (види цртеж). Тогаш аголот α меѓу Симсоновите прави е еднаков со аголот меѓу правите MC и $M'C'$. Уште, со D ќе ја означиме пресечната точка меѓу PM' и AB , со E пресекот на AB и $A'B'$ и со L пресекот на MC и $M'C'$. Тогаш:



$$\measuredangle M'CM = 180^\circ - \measuredangle M'CL = \measuredangle LM'C + \measuredangle M'LC$$
$$= \measuredangle C'M'C + \alpha,$$

односно $\alpha = \measuredangle M'CM - \measuredangle C'M'C$. Од друга страна, триаголниците PFD и EJD се слични и затоа $\measuredangle FPD = \measuredangle JED$, односно

$$\begin{aligned}\measuredangle MPM' &= \measuredangle B'EB = 180^\circ - \measuredangle B'EA = \measuredangle AB'E + \measuredangle B'AE \\ &= \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB = \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB\end{aligned}.$$

Значи

$$\begin{aligned}\alpha &= \measuredangle M'CM - \measuredangle C'M'C = \measuredangle M'PM - \measuredangle C'M'C \\ &= \measuredangle AB'A' + \measuredangle B'AB - \measuredangle C'M'C = \tfrac{1}{2}(\measuredangle AOA' + \measuredangle B'OB - \measuredangle C'OC)\end{aligned},$$

каде што O е центарот на кружницата.

Големината на аголот $\frac{1}{2}(\measuredangle AOA' + \measuredangle B'OB - \measuredangle C'OC)$ не зависи од позицијата на точката P , односно е константен агол.

14. Даден е конвексен петаголник $ABXYZ$ впишан во полукружница со дијаметар AB . Подножјата на нормалите повлечени од точката Y кон правите AX , BX, AZ и BZ се означени со P, Q, R и S , соодветно. Докажи, дека остриот агол меѓу правите PQ и RS е еднаков на половината од $\measuredangle XOZ$, каде O е средина на отсечката AB .

Решение. Со T да го означиме подножјето на нормалата повлечена од Y кон правата AB (види цртеж). Притоа точките P, Q и T се подножјата на нормалите повлечени од точката Y кон страните на $\triangle ABX$. Бидејќи Y лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABX$, од теоремата на Симсон следува дека точките P, Q и T се колинеарни. Аналогно се добива дека и точките S, R и T се колинеарни.

Треба да докажеме дека дека $\measuredangle XOZ = 2\measuredangle PTS$, што следува од равенствата $\measuredangle PTY = \measuredangle PAY$ и $\measuredangle STY = \measuredangle SBY$. Навистина, имаме

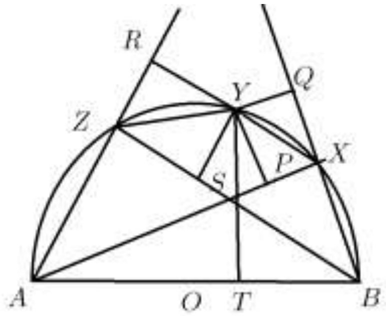
$$\tfrac{1}{2}\measuredangle XOZ = \tfrac{XY}{2} + \tfrac{YZ}{2} = \measuredangle XAY + \measuredangle ZBY$$
$$= \measuredangle PAY + \measuredangle SBY$$

и

$$\measuredangle PTS = \measuredangle PTY + \measuredangle STY .$$

Саканите равенства следуваат од фактот дека четириаголниците $ATPY$ и $BTSY$ се тетивни, бидејќи

$$\measuredangle APY = \measuredangle ATY = 90^\circ \text{ и}$$
$$\measuredangle BTY = \measuredangle BSY = 90^\circ .$$



14. ТЕОРЕМИ НА КАРНО, АПОЛОНИЈ И ЛАЈБНИЦ

1. (Карноови формули). Нека ABC е произволен триаголник и H е подножјето на висината повлечена од темето B. Докажи дека

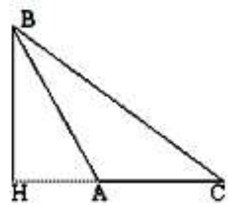
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AH} , \qquad (1)$$

ако аголот при темето A е остар, а ако овој агол е тап, тогаш важи

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AH} . \qquad (2)$$

Решение. Со примена на Питагоровата теорема на триаголниците ABH и BCH добиваме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \text{ и } \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 .$$



Сега, ако ги одземеме последните две равенства, по средувањето добиваме

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2 .$$

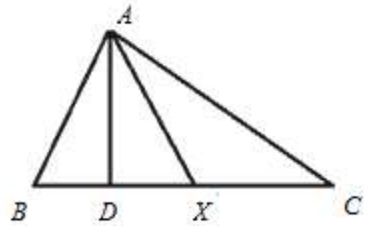
Понатаму, ако триаголникот ABC е остроаголен, тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AH}$ (направи цртеж) и со замена во последното равенство го добиваме равенството (1), а ако аголот при темето A е тап , тогаш $\overline{CH} = \overline{AC} + \overline{AH}$, па затоа важи равенството (2).

2. (Теорема на Аполониј). Ако X е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што важи $\overline{BX} : \overline{CX} = m : n$, докажи дека

$$n\overline{AB}^2 + m\overline{AC}^2 = n\overline{BX}^2 + m\overline{CX}^2 + (m+n)\overline{AX}^2 . \qquad (1)$$

Решение. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A, тогаш $X = D$ или $X \neq D$. Ако $X = D$, тогаш

$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 \text{ и } \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 .$$



Ако првото равенство го помножиме со n, а второто со m и ги собереме го добиваме равенството (1). Ако $X \neq D$, тогаш аглите AXD и AXC не се прави. Сега, од Карноовите формули следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 - 2\cdot\overline{BX}\cdot\overline{DX} \text{ и}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 + 2\cdot\overline{CX}\cdot\overline{DX}.$$

Ако првото равенство го помножиме со n, а второто со m, по собирањето на добиените равенства го добиваме равенството (1).

3. Ако X е произволна точка на правоаголникот $ABCD$, тогаш важи

$$\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2.$$

Докажи!

Решение. Нека O е пресек на дијагоналите AC и BD. Бидејќи пресечната точка ги полови дијагоналите, од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AX}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 + 2\overline{OX}^2 \text{ и } \overline{BX}^2 + \overline{DX}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2 + 2\overline{OX}^2.$$

Сега, имајќи предвид дека $\overline{AC} = \overline{BD}$, од последните две равенства следува тврдењето на задачата.

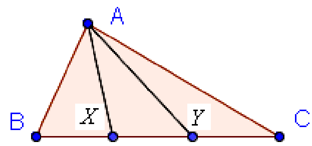
4. Ако X и Y се точки на страната BC такви што $\overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$, тогаш важи

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + 4\overline{XY}^2.$$

Докажи!

Решение. Од теоремата на Аполониј следува:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AY}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{XY}^2 + 2\overline{AX}^2,$$
$$\overline{AX}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2 + 2\overline{AY}^2.$$



Последните равенства ги собираме, и ако искористиме дека $\overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$, по средување на добиеното равенство наоѓаме $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 + 4\overline{XY}^2$.

5. Ако AA_1, BB_1, CC_1 се тежишните линии на $\triangle ABC$, а T е неговото тежиште, докажи дека

а) $\overline{AA_1}^2 = \frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$,

б) $\overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + \overline{CC_1}^2 = \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$,

в) $\overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2 = \frac{1}{3}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2)$.

Решение. а) Ако искористиме дека A_1 е средина на страната BC, од теоремата на Аполониј следува $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BA_1}^2 + \overline{A_1C}^2 + 2\overline{AA_1}^2$. Сега во последното равенство заменуваме $\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ и ако го изразиме $\overline{AA_1}^2$ го добиваме бараното равенство.

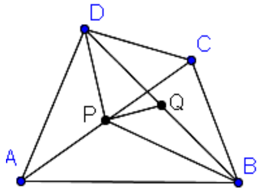
б) Ако според а) ги изразиме $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$ и $\overline{CC_1}^2$ и ги собереме добиените равенства, го добиваме бараното равенство.

в) Ако го искористиме фактот дека тежиштето ја дели тежишната линија во однос 2:1, и равенството под б) го поделиме со $\frac{9}{4}$, го добиваме бараното равенство.

6. Ако P и Q се средините на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$, докажи дека

$$\overline{PQ}^2 = \tfrac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2).$$

Решение. Отсечките PQ, BP, DP се тежишни линии на триаголниците BDP, BAC, DAC, соодветно, па од претходната задача следува



$$\overline{PQ}^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{PB}^2 + 2\overline{PD}^2 - \overline{BD}^2),$$

$$\overline{BP}^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2),$$

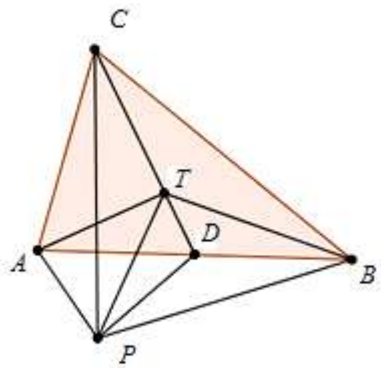
$$\overline{DP}^2 = \tfrac{1}{4}(2\overline{CD}^2 + 2\overline{DA}^2 - \overline{AC}^2).$$

Со замена на второто и третот равенство во првото, по средувањето го добиваме бараното равенство.

7. (Теорема на Лајбниц). Ако T е тежиште на $\triangle ABC$ и P е произволна точка, тогаш

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 3\overline{PT}^2. \qquad (1)$$

Решение. Нека D е средината на страната AB на $\triangle ABC$. За тежиштето T важи $\overline{CT} : \overline{DT} = 2:1$. Со примена на теоремата на Аполониј на триаголниците BCD, PAB, TAB добиваме



$$\overline{PC}^2 + 2\overline{PD}^2 = \overline{TC}^2 + 2\overline{TD}^2 + 3\overline{PT}^2$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{PD}^2$$

$$\overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{TD}^2.$$

Ако ги собереме првите две равенства и го примениме третото равенство, го добиваме бараното равенство.

8. Нека a, b, c се должините на страните, O и r се центарот и радиусот на опишаната кружнице, а T и H се соодветно тежиштето и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека

а) $\overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$,

б) $\overline{OH}^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, в) $\overline{TH}^2 = 4r^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$,

г) $\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 12r^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

Решение. а) Според теоремата на Лајбниц добиваме

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 3\overline{OT}^2,$$

т.е.

$$\overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{3}(\overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2).$$

Сега од задсача 5 в) следува $\overline{OT}^2 = r^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

б) Од теорема на Ојлер следува $\overline{OH} = 3\overline{OT}$, па од равенството под а) добиваме $\overline{OH}^2 = 9r^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

в) Аналогно како под б) ако искористиме дека $\overline{TH} = 2\overline{OT}$, го добиваме бараното равенство.

г) Од теоремата на Лајбниц следува:

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2 + 3\overline{TH}^2.$$

Сега од задача 5 в) и равенството под а) следува бараното равенство.

9. (Теорема на Карно). Ако P,Q,R се точки од правите BC,CA,AB на кои припаѓаат страните на $\triangle ABC$, тогаш правите кои минуваат низ точките P,Q,R и се нормални на правите BC,CA,AB се сечат во една точка ако и само ако

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 + \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Нека нормалите на страните BC,CA,AB во точките P,Q,R се сечат во точката O (направи цртеж). Тогаш од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC}^2,\ \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OA}^2,\ \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2,$$

Ако ги собереме последните равенства го добиваме равенството (1).

Ќе го докажеме обратното тврдење. Нека O е пресечната точка на нормалите од P и Q. Нека подножјето на нормалата од O на правата AB е точката R_1. Треба да докажеме дека $R \equiv R_1$. Од веќе докажаното тврдење следува

$$\overline{BP}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{QA}^2 + \overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = 0. \qquad (2)$$

Сега од (1) и (2) добиваме $\overline{AR_1}^2 - \overline{R_1B}^2 = \overline{AR}^2 - \overline{RB}^2$, па затоа

$$(\overline{AR_1} - \overline{R_1B})(\overline{AR_1} + \overline{R_1B}) = (\overline{AR} - \overline{RB})(\overline{AR} + \overline{RB}),$$

т.е.

$$(\overline{AR_1} - \overline{R_1B})\overline{AB} = (\overline{AR} - \overline{RB})\overline{AB}.$$

По кратењето и префрлањето на една страна се добива:

$$\overline{AR_1} - \overline{R_1B} - \overline{AR} + \overline{RB} = 0,\ \text{т.е.}\ 2\overline{RR_1} = 0,$$

од каде следува $R \equiv R_1$.

10. Докажи дека симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P,Q,R се средините на страните BC,CA,AB. Бидејќи симетралите минуваат низ точките P,Q,R, тие се нормални на страните BC,CA,AB и $\overline{BP}=\overline{PC}, \overline{CQ}=\overline{QA}, \overline{AR}=\overline{RB}$, т.е. е исполнето равенството од теоремата на Карно, па следува дека симетралите на страните се сечат во една точка.

11. Докажи дека правите определени со висините на триаголникот се сечат во една точка.

Решение. Нека P,Q,R се подножјата на висините на триаголникот повлечени од темињата A,B,C, соодветно. Тогаш точни се следниве равенства:

$$\overline{BP}^2-\overline{PC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2, \overline{CQ}^2-\overline{QA}^2=\overline{BC}^2-\overline{BA}^2, \overline{AR}^2-\overline{RB}^2=\overline{CA}^2-\overline{CB}^2.$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме дека е исполнети равенството од теоремата на Карно, од каде следува точноста на тврдењето на задачата.

12. Нека AH_A, BH_B, CH_C се висини во $\triangle ABC$. Низ темињата A,B,C се повлечени нормални прави p_A, p_B, p_C кон H_BH_C, H_CH_A, H_AH_B, соодветно. Докажи дека p_A, p_B, p_C минуваат низ иста точка.

Решение. *Прв начин*. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека секоја од правите p_A, p_B, p_C минува низ точката O. Од причини на симетрија, доволно е да докажеме дека $OC\perp H_AH_B$. Нека D е пресечната точка на овие две прави. Нека $\triangle ABC$ е остроаголен (направи цртеж). Јасно,

$$\measuredangle H_ACD=\measuredangle BCO=90^\circ-\alpha$$

Четириаголникот ABH_AH_B е тетивен, па затоа

$$\measuredangle DH_AC=\measuredangle H_BH_AC=\alpha.$$

Сега од последните равенства следува $OC\perp H_AH_B$. Аналогно се разгледува случајот кога $\triangle ABC$ е тапоаголен.

Втор начин. Според теоремата на Карно, потребно и доволно е да докажеме дека важи

$$|AH_B|^2-|AH_C|^2+|BH_C|^2-|BH_A|^2+|CH_A|^2-|CH_B|^2=0.$$

Последното равенство следува ако ги собереме очигледните равенства:

$$|BH_C|^2-|AH_C|^2=|BC|^2-|AC|^2,$$

$$|CH_A|^2-|BH_A|^2=|AC|^2-|AB|^2, \text{ и}$$

$$|AH_B|^2-|CH_B|^2=|AB|^2-|BC|^2.$$

13. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностраниот триаголник ABC важи равенството

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}, \qquad (1)$$

каде a е должина на страната на триаголникот.

Решение. Ќе ја користиме теоремата на Лајбниц. Во нашата задача е $I\equiv T$, па затоа $\overline{PT}=\overline{PI}=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{AT}=\overline{AI}=R$, $\overline{BT}=\overline{BI}=R$, $\overline{CT}=\overline{CI}=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, каде

R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Сега, од (1) во задача 6 добиваме:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3(\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2+3(\tfrac{a\sqrt{3}}{3})^2=\tfrac{a^2}{4}+a^2=\tfrac{5a^2}{4},$$

што и требаше да се докаже.

14. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на оопишаната и впишаната кружница. Докажи дека $\overline{OD}\leq\sqrt{R(R-2r)}$.

Решение. Ако го искористиме равенството на Лајбниц $\overline{OG}^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $a^2+b^2+c^2\geq 18Rr$. Но, $R=\frac{abc}{4P}$ и $r=\frac{2P}{a+b+c}$, па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc.$$

Последното следува ако ги помножиме неравенствата

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\ \text{ и }\ a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

15. ТЕОРЕМИ НА ПАСКАЛ И ДЕЗАРГ

1. (Теорема на Дезарг). Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме *кополарни* ако правите AA', BB' и CC' се сечат во една точка. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме *коосни* ако пресечните точки на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ лежат на една права.

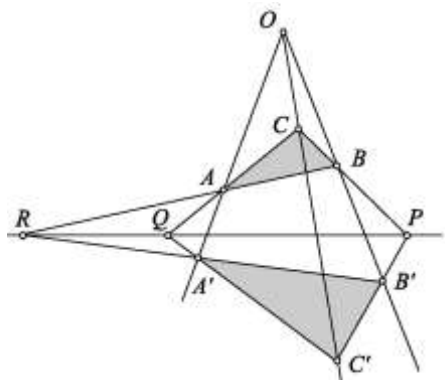
Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни ако и само ако се коосни. Докажи!

Решение. Нека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни и нека правите AA', BB' и CC' се сечат во точката O. Со P,Q,R да ги означиме пресеците на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ соодветно (цртеж долу). Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците BCO, CAO и AOB следува

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}}=-1$$

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}}=-1$$



Ако ги помножиме горните равенства добиваме

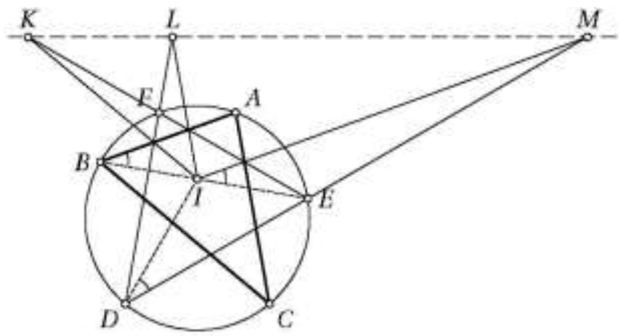
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1$$

и од што заради теоремата на Менелај заклучуваме дека точките P,Q и R се колинеарни. Значи, триаголниците ABC и $A'B'C'$ се коосни.

Обратно, нека претпоставиме дека P,Q и R се колинеарни и нека правите AA' и BB' се сечат во точката O. Сега триаголниците AQA' и BPB' се кополарни, па затоа се коосни. Според тоа, точките O,C и C' се колинеарни, што значи коосните триаголници се кополарни.

2. Даден е разностран триаголник ABC, со опишана околу него кружница ω со центар I. Правите AI, BI и CI ја сечат соодветно ω во точките D,E и F, различни од A,B и C. Правите низ точката I паралелни со правите BC, CA и AB соодветно ги сечат правите EF, FD и DE во точките K,L и M. Докажи, дека точките K,L и M се колинеарни.

Решение. Ако го разгледаме распоредот $D-E-M$ забележуваме дека $\measuredangle EIM = \measuredangle EBA = \measuredangle EDI$, па затоа правата IM е тангента на кружницата DEI и



$\overline{MI}^2 = \overline{MD} \cdot \overline{ME}$. Тоа значи дека точката M припаѓа на радикалната оска s на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и дегенираната кружница $(I,0)$. Аналогно и точките K и L припаѓаат на s, т.е. точките K,L и M се колинеарни

Втор начин. Од теоремата на Дезарг следува дека точките $K' = BC \cap EF$, $L' = CA \cap FD$ и $M' = AB \cap DE$ се колинеарни. Последното запишано со ориентирани отсечки значи дека $\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}} \cdot \frac{\overrightarrow{FL'}}{\overrightarrow{L'D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DM'}}{\overrightarrow{M'E}} = -1$. Но,

$$\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}} = \frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}} \cdot \frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{EK}} \cdot \frac{\overrightarrow{KF}}{\overrightarrow{K'F}} = \frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{IE}} \cdot \frac{\overrightarrow{IF}}{\overrightarrow{CF}},$$

па со замена на оваа и аналогните релации добиваме

$$\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}} \cdot \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{LD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{ME}} = -1,$$

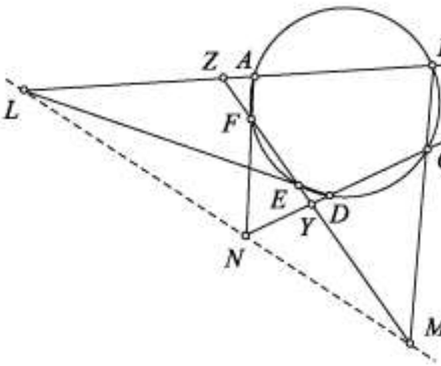
па од теоремата на Менелај заклучуваме дека точките K,L и M се колинеарни.

3. (Теорема на Паскал). Нека шестаголникот $ABCDEF$, чии спротивни страни не се колинеарни е впишан во кружница. Со L,M,N да ги означиме пресечните точки на трите парови спротивни страни AB и ED, BC и EF, FA и CD, соодветно. Тогаш, точките L,M,N се колинеарни.

Решение. Нека X,Y,Z се пресечните точки на AB и CD, CD и EF, EF и AB, соодветно (цртеж долу). Точките $D,E,L; F,A,N; B,C,M$ се точките на Менелај за $\triangle XYZ$, па од теоремата на Менелај добиваме

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1.$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме



$$\left(\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1. \qquad (1)$$

Понатаму, ако се искористи степенот на точките X,Y,Z во однос на кружницата, тогаш од геометриската интерпретација на комплексните броеви следува следува

$$\overrightarrow{ZE}\cdot\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{BZ},\ \overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{FY}=\overrightarrow{YD}\cdot\overrightarrow{YC},\ \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{DX}=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}.$$

Ако замениме во (1) добиваме $\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1$, што според теоремата на Менелај значи дека точките L,M и N се колинеарни.

Забелешка. а) Теоремата на Паскал не бара шестаголникот $ABCDEF$ да биде конвексен, што значи дека сите распорди на точките се дозволени. Можеме да разгледуваме и дегенерирани случаи, кога некои две прави се паралелни или некои две точки се совпаѓаат. На пример, ако $A\equiv B$, тогаш за правата AB ја земаме тангентата на кружницата во точката A.

б) Паскаловата теорема е тврдење од таканаречената проективна геометрија, во која паралелните прави се сечат во бесконечна точка, а сите бесконечни точки лежат на таканаречената бесконечна права.

4. Даден е разностран $\triangle ABC$. Точките $D\in AB$ и $E\in AC$ се такви што опишаните кружници околу $\triangle ACD$ и $\triangle ABE$ се допираат до BC. Нека F е пресечната точка на BC и DE. Докажи дека правата AF е нормална на Ојлеровата права во $\triangle ABC$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и D' и E' се симетричните точки на A во однос на висините CH и BH, соодветно (направи цртеж). Тогаш D' лежи на AB, E' лежи на AC и H е центар на кружницата опишана околу $\triangle AD'E'$. Значи, доволно е да докажеме дека AF е радикална оска на кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle AD'E'$, бидејќи нивните центри лежат на Ојлеровата права за $\triangle ABC$.

Јасно, A лежи на оваа радикална оска, како заедничка точка на двете кружници. Понатаму, од

$$\measuredangle BD'C' = \measuredangle BAC = \measuredangle BE'C$$

следува дека точките B, C, E', D' лежат на иста кружница. Понатаму, од

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAC = \measuredangle BD'C$$

и аналогното равенство $\measuredangle CBE = \measuredangle CE'B$ следува дека BE и CD се тангенти на таа кружница. Сега од теоремата на Паскал следува дека D, E и пресечната точка на BC и $D'E'$ лежат на една права, па затоа D', E' и F лежат на една права. Според тоа, F е радикален центар на $\triangle ABC$, $\triangle AD'E'$ и $BCD'E'$, од што следува тврдењето на задачата.

5. Во тетивниот четириаголник $ABCD$ правите AB и CD се сечат во во точката E, а правите BC и DA во точката F. Тангентите на опишаната кружница A и C се сечат во P, а тангентите во B и D се сечат во Q. Докажи дека точките E, F, P и Q се колинеарни.

Решение. Да ја примениме теоремата на Паскал на дегенерираниот шестаголник $AABCCD$. Точките $E = AB \cap CD, F = BC \cap DA$ и $P = AA \cap CC$ се колинеарни. Аналогно се докажува дека точките E, F и Q се колинеарни.

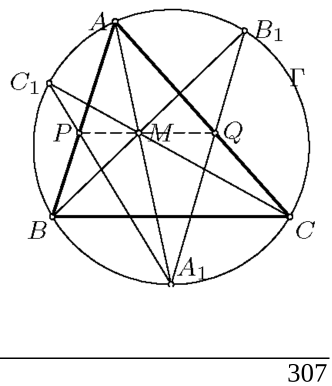
6. Нека точките A, B, C, D, E, F лежат на иста кружница и се такви што $AB \| DE$ и $BC \| EF$. Докажи дека $CD \| FA$.

Решение. Според теоремата на Паскал точките $M = AB \cap DE,\ \ N = BC \cap EF$ и $P = CD \cap FA$ лежат на иста права. Но, првите две пресечни точки се бесконечни, па затоа и трета точка мора да е бесконечна. Последното значи дека $CD \| FA$.

7. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$. Со P_1 и P_2 да ги означиме по ред подножјата на нормалите од P на AC и BC, а со Q_1 и Q_2 да ги означиме по ред подножјата на нормалите од C на AP и BP. Докажи дека правите Q_1P_2, Q_2P_1 и AB се сечат во една точка.

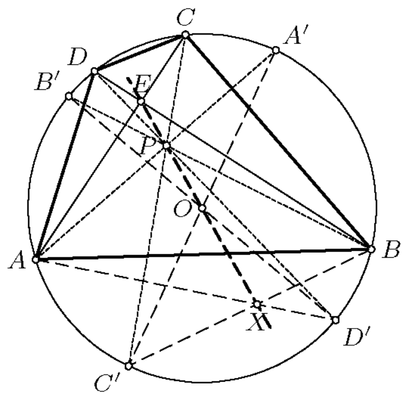
Решение. Точките P_1, P_2, Q_1, Q_2 шрипаѓаат на кружницата над дијаметар PC. Од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $P_1PP_2Q_1CQ_2$ следува дека точките $P_1C \cap PQ_1 = A$, $P_1Q_2 \cap P_2Q_1 = X$ и $PQ_2 \cap P_2C = B$ се колинеарни, што значи дека правите Q_1P_2, Q_2P_1 и AB се сечат во една точка.

8. Триаголникот ABC е впишан во кружница Γ. Нека M е точка на симетралата на аголот A, во внатрешноста на триаголникот. Правите AM, BM и CN по втор пат ја сечат Γ во точките A_1, B_1 и C_1, соодветно. Нека правата A_1C_1 ја сече AB во точката P, а правата A_1B_1 ја сеча AC во Q. Докажи дека $PQ \| BC$.



Решение. Од теоремата на Паскал, применета на шестаголникот $BACC_1A_1B_1$ следува дека точките P,Q и $M = BB_1 \cap CC_1$ се колинеарни. Понатаму, според условот на задачата A е средина на лакот BC , па затоа тангентата t во A_1 паралелна на BC . Сега, ако ја примениме теоремата на Паскал за шестаголникот $ABCC_1A_1A_1$ добиваме дека точките $AB \cap A_1C_1 = P$, $AA_1 \cap CC_1 = M$ и бесконечната точка $t \cap BC$ припаѓаат на иста права. Последното значи дека правата $PM \equiv PQ$ ја содржо бесконечната точка која е пресек на паралелните прави t и BC , па затоа $PQ \parallel BC$.

9. Конвексен четириаголник $ABCD$ е впишан во кружница со центар O , а неговите дијагонали AC и BD се сечат во точката E . Ако P р точка во внатрешноста на $ABCD$ таква што $\measuredangle PAB + \measuredangle PCB = \measuredangle PBC + \measuredangle PDC = 90^\circ$, докажи дека точките O, E и P се колинеарни.

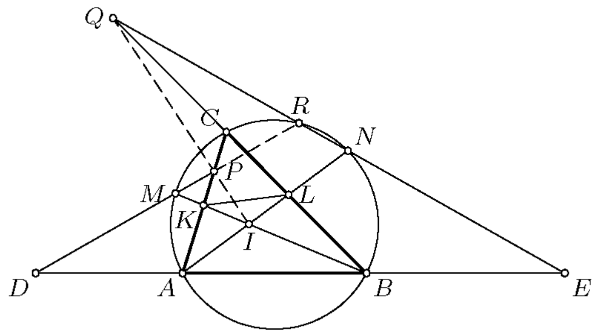


Решение. Нека полуправите AP, BP, CP, DP ја сечат опишаната кружница на четириаголникот $ABCD$ во точките A', B', C', D' , соодветно. Според условот на задачата

$$90^\circ = \measuredangle PAB + \measuredangle PCB = \measuredangle A'AB + \measuredangle BAC',$$

што значи дека $A'C'$ е дијаметар на кружницата, а исто важи и за $B'D'$. Според теоремата на Паскал применета за шестаголникот $AA'C'BB'D'$ точките $AA' \cap BB' = P$, $A'C' \cap B'D' = O$ и $C'B \cap D'A = X$ се колинеарни. Од друга страна, според теоремата на Паскал применета на шестаголникот $ACC'BDD'$ точките E, O, X се колинеарни, со што е докажано тврдењето на задачата.

10. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E на правата AB такви што $D-A-B-E$ и $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BC}$. Со M и N да ги означиме редоследно средините на лаците AC и BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кои не го содржат третото теме на триаголникот. Правите DM и CA се сечат во точката P , а правите EN и CB се сечат во точката Q . Докажи дека центарот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ лежи на правата PQ .



Решение. Нека BM и AN ги сечат спротивните страни на $\triangle ABC$ во точките K и L, соодветно. Од сличноста на триаголниците BCM и BKA ($\measuredangle BMC = \measuredangle BAK$ и $\measuredangle CBM = \measuredangle KBA$) имаме $\overline{BK} \cdot \overline{BM} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$. Освен тоа од $CD \parallel AL$ следува $\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}$. Следува $\overline{BK}\cdot\overline{BM}=\overline{BL}\cdot\overline{BD}$, што заедно со $\measuredangle DBM=\measuredangle KBL$ дава $\triangle BDM\sim\triangle BKL$. Аналогно се докажува дека $\triangle AEN\sim\triangle ALK$.

Нека правите DM и EN се сечат во точката R. Од добиените сличности следува $\measuredangle RDE=\measuredangle MDB=\measuredangle LKB$ и $\measuredangle DER=\measuredangle AEN=\measuredangle ALK$, па затоа важи

$$\measuredangle NRM=180^\circ-\measuredangle RDE-\measuredangle DRE=180^\circ-\measuredangle LKB-\measuredangle ALK=\measuredangle KIL=\measuredangle BIA$$

$$=180^\circ-\measuredangle IAB-\measuredangle ABI=180^\circ-\measuredangle CAN-\measuredangle MBC=\measuredangle NCM$$

(аглите се ориентирани). Според тоа, R припаѓа на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Сега колинеарноста на точките I,P,Q следува од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $ABRMNC$.

16. ИНВЕРЗИЈА

1. Нека во рамнината π е дадена точката O, а $m>0$ е реален број. Пресликувањето $I:\pi\setminus\{O\}\to\pi\setminus\{O\}$ кое на произволна точка $A\neq O$ од рамнината и придружува точката A' која што лежи на полуправата OA и го задоволува равенството

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m. \tag{1}$$

го нарекува *инверзија* со центар во O и коефициент m. Јасно, инверзијата е биекција на $\pi\setminus\{O\}$.

Докажи дека:

а) Инверзијата е инволуторно пресликување.

б) Точката е неподвижна за инверзија ако и само ако припаѓа на кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$.

Решение. а) Од $A'=I(A)$ следува дека A' лежи на полуправата OA и, притоа $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$. Ако $I(A')=A_1$, тогаш A_1 ќе лежи на полуправата OA', која се совпаѓа со полуправата OA, притоа $\overline{OA_1}\cdot\overline{OA'}=m$, од каде следува дека $A_1=A$, т.е. $I(A')=A$. Значи $I^2=E$ и како I е биекција следува дека $I=I^{-1}$, т.е. инверзијата е инволуторно пресликување.

б) Нека точката A е неподвижна за инверзијата I, т.е. $I(A)=A$. Ставаме $m=r^2,(r>0)$ и тогаш од равенството (1) следува $\overline{OA}^2=r^2$, т.е. $\overline{OA}=r$, што значи дека $A\in k_0(O,\sqrt{m})$.

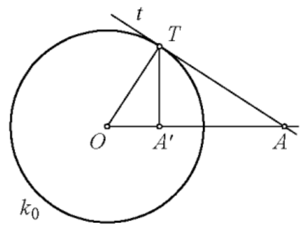
Обратно, ако $A\in k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA}\cdot\overline{OA}=r^2=m$, па затоа $I(A)=A$, т.е. точката A е неподвижна за инверзијата I.

Кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$ ја нарекуваме *кружница на инверзијата* (1). Инверзијата I со центар во O и коефициент $m=r^2$ *ќе ја означуванме со* $I(O,r)$.

2. Внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна точка и обратно. Докажи!

Решение. Ако A е внатрешна точка за кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA}<\sqrt{m}$. Затоа, од $I(A)=A'$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$ следува дека $\overline{OA'}>\sqrt{m}$, што значи дека A' е надворешна точка за k_0. Обратното тврдење се докажува аналогно.

Забелешка 1. Нека A е надворешна точка за k_0 (цртеж десно). Од точката A повлекуваме тангента t кон k_0. Во допирната точка T повлекуваме нормала на полуправата OA. Пресечната точка на OA и нормалата е бараната слика A' на точката A при инверзијата I. Навистина триаголниците $\triangle OTA$ и $\triangle OTA'$ се правоаголни со заеднички агол кај темето O, па затоа тие се слични. Од оваа сличност следува

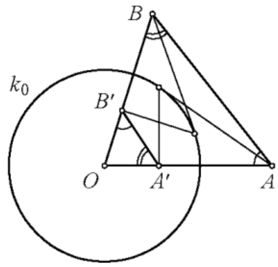


$$\overline{OA'}:\overline{OT}=\overline{OT}:\overline{OA}\text{, т.е. } \overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OT}^2=m=r^2.$$

Ако A е внатрешна точка за k_0, ќе ја искористиме истата конструкција, но во обратен ред, при што A и A' си ги заменуваат местата.

3. Нека I е инверзија со центар во O и коефициент m. Ако A и B се произволни точки и $I(A)=A'$ и $I(B)=B'$, тогаш $\measuredangle OBA=\measuredangle B'A'O$ и $\measuredangle OAB=\measuredangle A'B'O$. Докажи!

Решение. Ако точките A, B и O се колинеарни, тогаш тврдењето е јасно. Затоа, да претпоставиме дека точките A, B и O не се колинеарни и нека се распоредени како на цртеж десно. Од $I(A)=A'$ и $I(B)=B'$, следува $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m$ и $\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=m$, па затоа $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}$, односно $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OB'}:\overline{OA'}$. Според тоа, $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ се слични, па затоа $\measuredangle OBA=\measuredangle B'A'O$ и $\measuredangle OAB=\measuredangle A'B'O$.



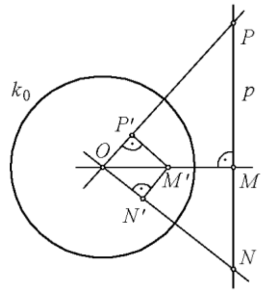
Забелешка 2. Во задача 3 видовме дека $\triangle OAB\sim\triangle OB'A'$, па затоа $\overline{A'B'}=\frac{\overline{AB}\cdot r^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$, $r^2=m$.

4. При инверзија, права која што минува низ центарот на инверзијата се пресликува во самата себе, а права која што не минува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница која што минува низ центарот на инверзијата. Докажи!

Решение. Нека I е дадена инверзија со кружница на инверзија $k_0(O,r)$, а p е произволна права од рамнината.

Ако p минува низ центарот на инверзијата, тогаш од дефиницијата на инверзијата, сликата A' на произволна точка $A(\neq O)$ од p лежи на p, и обратно, произволна точка $B'(\neq O)$ од p е слика на точката B од p. Значи $I(p)=p'=p$.

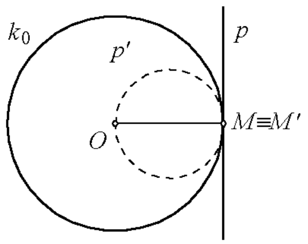
Нека правата p не минува низ центарот на инверзијата, p не ја сече кружницата k_0 и нека M' е сликата на точката M која е пресек на правата p со нормалата на p низ O (цртеж долу десно). На правата p избираме произволна точка $P(\neq M)$ и нека P' е нејзината слика. Од задача 3 следува $\measuredangle OP'M' = \measuredangle OMP$ и како $\measuredangle OMP = 90^\circ$, следува дека $\measuredangle OP'M' = 90^\circ$, т.е. P' лежи на кружница p' чиј дијаметар е $\overline{OM'}$. Конечно, од произволноста на точката P следува дека сликата на правата p е кружницата со дијаметар $\overline{OM'}$.

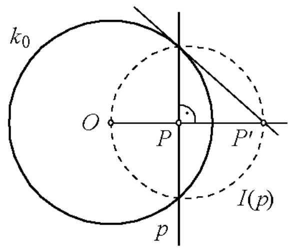


Обратно, нека $N'(\neq O)$ е произволна точка од кружницата p'. Да ја означиме со N пресечната точка на правата ON' со p. За да докажеме дека N' е слика на N при инверзијата I, доволно е да докажеме дека $\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = r^2$. Од $\triangle OM'N' \sim \triangle ONM$ (правоаголни триаголници со заеднички агол во темето O), следува дека $\overline{ON'} : \overline{OM} = \overline{OM'} : \overline{ON}$, т.е. $\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ и како $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = r^2$, добиваме $\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = r^2$. Значи, $p' = I(p)$.

Забелешка 3. а) За да ја конструираме сликата p' на правата p која што не минува низ центарот O на инверзијата, доволно е да ја конструираме сликата M' на точката M и тогаш сликата на правата p' е кружницата со дијаметар $\overline{OM'}$.

Кружницата p' поедноставно се наоѓа во случаите кога p ја допира k_0 (цртеж долу лево), тогаш $M = M'$ и кога p ја сече k_0 (цртеж долу десно).





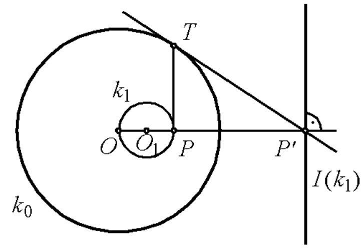
За да ја најдеме кружницата p' во случајот кога правата p ја сече k_0, ја бараме ортогоналната проекција на точката O врз правата p, и нека тоа биде точката P. Во еден од пресеците на кружницата на инверзијата k_0 со правата p повлекуваме тангента t. Пресекот на правата OP со t е сликата P' на точката P при инверзијата I. Бараната кружница (слика на правата p) е кружницата што минува низ пресечните точки на k_0 со p и низ точките O и P', таа има дијаметар $\overline{OP'}$.

б) Да забележиме дека тангентата t на кружницата p' во точката O е нормална на OM, а бидејќи и правата p е нормална на OM, следува дека тангентата (t) кон кружницата слика е паралелна со правата оригинал (p).

5. а) Секоја кружница која што минува низ центарот на инверзијата се пресликува во права која што не минува низ центарот на инверзијата. Докажи!

б) Секоја кружница која што не минува низ центарот на инверзијата се пресликува во кружница која што не минува низ центарот на инверзијата. Докажи!

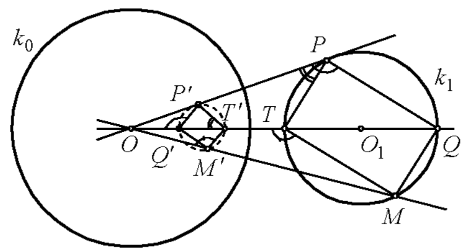
Решение. а) Бидејки секоја кружница што минува низ центарот на инверзијата е слика на права што не минува низ центарот на инверзијата (задача 4), а инверзијата е инволуторно пресликување (задача 1), добиваме дека секоја кружница која што минува низ центарот на инверзија се пресликува во права која што не минува низ центарот на инверзија. На цртежот десно е дадена конструкцијата на сликата на



кружницата, каде инверзијата е дадена со кружницата на инверзија k_0 со центар во точката O, а кружницата k_1 што минува низ O нека има центар во точката O_1. Правата OO_1 ја сече кружницата k_1 во точката P . Во P повлекуваме нормала на правата OO_1, таа ја сече k_0 во точката T . Низ T повлекуваме тангента t на k_0, t ја сече правата OO_1 во точката P' Бараната права е правата низ P' која е нормална на OO_1 .

б) Нека I е дадека инверзија со кружница на инверзија $k_0(O,r)$, а $k_1(O_1,r_1)$ е произволна кружница од рамнината која што не минува низ центарот O на инверзијата I . Ќе ја бараме сликата $k_1^{'}$ на k_1. Да ги означиме со T и Q пресечните точки на правата OO_1 со k_1, со P да означиме произволна точка од k_1 и нека $I(T)=T'$, $I(Q)=Q'$ и $I(P)=P'$. Тогаш $\measuredangle OQ'P'=\measuredangle OPQ$ и $\measuredangle OT'P'=\measuredangle OPT$, па имаме $\measuredangle Q'P'T'=\measuredangle OQ'P'-\measuredangle OT'P'=\measuredangle OPQ-\measuredangle OPT=90^\circ$.

Значи точката P' лежи на кружница $k_1^{'}$, чиј дијаметар е отсечката $\overline{Q'T'}$. Конечно, бидејки P е произволна точка од k_1 следува дека сликите на сите точки од k_1 лежат на $k_1^{'}$.



Обратно, нека M' е произволна точка од кружницата $k_1^{'}$ (оваа кружница е означена со испрекината линија на цртежот десно), а M точка од полуправата OM' за која важи $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=r^2$. Ќе докажеме дека M лежи на k_1. Според задача 3 имаме $\measuredangle OM'Q'=\measuredangle OQM$ и $\measuredangle OM'T'=\measuredangle OTM$, па затоа $\measuredangle TMQ=\measuredangle OTM-\measuredangle OQM=\measuredangle OM'T'-\measuredangle OM'Q'=90^\circ$.

Значи точката M лежи на кружницата k_1. Од досега изнесеното следува дека $k_1^{'}=I(k_1)$. Кружницата $k_1^{'}$ неможе да минува низ центарот O на инверзијата I, бидејки во спротивно кружницата $k_1^{'}$ и правата OO_1 би имале три заеднички точки (Q', P' и O), што не е можно.

За да ја најдеме сликата $k_1^{'}$ на кружницата k_1 при инверзијата I , ќе постапиме на следниот начин. Бидејки центарот $O_1^{'}$ на $k_1^{'}$ не може да се искористи, прво ги наоѓаме точките T и Q на правата OO_1 како нејзини пресеци со кружницата k_1. Потоа ќе ги најдеме $T'=I(T),\ \ Q'=I(Q),$. Од доказот е јасно дека бараната кружница $k_1^{'}$ е кружницата со дијаметар $\overline{Q'T'}$. Конструкцијата е полесна доколку k_1 ја допира или ја сече кружницата k_0, и ја оставаме на читателите за вежба.

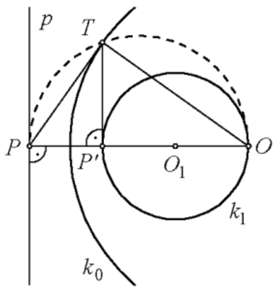
Забелешка 4. Да забележиме дека центрите на кружницата на инверзија, кружницата оригинал и кружницата слика лежат на иста права.

6. Дадени се две прави. Најди инверзија која едната права ја пресликува во другата.

Решение. Од задача 4 следува дека со инверзија права се пресликува во права, ако и само ако таа минува низ центарот на инверзијата, и при тоа се пресликува во самата себе. Значи постои инверзија со бараното својство ако и само ако правите се совпаѓаат и притоа нејзиниот центар може да биде било која точка на правата, а и коефициентот е произволен.

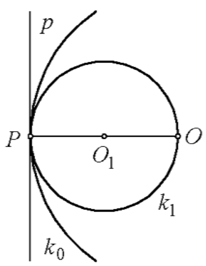
7. Дадени се права и кружница. Најди инверзија која правата ја пресликува во кружницата.

Решение. Од задача 4 следува дека постои инверзија таква што правата ја пресликува во кружницата, при што центарот на таа инверзија ќе биде на кружницата и нема да припаѓа на правата.

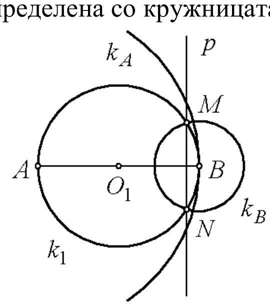


При тоа можни се следните три случаи:

1) Правата p и кружницата $k_1(O_1,r)$ немаат заеднички точки (цртеж десно). Низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече правата p во точката P, а кружницата k_1 во точките O и $P^{'}$, така што P' е меѓу O_1 и P. Над OP, како над дијаметар конструираме кружница, во $P^{'}$ повлекуваме права нормална на OP и во нивниот пресек наоѓаме точка T. На овој начин ја добивме кружницата на инверзијата што ги задоволува условите на задачата, тоа е кружницата $k(O,\overline{OT})$.



2) Правата p и кружницата $k_1(O_1,r)$ се допираат во точката P (цртеж лево). Како и во претходниот случај низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече кружницата k_1 во точката O. Од решението на задача 4 следува дека бараната инверзија е определена со кружницата на инверзија $k(O,\overline{OT})$.



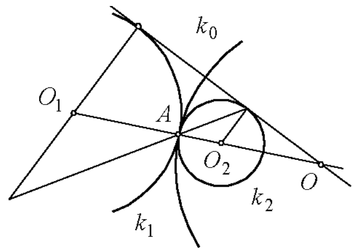
3) Правата p и кружницата $k_1(O_1,r)$ се сечат во точките M и N (цртеж десно). Како и во претходните случаи низ точката O_1 повлекуваме права нормална на p. Таа ја сече кружницата k_1 во точките A и B. Од решението на задача 4 следува дека постојат две инверзии определени со $k_A(A,\overline{AM})$ и $k_B(B,\overline{BM})$ што ги задово-

луваат условите на задачата.

8. Дадени се две кружници. Најди инверзија која едната ја пресликува во другата.

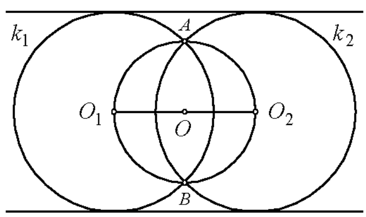
Решение. Според задача 5 со инверзија кружница се пресликува во кружница ако и само ако не минува низ центарот на инверзијата, при што и кружницата - слика исто така не минува низ центарот на инверзијата. Бидејќи било кои две кружници се хомотетични и имаат еден или два центри на хомотетија, постои инверзија која едната кружница ќе ја преслика во другата доколку центарот на хомотетијата не лежи на кружниците, тогаш тој е и центар на инверзијата. Според задача 2, бидејќи секоја внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна и обратно, лесно се гледа кога за кружниците $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$, ($r_1 > r_2$), постои или не постои таква инверзија.

Во најопштиот случај ($O_1 \neq O_2, r_1 \neq r_2$) постојат два центри на хомотетија (внатрешен и надворешен). Да го одбереме, зарадиопределеност, надворешниот центар O за центар на инверзија I . Тогаш постои инверзија со центар во O која што едната кружница ја пресликува во другата. За да ја најдеме, да го означиме со p степенот на точката O во однос на кружницата, па на оваа кружница да примениме инверзија $I(O,p)$ и потоа хомотетија $H(O,\frac{r_2}{r_1})$. Тогаш сликата k_2 на кружницата k_1 се добива со инверзијата $I(O,\frac{pr_2}{r_1})$. Слично се постапува кога центарот на инверзијата е внатрешениот центар на хомотетија за кружниците k_1 и k_2. На цртажотдесно е прикажан еден од можните случаи на поставеност на кружниците k_1 и k_2 ($O_1 \neq O_2, r_1 \neq r_2$, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, т.е. кога тие се допираат однадвор во точката A), тогаш центарот на инверзијата се совпаѓа со надворешниот центар на хомотетија O, па кружницата на инверзија ќе биде $k_0(O,\overline{OA})$, точката A е неподвижна.



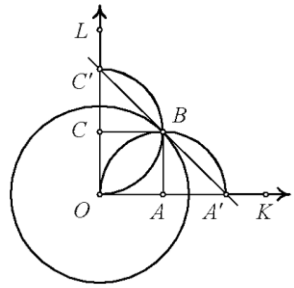
*Посебни случаи:*1) *Концентрични кружници* ($O = O_1 = O_2, r_1 \neq r_2$), тогаш бараната инверзија I е со центар во O и коефициент $m = r_1r_2$. Кружницата на инверзија можеме да ја конструираме ако низ O повлечеме произволна полуправа и искористиме дека пресечните точки на оваа полуправа со кружниците k_1 и k_2 се инверзибилни.

2) *Еднакви кружници* ($O_1 \neq O_2, r_1 = r_2 = r$, $\overline{O_1O_2} < 2r$), постои само еден центар на хомотетија, а тоа е и центарот на инверзијата O кој е средината на отсечката $\overline{O_1O_2}$, пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 се неподвижни, што значи може да се конструира кружницата на инверзија $k_0(O,\overline{OO_1})$, цртеж десно. .



Не постои инверзија со бараното својство во случаите кај еднакви кружници за кои: $O_1 \neq O_2, r_1 = r_2 = r$, $\overline{O_1O_2} = 2r$ и $O_1 \neq O_2, r_1 = r_2 = r$, $\overline{O_1O_2} > 2r$.

9. Дадена е инверзија I со кружница на инверзија $k_0(O,r)$, и квадрат $AOBC$, така што $B \in k_0$. Конструирај ја фигурата што е слика од квадратот $AOBC$ при инверзијата I.

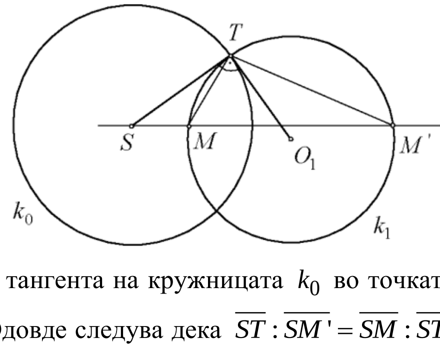


Решение. Бидејки правите OA и OC минуваат низ центарот на инверзијата тие се пресликуваат во самите себе, правите AB и BC не минуваат низ центарот на инверзијата па тие се пресликуваат во кружници што минуваат низ центарот на инверзијата. Бараната фигура ќе ја добиеме на следниот начин: повлекуваме тангента на кружницата k_0 во точката B, тогаш нејзините пресечни точки со полуправите OA и OC се точките $A' = I(A)$ и $C' = I(C)$, па страните на квадратот OA и OC се пресликуваат со инверзијата I во полуправите $A'K$ и $C'L$ соодветно. Точката B се пресликува во самата себе бидејки припаѓа на кружницата на инверзијата. Значи страните AB и CB на квадратот се пресликуваат соодветно во лакот $A'B$ од кружницата $k(A,\overline{AO})$ и лакот $C'B$ од кружницата $k(C,\overline{CO})$ (цртеж десно).

10. Две прави, права и кружница, две кружници кои немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки при инверзијата ги задржуваат овие својства. Докажи!

Решение. Непосредно следува од тоа што инверзијата е биекција.

11. Кружница, различна од кружницата на инверзијата, е неподвижна ако и само ако ортогонално ја сече на кружницата на инверзијата. Докажи!



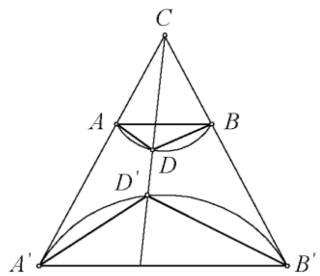
Решение. Нека I е дадена инверзија со кружница на инверзија $k_0(S,r)$ и нека кружницата $k_1(O_1,r_1)$ ортогонално ја сече k_0, а M е произволна точка од k_1, (цртеж десно). Ако со M' ја означиме втората пресечна точка на правата SM со k_1 (да забележиме дека $M \equiv M'$ ако SM ја допира k_1), тогаш ST се јавува како тангента на кружницата k_0 во точката T, една од пресечните точки на k_0 и k_1. Одовде следува дека $\overline{ST} : \overline{SM'} = \overline{SM} : \overline{ST}$ т.е. $\overline{SM} \cdot \overline{SM'} = \overline{ST}^2 = r^2$, значи сликата M' при инверзијата I на произволна точка M од k_1 лежи на k_1. Од произволноста на точката M може да се заклучи дека $I(k_1) = k_1$.

Обратно, нека k_1 е неподвижна при инверзијата *I*, т.е. $I(k_1)=k_1$. Ќе докажеме дека k_1 ортогонално ја сече k_0. Од тоа што k_1 е различна од k_0, следува дека постои точка *M* од k_1 која не лежи на k_0 и која не е неподвижна при инверзијата *I*. Бидејки k_1 е неподвижна при *I*, сликата M' на *M* ќе биде пресечната точка на SM со k_1. Во тој случај исполнето е равенството $\overline{SM}\cdot\overline{SM'}=r^2$ и една од точките *M* и M' е надворешна, а другата внатрешна за k_0. Значи k_1 и k_0 се сечат. Ако *T* е една од двете пресечните точки, тогаш $\overline{SM}\cdot\overline{SM'}=\overline{ST}^2$, од каде е $\overline{ST}:\overline{SM}=\overline{SM'}:\overline{ST}$, па значи $\triangle SMT\sim\triangle STM'$. Одовде $\measuredangle STM=\measuredangle SM'T$. Но, $\measuredangle SM'T=\frac{1}{2}\measuredangle MO_1T$, па затоа $\measuredangle STM=\frac{1}{2}\measuredangle MO_1T$. Значи ST е тангента за k_1. Заклучуваме дека кружницата k_1 ортогонално ја сече k_0.

Забелешка 5. Тврдењето од претходната задача можеме да го искажеме и на следниов начин. Кружница е неподвижна при инверзија ако и само ако ја сече кружницата на инверзија под под прав агол. Кога сме кајаглите под кои се сечат правите и кружниците важи следново тврдење: *Агол меѓу две прави, права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.*

12. Нека *A*, *B*, *C* и *D* се било кои четири точки во рамнината кои не лежат на една права или една кружница. Да се докаже дека аголот под кој се сечат кружниците опишани околу триаголниците *ABC* и *ABD* е еднаков на аголот под кој се сечат кружниците опишани околу триаголниците *CDA* и *CDB*.

Решение. Нека избереме инверзија *I* со центар во *C* и произволен коефициент *m*, и нека $I(A)=A'$, $I(B)=B'$, $I(C)=C'$ и $I(D)=D'$, (цртеж десно). Кружницата која минува низ точките *A*, *B*, *C* да ја означиме со k_{ABC}, а слично и за другите. Ќе користиме дека аглите при инверзија се запазуваат, односно агол се пресликува во нему еднаков агол.

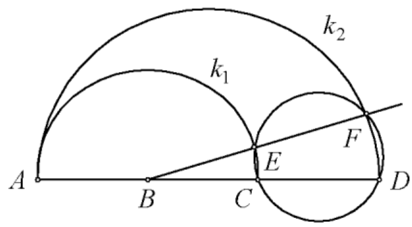


Од задача 5 имаме $I(k_{ABC})=A'B'$ и $I(k_{ABD})=k_{A'B'D'}$, затоа аголот меѓу k_{ABC} и k_{ABD} е еднаков со аголот меѓу $A'B'$ и $k_{A'B'D'}$. Исто така од $I(k_{ACD})=A'D'$, и $I(k_{BCD})=B'D'$, имаме дека аголот меѓу k_{ACD} и k_{BCD} е еднаков со аголот меѓу $A'D'$ и $B'D'$. И бидејки аголот меѓу $A'D'$ и $B'D'$ е еднаков со аголот меѓу $A'B'$ и $k_{A'B'D'}$ како агли над иста тетива $A'B'$ задачата е решена.

13. Точките *B* и *C* лежат на отсечката $\overline{AD}$, при што за нив важи: $\overline{AC}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{\overline{AD}-\overline{AB}}$.

Полуправа со почеток во точката *B* ги сече кружниците со дијаметри $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ во точките *E* и *F*. Докажи дека точките *C*, *D*, *E* и *F* лежат на една иста кружница.

Решение. Точката C е меѓу точките B и D (цртеж десно). Дека навистина е така, да претпоставиме дека С е меѓу A и B. Тогаш, бидејќи $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{BC}$, $\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{BD}$ и $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ од условот на задачата следува:

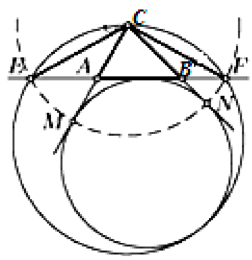


$$(\overline{AB} - \overline{BC}) \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{BD}) \cdot \overline{AB},$$

односно $\overline{AB} \cdot \overline{BD} - \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{AB}$, од каде $-\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2$, што не е можно. Значи точките се разместени на следниот начин: A, B, C и потоа D. Сега не е тешко да се заклучи дека $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2$. Оттука идејата да избереме инверзија $I(B, \overline{AB})$. Притоа, точката A останува неподвижна, а од $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2$, следува дека $I(C) = D$. Од друга страна бидејќи правата $ABCD$ минува низ центрите на кружниците k_1 и k_2, добиваме $I(k_1) = k_2$. Правата EF минува низ B и ги сече k_1 и k_2 во точките E и F, па следува дека $I(E) = F$ и како $I(C) = D$, добиваме дека точките C, D, E и F лежат на иста кружница.

14. Нека s е полупериметарот на $\triangle ABC$ и нека E и F се точки на правата AB такви да важи $\overline{CE} = \overline{CF} = s$. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle EFC$ и кружницата која ја допира страната AB и продолженијата на страните AC и BC на триаголникот ABC се допираат.

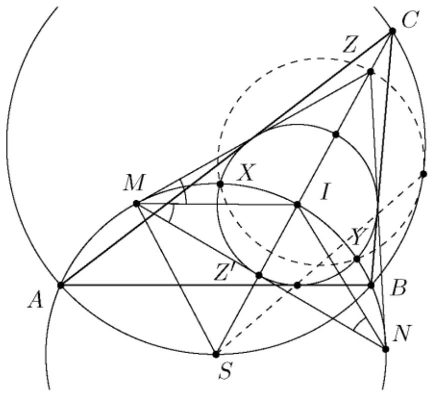
Решение. Припишаната кружница γ на триаголникот ABC наспроти темето C ги допира правите CA и CB во точките M и N така што $\overline{CM} = \overline{CN} = s$. Тоа значи дека при инверзија со центар C и радиус s точките E и F и кружницата γ се пресликуваат во себе, а опишаната кружница околу триаголникот CEF се пресликува во правата AB која ја допира кружницата γ.



Сега тврдењето на задачата следува од фактот, дека ако права и кружница се допираат меѓу себе, тогаш и нивните слики при инверзија се допираат меѓу себе.

15. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница ω со центар I. Околу триаголникот AIB е опишана кружница Γ. Кружниците ω и Γ се сечат во точките X и Y. Заедничките тангенти на ω и Γ се сечат во точката Z. Докажи, дека опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$ се допираат.

Решенија. Со Ω да ја означиме кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Нека симетралата CI по вторпат ја сече Ω во точката S. Тогаш $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SI}$, т.е. S е центар на Γ. Од симетријјата следува дека Z лежи на правата SC.



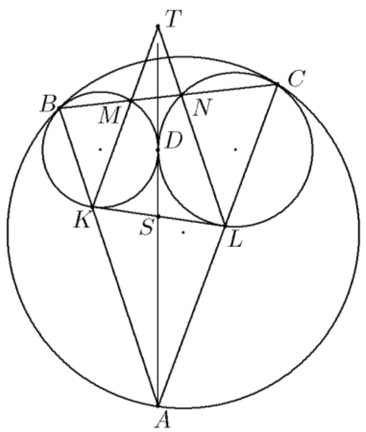
Нека заедничките тангенти на ω и Γ се сечат во точките M и N. Правата низ центрите S и I е симетрала на отсечката MN, па затоа

$$\measuredangle IMN = \measuredangle INM = \measuredangle IMZ$$

(последното равенство е точно бидејќи MZ е тангента на Γ). Според тоа, MI е симетрала на $\measuredangle ZMN$, т.е. растојанијата од I до ZM и MN се еднакви. Бидејќи ω ја допира ZM, следува дека таа ја допира и правата MN во некоја точка Z', а од симетријата следува дека таа точка лежи на SI.

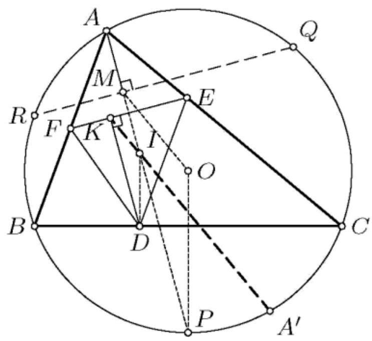
Правоаголните триаголници $SZ'M$ и SZM се слични, па затпа $\overline{SZ} \cdot \overline{SZ'} = \overline{SM}^2$. Тоа значи, дека при инверзија во однос на кружницата Γ слика на точката Z' е точката Z. Според тоа, слика на кружницата ω, која ги содржи точките X, Y и Z' е кружницата опишана околу $\triangle XYZ$. Освен тоа, при оваа инверзија сликата на правата AB е кружницата Ω. Бидејќи ω и AB се допираат, нивните слики исто така се допираат, што и требаше да се докаже.

16. Нека C_1 и C_2 се две кружници, кои надворешно се допираат во точка D, а Γ е кружница која C_1 и C_2 внатрешно ја допираат соодветно во точки B и C. Со A да ја означиме едната од двете пресечни точки на Γ со заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката D. Ако K и L се пресечните точки на AB и AC соодветно со C_1 и C_2, а M и N сае пресечните точки на BC соодветно со C_1 и C_2, докажи дека правите AD, KM и LN се сечат во една точка.



Решение. Нека i е инверзија со центар A и радиус AD. Бидејќи $i(C_1) = C_1$, $i(C_2) = C_2$, $i(B) = K$, $i(C) = L$ и $i(\Gamma) = KL$, заклучуваме дека KL е заедничка тангента на C_1 и C_2. Од друга страна, $\overline{AK} \cdot \overline{AB} = \overline{AD}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{AC}$, па затоа четириаголникот $BCLK$ е тетивен. Ако $T = KM \cap LN$, тогаш $\measuredangle LKT = \measuredangle KBC = \measuredangle ALK$, па затоа $KT \parallel AL$. Аналогно $LT \parallel AK$, од каде што следува дека четириаголникот $AKTL$ е паралелограм. Според тоа, AT ја полови KL. Од друга страна, ако $S = AD \cap KL$, тогаш $\overline{SK} = \overline{SD} = \overline{SL}$, како тангенти. Значи, и AD ја полови KL, па затоа $T \in AD$.

17. Впишаната кружница во триаголникот ABC со центар I ги додира страните BC, CA и AB редоследно во точките D, E и F. Нека AA' е дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, а K е подножјеѕо на нормалата од точката D на правата EF. Докажи дека точките A', I и K се колинеарни.



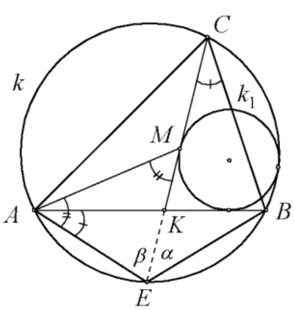
Решение. *Прв начин.* Нека P, Q и R се редоследно вторите точки на пресеците на правите AI, BI и CI со опишаната кружница околу триаголникот ABC. Знаеме дека

$$\overline{QA} = \overline{QC} = \overline{QI} \text{ и } \overline{RA} = \overline{RB} = \overline{RI},$$

па затоа QR е симетрала на отсечката AI и минува низ нејзината средина M. Понатаму, бидејќи $PQ \parallel DE, PR \parallel DF$ и $QR \parallel EF$, триаголникот PQR е сличен со триаголникот DEF, и при таа сличност точките O и M редоследно соодветствуваат на точките I и K. Значи, триагониците POM и DIK се слични и оттука $IK \parallel OM$. Но, исто така $OM \parallel A'I$ како средна линија во $\triangle AA'I$, па затоа тачките A', I и K се колинеарни.

Втор начин. Со D_1, E_1, F_1 да ги означиме средините на отсечките *ЕФ*, *ФД*, ДЕ, соодветно, со k опишаната кружница на $\triangle ABC$ и со γ Ојлеровата кружница на $\triangle DEF$. Разгледуваме инверзија ψ во однос на впишаната кружница на $\triangle ABC$. Имаме $\psi(D_1) = A, \psi(E_1) = B, \psi(F_1) = C$, па затоа $\psi(\gamma) = k$. Бидејќи $K \in \gamma$, следува дека $K' = \psi(K) \in k$. Притоа $\measuredangle IK'A = \measuredangle ID_1K = 90^\circ = \measuredangle A'K'A$, од каде што следува колинеарноста на точките A', И, K, K'.

18. Нека CK е симетрала на $\measuredangle ACB$ на $\triangle ABC$. Кружницата k_1 ги допира отсечките BK и CK и кружницата k опишана околу $\triangle ABC$. Да се докаже дека допирната точка M на CK и k_1 е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

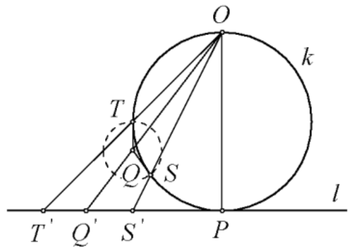


Решение. Нека пресекот на симетралата CK и опишаната кружница k околу $\triangle ABC$ биде точката E, при што јасно е дека E е средина на лакот AB на кружницата k (цртеж десно). Да избереме инверзија $I(E,\overline{EA})$, тогаш точките *A* и *B* се неподвижни, тогаш според задачите 5 и 1, правата *AB* се пресликува во кружницата *k* и обратно, а правата *CE* во самата себе (задача 4). Понатаму, бидејќи кружницата k_1 ја допира *k, AB* и *CE* тогаш и нејзината слика $k_1^{'}$ ги допира нивните слики *AB, k* и *CE*. Значи $k_1 \equiv k_1^{'}$. Тогаш $I(M)=M$, т.е *M* е неподвижна точка при *I*, затоа $\overline{EM}=\overline{EA}$. Значи $\triangle AEM$ е рамнокрак со еднакви агли во темињата *A* и *M*, т.е $\measuredangle MAE=\measuredangle AME=90^\circ-\frac{\beta}{2}$, $\measuredangle AEM=\beta$, како агол над лак *AC*. Од друга страна $\angle EAB=\frac{\gamma}{2}$, како агол над лак *BE*. Конечно,

$$\angle BAM=\angle MAE-\angle EAB=90^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

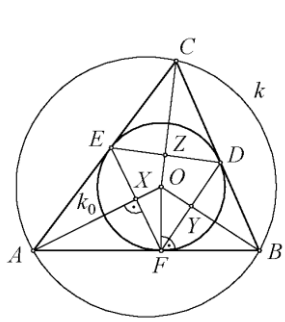
Значи *AM* е симетрала на α. *A*, одовде следува дека точката *M* е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$.

19. Кружницата *k* ја допира правата *l* во точката *P*. Нека точката $O\in k$ е дијаметрално спротивна на *P*. Потоа, нека точките *T* и *S* се произволни точки од кружницата *k*, за кои $OT\cap l=\{T'\}$ и $OS\cap l=\{S'\}$. На крај, во точките *S* и *T* да повлечеме две тангенти на кружницата *k* и тие нека се сечат во точката *Q*, за која $OQ\cap l=\{Q'\}$. Докажи дека точката Q' е средина на отсечката $T'S'$, (цртеж десно).



Решение. Да избереме инверзија $I(O,\overline{OP})$. Тогаш $I(k)=l$, додека $I(T)=T'$ и $I(S)=S'$ се точки од правата *l*. Нека кружницата $k_1(Q,\overline{QS}=\overline{QT})$ ја пресликуваме со инверзија *I* со центар во точка *X*, која припаѓа на полуправата *OQ*. Бидејќи $k_1\perp k$, тогаш $I(k_1)\ =l$, т.е. *l* минува низ центарот *X*. Ова значи дека $X=Q'$ и $\overline{XT'}=\overline{XS'}$, па јасно е дека Q' е средина на $T'S'$.

20. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB во точките *D, E* и *F* соодветно. Нека со *X, Y* и *Z* ги означиме средините на отсечките EF, FD и DE соодветно. Да се докаже дека центрите на впишаната кружница во $\triangle ABC$, опишаната околу $\triangle ABC$ и опишаната околу $\triangle XYZ$ лежат на една права.



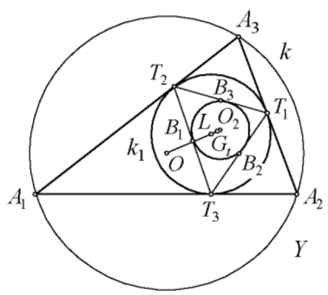
Решение. Ќе користиме дека центрите на кружницата на инверзија, кружницата оригинал и кружницата слика лежат на иста права. Сега да го означиме со O центарот на впишаната кружница k_0 во $\triangle ABC$, (цртеж десно). Јасно е, дека дека AO ја сече EF во точката X и $\measuredangle OFA = \measuredangle FXA = 90^\circ$. Тогаш $\triangle AFO \sim \triangle FXO$, бидејќи и $\measuredangle O$ им е заеднички. Одовде следува дека $\overline{OF} : \overline{OA} = \overline{OX} : \overline{OF}$ односно $\overline{OX} \cdot \overline{OA} = \overline{OF}^2$. Ова значи дека точките A и X се инверзни во однос на точката O. Аналогно се докажува дека и точките B и Y, како и C и Z се инверзни во однос на O. Значи, кружницата опишана околу $\triangle XYZ$ е инверзна слика на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ со центар на инверзија во точката O, па нивните центри лежат на иста права со точката O. Тоа требаше и да се докаже.

21. Да се докаже дека, ако L и O се центри на впишаната и опишаната кружница со радиуси r и R во даден триаголник $A_1A_2A_3$, а T_1, T_2 и T_3 се допирните точки на впишаната кружница со страните на тој триаголник, важи

$$\overrightarrow{LT_1} + \overrightarrow{LT_2} + \overrightarrow{LT_3} = \tfrac{r}{R}\overrightarrow{OL},$$

(цртеж десно.)

Решение. Нека k_1 и k се соодветно впишаната и опишаната кружница на дадениот триаголник $A_1A_2A_3$ и нека B_1, B_2, B_3 и G_t се соодветно средините на страните T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 и тежиштето на $\triangle T_1T_2T_3$. Најнапред да разгледаме хомотетија $H(G_t, -2)$. При тоа добиваме $H(B_j) = T_j$, за. Тогаш ако k_2 е опишаната кружница околу $\triangle B_1B_2B_3$, а O_2 и r_2 се соодветно центарот и нејзиниот радиус, ќе имаме $H(k_2) = k_1$, од каде $r = 2r_2$ и



$$\overrightarrow{G_tL} = -2\overrightarrow{G_tO_2} \qquad (*)$$

Сега ќе разгледаме ин-верзија $I(O, r^2)$ и наоѓаме $I(A_j) = B_j$ за $j = 1,2,3$. Тогаш $I(k) = k_2$ од каде $\frac{\overrightarrow{OL}}{\overrightarrow{LO_2}} = \frac{R}{r_2}$, т.е. $\overrightarrow{LO_2} = \frac{r}{2R} \cdot \overrightarrow{OL}$. Од последното равенство и од (*) следува:

$$3\overrightarrow{LG_t} = 2\overrightarrow{LG_t} + \overrightarrow{LG_t} = 2\overrightarrow{LG_t} + 2\overrightarrow{G_tO_2} = 2\overrightarrow{LO_2} = \tfrac{r}{R}\overrightarrow{OL}.$$

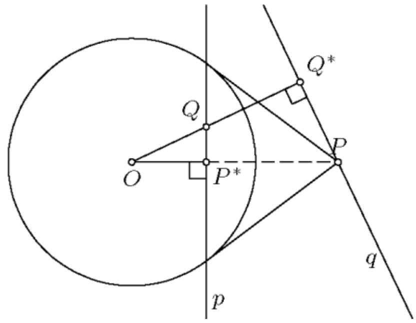
Значи, имаме

$$\overrightarrow{LT_1} + \overrightarrow{LT_2} + \overrightarrow{LT_3} = 3\overrightarrow{LG_t} = \tfrac{r}{R}\overrightarrow{OL},$$

што требаше и да се докаже.

16. ПОЛ И ПОЛАРА

1. Нека е дадена кружницата $k(O,r)$. За точката $P \neq O$ од рамнината на кружницата со P^* ја означуваме инверзната слика на точката P во однос на кружницата k, т.е. точката P^* на полуправата OP за која важи $\overline{OP^*} \cdot \overline{OP} = r^2$. *Полара* на точката P во однос на кружницата k ја нарекуваме правата p која минува низ P^* и е нормална на OP^*. Притоа за точката P ќе велиме дека е *пол* на правата p.



Ако точката P припаѓа на поларата на точката Q во однос на дадена кружница k, тогаш и точката Q припаѓа на поларата на точката P во однос на k. Докажи!

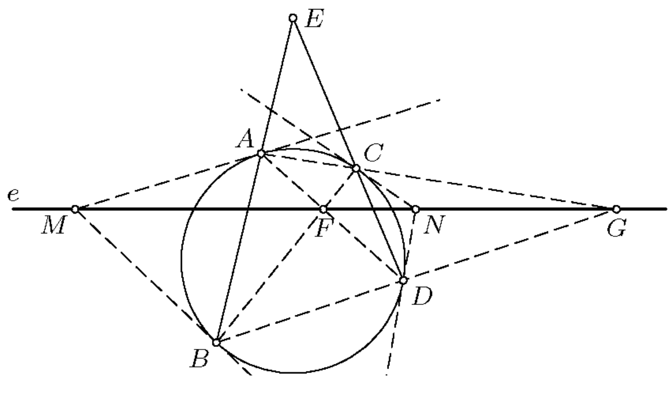
Решение. Јасно, триаголниците OQ^*P и OP^*Q се слични. Ако P припаѓа на поларата на точката Q, тогаш $\angle OQ^*P = 90^\circ$ и затоа $\angle OP^*Q = 90^\circ$, што значи дека Q припаѓа на поларата на точката P.

Забелешка. а) Пресликувањето кое секоја точка ја пресликува во нејзината полара, а секоја права во нејзиниот пол го нарекуваме поларно пресликување.

б) Од својствата на инверзијата следува дека ако точката P е надвор од кружницата, тогаш нејзината полара е правата MN, каде M и N се допирните точки на тангентите повлечени од P кон кружницата k.

2. Нека точките A, B, C, D припаѓаат на кружницата k. Ако правите AB и CD се сечат во точката E, правите BC и AD во точката F и правите AC и BD во точката G, тогаш FG е поларата на точката E во однос на кружницата k. Докажи!

Решение. Со M да го означиме пресекот на тангентите на k во точките A и B, а со N пресекот на тангентите во C и D. Поларите на точките M и N се правите AB и BD, соодветно, и овие прави ја содржат точката E.



Сега од задача 1 следува дека точките M и N припаѓаат на поларата на точката E. Последното значи дека правата MN е поларата на точката E. Но, според теоремата на Паскал точките F и G припаѓаат на правата MN, што значи дека правата FG е поларата на точката E во однос на кружницата k.

4 (Теорема на Брокар). Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k со центар O. Ако правите AB и CD се сечат во точката E, правите BC и AD во точката F и правите AC и BD во точката G, тогаш O е ортоцентар на триаголникот EFG. Докажи!

Решение. Според задача 3 правата FG е поларата на точката E во однос на кружницата k, па затоа $OE \perp FG$. Аналогно $OF \perp EG$ и $OG \perp EF$, што значи дека точката O е ортоцентар на триаголникот EFG.

5 (Брајаншонова теорема). Во тангентен шестаголник $ABCDEF$ дијагоналите AD, BE и CF се сечат во една точка. Докажи!

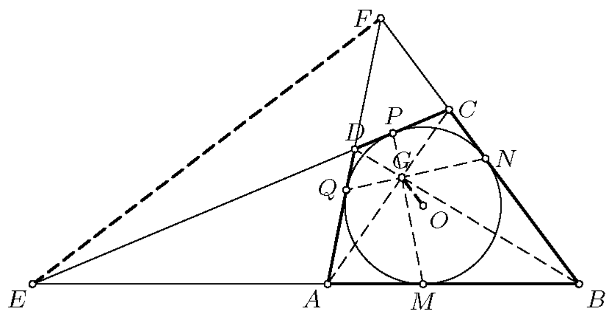
Решение. Правите AD, BE, CF се сечат во една точка (се конкурентни) ако и само ако нивните полови се колинеарни. Со P, Q, R, S, T, U да ги означиме допирните точки на впишаната кружница со страните AB, BC, CD, DE, EF, FA, соодветно. Поларите на точките A и D се правите UP и RS, соодветно, што значи дека полот на правата AD е пресекот $UP \cap RS$. Аналогно половите на правите BE и CF се точките $PQ \cap ST$ и $QR \cap TU$. Според теоремата на Паскал овие три поласе колинеарни, со што тврдењето е докажано.

6. Ако впишаната кружница во тангентен четириаголник $ABCD$ ги допира страните AB, BC, CD, DA во точките M, N, P, Q, соодветно, тогаш правите AC, BD, MP, NQ се сечат во една точка. Докажи!

Решение. Непосредно следува од Брајаншоновата теорема. деталите ги оставаме на читателот за вежба.

7. Нека четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружницата k со центар во O. Ако правите AB и CD се сечат во точката точката E, правите BC и AD во точката F и правите AC и BD во точката G, тогаш EF е полара на точката G, т.е. $OG \perp EF$.

Решение. Нека кружницата k ги допира страните AB, BC, CD, DA во точките M, N, P, Q, соодветно. Според Брајншановата теорема точката G припаѓа на правата MP. Бидејќи MP е полара на точката E во однос на k, заклучуваме дека точката E лежи на поларата на точката G. Аналогно и F лежи на истата полара, па затоа EF е полара на точката G, т.е. $OG \perp EF$.

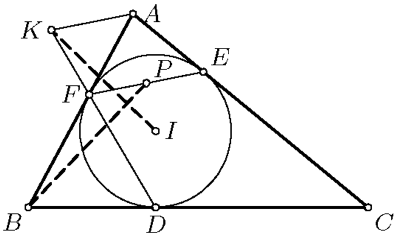


8. Даден е тнгентен трапез $ABCD$ $(AB \| CD)$ кој не е ромб со центар O на вписаната кружница и пресек на дијагоналите G. Докажи дека правата OG е нормална на AB.

Решение. Непосредно следува од задача 7, при што треба да се разгледува дегенериран случај. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

9. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Правата низ A паралелна на правата EF ја сече DF во K. Ако P е средина на отсечката EF, докажи дека $IK \perp BP$, каде I е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Да го примениме поларното пресликување. Пол на правата EF е точката A. Поларата на точката P минува низ A и е нормална на IP, па затоа тоа е правата AK бидејќи $AK \| EF$. Со други зборови P е пол на правата AK. Полот на правата DF е точката B, од каде добиваме дека точката $AK \cap DF = K$ е пол на правата BP, па затоа $IK \perp BP$.



10. Во остроаголен $\triangle ABC$ тангентите повлечени од A на кружницата со дијаметар BC ја допираат оваа кружница во точките P и Q. Докажи дека точките P и Q и ортоцентарот H колинеарни.

Решение. Подножјата B' и C' на висините соодветно од B и C припаѓаат на k. Правата PQ е полара на точката $A = BC'' \cap CB'$, па од теоремата на Брокар применета на четириаголникот $BCB'C'$ следува дека таа ја содржи точката $BB' \cap CC' = H$.

11. Нека AD и BE се висини на $\triangle ABC$ и H е негов ортоцентар. Нека M е средината на отсечката CH и N е пресекот на правите DE и CH. Докажи дека N е ортоцентар на $\triangle ABM$.

Решение. Четириаголникот $CHED$ е вписан во кружницата чиј центар е M. Затоа тврдењето на задачата следува од теоремата на Брокар применета на овој четириаголник.

12. Нека P и Q се точки на полукружница со дијаметар UV такви што $\overline{UP} < \overline{UQ}$. тангентите на полукружницата во точките P и Q се сечат во точката R, а правите UP и VQ се сечат во точката S. Докажи дека $RS \perp UV$.

Решение. Со K да го означиме пресекот на PQ и UV. Според задача 2 поларата на точката K ја содржи точката S. Исто така точката K припаѓа на правата PQ, а тоа е поларата на точката R, од каде според теорема Т3 R припаѓа на поларата на точката K. Според тоа RS е поларата на точката K, па затоа $RS \perp UV$.

13. Нека $ABCD$ е тетивен и тангентен четириаиголник, а $\Gamma(O,R)$ и $\gamma(I,r)$ се неговите опишана и впишана кружница, соодветно. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката E. Докажи дека точките E,I,O се колинеарни.

Решение. Нека $F = AB \cap CD$ и $G = BC \cap DA$. Според задачите 2 и задача 7 поларата на точката E во однос на било која од кружниците Γ и γ е правата FG, па затоа правите IE и OE се нормални на FG. Последното значи дека точките E,I,O се колинеарни.

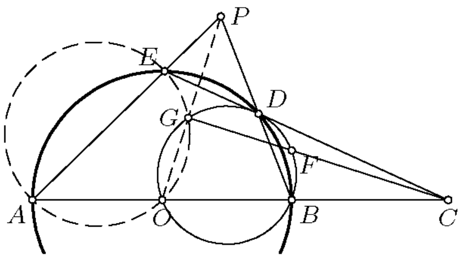
14. Дадена е кружница k е две различни точки A и B на неа. Тетивата CD минува низ средината M на тетивата AB. Нека AC и BD се сечат во точката K. Правата KM ја сече k во I и H, со распоред $K-I-M-H$. Ако AI и BH се сечат во L докажи дека точките K,I,D,L се концикличени.

Решение. Според задача 2 поларата на точката M ги содржи точките K и L, што значи дека тоа е правата KL. Според тоа, $OM \perp KL$, каде O е центарот на кружницата. Но, $OM \perp AB$, па затоа $KL \,||\, AB$. Според тоа,

$$\measuredangle KLI = \measuredangle BAI = \measuredangle BDI = \measuredangle KDI \,,$$

па затоа точките K,I,D,L се концикличени.

15. Точката C припаѓа на правата која го содржи дијаметарот AB на кружницата k со центар O и е таква што B е меѓу A и C ($A-B-C$). Права низ C ја сече k во точките D и E. Нека OF е дијаметар на кружницата OBD. Ако CF по втор пат ја сече кружницата OBD во точката G, докажи дека точките O,A,E,G се концикличени.



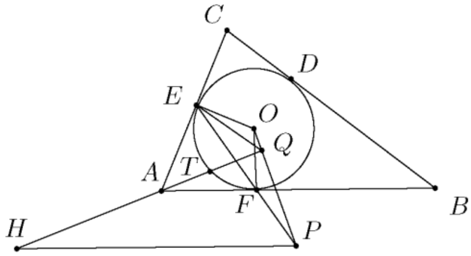
Решение. Правите EB и FD се тангенти на кружницата k, па затоа BD е полара на точката F и таа ја содржи точката P. Следува дека поларата p на точката P ја содржи точката F, а знаеме дека $C \in p$, што значи дека p е правата CF, која ја содржи точката G. Притоа $p \perp OP$, па како $\measuredangle OGF = 90^\circ$ добиваме дека точките O,G и P се колинеарни. Сега, од равенствата

$$\overline{PA} \cdot \overline{PE} = \overline{PB} \cdot \overline{PD} = \overline{PO} \cdot \overline{PG}$$

следува дека точките O,A,E,G се концикличени.

16. Впишаната кружница ω во $\triangle ABC$ ги допира страните BC,CA и AB соодветно во точките D,E и F. Права низ темето A го сече лакот EF (кој не ја содржи D) во точката T. Правата низ T, која ја допира ω, ја сече правата EF во точката P, а правата низ P, паралелна со AB, ја сече правата AT во точката H. Докажи дека $\measuredangle HEF = 90^\circ$.

Решение. Со O да го означиме центарот на ω. Точката A е *пол* на правата EF во однос на ω. Бидејќи $P\in EF$, заклучуваме дека поларата на P минува низ точката A. Тоа значи, дека AT е поларата на точката P и $OP\perp AT$. Ако $Q=OP\cap AT$, тогаш точките A,F,Q,O и E лежат на кружницата со дијаметар AO. Тогаш



$\measuredangle PHA=\measuredangle FAQ=\measuredangle FEQ=\measuredangle PEQ$, од каде следува дека $HPQE$ е тангентен четириаголник. Според тоа, $\measuredangle HEP=\measuredangle HQP=90^{\circ}$.

17. Даден е рамнокрак $\triangle ABC, \overline{AC}=\overline{BC}$. Точката D е од правата BA, при што A лежи меѓу B и D. Нека o_1 е опишаната кружница околу $\triangle DAC$ и нека o_1 ја сече BC во точката E. Точката F е од правата BC, при што FD е тангента на o_1. Опишаната кружница o_2 околу $\triangle DBF$ ја сече o_1 во точка $G, G\neq D$. Ако O е центарот на опишаната кружница o околу $\triangle BEG$, докажи дека FG е тангента на o ако и само ако $DG\perp FO$

Решение. Прво ќе докажеме, дека DB и DE се тангенти на o. Бидејќи четириаголникот $DFBG$ е тетивен, важи $\measuredangle FDG=\measuredangle GBE$ и како FD е тангента на o_1 добиваме $\measuredangle DEG=\measuredangle FDG$. Според тоа, $\measuredangle GBE=\measuredangle DEG$, што значи дека DE е тангента на o.

Од друга страна, четириаголникот $AECD$ е тетивен и

$$\measuredangle BAC=\measuredangle BED,$$

а $\triangle ABC$ е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=\measuredangle DBE.$$

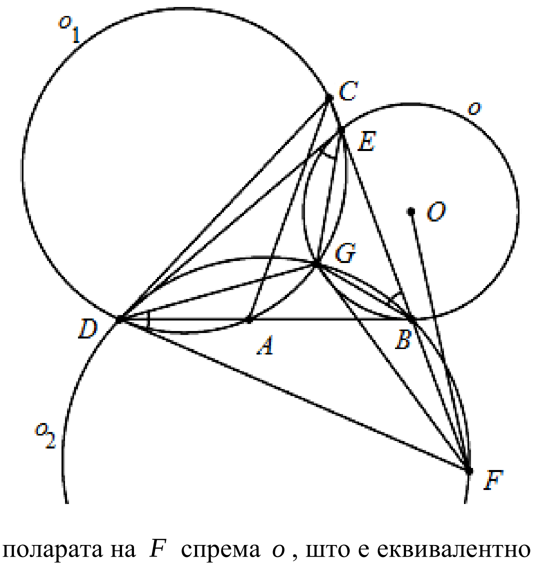
Според тоа,

$$\measuredangle DBE=\measuredangle DEB$$

и $\triangle DBE$ е рамнокрак со

$$\overline{DB}=\overline{DE},$$

што значи, дека DB е тангента на o.



Бидејќи DB и DE се тангенти на o, добиваме дека FE е поларата на D кон од o. Тогаш D лежи на поларата на F спрема o. Според тоа, FG е тангента на o ако и само ако DG е поларата на F спрема o, што е еквивалентно со $DG\perp FO$.

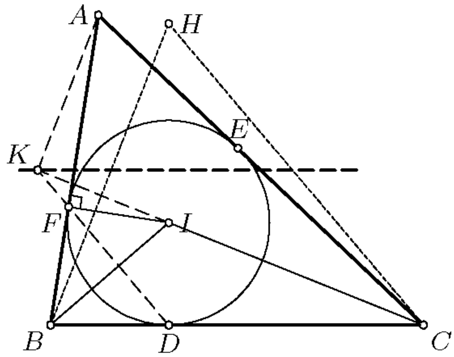
18. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC,CA,AB во точките D,E,F, соодветно. Нека

$$P = EF \cap BC, Q = FD \cap CA \text{ и } R = DE \cap AB.$$

Ако I е центарот на впишаната кружница и $G = AD \cap BE \cap CF$ е точката на Жергон, докажи дека точките P, Q, R лежат на права нормална на IG.

Решение. Правите EF и BC соодветно се полари на точките A и D во однос на впишаната кружница, па затоа нивниот пресек P е пол на правата AD. Поларата на точката G ја содржи точката P и аналогно ги содржи точките Q и R. Затоа точките P, Q, R лежат на една права која е нормална на IG.

19. Во $\triangle ABC$ точката I е центарот на впишанат кружница ω, а H е ортоцентарот на $\triangle BIC$. Докажи дека поларата на точката H во однос на кружницата ω е средна линија на $\triangle ABC$.



Решение. Со D, E, F да ги означиме допирните точки на кружницата ω со страните BC, CA, AB, соодветно. Ќе го определиме полот на правата BH. Бидејќи $BH \perp CI$, точката K припаѓа на правата CI. Осто така, бидејќи полара на точката B е правата DF, точката K припаѓа на правата DF, па затоа $K = DF \cap CI$. Според тоа,

$$\measuredangle IKD = \measuredangle KDB - \measuredangle KCB = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle IAF,$$

од каде што следува дека точките A, I, K, F се конциклични, а оттука следува дека $\measuredangle IKA = \measuredangle IFA = 90^\circ$. Точката симетрична на A во однос на K (т.е. во однос на правата CI) припаѓа на правата BC. Последното значи дека K припаѓа на средната линија на $\triangle ABC$ паралална на BC. Слично, полот L на правата CH лежи на истата средна линија, а полара на точката H е правата Kl, т.е. споменатата средна линија.

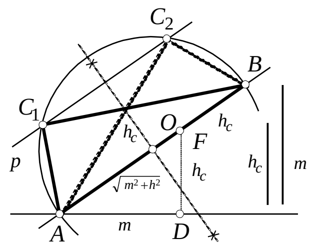
20. Кружницата k впишана во $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката F. Нека I е центар на кружницата k, M е средина на странмата AB и H е ортоцентар на $\triangle BIC$. Докажи дека правата HF е нормална на правата IM.

Решение. Според претходната задача M припаѓа на поларата на точката H, па поларата на точката M ги содржи точката H и подножјето F на тангентата, па значи тоа е правата FH. Последното значи дека правата HF е нормална на правата IM.

18. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Конструирај правоаголен триаголник со дадена висина h_c и разликата на катетите $m = a - b$.

Решение. _Анализа._ Прво ќе ја пресметаме хипотенузата на триаголникот. За неговата плоштина имаме $\frac{ab}{2} = P = \frac{ch_c}{2}$, од што добиваме $ab = ch_c$. Ако го квадрираме равенството $m = a - b$ ќе добиеме $a^2 - 2ab + b^2 = m^2$ и со користење на $ab = ch_c$ имаме $c^2 - 2ch_c - m^2 = 0$. Решенија на последната равенка по непознатата c се $c_{1,2} = h_c \pm \sqrt{m^2 + h_c^2}$. Бидејќи $\sqrt{m^2 + h_c^2} > |h_c| = h_c$ следува дека $h_c - \sqrt{m^2 + h_c^2} < 0$ па позитивно решение е $c = h_c + \sqrt{m^2 + h_c^2}$. Значи задачата се сведува на кострукција на правоаголен триаголник со познати хипотенуза c и висина h_c.

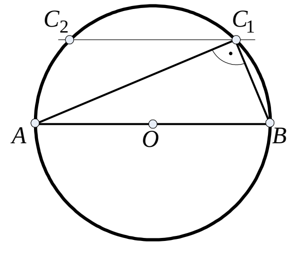


Конструкција. Го конструираме $\sqrt{m^2 + h_c^2}$. Прво конструираме отсечка AD со должина m. Од точката D повлекуваме нормала DF на AD со должина h_c. Сега $\sqrt{m^2 + h_c^2} = \overline{AF}$. Отсечката AF ја продолжуваме од страната на F за растојание h_c (продолжувањето може да се направи и од страната на A со соодветни измени на ознаките понатаму). Така добиваме отсечка AB со должина $h_c + \sqrt{m^2 + h_c^2} = c$. Натаму конструираме кружница со дијаметар AB и права p паралелна со AB и на растојание h_c од AB. Точката C е пресечна точка на кружницата со правата p. Така е конструиран правоаголниот триаголник ABC.

Доказ. Следува од конструкцијата. Аголот ACB е прав како периферен агол над дијаметарот.

Дискусија. Бидејќи $h_c < \sqrt{m^2 + h_c^2}$ следува дека $c = h_c + \sqrt{m^2 + h_c^2} > 2h_c$, т.е $h_c < \frac{c}{2}$ па секогаш правата p ќе има две пресечни точки C_1 и C_2 со кружницата. Значи задачата секогаш ќе има две решенија (тоа се триаголниците AC_1B и AC_2B на цртежот). Ако правата p се нанесе од другата страна на AB ќе се добијат повторно две пресечни точки и секој од двата триаголници што ќе се добијат притоа ќе биде складен со еден од претходните, па овие две решенија ги сметаме еднакви до складност со првите две.

2. Да се конструира правоаголен триаголник ABC, со прав агол кај темето C, ако е дадена хипотенузата c, а тежишната линија t_c е геометриска средина на катетите.



Решение. По услов имаме $t_c^2 = ab$; но, $t_c = \frac{c}{2}$, па, значи, $c^2 = 4ab$.

За висината h_c имаме $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{c}{4}$, па триаголникот ABC (со дадени c и h_c) може да се конструира.

Конструкција. 1) $\overline{AB}=c$;

2) O средина на AB;

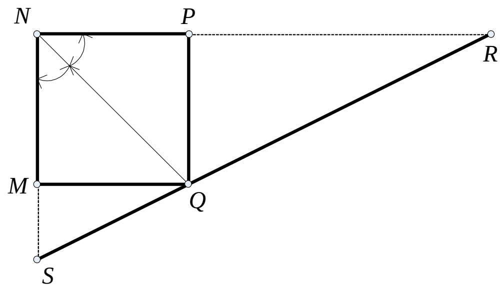
3) права p, паралелна со AB и на растојание $h_c=\frac{c}{4}$ од неа;

4) кружница $k(O,\overline{OA})$;

5) темето C припаѓа на $P\cap k$ (види цртеж).

3. Да се конструира квадрат така што сите негови страни да минуваат низ три колинеарни точки.

Решение. Нека дадените три колинеарни точки се S,Q и R. Од условот на задачата веднаш следува дека едно теме од квадратот што треба да се конструира мора да биде во една од дадените три точки. Нека тоа биде точката Q. Ако темињата на бараниот квадрат ги обележиме со M,N,P и Q, тогаш ако ја конструираме точката N, јасно е како ќе се добијат и останатите темиња M и P (види цртеж).



Точката N се добива како пресек на следниве две геометриски места на точки:

- геометриско место на точки од кои отсечката RS се гледа под прав агол.

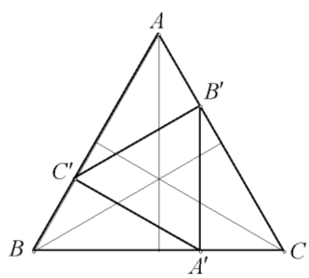
- геометриско место на точки од кои отсечката SQ (QR) се гледа под агол од 45°.

Познато е како се конструираат тие две геометриски места.

4. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Нека E е множеството од сите точки од отсечките AB, BC и CA (вклучувајќи ги и A,B и C). Дали е точно дека за било која поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои правоаголен триаголник со темиња во едно од тие подмножества?

Решение. Ќе докажеме дека за секоја поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои правоаголен триаголник чии темиња припаѓаат на едно исто подмножество.

Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно, т.е. дека постои поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества X и Y така што ниту едно од нив не содржи три точки кои се темиња на правоаголен триаголник.



Разгледуваме триаголник $A'B'C'$, таков што $A'\in BC$, $B'\in AC$, $C'\in AB$ и точките A',B',C' ги делат страните во однос $2:1$. Од точките A',B',C' барем две, да речеме A' и B', припаѓаат на исто подмножество, на пример X. Тогаш сите точки од отсечката BC (освен A') припаѓаат на множеството Y. Ако точката C' припаѓа на множеството Y, тогаш точките C',B и проекцијата на точката C' на страната BC исто така припаѓаат на Y. Ако C' припаѓа на множеството X, тогаш сите точки од отсечката AB (освен C') исто така припаѓаат на множеството Y, што значи дека Y ќе ги содржи точките A, B и проекцијата на точката A на BC, а тоа се темиња на правоаголен триаголник. И во двата случаја добивме противречност со претпоставката, што значи дека тврдењето е вистинито.

5. Докажи дека за секој природен број m постои непразно конечно множество S од точки од рамнината со следното својство: секоја точка од множеството S е на единечно растојание од точно m други точки од S.

Решение. Тврдењето од задачата е точно за $m=1$. (Доволно е да се земат две точки на единечно растојание). Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број m. При тоа нека $S=\{A_1, A_2,..., A_n\}$. Околу секоја точка A_i, $i=1,2,...,n$, опишуваме единечна кружница. Оние точки кои припаѓаат барем на две од опишаните кружници ги има конечно многу. Нека тоа се точките $Q_1, Q_2,..., Q_r$. Нека $\vec{e}$ е единичен вектор различен од секој од векторите $\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_iQ_k}$, за $i, j \in \{1,2,...,n\}$ и $k \in \{1,2,...,r\}$. При транслација за вектор $\vec{e}$ точката A_i се пресликува во точката B_i, $i \in \{1,2,...,n\}$.

Да го разгледаме множеството $S=\{A_1, A_2,..., A_n, B_1, B_2,..., B_n\}$. Секоја точка од ова множество е на единечно растојание од $m+1$ точка од тоа множество. Сега тврдењето на задачата следува од принципот на математичка индукција.

6. Во рамнината е дадено конечно множество од прави кои по парови се сечат, при што низ секоја пресечна точка на две прави минува барем уште една од дадените прави. Докажи дека сите прави се сечат во една точка.

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно, односно постојат конечно прави во рамнината такви што низ секоја пресечна точка минуваат барем три прави и постојат барем две пресечни точки. Во тој случај постои права p и барем една пресечна точка S што лежи на правата p. Бидејќи множеството на пресечни точки е конечно ќе постои пресечна точка кој е на најмало растојание од правата p (пресечната точка не лежи на правата p). Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека таква е точката S. Низ S минуваат барем три прави и тие ја сечат правата p во барем три точки. Нека три од нив се точките X, Y, Z и нека Y се наоѓа меѓу X и Z. Во точката Y се сечат правите p и SY па низ Y минува барем уште една права q. Правата q мора да сечи една од отсечките XS и ZS. Нека на пример q ја сечи отсечката SZ во точката T. Значи, S не е најблиската пресечна точка од правата p, бидејќи T е на помало растојание од p. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

7. Даден е $n-$аголник кај кој сите внатрешни агли се еднакви и чии последователни страни ги задоволуваат неравенствата

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n.$$

Докажи дека $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

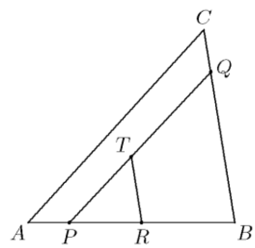
Решение. Да го разгледаме случајот кога $n=2k+1$. Симетралата на аголот со теме A_1, помеѓу a_1 и a_n е нормална на страната $A_{k+1}A_{k+2}$.

На оваа симетрала ги проектираме искршените линии $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_nA_{n-1}...A_{k+2}$. Двете проекции имаат еднаква должина. Аглите меѓу страните A_iA_{i+1} и $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(i \le k)$ и симетралата се еднакви. Затоа должината на проекцијата на страната A_iA_{i+1} не е помала од должината на проекцијата на страната $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. Ако во низата неравенства $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n$ постои строго неравенство, тогаш ќе имаме строго неравенство и во должините на проекциите на $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_nA_{n-1}...A_{k+2}$, што противречи на добиеното равенство.

Случајот $n=2k$ се разгледува аналогно, со таа разлика што проекциите се на права која е нормална на правата A_1A_{n+1}.

8. Нека S е множеството внатрешни точки на даден триаголник без една контурна точка. Докажи, дека S може да се претстави како унија на затворени отсечки такви што не постојат две отсечки кои имаат заедничка точка.

Решение. Нека точките $P \in AB, Q \in BC$ и $R \in AB$ се такви што $T \in PQ, PQ \parallel AC$ и $TR \parallel BC$. Ги разгледуваме сите затворени отсечки $XY,\ X \in AP,\ X \ne P, Y \in CQ,$ $Y \ne Q$. Овие отсечки го покриваат трапезот $APQC$ без отсечката PQ. Аналогно, отсечките $MN, M \in QT,$ $M \ne T,\ N \in BR,\ N \ne R$ го покриваат трапезот $TRBQ$ без отсечката TR. На крајот, на ист начин го покриваме $\triangle PRT$ без точката T со отсечки паралелни со PR.



9. Во рамнина се дадени n $(n \ge 3)$ точки. Нека d е најголемото растојание меѓу две од овие точки. Докажи дека од точките може да се формираат најмногу n парови такви што растојанието меѓу точките во секој пар е еднакво на d.

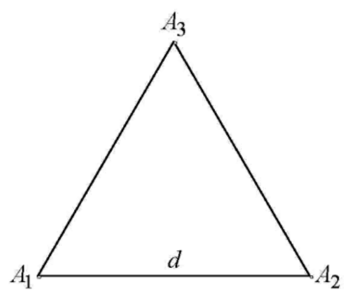
Решение. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција. Најголемото растојание меѓу две од n дадени точки, го нарекуваме дијаметар и го означуваме со d.

(a) Ако се дадени три точки тогаш бројот на дијаметри може да биде најмногу три, и тоа кога $\Delta A_1A_2A_3$ е рамностран.

(b) Нека за некој $n \ge 3$ бројот на дијаметри е еднаков на n. Доволно е да докажеме дека

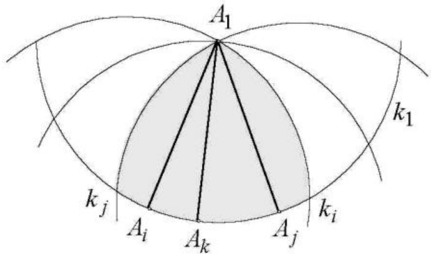
$$\{A_kA_l \mid \overline{A_kA_l} = d = \max_{i,j=1,2,...,n+1} \overline{A_iA_j}\}$$

има најмногу $n+1$ елемент.



Ги повлекуваме сите дијаметри во множеството од $n+1$ точки $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n+1}$. Можни се два случаи.

1° Од секоја од дадените $n+1$ точки поаѓаат најмногу два дијаметри. Тогаш, најголемиот број на дијаметри е $2(n+1)\frac{1}{2}=n+1$, бидејќи секој дијаметар се брои два пати.



2° Од една точка, на пример од A_1, поаѓаат барем три дијаметри. Нека тие дијаметри се A_1A_i, A_1A_j и A_1A_k. Бидејќи

$$\overline{A_1A_i}=\overline{A_1A_j}=\overline{A_1A_k}=d\,,$$

точките A_i, A_j и A_k лежат на кружница со центар A_1 и радиус d. Бидејќи $\overline{A_iA_j}$, $\overline{A_iA_k}$, $\overline{A_jA_k}\le d$, точките A_i, A_j и A_k се наоѓаат во кружен исечок со централен агол не поголем од 60°. Ако точката A_k е на кружниот лак A_iA_j ($\measuredangle A_jA_1A_i\le 60^\circ$), тогаш сите $n+1$ точки лежат во пресекот на кружниците k_1, k_i и k_j (k_i и k_j се кружници со радиуси d и со центри во точките A_i и A_j, соодветно). Тогаш A_1 е единствена точка од даденото множество точки која од A_k е на растојание d, т.е. од A_k поаѓа еден единствен дијаметар A_kA_1. Множеството од n точки $\{A_1,A_2,A_3,...,A_{n+1}\}\setminus\{A_k\}$ има, според индуктивната претпоставка, најмногу n дијаметри. Ако во тоа множество ја додадеме точката A_k, од која поаѓа само еден дијаметар, добиваме множество со $n+1$ точка кое има најмногу $n+1$ дијаметар.

Да ги разгледаме уште случаите кога овој број на дијаметри се достигнува. Ако n е непарен број доволно е да се земат темињата на правилен $n-$аголник. Ако n е парен, се земаат сите темиња на правилен $(n-1)-$аголник $A_1, A_2, A_3,..., A_{n-1}$ и на лакот на кружницата со центар во $A_{\frac{n}{2}}$ и дијаметар $d=\overline{A_{\frac{n}{2}}A_1}$ било која точка помеѓу точките A_1 и A_{n-1}.

10. Најди ги сите природни броеви $n>3$ за кои постојат n точки $A_1,A_2,...,A_n$ во рамнината и реални броеви $r_1,r_2,...,r_n$, такви што се исполнети условите:

(a) било кои три точки од точките $A_1,A_2,...,A_n$ се неколинеарни,

(b) за секои i,j,k $(1\le i<j<k\le n)$, плоштината на триаголникот $A_iA_jA_k$ е еднаква на $r_i+r_j+r_k$.

Решение. Ќе докажеме дека $n=4$ е единствениот природен број што ги задоволува условите на задачата.

Нека $n=4$, $A_1A_2A_3A_4$ е единечен квадрат и $r_i=\frac{1}{6}, i=1,2,3,4$. Тогаш, условите на задачата се задоволени.

Ќе докажеме дека бројот 5 не ги задоволува условите на задачата, од каде ќе следува дека не постои природен број $n\ge 5$, кој ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека бројот 5 ги задоволува условите на задачата. Плоштината на триаголникот $A_iA_jA_k$ ја означуваме со $[ijk]$. Имаме, $[ijk]=r_i+r_j+r_k$, за $1\le i<j<k\le 5$. Ако на пример $r_4=r_5$, тогаш $[124]=[125]$ и $[234]=[235]$, од што следува дека A_5A_4 е паралелна со A_1A_2 и A_2A_3, што не е можно бидејќи точките A_1, A_2, A_3 не се колинеарни. Да забележиме дека ако четириаголникот $A_iA_jA_kA_l$ е конвексен, тогаш важи $[ijk]+[kli]=[jkl]+[lij]$, од што следува $r_i+r_k=r_j+r_l$.

Да ја разгледаме конвексната обвивка на точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, т.е. тоа е конвексниот многуаголник чии темиња припаѓаат на множеството $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Можни се следните три случаи.

Прво, да претпоставиме конвексната обвивка е петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Бидејќи $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ се конвексни четориаголници, од претходните забелешки добиваме дека $r_1+r_3=r_2+r_4$ и $r_1+r_3=r_2+r_5$. Од овде е $r_4=r_5$, што е противречност.

Прво да претпоставиме дека конвексната обвивка е четириаголник $A_1A_2A_3A_4$. Не се губи од општоста ако се претпостави дека A_5 се наоѓа во триаголникот $A_3A_4A_1$. Тогаш $A_1A_2A_3A_5$ е конвексен четириаголник, и добиваме иста противречност како и во првиот случај.

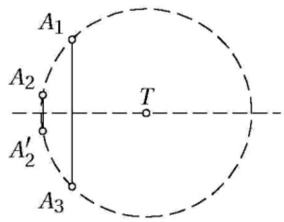
На крај, да претпоставиме дека конвексната обвивка е триаголникот $A_1A_2A_3$. Бидејќи

$$[123]+[234]+[314]=[125]+[235]+[315]$$

добиваме дека $r_4=r_5$ што е противречност.

11. Определи ги сите конечни множества точки во рамнината S кои содржат барем три точки и кои го задоволуваат следниов услов: за секои две различни точки A и B од S, симетралата на отсечката AB е оска на симетрија на множеството S.

Решение. За произволни различни точки $A, B\in S$, симетријата во однос на симетралата s_{AB} на отсечката AB го пресликува множеството S во себе, па така го пресликува и тежиштето T на множеството S во себе. Значи, $T\in s_{AB}$, т.е. $\overline{TA}=\overline{TB}$. Последното значи дека целото множество S припаѓа на кружница со центар T.



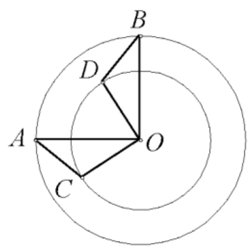
Нека точките на множеството S определуваат конвексен многуаголник $A_1A_2...A_n$. Точката $A_2^{'}$ симетрична на точката A_2 во однос на $S_{A_1A_3}$ припаѓа на лакот $A_1A_2A_3$ и припаѓа на множеството S, па затоа мора да важи $A_2^{'}\equiv A_2$. Оттука следува дека $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$. Аналогно следува дека

$$\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=...=\overline{A_nA_1},$$

т.е. $A_1, A_2, ..., A_n$ се темиња на правилен $n-$аголник. Јасно е дека сите вакви множества ги задоволуваат условите на задачата.

12. Во рамнина се дадени кружници k_1 и k_2, за кои една пресечна точка е точката A. По кружниците k_1 и k_2, тргнувајќи од точката A истовремено почнуваат да се движат точки M_1 и M_2. Точките се движат во ист правец со еднакви аглови брзини и повторно се сретнуваат во точката A. Докажи дека во рамнината постои точка P која во секој момент е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

Решение. Ќе го користиме следното тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба: *Ако AB и CD се лаци на кружници со заеднички центар O и ако $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$.*

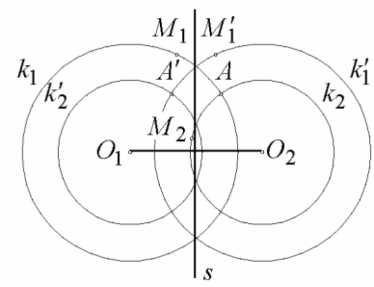


Нека O_1 и O_2 се центри на дадените кружници k_1 и k_2, s е симетрала на отсечката O_1O_2 и ϕ е симетрија во однос на правата s. Ги воведуваме ознаките

$$A' = \phi(A),\;\; k'_1 = \phi(k_1),\;\; k'_2 = \phi(k_2).$$

Јасно, $A' \in k'_1 \cap k'_2$. Кружниците k'_1 и k_2 се концентрични, како и кружниците k'_2 и k_1.

Ќе докажеме дека A' е точка која ги задоволува условите од задачата. Нека во некој момент првата точка се наоѓа во $M_1 \in k_1$, а втората во $M_2 \in k_2$.



Од условот на задачата следува

$$\measuredangle M_1O_1A = \measuredangle M_2O_2A.$$

Ако $M'_1 = \phi(M_1)$, тогаш $\overline{AM'_1} = \overline{A'M_1}$. Исто така

$$\measuredangle A'O_2M'_1 = \measuredangle M_1O_1A = \measuredangle M_2O_2A,$$

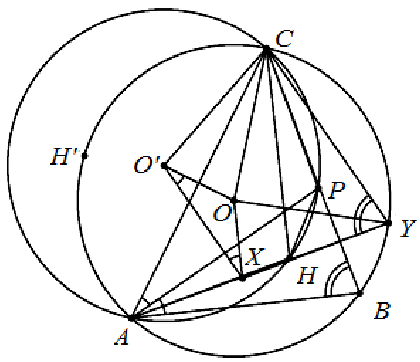
од каде што следува $\overline{A'M_2} = \overline{AM'_1}$. Значи, $\overline{A'M_1} = \overline{A'M_2}$, т.е. точката A' е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

13. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и нека P е втората пресечна точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ и опишаната околу кружница околу $\measuredangle AHC$. Нека X е центарот на опишаната кружница околу $\triangle APB$ и Y е ортоцентарот на $\triangle APC$. Докажи, дека должината на отсечката XY е еднаква на радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$, а H' е точката симетрична на точката H во однос на правата AC. Тогаш H' лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Бидејќи триаголниците ACH и ACH' се симетрични во однос на AC, центрите на кружниците опишани околу нив исто така се симетрични во однос на AC, т.е. центарот O' на кружницата опишана околу $\triangle ACH$ е симетричен на O во однос на AC.

Бидејќи $ACPH$ е впишан и H и Y се ортоцентри на $\triangle ABC$ и $\triangle APC$, соодветно, имаме

$$\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle AHC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle APC = \measuredangle AYC.$$



Според тоа, Y лежи на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и $\overline{OY} = R$, R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Од друга страна OX, XO' и OO' соодветно се симетрали на отсечките AB, AP и AC, па затоа

$$\measuredangle OXO' = \measuredangle BAP = \measuredangle PAC = \measuredangle XO'O.$$

Затоа $\overline{OO'} = \overline{OX}$, па како $\overline{OC} = \overline{OY}$ и правите XO' и YC се паралелни (двете се нормални на AP), добиваме дека трапезот $XYCO'$ е рамнокрак, од што следува дека $\overline{XY} = \overline{O'C} = \overline{OC} = R$.

14. Даден е $\triangle ABC$, со $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека

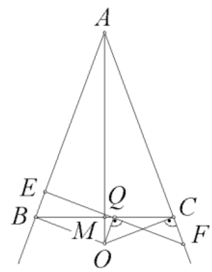
(a) M е средина на страната BC, а O е точка на правата AM таква што OB е нормална на AB.

(b) Q е произволна точка на страната BC различна од B и C.

(c) E се наоѓа на правата AB, а F на правата AC и притоа точките E, Q и F се различни и колинеарни.

Докажи дека OQ е нормална на EF ако и само ако $\overline{QE} = \overline{QF}$.

Решение. Нека $OQ \perp EF$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $Q \in MC$. Од



$$\measuredangle OBE + \measuredangle OQE = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот $OQEB$ е тетивен. Оттука следува дека

$$\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OAB.$$

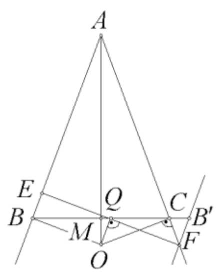
Од друга страна $\measuredangle FCO = \measuredangle FQO = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $OFCQ$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle QOF = 180^\circ - \measuredangle FCQ = \measuredangle BCA,$$

од што следува дека

$$\measuredangle OFQ = 90^\circ - \measuredangle QOF = \measuredangle CAM = \measuredangle QEO.$$

Според тоа, $\triangle EOF$ е рамнокрак со висина OQ, од што следува $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ (цртеж десно).



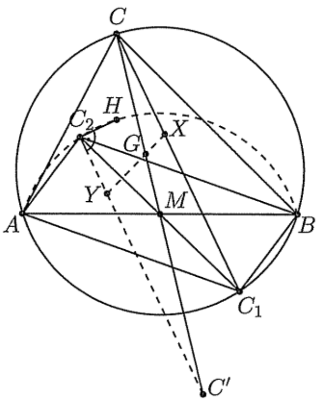
Нека претпоставиме дека $\overline{EQ} = \overline{FQ}$. Применуваме централна симетрија на B и E во однос на точката Q. Нека B' е сликата на B при оваа централна симетрија.

Од $\overline{EQ}=\overline{FQ}$ следува дека F е сликата на E. Од $B'F \parallel BE$ следува дека триаголниците ABC и $FB'C$ се слични, па затоа $\overline{CF}=\overline{B'F}=\overline{BE}$. Од

$$\measuredangle EBO = 90^\circ = \measuredangle FCO,\ \overline{OB}=\overline{OC} \text{ и } \overline{BE}=\overline{CF}$$

следува дека $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ па затоа $\overline{OE}=\overline{OF}$. Според тоа, $\triangle OFE$ е рамнокрак со основа EF и тежишна линија OQ, па затоа $OQ \perp EF$.

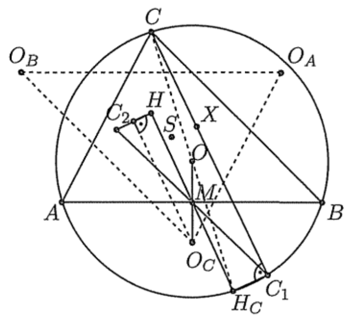
15. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ и произволна внатрешна точка X, различна од центарот на опишаната кружница k околу $\triangle ABC$. Правите AX, BX и CX по вторпат ја сечат k соодветно во точките A_1, B_1 и C_1. Нека A_2, B_2 и C_2 се симетричните точки на точките A_1, B_1 и C_1 во однос на правите BC, AC и AB соодветно. Докажи, дека опишаната кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$ минува низ постојана точка, која не зависи од изборот на точката X.



Решение. *Прв начин.* Ќе докажеме дека бараната постојана точка е ортоцентарот H на $\triangle ABC$ (во случај кога X се совпаѓа со центарот на k, точките A_2, B_2 и C_2 се совпаѓаат со H. Нека M е средината на AB, G е тежиштето на $\triangle ABC$ ($G \in CM$), C' е симетричната точка на C во однос на M и правата XG ја сече C_2C' во точката Y. Бидејќи четириаголникот $C_2C'C_1C$ е паралелограм, добиваме дека $\frac{\overline{XG}}{\overline{GY}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GC_1}}=\frac{1}{2}$ т.е. точката Y е еднозначно определена од X.

Од $\measuredangle AHB = 180^\circ - \measuredangle ACB$ следува дека точките $A, C',\ B, H$ и C_2 лежат на една кружница (симетрична на k во однос на M). Притоа, HC' е дијаметар на оваа кружница, бидејќи

$$\measuredangle HBC' = \measuredangle HBA + \measuredangle ABC' = \measuredangle HBA + \measuredangle BAC = 90^\circ.$$



Според тоа, $\measuredangle HC_2Y = 90^\circ$, т.е. C_2 лежи на кружница со дијаметар HY. Аналогно A_2 и B_2 лежат на оваа кружница, со што доказот е завршен.

Втор начин. Нека O е центарот на k, а O_A, O_B и O_C се симетричните точки на O во однос на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$. Бидејќи отсечките AO_A, BO_B и CO_C заемно се преполовуваат во точка S, добиваме дека $\triangle ABC$ и $\triangle O_AO_BO_C$ се централно симетрични во однос на S. Ќе докажеме дека при оваа централна симетрија правата CC_1 се пресликува во симетралата на отсечката HC_2.

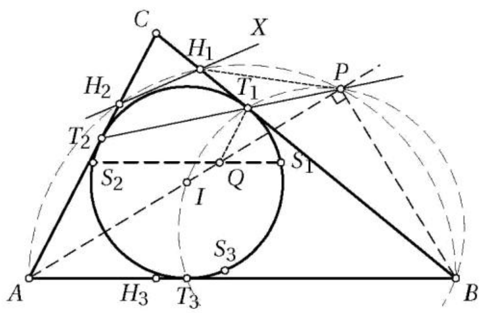
Нека M е средина на AB и H_C е симетричната точка на H во однос M. Од

$H_C A \| BH$ и $H_C B \| AH$ следува, дека

$$\measuredangle H_C AC = \measuredangle H_C BC = 90^\circ$$

т.е. H_C е дијаметрално спротивната точка на C во кружницата k и $\measuredangle H_C C_1 C = 90^\circ$. Според тоа, симетралата на $H_C C_1$ минува низ O и е паралелна на $C_1 C$. Од друга страна, симетралата на HC_2 е централно симетрична слика на $H_C C_1$ во однос на M, т.е. таа минува низ O_C и е паралелна со $C_1 C$.

16. Нека AH_1, BH_2, CH_3 се висините на остроаголниот триаголник ABC. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките T_1, T_2, T_3, соодветно. Нека правите l_1, l_2, l_3 се симетрични на правите H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 во однос на правите T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1, l_2, l_3 определуваат триаголник чии темиња лежат на впишаната кружница на триаголникот ABC.



Решение. За аглите на триаголникот ABC ќе ги користиме стандардните ознаки α, β, γ. Нека I е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC и нека точките S_1, S_2, S_3 се симетрични на точките T_1, T_2, T_3 во однос на правите AI, BI, CI, соодветно. Ќе докажеме дека бараниот триаголник е триаголникот $S_1S_2S_3$. Нека правата AI ја сече правата T_1T_2 во точката P. Бидејќи $\measuredangle BIP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle BT_1P$, четириаголникот BIT_1P е тетивен, па затоа важи $\measuredangle APB = \measuredangle IT_1B = 90^\circ$. Оттука следува дека точките A, B, P, H_1 лежат на една кружница, па затоа

$$\measuredangle APH_1 = \measuredangle ABH_1 = \beta = 2\measuredangle IBT_1 = 2\measuredangle APT_1,$$

што значи дека правите H_1P и AP се симетрични во однос на правата T_1T_2. Според тоа, точката $Q \in l_3$ симетрична на точката H_1 во однос на T_1T_2 лежи на правата AP.

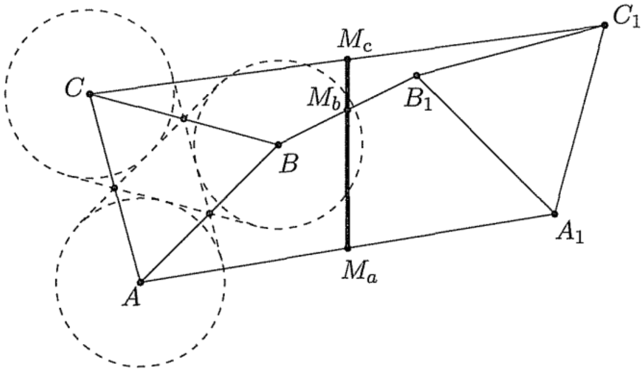
Сега,

$$\measuredangle T_1QS_1 = 2\measuredangle T_1QP = 2\measuredangle T_1H_1P = 2\measuredangle BAP = \alpha = \measuredangle CH_1H_2 = \measuredangle T_1H_1X$$

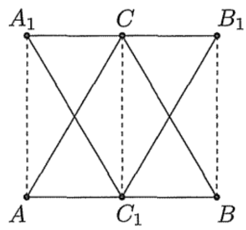
за произволна точка X на правата H_1H_2 (важи $H_2 - H_1 - X$), од каде заклучуваме дека правата QS_1 е симетрична на правата H_1H_2 во однос на T_1T_2, т.е. $S_1 \in l_3$. Аналогно важи $S_2 \in l_3$, $S_1, S_3 \in l_2$ и $S_2, S_3 \in l_1$.

17. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ се два складни спротивно ориентирани рамнострани триаголници со должина на страна 1. Колку изнесува најмалата можна должина на најдолгата меѓу отсечките AA_1, BB_1 и CC_1?

Решение. Прво да забележиме дека средините M_a, M_b, M_c на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 лежат на една права. Навистина, векторот $\overrightarrow{M_aM_b}$ е полузбир на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ и бидејќи тие имаат еднакви должини, $\overrightarrow{M_aM_b}$ е паралелен на симетралата на аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$. Истото тврдење е точно и за векторот $\overrightarrow{M_aM_c}$ и симетралата на аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$. Но, триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се рамнострани, складни и спротивно ориентирани, т.е. едниот се пресликува во другиот со транслација и осна симетрија, па затоа овие две симетрали се паралелни (точно на споменатата оска на симетрија). Според тоа, векторите $\overrightarrow{M_aM_b}$ и $\overrightarrow{M_aM_c}$ се паралелни, што значи дека точките M_a, M_b, M_c лежат на една права.



Нека l е правата определена со точките M_a, M_b и M_c, а h должината на висината на $\triangle ABC$. Да ги разгледаме кружниците k_a, k_b и k_c со центри во точките A, B и C и радиуси еднакви на $\frac{1}{2}h$. Бидејќи трите средни линии на $\triangle ABC$, кои се и тангенти на кружниците k_a, k_b и k_c ги одделуваат кружниците една од друга, заклучуваме дека правата l не може да ги сече сите кругови k_a, k_b и k_c во внатрешна точка. Со други зборови, растојанието на барем едно од темињата на $\triangle ABC$ не е помало од $\frac{1}{2}h$.



Без губење на општоста можеме да земеме дека растојанието од A до l не е помало од $\frac{1}{2}h$. Тогаш

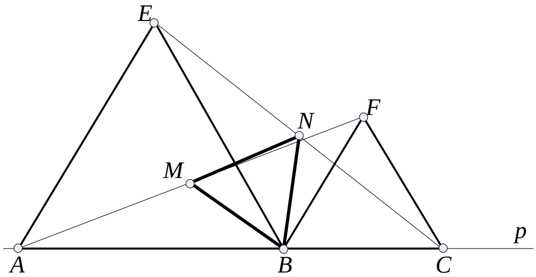
$$\overline{AA_1} = 2\overline{AM_a} \geq 2d(A,l) \geq 2 \cdot \tfrac{1}{2}h = h$$

и затоа најдолгата меѓу отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 има должина поголема или еднаква на $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Лесно се гледа, дека овој минимум се достигнува кога $\triangle A_1B_1C_1$ е симетричен на $\triangle ABC$ во однос на една од неговите средни линии.

18. На правата P дадени се точките A, B и C, така што B е меѓу A и C. На иста страна од правата p конструирани се рамнострани триаголници ABE и

BCF. Нека M е средината на отсечката AF, а N е средината на отсечката CE. Да се докаже дека триаголникот BMN е рамностран.

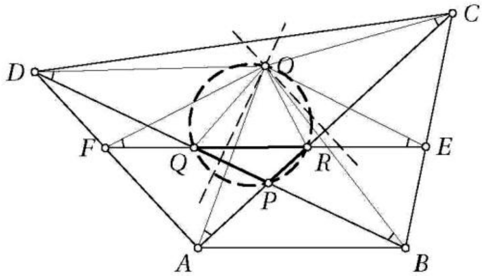
Решение. Нека ρ е ротацијата со центар B и агол 60°. Тогаш имаме $\rho(A)=E$, $\rho(F)=C$, па значи, отсечката AF со ρ се пресликува во отсечката EC, од каде што следува дека средината M на отсечката A со ρ ќе се преслика во средината N на отсечката EF, т.е. $\rho(M)=N$.



Од $\rho(M)=N$ следува дека $\measuredangle MBN=60^\circ$ и $\overline{BM}=\overline{BN}$, т.е. триаголникот BMN е рамностран.

19. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој должините на страните BC и AD се еднакви и страните BC и AD не се паралелни. Нека E и F се внатрешни точки на страните BC и AD, соодветно такви што важи $\overline{BE}=\overline{DF}$. Правите AC и BD се сечат во P, правите BD и EF се сечат во Q, а правите EF и AC се сечат во R. Ги разгледуваме триаголниците PQR кои се добиваат за сите вакви точки E и F. Докажи, дека опишаните кружници на сите овие триаголници имаат заедничка точка различна од P.

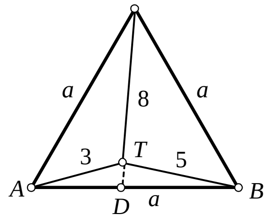
Решение. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD. Точките D,F,A при ротација околу точката O за агол $\omega=\measuredangle DOB$ се пресликуваат во точките B,E,C, соодветно. Според тоа, $\overline{OE}=\overline{OF}$ и $\measuredangle OFE=\measuredangle OAC=90^\circ-\frac{\omega}{2}$, па затоа



точките F,A,R,O се концициклични $\measuredangle ORP=180^\circ-\measuredangle OFA$. Слично, точките E,B,Q,O се концициклични и $\measuredangle OQP=180^\circ-\measuredangle OEB=\measuredangle OEC=\measuredangle OFA$. Сега важи $\measuredangle ORP=180^\circ-\measuredangle OQP$, т.е. точката O лежи на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и тоа е бараната точка.

20. Даден е рамностран tриаgолник ABC и tочка T во рамнината од триаголникот. Нека $\overline{AT}=3$, $\overline{BT}=5$ и $\overline{CT}=8$. Пресметај ја страната на триаголникот.

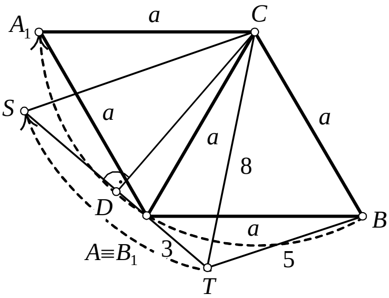
Решение. *Прв начин.* Прво ќе докажеме дека точката T не може да биде во внатрешноста на триаголникот ABC ниту на некоја од неговите страни. Да претпоставиме дека T е во внатрешноста на ΔABC. Тогаш три-



аголникот ATC е тапоаголен (аглите CAT и ACT се помали од 60°) па $a=\overline{AC}>\overline{TC}=8$. Од друга страна и триаголникот ABT е тапоаголен па

$$a=\overline{AB}<\overline{AT}+\overline{TB}=3+5=8.$$

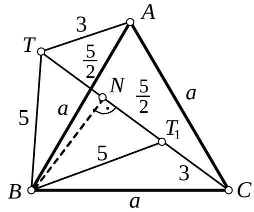
Добивме противречност. Сега да претпоставиме дека T лежи на некоја од страните на триаголникот. Не се губи од општоста ако претпоставиме $T\equiv D$. Тогаш еден од триаголниците ADC иии BDC е тапоаголен (со тап агол кај темето D) или двата се правоаголни (со прав агол кај темето D), па во секој случај $a>\overline{CD}=8$. Но $a=\overline{AD}+\overline{DB}=3+5=8$, па повторно добивме противречност. Значи T се наоѓа надвор од триаголникот ABC.



Сега да извршиме ротација на триаголникот со центар C и агол 60° во насока на стрелките од часовникот. Тогаш B преминува во A. Нека при ротацијата A се пресликува во A_1, B во B_1, T во S. Точката C е центар па останува на истото место. Бидејќи ротацијата е за агол од 60° следува $B_1\equiv A$, аголот кај темето C на триаголникот STC е 60° и $\overline{SC}=\overline{TC}$. Значи $\triangle STC$ е рамностран со страна 8. Уште и $\overline{AS}=\overline{BT}=5$. Заради тоа $\overline{SA}+\overline{AT}=5+3=8=\overline{CT}=\overline{ST}$. Следува дека точката A лежи на правата ST. Нека CD е висината на $\triangle STC$ спуштена од темето C. Тогаш $\overline{AD}=\overline{TD}-\overline{TA}=\frac{8}{2}-3=1$ и $\overline{CD}=\sqrt{\overline{CS}^2-\overline{SD}^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Натаму од правоаголниот триаголник ADC имаме $a^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=1+48=49$, па $a=7$.

Втор начин. Како во решението А докажуваме дека T лежи надвор од триаголникот ABC. Сега нека точката T_1 е таква што $\overline{BT_1}=5$, $\overline{CT_1}=3$ и T_1 лежи во внатрешноста на триаголникот ABC. Тогаш $\triangle BCT_1\cong\triangle BAT$ (имаат три соодветни страни со еднакви должини). Оттука аглите TBA и T_1BC се еднакви, па затоа

$\measuredangle TBT_1=\measuredangle ABT_1+\measuredangle TBA=\measuredangle ABT_1+\measuredangle T_1BC=\measuredangle ABC=60^\circ$.



Заради тоа и $\overline{BT}=\overline{BT_1}$ следува дека триаголникот TBT_1 е рамностран. Значи $\overline{TT_1}=5$. Оттука

$$\overline{TT_1}+\overline{T_1C}=5+3=8=\overline{TC},$$

па точките T,T_1 и C се колинеарни. Нека BN е висината во триаголникот TT_1B спуштена од темето B. Сега

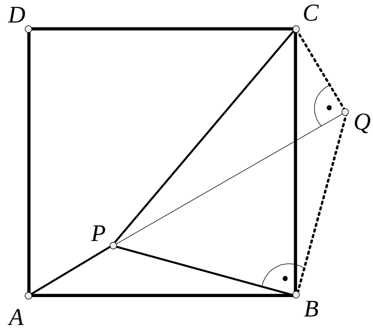
$$a^2=\overline{BN}^2+\overline{NC}^2=(\overline{BT}^2-\overline{TN}^2)+\overline{NC}^2=(5^2-(\tfrac{5}{2})^2)+(\tfrac{5}{2}+3)^2=49.$$

Значи $a=7$.

21. Даден е квадрат $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратот така што $\overline{AP}:\overline{BP}:\overline{CP}=1:2:3$. Да се пресмета аголот $\measuredangle APB$!

Решение. Триаголникот ABP го ротираме околу темето B се додека темето B не се совпадне со темето C. Со Q да ја означиме новата положбан а темето P по ротацијата. Бидејќи $\measuredangle QBC=\measuredangle PBA$ следува дека $\measuredangle QPB=90^\circ$. Заради ова, бидејќи $\overline{BP}=\overline{BQ}$ имаме $\measuredangle PQB=45^\circ$ и

$$\overline{PQ}^2=2\overline{BP}^2.$$



Од условот на задачата имаме $\overline{BP}=2\overline{AP}$, $\overline{CP}=3\overline{AP}$ па оттука и од претходното равенство добиваме:

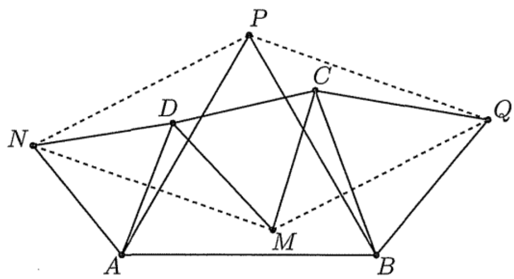
$$\overline{PQ}^2+\overline{CQ}^2=8\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=\overline{CP}^2.$$

Бидејќи за триаголникот CQP важи Питагоровата теорема, $\measuredangle CQP=90^\circ$. Конечно

$$\measuredangle APB=\measuredangle CQB=\measuredangle PQB+\measuredangle CQP=45^\circ+90^\circ=135^\circ.$$

22. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB и CD кон внатрешноста на четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ABP и DCM, а над страните AD и BC надворешно за четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ADN и BCQ. Докажи, дека точките M,N,P и Q се темиња на паралелограм.

Решение. Да разгледаме ротација ρ околу точката A за агол 60°. Имаме, $\rho(B)=P$ и $\rho(D)=N$, па затоа $\overline{BD}=\overline{PN}$. Понатаму, ако ρ_1 е ротација околу точката C за агол 60° добиваме $\rho_1(B)=Q$ и $\rho_1(D)=N$, па затоа $\overline{BD}=\overline{MQ}$. Според тоа, $\overline{MQ}=\overline{PN}$.

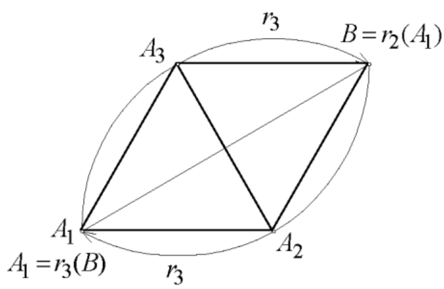


Аналогно, со помош на ротации околу точките B и D за агли еднакви на 60° се докажува дека $\overline{MN}=\overline{AC}=\overline{PQ}$.

Конечно, од $\overline{MQ}=\overline{PN}$ и $\overline{MN}=\overline{PQ}$ следува, дека точките M,N,P и Q се темиња на паралелограм.

23. Во рамнина е даден $\triangle A_1A_2A_3$ и точка P_0. Ставаме $A_s=A_{s-3}$ за секој цел број $s\geq 4$. Конструираме низа точки $P_0,P_1,P_2,...$ таква што секоја точка P_{k+1} се добива со ротација на точката P_k околу точката A_{k+1} за агол од 120° во насока на движењето на стрелките на часовникот.

Докажи дека, ако $P_{1986} = P_0$, тогаш $\triangle A_1A_2A_3$ е рамностран.



Решение. Нека r_i е ротација околу A_i за 120° во насока на стрелките на часовникот. Композицијата $f = r_3r_2r_1$ е транслација за вектор $\vec{v}\ (=\overrightarrow{P_0P_3})$. Според тоа f^{662} е транслација за $662\vec{v}$, па според тоа

$$f^{662}(P_0) = P_{1986} = P_0$$

е можно ако и само ако $\vec{v} = \vec{o}$, т.е. $P_3 = P_0$. Нема да анализираме што значи $P_3 = P_0$ за било кое P_0, туку добиеното тврдење $r_1r_2r_3 = e$ ќе го примениме на A_1. При тоа важи:

$$r_1(A_1) = A_1; \quad r_2r_1(A_1) = r_2(A_1)$$

и нека последната точка ја означиме со B, т.е. $r_2(A_1) = B$. Тогаш,

$$A_1 = r_3r_2r_1(A_1) = r_3(B)$$

Значи,

$$A_1 = r_3(B), \quad r_2(A_1) = B.$$

Рамнокраките триаголници A_1A_2B и BA_3A_1 имаат исти агли ($\measuredangle A_2 = \measuredangle A_3 = 120^\circ$) и заедничка страна A_1B, па според тоа се складни. Значи, $A_1A_2BA_3$ е ромб со агли 60° и 120°, па според тоа триаголникот $A_1A_2A_3$ е рамностран.

24. Нека A и B се различни точки на кружницата ω со центар O, такви што $60^\circ \le \measuredangle AOB \le 120^\circ$. Нека C е центарот на опшаната кружница околу $\triangle AOB$, а l е права низ C која со OC зафаќа агол од 60°. Тангентите на ω во точките A и B соодветно ја сечат l во точките M и N, а опишаната кружници околу $\triangle CAM$ и $\triangle CBN$ соодветно по вторпат ја сечат ω во точките Q и R и по втор пат се сечат во точката P. Докажи, дека $OP \perp QR$.

Решение. Можеме да сметаме, дека аголот од 60° меѓу l и полуправата OC во истата полурамнина во однос на CO како и точката B (направи цртеж). Ќе работиме со ориентирани агли и ќе сметаме по модул 180°. Да означиме $\measuredangle AOC = \measuredangle COB = \alpha$. Тогаш

$$\measuredangle CMA = 360^\circ - (90^\circ + \alpha + 120^\circ) = 150^\circ - \alpha,$$

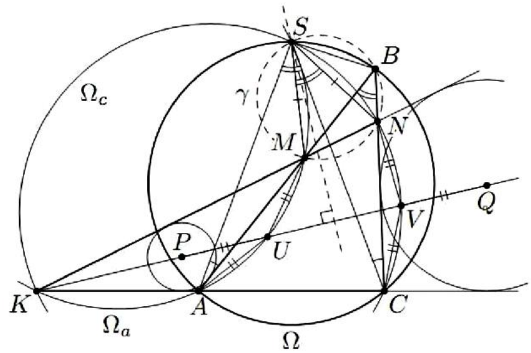
од каде следува $\measuredangle APC = 30^\circ + \alpha$. Освен тоа $\measuredangle CNB = (60^\circ + \alpha) - 90^\circ = \alpha - 30^\circ$, па затоа $\measuredangle CPB = \alpha - 30^\circ$. Според тоа, $\measuredangle APB = 2\alpha = \measuredangle AOB$, што значи, дека точката P лежи на кружницата опишана околу $\triangle AOB$ и $\overline{CP} = \overline{CA} = \overline{CO}$.

Од последното следува дека $\measuredangle CAP = \measuredangle APC = \alpha + 30^\circ$, од каде бидејќи $\measuredangle CAO = \measuredangle AOC = \alpha$ добиваме $\measuredangle OAP = 30^\circ$. Тогаш $\measuredangle OCP = 2\measuredangle OAP = 60^\circ$ и триаголникот OCP е рамностран, т.е. $\overline{OP}=\overline{OC}$. Според тоа, ω и кружниците опишани околу $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ се симетрични во однос на симетралата на CP. Оттука, $\overline{PC}=\overline{CA}$ и $\overline{PR}=\overline{CB}$, т.е. $\overline{PQ}=\overline{PR}$. Добоивме дека Op е симетрала на QR, т.е. $OP \perp QR$.

25. Во кружница Ω е впишан $\triangle ABC$, $\overline{AB}>\overline{BC}$. На страните AB и BC соодветно се избрани точки M и N такви што $\overline{AM}=\overline{CN}$. Правите MN и AC се сечат во точка K. Нека P е центарот на кружницата впишана во $\triangle AMK$, а Q е центарот на кружницата припишана на $\triangle CNK$ кон страната CN. Докажи, дека средината на лакот ABC на кружницата Ω е еднакво оддалечена од точките P и Q.

Решение. Ќе ја користиме следнава позната лема.

Лема. Нека L е средината на лакот YZ, кој не ја содржи точката X, од опишаната кружница околу $\triangle XYZ$, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle XYZ$ и I_x е центарот на припишаната кружница кон страната YZ на триаголникот $\triangle XYZ$. Тогаш $\overline{LY}=\overline{LZ}=\overline{LI}=\overline{LI}_x$. □



Нека S е средината на лакот ABC од кружницата Ω. Имаме $\overline{SA}=\overline{SC}$ (S лежи на симетралата на отсечката AC), $\overline{AM}=\overline{CN}$ и $\measuredangle BCS=\measuredangle BAS$ (агли над ист кружен лак). Тогаш $\triangle AMS \cong \triangle CNS$ и $\triangle AMS$ се пресликува во $\triangle CNS$ при ротација $\rho_{S,\measuredangle ASC}$. Оттука следува дека

$\overline{SM}=\overline{SN}$ и $\measuredangle MSN=\measuredangle ABC$.

Од последното равенство следува, дека четириаголникот $MSBN$ е впишан во кружница γ.

Кружницата Ω_a опишана околу $\triangle AMS$ при ротацијата $\rho_{S,\measuredangle ASC}$ се пресликува во кружницата и Ω_c опишана околу $\triangle CNS$. Нека U и V се средините на лаците AM и CN (не ја содржат точката S) од овие кружници. Тогаш од ротацијата следува $\overline{SU}=\overline{SV}$, т.е. точката S лежи на симетралата на UV, и $\overline{UA}=\overline{VC}$. Понатаму, од кружниците Ω и γ имаме $\measuredangle SAK=\measuredangle SBC=\measuredangle SMK$, т.е. K лежи на Ω_a. Аналогно K лежи на Ω_c.

Од претходно изнесеното следува, дека точките U и V заедно со точките P и Q лежат на симетралата на $\measuredangle CKN$. Сега од лемата, применета на триаголниците KAM и KCN следува $\overline{UP}=\overline{UA}$ и $\overline{VQ}=\overline{VC}$. Бидејќи $\overline{UA}=\overline{VC}$, следува дека точките P и Q се симетрични во однос на симетралата на UV. Но, S лежи на симетралата на UV, па затоа $\overline{SP}=\overline{SQ}$.

26. На кружница се означени n точки, кои ја делат на n лаци. Кружницата се ротира околу центарот за агол $\frac{2\pi k}{n}$, k е некој природен број, после што означените n точки се пресликуваат во нови n точки, кои ја делат кружницата на n нови лаци. Докажи дека некој од новите лаци целосно лежи во некој од старите лаци. (Лаците се разгледуваат како затворени множества.)

Решение. Ќе сметаме дека радиусот на лружницата е 1, а ротацијата е во насока на движењето на стрелката на часовникот. Ако две нови точки лежат на еден ист стар лак, тогаш некој нов лак лежи исцело во тој стар лак. Затоа да претпоставиме, дека нема такви нови точки. Бидејќи како новите, така и старите лаци се вкупно по n, тоа е можно само кога на секој стар лак има точно по една нова точка (притоа новите точки не се краеви на старите лаци).

Нека старите точки се $A_1, A_2, ..., A_n$, нумерирани во насоика на движење на стрелката на часовникот. Нека при ротацијата точката A_i се пресликува во нова точка B_i (индексите се по модул n, т.е. $A_{n+i} = A_i, B_{n+i} = B_i$). Јасно е, дека соседните точки припаѓаат на соседни лаци, т.е. ако B_i лежи во лакот $A_j A_{j+1}$, тогаш за секој i точката B_i лежи во лакот $A_{j+i-1} A_{j+i}$.

Нека $j \le k$. Да забележиме, дека сите лаци од видот $A_i A_{i+1} ... A_{i+j}$ ја покриваат кружницата точно j пати. Според тоа, збирот на нивните должини е еднаков на $2\pi j \le 2\pi k$. Од друга страна, должината на лакот $A_i A_{i+1} ... A_{i+j}$ е строго поголема од должината на лакот $A_i B_i$, која е еднаква на $\frac{2\pi k}{n}$, па затоа збирот на нивните должини е строго поголем од $n \frac{2\pi k}{n} = 2\pi k$, што е противречност.

Аналогно, ако $j > k$, тогаш збирот на должините на сите лаци од видот $A_i A_{i+1} ... A_{i+j-1}$ е еднаков на $2\pi(j-1) \ge 2\pi k$, а од друга страна тој е строго

27. Нека AH_1, BH_2, CH_3 се висините во остроаголниот триаголник ABC. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира неговите страни BC, CA, AB во точките T_1, T_2, T_3, соодветно. Правите l_1, l_2, l_3 се симетрични слики на правите H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 во однос на правите T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, соодветно. Докажи дека правите l_1, l_2, l_3 формираат триаголни со чии темиња лежат на впишаната кружница на триаголникот ABC.

Решение. Нека правата BC ги сече правите H_2H_3 и T_2T_3 во точките E и D, соодветно. Бидејќи $\measuredangle H_2H_3A = \measuredangle C$ е надворешен за $\triangle BEH_3$ добиваме

$$\measuredangle BEH_3 = |\measuredangle B - \measuredangle C|.$$

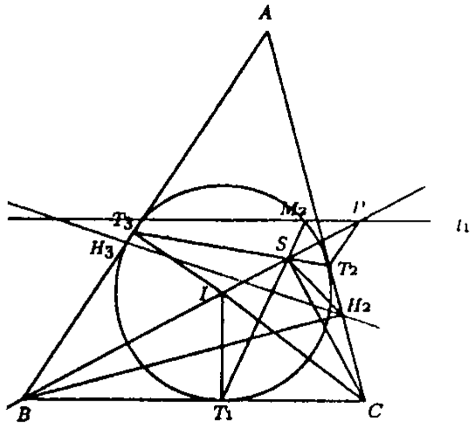
Од друга страна

$$\measuredangle T_2T_3A = \frac{180^\circ - \measuredangle A}{2} = \frac{\measuredangle B + \measuredangle C}{2}$$

и е надворешен за $\triangle BDT_3$, па затоа $\measuredangle BDT_3 = \frac{|\measuredangle B - \measuredangle C|}{2}$. Добиваме дека $\measuredangle BEH_3 = \frac{1}{2} \measuredangle BDT_3$, од што следува дека $l_1 \parallel BC$. Аналогно се докажува дека $l_2 \parallel AC$ и $l_3 \parallel AB$.

Понатаму ќе докажеме, дека симетричната слика на H_2 во однос на правата T_2T_3 лежи на симетралата BI на аголот при темето B, каде I е центарот на впишаната кружница. Нека правата низ H_2, која е нормална на T_2T_3, ја сече BI во точка P, а S е пресечната точка на T_2T_3 со BI. Доволно е да докажеме, дека $\measuredangle PST_2 = \measuredangle H_2ST_2$. Имаме $\measuredangle PST_2 = \measuredangle BST_3$. Но, $\measuredangle T_2T_3A$ е надворешен за $\triangle BST_3$, па затоа

$$\measuredangle BST_3 = (90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle A) - \tfrac{1}{2}\measuredangle B = \tfrac{1}{2}\measuredangle C.$$



Од друга страна, бидејќи T_1 и T_3 се симетрични во однос на BI важи $\measuredangle BST_3 = \measuredangle BST_1$, па затоа

$$\measuredangle BST_1 = \tfrac{1}{2}\measuredangle C = \measuredangle ICT_1.$$

Од последното равенство следува дека околу четириаголникот IT_1CS може да се опише кружница. Но, тогаш $\measuredangle BSC = 90^\circ$, бидејќи $IT_1 \perp BS$. Тоа значи дека и околу четириаголникот BCH_2S може да се опише кружница со дијаметар BC. Тогаш,

$$\measuredangle PSH_2 = \measuredangle BCH_2 = \measuredangle C$$

и како $\measuredangle PST_2 = \frac{1}{2}\measuredangle C$ добиваме дека $\measuredangle PST_2 = \measuredangle H_2ST_2$.

Сега да забележиме, дека бидејќи околу четириаголникот BCH_2S може да се опише кружница, добиваме $\measuredangle SH_2T_2 = \frac{1}{2}\measuredangle B$, па затоа $\measuredangle SPT_2 = \frac{1}{2}\measuredangle B$. Понатаму, нека M_1, M_2 и M_3 се симетричните слики на T_1, T_2 и T_3 во однос на симетралите на аглите AI, BI и CI, соодветно. Јасно, M_1, M_2 и M_3 лежат на впишаната кружница. Притоа $\measuredangle SPM_2 = \measuredangle SPT_2 = \frac{1}{2}\measuredangle B$ од што следува дека правата PM_2 е паралелна на правата BC. Но, претходно докажавме дека $l_1 \parallel BC$ и како $P \in l_1$ добиваме дека PM_2 и l_1 се совпаѓаат, т.е. l_1 минува низ M_2. Аналогно се докажува дека l_1 минува низ M_3.

Со аналогни размислувања за правите l_2 и l_3 се докажува дека правите l_1, l_2 и l_3 се сечат на впишаната кружница.

28. Нека M и N се точки во рамнината на $\triangle ABC$ такви што

$$\overline{AM} : \overline{BM} : \overline{CM} = \overline{AN} : \overline{BN} : \overline{CN}.$$

Докажи, дека центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$ лежи на правата MN.

Решение. *Прв начин.* Точките M и N се во пресекот на Аполониевите кружници $k_1(\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}})$ и $k_1(\frac{\overline{AX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}})$, кои очигледно не се поклопуваат. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Аполониевата кружница $k(\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}=r)$ е ортогонална на произволна кружница Γ која минува низ точките A и B.

Доказ. Нека кружницата k ги сече отсечката AB во точката P и кружницата Γ во точката C, и нека O е центарот на кружницата Γ. Од $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ следува дека CP е симетрала на $\measuredangle ACB$. Центарот S на кружницата k е точка од правата AB таква што $\overline{SP}=\overline{SC}$, па затоа $\measuredangle SCO=\measuredangle SPC+\measuredangle PCO=90^\circ$, т.е. CS е тангента на кружницата Γ, па затоа $\Gamma\perp k$. ■

Според лемата кружниците k_1 и k_2 се нормални на опишаната кружница Γ околу $\triangle ABC$, па затоа со инверзија во однос на Γ се пресликуваат во самите себе. Притоа инверзијата ги пресликува точките M и N една во друга, па затоа центарот на Γ лежи на правата MN.

Втор начин. Според условот на задачата имаме $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$, што значи дека точките A,B,C лежат на иста Аполониева кружница во однос на точките M и N, а центарот на таа кружнива лежи на правата MN.

29. Нека ω опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, D е средината на лакот BAC и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Нека DI ја сече BC во точката E и по втор пат ја сече ω во точката F, а правата која минува низ E и е паралелна со AI ја сече AF во точката P. Докажи дека PE е симетрала на $\measuredangle BPC$.

Решение. Ќе го искористиме следниот добро познат факт: Ако точките A,B,C и D лежат на една права во овој редослед и $\measuredangle APC=90^\circ$, тогаш PC е симетрала на $\measuredangle BPD$ ако и само ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$. Во случајов ќе ја користиме ознаката $(ABCD)=-1$.

Нека T е пресечната точка на симетралата на BC и ω (направи цртеж). Тогаш DT е дијаметар во ω и $\measuredangle DFT=90^\circ$. Освен тоа FD е симетрала на $\measuredangle BFC$. Според тоа, $(JEBC)=-1$, каде J е пресечната точка на TF и продолжението на BC.

Имаме

$$\measuredangle EJF=\frac{CT-BF}{2}=\frac{BT-BF}{2}=\frac{FT}{2}=\measuredangle TAF=\measuredangle EPF.$$

Оттука следува, дека четириаголникот $PEFJ$ е тетивен, па затоа $\measuredangle JPE=90^\circ$. Значи, $(JEBC)=-1$ и $\measuredangle JPE=90^\circ$, па затоа PE е симетрала на $\measuredangle BPC$.

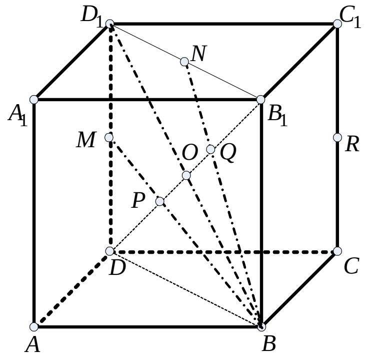
VII СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. РАБЕСТИ ТЕЛА

1. Рамнините ACD_1 и DC_1A_1 ја сечат дијагоналата DB_1 на коцката $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1$) во точките P и Q. Да се докаже дека $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB_1}$.

Решение. Да го разгледаме триаголникот DBD_1 (види цртеж). Точката M е средина на страната DD_1, а точката O е средина на страната BD_1 и $P = BM \cap DO$. Значи, P е тежиште на триаголникот DBD_1, од каде што следува дека:

$$\overline{DP} = \tfrac{2}{3}\overline{DO} = \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\overline{DB_1} = \tfrac{1}{3}\overline{DB_1}.$$



На ист начин, од триаголникот BB_1D_1, добиваме дека $\overline{QB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}$, па значи:

$$\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB_1} = \tfrac{1}{3}\overline{DB_1}.$$

2. Нека P_1, P_2, P_3 се плоштините на трите страни од еден квадар кои имаат заедничко теме. Пресметај го волуменот и должините на рабовите на квадарот.

Решение. Нека a, b и c се должините на рабовите на квадарот. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $P_1 = ab$, $P_2 = bc$ и $P_3 = ca$. Јасно, $V = abc$, од каде добиваме

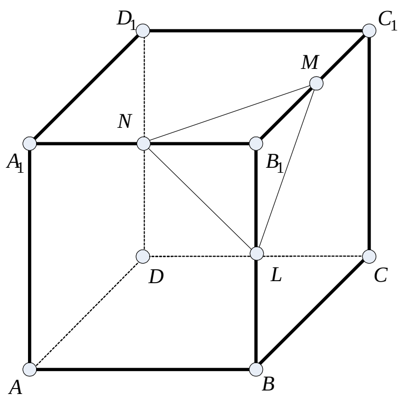
$$V = abc = \sqrt{(abc)^2} = \sqrt{(ab)\cdot(bc)\cdot(ca)} = \sqrt{P_1P_2P_3}.$$

Понатаму, $V = P_1c$, $cP_1 = \sqrt{P_1P_2P_3}$, од каде добиваме $c = \sqrt{\frac{P_2P_3}{P_1}}$. На потполно ист начин добиваме $b = \sqrt{\frac{P_1P_2}{P_3}}$ и $a = \sqrt{\frac{P_1P_3}{P_2}}$.

3. Рамнина минува низ средните точки на три раба на коцка кои имаат заедничко теме. Пресметај ја плоштината на пресекот на рамнината и коцката ако должината на работ на коцката е $4\sqrt{3}$.

Решение. Ако должината на работ на коцката е $a = 4\sqrt{3}$ тогаш должината на дијагоналата на секоја од нејзините бочни страни е еднаква на

$$d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{6}.$$



Нека M, N и L се средини на рабовите

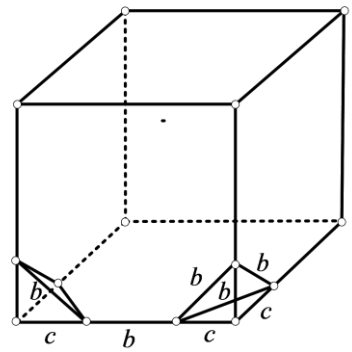
B_1C_1, B_1A_1 и B_1B соодветно и σ е рамнината која што минува низ нив. Бидејќи M и L се средини на B_1C_1 и B_1B, отсечката ML е средна линија на триаголникот C_1B_1B. Според тоа $ML \parallel BC_1$ и

$$\overline{ML} = \tfrac{1}{2}\overline{BC_1} = \tfrac{1}{2}4\sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

Јасно, $\overline{MN} = \overline{NL} = \overline{LM} = 2\sqrt{6}$, па според тоа пресекот MNL е рамностран триаголник со должина на страна $2\sqrt{6}$, па затоа неговата плоштина е $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

4. Од коцка со должина на раб $3\,cm$, отсечени се сите 8 темиња, така што е добиено тело кое има 24 темиња и сите негови рабови се со еднаква должина. Определи го волуменот на ова тело.

Решение. Од условот на задачата следува дека $b + 2c = a = 3$ и $b = c\sqrt{2}$ (види цртеж). Од добиениот систем имаме $c = \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}cm$. Поната-му, волуменот на секој од осумте отсечени тетраедри е



$$V_T = \frac{c^3}{6} = \frac{9(10-7\sqrt{2})}{8}cm^3$$

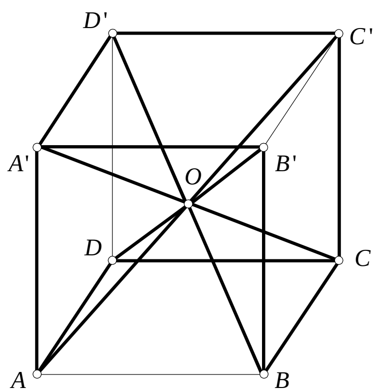
и како волуменот на коцката е $V_K = a^3 = 27cm^3$, добиваме дека волуменот на добиеното тело е

$$V = V_K - 8V_T = 63(\sqrt{2}-1)cm^3.$$

5. Дали коцка може да се раздели на три еднакви дела, кои не се ниту квадари, ниту пирамиди?

Решение. Да може. Еден од начините е како што е опишано во делот што следува.

Нека $ABCDA'B'C'D'$ е коцка и O е пресекот на неговите дијагонали. Четирите темиња на една страна и точката O се темиња на пирамида. Бројот на такви пирамиди е 6 и ти се допираат по една страна или имаат една заедничка точка. Тие пирамиди се



$$OABCD,\ OBCB'C',\ OCDC'D',$$
$$OADA'D', OABA'B',\ OA'B'C'D'.$$

Паровите пирамиди

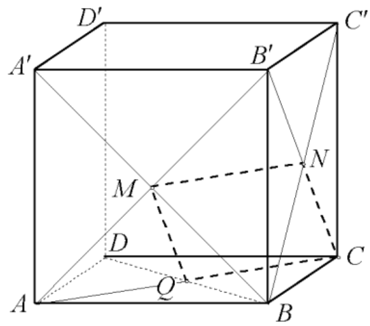
$$OABCD \text{ и } OABA'B',$$
$$OCDC'D' \text{ и } OADA'D',$$
$$OBCB'C' \text{ и } OA'B'C'D',$$

(на цртежот тоа се парови пирамиди за кои еден раб кој им е заеднички е со потенка линија) ако се земат како унии на множества (секоја пар една унија) формираат три тела кои се идентични и ја делат пирамидата.

6. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$, со горна и долна основа $ABCD$ и $A'B'C'D'$, соодветно и $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Точката X се движи со константна брзина по рабовите на квадратот $ABCD$ во насока $ABCDA$, а точката Y се движи со иста брзина по рабовите на квадратот $B'C'CB$ во насока $B'C'CBB'$. Точките X и Y почнуваат да се движат во ист момент при што X тргнува од A, а Y од B'. Најди го и нацртај го геометриското место на средините на отсечките XY.

Решение. Нека M, N, Q се центри на квадратите $ABB'A',$ $BCC'B'$ и $ABCD,$ соодветно. Да претпоставиме дека точката X се наоѓа на работ AB. Тогаш $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{B'Y} = \lambda\overrightarrow{B'C'},$ што значи

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \tfrac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'}) = \overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{MN}.$$



Според тоа, средината на отсечката XY се движи по отсечката $MN,$ додека X се движи по отсечката AB.

Нека точката X се движи по работ BC, т.е. нека $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC'} + \mu\overrightarrow{CC'} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) &= \overrightarrow{AN} + \tfrac{\mu}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) \\ &= \overrightarrow{AN} + \mu\overrightarrow{NC},\end{aligned}$$

што значи дека средината на отсечката XY се движи по отсечката $NC,$ додека X се движи од B до C. Понатаму, на аналоген начин се докажува дека X се движи од C до Q и од Q до M. Бараното геометриско место на точки е четириаголникот $MNCQ$.

7. Правоаголен паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ со рамнини паралелни на ѕидовите е поделен на осум дела. За темето P со $V(P)$ го означуваме волуменот на делот кој го содржи P. Ако $V(A) = 40, V(C) = 300, V(B') = 360$ и $V(C') = 90$, определи го волуменот на паралелопипедот.

Решение. Заради бројот на деловите добиваме дека едната од рамнините е паралелна со $ADD'A'$, другата со $ABB'A'$ и третата со $ABCD$. Нека пресечните точки на овие рамнини со отсечките $B'C', AB, CD, AA'$ се M, P, Q, N, соодветно. Деловите кои ги содржат точките B' и C' имаат две заеднички мерења, па затоа $\overline{B'M} = \frac{V(B')}{V(C')}\overline{C'M} = 4\overline{C'M}$, па ако $\overline{C'M} = x$, тогаш $\overline{B'C'} = 5x$. Деловите во A и C имаат едно заедничко мерење, во еден од другите парови се однесуваат како $\overline{B'M} : \overline{C'M} = 4:1$, па затоа $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{QC}} = \frac{V(A)}{V(C)} \cdot \frac{\overline{C'M}}{\overline{B'M}} = \frac{1}{30}$. Значи, ако $\overline{AP} = y$, тогаш $\overline{AB} = 31y$. Сега од делот во A добиваме $\overline{AN} = \frac{V(A)}{4xy} = \frac{10}{xy}$, а од делот во C' добиваме $\overline{NA'} = \frac{V(C')}{30xy} = \frac{3}{xy}$ и затоа $\overline{AA'} = \frac{13}{xy}$. Конечно, бараниот волумен е $V = \overline{AB} \cdot \overline{B'C'} \cdot \overline{AA'} = 2015$.

8. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со страна a. Пресметај го волуменот на тетраедарот ACB_1D_1.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $\overline{AC}=\overline{AB_1}=\overline{AD_1}=\overline{CB_1}=\overline{CD_1}=\overline{B_1D_1}=d=a\sqrt{2}$, тетраедарот ACB_1D_1 е правилен (види цртеж).

Основата на тетраедарот е рамностран триаголник со плоштина

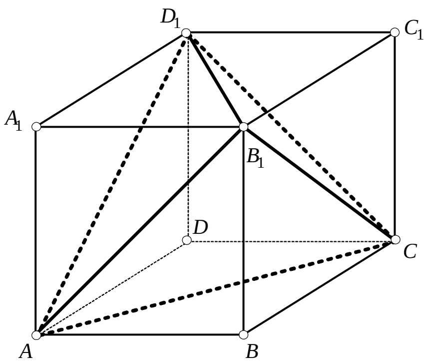
$$B=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

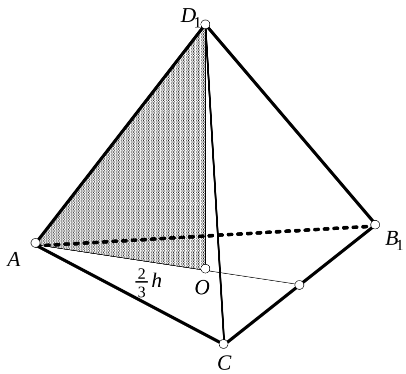
Висината H ја наоѓаме по Питагоровата теорема од триаголникот AOD_1 (види цртеж):

$$H=\sqrt{d^2-(\tfrac{2}{3}h)^2}=\sqrt{d^2-(\tfrac{2}{3}\tfrac{d\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=d\sqrt{\frac{2}{3}}=a\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Тогаш волуменот на тетраедарот ACB_1D_1 е:

$$V=\tfrac{1}{3}BH=\tfrac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{a^3}{3}.$$

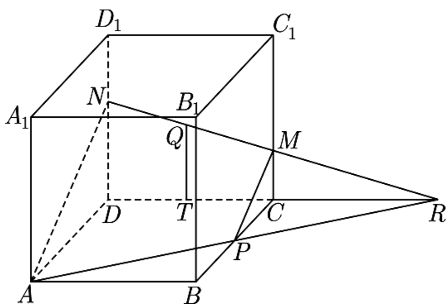




Втор начин. Волуменот на тетраедарот ACB_1D_1 ќе го добиеме, ако од волуменот на коцката го одземеме збирот на волумените на четирите складни пирамиди, секоја со волумен $V_p=\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a=\frac{a^3}{6}$. Значи, $V=V_k-4V_p=a^3-4\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}$.

9. На коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ избрани се точките P и Q, каде P е средина на работ BC, а Q е пресекот на дијагоналите во квадратот CC_1DD_1. Рамнината APQ ја дели коцката на два дела. Најди го односот на волумените на добиените делови од коцката?

Решение. Должината на работ на коцката да ја означиме со a. Нека T е подножјето на нормалата повлечена од точката Q кон работ CD, нека пресечните точки на рамнината APQ со рабовите DD_1 и CC_1 се N и M соодветно, а пресечната точка со правата CD е точката R. Од условот на задачата важат следниве равенства $\overline{BP}=\overline{PC}=\frac{a}{2}$ и $\overline{QT}=\frac{a}{2}$.



Притоа, $\triangle ARD \sim \triangle PRC$ од каде што следува $\overline{CR}:\overline{DR}=\overline{CP}:\overline{DA}=\frac{1}{2}$. Тогаш $\overline{CD}=\overline{CR}=a$. Исто така, $\triangle CMR \sim \triangle DNR$, па затоа $\overline{CM}:\overline{DN}=\overline{CR}:\overline{DR}=\frac{1}{2}$, т.е. $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{DN}$. Сега QT е средна линија во трапезот $DCMN$ и важи

$$\overline{DN}+\overline{CM}=2\overline{QT}=a$$

односно $\overline{DN}+\frac{\overline{DN}}{2}=a$, од каде што добиваме $\overline{DN}=\frac{2}{3}a$, па затоа $\overline{CM}=\frac{1}{3}a$.

Рамнината APQ ја дели коцката на два дела од кои едниот е пресечената пирамида , со висина еднаква на работ на коцката и чии основи се правоаголните триаголници PCM и AND. Затоа волумен на пресечената пирамида За волуменот на пресечената пирамида $ADNPCM$ е

$$V_1=V_{ADNR}-V_{PCMR}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DN}}{2}\cdot\frac{\overline{DR}}{3}-\frac{\overline{CP}\cdot\overline{CM}}{2}\cdot\frac{\overline{CR}}{3}=\frac{7a^3}{36}$$

Волуменот на вторито дел на коцката е $V_2=a^3-V_1=\frac{29a^3}{36}$. Конечно, бараниот однос на волумените е $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{29}$.

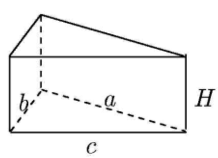
10. Плоштината на основата на една права триаголна призма е еднаква на $4\,cm^2$, а плоштините на бочните површини се еднакви на 9, 10 и $17\,cm^2$. Определи го волуменот на призмата.

Решение. Нека a,b,c се должините на страните на основата на призмата, $s=\frac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на основата и h е нејзината висина. Од условот на задачата имаме: $a=\frac{9}{h}, b=\frac{10}{h}, c=\frac{17}{h}$ и $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=4$. Со замена за a,b,c во последното равенство имаме $\sqrt{\frac{18}{h}\cdot\frac{9}{h}\cdot\frac{8}{h}\cdot\frac{1}{h}}=4$, од ка де добиваме $16h^2=18\cdot 9\cdot 8$, т.е. $h=9cm$

Конечно, за волуменот на призмата наоѓаме $V=Bh=4\cdot 9=36\,cm^2$.

11. Основата на права призма е правоаголен триаголник, со катети кои се однесуваат како $24:7$, хипотенузата на основата се однесува кон висината на призмата како $5:2$, а плоштината на бочната површина на призмата е еднаква на $140cm^2$. Определи го волуменот на призмата.

Решение. Од $a:b=24:7$ и $c:H=5:2$ имаме дека $b=\frac{7}{24}a$ и $c=\frac{5}{2}H$. Од Питагоровата теорема следува имаме



$$a^2+b^2=c^2$$

$$a^2+\frac{49}{576}a^2=\frac{25}{4}H^2$$

$$a=\frac{12}{5}H$$

Со замена во $b=\frac{7}{24}a$, добиваме $b=\frac{7}{24}\cdot\frac{12}{5}H=\frac{7}{10}H$. Имаме дека $M=140cm^2$, а од друга страна $M=(a+b+c)H$, па затоа

$$140m^2 = (a+b+c)H = (\tfrac{12}{5}H + \tfrac{7}{10}H + \tfrac{5}{2}H)H = \tfrac{56}{10}H^2$$
$$H^2 = 140 \cdot \tfrac{10}{56} = 25cm^2$$

Значи $H = 5cm$, од каде се добива дека $a = \frac{12}{5}H = 12cm$ и $b = \frac{7}{10}H = 3,5cm$. Тогаш, за волуменот на призмата имаме

$$V = B \cdot H = \tfrac{a \cdot b}{2} \cdot H = \tfrac{12 \cdot 3,5}{2} \cdot 5 = 105cm^3.$$

12. Основата на права тристрана призма е правоаголен триаголник со катети a и b. Призмата е пресечена со рамнина, при што добиениот пресек е рамностран триаголник. Определи ја должината негова страна?

Решение. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека $b \le a$. Рамнината што ја сече призмата во рамностран триаголник ја транслатираме во правец на висината на призмата така што минува низ темето A (види цртеж). Од правоаголните триаголници ADB и AEC, соодветно добиваме $h_1^2 = x^2 - a^2 - b^2$ и $h_2^2 = x^2 - b^2$. Низ точката D повлекуваме права паралелна со работ BC. Нека F е пресечната точка на таа права и CC'. Од правоаголниот триаголник EFD имаме

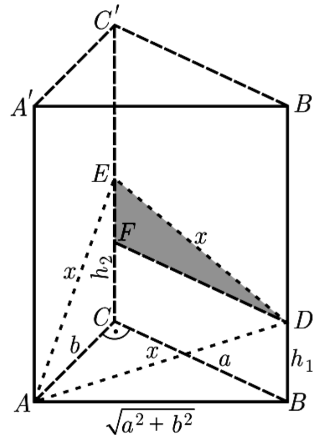
$$x^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 = a^2 + (h_2 - h_1)^2$$
$$= a^2 + x^2 - a^2 - b^2 + x^2 - b^2 - 2\sqrt{(x^2 - b^2 - a^2)(x^2 - b^2)}$$

т.е.

$$3x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0,$$

и оттука

$$x^2 = \tfrac{2(a^2+b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}{3}. \qquad (1)$$



Бидејќи

$$\tfrac{2(a^2+b^2-\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4})}{3} < \tfrac{2(a^2+b^2-(a^2-b^2))}{3} = \tfrac{4}{3}b^2 \text{ и}$$
$$x^2 = a^2 + b^2 + h_1^2 > a^2 + b^2 \ge 2b^2,$$

од (1) следува дека

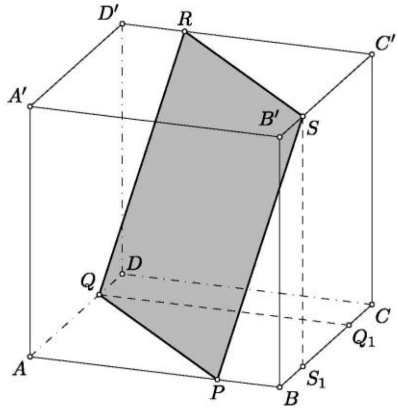
$$x = \tfrac{\sqrt{6(a^2+b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4})}}{3}.$$

13. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб 1. На рабовите AB, $AD, C'D'$ и $B'C'$ избрани се точки P, Q, R и S соодветно, такви што $PQRS$ е квадрат со центар во центарот на коцката. Определи ја должината на страната на квадратот $PQRS$.

Решение. Точките A, P, Q се централно симетрични во однос на центарот на коцката со точките C', R, S. Затоа $\overline{AP} = \overline{C'R}$ и $\overline{AQ} = \overline{C'S}$. Да означиме

$$\overline{AP} = \overline{C'R} = x,\ \overline{AQ} = \overline{C'S} = y \text{ и } \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = a.$$

Во правоаголниот триаголник APQ важи



$$a^2 = x^2 + y^2 . \qquad (1)$$

Со Q_1 и S_1 да ги означиме ортогоналните проекции на точките Q и S на работ BC. Тогаш PS е дијагонала на квадар на кој P, B и S_1 се три темиња на долната основа, а неговата висина е SS_1. Затоа важи

$$a^2 = \overline{PS}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{B'S}^2 ,$$

односно

$$a^2 = (1-x)^2 + 1 + (1-y)^2 . \qquad (2)$$

Понатаму, QS е дијагонала ма квадар за кој Q, Q_1 и S_1 се три темиња на долната основа, а висината му е SS_1. Бидејќи $\overline{Q_1S_1} = 1-(1-y)-(1-y) = 2y-1$ добиваме

$$2a^2 = \overline{QS}^2 = \overline{QQ_1}^2 + \overline{Q_1S_1}^2 = 1 + (2y-1)^2 + 1 . \qquad (3)$$

Од (1) и (2) следува $2x + 2y = 3$. Затоа важи $a^2 = (\frac{3}{2} - y)^2 + y^2$ и ако замениме во (3) добиваме $2(\frac{3}{2} - y)^2 + 2y^2 = 2 + (2y-1)^2$ од каде наоѓаме $y = \frac{3}{4}$. Според тоа, $x = \frac{3-2y}{2} = \frac{3}{4}$, па затоа

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{3}{4})^2} = \tfrac{3\sqrt{2}}{4} .$$

14. Дадена е коцка со раб a. Ѕидовите на коцката се основи на шест пирамиди чиј заднички врв е центарот на коцката. Во секој од пирамидите е впишана сфера. Да се најде волуменот на телото чии темиња се центрите на сферите.

Решение. Телото чии темиња се центрите на сферите е составено од две складни пирамиди слепени со основите. Основата на пирамидата е квадрат со страна $2R$ и висина $\frac{a}{2} - R$, каде што R е радиусот на сферите (направи цртеж). Според тоа, ќе имаме

$$V = \tfrac{8R^2}{3}(\tfrac{a}{2} - R). \qquad (1)$$

Лесно се покажува дека радиусот на сверите е $R = \frac{a}{2(\sqrt{2}+1)}$, па затоа заменувајќи во (1) добиваме $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)^3}$.

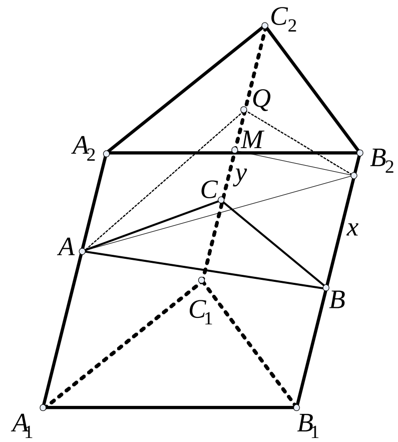
15. Нормалниот пресек на тристрана призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ е рамностран триаголник ABC со страна a. На бочните рабови B_1B_2 и C_1C_2 се земени две произволни точки P и Q. Нека $\overline{BP} = x$ и $\overline{CQ} = y$.

а) Да се најде врската меѓу x и y така што триаголникот APQ ќе биде правоаголен со прав агол кај темето P.

б) Да се определат x и y, така што триаголникот APQ ќењ биде рамнокрак правоаголен со прав агол кај темето P.

Решение. а) Од правоаголните триаголници ABP и ACQ (види цртеж) добиваме $\overline{AP}^2 = x^2 + y^2$ и $\overline{AQ} = a^2 + y^2$. Нека M е точка од работ C_1C_2, така што $PM \parallel BC$, тогаш триаголникот PMQ е правоаголен, па имаме $\overline{PQ}^2 = a^2 + (y-x)^2$, $y > x$. Ако триаголникот APQ е правоаголен со прав агол кај темето P, тогаш $\overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2$, т.е.

$$2x^2 - 2xy + a^2 = 0. \qquad (1)$$



б) Според условот на задачата, за триаголникот APQ важат релациите

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \text{ и } \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2,$$

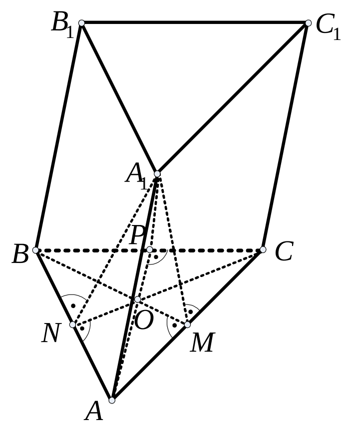
т.е. $y^2 - 2xy = 0$ и $2x^2 - 2xy + a^2 = 0$. При претпоставката $y \neq 0$ добиваме $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = a\sqrt{2}$.

16. Дадена е коса призма, чија основа е рамностран триаголник со страна $10\ dm$, а бочен раб $13\ dm$. Едно од темињата на горната основа нормално се проектира во центарот на долната основа на призмата. Да се пресмета плоштината на призмата.

Решение. Нека точката O е ортогонална проекција од темето A_1 на призмата $ABCA_1B_1C_1$ врз нејзината основа ABC (види цртеж).

Ќе докажеме дека ѕидот BCC_1B_1 е правоаголник.

Бидејќи O е ортогонална проекција на A_1 врз рамнината ABC, добиваме дека рамнината APA_1 е нормална на работ BC (P е средина на работ BC). Затоа, од $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ следува дека $BB_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp BC$, што требаше и да се докаже.

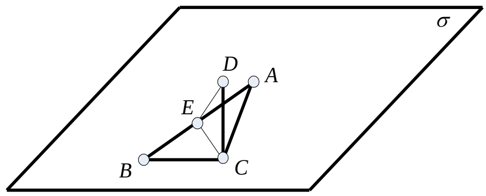


Од правоаголните триаголници A_1NA и A_1MA (N е средина на AB и M е средина на AC) добиваме $\overline{NA_1} = 12$ и $\overline{MA_1} = 12$. За плоштината P на призмата ќе имаме:

$$P = 2 \cdot \frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4} + \overline{AB} \cdot \overline{NA_1} + \overline{AC} \cdot \overline{MA_1} + \overline{BB_1} \cdot \overline{BC} = 50\sqrt{3} + 370\ dm^2.$$

17. Отсечката CD има должина l, не лежи во рамнината на правоаголниот триаголникот ABC и е нормална на катетите AC и BC. Определи го растојанието од точката D до средината на хипотенузата AB ако $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = a$.

Решение. Со σ ќе ја означиме рамнината во која лежи триаголникот ABC. Бидејќи $CD \perp AC$ и $CD \perp BC$ добиваме дека CD е нормална на рамнината во која лежи триаголникот ABC. Според тоа CD е нормална на секоја отсечка која лежи во σ. Значи, ако E е средината на хипотенузата AB, тогаш $CD \perp CE$. Триаголникот ABC е правоаголен, па според тоа



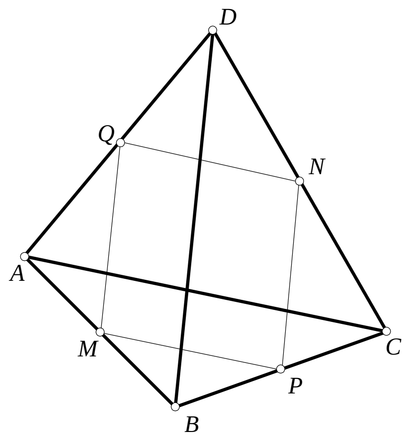
$$\overline{CE} = \overline{BE} = \overline{AE} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Сега од правоаголниот триаголник DCE имаме

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{l^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4l^2 + a^2 + b^2}\ .$$

18. Дадени се четири точки A, B, C, D такви што $\overline{AC} = 10$ и $\overline{BD} = 8$, а растојанието меѓу средините на AB и CD е 9. Дали точките лежат во една рамнина?

Решение. Нека претпоставиме дека $ABCD$ не лежат во една рамнина. Тогаш $ABCD$ се темиња на еден тетраедар. Нека M, N, P, Q се средини на AB, CD, BC и AD (види цртеж). Четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм, при што



$$\overline{QM} = \tfrac{1}{2}\overline{DB} = \tfrac{1}{2}\cdot 10 = 5$$

$$\overline{MP} = \tfrac{1}{2}\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\cdot 8 = 4\ .$$

Сега триаголникот MNQ има страни 4, 5, 9 што не е можно, бидејќи не е исполнето неравенството на триаголник .

Заради добиената противречност, точките A, B, C, D лежат во една рамнина.

19. Од отсечки со должини $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ е направен тетраедар. Кој е најголемиот број на страни на тетраедарот што се правоаголни триаголници?

Решение. Заради одреденост отсечките со исти должини ше ги индексираме $1_a, 1_b, 1_c, \sqrt{2}_n, \sqrt{2}_m$. Да забележиме дека од дадените отсечки можеме да формираме четири триаголници кои се правоаголни:

$$1_a, 1_b, \sqrt{2}_n\ ,\ 1_b, 1_c, \sqrt{2}_m\ ,\ 1_c, \sqrt{2}_n, \sqrt{3}\ ,\ 1_a, \sqrt{2}_m, \sqrt{3}\ .$$

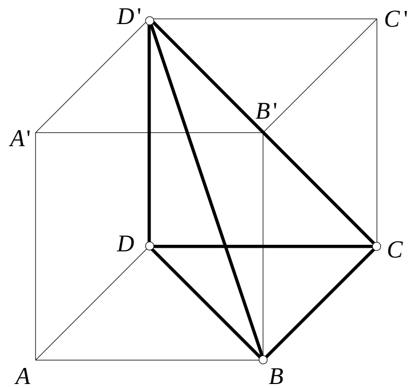
Секоја од отсечките во овие четири правоаголни триаголници се појавува два пати.

Според тоа, такво реално тело, како во условите во задачата може да се конструира на следниот начин:

1) конструираме правоаголен триаголник со должини на страни $1_a, 1_b, \sqrt{2}_n$,
2) во едно од темињата на хипотенузатаќе повлечеме нормала и на нормалата ќе избереме точка која е на растојание 1 од рамнината на почетниот триаголник,

3) трите точки почетно избрани под 1) и четвртата точка избрана под 2) формираат тетраедар кој кој има четири страни кои се правоаголни триаголници.

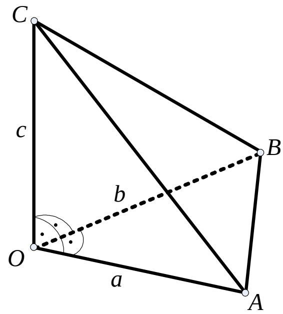
Забелешка. Задачата може едноставно да се реши на следниот начин. Ќе избереме коцка со должина на раб 1. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е таква коцка. Доволно е да се разгледа тетраедарот $BCDD'$(види цртеж). Тој е составен од четири правоаголни триаголници.



20. Нека $OABC$ е тетраедар, таков што $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ и нека $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$. Докажи:

$$\overline{ON}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

каде што ON е висината на тетраедарот.



Решение. Страните на траиголникот ABC се

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}, \ \overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}, \ \overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}.$$

Нека $p=\overline{AB}$, $q=\overline{BC}$, $r=\overline{CA}$. Од Хероновата формула зап лоштината на триаголникот $\triangle ABC$ добиваме

$$\begin{aligned}
P_{\triangle ABC} &= \sqrt{\tfrac{p+q+r}{2}\tfrac{p+q-r}{2}\tfrac{p-q+r}{2}\tfrac{-p+q+r}{2}}\\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{(p^2+q^2-r^2+2pq)(2pq+r^2-p^2-q^2)}\\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2})(2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}-2b^2)}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}
\end{aligned}$$

Серга, $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$, а од друга страна, пак,

$$V_{OABC}=P_{\Delta ABC}\frac{\overline{ON}}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overline{ON}.$$

Конечно, од последните две равенства следува равенството

$$\overline{ON}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

21. Основниот раб на права правилна четириаголна пирамида $ABCDT$ (T е врвот на пирамидата) е $\sqrt{2}$, а бочниот раб е 2. Низ темето A минува рамнина нормална на работ TC (A и C лежат дијагонално на основата) и ги сече рабовите TB, TC и TD во точките P, Q и R соодветно. Да се определи волуменот на пресечената пирамида $ABCDPQR$.

Решение. Да го означиме со M пресекот на дијагоналите на основата на пирамидата, а со O пресекот на дијагоналите на четириаголникот $APQR$.

За дијагоналата на основата имаме: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$, т.е. $\overline{AC} = 2$. Значи, ACT и BDT се два складни рамнострани триаголници со страна 2. Бидејќи $TC \perp AQ$, јасно е деак AQ е висината на $\triangle ACT$. Исто така висината на пирамидата TM е висина на $\triangle ACT$. Имаме $\overline{AQ} = \overline{TM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Точката O е ортоцентар на $\triangle ACT$ и $\triangle BDT$, па затоа $\overline{RP} : \overline{BD} = 2:3$, од каде што добиваме $\overline{RP} = \frac{4}{3}$. Четириаголникот $APQR$ е делтоид, па, за неговата плоштина P имаме $P = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{RP}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Бидејќи TQ е висина на пирамидата имаме

$$V_{APQRT} = \frac{1}{3} \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Волуменот на дадената пирамида е

$$V = \frac{1}{3}(\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

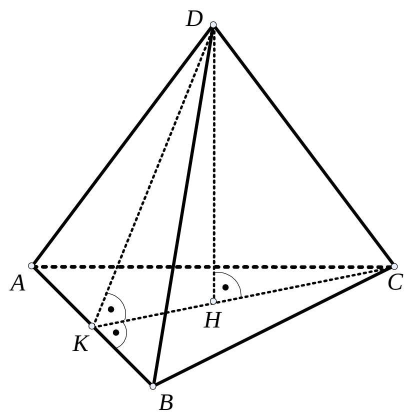
Конечно, бараниот волумен е

$$V_{ABCDPRQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

22. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивниот ѕид се совпаѓа со ортоцентарот на тој ѕид. Да се докаже дека важат равенствата:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2.$$

Решение. Нека ортогоналната проекција на темето D е ортоцентарот H на триаголникот $\triangle ABC$ и нека K е ортогоналната проекција на D врз работ AB (види цртеж). Тогаш точките K, H и C се колинеарни. Имаме:



$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AK}^2 + \overline{KD}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 - \overline{CK}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{KD}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{KD}^2 \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.\end{aligned}$$

Аналогно се добива и другото равенство.

23. Даден е тетраедар $ABCD$ таков што

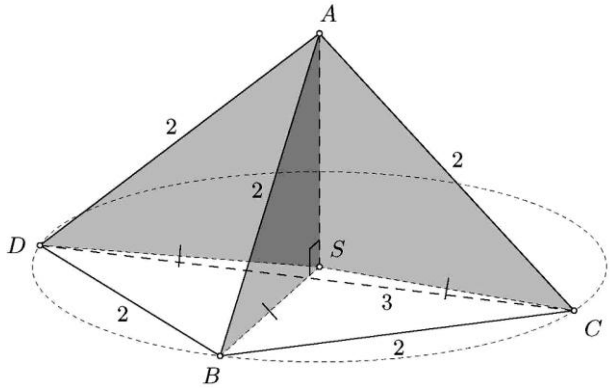
$$\overline{CD} = 3 \text{ и } \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = 2.$$

Пресметај го волуменот на тетраедарот $ABCD$.

Решение. Тетраедарот ќе го разгледуваме како тристрана пирамида во која однова е рамнокракиот $\triangle BCD$ (види цртеж). Плоштината на $\triangle BCD$ ќе ја определиме со помош на Хероновата формула. Должините на страните на овој триаголник се $a = 2, b = 2, c = 3$ и полупериметарот е $s = \frac{7}{2}$. Според тоа,

$$P_{BCD} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\tfrac{7}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}} = \tfrac{3}{4}\sqrt{7}\,.$$

Нека S е подножјето на висината повлечена од темето A на основата BCD. Триаголниците ASB, ASC и ASD се правоаголни и имаат заедничка катета и хипотенузите им се со еднакви должини



$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = 2\,,$$

па од Питагоровата теорема следува дека

$$\overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}\,.$$

Според тоа, S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle BCD$. Оттука следува дека

$$R = \overline{BS} = \tfrac{abc}{4P_{BCD}} = \tfrac{2\cdot2\cdot3}{3\sqrt{7}} = 4\sqrt{7}\,.$$

Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BS}^2} = \sqrt{4-\tfrac{16}{7}} = \tfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\,.$$

Конечно, волуменот на тетраедарот е

$$V = \tfrac{1}{3}P_{BCD}\cdot\overline{AS} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\sqrt{7}\cdot\tfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

24. Докажи дека збирот на растојанијата од произволна точка во правилен тетраедар до неговите страни е еднаков на висината на тетраедарот.

Решение. Нека плоштината на некоја од страните на правилниот тетраедар $ABCD$ е P, и нека M е произволна точка во тетраедарот. Поврзувајќи ја M со темињата A,B,C,D се добиваат тетраедри $ABCM, BCDM, ACDM, ABDM$ чии волумени се $\tfrac{1}{3}Pd_1, \tfrac{1}{3}Pd_2,\ \tfrac{1}{3}Pd_3,\ \tfrac{1}{3}Pd_4$. Притоа d_1,d_2,d_3,d_4 се соодветно растојанијата од M до страните ABC, BCD, ACD, ABD. Бидејќи волуменот на тетраедарот е збир на волумените на овие четири тетраедри, добиваме

$$\tfrac{1}{3}Pd_1 + \tfrac{1}{3}Pd_2 + \tfrac{1}{3}Pd_3 + \tfrac{1}{3}Pd_4 = \tfrac{1}{3}PH\,,$$

каде H е висината на тетраедарот. Значи, $d_1+d_2+d_3+d_4 = H$, што и требаше да се докаже.

25. Докажи дека збирот на растојанијата од произволна точка на основата на правилна пирамида до нејзините бочни страни е константен.

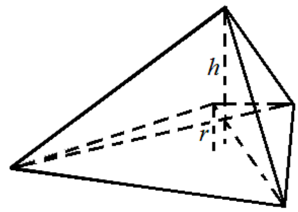
Решение. Нека O е произволна точка од основата и нека n е бројот на бочни страни на правилната пирамида (т.е. основата е правилен n-аголник). Поврзувајќи ја точката O со тие темиња и со врвот на пирамидата се добиваат n тристрани пирамиди. Збирот на нивните волумени е еднаков на волуменот на пирамидата. Значи $V = \tfrac{1}{3}P(d_1+d_2+...+d_n)$, каде $d_1,...,d_n$ се растојанијата од O до бочните страни, а P е плоштината на бочната страна. Според тоа $d_1+d_2+...+d_n=\frac{3V}{P}$, т.е. збирот на растојанијата е константен.

26. Во свера со радиус r е вписан тетраедар. Ако должините на висините на тетраедарот се h_1,h_2,h_3,h_4, докажи дека

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}.$$

Решение. Со V да го означиме волуменот на тетраедарот, со S неговата обиколка, а со B_1,B_2,B_3,B_4 плоштините на страните кои соодвествуваат на висините h_1,h_2,h_3,h_4. Имаме

$$S=B_1+B_2+B_3+B_4$$



и

$$V=\frac{1}{3}B_1h_1=\frac{1}{3}B_2h_2=\frac{1}{3}B_3h_3=\frac{1}{3}B_4h_4.$$

Од друга страна, тетраедарот е составен од четири помали тетраедри со основи B_1,B_2,B_3,B_4 и висина r, па затоа важи

$$V=\frac{1}{3}B_1r+\frac{1}{3}B_2r+\frac{1}{3}B_3r+\frac{1}{3}B_4r=\frac{1}{3}(B_1+B_2+B_3+B_4)r=\frac{1}{3}Sr.$$

Според тоа, $\frac{1}{3}B_ih_i=\frac{1}{3}Sr$, па затоа $\frac{1}{h_i}=\frac{B_i}{Sr}$, за $i=1,2,3,4$, па затоа

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{Sr}=\frac{S}{Sr}=\frac{1}{r}$$

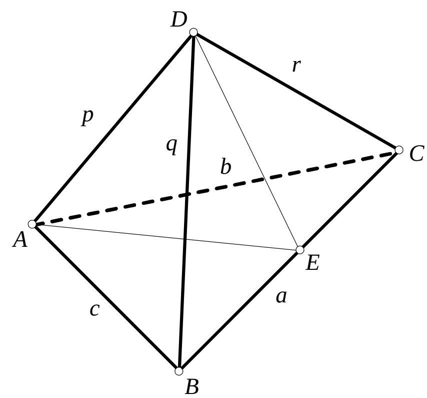
27. Три страни на тетраедарот се заемно нормални и имаат плоштини P_1,P_2 и P_3. Пресметај ја плоштината на четвртата страна.

Решение. Нека $DABC$ е тетраедар во кој во

$$P_{DAB}=P_1,\ P_{ABC}=P_2 \text{ и } P_{DCA}=P_3$$

и

$$DA\perp DC,\ DA\perp DC \text{ и } DB\perp DC.$$



Воведуваме ознаки

$$\overline{DA}=p,\ \overline{DB}=q,\ \overline{DC}=r \text{ и}$$

$$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c.$$

Со DE ќе ја означиме висината во триаголникот BDC. Со воведените ознаки, точни се равенствата

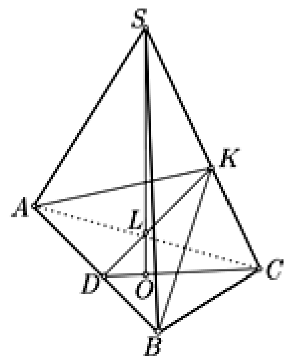
$$2P_1=pq,\ 2P_3=pr.$$

Триаголникот DAE е правоаголен со $\measuredangle ADE=90^\circ$. Според тоа $\overline{AE}^2=\overline{DE}^2+p^2$. Ако P е плоштината на триаголникот ABC, тогаш $2P=a\cdot\overline{AE}$ и

$$\begin{aligned}4P^2&=a^2\overline{AE}^2=a^2(\overline{DE}^2+p^2)=(a\cdot\overline{DE})^2+a^2p^2=(2P_2)^2+(q^2+r^2)p^2\\&=(2P_2)^2+q^2p^2+r^2p^2=(2P_1)^2+(2P_3)^2+(2P_3)^2=4(P_1^2+P_2^2+P_3^2).\end{aligned}$$

Конечно, $P=\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}$.

28. Низ еден раб на основата на правилна триаголна пирамида повлечена е рамнина која е нормална на спротивниот бочен раб на пирамидата. Определи го волуменот на пирамидата, ако повлечената рамнина го дели бочниот раб во однос $5:1$, а должината на страната на основата е a .



Решение. Нека низ работ AB на основата ABC на пирамидата $SABC$ е повлечена рамнина која е нормална на работ CS, кој рамнината го сече во точката K, при што $\overline{SK}=5\overline{KC}$. Нека O припаѓа на рамнината на основата на пирамидата при што SO е негова висина. Нека DK е висина на триаголникот ABK. При тоа, CD е висина на триаголникот ABC (види цртеж). Отсечката DC е висина во рамностраниот триаголникот ABC со должина на страна a, па затоа $\overline{DC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\overline{OC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Триаголниците SOC и DKC се слични бидејќи имаат по еден прав агол и имаат агли со нормални краците. Според тоа, $\overline{DC}:\overline{SC}=\overline{KC}:\overline{OC}$, од каде добиваме $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{KC}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$, $\overline{KC}\cdot 6\cdot\overline{KC}=\frac{a^2}{2}$, т.е. $\overline{KC}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Од правоаголниот триаголник DKC, добиваме $\overline{DK}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{KC}^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Бидејќи SC е нормална на рамнината на триаголникот ABK, за волуменот на пирамидата, добиваме

$$V=V_{SABK}+V_{CABK}=\frac{1}{3}P_{ABK}\cdot\overline{SC}=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot\overline{DK}\cdot\overline{SC}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 .$$

29. Три отсечки ги сврзуваат средината на висината на тетраедар со темињата на основата. Докажи, дека овие отсечки се по парови заемно нормални.

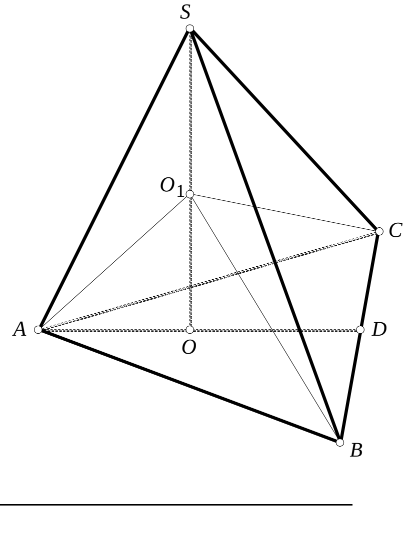
Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=a$, SO е висина во тетраедарот $ABCS$, и O_1 е средината на SO . Тогаш,

$$\overline{AO}=\tfrac{2}{3}\overline{AD}=\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2}=\tfrac{a}{\sqrt{3}} ,$$

каде D е подножјето на висината на триаголникот ABC, кој е рамностран. Затоа

$$\overline{SO}=\sqrt{\overline{SA}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{a^2-(\tfrac{a}{\sqrt{3}})^2}=\tfrac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$\overline{OO_1}=\tfrac{1}{2}\overline{SO}=\tfrac{a\sqrt{6}}{6}.$$



Конечно,

$$\overline{AO_1}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{OO_1}^2}=\sqrt{(\tfrac{a}{\sqrt{3}})^2+(\tfrac{a\sqrt{6}}{6})^2}=\tfrac{a\sqrt{2}}{2}.$$

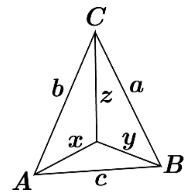
Слично се добива и $\overline{BO_1}=\overline{CO_1}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Бидејќи,

$$\overline{AO_1}^2+\overline{BO_1}^2=(\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2+(\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2=a^2=\overline{AB}^2$$

добиваме дека $\triangle ABO_1$ е правоаголен со $\measuredangle AO_1B=90^\circ$, од каде $AO_1\perp BO_1$. Слично, се докажува дека $AO_1\perp CO_1$ и $BO_1\perp CO_1$.

30. Нека OA, OB, OC се три заемно нормални отсечки. Дали може да се изберат должини за отсечките OA, OB и OC така што страните на триаголникот ABC да се однесуваат како $3:4:6$?

Решение. Нека $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$, $\overline{OC}=z$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ (види цртеж). Нека $c:a:b=3:4:6$, значи постои $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ така да $c=3k, a=4k, b=6k$. Триаголниците AOB, BOC и AOC се правоаголни, па затоа



$$\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\ y^2+z^2=a^2\\ x^2+z^2=b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=9k^2\\ y^2+z^2=16k^2\\ x^2+z^2=36k^2\end{cases}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и од добиената равенка ја одземеме третата равенка добиваме

$$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)-(x^2+z^2)=9k^2+16k^2-36k^2$$
$$y^2=-\tfrac{11}{2}k^2,$$

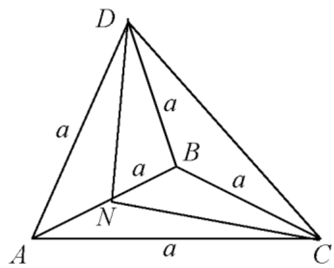
што е противречност. Од добиената противречност, заклучуваме дека не може да се изберат должини за три заемно нормални отсечки OA, OB и OC така што страните на триаголникот ABC да се однесуваат како $3:4:6$.

31. Две страни на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со должина на страна a. Рамнините на овие триаголници се нормални меѓу себе. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека е дадена тристраната пирамида $ABCD$, каде страните ABC и ABD се рамнострани триаголници со страна a, т.е.

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=a.$$

Нека CN и DN се висини во триаголниците ABC и ABD соодветно, кон заедничката страна AB, значи $CN\perp AB$ и $DN\perp AB$. Од условот на задачата имаме дека и $CN\perp DN$, (види цртеж). Ако земеме еден од рамностраните триаголници за база на пирамидата, на пример триаголникот ABC, тогаш висина на пирамидата ќе биде DN, па волуменот на пирамидата е



$$V=\tfrac{1}{3}\cdot P_{\Delta ABC}\cdot\overline{DN}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\tfrac{a\sqrt{3}}{2}=\tfrac{a^3}{8}.$$

Триаголникот CND е рамнокрак правоаголен со прав агол кај темето N и $\overline{CN}=\overline{DN}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогаш,

$$\overline{CD}=\sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Триаголниците CDA и CDB се складни рамнокраки триаголници со основа $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ и крак $a\,cm$. Тогаш, нивната плоштина е

$$P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{a^2-(\frac{a\sqrt{6}}{4})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$

Конечно, плоштината на пирамидата е

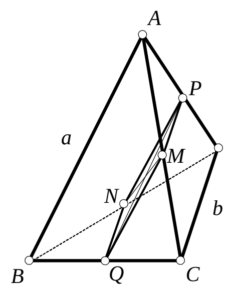
$$P=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}=\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}.$$

32. Во триаголна пирамида $ABCD$, рабовите AB и CD имаат должини a и b соодветно. Пресметај го збирот на квадратите на должините на отсечките, едната од кои ги поврзува средините на рабовите AC и BD, а друга ги поврзува средините на рабовите AD и BC.

Решение. Нека во пирамидата $ABCD$, точките M,N,P,Q се средини на AC,BD,AD,BC соодветно.

Бидејќи QM е средна линија на триаголникот ABC, добиваме $MQ\parallel AB$ и $\overline{MQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}a$.

Слично, PN е средна линија на триаголникот ABD, па имаме $PN\parallel AB$ и $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}a$. Според тоа, $QMPN$ е паралелограм со страни $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ (на ист начин се проверува дека другите две страни на паралелограмот имаат должина $\frac{b}{2}$). Зададените отсечки од условот на задачата чиј збир на квадрати на нивните должини треба да го пресметаме се дијагонали на паралелограмот. Но тогаш

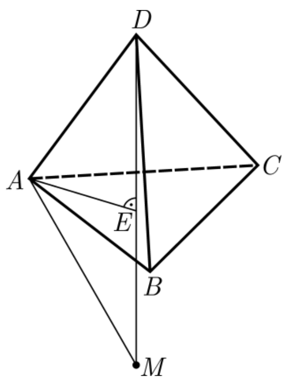


$$\overline{MN}^2+\overline{PQ}^2=2(\overline{NQ}^2+\overline{NP}^2)=2(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4})=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

33. Даден е тетраедар $ABCD$. Точката M лежи надвор од тетраедарот и притоа

$$\overline{MD}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}},\ \overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\sqrt{\frac{97}{75}}.$$

Пресметај го волуменот на тетраедарот.

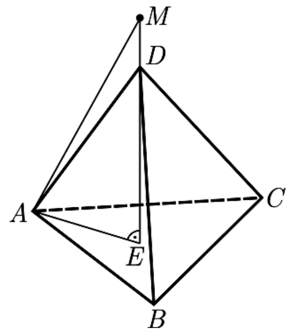


Решение. Бидејќи $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$, проекциите на M и D на рамнината на триаголникот ABC се совпаѓаат со центарот E на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Значи M, D и E се колинеарни.

Ќе докажеме дека точките M и D лежат на иста страна од рамнината ABC. Да претпоставиме спротивно. Со a да ја означиме страната на тетраедарот. Тогаш $\overline{AE}=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $\overline{ED}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AE}^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Значи $\overline{AE}<\overline{AD}$. Сега имаме Тогаш

$$\sqrt{\tfrac{97}{75}}=\overline{MA}<\overline{ME}+\overline{AE}<\overline{ME}+\overline{ED}=\overline{MD}=\tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

што не е можно.



Понатаму, бидејќи M лежи надвор од тетраедарот добиваме дека $\overline{MD}>\overline{DE}$, а од колинеарноста на M, D и E следува дека $\overline{ME}=\overline{MD}+\overline{DE}$. Сега имаме

$$\overline{ME}=\overline{MD}+\overline{DE}=\tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{2}{3}}+a\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Од друга страна

$$\overline{ME}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{\tfrac{97}{75}-\tfrac{a^2}{3}}.$$

Затоа $\sqrt{\frac{97}{75}-\frac{a^2}{3}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}+a\sqrt{\frac{2}{3}}$, од каде добиваме $a^2+\frac{4}{15}a-\frac{19}{15}=0$. Позитивното решение на последната равенка е $a=1$. Според тоа волуменот на пирамидата е

$$V=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\tfrac{\sqrt{2}}{12}.$$

34. Дадена е триаголна пирамида $SA_1A_2A_3$ со волумен V. На страните на основата A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 избрани се точки K_1, K_2, K_3, соодветно, така што

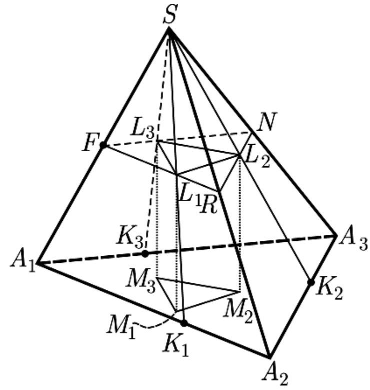
$$\overline{A_1K_1}:\overline{K_1A_2}=\overline{A_2K_2}:\overline{K_2A_3}=\overline{A_3K_3}:\overline{K_3A_1}=2.$$

Низ средината на работ SA_1, паралелно со основата, повлечена е рамнина π која ги сече отсечките SK_1, SK_2, SK_3 во точки L_1, L_2, L_3, соодветно. Пресметај го волуменот на правата призма чија горна основа е триаголникот $L_1L_2L_3$, а долната основа лежи во рамнината на основата на пирамидата.

Решение. Нека $\pi\cap SA_1=\{F\}, \pi\cap SA_2=\{R\}$, и $\pi\cap SA_3=\{N\}$. Тогаш

$$SK_1K_2\cap FNR=L_1L_2,\ SK_1K_2\cap A_1A_2A_3=K_1K_2.$$

Од $FNR\,||\,A_1A_2A_3$ следува дека $L_1L_1\,||\,K_1K_2$. Слично и $L_1L_3\,||\,K_1K_3$ и $L_2L_3\,||\,K_2K_3$. Оттука следува $\triangle L_1L_2L_3\sim\triangle K_1K_2K_3$ со коефициент $\frac{\overline{L_1L_2}}{\overline{K_1K_2}}$. Од $\triangle SL_1L_2\sim\triangle SK_1K_2$ следува $\frac{\overline{L_1L_2}}{\overline{K_1K_2}}=\frac{\overline{SL_1}}{\overline{SK_1}}$. Важи и $\frac{\overline{SL_1}}{\overline{SK_1}}=\frac{\overline{SF}}{\overline{SA_1}}=\frac{1}{2}$ (Зошто?), па затоа коефициентот на сличност на триаголниците $L_1L_2L_3$ и $K_1K_2K_3$ е $\frac{1}{2}$. Според тоа $P_{\triangle L_1L_2L_3}=\frac{1}{4}P_{\triangle K_1K_2K_3}$. Ќе го најдеме уште и односот $\frac{P_{\triangle K_1K_2K_3}}{P_{\triangle A_1A_2A_3}}$. Важи



$$P_{\triangle K_1A_2K_2}=P_{\triangle K_2A_3K_3}=P_{\triangle K_3A_1K_1}=\tfrac{2}{9}P_{\triangle A_1A_2A_3},$$

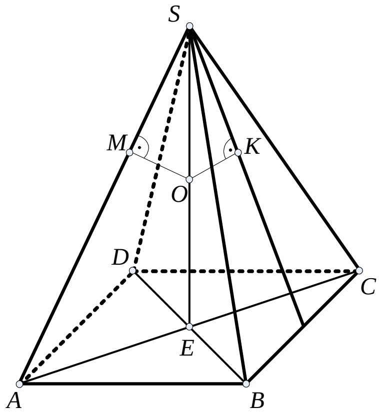
па затоа $P_{\triangle K_1K_2K_3} = \frac{1}{3} P_{\triangle A_1A_2A_3}$. Ако H е висината на пирамидата, тогаш висината на призмата $M_1M_1M_3L_1L_2L_3$ е $\frac{1}{2}H$. За волуменот V_1 на призмата добиваме

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot H \cdot P_{\triangle L_1L_2L_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} P_{\triangle A_1A_2A_3} \cdot H = \frac{1}{8} V .$$

35. Од средината O на висината SE на правилна четиристрана пирамида, со врв S , повлечена е нормала OM на бочниот раб и нормала OK на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM} = p$ и $\overline{OK} = q$, пресметај го волуменот на пирамидата.

Решение. Нека основниот раб на пирамидата има должина a , дијагоналата на основата d и нека $h = \overline{SE}$. Имаме $\triangle MOS \sim \triangle EAS$, па

$$\frac{p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + h^2}} .$$



од каде акоземеме предвид дека $d = a\sqrt{2}$ добиваме

$$\frac{4}{h^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{1}{p^2} \qquad (1)$$

Од друга страна $\triangle KOS \sim \triangle ELS$ (L е средина на основниот раб), па имаме

$$\frac{q}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2}} .$$

од каде добиваме

$$\frac{16}{a^2} + \frac{4}{h^2} = \frac{1}{q^2} \qquad (2)$$

Со одземање на (1) од (2) добиваме $\frac{8}{a^2} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{p^2 - q^2}{p^2q^2}$ и оттука наоѓаме $a^2 = \frac{8p^2q^2}{p^2 - q^2}$. Заменувајќи во (1) добиваме $h^2 = \frac{4p^2q^2}{2q^2 + p^2}$.

Конечно, за волуменот на пирамидата добиваме

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{a^2h}{3} = \frac{16p^3q^3}{3(p^2 - q^2)\sqrt{2q^2 + p^2}} .$$

36. Должините на сите рабови на правилна четиристрана пирамида $SABCD$ (со врв S) се еднакви на a . Низ точката A , поставена е рамнина Σ што е нормална на рамнината ACS и минува низ средината M на работ SC . Да се најде волуменот на четиристраната пирамида, отсечена од дадената пирамида со рамнината Σ .

Решение. Според условот на задачата, треба да го најдеме волуменот V на пирамидата $SAKMN$ (види цртеж). Тристраните пирамиди $KSAM$ и $NSAM$ имаат еднакви волумени. Ако SAM ја земеме како основа на овие пирамиди, тогаш тие имаат еднакви висини, KR и NR . Според тоа,

$$V = \frac{2}{3} P_{ASM} \cdot \overline{KR} .$$

Бидејќи $\measuredangle ASM = 90^\circ$, следува дека

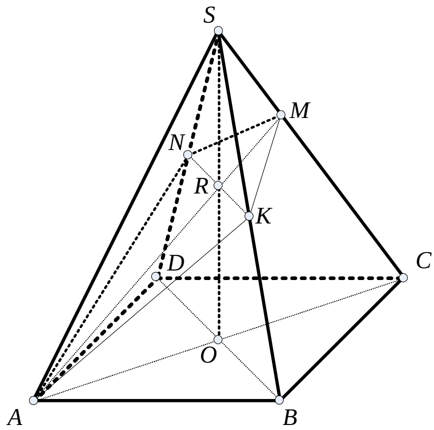
$$P_{ASM} = \frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{MS} = \frac{a^2}{4}.$$

Точката R е тежиште на триаголник ACS, па ќе имаме $\overline{SO}:\overline{SO} = 2:3$. Од сличноста на триаголниците SRK и SOB добиваме:

$$\overline{RK} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SO}}\overline{OB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

На крајот, бараниот волумен ќе биде:

$$V = \frac{2}{3}P_{ASM}\cdot\overline{RK} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}.$$

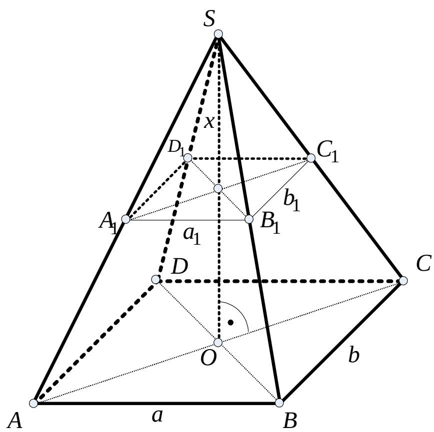


37. Основата на една пирамида е правоаголник со страни a и b, а бочните рабови се еднакви на c. Пирамидата е пресечена со рамнина, паралелна со основата, на два дела со еднакви волумени. Да се најде растојанието од рамнината до врвот на пирамидата.

Решение. Нека $A_1B_1C_1D_1$ е правоаголникот што се добива како пресек на рамнината со пирамидата (види цртеж). Да го означиме со V волуменот на пирамидата $ABCDS$, а со V_1 волуменот на пирамидата $A_1B_1C_1D_1S$. Од условот на задачата имаме

$$V = 2V_1. \qquad (1)$$

Двете пирамиди се слични, па ќе имаме $P:P_1 = H:x$, т.е. $P_1 = \frac{xP}{H}$. Од (1) добиваме $P_1 = \frac{P\cdot H}{2x}$; според тоа $x = \frac{H\sqrt[3]{4}}{2}$. Да ја најдеме висината H на дадената пирамида. Од триаголникот SOC добиваме



$$H^2 = c^2 - \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2),\text{ т.е. } H = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}.$$

Следствено,

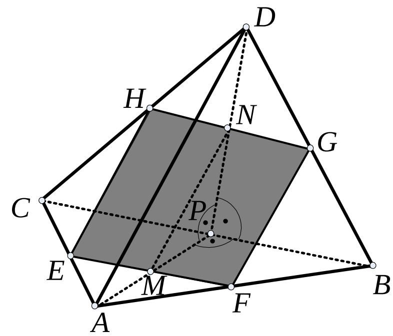
$$x = \frac{H\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}.$$

38. Дадена е тристрана пирамида $DABC$ чија основа ABC е рамностран триаголник, а ѕидот DBC е рамнокрак триаголник со крак b и е нормален на основата. Да се најде плоштината на квадратот што се добива како пресек на пирамидата со рамнината паралелна на рабовите DA и BC.

Решение. Работ DA е нормален на работ BC, па секоја рамнина што е паралелна со овие два раба ја сече пирамидата во правоаголник. Се прашуваме, дали при некоја положба на рамнината овој правоаголник може да биде квадрат. Ако тоа е можно, треба да ја најдеме неговата страна.

Да претпоставиме дека тоа е можно и нека тоа биде квадратот $EFGH$ (види цртеж) со страна x. Ако O е средината на работ BC, тогаш имаме

$$\overline{DO}^2 = b^2 - \tfrac{a^2}{4},\ \overline{DA}^2 = b^2 + \tfrac{a^2}{2}.$$



Ако M и N се прободните точки на рамнината со правите AO и DO соодветно, тогаш од тоа што $\triangle AEF$ е рамностран добиваме $\overline{AM} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, т.е.

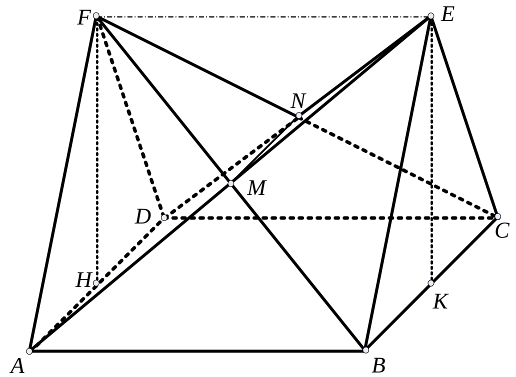
$$\overline{OM} = \overline{OA} - \overline{AM} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x).$$

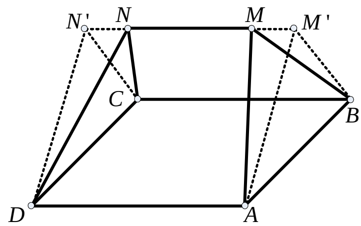
Од сличноста, пак, на триаголниците OAD и OMN следува $\overline{DA} : x = \overline{OA} : \overline{OM}$, од каде што добиваме

$$x = a\sqrt{2b^2 + a^2} : (a\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + a^2}). \qquad (1)$$

Значи, правоаголникот може да биде квадрат и неговата страна x е дадена со (1), а неговата плоштина е $P = x^2$

39. Две пирамиди имаат заедничка основа-квадрат со страна a. Пирамидите се на иста страна од рамнината на квадратот. Висините на двете пирамиди минуваат низ средините на две спротивни страни на квадратот и се еднакви на b. Определи го волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.





Решение. Нека $ABCDF$ и $ABCDE$ се дадените пирамиди (види цртеж). Заедничкиот дел се добива кога од правата призма $ABCDN'M'$ (види ги цртежите) се извадат двете пирамиди $CDN'N$ и $ABM'M$.

Од правоаголникот $ABEF$ (види цртеж) следува дека M е средна точка на AE . Слично, N е средна точка на CF. Според тоа $\overline{AB} = a$, и висината на $\triangle ABM'$, спуштена од M' е $\frac{b}{2}$. Од друга страна, бидејќи MN е средна линија во триаголникот ADE, следува дека $\overline{MN} = \frac{a}{2}$. Според тоа: $\overline{MM'} = \overline{NN'} = \frac{a}{4}$ и

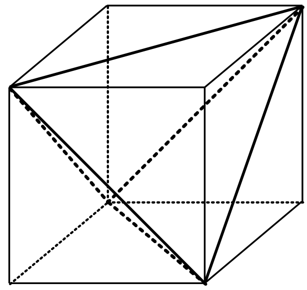
$$V_{ABCDMN} = V_{ABCDM'N'} - 2V_{CDNN'} = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \tfrac{b}{2} \cdot a - 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot a \cdot \tfrac{b}{2} \cdot \tfrac{a}{4} = \tfrac{a^2 b}{4} - \tfrac{a^2 b}{24} = \tfrac{5a^2 b}{24}.$$

40. Низ секој раб на еден тетраедар поставена е рамнина паралелна со спротивниот раб.

а) Каков полиедар определува делот од просторот ограничен со тие рамнини?

б) Да се најде односот на волуменот на добиениот полиедар со волуменот на тетраедарот.

Решение. а) Тетраедарот има три пара спротивни рабови, па, значи, се повлечени три пара паралелни рамнини, т.е. телото ограничено со рамнините е паралелопипед. Рабовите на тетраедарот се дијагонали од ѕидовите од паралелопипедот, па паралелопипедот е составен од дадениот тетраедар и четири пирамиди со основи половина од основата на паралелопипедот и висини колку и висината на паралелопипедот.



б) Нека V е волуменот на паралелопипедот, H неговата висина, B плоштина на неговата основа, $V_{\text{т}}$ волуменот на тетраедарот и нека V_0 е волуменот на една од останатите пирамиди. Тогаш

$$V = BH\ ,\ V_\circ = \tfrac{1}{3}(\tfrac{B}{2}H) = \tfrac{BH}{6}\ ,$$

$$V = V_{\text{т}} + 4V_\circ = V_{\text{т}} + \tfrac{2}{3}V\ ,\ V_{\text{т}} = \tfrac{1}{3}V\ ,$$

т.е. $V : V_{\text{т}} = 3:1$.

41. Правилен тетраедар и правилен октаедар имаат еднакви плоштини. Пресметај го волуменот на октаедарот, ако волуменот на тетраедарот е еднаков на $9\ cm^3$.

Решение. Од формулата $V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ и условот $V_T = 9$ следува:

$$a^3 = 9 \cdot \tfrac{12}{\sqrt{2}} = 27 \cdot 2\sqrt{2}\text{, т.е. } a = 3\sqrt{2}\ .$$

Од условот $P_T = P_O$ добиваме: $a^2\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$, (x е работ на октаедарот), т.е. $x = 3$. Тогаш за волуменот на октаедарот добиваме:

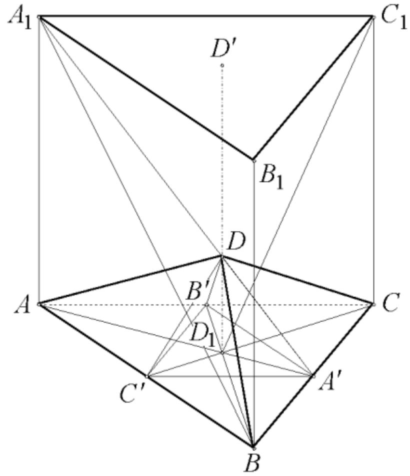
$$V_O = \tfrac{\sqrt{2}}{3}x^3 = \tfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot 27 = 9\sqrt{2}\ .$$

Значи, волуменот на октаедарот е $9\sqrt{2}$ cm^3.

42. Даден е тетраедар $ABCD$. Врвот D е поврзан со тежиштето D_1 на страната ABC. Правите низ точките A, B, C кои се паралелни со DD_1 ги сечат рамнините на спротивните страни во точки A_1, B_1 и C_1. Докажи дека волуменот на тетраедарот $ABCD$ е три пати помал од волуменот на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$. Дали тврдењето важи ако се избере било која точка D_1 во внатрешноста на триаголникот ABC?

Решение. Ќе го докажеме ова тврдење во општ случај, т.е. за секоја точка D_1 од внатрешноста на триаголникот ABC, (црт. 6.2). Нека $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, каде A_1, B_1, C_1 се точки во спротивните рамнини.

Во триаголникот ABC ги повлекуваме правите AD_1, BD_1, CD_1 до нивниот пресек со спротивните страни во точките A', B', C', соодветно. Точката A' лежи на правата A_1D, бидејќи A_1D е во рамнината A_1BC и $AA_1 \parallel D_1D$. Аналогно се покажува дека точките B' и C' се на правите B_1D и C_1D.



Во темињата на триаголникот ABC ставаме точкести маси x, y, z, така што тежиштето на овај систем да е точката D_1. На пример, нека

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{z}{x},\ \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{y}{z},\ \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{x}{y}.$$

Доволно е да земеме

$$x = \overline{C'B}, \quad y = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\overline{AC'}, \quad z = \overline{AC'}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{AB'C'}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

и аналогно

$$\frac{P_{BC'A'}}{P_{ABC}} = \frac{xz}{(y+x)(y+z)},\quad \frac{P_{CA'B'}}{P_{ABC}} = \frac{xy}{(z+y)(z+x)}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC}-P_{AB'C'}-P_{BA'C'}-P_{CA'B'}}{P_{ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Понатаму,

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{DA_1}} = \frac{\overline{A'D_1}}{\overline{D_1A}} = \frac{x}{y+z},\qquad \frac{\overline{C'D}}{\overline{DC_1}} = \frac{z}{x+y},\qquad \frac{\overline{B'D}}{\overline{DB_1}} = \frac{y}{x+z}.$$

(D_1 е тежиште на системот со маса x во A и $y+z$ во A' итн.)

Бидејќи просторните агли $DA'B'C'$ и $DA_1B_1C_1$ се еднакви, волумените на тетраедрите $A'B'C'D$ и $A_1B_1C_1D$ се пропорционални на производот на должините на бочните рабови, т.е.

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{\overline{A'D}\cdot\overline{B'D}\cdot\overline{D'C}}{\overline{DA_1}\cdot\overline{DB_1}\cdot\overline{DC_1}} = \frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

па според тоа

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 2\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}$$

т.е. $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$. Сега да ги преместиме масите во ΔABC и тоа, во A' маса $\frac{y+z}{2}$, во B' маса $\frac{x+z}{2}$ и во C' маса $\frac{x+y}{2}$. Јасно, повторно тежиштето е D_1. Потоа, во темињата A_1, B_1, C_1 ставаме маси $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$. Тогаш тежиштето на секој пар точки $(A_1, A'), (B_1, B'), (C_1, C')$ е во точката D, бидејќи

$$\frac{\overline{A_1D}}{\overline{DA'}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1A'}} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{y+z}{x}$$

и аналогно за останатите два пара. Затоа тежиштето на целиот систем е во точката D. Од друга страна, тежиштето на системот точки A', B', C' е во точката D_1 и неговата маса е $x+y+z$. Тежиштето на системот точки A_1, B_1, C_1 е во рамнината $A_1B_1C_1$ и на правата DD_1, т.е. во точката D', а неговата маса е $\frac{x+y+z}{2}$. Од овде добиваме

$$\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DD'}} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{\overline{D'D_1}}{\overline{D'D}} = \frac{3}{2}.$$

Тоа значи дека односот на висините, спуштени од точките D_1 и D врз рамнината $A_1B_1C_1$ е еднаков на $\frac{3}{2}$. Тетраедрите $A_1B_1C_1D$ и $A_1B_1C_1D_1$ имаат заедничка основа $A_1B_1C_1$. Затоа $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{3}{2}$, а бидејќи $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$, добиваме $V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$.

43. Низ страната BC на основата ABC на правилна пирамида $SABC$ е повлечена рамнина, која бочниот раб SA го дели во однос $m:n$ сметајќи од темето S. Волуменот на пирамидата е еднаков на V, а растојанието од центарот на основата на пирамидата до повлечената рамнина е еднакво на d. Да се најде плоштината на пресекот на пирамидата и рамнината.

Решение. Должината на работ на основата ќе ја означиме со a, а должината на бочниот раб со B. Должината на висината AM на основата е $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Подножјето на висината на пирамидата ќе го означиме со O, а должината на висината ќе ја означиме со $\overline{SO} = H$. Пресечната точка на работ AS со пвлечената рамнина ќе ја означиме со D. Од условот на задачата $\frac{\overline{SD}}{\overline{DA}} = \frac{m}{n}$, од каде добиваме дека $\overline{DA} = \frac{n}{m+n}b$. Нека N е подножје на нормалата спуштена од подножјето O на висината на пирамидата врз повлечената рамнина. Тогаш $\overline{ON} = d$. Со V_n ќе го означиме волуменот на пирамидата $DABC$, а со P бараната плоштина на пресекот, т.е. плоштината на триаголникот BCD. Нека K и L се подножјата на висините спуштени од темињата D и A во пирамидата $DABC$.

Од сличноста на триаголниците ALM и ONM имаме $\frac{\overline{AL}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$, т.е. $\frac{\overline{AL}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{d}{\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}}$. Значи, $\overline{AL} = 3d$, па според тоа,

$$V_n = \frac{P \cdot 3d}{3} = P \cdot d. \tag{1}$$

Од сличноста на триаголниците SOA и DKA имаме $\frac{\overline{SO}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DA}}$, т.е. $\frac{H}{b} = \frac{\overline{DK}}{\frac{n}{m+n}b}$.

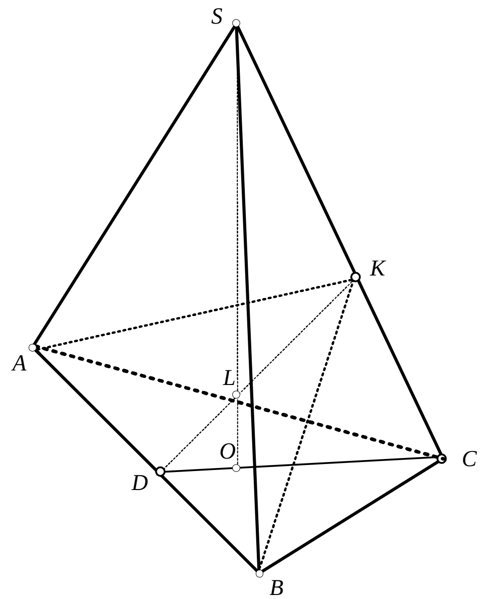
Значи, $\overline{DK} = \frac{n}{m+n}H$, па според тоа

$$V_n = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{n}{m+n}H}{3} = V\frac{n}{m+n} \tag{2}$$

Од (1) и (2) конечно добиваме $P = \frac{n}{m+n}\frac{V}{d}$.

44. Низ еден раб на основата на правилна триаголна пирамида повлечена е рамнина која е нормална на спротивниот бочен раб на пирамидата. Определи го волуменот на пирамидата, ако повлечената рамнина го дели бочниот раб во однос $5:1$, а страната на основата е a.

Решение. Нека низ работ AB на основата ABC на пирамидата $SABC$ е повлечена рамнина која е нормална на работ CS, кој го сечи во точката K, при што $\overline{SK}=5\cdot\overline{KC}$. Нека O припаѓа на рамнината на основата на пирамидата при што SO е негова висина. Нека DK е висина на триаголникот ABK. При тоа, CD е висина на триаголникот ABC (види цртеж). Отсечката DC е висина во рамностраниот триаголникот ABC со страна a, па според тоа $\overline{DC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\overline{OC}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Триаголниците SOC и DKC се слични бидејќи имаат по еден прав агол и имаат агли на кои им се нормални краците. Според тоа



$$\overline{DC}:\overline{SC}=\overline{KC}:\overline{OC},$$

од каде добиваме $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{KC}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$, па затоа $\overline{KC}\cdot 6\cdot\overline{KC}=\frac{a^2}{2}$, односно $\overline{KC}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Од правоаголниот триаголник DKC, добиваме $\overline{DK}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{KC}^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Бидејќи SC е нормална на рамнината на триаголникот ABK, за волуменот на пирамидата, добиваме

$$V=V_{SABK}+V_{CABK}=\frac{1}{3}P_{ABK}\cdot\overline{SC}=\frac{1}{6}\overline{AB}\cdot\overline{DK}\cdot\overline{SC}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3.$$

45. Докажи дека во секој тетраедар постои теме, такво што со рабовите кои излегуваат од него може да се конструира триаголник.

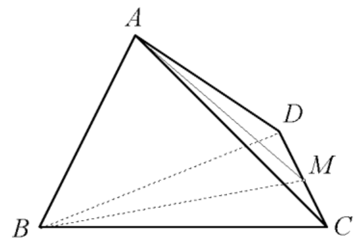
Решение. Нека $ABCD$ е дадениот тетраедар и нека AB е работ со најголема должина. Тогаш

$$(\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{AB})+(\overline{BC}+\overline{BD}-\overline{BA})=(\overline{AC}+\overline{CB}-\overline{AB})+(\overline{AD}+\overline{DB}-\overline{AB})>0.$$

Значи, $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{AB}$ или $\overline{BC}+\overline{BD}>\overline{BA}$. Според тоа од рабовите AC,AD,AB или од рабовите $BC,BD.BA$ се формира триаголник (останатите неравенства за триаголник се исполнети).

46. За $k=1,2,3,4,5$ најди потребен и доволен услов кој го задоволува бројот $a>0$ за да постои тетраедар чии k рабови имаат должина a, а останатите $6-k$ рабови да имаат должина 1.

Решение. (a) $k=1$. Нека $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$. Точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Бидејќи $\overline{AB}<\overline{AM}+\overline{BM}$, мора да е исполнето $a<\sqrt{3}$. Овој услов е и доволен. Навистина, ако $a<\sqrt{3}$, тогаш постои триаголник ABM со должини на страни $\overline{AB}=a$, $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се точки на n такви што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Тогаш $\overline{AB}=a$ и

$$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1.$$

(b) $k=2$. Постојат две можности.

(1) Рабовите со должина a почнуваат во исто теме. Нека $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$, а M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$ и $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Од $\overline{AB}-\overline{BM}<\overline{AM}<\overline{AB}+\overline{BM}$, го добиваме неравенството

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}<1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

кое е еквивалентно на неравенството $\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

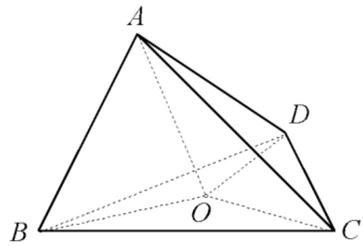
Последното неравенство е и доволен услов. Во овој случај постои ΔABM со страни $\overline{AB}=1$, $\overline{AM}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$, $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а точките C и D припаѓаат на n и $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{1}{2}$. Останува да се провери дека рабовите на тетраедарот ги исполнуваат условите $\overline{AC}=\overline{AD}=a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$.

(2) Рабовите со должина a се разминувачки. Нека $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$ и точката M е средина на работ CD. Тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Неравенството $\overline{AB}<\overline{MA}+\overline{MB}$ е еквивалентно со неравенството $a<\sqrt{2}$.

Последниот неравенство е ѝ доволен услов. Навистина, ако $a<\sqrt{2}$ тогаш постои триаголник ABM со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{MA}=\overline{MB}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Нека n е нормала на рамнината ABM во точката M, а C и D се такви точки на n, што $\overline{MC}=\overline{MD}=\frac{a}{2}$. Останува да се провери дека $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ и $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$.

Значи, за $k=2$, потребен и доволен услов е $a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

(c) $k=3$. Доволно е да се разгледаат следните два случаи.



(1) Рабовите со должина a излегуваат од исто теме. Ако $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$ и $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$, тогаш $\overline{AC} > \overline{CO}$ (бидејќи $\triangle AOC$ е правоаголен), каде O е средна точка на триаголникот BCD. Од $\overline{CO} = R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $a > R$, следеува $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ова неравенство е ѝ доволен услов. Нека BCD е рамностран триаголник со страна 1, а n е нормалата на рамнината BCD во точката O. Точката A припаѓа на нормалата n така што $\overline{OA} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}$. Сега треба да се провери дали $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$.

(2) Рабовите со должина a се страни на рамностран триаголник. Нека $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$ и $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$. Како и во претходниот случај мора да е исполнето $\overline{AC} > \overline{CO}$, $\overline{CO} = R$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $R < 1$, т.е. $\frac{a}{\sqrt{3}} < 1$, $a < \sqrt{3}$.

Лесно се докажува дека овој услов е и доволен.

(d) $k = 4$. Во овој случај ќе разгледаме тетраедар сличен на дадениот со коефициент на сличност $k = \frac{1}{a}$. Новиот тетраедар има 4 рабови со должина 1 и два раба со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа потребен ѝ доволен услов е $\frac{1}{a} < \sqrt{2+\sqrt{3}}$ т.е. $a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(e) $k = 5$. Разгледуваме тетраедар на дадениот со коефициент на сличност $\frac{1}{a}$. Тој има 5 рабови со должина 1 и еден раб со должина $\frac{1}{a}$. Според тоа, потребен и доволен услов $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$ т.е. $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

47. Докажи, дека секој тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ може да биде поставен меѓу две паралелни рамнини, кои се на растојание d и бројот d го задоволува неравенството $d \le \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$, каде $p = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + \overline{A_3A_4}^2$.

Решение. Ќе го користиме трдењето: *Квадратот на растојанието меѓу средините на два спротивни раба на тетраедарот е четири пати помал од збирот на квадратите на должините на рабовите кои не ги содржат тие средини, намален за збирот на квадратите на должините на рабовите кои ги содржат тие средини*. Ова тврдење може да се докаже ако неколку пати ги искористиме формулите за тежишните линии на триаголникот.

Нека a,b и c се трите растојанија меѓу средините на рабовите на даден тетраедар. Тогаш лесно се добива дека $4(a^2 + b^2 + c^2) = p$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a = \min\{a,b,c\}$ и дека a е растојанието меѓу средините на A_1A_2 и A_3A_4. Тогаш $p \ge 12a^2$, т.е. $a \le \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

Нека α е рамнината која го содржи работ A_1A_2 и е паралелна на работ A_3A_4 и β е рамнината која го содржи работ A_3A_4 и е паралелна на работ A_1A_2. Јасно, $\alpha \parallel \beta$ и тетраедарот се наоѓа меѓу овие две рамнини. Освен тоа растојанието меѓу α и β не е поголемо од $a \le \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

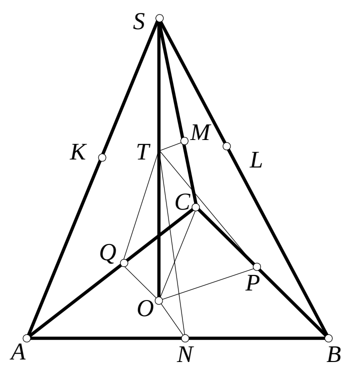
48. Топка со радиус r ги допира сите рабови на тристрана пирамида, а нејзиниот центар е на висината на пирамидата и е на растојание $r\sqrt{3}$ од нејзиниот врв. Докажи дека пирамидата е правилна и определи ја нејзината висина.

Решение. Нека темињата на основата на пирамидата се A, B, C, нејзиниот врв е S. Нека O е подножје на висината повлечена од врвот S и $T \in SO$ е центар на топката која што ги допира бочните рабови и рабовите на основата и има радиус еднаков на r. Нека допирните точки на топката со бочните рабови SA, SB, SC се K, L, M соодветно, а со рабовите на основата AB, BC, CA се N, P, Q соодветно. Триаголниците STK, STL, STM се правоаголни со еднаква хипотенуза $\overline{ST} = r\sqrt{3}$ и еднакви катети $\overline{TK} = \overline{TL} = \overline{TM} = r$, па според тоа се складни и им се еднакви и другите катети $\overline{SK} = \overline{SL} = \overline{SM} = r\sqrt{2}$.

Бидејќи $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}$, од последните равенства добиваме дека

$$\overline{AK} = \overline{AN} = \overline{AQ} = \overline{BN} = \overline{BP} = \overline{BL} = \overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CM} .$$

Од последните равенства добиваме дека триаголникот ABC е рамностран, па според тоа пирамидата е правилна. Точката O што е подножје на висината $\overline{SO}$ е центар како на впишаната така и на опишаната кружница околу триаголникот ABC.



Јасно, правоаголните триаголници TON, TOP и TOQ се складни, а исто така $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$ е радиус на опишаната кружница околу основата на пирамидата.

Нека должината на висината на пирамидата спуштена од врвот ја означиме со $\overline{SO} = h$. Триаголниците SOC и SMT се правоаголни и слични, при што $\frac{\overline{SO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{MT}}$, односно $\frac{h}{R} = \frac{r\sqrt{2}}{r}$, па затоа $R = \frac{h}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $\overline{OP} = \frac{1}{2}R = \frac{h}{2\sqrt{2}}$, од правоаголниот триаголник TOP имаме

$$(h - r\sqrt{3})^2 + (\frac{h}{2\sqrt{2}})^2 = r^2, \text{ т.е. } 9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0 .$$

Решенија на последната равенка се $h_1 = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$ и $h_2 = \frac{4r\sqrt{3}}{9}$. Дали и двете вредности се решенија на задачата?

49. Дали постои просторен петаголник чии страни се меѓусебно еднакви и чии агли меѓу две соседни страни се прави?

Решение. Нека $ABCDE$ е таков петаголник. Тогаш A,B,C се темиња на квадратот $OABC$, а D и E лежат во рамнини нормални на $OABC$, т.е. $D\in\Sigma_1, E\in\Sigma_2$ (направи цртеж). Можеме да претпоставиме дека петаголникот е со страна 1(еден); тогаш $D\in k_1$, $E\in k_2$, каде што

- k_1 е кружница во Σ_1 со центар во C и радиус 1,
- k_2 е кружница во Σ_2 со центар во A и радиус 1.

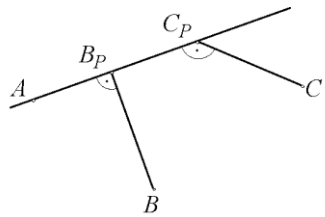
Од $\triangle EDA$ добиваме дека $\overline{AD}=\sqrt{2}$, а потоа од $\triangle AOD$, добиваме дека $\overline{OD}=1$. Слично добиваме дека $\overline{OE}=1$. Значи, $D\in k_1^{'}$, $E\in k_2^{'}$, каде што $k_i^{'}$, $i=1,2$ е кружница во Σ_i, $i=1,2$, со центар O и радиус 1. Нека D е над рамнината $OABC$; тогаш $E\in k_2^{'}\cap k_2=\{E_1,E_2\}$. Со пресметување добиваме $\overline{DE_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 1$, $\overline{DE_2}=\sqrt{\frac{7}{2}}\neq 1$.

Значи, таков петаголник не постои.

2. ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА

1. Во просторот, најди го геометриското место на темињата на правите агли за кои едниот крак минува низ дадена точка A, а другиот има барем една заедничка точка со отсечката BC.

Решение. Разгледуваме произволна права p во просторот која минува низ точката A. Нека B_p и C_p се ортогонални проекции на точките B и C на правата p. На бараното геометриско место точки на правата p припаѓаат сите точки од отсечката B_pC_p и ниту една друга точка.



Точките B_p и C_p припаѓаат на сферите S_{AB} и S_{AC} со дијаметри $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, соодветно. Отсечките AB_p и AC_p припаѓаат на топките K_{AB} и K_{AC}, соодветно. Отсечката B_pC_p е дел од правата p, која се наоѓа во една од споменатите сфери, но не и во двете истовремено. Секоја точка од бараното геометриско место точки се наоѓа на права која што минува низ точката A. Затоа бараното геометриско место на точки е

$$S_{AB}\cup S_{AC}\cup(K_{AB}\Delta K_{AC}).$$

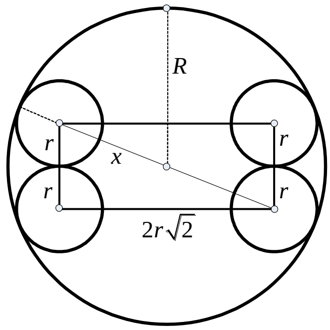
2. На рамнина се наоѓаат три сфери, со радиуси r_1,r_2,r_3 соодветно. Тие ја допираат рамнината во точките A_1,A_2,A_3 соодветно и секои две сфери се допираат. Ако $\overline{A_1A_2}=4$, $\overline{A_2A_3}=6$ и $\overline{A_1A_3}=8$, определи ги r_1,r_2,r_3.

Решение. Нека O_1, O_2 и O_3 се центрите на дадените топки. Четириаголникот $O_1O_2A_1A_2$ е правоаголен трапез со висина A_1A_2, подолг крак $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ и основи r_1 и r_2, па од Питагоровата теорема добиваме

$$(r_1 + r_2)^2 = \overline{A_1A_2}^2 + (r_2 - r_1)^2,$$

односно $r_1r_2 = 4$. Слично се добива дека $r_1r_3 = 9$ и $r_2r_3 = 16$. Со множење на овие три равенства се добива $r_1r_2r_3 = 24$, односно $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{8}{3}$ и $r_3 = 6$.

3. Во сфера T со радиус R, впишани се осум сфери со еднакви радиуси r, така што центрите на впишаните сфери се темиња на една коцка и секоја од впишаните сфери ја допира сферата T и три од впишаните сфери. Определи го радиусот r на впишаните сфери.



Решение. Пресекот на топката и коцката по просторната дијагонала на коцката е прикажан на цртежот десно. Притоа со x е означена половината од просторната дијагонала на коцката, работ на коцката е $2r$, а просторната дијагонала на коцката е еднаква на $2r\sqrt{3}$. Од цртежот се гледа дека $R = r + x$, т.е. $R = r\sqrt{3} + r$, од каде што се добива дека $r = \frac{R}{1+\sqrt{3}}$.

4. Пресметај го радиусот на сферата впишана во тристрана пирамида $SABC$, ако рабовите SA, SB и SC се заемно нормални и $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{BS} = b$.

Решение. Од правоаголните триаголници ASB и SBC, добиваме

$$\overline{AS} = \overline{CS} = \sqrt{a^2 - b^2},$$

па волуменот на пирамидата $SABC$ е

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \overline{BS} \cdot P_{ASC} = \tfrac{b}{6}(a^2 - b^2).$$

Нека D е подножјето на висината од B кон основата AC во рамнокракиот триаголник ABC. Тогаш,

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2},\ \overline{BD}^2 = a^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

па плоштината на пирамидата $SABC$ е

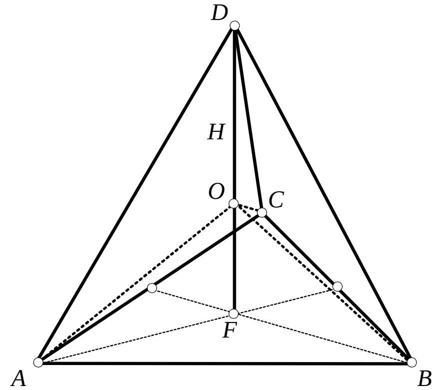
$$P = 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{2},$$

и тогаш бараниот радиус е

$$r = \frac{3V}{P} = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

5. Определи го односот меѓу висината на тетраедарот и радиусот на неговата впишана сфера.

Решение. Нека должината на работ на тетраедарот $ABCD$ е x. Плоштината на секоја негова страна е $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Нека H е висината на тетраедарот, а r е радиусот на неговата впишана сфера. Ако DF е висина на тераедарот, а OF радиус на неговата впишана сфера, тогаш $\overline{DF}=H$ и $\overline{OF}=r$. Волуменот на тераедарот $V=\frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}H$. Пирамидите $ABCO, ABDO,$ $ACDO$ и $BCDO$ имаат по една страна со плоштина $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ и висина r. Тогаш



$$V_{ABCD}=V_{OABC}+V_{OABD}+V_{OACD}+V_{OBCD}=\frac{4}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}r$$

Сега од равенството $\frac{4}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}r=\frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}H$ добиваме $H=4r$, т.е. $H:r=4$.

6. Во сфера со центар O е впишан правилен тетраедар $SABC$ со раб a. Низ темето A, поставена е рамнина што минува низ O и го сече ѕидот SBC по права, паралелна со работ BC. Определи ја плоштината на делот од рамнината што е во сверата, а е надвор од тетраедарот.

Решение. Центарот O на сферата е центар на опишаната кружница околу триаголникот AB_1C_1. Бараната плоштина P ќе биде

$$P=r^2\pi-P_{AB_1C_1}, \qquad (1)$$

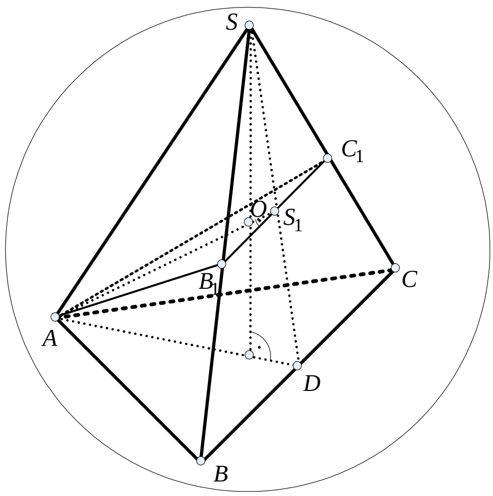
каде што r е радиусот на сферата. Триаголникот AB_1C_1 е рамнокрак со основа B_1C_1 и висина $\overline{AS_1}=H$, т.е. висината на тетраедарот. Од триаголникот ASS' (види цртеж) имаме

$$H^2=a^2-(\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2=\tfrac{2}{3}a^2,$$

т.е. $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Од триаголникот AOS' имаме:

$$r^2=(H-r)^2+(\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2,$$

т.е. $r=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Заменувајќи во (1) добиваме



$$P=r^2\pi-\tfrac{1}{2}\overline{B_1C_1}\cdot\overline{AS_1}=\tfrac{3a^2}{8}\pi-\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}a\tfrac{a\sqrt{6}}{4}=\tfrac{3a^2}{8}\pi-\tfrac{a^2\sqrt{6}}{9}=\tfrac{a^2}{72}(27\pi-8\sqrt{6}).$$

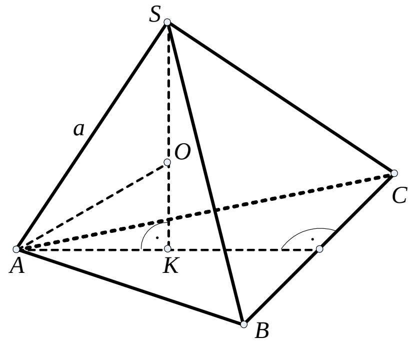
7. Во правилен тетраедар со раб a е впишана сфера и околу него е опишана сфера. Да се најдат соодветните радиуси и волуменот на пирамидата со темиња во точките во кои впишаната сфера го допира тетраедарот.

Решение. Центрите на впишаната и опишаната сфера во и околу правилниот тетраедар $ABCS$ (види цртеж) се совпаѓаат и се наоѓаат во пресекот на висините на тетраедарот. Нека тоа е точката O. Јасно, :

$$\overline{SO}+\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{3}, \qquad (1)$$

(висина на правилен тетраедар со раб a),

$$\overline{OK}^2=\overline{OA}^2-\overline{AK}^2. \qquad (2)$$



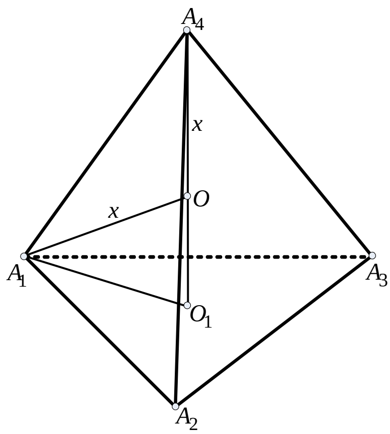
Бидејќи $\overline{AK}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, од равенството (2) добиваме $\overline{OK}^2=\overline{SO}^2-\frac{a^2}{3}$, па ако се искористи равенството (1), се добива дека радиусот на впишаната сфера е $\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$, а радиусот на опишаната сфера е $\overline{OS}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Работ на пирамидата, со темиња во допирните точки на впишаната сфера во тетраедарот со раб a и тој тетраедар изнесува $\frac{a}{3}$ и затоа волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{a}{3})^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{324}.$$

8. Дадени се четири еднакви сфери со радиус R секоја од кои се допира со останатите три. Определи го радиусот на сферата што ги допира дадените сфери.

Решение. Центрите A_1, A_2, A_3 и A_4 на дадените сфери се темиња на правилен тетраедар со раб $2R$. Со x да го означиме радиусот на опишаната сфера околу тетраедарот $A_1A_2A_3A_4$, а со O нејзиниот центар. Нека O_1 е проекција на темето A_4 врз основата $A_1A_2A_3$. Тогаш $\overline{A_1O_1}=R\frac{2\sqrt{3}}{3}$, и



$$h^2=\overline{A_4O_1}^2=(2R)^2-(R\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(\frac{2R\sqrt{6}}{3})^2.$$

Од правоаголниот $\triangle A_1O_1O$ добиваме

$$\overline{A_1O_1}^2+\overline{OO_1}^2=\overline{A_1O}^2$$

$$\frac{4R^2}{3}+(\frac{2R\sqrt{6}}{3}-x)^2=x^2$$

$$x=R\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

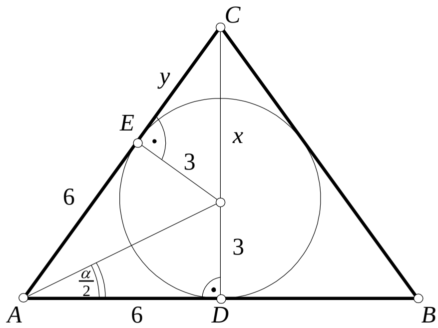
Радиусите на бараните сфери се $R_1=x+R=R(\frac{\sqrt{6}}{2}+1)$ и $R_2=x=R=R(\frac{\sqrt{6}}{2}-1)$.

9. Околу прав кружен цилиндар со радиус на основата $3cm$ и плоштина $78\pi cm^2$ е опишана права триаголна призма (основите на цилиндарот се впишаните кругови во основите на призмата, а обвивката на цилиндарот ги допира трите бочни страни на призмата). Основите на призмата се рамнокраки триаголници со основа $12cm$. Пресметај го волуменот на призмата.

Решение. Основата на цилиндарот е круг со центар во точката O , а основата на призмата е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа $\overline{AB} = 12\,cm$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C , а E е допирната точка на кружницата со страната AC . Имаме

$$\overline{AD} = 6, \overline{AE} = \overline{AD} = 6 \text{ и}$$

$$\overline{OE} = \overline{OD} = r = 3 .$$



Да означиме $x = \overline{OC}$ и $y = \overline{EC}$. Тогаш $\triangle OEC \sim \triangle ADC$, па затоа $(6 + y) : x = 6 : 3$. Оттука $x = \frac{6+y}{2}$. Понатаму, $\triangle OEC$ е правоаголен со хипотенуза x , па затоа $x^2 = y^2 + 3^2$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} x = \frac{6+y}{2} \\ x^2 = y^2 + 3^2 \end{cases}$$

добиваме $x = 5$, $y = 4$. Според тоа $\overline{CD} = 8$, што значи дека плоштината на основата на призмата е $B = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = 48cm^2$.

Нека висината на цилиндарот е H . Тогаш плоштината на цилиндарот е

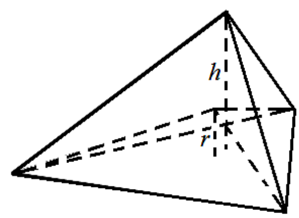
$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 18\pi + 6\pi H \text{ т.е. } H = \frac{P-18\pi}{6\pi} = 10cm .$$

Според тоа $V = B \cdot H = 480cm^3$.

10. Во сфера со радиус r е впишана тристрана пирамида. Ако должините на висините на пирамидата се h_1, h_2, h_3, h_4 , докажи дека

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r} .$$

Решение. Со V да го означиме волуменот на пирамидата, со S нејзината обиколка, а со B_1, B_2, B_3, B_4 плоштините на страните кои соодветствуваат на висините h_1, h_2, h_3, h_4 . Имаме



$$S = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \text{ и}$$

$$V = \frac{1}{3} B_1 h_1 = \frac{1}{3} B_2 h_2 = \frac{1}{3} B_3 h_3 = \frac{1}{3} B_4 h_4 .$$

Од друга страна, тетраедарот е составен од четири помали тетраедри со основи B_1, B_2, B_3, B_4 и висина r , па затоа важи

$$V = \frac{1}{3} B_1 r + \frac{1}{3} B_2 r + \frac{1}{3} B_3 r + \frac{1}{3} B_4 r = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)r = \frac{1}{3} Sr.$$

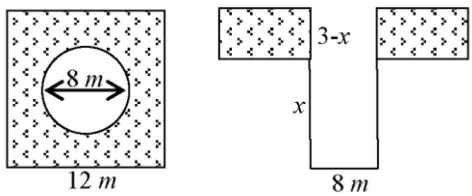
Според тоа, $\frac{1}{3} B_i h_i = \frac{1}{3} Sr$, па затоа $\frac{1}{h_i} = \frac{B_i}{Sr}$, за $i = 1, 2, 3, 4$, па затоа

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{Sr}=\frac{S}{Sr}=\frac{1}{r}$$

11. На едно земјиште во облик на квадрат со страна $12m$ се копа цилиндрична јама со дијаметар на основата еднаков на $8m$. Ископаната земја рамномерно се распоредува по преостанатиот дел од земјиштето и се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата. Колку длабоко треба да се копа, за да јамата биде длабока $3m$?

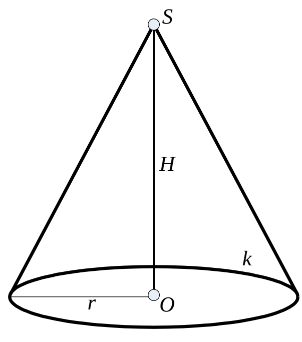
Решение. Плоштината на земјиштето по кое се распоредува ископаната земја од јамата е

$$(12^2-4^2\pi)m^2=(144-16\pi)m^2.$$



Ако x е длабочината на копањето, тогаш дебелината на слојот натисната земја треба да биде $(3-x)m$. Бидејќи ископаната земја се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата, добиваме дека волуменот на ископаната земја е еднаков на волуменот на рамномерно нанесената и натисната земја на преостанатиот дел од земјиштето, односно $4^2\pi\cdot x=(144-16\pi)\cdot(3-x)$. Со решавање на последната равенка по x се добива дека $x=(3-\frac{\pi}{3})m$. Бидејќи $\pi\approx 3{,}14$, следи дека треба да се копа $x\approx 1{,}95m$ во длабочина.

12. Висината на конусот е еднаква на дијаметарот на основата. Определи го квадратот на односот на плоштината на основата на конусот и плоштината на неговата бочна површина.



Решение. Нека кругот $k(O,r)$ е основа на конусот а S е неговиот врв (види цртеж). Имаме $H=\overline{SO}=2r$, од каде за должината на неговата изводница добиваме

$$s=\sqrt{H^2+r^2}=\sqrt{(2r)^2+r^2}=\sqrt{5r^2}=r\sqrt{5}.$$

Сега, плоштината на неговата обвивка е еднаква на $M=\pi rs=\pi r^2\sqrt{5}$, а плоштината на неговата основа е еднаква на $B=r^2\pi$. Бараниот квадрат ќе биде еднаков на $(\frac{B}{M})^2=(\frac{r^2\pi}{r^2\pi\sqrt{5}})^2=\frac{1}{5}$.

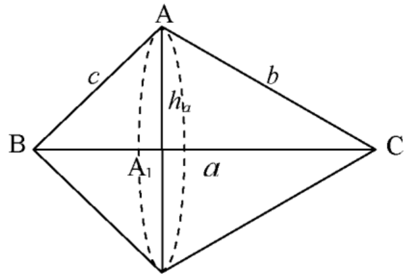
13. Определи го односот на волумените на телата кои што се добиваат со ротација на триаголникот околу неговите страни a, b и c.

Решение. Ако триаголникот ABC ротира околу страната $\overline{BC}=a$, се добива тело со волумен

$$V_a=\frac{1}{3}h_a{}^2\pi\cdot\overline{BA_1}+\frac{1}{3}h_a{}^2\pi\cdot\overline{A_1C}=\frac{1}{3}h_a{}^2\pi\cdot a.$$

Слично, $V_b = \frac{1}{3} h_b{}^2 \pi \cdot b$ и $V_c = \frac{1}{3} h_c{}^2 \pi \cdot c$ се волумените на телата добиени со ротирање на триаголникот околу страните $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$ соодветно. Тогаш, за бараниот однос имаме,

$$\begin{aligned} V_a : V_b : V_c &= \tfrac{1}{3} h_a{}^2 \pi a : \tfrac{1}{3} h_b{}^2 \pi b : \tfrac{1}{3} h_c{}^2 \pi c \\ &= h_a{}^2 a : h_b{}^2 b : h_c{}^2 c. \end{aligned} \qquad (1)$$



Ако P е плоштината на триаголникот ABC, тогаш $P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$, од каде $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$ и со замена во (1) добиваме

$$V_a : V_b : V_c = \frac{4P^2}{a^2} a : \frac{4P^2}{b^2} b : \frac{4P^2}{c^2} c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} .$$

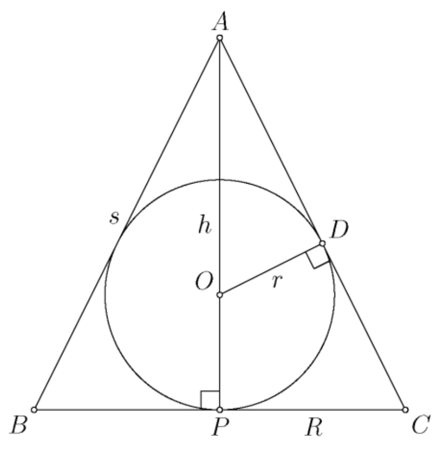
14. Метална масивна топка со радиус R е претпопена и од добиениот метал е излиен масивен конус кај кој бочната плоштина му е трипати поголема од плоштината на основата. Определи ја висината на конусот.

Решение. Нека r е радиус на основата, H е должина на висината, а s должина на изводницата на излиениот конус. Според условот од задачата $\pi r s = 3r^2 \pi$ од каде добиваме $s = 3r$.

Според Питагоровата теорема имаме $H^2 + r^2 = s^2$, $H^2 + r^2 = 9r^2$, $r^2 = \frac{H^2}{8}$. Волуменот на топката и волуменот на излиениот конус се еднакви, па затоа $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 H$. Ако добиената вредност за r^2 ја замениме во последното равенство, добиваме $4R^3 = \frac{1}{8} H^3$, од каде за висината на конусот добиваме: $H = 2\sqrt[3]{4}\, R$.

15. Определи ја најголемата можна вредност на односот на волуменот на прав конус и волуменот на топката која е впишана во овој конус.

Решение. На цртежот е прикажан пресекот на прав конус и во него впишана топка. Нека $\overline{OD} = r, \overline{PC} = R, \overline{AP} = h$. Од $\measuredangle OAD = \measuredangle CAP$ и $\measuredangle ADO = \measuredangle APC = 90^\circ$ следува дека триаголниците ADO и APC се слични, па затоа $\frac{\overline{AO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$, односно $\frac{h-r}{r} = \frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}$. Од последното равенство, после квадрирањето, добиваме $\frac{h^2-2rh+r^2}{r^2} = \frac{h^2+R^2}{R^2}$, од каде добиваме $h^2R^2 - 2hrR^2 = h^2r^2$, односно $h = \frac{2rR^2}{R^2-r^2}$.



Сега за бараниот однос на волуменот на топката и волуменот на конусот добиваме

$$\frac{V_T}{V_K}=\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{1}{3}R^2\pi h}=\frac{4r^3}{R^2h}=\frac{4r^3}{R^2}\cdot\frac{R^2-r^2}{2rR^2}=\frac{2r^2(R^2-r^2)}{R^4}=-2(\frac{r}{R})^4+2(\frac{r}{R})^2=\frac{1}{2}-2((\frac{r}{R})^2-\frac{1}{2})^2.$$

Според тоа, $\frac{V_T}{V_K}=\frac{1}{2}-2((\frac{r}{R})^2-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$, па затоа бараниот максимум е еднаков на $\frac{1}{2}$ и тој се достигнува кога $(\frac{r}{R})^2-\frac{1}{2}=0$, т.е. кога $R=r\sqrt{2}$.

16. Околу топка со радиус r опишан е конус. Определи ја висината на конусот, ако односот на плоштината на конусот и плоштината на топката е еднаков на k .

Решение. На цртежот е претставен еден оскин пресек на конусот и пресек на рамнината на оскиниот пресек со топката.

Со R, H и s ќе ги означиме должината на радиусот на основата, висината и должината на изводницата на конусот. Од условот на задачата имаме

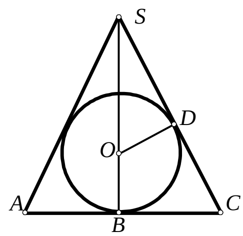
$$\frac{\pi R(R+s)}{4\pi r^2}=k\ ,\ \pi R(R+s)=4\pi r^2k\ . \qquad (1)$$

Освен тоа, според Питагорината теорема имаме:

$$H^2=s^2-R^2\ ,\ \ H=\sqrt{s^2-R^2}\ . \qquad (2)$$

Од сличноста на триаголниците BCS и DOS имаме

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{s-R}\ , \qquad (3)$$



и ако од (2) замениме во (3), добиваме

$$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{s^2-R^2}}{s-R}=\sqrt{\frac{s+R}{s-R}}\ .$$

Од последното равенство, добиваме:

$$\frac{s}{R}=\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\ . \qquad (4)$$

Ако од (1) го изразиме s , добиваме

$$s=\frac{4r^2k-R^2}{R}\ , \qquad (5)$$

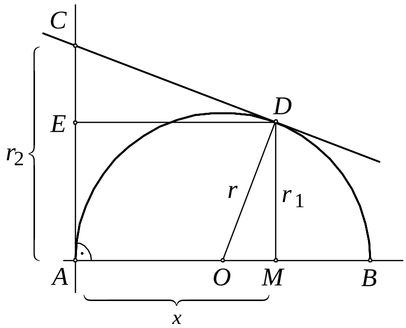
и замениме во (4), добиваме $\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}=\frac{4r^2k-R^2}{R^2}$, т.е. $R^4-2r^2kR^2+2r^4k=0$. Од последната равенка лесно добиваме дека $R^2=r^2(k\pm\sqrt{k^2-2k})^2$.

Сега, од (2) и (5) непосредно добиваме дека $H=2r(k\mp\sqrt{k^2-2k})$.

17. На полукружница со дијаметар $\overline{AB}=2r$ е избрана точка D , различна од A и B . Точката M е подножје на нормалата повлечена од точката D кон дијаметарот AB , а точката C е пресечната точка на тангентите на полукругот повлечени во точките A и D . Одреди го $\overline{AM}=x$ така што односот на волумените на телата настанати со ротација на трапезот $AMDC$ и делот од полукругот AMD да биде еднаков на k . За кои вредности на k задачата има решение.

Решение. Од сличноста на $\triangle EDC$ и $\triangle MDO$ добиваме дека $\overline{CD}:\overline{ED}=r:r_1$, т.е. $\overline{CD}:x=r:r_1$. Значи, $\overline{CD}=\frac{rx}{r_1}=\overline{AC}=r_2$. Со ротација на трапезот $AMDC$ се добива пресечен конус и неговиот волумен е

$$V_{AMDC}=V_1=\frac{1}{3}x\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$$
$$=\frac{1}{3}x^2\pi\frac{7r^2-5rx+x^2}{2r-x}.$$



При ротација на делот AMD се добива топкин отсечок со висина $\overline{AM}=x$ и волумен

$$V_{AMD}=V_2=\frac{1}{3}x^2(3r-x)\pi$$

Од количникот $\frac{V_1}{V_2}=k$ добиваме квадратна равенка

$$(1-k)x^2+(-5r+5rk)x+7r^2-6kr^2=0$$

која има решенија $x_{1|2}=\frac{r}{2}(5\pm\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})$. Решението $x_1=\frac{r}{2}(5+\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})>\frac{r}{2}(5+1)=3r$ нема смисла. Значи, решение е $x_2=\frac{r}{2}(5-\sqrt{\frac{k+3}{k-1}})$, и допуштени вредности за k се $k>\frac{7}{6}$, кое се добива од неравенствата $1<\sqrt{\frac{k+3}{k-1}}<5$.

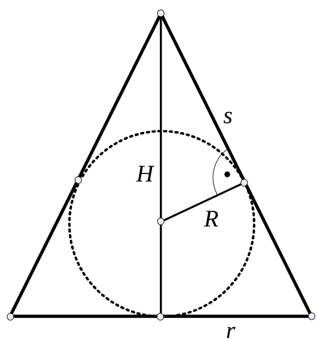
18. Да се најде односот $k=\frac{M}{B}$, каде M е плоштината на обвивката на конусот, а B плоштината на неговата основа, ако се знае дека волуменот на конусот е двапати поголем од волуменот на впишаната топка во него.

Решение. Нека H,s и r се соодветно висината, генератрисата и радиусот на основата на конусот и нека R е радиусот на впишаната топка. Од сличноста на триаголниците на цртежот, имаме:

$$\frac{r}{s}=\frac{R}{H-R}.$$

Оттука, бидејќи $H=\sqrt{s^2-r^2}$ добиваме

$$R=r\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}.$$



Сега, ако со V_k и V_t ги означиме соодветно волуменот на конусот и топката, имаме:

$$\frac{V_k}{V_t}=\frac{\frac{\pi r^2H}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}}=\frac{r^2\sqrt{s^2-r^2}}{4r^3\frac{s-r}{s+r}\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}}=\frac{(s+r)^2}{4r(s-r)}.$$

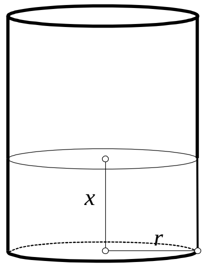
Од условот на задачата $\frac{V_k}{V_t}=2$, па од првиот и последниот член на горното равенство, добиваме:

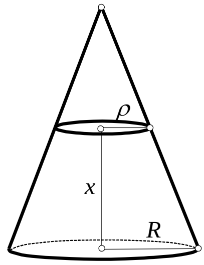
$$8r(s-r)=(s+r)^2$$
$$9r^2-6rs+s^2=0$$
$$(3r-s)^2=0.$$

Оттука $s=3r$, па затоа $k=\frac{M}{B}=\frac{\pi rs}{\pi r^2}=\frac{s}{r}=3$.

19. Прав кружен цилиндар со радиус $r=\sqrt{39}$ и прав кружен конус со радиус $R=9$ имаат еднакви висини $H=15$. На која висина треба да се пресечат, за да имаат еднакви волумени?

Решение. Нека со ρ го означиме радиусот на помалата основа на пресечениот конус, а со x бараната висина (види цртеж).





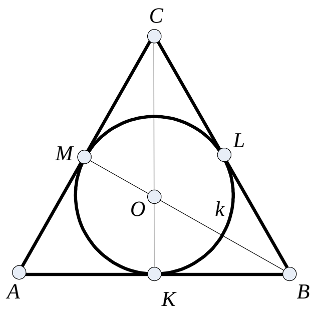
Од условот на задачата имаме

$$\pi r^2 x=\tfrac{1}{3}\pi x(R^2+R\rho+\rho^2) \qquad (1)$$

или $\rho^2+9\rho-36=0$, од каде добиваме $\rho=3$ ($\rho=-12$ не е решение). Од цртежот следува односот $R:\rho=H:(H-x)$, од каде што наоѓаме $x=10$.

20. Оскиниот пресек на конус е рамностран триаголник. Да се најде односот на волуменот на конусот и волуменот на сферата впишана во него .

Решение. Нека Σ е сфера впишана во дадениот конус. Еден оскин пресек е даден на цртежот и тој е рамностран триаголник ABC во кој е впишана кружница k. Нека допирните точки на кружницата k страните AB, BC и CA од триаголникот се K, L и M соодветно, а нејзиниот центар е точката O. Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш висината на конусот е $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, радиусот на основата на конусот е еднаков на $r=\frac{a}{2}$, а радиусот



на впишаната сфера е $R=\frac{H}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Според тоа, волуменот на конусот е

$$V_1=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}r^2\pi H=\frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24},$$

а волуменот на впишаната топка е

$$V_2=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{4}{3}\frac{3\sqrt{3}a^3}{216}\pi=\frac{a^3\sqrt{3}}{54}\pi.$$

Конечно,

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}}{\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}}=\frac{9}{4}.$$

21. Висината на прав конус е два пати подолга од радиусот на основата. Најди го односот на волуменот на топката опишана околу конусот и топката впишана во него.

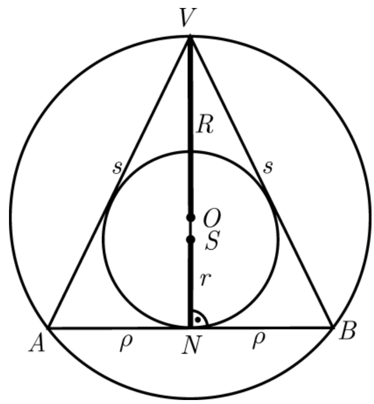
Решение. Нека $R=\overline{OV}$ е радиусот и O е центарот на опишаната топка околу конусот, точката N е средина на основата на конусот, точката V е врвот на конусот, $r=\overline{SN}$ е радиусот и S е центарот на впишаната топка во конусот,

$v=\overline{VN}$ е висината на конусот, ρ е радиусот на основата, s е должина на бочната страна. Тогаш,

$$s=\sqrt{4\rho^2+\rho^2}=\rho\sqrt{5}\,,\ P_{\triangle ABV}=2\rho^2\,,$$

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BV}\cdot\overline{VA}}{4P_{\triangle ABV}}=\frac{2\rho\cdot\rho\sqrt{5}\cdot\rho\sqrt{5}}{8\rho^2}=\frac{5\rho}{4}\,,$$

$$r=\frac{2P_{\Delta ABV}}{L}=\frac{4\rho^2}{2\rho+2\sqrt{5}\rho}=\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}\,.$$



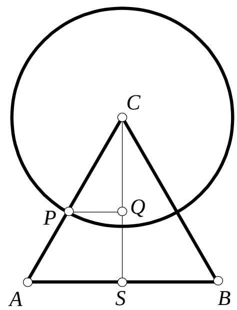
Затоа, бараниот однос е

$$\frac{V_R}{V_r}=\frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi}=(\frac{R}{r})^3=(\frac{\frac{5\rho}{4}}{\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}})^3\,.$$

$$=(\frac{5(1+\sqrt{5})}{8})^3=\frac{125(2+\sqrt{5})}{64}.$$

22. Даден е прав кружен конус со радиус на основата r и висина h. Врвот на конусот е центар на топка, која од конусот отсекува половина од волуменот. Да се пресмета волуменот на топката.

Решение. Ако ги прифатиме ознаките на цртежот, би имале: $\overline{AS}=r$, $\overline{SC}=H$, $\overline{PC}=R$, $\overline{CQ}=h$, $\overline{PQ}=R^2-h^2$.



Волуменот на конусот е $V_k=\frac{\pi}{3}r^2H$, а волуменот на топкиниот исечок $V_{t,s}=\frac{2}{3}R^2\pi h$. Од условот на задачата имаме $\frac{2}{3}R^2\pi h=\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}r^2H$, т.е.

$$R^2h=\frac{r^2H}{4}\,. \quad (1)$$

Од сличноста на триаголниците ASC и PQC добиваме $\overline{AS}:\overline{SC}=\overline{PQ}:\overline{QC}$, т.е.

$$r:H=\sqrt{R^2-h^2}:h\,. \quad (2)$$

Ако од (2) го изразиме h и го замениме во (1) добиваме $R^3=\frac{r^2\sqrt{R^2+H^2}}{4}$, па волуменот на топката ќе биде $V_t=\frac{r^2\pi}{3}\sqrt{r^2+H^2}$.

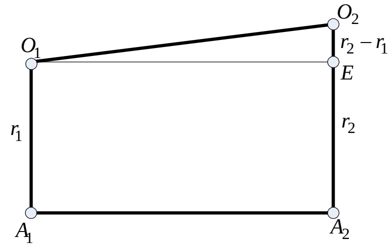
23. Три топки по парови од надворешните страни се допираат меѓу себе и допираат иста рамнина σ во точките A_1,A_2,A_3 при што $\overline{A_1A_2}=4$, $\overline{A_2A_3}=6$ и $\overline{A_1A_3}=8$. Пресметај ги радиусите r_1,r_2 и r_3 на топките (топката со радиус r_i ја допира σ во A_i).

Решение. Нека O_1,O_2 и O_3 се центри на топките со радиуси r_1,r_2 и r_3 соодветно. Четириаголникот $O_1O_2A_2A_1$ е правоаголен трапез со висина $\overline{A_1A_2}=4$, основи

$$\overline{O_1A_1}=r_1,\ \overline{O_2A_2}=r_2$$

и крак $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$. Нека E е подножје на висината спуштена од точката O_1 на основата O_2A_2. Тогаш $\overline{EO_2} = r_2 - r_1$, $\overline{O_1E} = 4$, па од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник O_1EO_2 имаме

$$(r_1 + r_2)^2 = 4^2 + (r_1 - r_2)^2,$$

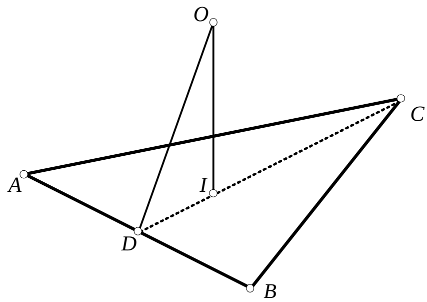


односно $r_1r_2 = 4$. Потполно аналогно се пресметува дека $r_1r_3 = 9$ и $r_2r_3 = 16$. Ако ги помножиме последните три равенства добиваме $(r_1r_2r_3)^2 = 24^2$, т.е. $r_1r_2r_3 = 24$. Сега, лесно се добива $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{8}{3}$ и $r_3 = 6$.

24. Страните на триаголникот ABC имаат должини $\overline{AB} = 12\ cm$, $\overline{BC} = 10\ cm$, $\overline{AC} = 10\ cm$ и ја допираат сферата s која има радиус $R = 5\ cm$. Да се определи растојанието од центарот на сферата до рамнината на триаголникот.

Решение. Триаголникот BCA е рамнокрак со основа AB. Висината CD на триаголникот има должина

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ cm.$$



Плоштината на триаголникот ABC е

$$P_{\Delta ABC} = \frac{12\cdot 8}{2} = 48 cm^2,$$

а неговиот полупериметар е

$$p = \frac{1}{2}(12 + 10 + 10) = 12\ cm.$$

Пресекот на рамнината на триаголникот ABC со сверата е кружница. Бидејќи страните на триаголникот ја допираат сверата, пресечната кружница е впишаната кружница во триаголникот. Радиусот на впишаната кружница во триаголникот е еднаков на

$$r = \frac{P}{p} = \frac{48}{16} = 3 cm.$$

Подножјето на нормалата спуштена од центарот O на сверата врз рамнината на триаголникот е центарот I на нивната пресечна кружница, при што $\overline{DI} = r$. Бараното растојание е $\overline{OI}$, кое ќе го пресметаме од правоаголниот триаголник DIO. При тоа

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DI}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 cm.$$

25 Нека P е внатрешна точка на сферата S, а A, B и C се произволни точки на S такви што правите PA, PB и PC се заемно нормални. Со Q да го означиме темето на паралелопипедот определен со PA, PA, PC кој е дијагонално спротивен на темето P.

Определи го геометриското место на точката Q, за сите можни положби на точките A, B и C.

Решение. Ги воведуваме векторите $\vec{a}=\overrightarrow{PA}, \vec{b}=\overrightarrow{PB}, \vec{c}=\overrightarrow{PC}, \vec{\rho}=\overrightarrow{OP}$ и $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$, каде што O е центарот на сферата. Тогаш имаме

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0, \quad \vec{q}=\vec{\rho}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \ (\vec{\rho}+\vec{a})^2=(\vec{\rho}+\vec{b})^2=(\vec{\rho}+\vec{c})^2=R^2,$$

каде R е радиусот на сферата. Според тоа,

$$\begin{aligned}\vec{q}^{\,2} &= \vec{\rho}^{\,2}+\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{\rho}+2\vec{b}\cdot\vec{\rho}+2\vec{c}\cdot\vec{\rho}\\ &=(\vec{\rho}+\vec{a})^2+(\vec{\rho}+\vec{b})^2+(\vec{\rho}+\vec{c})^2-2\vec{\rho}^{\,2}=3R^2-2p^2\end{aligned}$$

каде $p=|\vec{\rho}|$. Бидејќи точката P е во внатрешноста на сферата добиваме $p<R$, па според тоа $q=|\vec{q}|=\sqrt{3R^2-2p^2}>R$.

Значи, точката Q се наоѓа на сфера која е концентрична на дадената сфера, чиј радиус е $\sqrt{3R^2-2p^2}$. Ќе докажеме дека оваа сфера е бараното геометриско место на точки.

За дадената точка Q за која $\overline{OQ}=\sqrt{3R^2-2p^2}$ конструираме сфера чиј радиус е $\overline{PQ}$. Бидејќи $\overline{OQ}>R>\overline{OP}$ таа ја сече дадената сфера. Со C означуваме една од пресечните точки, а со X дијагонално спротивното теме на правоаголникот определен со CP и CQ. Векторски се докажува дека е исполнето равенството $\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{OC}^2+\overline{OX}^2$, па добиваме

$$\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+(3R^2-2\overline{OP}^2)-R^2=2R^2-p^2>R^2,$$

т.е. X е надвор од дадената сфера. Пресекот на рамнината α, која минува низ точката P и е нормална на PC е кружница k, при што точката P е на таа кружница, а X е надвор од неа. Кружница со радиус $\overline{PX}$ во рамнината α ја сече кружницата k во точка B. Нека A е теме на правоаголник $PBXA$ спротивно на темето B. Ако B е на дадената сфера, добиваме

$$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{OX}^2-\overline{OB}^2=\overline{OP}^2+2R^2-\overline{OP}^2-R^2=R^2,$$

т.е. A е исто така на дадената сфера и сите услови се исполнети.

26. Основата на пирамида $ABCD$ е рамностран триаголник ABC со страна a а бочните рабови имаат должина b. Конструирана е сфера што ги допира сите (продолжени) рабови на пирамидата. Определи го радиусот на оваа свера.

Решение. Нека T е тежиштето на основата ABC со страна a. Нека бараната сфера има радиус R и нека нејзиниот центар O се наоѓа на растојание x од T (направи цртеж). Ако H е висината на тетраедарот, тогаш

$$H=\sqrt{b^2-(\tfrac{a}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{b^2-\tfrac{a^2}{3}}.$$

Имаме $\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{b}=\frac{R}{H-x}$, т.е. $\frac{a}{b\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-x}$, од каде што добиваме $x=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-\frac{Rb\sqrt{3}}{a}$.

Потоа,

$$R^2 = x^2 + (\frac{a}{2\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - \frac{Rb\sqrt{3}}{a})^2 + \frac{a^2}{12}.$$

Решавајќи ја ова квадратна равенка по R, добиваме

$$R = \frac{(2b \pm a)a}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Забелешка. Кога $R = \frac{(2b-a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, центарот O на сферата е во внатрешноста на пирамидата, а во другиот случај во надворешноста на пирамидата.

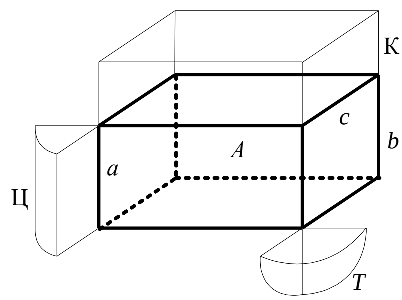
27. Даден е квадар со рабови a,b,c; да го означиме со A. Нека

$$B = \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, d(X,A) \le 1\}$$

претставува геометриско место на точки X од просторот за кои постои барем една точка од квадарот A која е на растојание не поголемо од 1 од точката X. Да се определи волуменот V_B, на B, со помош на a,b,c.

Решение.Геометриското место B на точки се состои од:

- квадарот A;
- квадари со висина 1 над секој од ѕидовите на A;
- четвртини цилиндри со радиус 1 и висина секој од рабовите на A.
- осмини топки со радиус 1 и центри во секое теме на A (види цртеж).



Според тоа,

$$V_B = V_A + V_k + V_ц + V_т$$
$$= abc + 2(ab+bc+ca) + \pi(a+b+c) + \frac{4\pi}{3}.$$

28. Дали постои конечно множество точки во просторот M, кои не лежат на иста рамнина, такви што за секои две точки A и B од M постојат други две точки C и D од M такви што правите AB и CD се паралелни и различни?

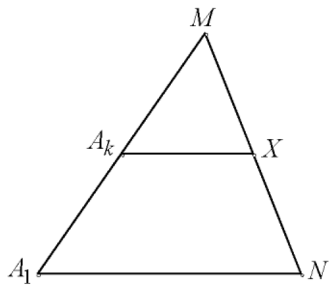
Решение. Во рамнина такво множество точки се темињата на правилниот петаголник и правилниот шестаголник.

Последното множество точки ќе го искористиме за конструкција на бараното множество точки во просторот. Ги земаме темињата на два правилни шестаголници кои имаат ист центар на симетрија и не лежат во една рамнина. Ова множество точки ги има бараните својства. Ако точките A и B се темиња на ист шестаголник, тогаш за C и D се земаат точки кои се централно симетрични во однос на центарот на симетрија на шестаголникот. Нека сега точките A и B припаѓаат на различни шестаголници. Повторно можеме да земеме централно симетрични слики на точките A и B во однос на зедничкиот центар на симетрија, кои исто така припаѓаат на даденото множество точки.

3. ПРОСТОРНА ХОМОТЕТИЈА

1. Даден е конвексен полиедар P_1 со темиња $A_1, A_2, ..., A_9$. Нека $P_2, P_3, ..., P_9$ се полиедри кои се добиваат со транслации на полиедарот P_1 кои точката A_1 ја пресликуваат во точките $A_2, A_3, ..., A_9$, соодветно. Докажи дека најмалку два од полиедрите $P_1, P_2, P_3, ..., P_9$ имаат барем една заедничка внатрешна точка.

Решение. Со P да го означиме полиедарот кој е хомотетичен на полиедарот P_1 со центар на хомотетија A_1 и коефициент 2. Нека X е некоја од точките на полиедарот $A_k, k \in \{2,3,4,...,9\}$. Тогаш $\overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_kX}$. Нека M и N се точки во просторот такви што $\overrightarrow{A_1M} = 2\overrightarrow{A_1A_k}$ и $\overrightarrow{A_1N} = 2\overrightarrow{A_kX}$. Точките M и N припаѓаат на полиедарот P, при што точката X припаѓа на отсечката MN, па бидејќи полиедарот P е конвексен, таа припаѓа и на P. Од овде заклучуваме дека полиедарот P ги содржи сите 9 полиедри $P_1, P_2, ..., P_9$ а волуменот му е 8 пати поголем од волуменот на секој од нив. Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу полиедрите $P_1, P_2, ..., P_9$, постојат два кои имаат заедничка точка.



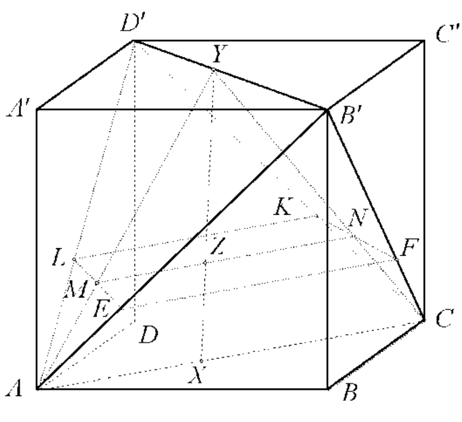
2. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$.

а) Определи го геометриското место на средините на отсечките XY, каде X е точка од отсечката AC, а Y е точка од отсечката $B'D'$.

б) Определи го геометриското место на средини Z на отсечките XY за кои $\overline{YZ} = 2\overline{ZX}$.

Решение. Ќе го определиме геометриското место на точки Z од отсечките XY каде X и Y се менуваат на отсечките AC и $B'D'$ такви што $\overline{YZ} = k\overline{XZ}$, $k > 0$.

Ако точката X се совпаѓа со A и Y со B', точката E од дијагоналата AB' за која $\overline{B'E} = k\overline{AE}$, припаѓа на бараното множество. На ист начин ги добиваме точките F, K и L кои припаѓаат на CB', CD' и AD' соодветно. Ако точката Y се движи по $B'D'$, точката Z се движи по $EL \parallel B'D'$. Триаголниците $AB'D'$ и AEL се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Исто така, отсечките $EF \parallel AC$, $FK \parallel B'D'$ и $KL \parallel AC$ припаѓаат на бараното геометриско место точки. Бидејќи



$$FK \parallel EL \parallel B'D' \perp AC \parallel EF \parallel KL$$

четириаголникот $EFKL$ е правоаголник. Ќе докажеме дека бараното геометриско место точки е целиот правоголник $EFKL$, заедно со неговите внатрешни точки. Нека точките X и Y припаѓаат на дијагоналите AC и $B'D'$ соодветно, и нека $Z \in XY$ е точка која ја дели отсечката во однос $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}} = k$. Рамнината ACY ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ во отсечки CY и AY соодветно, а четириаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel AC$. Триаголниците YMN и YAC се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Отсечката XY ја сече отсечката MN, која е паралелна со AC, во точка Z која ја дели во однос $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$. Но, на отсечката XY постои само една точка која ја дели во тој однос и таа лежи во четириаголникот $EFKL$.

Ќе докажеме дека секоја точка Z од внатрешноста на четириаголникот $EFKL$ припаѓа на некоја отсечка со крајни точки кои припаѓаат на отсечките AC и $B'D'$ и ја дели таа отсечка во однос k. Рамнината ACZ го сече правоаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel EF \parallel KL$. Бидејќи Z е внатрешна точка од $EFKL$, правата MN ги сече отсечките EL и FK во внатрешни точки. Таа рамнина ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ по отсечки кои лежат во внатрешноста на аглите $B'CD'$ и $D'AB'$, т.е. таа ја сече отсечката $B'D'$ во некоја точка Y. Од ΔYMN и ΔYAC се добива $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$.

Бараното геометриско место точки е правоаголникот $EFKL$ чии должини на страни се еднакви на

$$\overline{EL} = \overline{FK} = \tfrac{1}{k+1}\overline{B'D'} = \tfrac{a\sqrt{2}}{k+1} \quad \text{и} \quad \overline{EF} = \overline{KL} = \tfrac{k}{k+1}\overline{AC} = \tfrac{ka\sqrt{2}}{k+1}.$$

3. Впишаната и надворешно припишаната сфера на триаголна пирамида $ABCD$ ја допираат страната BCD во различни точки X и Y. Докажи дека $\triangle AXY$ е тапоаголен. (Надворешно припишана сфера се допира до една од страните на пирамидата и до рамнините на останатите страни во точки, надворешни за страните.)

Решение. Нека X е допирната точка на впишаната сфера со страната BCD. Нека сликата на точката Y при хомотетија со центар во точката A која ја пресликува надворешно припишаната сфера во впишаната е точката Z, која лежи на впишаната сфера. Сликата на рамнината BCD при оваа хомотетија е рамнина паралелна на BCD, која ја допира впишаната сфера во точката Z. Тоа значи, дека точките X и Z се дијаметрално спротивни точки во впишаната сфера, па затоа $XZ \perp BCD$. Бидејќи $Z \in AY$, заклучуваме дека $\measuredangle AXY > \measuredangle ZXY = 90^\circ$, од каде следува дека $\triangle AXY$ е тапоаголен.

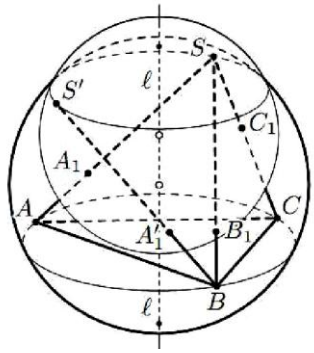
4. Сферата ω минува низ врвот S на пирамидата $SABC$ и по втор пат ги сече рабовите SA, SB, SC соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Сферата Ω, опишана околу пирамидата $SABC$, ја сече ω во кружница која лежи во рамнина, паралелна на рамнината ABC. Точките A_2, B_2, C_2 се симетрични на точките A_1, B_1, C_1 во однос на средините соодветно на рабовите SA, SB, SC. Докажи, дека точките A, B, C, A_2, B_2, C_2 лежат на една сфера.

Решение. Тврдењето на задачата е еквивалентно на равенството

$$\overline{SA_2} \cdot \overline{SA} = \overline{SB_2} \cdot \overline{SB} = \overline{SC_2} \cdot \overline{SC}.$$

Заради равенството $\overline{AA_1} = \overline{SA_2}$ и двете аналогни равенства доволно е да докажеме дека

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{SA} = \overline{BB_1} \cdot \overline{SB} = \overline{CC_1} \cdot \overline{SC}.$$



Нека l е правата која минува низ центрите на сферите ω и Ω. Заедничката кружница на овие сфери лежи во рамнина нормална на l, па затоа $l \perp (ABC)$.

Тоа значи, дека при ротација околу l опишаната кружница околу $\triangle ABC$ останува на место, што значи дека постои ротација која точката A ја пресликува во точката B. Нека S и A при таа ротација се пресликуваат во S' и A_1' (овие точки исто така лежат на ω). Тогаш

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{SA} = \overline{BA_1'} \cdot \overline{BS'} = \overline{BB_1} \cdot \overline{SB}.$$

Равенството $\overline{AA_1} \cdot \overline{SA} = \overline{CC_1} \cdot \overline{SC}$ се докажува аналогно.

4. Вписаната и надворешно вписаната сфера на триаголна пирамида $ABCD$ ја допираат страната (BCD) во различни точки X и Y. Докажи дека $\triangle AXY$ е тапоаголен. (Надворешновпишана сфера се допира до една од страните на пирамидата и до рамнините на останатите страни во токи, надворешни за страните.)

Решение. Нека X е допирната точка на вписаната сфера со страната (BCD). Нека сликата на точката Y при хомотетија со центар во точката A која ја пресликува надворешновпишаната сфера во вписаната е точката Z, која лежи на вписаната сфера. Сликата на рамнината (BCD) при оваа хомотетија е рамнина паралелна на (BCD), која ја допира вписаната сфера во точката Z. Тоа значи, дека точките X и Z се дијаметрално спротивни точки во вписаната сфера, па затоа $XZ \perp (BCD)$. Бидејќи $Z \in AY$, заклучуваме дека $\measuredangle AXY > \measuredangle ZXY = 90^\circ$,од каде следува дека $\triangle AXY$ е тапоаголен.

5. Вписаната и надворешно вписаната сфера на триаголна пирамида $ABCD$ ја допираат страната (BCD) во различни точки X и Y. Докажи дека $\triangle AXY$ е тапоаголен. (Надворешно вписана сфера се допира до една од страните на пирамидата и до рамнините на останатите страни во токи, надворешни за страните.)

Решение. Нека X е допирната точка на вписаната сфера со страната (BCD). Нека сликата на точката Y при хомотетија со центар во точката A која ја пресликува надворешно вписаната сфера во вписаната е точката Z, која лежи на вписаната сфера. Сликата на рамнината (BCD) при оваа хомотетија е рамнина паралелна на (BCD), која ја допира вписаната сфера во точката Z. Тоа значи, дека точките X и Z се дијаметрално спротивни точки во впишаната сфера, па затоа $XZ \perp (BCD)$. Бидејќи $Z \in AY$, заклучуваме дека $\measuredangle AXY > \measuredangle ZXY = 90^\circ$,од каде следува дека $\triangle AXY$ е тапоаголен.

6. Нека $ABCD$ е теетраедар и E, F, G, H, K, L се точки соодветно на рабовите AB, BS, CD, DA, DB, DC. Докажи, дека ако

$$\overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \overline{AG} = \overline{DH} \cdot \overline{AH} = \overline{DK} \cdot \overline{BK} = \overline{DL} \cdot \overline{CL},$$

тогаш точките E, F, G, H, K, L лежат на една свера.

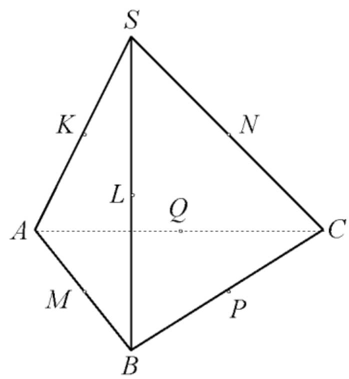
Решение. Нека $p = \overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{BF} \cdot \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \overline{AG} = \overline{DH} \cdot \overline{AH} = \overline{DK} \cdot \overline{BK} = \overline{DL} \cdot \overline{CL}$ и со Q да го означиме центарот на опишаната свера околу тетраедарот. Пресекот на рамнината определена со точките O, A и B со опишаната свера е кружница. Во оваа кружница степенот на точката E е еднаков на $R^2 - \overline{OE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{BE} = p$, па затоа $\overline{OE} = \sqrt{R^2 - p}$. Аналогно $\overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = \overline{OK} = \overline{OL} = \sqrt{R^2 - p}$, т.е. шесте точки лежат на сверата со центар во точката O и радиус $\sqrt{R^2 - p}$.

7. Докажи дека тетраедарот $SABC$ е правилен ако и само ако постојат пет различни сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA.

Решение. Да забележиме дека секоја сфера која ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA ја сече секоја од рамнините на триаголниците SAB, SBC, SCA, ABC во впишаната или опишаната кружница на тој триаголник. За секоја таква сфера од четирите добиени кружници три се опишани, а една е впишана или сите четири се впишани. За да го докажеме ова ќе разгледаме два случаи.

Нека сферата σ ги допира правите $SA, SB, SC, AB, BC, CA,$ а рамнините на триаголниците SAB и SBC ги сече по впишаните кружници.

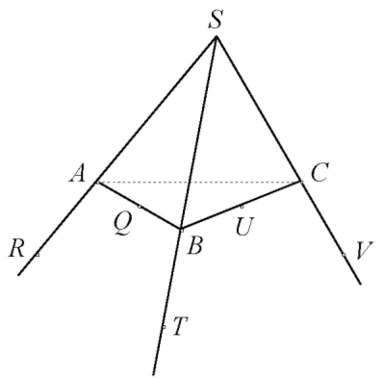
Нека K, L, M, N, P се допирните точки со рабовите $SA, SB, AB, SC, BC,$ соодветно. Бидејќи опишаната кружница околу триаголникот има само една заедничка точка со триаголникот, сферата σ мора да ги сече рамнините на триаголниците SCA и ABC по впишаните кружници во тие триаголници. Нека Q е допирната точка на σ и AC. Од овде следува дека сите четири кружници се впишани, т.е. ако две кружници се впишани, тогаш и другите две се впишани.



Нека претпоставиме дека сферата τ ги допира сите прави SA, SB, SC, AB, BC, CA и дека ја сече рамнината на триаголникот ABC по опишаната кружница околу триаголникот ABC. Таа има заедничка точка Q со работ $AB,$ а со правите SA и SB заеднички точки R и $T,$ соодветно. Бидејќи точката T не припаѓа на работ

SB на тетраедарот, пресекот на сферата τ со рамнината на триаголникот SBC е опишаната кружница на тој триаголник. Таа ја допира отсечката BC во некоја точка U, а правата SC во некоја точка V. Од овде се гледа дека сферата ја сече рамнината на триаголникот ABC по впишана кружница, а рамнината на триаголникот SCA по опишана кружница. Значи, од четирите споменати кружници три се опишани, а една е впишана. Според тоа, ако некоја од кружниците е опишана, тогаш мора три од кружниците да се опишани, а една да е впишана.

Постојат најмногу пет сфери кои ги допираат правите SA, SB, SC, AB, BC, CA и тоа најмногу една за која сите пресеци на сферата со рамнините на страните на тетраедарот се впишани кружници во страните на тетраедарот и најмногу четири сфери кај кои три од пресечните кружници се припишани, а една е впишана.



Ако претпоставиме дека постојат сите пет сфери $(\sigma, \tau$ и останатите три) добиваме дека

$$\overline{SK}=\overline{SL}=\overline{SN}\ ,\ \overline{AK}=\overline{AM}=\overline{AQ}\,,$$

$$\overline{BM}=\overline{BL}=\overline{BP}\,,\overline{CP}=\overline{CN}=\overline{CQ}\,,$$

од што следува

$$\overline{SA}+\overline{BC}=\overline{SB}+\overline{CA}=\overline{SC}+\overline{AB}\,,$$

бидејќи сферата σ постои. Аналогно добиваме

$$\overline{SA}-\overline{BC}=\overline{SB}-\overline{CA}=\overline{SC}-\overline{AB}\,,$$

па според тоа

$$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}\ \text{ и }\ \overline{BC}=\overline{CA}=\overline{AB}\,.$$

Од претпоставката дека постои барем една од преостанатите три сфери, добиваме дека $\overline{SA}=\overline{AB}$, односно дека тетраедарот е правилен.

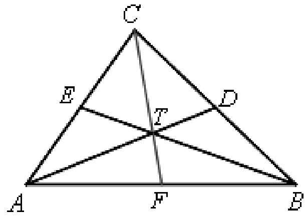
Останува да докажеме дека кај правилен тетраедар постојат сите пет сфери. Тежиштето на тетраедарот е на еднаква оддалеченост од секој негов раб, што значи дека сферата σ постои и нејзин центар е тежиштето на тетраедарот. Ако точките S, A, B, C се центри на хомотетија со коефициент 3, добиваме четири сфери кои се хомотетични слики на сферата σ. Секоја од нив ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC и CA .

VIII ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Нека AD, BE и CF се тежишните линии во триаголникот ABC. Ако $m=\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}$ и $s=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$, докажи дека $\frac{3}{4}s<m<\frac{3}{2}s$.

Решение. Од неравенствата на триаголниците CAT, ABT и BCT следува: $\overline{AT}+\overline{TC}>\overline{AC}$, $\overline{AT}+\overline{TB}>\overline{AB}$ и $\overline{BT}+\overline{TC}>\overline{BC}$. Со собирање на трите неравенства добиваме $2(\overline{AT}+\overline{BT}+\overline{CT})>s$. Ако во последното неравенство замениме

$$\overline{AT}+\overline{BT}+\overline{CT}=\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})=\frac{2}{3}m,$$



имаме $\frac{3}{4}s<m$. Од неравенствата на триаголниците AFT, BDT и CET следува: $\overline{AF}+\overline{FT}>\overline{AT}$, $\overline{BD}+\overline{DT}>\overline{BT}$ и $\overline{CE}+\overline{ET}>\overline{CT}$. Оттука следува

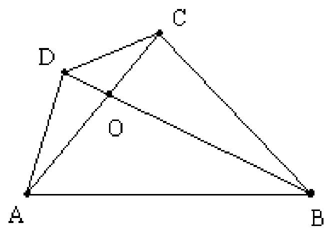
$$(\overline{AF}+\overline{BD}+\overline{CE})+(\overline{FT}+\overline{DT}+\overline{ET})>\overline{AT}+\overline{BT}+\overline{CT},$$

односно $\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}m>\frac{2}{3}m$ и затоа $m<\frac{3}{2}s$.

2. Докажи дека во конвексен четириаголник, барем една дијагонала е подолга од четвртина на неговиот периметар.

Решение. Од неравенството на триаголник следува дека во конвексен четириаголник $ABCD$ важат неравенствата

$$AC+BD>AB+CD \text{ и}$$
$$AC+BD>AD+BC$$



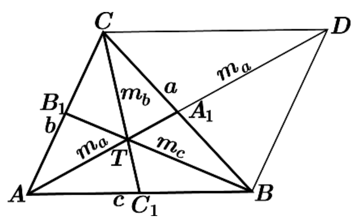
Со собирање на овие две неравенства се добива $2(AC+BD)>L_{ABCD}$ односно

$$AC+BD>\frac{1}{2}L_{ABCD} \qquad (1)$$

Од (1) следува дека барем една од дијагоналите AC и BD е поголема од $\frac{1}{4}L_{ABCD}$. Имено, ако двете дијагонали се помали или еднакви од четвртина од периметарот, односно важи $AC\le\frac{1}{4}L_{ABCD}$ и $BD\le\frac{1}{4}L_{ABCD}$, тогаш со собирање на последните две неравенства се добива $AC+BD\le\frac{1}{2}L_{ABCD}$ што противречи на (1).

3. Докажи дека за триаголник чии должини на страните се a,b,c, должините на тежишните линии се m_a, m_b, m_c и полупериметар $s=\frac{a+b+c}{2}$ важи неравенството

$$\frac{3}{2}s<m_a+m_b+m_c<2s. \qquad (1)$$



Решение. Од неравенството на триаголник счедува

$\triangle ABT: \frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b>c;$ $\triangle BCT: \frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c>a;$

$$\triangle CAT : \tfrac{2}{3}m_c + \tfrac{2}{3}m_a > b,$$

од каде со собирање се добива дека

$$2(\tfrac{2}{3}m_a + \tfrac{2}{3}m_b + \tfrac{2}{3}m_c) > a+b+c,$$

и заради $s = \frac{a+b+c}{2}$ се добива $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{2}s$, со што го докажавме левото неравенство во (1).

Ја продолжуваме тежишната линија AA_1 преку A до точката D така што важи $\overline{AA_1} = \overline{A_1D} = m_a$. Сега четириаголникот $ABCD$ е паралелограм па важи $\overline{BD} = b, \overline{CD} = c$. Применувајќи го неравенството на триаголник на $\triangle ABD,$ добиваме $\overline{AD} < \overline{AB} + \overline{BD},$ т.е. $2m_a < c+b.$ Аналогно се докажува дека $2m_b < c+a$ и $2m_c < a+b$. Ги собираме последните три неравенства и добиваме

$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a+b+c) = 2s\,,$$

Со што го докажавме десното неравенство во (1).

4. Во рамнината се дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, ..., A_n$ такви што никои три не лежат на една права. Точките $M_1, M_2, ..., M_n$ лежат на отсечките $A_1A_2, A_2A_3...,$ A_nA_1 соодветно, а точките $B_1, B_2, ..., B_n$ во $\triangle M_nA_1M_1,$ $\triangle M_1A_2M_3, ..., \triangle M_{n-1}A_nM_n$. Докажи дека

$$\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + ... + \overline{B_nB_1} \leq \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1}\,.$$

Решение. Ќе искористиме дека ако P е точка во $\triangle ABC$, тогаш

$$\overline{PB} + \overline{PC} \leq \overline{AB} + \overline{AC}\,. \qquad (*)$$

Навистина, ако $D = AB \cap CP$, тогаш

$$\overline{PB} + \overline{PC} \leq \overline{BD} + \overline{PD} + \overline{PC} = \overline{BD} + \overline{CD} \leq \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AC}\,.$$

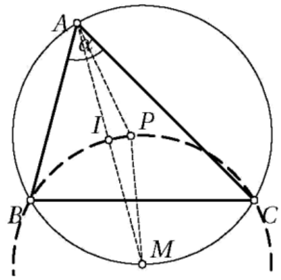
Тогаш прво од неравенството на триаголник, а потоа од неравенството (*) следува

$$\begin{aligned}\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + ... + \overline{B_nB_1} &\leq (\overline{B_1M_1} + \overline{B_2M_1}) + (\overline{B_2M_2} + \overline{B_3M_2}) + ... + (\overline{B_nM_n} + \overline{B_1M_n}) \\ &= (\overline{B_1M_n} + \overline{B_1M_1}) + (\overline{B_2M_1} + \overline{B_2M_2}) + ... + (\overline{B_nM_{n-1}} + \overline{B_nM_n}) \\ &\leq (\overline{A_1M_n} + \overline{A_1M_1}) + (\overline{A_2M_1} + \overline{A_2M_2}) + ... + (\overline{A_nM_{n-1}} + \overline{A_nM_n}) \\ &= \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1}.\end{aligned}$$

5. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Во внатрешноста на триаголникот избрана е точка P таква што

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB\,.$$

Докажи, дека $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.



Решение. Од условот на задачата следува

$$\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha\,,$$

т.е.

$$\measuredangle BPC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha = \measuredangle BIC\,.$$

Тоа значи дека P лежи на опишаната кружница ω

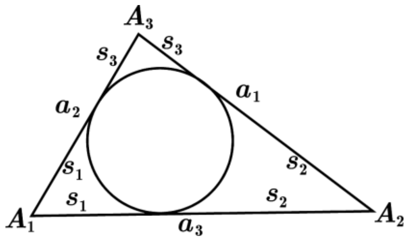
околу $\triangle BCI$. Бидејќи центарот на кружницата ω е во средината M на лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи A (бидејќи $\overline{MB}=\overline{MC}=\overline{MI}$), добиваме дека

$$\overline{AP} \geq \overline{AM}-\overline{MP}=\overline{AM}-\overline{MI}=\overline{AI},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.

6. Даден е триаголникот $A_1A_2A_3$, со страни $a_1=\overline{A_2A_3}$, $a_2=\overline{A_3A_1}$ и $a_3=\overline{A_1A_2}$. Нека s_1, s_2, s_3 се должините на тангентните отсечки на впишаната кружница во триаголникот, што почнуваат од A_1, A_2, A_3, соодветно.

Докажи дека $\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3} \geq \frac{3}{2}$. Кога важи знак за равенство?



Решение. Од условите на задачата имаме $s_1+s_2=a_3$, $s_2+s_3=a_1$ и $s_3+s_1=a_2$, па оттука

$$s_1=\tfrac{1}{2}(a_2+a_3-a_1),\ s_2=\tfrac{1}{2}(a_3+a_1-a_2) \text{ и}$$

$$s_3=\tfrac{1}{2}(a_1+a_2-a_3).$$

Затоа

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_2+a_3-a_1}{a_1}+\frac{a_3+a_1-a_2}{a_2}+\frac{a_1+a_2-a_3}{a_3}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)-3\right)\\ &\geq \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}=\frac{a_3}{a_1}$, т.е. ако и само ако $a_1=a_2=a_3$, па триаголникот е рамностран.

7. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините во $\triangle ABC$. Докажи

$$h_A^2+h_B^2+h_C^2 \leq \tfrac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2). \tag{1}$$

Решение. Ако ги собереме равенствата за тежините линии го добиваме равенството

$$m_A^2+m_B^2+m_C^2 = \tfrac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2). \tag{2}$$

Сега неравенството (1) непосредно следува од равенството (2) и неравенствата $h_A \leq m_A, h_B \leq m_B, h_C \leq m_C$. Јасно, во неравенството (1) знак за равенство важи ако и само ако $h_A=m_A, h_B=m_B, h_C=m_C$, т.е. ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

8. Докажи, дека за секој $\triangle ABC$ е точно неравенството

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2 \geq 2\overline{BC}\cdot m_A,$$

каде m_A е должината на тежишната линија повлечена кон страната BC.

Решение. Од равенството

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}$$

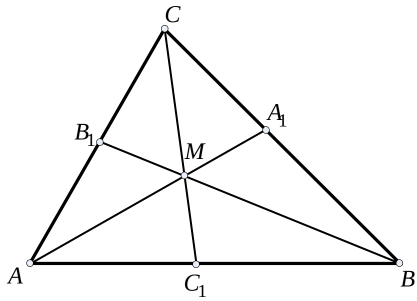
и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средна следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{4m_A^2 + \overline{BC}^2}{2} \geq \sqrt{4m_A^2 \cdot \overline{BC}^2} = 2\overline{BC} \cdot m_A .$$

9. Нека M е внатрешна точка на триаголникот ABC и нека $AM \cap BC = \{A_1\}$, $BM \cap CA = \{B_1\}$ и $CM \cap AB = \{C_1\}$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} \geq 6 .$$

Решение. Нека S е плоштина на $\triangle ABC$ а S_1, S_2, S_3 се плоштините на $\triangle MBC, \triangle MCA, \triangle MAB$ соодветно. Триаголниците ABC и MBC имаат иста основа па следува



$$\overline{AA_1} : \overline{MA_1} = S : S_1 = (S_1 + S_2 + S_3) : S_1 .$$

Оттука $(\overline{AA_1} - \overline{MA_1}) : \overline{MA_1} = (S_2 + S_3) : S_1$,

односно

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA_1}} = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} .$$

Аналогно

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MB_1}} = \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MC}}{\overline{MC_1}} = \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2} .$$

Значи

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} = (\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}) + (\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}) + (\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}) \geq 2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}\frac{S_2}{S_1}} + 2\sqrt{\frac{S_2}{S_3}\frac{S_3}{S_2}} + 2\sqrt{\frac{S_3}{S_1}\frac{S_1}{S_3}} = 6 .$$

10. Низ внатрешна точка на даден триаголник се повлечени три прави кои триаголникот го делат на 6 дела. Нека S_1, S_2 и S_3 се плоштини на кои било три така добиени делови на триаголникот. Докажи дека:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} > \frac{9}{S} .$$

Решение. Ако го искористиме фактот дека $S > S_1 + S_2 + S_3$ и неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина на броевите S_1, S_2 и S_3, добиваме

$$\frac{S}{3} > \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} > \frac{3}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}} ,$$

од каде што се добива бараното неравенство.

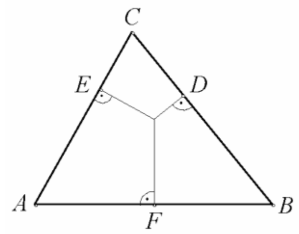
11. Нека P е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините ортогонални проекции на правите BC, CA и AB, соодветно. Определи ги сите точки P за кои збирот

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$$

е најмал.

Решение. Ако ги воведеме ознаките $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, тогаш треба да го одредиме минимумот на изразот

$$S = \frac{a}{\overline{PD}} + \frac{b}{\overline{PE}} + \frac{c}{\overline{PF}}.$$



Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш

$$2P = a \cdot \overline{PD} + b \cdot \overline{PE} + c \cdot \overline{PF}$$

па според тоа

$$2PS = a^2 + b^2 + c^2 + bc(\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}) + ca(\frac{\overline{PD}}{\overline{PF}} + \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}}) + ca(\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}})$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) = (a + b + c)^2.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF}$, т.е. ако P е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC. Тогаш дадениот израз има минимална вредност

$$S_{\min} = \frac{(a+b+c)}{2P}.$$

12. Должините на две висини во еден триаголник се 10 и 6. Докажи дека должината на третата висина е помала од 15.

Решение. Да ги означиме со a, b и c должините на страните на триаголникот, и со h_a, h_b и h_c должините на соодветните висини. Тогаш

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c. \qquad (1)$$

Нека $h_a = 10$ и $h_b = 6$. Треба да докажеме дека $h_c < 15$. Од (1) добиваме дека $b = \frac{ah_a}{h_b} = \frac{5}{3}a$. Од неравенството на триаголник имаме $b - a < c$, $\frac{2}{3}a < c$, $\frac{a}{c} < \frac{3}{2}$. Конечно, од $\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$ заклучуваме $\frac{h_c}{10} < \frac{3}{2}$, т.е. $h_c < 15$.

13. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница со радиус r, а точките M и N се средини на страните AB и CD. Докажи, дека $\overline{MN} \geq 2r$.

Решение. Последователно добиваме (направи цртеж):

$$\begin{aligned} 2r(\overline{AB} + \overline{CD}) &= r(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) = 2P_{ABCD} \\ &= (P_{ABC} + P_{ABD}) + (P_{CDA} + P_{CDB}) \\ &= 2P_{ABN} + 2P_{CDM} \leq \overline{MN} \cdot \overline{AB} + \overline{MN} \cdot \overline{CD} \\ &= \overline{MN} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}), \end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство.

14. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи, дека

$$(1 + \frac{c}{a})(1 + \frac{c}{b}) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Решение. За изразот на левата страна на неравенството добиваме

$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})=\tfrac{(a+c)(b+c)}{ab}=\tfrac{c^2+ab+c(a+b)}{ab}=\tfrac{c^2}{ab}+1+\tfrac{c(a+b)}{ab}.$$

Бидејќи триаголникот е правоаголен, важи $a^2+b^2=c^2$, па затоа

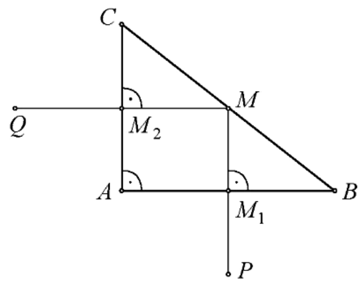
$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})=\tfrac{a^2+b^2}{ab}+1+\tfrac{\sqrt{a^2+b^2}(a+b)}{ab}\geq\tfrac{2ab}{ab}+1+\tfrac{\sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{ab}}{ab}$$
$$=2+1+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}.$$

15. Нека M е произволна точка од хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC. Точките P и Q се осносиметрични точки на точката M во однос на AB и AC, соодветно. Докажи, дека $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}\leq\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

Решение. Нека M_1 и M_2 се проекциите на M врз катетите AB и AC соодветно. Од сличноста $\Delta BM_1M\sim\Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$.

Од $\Delta MM_2C\sim\Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}$. Со множење на последните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{(\overline{MC}+\overline{MB})^2}\leq\frac{1}{4}.$$



Од равенствата $\overline{MP}=2\overline{MM_1}$ и $\overline{MQ}=2\overline{MM_2}$, неравенството $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\leq\frac{1}{4}$ го добива обликот $\frac{2\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\cdot\frac{2\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\leq 1$, т.е. $\frac{\overline{MP}\cdot\overline{MQ}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}\leq 1$, што и требаше да се докаже.

16. Права ги сече страните AB и BC на триаголникот ABC во точките M и K, соодветно. Ако плоштината на $\triangle MBK$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $AMKC$, докажи дека

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}}\geq\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Решение. Да означиме $\overline{BK}=y, \overline{KC}=z, \overline{CA}=b, \overline{AM}=u$ и $\overline{MB}=x$ (направи цртеж). Бидејќи $P_{BMK}=P_{AMKC}$, важи $P_{BMK}>P_{MKC}$, т.е. $y>z$ и $P_{BMK}>P_{AMK}$, т.е. $x>u$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е.

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}}<\frac{1}{3}.$$

Од последното неравенство следува низата неравенства

$$\frac{x+y}{u+b+z}<\frac{1}{3}\Rightarrow 3x+3y>u+b+z<x+y+b$$
$$\Rightarrow 2x+2y<b$$
$$\Rightarrow x+u+y+z<2x+2y<b$$
$$\Rightarrow (x+u)+(y+z)<b$$
$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}<\overline{CA},$$

што не е можно, па затоа точно е неравенството (1).

17. Ако a,b и c се должини на страни на триаголник, докажи го неравенството

$$(1+\tfrac{b-c}{a})^a(1+\tfrac{c-a}{b})^b(1+\tfrac{a-b}{c})^c \le 1.$$

Решение. Од условот на задачата следува дека броевите $\frac{a+b-c}{a}$, $\frac{b+c-a}{b}$ и $\frac{c+a-b}{c}$ се позитивни. Ако на овие броеви со тежини a,b и c, соодветно го примениме тежинското неравенство меѓу геометриската и аритметичката средина го добиваме неравенството

$$[(\tfrac{a+b-c}{a})^a(\tfrac{b+c-a}{b})^b(\tfrac{c+a-b}{c})^c]^{\frac{1}{a+b+c}} \le \frac{a\frac{a+b-c}{a}+b\frac{b+c-a}{b}+c\frac{c+a-b}{c}}{a+b+c}=1,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

18. Даден е четириаголник $ABCD$ впишан во кружница со дијаметар 1. Определи ја најголемата можна вредност на збирот на радиусите на кружниците впишани во $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$ и $\triangle DAB$.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

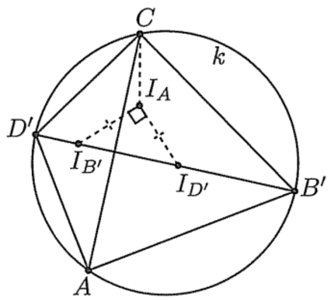
Лема. Нека XY е тетива во кружницата ω и нека точката Z се менува на лакот XY. Тогаш радиусот r_{XYZ} на впишаната кружница во $\triangle XYZ$ достигнува максимум кога Z е средина на лакот XY.

Доказ. Ако I е центар на впишаната кружница во $\triangle XYZ$, тогаш $\measuredangle XIY = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle XZY$, па затоа кога Z се менува на лакот XY, тогаш точката I исто така опишува некој лак со крајни точки X и Y. Притоа растојанието од I до XY е максимално точно кога I се совпаѓа со средината на тој лак, т.е. кога Z е средина на XY. ■

Од лемата следува, дека

$$r_{ABC}+r_{ADC} \le r_{AB'C}+r_{AD'C},$$

каде B' и D' се средини на лаците ABC и ADC, соодветно. Ако со $I_{D'}$ и $I_{B'}$ ги означиме центрите на впишаните кружници во $\triangle AB'C$ и $\triangle AD'C$, соодветно, тогаш $r_{AB'C}+r_{AD'C}=\overline{I_{B'}I_{D'}}$. Од друга страна, ако со I_A го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle B'CD'$, тогаш



$$\measuredangle CI_AD' = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle CB'D' = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle CAD' = \measuredangle CI_{B'}D$$

и аналогно $\measuredangle CI_AB' = \measuredangle CI_{D'}B'$, т.е. четириаголниците $CI_AI_{B'}D$ и $CI_AI_{D'}B'$ се тетивни. Тогаш

$$\measuredangle I_AI_{B'}I_{D'} = \measuredangle I_ACD' = 45^\circ \text{ и } \measuredangle I_AI_{D'}I_{B'} = \measuredangle I_ACB' = 45^\circ, \text{ т.е. } \overline{I_{B'}I_{D'}} = 2r_{B'D'C}.$$

Ако повторно ја примениме лемата, заклучуваме дека изразот $r_{ABC}+r_{ADC}$ прима најголема вредност точно тогаш кога $ABCD$ е квадрат. Аналогно и вредноста на изразот $r_{BAD}+r_{BCD}$ е најголема точно тогаш кога $ABCD$ е квадрат. Останува да пресметаме дека во тој случај $r_{ABC}+r_{ADC}=r_{BAD}+r_{BCD}=\sqrt{2}-1$ и така бараната најголема вредност е $2\sqrt{2}-2$.

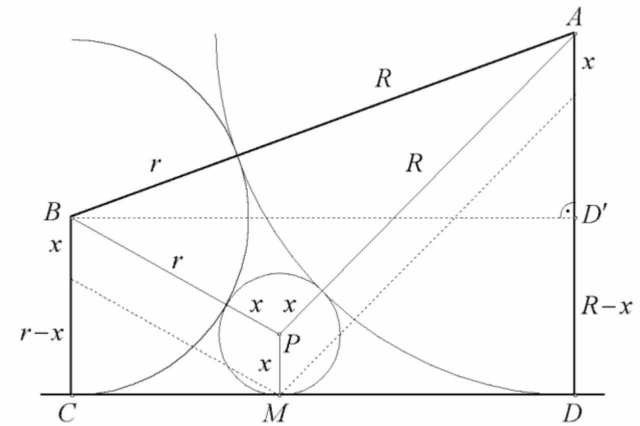
19. Даден е конвексниот четириаголник $ABCD$ со следните својства:

(i) $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BC}$,

(ii) во внатрешноста на четириагоникот $ABCD$ постои точка P која од правата CD е на растојание h, таква што $\overline{AP}=h+\overline{AD}$ и $\overline{BP}=h+\overline{BC}$.

Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{h}}\geq\frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}}+\frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}}$.

Решение. Од цртежот гледаме дека h е максимално ако CD е тангента на кружница со центар во A и радиус $R=\overline{AD}$ и тангента на кружница со центар B и радиус $r=\overline{BC}$.



Нека $h_{\max}=x$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CD}=\overline{BD'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD'}^2}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr} \qquad (1)$$

$$\overline{CD}=\overline{CM}+\overline{MD}=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}+\sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2}=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2\sqrt{Rr}=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}$. Значи,

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{\sqrt{Rr}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

20. Ако a,b,c се должините на страните на $\triangle ABC$, тогаш точно е неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca). \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (1) е хомогено, па затоа можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$. Понатаму, ако го искористиме познатото неравенство

$$ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

добиваме $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}$. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{9a(b+c)}{4}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{9b(c+a)}{4}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{9c(a+b)}{4}\right)\geq 3. \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{9a(b+c)}{4})+(\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{9b(c+a)}{4})+(\tfrac{c}{a+b}+\tfrac{9c(a+b)}{4}) &\geq 2\sqrt{\tfrac{9a^2}{4}}+2\sqrt{\tfrac{9b^2}{4}}+2\sqrt{\tfrac{9c^2}{4}}\\ &= 2\tfrac{3a}{2}+2\tfrac{3b}{2}+2\tfrac{3c}{2}\\ &= 3(a+b+c)=3,\end{aligned}$$

што значи дека е точно неравенството (2), односно точно е неравенството (1).

21. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на оопишаната и впишаната кружница. Докажи дека $\overline{OG} \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

Решение. Ако го искористиме равенството на Лајбниц $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството $a^2+b^2+c^2 \geq 18Rr$. Но, $R=\frac{abc}{4P}$ и $r=\frac{2P}{a+b+c}$, па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Последното следува ако ги помножиме неравенствата

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ и } a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

22. Даден е триаголник со должини на страни a, b и c и плоштина S. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ќе ја искористиме Хероновата формула за плоштина на триаголник

$$S=\sqrt{\tfrac{a+b+c}{2}\tfrac{a+b-c}{2}\tfrac{a-b+c}{2}\tfrac{-a+b+c}{2}}.$$

Секој од множителите под коренот е позитивен па за оценка на производот $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ ќе го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, т.е. неравенството $xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}$.

Ако ставиме $x=a+b-c$, $y=a-b+c$, $z=-a+b+c$, добиваме

$$\begin{aligned}4S &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leq \sqrt{(a+b+c)\tfrac{(a+b+c)^3}{27}}\\ &= \tfrac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \tfrac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \tfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

23. Докажи дека за страните a,b,c и тежишните линии m_a, m_b, m_c на произволен триаголник важи

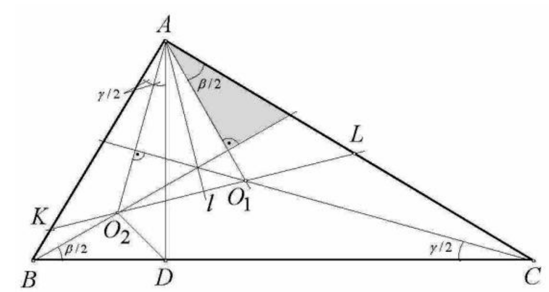
$$am_a+bm_b+cm_c \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Упатство. Искористи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и равенството $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

24. Даден е $\triangle ABC$ со прав агол во темето A. Висината повлечена од темето A ја сече спротивната страна во точката D. Правата која минува низ центрите на впишаните кружници во триаголниците ABD и ACD ги сече страните AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека S и T се плоштините на триаголниците ABC и AKL. Докажи дека $S \geq 2T$.

Решение. Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците впишани во триаголниците ABD и ADC (види цртеж), β и γ се агли кај темињата B и C соодветно. Пресметувајќи ги аглите во осенчениот триаголник, заклучуваме дека правата $BO_2 \perp AO_1$; слично $CO_1 \perp AO_2$. Затоа симетралата на аголот A во триаголникот ABC (ја означуваме со l), лежи на висината на триаголникот AO_2O_1, т.е. $l \perp O_2O_1$. Значи, точката L е симетрична на точката K во однос на правата l, т.е. $\overline{AK} = \overline{AL}$ и

$$\measuredangle AKO_2 = \measuredangle ALO_1 = 45^\circ.$$



Бидејќи DO_2 е симетрала на аголот D во триаголникот ABD добиваме $\measuredangle ADO_2 = 45^\circ$, имаме $\triangle ADO_2 \cong \triangle AKO_2$, од што се добива $\overline{AK} = \overline{AD}$.

Понатаму, од $\overline{AD} = \frac{bc}{a}$, добиваме $2T = \overline{AD}^2 \leq S = \frac{1}{2}bc \iff 2bc \leq a^2 = b^2 + c^2 \iff (b-c)^2 \geq 0$, ($a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

25. Триаголникот ABC има должини на страни $a = \overline{BC} \leq b = \overline{AC} \leq c = \overline{AB}$. Должините на висините спуштени од точките A, B, C се h_a, h_b, h_c, соодветно, и R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот. Докажи, дека

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{3b(a^2+ac+c^2)}{2R(a+b+c)}.$$

Решение. Од $a \leq b \leq c$ следува дека $h_c \leq h_b \leq h_a$. Значи броевите $b-a$, $c-a$, $c-b$, $h_a - h_b$, $h_a - h_c$ и $h_b - h_c$ се ненегативни. Оттука добиваме

$$(b-a)(h_b - h_c) + (c-a)(h_a - h_c) + (c-b)(h_a - h_b) \geq 0.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2(ah_c + bh_b + ch_a) \geq ah_b + ah_a + bh_a + bh_c + ch_b + ch_c.$$

Ако од двете страни на ова неравенство додадеме $ah_c + bh_b + ch_a$ добиваме

$$(a+b+c)(h_a + h_b + h_c) \leq 3(ah_c + bh_b + ch_a). \qquad (*)$$

Понатаму, од $ah_a = bh_b = ch_c = 2\frac{abc}{4R}$ добиваме $h_a = \frac{bc}{2R}$, $h_b = \frac{ac}{2R}$ и $h_c = \frac{ba}{2R}$, па со замена во (*) имаме

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{3(ah_c+bh_b+ch_a)}{a+b+c} = \frac{3(a\frac{ab}{2R}+b\frac{ac}{2R}+c\frac{bc}{2R})}{a+b+c} = \frac{3b(a^2+ac+c^2)}{2R(a+b+c)}.$$

26. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c и плоштина S.

а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, докажи дека $S_1^2 \geq \frac{S\sqrt{3}}{4}$.

Решение. а) Тврдењето непосредно следува од следните неравенства:

$$\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b+2\sqrt{bc}+c} < \sqrt{b}+\sqrt{c}$$

и слично $\sqrt{b} < \sqrt{c}+\sqrt{a}$, $\sqrt{c} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

б) Со примена на Хероновата формула лесно се добива дека

$$S_1^2 = \tfrac{1}{16}(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2),$$

па затоа даденото неравенство е еквивелентно со неравенството

$$2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 \geq 4S\sqrt{3}. \qquad (1)$$

За докажување на последното неравенство ги воведуваме стандардните смени

$$p = \tfrac{b+c-a}{2},\ q = \tfrac{c+a-b}{2},\ r = \tfrac{a+b-c}{2},\ p, q, r > 0.$$

Тогаш,

$$p+q+r = \tfrac{a+b+c}{2}, \text{ па } a = q+r,\ b = r+p,\ c = p+q, \text{ а } S = \sqrt{pqr(p+q+r)}.$$

Сега неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(pq+qr+rp)^2 \geq 3pqr(p+q+r),$$

односно со

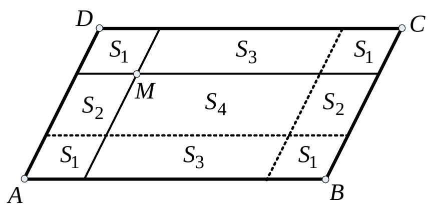
$$p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2 \geq pqr(p+q+r).$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенствата

$$\tfrac{p^2q^2+q^2r^2}{2} \geq pq^2r,\ \tfrac{q^2r^2+r^2p^2}{2} \geq pqr^2,\ \tfrac{r^2p^2+p^2q^2}{2} \geq p^2qr.$$

27. Даден е паралелограм $ABCD$ (темињата A и C се спротивни) и точка M во внатрешноста на паралелограмот. Низ M се повлечени две прави, паралелно на страните на паралелограмот. Двете прави го делат паралелограмот на четири нови паралелограми. Докажи дека плоштината на барем еден од двата нови паралелограми, од кои едниот го содржи темето A а другиот темето C, не е поголема од една четвртина од плоштината на целиот паралелограм $ABCD$.

Решение. Ако точката M е пресек на дијагоналите или лежи на која било од средните линии на паралелограмот, задачата е тривијална.



Да претпоставиме дека M не лежи на некоја од средните линии на паралелограмот. Ако правите повлечени низ M ги пресликаме со централна симетрија во однос на со централна во однос на дијагоналите добиваме уште две нови прави кои заедно со правите низ M го делат паралелограмот $ABCD$ на 9 паралелограми. Ако со S_i ($i = 1,2,3,4$) се означат плоштините на добиените паралелограми, а со P плоштината на паралелограмот $ABCD$, добиваме:

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4 = P,$$

од каде добиваме дека

$$4S_1 + 2S_2 + 2S_3 < P\,,$$

односно

$$(S_1 + S_2) + (S_1 + S_3) < \tfrac{P}{2}\,.$$

Од последното е јасно дека не е можно и двете плоштини $S_1 + S_2$ и $S_1 + S_3$ да се поголеми од $\frac{P}{4}$.

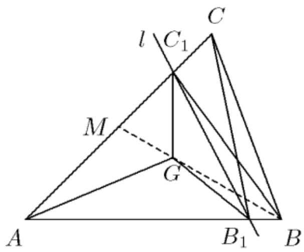
28. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l. Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} \geq \tfrac{4}{9} P_{ABC}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Заради пократкто запишување да означиме

$P_{ABC} = P,\, P_{AB_1C_1} = P_0,\; P_{AB_1G} = P_1$ и $P_{AC_1G} = P_2$.



Од условот на задачата следува, дека $P_0 \geq P_1 + P_2$.

Имаме

$$P_{BB_1GC_1} = P_{ABC_1} - P_1 - P_2 \text{ и}$$

$$P_{CC_1GB_1} = P_{ACB_1} - P_1 - P_2\,.$$

Од $P_{ABG} : P_{AMG} = 2:1 = P_{BGC_1} : P_{MGC_1}$ следува дека $P_{ABC_1} = 3P_2$. Аналогно се докажува дека $P_{ACB_1} = 3P_1$. Тогаш

$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} = P_{ABC_1} - P_1 - P_2 + P_{ACB_1} - P_1 - P_2 = P_1 + P_2\,.$$

Останува да докажеме дека $P_1 + P_2 \geq \frac{4P}{9}$. Имаме $P_1 = \frac{P_{AB_1C}}{3} = \frac{P \cdot \overline{AB_1}}{3\overline{AB}}$ и $P_1 = \frac{P \cdot \overline{AC_1}}{3\overline{AC}}$.

Тогаш

$$P_1 + P_2 = \tfrac{P}{3}\left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}\right) \geq \tfrac{2P}{3}\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}} = \tfrac{2P}{3}\sqrt{\frac{P_0}{P}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{P(P_1 + P_2)}\,,$$

Од каде што следува саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако правата l минува низ G и е паралелна со BC.

29. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина 1 и таков што секои две спротивни страни му се паралелни. Правите AB, CD и EF се сечат по парови, при што определуваат триаголник. Слично правите BC, DE и FA определуваат друг триаголник. Докажи дека барем еден од овие два триаголници има плоштина поголема или еднаква на $\frac{3}{2}$.

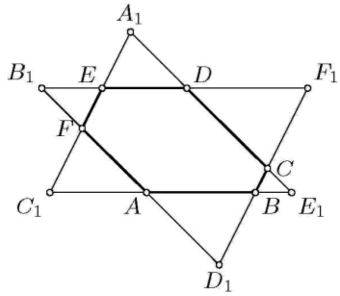
Решение. Нека правите AB, CD и EF го определуваат триаголникот $A_1C_1E_1$, а правите BC, DE и FA го определуваат триаголникот $B_1D_1F_1$ (види цртеж). Да означиме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{F_1B_1}} = a,\; \frac{\overline{BC}}{\overline{A_1C_1}} = b,\; \frac{\overline{CD}}{\overline{B_1D_1}} = c,\; \frac{\overline{DE}}{\overline{C_1E_1}} = d,\; \frac{\overline{EF}}{\overline{D_1F_1}} = e,\; \frac{\overline{FA}}{\overline{E_1A_1}} = f\,.$$

Од $P_{ABD_1}=a^2P_{B_1D_1F_1}$ итн. следува

$$P_{ABCDEF}=(1-a^2-c^2-e^2)P_{B_1D_1F_1} \text{ и}$$

$$P_{ABCDEF}=(1-b^2-b^2-f^2)P_{A_1C_1E_1}.$$



Коефициентите b,d,f може да се изразат преку a,c,e. Од

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{D_1F_1}-\overline{D_1B}-\overline{CF_1}}{\overline{EF}}=1-a-c \text{ и}$$

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{A_1E}+\overline{EF}+\overline{FC_1}}{\overline{EF}}=2-a-c-e$$

следува $b=\frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Аналогно се добива $d=\frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f=\frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Сега за $a+c+e=p$ имаме

$$a^2+c^2+e^2\ge\frac{1}{3}p^2 \text{ и } b^2+d^2+f^2=\frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{3-2p}{2-p}\right)^2.$$

Нека претпоставиме дека $P_{B_1D_1F_1}<\frac{3}{2}$ и $P_{A_1C_1E_1}<\frac{3}{2}$. Од претходно изнесеното следува дека тоа е еквивалентно со

$$a^2+c^2+e^2<\frac{1}{3} \text{ и } b^2+d^2+f^2<\frac{1}{3}.$$

Но, тогаш од првото неравенство следува $p<1$, а од второто $\frac{3-2p}{2-p}<1$, што не е можно.

30. Нека $n\ge 3$ е природен број. Ако $t_1,t_2,...,t_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$n^2+1>(t_1+t_2+...+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right),$$

тогаш за секои i,j,k такви што $1\le i<j<k\le n$ броевите t_i,t_j,t_k се должини на страни на триаголник. Докажи!

Решение. Заради симетрија доволно е да докажеме дека $t_1+t_2>t_3$. Бидејќи $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\ge 2$ за секои i,j добиваме

$$S=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=n^2+\sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2\right)\ge n^2+\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}-4=n^2+c-4.$$

Нека претпоставиме дека $t_3=t_1+t_2+\varepsilon, \varepsilon\ge 0$. Тогаш

$$c=\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{t_3(t_1+t_2)}{t_1t_2}=\frac{t_3}{t_3}+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}+\varepsilon\left(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{1}{t_3}\right)\ge 1+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}\ge 5,$$

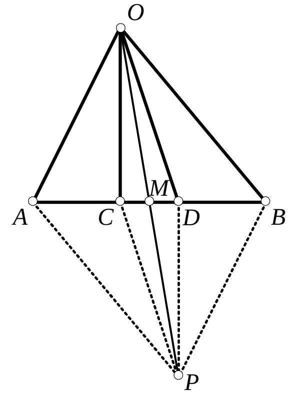
па затоа $S\ge n^2+1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $t_1+t_2>t_3$.

Забелешка. Тврдењето на задачата е точно ако n^2+1 се замени со $(n+\sqrt{10}-3)^2$. Ова е најдобрата можна апроксимација.

31. Точките C и D припаѓаат на отсечката AB при што $\overline{AC} = \overline{BD} < \frac{1}{2}\overline{AB}$. Докажи, дека за произволна точка O што не припаѓа правата AB е исполнето

$$\overline{OA} + \overline{OB} > \overline{OC} + \overline{OD}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{AC} < \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{BD} < \frac{1}{2}\overline{AB}$. Нека M е средина на отсечката AB. Точката M е средина и на CD заради условот $\overline{AC} = \overline{BD}$. Ќе ја разгледаме точката P која е симетрична на точката O во однос на M. Ако ги поврзиме точките O и P со A, C, M, B и D добиваме дека точката M е пресек на дијагоналите на паралелограмите $APBO$ и $CPDO$.



Сега, од претходната дискусија и конструкцијата е јасно дека

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AP} \text{ и } \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CP}.$$

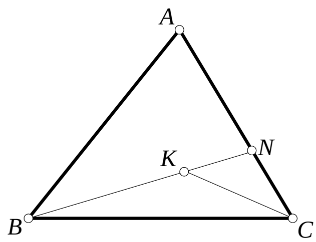
Значи, задачата се сведува на следната задача:

Збирот на растојанијата од точката A до темињата O и P во триаголникот APO е поголем од збирот на растојанијата од точка C која лежи на медијаната AM до точките O и P.

Последната задача може да се докаже во поопшта форма:

Нека ABC е триаголник и K е точка од неговата внатрешност. Тогаш

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{KB} + \overline{KC}.$$



Нека N е точка на пресек на BK со AC. Од триаголникот ABN имаме

$$\overline{AB} + \overline{AN} > \overline{BN} = \overline{KB} + \overline{KN},$$

а од триаголникот KNC имаме

$$\overline{KN} + \overline{NC} > \overline{KC}.$$

Ако последните две неравенства ги собереме добиваме

$$\overline{AB} + \overline{AN} + \overline{KN} + \overline{NC} > \overline{BK} + \overline{KN} + \overline{KC}$$
$$\overline{AB} + (\overline{AN} + \overline{NC}) > \overline{KB} + \overline{KC}$$
$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{KB} + \overline{KC},$$

што требаше да се докаже.

32. Нека O, I и H се центарот на опишаната, центарот на впишаната кружница и ортоцентарот на остроаголниот разностран $\triangle ABC$. Докажи дека $\measuredangle OIH > 135^\circ$.

Решение. Ќе ги искористиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\alpha > \beta > \gamma$. Тогаш доволно е да докажеме дека $\measuredangle OIH > 180^\circ - \alpha$.

Ги повлекуваме висините $AA_1, A_1 \in BC$ и $CC_1, C_1 \in AB$. Бидејќи

$$\measuredangle BAO = 90^\circ - \gamma > 90^\circ - \beta = \measuredangle BAA_1 \text{ и } \measuredangle ACO = 90^\circ - \beta > 90^\circ - \alpha = \measuredangle ACC_1,$$

заклучуваме дека точката O се наоѓа во внатрешноста на $\triangle A_1HC$.

Бидејќи $\measuredangle BAA_1 = \measuredangle OAC = 90^\circ - \beta$, заклучуваме дека правата AI е симетрала и на $\measuredangle HAO$. Аналогно правата CI е симетрала на $\measuredangle HCO$. Нека правите AI и CI ја сечат отсечката OH во точките E и F соодветно, точката C_2 е средина на AB и K е пресечната точка на OC_2 и AI (направи цртеж). Бидејќи

$$\frac{\overline{HE}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AO}} < \frac{\overline{CH}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{FO}}$$

и правите OC_2 и CI се сечат на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, заклучуваме дека точката I е внатрешна за отсечката EK.

Ќе разгледаме два случаја за аголот β.

Случај 1. Ако $\beta \geq 60^\circ$, тогаш

$$\measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \geq 180^\circ - \beta = \measuredangle AHC .$$

Тогаш I се наоѓа во внатрешноста на кружницата опишана околу $\triangle AHC$ и $\measuredangle AIH > \measuredangle ACH = 90^\circ - \alpha$. Според тоа,

$$\measuredangle OIH = \measuredangle OIA + \measuredangle AIH > \measuredangle OKA + \measuredangle AIH > 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} .$$

Случај 2. Ако $\beta < 60^\circ$, тогаш $\measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} > 2\beta = \measuredangle AOC$. Тогаш I се наоѓа во внатрешноста на кружницата опишана околу $\triangle AOC$ и $\measuredangle IOA < \frac{\gamma}{2}$. Според тоа,

$$\measuredangle OIA = 180^\circ - \measuredangle IAO - \measuredangle IOA > 180^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2} .$$

Според тоа,

$$\measuredangle OIH > \measuredangle OIA > 180^\circ - \frac{\beta}{2} > 180^\circ - \frac{\alpha}{2} .$$

33. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините, r_a, r_b, r_c се должините на радиусите на припишаните кружници и r е должината на радиусот на вписаната кружница во ΔABC. Докажете го неравенството

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq 9r . \qquad (1)$$

Решение. За секој триаголник точни се равенствата

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} , \qquad (2)$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} . \qquad (3)$$

Понатаму, даденото неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$, од што следува $r_a \geq r_b \geq r_c$, т.е. $\frac{1}{r_a} \leq \frac{1}{r_b} \leq \frac{1}{r_c}$ и $h_a \leq h_b \leq h_c$. Сега, од неравенството на Чебишев и равенствата (2) и (3) следува

$$\begin{aligned}\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} &= h_a^2 \frac{1}{r_a} + h_b^2 \frac{1}{r_b} + h_c^2 \frac{1}{r_c} \geq \frac{1}{3}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}) \\ &= \frac{1}{3}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2)(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) = \frac{1}{3r}(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2).\end{aligned} \qquad (4)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq \tfrac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)^2$$

и ако замениме во неравенството (4) добиваме:

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq \frac{1}{9r}(h_a + h_b + h_c)^2 . \tag{5}$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$h_a + h_b + h_c = \tfrac{2P}{a} + \tfrac{2P}{b} + \tfrac{2P}{c} = 2P(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c})$$

$$= 2\tfrac{r(a+b+c)}{2}(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}) \geq 9r.$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (5) добиваме

$$\frac{h_a^2}{r_a} + \frac{h_b^2}{r_b} + \frac{h_c^2}{r_c} \geq \frac{1}{9r}(h_a + h_b + h_c)^2 \geq \frac{1}{9r}(9r)^2 = 9r .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран.

34. Во триаголник ABC точката M е средина на страната $\overline{BC} = a$. Нека r, r_1, r_2 се радиусите на кружинците впишани во триаголниците ABC, ABM и ACM, соодветно. Докажи го неравенството $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq 2(\frac{1}{r} + \frac{2}{a})$.

Решение. Нека P, P_1, P_2 се плоштините на триаголниците ABC, ABM и ACM, соодветно. Јасно, $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$. Од тоа што

$$P_1 = r_1 s_1 = r_1 \tfrac{\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{AM}}{2} = \tfrac{r_1}{2}(c + \tfrac{a}{2} + m),$$

и

$$P_2 = r_2 s_2 = r_2 \tfrac{\overline{AM} + \overline{CM} + \overline{AC}}{2} = \tfrac{r_2}{2}(m + \tfrac{a}{2} + b),$$

имаме

$$P = r_1(c + \tfrac{a}{2} + m) = r_2(m + \tfrac{a}{2} + b) .$$

Така,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{c + \frac{a}{2} + m}{P} + \frac{m + \frac{a}{2} + b}{P} = \frac{a+b+c}{P} + \frac{2m}{P} = \frac{2}{r} + \frac{4m}{ah} \geq \frac{2}{r} + \frac{4}{a} = 2(\frac{1}{r} + \frac{2}{a}) .$$

35. Нека a, b, c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0 .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* За секој триаголник со должини на страни a, b, c секогаш може да се изберат ненегативни броеви x, y, z, такви што $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (зошто?). Ако овие равенства ги замениме во даденото неравенство, после средувањето го добиваме еквивалентното неравенство

$$xy^3 + yz^3 + z^3 \geq xyz(x + y + z) .$$

Последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски применето на броевите:

$$a_1=\sqrt{z}\,,\ a_2=\sqrt{z}\,,\ a_3=\sqrt{y}\,,\ b_1=\sqrt{xy^3}\,,\ b_2=\sqrt{yz^3}\,,\quad b_3=\sqrt{zx^3}\,,$$

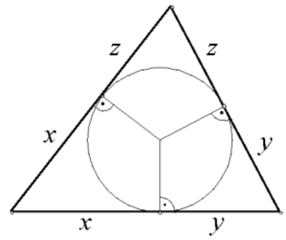
при што знак за равенство е исполнет ако и само ако

$$\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y}\,.$$

т.е. ако и само ако $x=y=z$, односно $a=b=c$.

Втор начин. Изразот од левата страна на неравенството ќе го запишеме во облик

$$\tfrac{1}{2}[(a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2+$$
$$+(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2+$$
$$+(c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2].$$



Ако a,b,c се должни на страни на триаголникот, овој израз е ненегативен, а еднаков е на нула ако и само ако $a=b=c$.

36. Со d да го означиме збирот на должините на дијагоналите на конвексен $n-$аголник, ($n>3$), а со p неговиот периметар. Докажи дека

$$n-3<\tfrac{2d}{p}<[\tfrac{n}{2}][\tfrac{n+1}{2}]-2\,.$$

Решение. Темињата на n - аголникот ги означуваме со $A_1,A_2,...,A_n$. Нека B е пресек на A_iA_j и $A_{i+1}A_{j+1}$. Од неравенството на триаголник следува (види цртеж лево)

$$\overline{A_iB}+\overline{BA_{i+1}}>\overline{A_iA_{i+1}}\ \ ,\ \overline{A_jB}+\overline{BA_{j+1}}>\overline{A_jA_{j+1}}\,,$$

од каде што

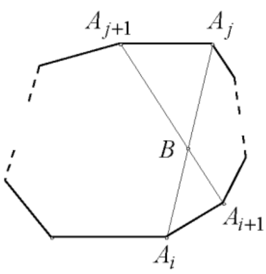
$$\overline{A_iA_j}+\overline{A_{i+1}A_{j+1}}>\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_jA_{j+1}}\,.$$

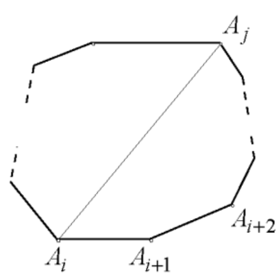
Последното неравенство важи за сите парови соседни темиња и ако ги собереме овие неравенства, добиваме $2d>(n-3)\,p$ односно $n-3<\tfrac{2d}{p}$.

За секоја дијагонала го применуваме неравенството

$$\overline{A_iA_j}<\sum_{k-1}^{j-1}\overline{A_kA_{k+1}} \qquad (2)$$

(види цртеж десно).





На десната страна од неравенството (2) секогаш ја земаме онаа половина на ликот која има помалку страни, а потоа сите ги собираме.

Ако $n=2k+1$ добиваме

$$d<(1+2+3+...+(k-1)+(k-1))p=(\frac{k(k+1)}{2}-1)p\,,$$

односно

$$\frac{2d}{p}<k(k+1)-2=[\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}]-2\,.$$

Ако $n=2k$, тогаш

$$d<(1+2+3+...+(k-2)+(k-2)+\frac{k}{2})\;p=(\frac{k(k-1)}{2}-1+\frac{k}{2})\;p=(\frac{k^2}{2}-1)\;p$$

$$\Leftrightarrow \frac{2d}{p}<k^2-2=[\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}]-2\,.$$

37. Нека $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ се темиња на правилен многуаголник, а O е произволна точка во внатрешноста на многуаголникот. Докажи дека барем еден од аглите A_iOA_j го задоволува неравенството

$$\pi(1-\frac{1}{n})\le \measuredangle A_iOA_j \le \pi$$

Решение. Нека A_1 е такво теме на многуаголникот, што $\overline{OA_1}\le\overline{OA_j}$ $j\ne 1$. Дијагоналите $A_1A_j,\, j\ne 1$ ја разбиваат внатрешноста на многуаголникот на триаголници, па затоа точката O лежи во внатрешноста на еден $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ или на неговата граница. Ако точката O лежи на границата на $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ тогаш тврдењето на задачата е тривијално, бидејќи $\measuredangle A_1OA_k=\pi$.

Нека точката O лежи во внатрешноста на $\triangle A_1A_kA_{k+1}$ и нека $\measuredangle A_1OA_k<\pi$ и $\measuredangle A_1OA_{k+1}<\pi$. Освен тоа, бидејќи $\overline{OA_1}\le\overline{OA_j}$ добиваме

$$\measuredangle OA_kA_1\le\measuredangle OA_1A_k \quad \text{и}$$

$$\measuredangle OA_{k+1}A_1\le\measuredangle OA_1A_{k+1}$$

Но,

$$\measuredangle OA_1A_k+\measuredangle OA_1A_{k+1}\le\frac{\pi}{n}$$

Значи,

$$\measuredangle A_1OA_k+\measuredangle AOA_{k+1}=2\pi-(\measuredangle OA_1A_k+\measuredangle OA_1A_{k+1})-(\measuredangle OA_kA_1+\measuredangle OA_{k+1}A_1)$$

$$\ge 2\pi-\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}=2\pi(1-\frac{1}{n}).$$

Според тоа, $\measuredangle A_1OA_k\ge\pi(1-\frac{1}{n})$ или $\measuredangle A_1OA_{k+1}\ge\pi(1-\frac{1}{n})$.

38. Нека ν е позитивен реален број. Докажи дека

$$\frac{1}{2\nu a_1+a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+2\nu a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_2+2\nu a_3}\ge\frac{2\nu}{2\nu+1}(\frac{1}{\nu a_1+\nu a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+\nu a_2+\nu a_3}+\frac{1}{\nu a_1+a_2+\nu a_3})\,,$$

за било кои позитивни реални броеви a_1,a_2,a_3.

Решение. Доволно е да се докаже дека

$$\frac{1}{2\nu a_1+a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+2\nu a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_2+2\nu a_3}\ge\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_2)+\frac{2\nu+1}{\nu}a_3}+\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_3)+\frac{2\nu+1}{\nu}a_2}+$$

$$+\frac{2}{(2\nu+1)(a_2+a_3)+\frac{2\nu+1}{\nu}a_1}$$

т.е.

$$\frac{1}{2\nu a_1+a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+2\nu a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_2+2\nu a_3}\geq\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_2)+(2+\frac{1}{\nu})a_3}+\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_3)+(2+\frac{1}{\nu})a_2}+$$
$$+\frac{2}{(2\nu+1)(a_2+a_3)+(2+\frac{1}{\nu})a_1}$$

Бидејќи за $\nu>0$ е исполнето

$$\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_2)+2a_3}+\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_3)+2a_2}+\frac{2}{(2\nu+1)(a_2+a_3)+2a_1}>\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_2)+(2+\frac{1}{\nu})a_3}+$$
$$+\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_3)+(2+\frac{1}{\nu})a_2}+$$
$$+\frac{2}{(2\nu+1)(a_2+a_3)+(2+\frac{1}{\nu})a_1}$$

доволно е да докажеме дека

$$\frac{1}{2\nu a_1+a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+2\nu a_2+a_3}+\frac{1}{a_1+a_2+2\nu a_3}\geq\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_2)+2a_3}+\frac{2}{(2\nu+1)(a_1+a_3)+2a_2}$$
$$+\frac{2}{(2\nu+1)(a_2+a_3)+2a_1}. \qquad (1)$$

Ќе воведеме ознаки

$$x=2\nu a_1+a_2+a_3$$
$$y=a_1+2\nu a_2+a_3$$
$$z=a_1+a_2+2\nu a_3$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}a&=x+y=(2\nu+1)(a_1+a_2)+2a_3,\\ b&=y+z=(2\nu+1)(a_2+a_3)+2a_1,\\ c&=z+x=(2\nu+1)(a_1+a_3)+2a_2.\end{aligned} \qquad (2)$$

Од друга страна

$$a+b=x+2y+z>x+z=c,$$
$$b+c=x+y+2z>x+y=a,,$$
$$c+a=2x+y+z>y+z=b.$$

Според тоа, a,b,c се страни на триаголник, од каде добиваме

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}=\frac{2c}{c^2-(a-b)^2}>\frac{2c}{c^2}=\frac{2}{c},$$
$$\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}=\frac{2a}{a^2-(c-b)^2}>\frac{2a}{a^2}=\frac{2}{a},$$
$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{b+a-c}=\frac{2b}{b^2-(c-a)^2}>\frac{2b}{b^2}=\frac{2}{b}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства, добиваме

$$\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}+\frac{2}{a+b-c}>\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c},$$

односно

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \qquad (3)$$

Од друга страна

$$\begin{aligned} b+c-a &= 2z = 2[a_1+a_2+2\nu a_3] \\ c+a-b &= 2x = 2[2\nu a_1+a_2+a_3]\,, \\ a+b-c &= 2y = 2[a_1+2\nu a_2+a_3] \end{aligned} \qquad (4)$$

и ако (2) и (4) ги замениме во (3) го добиваме неравенството (1), со што е докажано почетното неравенство.

39. а) Нека a,b и c се позитивни броеви за кои важи

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)\,.$$

Докажи дека постои триаголник чии должини на страни се еднакви на a,b и c.

б) Нека $n>3$ и нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви за кои важи

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+a_2^4+...+a_n^4)\,.$$

Докажи дека за секои $i,j,k\in\{1,2,...,n\}$ постои триаголник чии должини на страни се еднакви на a_i,a_j,a_k.

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\le b\le c$. Даденото неравенство ќе го запишеме во обликот

$$\begin{aligned} 0 &< 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4) \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \end{aligned} \qquad (1)$$

Јасно, првите три множители на десната страна на (1) се позитивни, па затоа и четвртиот е позитивен. Според тоа, броевите a,b и c го задоволуваат неравенството на триаголник.

б) *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=3$ тврдењето е докажано под а). Нека претпоставиме дека тврдењето е докажано за некој $n\ge 3$. За $n+1$ реални броеви $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}$ даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2 + 2a_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^4 > n\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + na_{n+1}^4$$

т.е. со неравенството

$$(n-1)a_{n+1}^4 - 2a_{n+1}^2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + n\sum_{k=1}^{n} a_k^4 - (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2 < 0\,. \qquad (2)$$

Левата страна на неравенството (2) да ја разгледаме како квадратен полином P од a_{n+1}^2. Од $n-1>0$ и $P(a_{n+1}^2)<0$ следува дека полиномот има реални и различни корени, што значи дека неговата дискриминанта е позитивна. Според тоа,

$$4(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2 - 4(n-1)[n\sum_{k=1}^{n} a_k^4 - (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2] > 0\,,$$

односно

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2 > (n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^4\,.$$

Од индуктивната претпоставка следува дека a_i,a_j,a_k, за $1\le i<j<k\le n$ го задоволуваат неравенството на триаголник.

Конечно, заради симетрија следува дека a_i, a_j, a_k, за $1 \le i < j < k \le n+1$ го задоволуваат неравенството на триаголник.

Втор начин. Бидејќи $n > 3$, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^4 < (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^2 = [\tfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + \tfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2} + a_4^2 + ... + a_n^2]^2$$

$$\le (n-1)[\tfrac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4} + \tfrac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2} + a_4^4 + ... + a_n^4].$$

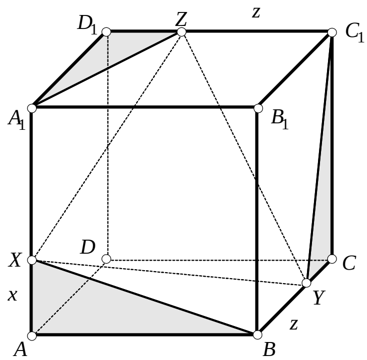
Последното неравенство е еквивалентно сонеравенството

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 \ge 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4),$$

па од тврдењето под а) следува дека a_1, a_2, a_3 се страни на триаголник. Поради симетрија заклучуваме дека a_i, a_j, a_k, за $1 \le i < j < k \le n$ се страни на триаголник.

40. На три разминувачки рабови на коцка со страна a, избери темиња на триаголник, различни од темињата на коцката, такви што збирот на квадратите на страните на тој триаголник да биде најмал. Колкав е тој збир?

Решение. Нека квадратот $ABCD$ е основа на коцката. На рабовите AA_1, BC и C_1D_1 ги избираме точките X, Y, Z (види цртеж). Да ставиме $\overline{AX} = x$, $\overline{BY} = y$, $\overline{C_1Z} = z$, $\overline{AB} = a$, тогаш:



$$\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{BY}^2 = (\overline{XA}^2 + \overline{AB}^2) + \overline{BY}^2$$

$$= x^2 + a^2 + y^2,$$

$$\overline{YZ}^2 = \overline{YC_1}^2 + \overline{CZ}^2 = (a-y)^2 + a^2 + z^2$$

$$\overline{ZX}^2 = \overline{ZA_1}^2 + \overline{A_1X}^2 = (a-z)^2 + a^2 + (a-x)^2.$$

По собирање и средување добиваме:

$$\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x+y+z) + 6a^2 =$$

$$= 2[(x - \tfrac{a}{2})^2 + (y - \tfrac{a}{2})^2 + (z - \tfrac{a}{2})^2 + \tfrac{9}{4}a^2].$$

Овој збир ќе биде најмал ако $x = y = z = \frac{a}{2}$, т.е. ако точките X, Y, Z се средини на рабовите и ќе изнесува $\frac{9}{2}a^2$.

Забелешка. Ако го напишеме бараниот збир во видот:

$$S = \overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 = 3a^2 + (\overline{AX}^2 + \overline{XA_1}^2) + (\overline{BY}^2 + \overline{YC}^2) + (\overline{C_1Z}^2 + \overline{ZD_1}^2),$$

тогаш, поради неравенството $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2$, $a, b \ge 0$, добиваме

$$S \ge 3a^2 + \tfrac{1}{2}(\overline{AX} + \overline{XA_1})^2 + \tfrac{1}{2}(\overline{BY} + \overline{YC})^2 + \tfrac{1}{2}(\overline{C_1Z} + \overline{ZD_1})^2$$

$$= 3a^2 + \tfrac{1}{2}(a^2 + a^2 + a^2) = \tfrac{9}{2}a^2.$$

Равенство се достигнува само во случај кога $x = y = z = \frac{a}{2}$ и тоа е минималната вредност.

41. Во тетраедарот $ABCD$ важи $BD \perp CD$ и подножјето на висината повлечена од темето D се совпаѓа со ортоцентарот на триаголникот ABC. Докажи дека

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \leq 6(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2).$$

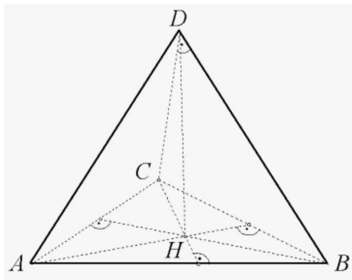
За кои тетраедри важи знак за равенство?

Решение. Најпрво ќе докажеме дека спротивните рабови на тетраедарот $ABCD$ се заемно нормални. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC. Проекцијата на правата CD во рамнината ABC е правата CH. Затоа $AB \perp CH$ и $AB \perp DH$, па според тоа $AB \perp CHD$, т.е. $AB \perp CD$. На сличен начин се покажува дека $BC \perp AD$ и $AC \perp BD$.

Ќе докажеме дека рамнинските агли кај темето D се прави. Аголот CDB е прав по претпоставка. Ако $CD \perp BD$ и $CD \perp AB$, тогаш $CD \perp ABD$. Според тоа, аголот ADC е прав агол. На сличен начин се докажува дека аголот BDA е прав.

Според Питагоровата теорема исполнети се равенствата:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2, \quad \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$



Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})^2 \leq 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$$

кое пак е еквивалентно со

$$0 \leq (\overline{AB}-\overline{BC})^2+(\overline{BC}-\overline{AC})^2+(\overline{AC}-\overline{AB})^2.$$

Последното неравенство е точно и знак за равенство важи ако и само ако

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Јасно, ако $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$, тогаш $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагић, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагић, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној промењљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од n-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Междунароdние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагиħ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагиħ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое откр̀итие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011