Олег Мушкаров, Сава Гроздев
БАН, Институт по математика, Софија

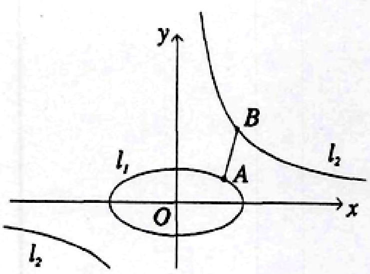
ЕДНО МАТЕМАТИЧКО ЧУДОВИШТЕ

Повод за оваа статија е задачата: ***Нека*** a,b,c,d ***се реални броеви такви што*** $a^2+4b^2=4$ ***и*** $cd=1$. ***Да се докаже дека*** $(a-c)^2+(b-d)^2>1{,}6$.

На прв поглед задачата не изгледа многу тешка, но ако се обидете да ја решите ќе го констатирате токму спротивното. Токму затоа, поставената задача ја нарековме математичко чудовиште. Од друга страна природно е прашањето дали горното неравенство може да се подобри и уште повеќе, дали може да се најде точна оценка за изразот во левата страна на неравенството? Одма да забележиме, дека постојат различни математички методи за решавање на последната задача, но нивната примена бара знаења кои го надминуваат средношколскиот училишен курс по математика.

Во оваа статија ќе разгледаме некои поопшти задачи од погорниот вид и ќе предложиме два елементарни методи за нивно решавање. Првиот е геометриски и претпоставува минимални знаења од аналитичка геометрија (равенка на права, елипса и хипербола). Вториот метод е алгебарски и прашањето за наоѓање на најдобрата оценка го сведува до решавање на определен вид на равенка.

1. Геометриска формулација на задачата



Цртеж 1

Нека во рамнината е зададен правоаголен координатен систем Oxy и две точки $A(a,b)$ и $B(c,d)$. Како што е познато растојанието меѓу точките A и B се пресметува по формулата

$$|AB|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\,.$$

Да ги разгледаме елипсата l_1 и хиперболата l_2 зададени со равенките (цртеж 1): l_1: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, l_2: $xy=4$. Броевите a,b,c,d ги задоволуваат условите на задачата, точно кога точките A и B лежат на l_1 и l_2. Според тоа, нашата задача можеме да ја формулираме на следниот начин: ***Да се докаже дека ако*** $A\in l_1$ ***и*** $B\in l_2$, ***тогаш*** $|AB|>1{,}6$.

Подолу ќе разгледаме еден поопшт начин за добивање на неравенста од горниот вид. За таа цел ќе воведеме еден поим, кој во натамошните разгледувања често ќе се користи.

2.Растојание меѓу две множества во рамнината

Нека M и N се произволни (непразни) множества во рамнината. Растојание меѓу множествата M и N се нарекува точната долна граница

$d(M,N)$ на сите растојанија меѓу точките од M и N. Со други зборови $d(M,N)$ е единствениот ненегативен број кој ги задоволува следните два услови:

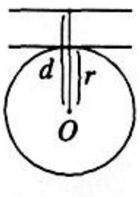
а) За секои две точки $A \in M$ и $B \in N$ важи неравенството $|AB| \geq d(M,N)$

б) За секој $\varepsilon > 0$ постојат точки $A \in M$ и $B \in N$ такви што $|AB| < d(M,N) + \varepsilon$.

Во многу случаи растојанието меѓу две множества M и N се достигнува т.е. постојат точки $A \in M$ и $B \in N$ за кои важи $|AB| = d(M,N)$. Меѓутоа, постојат примери кога последното не важи. На читателот му оставаме самостојно да докаже дека растојанието меѓу правата l_1: $x = 0$ и хиперболата l_2: $xy = 1$ е еднакво на нула, додека пак $|AB| > 0$ за произволни точки $A \in l_1$ и $B \in l_2$.

Да забележиме дека, ако две множества имаат заедничка точка, тогаш растојанието меѓу нив е нула. Горниот пример покажува дека обратното не е точно.

Пример 1. Нека l_1 и l_2 се прави. Ако тие се сечат, тогаш $d(l_1,l_2) = 0$. Ако l_1 и l_2 се паралелни, тогаш растојанието меѓу нив е еднакво на должината на нормалната отсечка чии крајни точки лежат на двете прави.



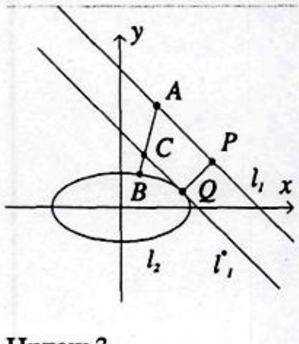
Цртеж 2

Пример 2. Нека l_1 е права, а l_2 е кружница со центар O и радиус r. Со d го означуваме растојанието од точката O до правата l_1. Тогаш растојанието помеѓу овие две криви се пресметува по формулата

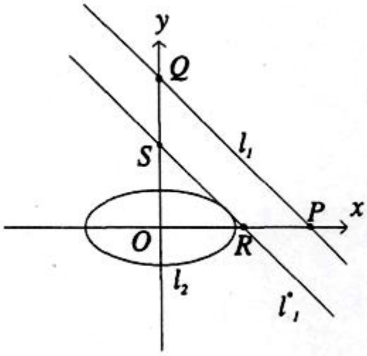
$$d(l_1,l_2) = \begin{cases} 0, ako \ d \leq r \\ d - r, ako \ d > r \end{cases}.$$

3.Растојание меѓу права и елипса.

Ќе ја користиме следната геометриска идеја. Нека l_1 е права, а l_2 е елипса, и l_1 и l_2 не се сечат (во спротивно $d(l_1,l_2) = 0$). Ја транслатираме l_1 додека не ја допре l_2. Добиената права ја означуваме со l_1^* (цртеж 3). Тогаш $d(l_1,l_2) = d(l_1,l_1^*)$. Навистина, нека точките $A \in l_1$ и $B \in l_2$ се произволни. Бидејќи l_1 и l_2 лежат во различни полурамнини во однос на l_1^* јасно е, дека AB ја сече правата l_1^* во некоја точка C. Тогаш $|AB| \geq |AC| \geq d(l_1,l_1^*)$. Од друга страна, нека Q е точката во која l_1^* ја допира l_2, а P е подножјето на нормалата повлечена од Q кон l_1. Од пример 1 имаме $|PQ| = d(l_1,l_1^*)$, па затоа



Цртеж 3



Цртеж 4

$$d(l_1,l_2)=d(l_1,l_1^*).$$

Нека правата l_1 и елипсата l_2 се зададени со равенките

$$l_1:\ \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \text{ и } l_2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a,b>0).$$

Тогаш $|p|=|OP|$ и $|q|=|OQ|$, каде P и Q се пресечните точки на l_1 со координатните оски Ox и Oy, соодветно (цртеж 4). Ќе ја најдеме равенката на правата l_1^* која е паралелна на l_1 и се допира со елипсата l_2. Нека l_1^* има равенка l_1^*: $\frac{x}{r}+\frac{y}{s}=1$ каде R и S се пресечните точки на l_1^* со Ox и Oy. Бидејќи $l_1 \| l_1^*$ добиваме $\frac{r}{s}=\frac{p}{q}$. Од друга страна l_1^* и l_2 имаат точно една заедничка точка, т.е. системот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x}{r}+\frac{y}{s}=1$ треба да има точно едно решение. Ако го изразиме y од првата равенка и го замениме во втората, добиваме квадратна равенка по x, која треба да има точно еден корен, т.е. нејзината дискриминанта треба да е еднаква на нула. Од овде добиваме $a^2s^2+b^2r^2=s^2r^2$ и како $\frac{r}{s}=\frac{p}{q}$ ги добиваме следните формули за r и s:

$$r=\frac{\sqrt{p^2b^2+q^2a^2}}{q},\ \ s=\frac{\sqrt{p^2b^2+q^2a^2}}{p}$$

Бидејќи растојанието меѓу правите l_1 и l_1^* е еднакво на разликата меѓу височините на ΔPQR и ΔROS, од претходните разгледувања ја добиваме следната формула за растојание меѓу правата l_1: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ и елипсата l_2: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a,b>0)$:

(1) $$d(l_1,l_2)=\frac{|pq|-\sqrt{a^2q^2+b^2p^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

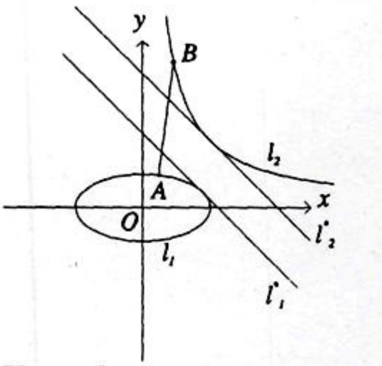
Да забележиме дека горната формула важи ако и само ако броителот на десната страна е позитивен. Во спротивен случај l_1 и l_2 се сечат (докажете!) и $d(l_1,l_2)=0$.

Во следниот пример ќе покажеме како добиената формула може да се искористи за докажување на неравенства.

Пример 3. Нека a,b,c,d се реални броеви, такви што $3a+4b=12$ и $81c^2+256d^2=144$. Да се докаже дека $(a-c)^2+(b-d)^2>1{,}6$

Решение. Разгледуваме права l_1: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ и елипса l_2: $\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$.

Од условот на задачата следува дека точките $A(a,b)$ и $B(c,d)$ лежат соодветно на l_1 и l_2 т.е. $(a-c)^2+(b-d)^2=|AB|^2\geq d(l_1,l_2)^2$. Од друга страна од (1) добиваме дека $d(l_1,l_2)=\frac{7}{5}$, со што неравенствот е докажано.



Цртеж 5

4. Оценка за растојание меѓу елипса и хипербола.

Нека l_1 и l_2 се елипса и хипербола, зададени со равенките l_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, и l_2: $xy=c^2$; $a,b,c>0$. Ќе претпоставиме дека l_1 и l_2 не се сечат. Нека l_2^* е произволна тангента на l_2, која не ја сечи l_1. Неравенството $d(l_1,l_2)\geq d(l_1,l_2^*)$ е скоро очигледно (цртеж 5), но ние ќе го докажеме строго, ако ја искористиме дефиницијата за растојание меѓу множества. Нека l_1^* е тангента на l_1, паралелна со l_2^*. Како што знаеме $d(l_1,l_2^*)=d(l_1^*,l_2^*)$ т.е. треба да докажеме дека $d(l_1,l_2)\geq d(l_1^*,l_2^*)$. Навистина, во спротивно важи $\varepsilon=d(l_1^*,l_2^*)-d(l_1,l_2)>0$, па според тоа постојат точки $A\in l_1$ и $B\in l_2$ за кои

$$|AB|<d(l_1,l_2)+\varepsilon=d(l_1^*,l_2^*).$$

Но тоа не е можно бидејќи отсечката AB ги сече правите l_1^* и l_2^* (цртеж 5). Добиената противречност покажува дека $d(l_1,l_2)\geq d(l_1,l_2^*)$.

Нека правата l_2^* ја допира хиперболата l_2 во точката (x_o,y_o). Размислувајќи како и во претходната точка добиваме дека таа има равенка l_2^*: $\frac{x}{2x_o}+\frac{y}{2y_o}=1$. Тогаш од горното неравенство и од формулата (1) добиваме

(2) $$d\left(l_1,l_2\right) \geq \frac{2c^2-\sqrt{x_o^2b^2+y_o^2a^2}}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}}$$

каде x_o и y_o се произволни броеви за кои важи $x_oy_o=c^2$.

Од овде при $x_o=c\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $y_o=c\sqrt{\frac{b}{a}}$ ја добиваме следната оценка за растојание меѓу l_1 и l_2:

(3) $$d\left(l_1,l_2\right) \geq \frac{2c\sqrt{ab}-ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последното неравенство ни овозможува да го решиме чудовиштето. За таа цел неопходно е да ја разгледаме елипсата l_1: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и хиперболата l_2: $xy=4$, т.е. во (3) да замениме $a=2, b=1$ и $c=2$. На читателот му оставаме да докаже дека во тој случај неравенството (3) е строго.

Иако ја решивме задачата поставена во почетокот на статијата, добиената оценка (2) за растојание меѓу елипса и хипербола не е задоволителна бидејќи нејзината примена е сврзана со наоѓање на максимална вредност на доста сложена функција во десната страна на (2). Затоа ќе се вратиме на споменатиот алгебарски метод, кој прашањето за наоѓање на растојание меѓу елипса и хипербола го сведува на решавање на определен вид на равенка.

5. Формула за растојание меѓу елипса и хипербола

Идејата за наоѓање на таква формула се содржи во следното брзо решение на чудовиштето. Важи следното равенство:

$$(a-c)^2+(b-d)^2=\left(a\sqrt{\frac{3}{2}}-c\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(b\sqrt{3}-d\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(c-d\sqrt{2}\right)^2+\frac{2cd\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}\left(a^2+4b^2\right).$$

Бидејќи првите собироци во десната страна се ненегативни и $a^2+4b^2=4$, $cd=4$, следува дека $(a-c)^2+(b-d)^2 \geq \frac{8\sqrt{2}}{3}-2>1{,}6$, со што добиваме посилна оценка од бараната.

Ќе ја докажеме следната теорема.

ТЕОРЕМА. Нека l_1 и l_2 се елипса и хипербола со равенки l_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, l_2: $xy=c^2$; $a,b,c>0$. Растојанието $d\left(l_1,l_2\right)$ меѓу овие две криви се пресметува на следниот начин:

а) Ако $ab \geq 2c^2$, тогаш $d(l_1,l_2)=0$

б) Ако $ab < 2c^2$, тогаш $d(l_1,l_2)=\sqrt{\frac{2k_oc^2}{\sqrt{(k_o+a^2)(k_o+b^2)}}-k_o}$, каде k_o е

единствениот позитивен корен на равенката

(4) $$\frac{c^2a^2}{k+a^2}+\frac{c^2b^2}{k+b^2}-=\sqrt{(k+a^2)(k+b^2)}$$

За да ја докажеме теоремата потребни ни се неколку помошни резултати. Читателите кои не се восхитуваат на технички детали или не се запознаени со поимот извод на функција, може да го пропуштат крајот на оваа точка.

Нека $f(k)$ е функцијата, зададена со $f(k)=\frac{2c^2k}{\sqrt{(k+a^2)(k+b^2)}}-k$ и

дефинирана во интервалот $\left(-\min\{a^2,b^2\},+\infty\right)$. Како што е вообичаено со $f'(k)$ и $f''(k)$ ќе ги означуваме нејзиниот прв и втор извод.

ЛЕМА 1. Изводот $f'(k)$ е строго опаѓачка функција.

Доказ. Тврдењето на лемата следува од

(5) $$f'(k)=\left(\frac{c^2a^2}{k+a^2}+\frac{c^2b^2}{k+b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(k+a^2)(k+b^2)}}-1$$

што се добива со непосредни пресметувања на првиот извод на $f(k)$.

ЛЕМА 2. Ако $ab < 2c^2$, тогаш равенката (4) има единствен позитивен корен.

Доказ. Од (5) следува дека равенката (4) е еквивалентна на равенката $f'(k)=0$, т.е. треба да покажеме дека последната равенка има единствен позитивен корен. За таа цел ќе ја користиме теоремата на Болцано, која гласи: Ако $F(x)$ е непрекината функција во затворениот интервал $[a,b]$ и $F(a)\cdot F(b)<0$, тогаш постои точка $c\in(a,b)$, таква што $F(c)=0$.

Од (5) добиваме дека $f'(0)=\frac{2c^2}{ab}-1>0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k)=-1$. Бидејќи $f'(k)$ е непрекината функција , постои k_1 таков што $f'(k_1)<0$. Сега од теоремата на Болцано следува дека равенката $f'(k)$ има позитивен корен. Овој корен е единствен, бидејќи според лема 1 имаме дека $f'(k)$ е строго опаѓачка функција во интервалот $[0,+\infty)$.

Во следната лема ќе покажеме, дека растојанието меѓу точките од l_1 и l_2 може да се оцени со помош на претходно воведената функција $f(k)$.

ЛЕМА 3. За произволни точки $A \in l_1, B \in l_2$ и секој позитивен број k важи неравенството $|AB|^2 \geq f(k)$. Равенство се достигнува кога $k = k_o$ е позитивен корен на равенката (4), а A и B, соодветно, имаат координати

$$\left(\frac{\pm ca^2}{k_o+b^2}\sqrt[4]{\frac{k_o+a^2}{k_o+b^2}}, \frac{\pm cb^2}{k_o+b^2}\sqrt[4]{\frac{k_o+b^2}{k_o+a^2}}\right) \text{ и } \left(\pm c\sqrt[4]{\frac{k_o+a^2}{k_o+b^2}}, \pm c\sqrt[4]{\frac{k_o+b^2}{k_o+a^2}}\right)$$

Доказ. Нека $A \in l_1, B \in l_2$ имаат координати $(x,y);(z,t)$, соодветно. Тогаш

$$|AB|^2 = (x-z)^2 + (y-t)^2 = \left(x\sqrt{\frac{k+a^2}{a^2}} - z\sqrt{\frac{a^2}{k+a^2}}\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{k+b^2}{b^2}} - t\sqrt{\frac{b^2}{k+b^2}}\right)^2 +$$

$$+\left(z\sqrt{\frac{k}{k+a^2}} - t\sqrt{\frac{k}{k+b^2}}\right)^2 + \frac{2kzt}{\sqrt{(k+a^2)(k+b^2)}} - k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Бидејќи првите три собироци на десната страна се ненегативни и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ zt = c^2$, добиваме $|AB|^2 \geq f(k)$.

Вториот дел од лемата следува од претходните неравенства.

На крај ќе дадеме еден едноставен потребен и доволен услов за да елипсата и хиперболата се сечат.

ЛЕМА 4. Елипсата l_1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и хиперболата l_2: $xy = c^2$ имаат заедничка точка ако и само ако $ab \geq 2c^2$.

Доказ. Непосредно следува од фактот, дека системот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $xy = c^2$ има реално решение ако и само ако $ab \geq 2c^2$.

Конечно можеме да презентираме

ДОКАЗ НА ТЕОРЕМАТА. Ако $ab \geq 2c^2$, тогаш согласно лема 4 елипсата l_1 и хиперболата l_2 имаат заедничка точка и затоа $d(l_1, l_2) = 0$.

Сега да претпоставиме дека $ab < 2c^2$. Треба да докажеме дека $[d(l_1,l_2)]^2 = f(k_o)$. Од лема 1 следува дека $f'(k)$ е опаѓачка функција, т.е. $f''(k) < 0$ при $k \geq 0$. Бидејќи равенката $f'(k) = 0$ има единствен позитивен корен k_o, (следува од доказот на лема 2), добиваме дека максималната вредност на функцијата $f(k)$ во интервалот $[0,+\infty)$ се достигнува во точката k_o. Во случајот $f(k_o) \geq f(0) = 0$. Нека $A \in l_1, B \in l_2$ се произволни точки. Од лема 3 заклучуваме дека $|AB|^2 \geq f(k_o)$, но постојат точки $A_o \in l_1, B_o \in l_2$ за кои $|A_oB_o|^2 = f(k_o)$, бидејќи k_o е позитивно решение на равенката (1). Од дефиницијата на растојание меѓу множества следува $\left[d(l_1,l_2)\right]^2 = f(k_o)$ со што теоремата е докажана.

6. Наместо заклучок.

Докажаната теорема го сведува прашањето на наоѓање растојание меѓу елипса и хипербола на прашањето за наоѓање на позитивен корен на равенката (4). Во општ случај точното наоѓање на тој корен е тешка задача , но за сметка на тоа постојат едноставни методи за негово приближно пресметување. Со други зборови, растојанието меѓу елипсата и хиперболата може да се пресмета со произволно зададена точност. Ова ќе го илустрираме на примерот l_1: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; l_2: $xy=4$ од почетната задача. Во овој случај равенката (4) има облик $\frac{4}{k+1}+\frac{16}{k+4}=\sqrt{(k+1)(k+4)}$. Со точност до десетто децимално место нејзин позитивен корен k_o и растојанието $d(l_1,l_2)$ меѓу l_1 и l_2 се k_o=1,8774302035... и $d(l_1,l_2)$=1,3322146346... , и овие пресметки ги направи Емил Келеведџиев. Точните вредности на k_o и $d(l_1,l_2)$ на авторите не им се познати. Можда читателот ќе ги најде.

На крајот ви презентираме неколку задачи за самостојна работа:

1. Нека $M=\{A_1,A_2,...,A_m\}$ и $N=\{B_1,B_2,...,B_n\}$ се конечни множества во рамнината. Докажете дека $d(M,N)=\min\limits_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}|A_iB_j|$.

2. Нека $M=\{(x,y)\,/\,|x|+|y|=1\}$ е множество точки во рамнината.

а) Претставете го M во рамнината.

б) Најдете го растојанието меѓу M и правата l: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

3. Нека a,b,c и d се реални броеви, за кои $|a|+|b|=1$ и $3c+2d=6$. Да се докаже дека $(a-c)^2+(b-d)^2\ge\frac{4}{13}$.

4. Нека a,b,c и d се реални броеви, за кои $4a^2+3b^2=12$ и $2c+3d=12$. Докажете дека $(a-c)^2+(b-d)^2\ge\frac{32}{13}\left(6-\sqrt{3}\right)$.

5. Нека a,b,c и d се реални броеви, за кои $16a^2+b^2=16$ и $cd=10$. Да се докаже дека $(a-c)^2+(b-d)^2\ge 4$. Кога се достигнува равенство?

6. Нека a,b,c се позитивни броеви за кои $c^2=(a+b)\sqrt{ab}$. Докажете дека растојанието меѓу елипсата l_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и хиперболата l_2: $xy=c^2$ е еднакво на $\sqrt{ab}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија